

UNA INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS DE RAMSEY

EINAR YOBANY ORDOÑEZ YELA

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2019

UNA INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS DE RAMSEY

EINAR YOBANY ORDOÑEZ YELA

**Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

Asesor

Wilson Fernando Mutis Cantero

Ph. D en Matemáticas

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA**

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

SAN JUAN DE PASTO

2019

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^o del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Wilson Fernando Mutis Cantero, Ph. D.

Director de Tesis

Fernando Andres Benavides Agredo, Ph. D.

Jurado

John Hermes Castillo Gomez, Ph. D.

Jurado

San Juan de Pasto, 30 de Octubre de 2019

Este trabajo está dedicado a:

Mis padres, Felipe Ordoñez y Nieves Yela, por su apoyo incondicional.

Mis hermanos Yeison, Diana y James, por llenarme de alegría día tras día.

*A mi novia Janeth Benavides, por estar siempre conmigo apoyandome
y especialmente en memoria de mi abuelo Segundo Ordoñez y mi hijo Samuel*

Ordoñez, mi pilar para seguir adelante.

Yobany.

AGRADECIMIENTOS

Es ineluctable agradecer a todas las personas que inspiraron el desarrollo de este trabajo de grado.

En primer lugar agradezco a Dios por brindarme fortaleza en todo momento.

A mi familia por su confianza y apoyo incondicional en estos arduos y satisfactorios caminos de estudio.

Al grupo de docentes del departamento de Matemáticas por sus sugerencias y formación matemática recibida.

Finalmente, a mi asesor Dr. Wilson Fernando Mutis, por su dedicación, orientación y sugerencias en el desarrollo de este trabajo de grado.

RESUMEN

En este trabajo se realiza una monografía sobre una teoría relativamente nueva y activa de las matemáticas, denominada teoría de Ramsey, esta teoría se describe sobre una combinación de teoría de conjuntos y combinatoria, además se centra en la aparición de orden en una subestructura dada una estructura de un tamaño específico. El documento explora la teoría de Ramsey en el ámbito de la teoría de grafos y se centra en una rama denominada “**Números de Ramsey**”, en este sentido, se proporciona la prueba del teorema principal de Ramsey y de 6 de los 9 números exactos de Ramsey. Adicionalmente, una implementación en SAGEMATH para determinar los números de Ramsey en un intento por crear un aspecto accesible y fácil de entender este tema.

Palabras clave: *Grafos, 2-coloración, números de Ramsey, Teoría de Ramsey, Principio de Dirichlet, SAGEMATH, Monocromático, Implementación.*

ABSTRACT

In this work a monograph is made on a new and active theory of the mathematics, called Ramsey's theory, this theory is described about a combination of sets theory and combinatorics, in addition, this theory focuses on the appearance of order in a substructure given a structure of a specific size. The document explores Ramsey's theory in the field of the graph theory and focuses on a branch called "**Ramsey Numbers**", in this sense, the proof of the main theorem is provided and of 6 of the 9 exact numbers of Ramsey, additionally, a implementation in SAGEMATH for determine Ramsey numbers in an attempt to create an accessible and easy-to-understand aspect of this subject.

Keywords: *Graph, 2-coloration, Ramsey Theory, upper bound , Ramsey numbers, Dirichlet's principle, SAGEMATH, Monocromatic, Implementation.*

LISTA DE FIGURAS

1.1. Representación gráfica de G . Fuente [22].	13
1.2. Ejemplos de grafos completos. Fuente [23].	14
1.3. Ejemplo de cliques. Fuente [22].	15
1.4. Un grafo G y su complemento \overline{G} . Fuente [22].	15
1.5. H_1 y H_2 son subgrafos de G . Fuente [23].	16
2.1. Formación de un subgrafo K_3 monocromático azul. Modificado de [10] .	28
2.2. Ejemplo de una 2-coloración de K_5 . Modificado de [10]	29
2.3. (a) 2-coloración de K_8 . (b) K_8 azul y (c) K_8 rojo para una inspección más cercana. Modificado de [10].	29
2.4. Representación gráfica de $N_r(i)$ y $N_a(i)$. Modificado de [10].	30
2.5. (a) 2-coloración de K_{13} . (b) K_{13} azul y (c) K_{13} rojo para una inspección más cercana. Modificado de [10].	31
2.6. Representación gráfica de $N_r(v)$. Modificado de [10]	31
2.7. 2-coloración de K_{17} . (a) K_{17} azul y (b) K_{17} rojo para una inspección más cercana. Modificado de [10].	33
2.8. Representación de las aristas rojas de G . Modificado de [3].	39
2.9. Configuraciones C_i . Fuente [9]	55
2.10. Representación gráfica de $H_2(p)$ para los dos casos. Fuente [9]	57
3.1. Representación binaria de todas las 2-coloraciones de K_3 . Fuente [2]. .	64
3.2. Representación gráfica, binaria y matriz de coloración del grafo K_3 . Fuente [2].	65

LISTA DE SÍMBOLOS

$ S $	—	Cardinal de un conjunto S .
$P(S)$	—	Potencia de un conjunto S .
$P_r(S)$	—	Clase de subconjuntos de S de cardinal r .
χ	—	2-coloración de un grafo G .
$N_r(v)$	—	Vecindario rojo abierto de un vértice v .
$N_a(v)$	—	Vecindario azul abierto de un vértice v .
$d_r(v)$	—	grado rojo de un vértice v .
$d_a(v)$	—	grado azul de un vértice v .
$C(G)$	—	Máximo clique de un grafo G .
$N_r(H, v)$	—	$N_r(H, v) = \{u \in V(H) : \chi(\{u, v\}) = \text{rojo}\}$.
$I(G)$	—	Máximo conjunto independiente de G .
\mathcal{Q}_p	—	Conjunto de residuos cuadráticos módulo p .
\mathcal{C}_p	—	Conjunto de residuos cúbicos módulo p .
$R(p, q)$	—	Mínimo entero que cumple la propiedad de números de Ramsey.
G_j	—	Conjunto de subgrafos conexos de H_2 con j aristas rojas.
$r_i(j)$	—	número de subgrafos A en G_j tal que $\sum_{u \in V(A)} N_r(H_1, u) = i$.

TABLA DE CONTENIDO

Introducción	12
1. Preliminares	13
1.1. Elementos y características de los grafos	13
1.2. Grafos Especiales	14
1.3. k -coloración y principio de Dirichlet	16
1.4. Grafos y 2-coloraciones	17
1.5. Teoría de números	19
2. Números de Ramsey	21
2.1. Teoría de Ramsey	22
2.2. Números de Ramsey para 2-coloraciones de grafos	25
2.3. Valores exactos para algunos números de Ramsey	28
2.3.1. Número de Ramsey $R(3, 3)$	28
2.3.2. Número de Ramsey $R(3, 4)$	29
2.3.3. Número de Ramsey $R(3, 5)$	30
2.3.4. Número de Ramsey $R(4, 4)$	32
2.3.5. Número de Ramsey $R(3, 6)$	34
2.3.6. Número de Ramsey $R(3, 7)$	40
3. Una implementación de los números de Ramsey en SAGEMATH	63
3.1. Representación de las coloraciones en un grafo completo	63
3.2. Matrices de coloración	64
3.3. Buscando triángulos rojos	66
3.4. Buscando subgrafos monocromáticos	66
Conclusiones	69
Apéndices	70
Bibliografía	79

INTRODUCCIÓN

"El desorden completo es imposible".

Theodore S. Motzkin

Este trabajo de grado se enmarca dentro de una rama de las matemáticas denominada Teoría de Ramsey, aunque no existe una definición universal para esta, se pueden dar dos definiciones generales que permiten proporcionar un mejor panorama sobre lo que tratará este documento. La primera definición radica en la frase de Theodore S. Motzkin, que enuncia que la teoría de Ramsey se basa en un orden final en medio de un caos aparente, sin embargo, una definición más adecuada para este documento es que la teoría de Ramsey se basa en la idea de que "cualquier estructura necesariamente contienen una subestructura ordenada"(Libro de Graham y Butler [8]), es decir, la teoría de Ramsey es un campo de la matemática el cual enfatiza el orden en cosas tales como secuencias, grupos o grafos, este último es el más adecuado para lo que se quiere enfocar este documento es decir, grafos de un cierto orden que garantizan la existencia de subgrafos de otro orden menor.

Esta teoría lleva el nombre de Frank P. Ramsey, quien demostró su primer resultado en 1930, sin embargo, la mayoría de contribuciones provienen de Paul Erdős. En la actualidad esta teoría cuenta con muchas variaciones y se ha convertido en una área interesante para investigación, esto debido a que es una teoría que requiere poco conocimiento matemático para plantear preguntas elegantes, pero involucra una amplia variedad de técnicas para encontrar respuestas a estas preguntas.

Actualmente matemáticos como Exoo, Radziszowski, Graham o Soifer, entre otros, se encuentran trabajando en los números de Ramsey y uno de los problemas abiertos es encontrar el valor exacto de $R(3, 10)$, acotado inferiormente por 40 y superiormente por 42 hasta la fecha. Estos números poseen una variedad de aplicaciones, en campos como teoría de la comunicación, diseño de redes, recuperación de la información o teoría de decisiones. A pesar de que en esta tesis no se trabajó en aplicaciones, se deja un libro y un artículo de referencia para abarcar este tema. [19] y [20].

El documento se divide en tres capítulos; en el primer capítulo se dan a conocer las definiciones necesarias sobre teoría de números, teoría de grafos y coloraciones para abordar la teoría de Ramsey, además, algunas definiciones adicionales usadas en este trabajo de grado para facilitar las pruebas de los números de Ramsey. Para el segundo capítulo se presentan varias pruebas para el teorema de Ramsey hasta llegar al teorema de Ramsey para grafos y 2-coloraciones y con esto se presentan las pruebas detalladas para 6 de los 9 números exactos de Ramsey conocidos hasta la fecha, y finalmente, para el tercer capítulo se muestra una implementación es SAGEMATH basado en el trabajo de Barton 2016 [2].

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo, se presentan las definiciones y resultados básicos que permitirán el desarrollo de este trabajo de grado, los cuales están enmarcados dentro de la teoría de números, la teoría de grafos y la combinatoria. Para familiarizarse un poco más con esta teoría y sus resultados, se recomienda al lector consultar los libros [12],[13],[22] y [23].

1.1 Elementos y características de los grafos

Definición 1.1. (Grafo). Un grafo es un par $G = (V(G), E(G))$ donde $V(G)$ es un conjunto finito no vacío y $E(G) \subseteq P_2(V(G))$. Los elementos de $V(G)$ se denominan vértices del grafo y los elementos de $E(G)$ aristas del grafo.

Ejemplo 1.2. Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo, donde $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y

$$E(G) = \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{b, g\}, \{c, f\}, \{d, f\}, \{d, g\}, \{g, h\}\}.$$

En la Figura 1.1 se presenta gráficamente al grafo G . Note que se representa cada vértice mediante un pequeño círculo y cada arista por una curva que une los vértices de la arista.

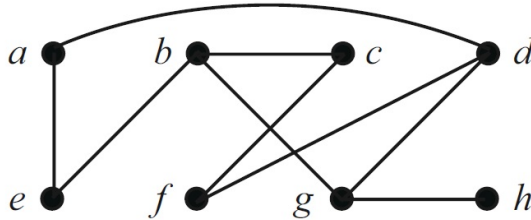


Figura 1.1: Representación gráfica de G . Fuente [22].

Definición 1.3. (Orden y tamaño de un grafo). En un grafo $G = (V(G), E(G))$, el cardinal del conjunto $V(G)$ se denomina orden de G y el tamaño de G es el cardinal del conjunto $E(G)$.

Ejemplo 1.4. El grafo $G = (V(G), E(G))$ del Ejemplo 1.2, tiene orden 8 y tamaño 9.

Definición 1.5. (Grado de un vértice). Dado un vértice $v \in V(G)$ de un grafo $G = (V(G), E(G))$, el grado de v en G , denotado por $d(v)$, es el número de vértices w tal que $\{v, w\}$ es una arista de $E(G)$. El grado máximo del grafo G , denotado por $\Delta(G)$, se define

$$\Delta(G) = \text{máx}\{d(v) \mid v \in V(G)\},$$

similarmente, el grado mínimo del grafo G , denotado por $\delta(G)$ se define

$$\delta(G) = \text{mín}\{d(v) \mid v \in V(G)\}.$$

Ejemplo 1.6. Sea G el grafo del Ejemplo 1.2, se tiene que $d(a) = 2$. Además $\Delta(G) = 3$ y $\delta(G) = 1$.

Definición 1.7. (Vértice adyacente). Sea v un vértice de un grafo G . Un vértice w se dice que es adyacente a v si $\{v, w\}$ es una arista de $E(G)$.

Definición 1.8. (Vecindario de un vértice). El vecindario abierto de un vértice v en un grafo G es el conjunto $N(v)$ que consiste de todos los vértices adyacentes a v en G . El vecindario cerrado de v en G es el conjunto $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Un vértice v es universal cuando $N(v) = V(G) - \{v\}$ y un vértice v es aislado cuando $N(v) = \emptyset$.

Ejemplo 1.9. Para el Ejemplo 1.2, el vecindario abierto de $a \in V(G)$ es $N(a) = \{d, e\}$ y el vecindario cerrado $N[a] = \{a, d, e\}$. El grafo no tiene vértices universales ni vértices aislados.

Definición 1.10. (Conjunto independiente). Sea G un grafo. Un subconjunto I de $V(G)$ se denomina independiente si para todo $\{u, w\} \subseteq I$ se tiene $\{u, w\} \notin E(G)$. El cardinal del mayor conjunto independiente de G se denota $I(G)$.

Ejemplo 1.11. En el Ejemplo 1.2, el conjunto $I = \{a, f, g\}$ es independiente. Además, $I(G) = 4$.

1.2 Grafos Especiales

Definición 1.12. (Grafo completo) Un grafo G es completo si contiene todas las aristas posibles, es decir, en un grafo completo todo vértice es adyacente a los otros vértices. Un grafo completo de orden $n > 0$ se denota por K_n .

A continuación se presentan las gráficas de los grafos completos K_2, K_3 y K_5 .

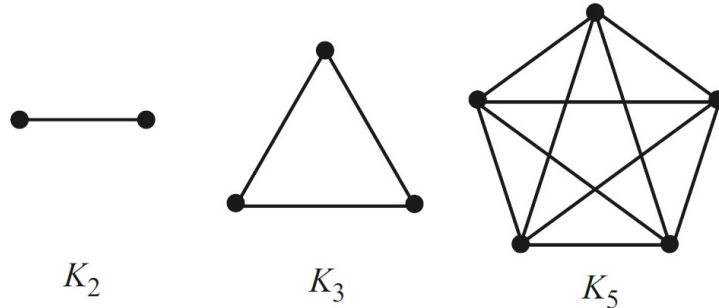


Figura 1.2: Ejemplos de grafos completos. Fuente [23].

Observación. Para todo vértice v del grafo completo K_n , se tiene

$$d(v) = \Delta(K_n) = \delta(K_n) = n - 1.$$

Definición 1.13. (Clique). Sea G un grafo. Un subconjunto $C \subseteq V(G)$ es un clique de G si para todo subconjunto $\{v, w\}$ de C se cumple que $\{v, w\} \in E(G)$. El tamaño del clique es el número de vértices que tiene. Además, $C(G)$ es el cardinal del mayor clique de G .

Ejemplo 1.14. Los conjuntos $C_1 = \{a, g, f\}$ y $C_2 = \{b, c, d, e\}$ son cliques del grafo G dado en la Figura 1.3. Además, $C(G) = 4$.

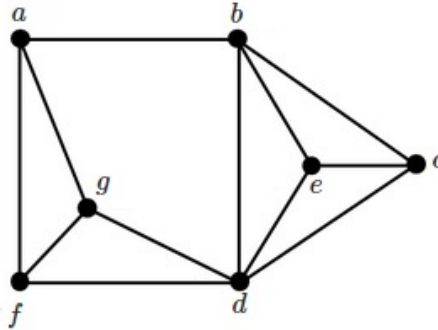


Figura 1.3: Ejemplo de cliques. Fuente [22].

Definición 1.15. (Complemento de un grafo). Sea $G = (V(G), E(G))$ un grafo de orden n . El complemento de G , es el grafo $\overline{G} = (V(G), \overline{E(G)})$, donde $\overline{E(G)}$ es el conjunto de aristas del grafo completo K_n que no están en $E(G)$.

Ejemplo 1.16. En la Figura 1.4 se presentan un grafo G y su complemento \overline{G} . Observe que,

$$E(G) = \{\{a, c\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{c, f\}, \{b, f\}, \{e, d\}, \{d, f\}\} \text{ y}$$

$$\overline{E(G)} = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{a, e\}, \{a, f\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{f, e\}\}.$$

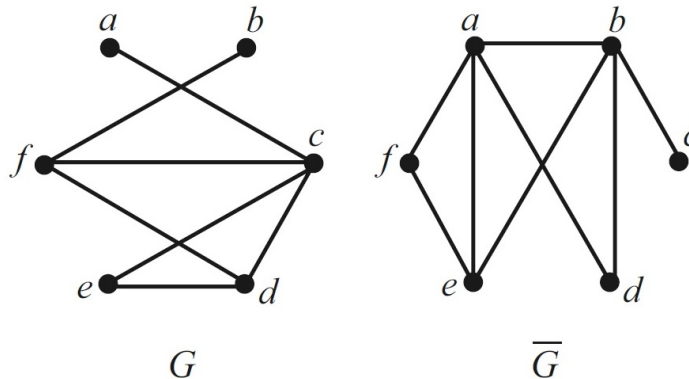


Figura 1.4: Un grafo G y su complemento \overline{G} . Fuente [22].

Definición 1.17. (k -regular). Sea $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, un grafo G es k -regular, si cada vértice de G tiene grado k . En particular, para $n > 1$, el grafo K_n es $(n - 1)$ -regular.

Definición 1.18. (Subgrafo). Un grafo H es un subgrafo de un grafo G si

$$V(H) \subseteq V(G) \text{ y } E(H) \subseteq E(G).$$

Ejemplo 1.19. En la Figura 1.5, H_1 y H_2 son subgrafos de G , pero H_3 no lo es.

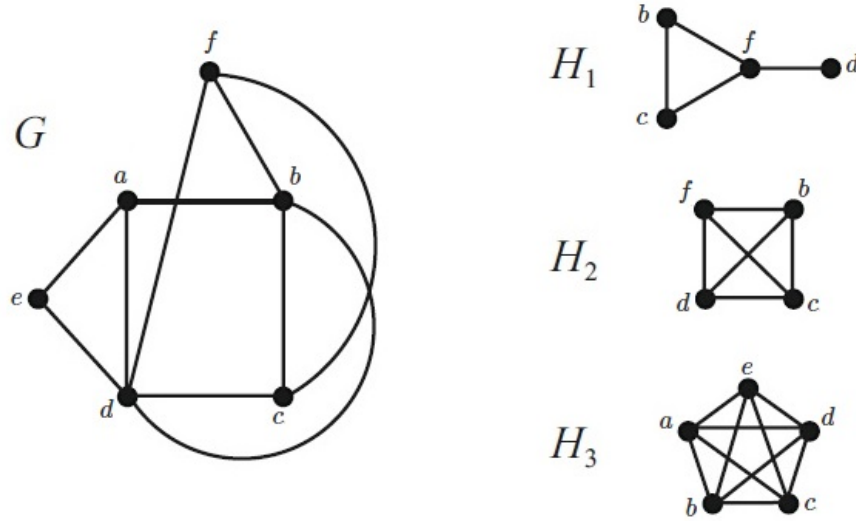


Figura 1.5: H_1 y H_2 son subgrafos de G . Fuente [23].

1.3 k -coloración y principio de Dirichlet

Definición 1.20. (k -coloración de $P_r(S)$). Sean $C = \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de k colores, S un conjunto finito y $r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Una k -coloración de $P_r(S)$ es una función $\chi : P_r(S) \rightarrow C$. Para $A \subseteq S$, con $|A| \geq r$, se dice que $P_r(A)$ es monocromático de color i si y solo si $P_r(A) \subseteq \chi^{-1}(i)$.

Una k -coloración de $P_r(S)$ puede interpretarse como una partición¹ $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$, donde cada conjunto C_i está definido como $C_i = \chi^{-1}(i)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Los conjuntos C_i se denominan clases de coloración. Una k -coloración está completamente determinada conociendo sus k clases de coloración C_1, C_2, \dots, C_k . Por este motivo es común referirse a una k -coloración mediante sus clases de coloración. Observe que $P_r(A)$ es monocromático de color i si $P_r(A) \subseteq C_i$.

Definición 1.21. (k -coloración de G). Sea $C = \{1, 2, \dots, k\}$ un conjunto de k colores y G un grafo. Una k -coloración de G es una función $\chi : E(G) \rightarrow C$, que asigna a cada arista en $E(G)$ un color en C .

¹Estrictamente no se trata de una partición en el sentido usual, pues se permite que alguna clase C_i sea vacía.

Similarmente a la k -coloración de $P_r(S)$, una k -coloración de G puede interpretarse como una partición $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ del conjunto de aristas $E(G)$, donde $C_i = \chi^{-1}(i)$, para $i = 1, 2, 3, \dots, k$.

Teorema 1.22. (Principio de Dirichlet). Sean $p, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si se distribuyen $np + 1$ objetos en n cajas, entonces alguna de las cajas debe contener al menos $p + 1$ objetos.

Demostración. Suponga lo contrario, es decir, todas las cajas tienen a los más p objetos. Sea p_i el número de objetos que hay en la i -ésima caja, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces el número total de objetos satisface la desigualdad

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n \leq np < np + 1.$$

■

Teorema 1.23. (Forma general de Principio de Dirichlet). Sean q_1, q_2, \dots, q_n enteros positivos. Si $q_1 + q_2 + \dots + q_n - n + 1$ objetos son distribuidos en n cajas, entonces la primera caja contiene al menos q_1 objetos, o la segunda caja contiene al menos q_2 objetos, ..., o la n -ésima caja contiene al menos q_n objetos.

Demostración. Suponga lo contrario, es decir, si p_i denota el número de objetos que hay en la i -ésima caja, $i = 1, 2, \dots, n$, entonces $p_i \leq q_i - 1$, luego el número total de objetos satisface

$$\sum_{i=1}^n p_i \leq \sum_{i=1}^n (q_i - 1) = \sum_{i=1}^n q_i - n < \sum_{i=1}^n q_i - n + 1.$$

■

1.4 Grafos y 2-coloraciones

El cálculo de los números de Ramsey que se conocen hasta el momento ha sido posible definiendo una adecuada 2-coloración de grafos completos. Para entender esta técnica es necesario dar algunas definiciones adicionales de la teoría de grafos usando 2-coloraciones. En lo que sigue, χ denota una 2-coloración del grafo completo K_n con conjunto de colores $C = \{\text{rojo}, \text{azul}\}$.

Definición 1.24. (Vértices adyacentes para 2-coloraciones). Dos vértices u, v del grafo K_n son rojo-adyacentes con respecto a χ si $\chi(\{u, v\}) = \text{rojo}$ y azul-adyacentes si $\chi(\{u, v\}) = \text{azul}$.

Definición 1.25. (Vecindario rojo y azul de un vértice). Para un vértice v de K_n , se define el vecindario abierto rojo como el conjunto $N_r(v)$ que contiene todos los vértices w rojo-adyacentes a v . Similarmente, se define vecindario abierto azul como el conjunto $N_a(v)$ que consiste de todos los vértices w azul-adyacentes a v . Así mismo, se define vecindario cerrado rojo de v como $N_r[v] = N_r(v) \cup \{v\}$ y vecindario cerrado azul de v como $N_a[v] = N_a(v) \cup \{v\}$.

Definición 1.26. (Grado rojo y azul de un vértice). Sea v un vértice de K_n , el grado-rojo de v denotado como $d_r(v)$ se define como $d_r(v) = |N_r(v)|$. Similarmente, el grado-azul de v se define $d_a(v) = |N_a(v)|$.

El grado-rojo máximo de G denotado por $\Delta_r(G)$ y el grado-rojo mínimo denotado por $\delta_r(G)$ se definen como $\Delta_r(G) = \max\{d_r(v) : v \in V\}$ y $\delta_r(G) = \min\{d_r(v) : v \in V\}$ respectivamente. Similarmente, se definen el grado-azul máximo $\Delta_a(G)$ y el grado-azul mínimo $\delta_a(G)$ como $\Delta_a(G) = \max\{d_a(v) : v \in V\}$ y $\delta_a(G) = \min\{d_a(v) : v \in V\}$.

Definición 1.27. Sean H un clique de K_n y $v \in (V(G) - V(K_n))$. Con $N_r(H, v)$ se denota el conjunto de vértices $u \in V(H)$ tal que $\chi(\{u, v\}) = \text{rojo}$, es decir

$$N_r(H, v) = \{u \in V(H) : \chi(\{u, v\}) = \text{rojo}\}.$$

Definición 1.28. Sea $S \subseteq V(K_n)$, si H es un subgrafo de K_n donde $V(H) = S$, se dice que H es generado por el conjunto S .

Definición 1.29. (Conjunto independiente) Sean $S \subseteq V(K_n)$, se dice que S es un conjunto independiente de K_n con respecto a χ si el subgrafo completo generado por S tiene todas sus aristas de color azul. Además, $I_\chi(K_n) = t$ denota el máximo número de vértices tal que K_n contiene un subgrafo K_t monocromático de color azul, es decir el máximo conjunto independiente con respecto a χ .

Definición 1.30. (Vértice aislado) Sea $v \in V(K_n)$. Se dice que v es un vértice aislado si $N_r(v) = \emptyset$, es decir, $d_r(v) = 0$.

Definición 1.31. (Camino rojo y azul) Un camino rojo (azul) es una sucesión de vértices v_1, \dots, v_k , tal que $\chi(\{v_i, v_{i+1}\}) = \text{rojo (azul)}$ para todo $i = 1, \dots, k - 1$. El camino v_1, \dots, v_k es simple si $v_i \neq v_j$, cuando $i \neq j$.

Definición 1.32. (Ciclo rojo y azul) Un ciclo rojo (azul) es un camino rojo (azul) simple v_0, v_1, \dots, v_k tal que $\chi(\{v_0, v_k\}) = \text{rojo (azul)}$. La longitud del ciclo v, v_1, \dots, v_k es $k + 1$, es decir, el número de vértices en el ciclo.

Definición 1.33. (Circunferencia roja y azul) La circunferencia roja (azul) de un grafo es la longitud del ciclo rojo (azul) más corto. Si el grafo no contiene ningún ciclo rojo (azul), se define la circunferencia del grafo como infinito.

Definición 1.34. (Grafo conexo rojo y azul) El grafo K_n se denomina conexo si cualesquier par de vértices distintos v_1, v_2 de K_n se pueden conectar por medio de un camino rojo (azul).

Definición 1.35. (Componente rojo y azul) Un subgrafo H de $V(G)$ es denominado componente rojo (azul) si H es conexo rojo (azul). Además, si un vértice v de K_n está en H , el subgrafo se denomina v -componente rojo (azul) de H .

Definición 1.36. (Ciclo Hamiltoniano rojo y azul) Un ciclo Hamiltoniano rojo (azul) es un ciclo rojo (azul) que pasa una y solo una vez por todos los vértices del grafo.

1.5 Teoría de números

Definición 1.37. Se dice que un entero b es divisible por un entero $a \neq 0$, denotado por $a \mid b$, si existe un entero c tal que $b = ac$. Por $a \nmid b$ se denota que b no es divisible por a .²

Definición 1.38. (Congruencia) Sea n un entero fijo. Dos enteros a y b se dice que son congruentes módulo n , denotado por $a \equiv b \pmod{n}$, si $n \mid a - b$, es decir si existe un entero k tal que $a - b = kn$.

Teorema 1.39. (Propiedades de las congruencias) Si $n > 0$ y a, b, c son enteros arbitrarios, entonces se tienen las siguientes propiedades

- (1) $a \equiv a \pmod{n}$.
- (2) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $b \equiv a \pmod{n}$.
- (3) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $b \equiv c \pmod{n}$, entonces $a \equiv c \pmod{n}$.
- (4) Si $a \equiv b \pmod{n}$ y $c \equiv d \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + d \pmod{n}$ y $ac \equiv bd \pmod{n}$.
- (5) Si $a \equiv b \pmod{n}$, entonces $a + c \equiv b + c \pmod{n}$ y $ac \equiv bc \pmod{n}$.
- (6) Si $ac \equiv bc \pmod{n}$ y $\text{mcd}(n, c) = 1$, entonces $a \equiv b \pmod{n}$.

Definición 1.40. (Residuos cuadráticos) Sean p un primo impar y t un entero tal que $p \nmid t$. Se dice que t es un residuo cuadrático módulo p , si existe un entero x tal que $x^2 \equiv t \pmod{p}$. En caso contrario t es un residuo no cuadrático módulo p . Además, la expresión $\left(\frac{t}{p}\right)$ se denomina símbolo de Legendre y se define

$$\left(\frac{t}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \mid t. \\ 1 & \text{si } t \text{ es un residuo cuadrático.} \\ -1 & \text{si } t \text{ es un residuo no cuadrático.} \end{cases}$$

El símbolo de Legendre satisface las siguientes propiedades

- (i) $\left(\frac{0}{p}\right) = 0$ y $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$.
- (ii) Si $a \equiv b \pmod{p}$, entonces $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.
- (iii) $\left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \left(\frac{b}{p}\right)$.

Teorema 1.41. (Propiedades de residuos cuadráticos) Sea p un primo impar, con $\mathcal{Q}_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ se denotará el conjunto de residuos cuadráticos módulo p y con $\mathcal{N}_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ el conjunto de residuos no cuadráticos módulo p . Se cumplen los siguientes enunciados

²Decir que b es divisible por un entero a , es lo mismo que, b es múltiplo de a o que a divide a b .

- (i) Si $a, b \in \mathcal{Q}_p$, entonces $ab \in \mathcal{Q}_p$.
- (ii) Si $a, b \in \mathcal{N}_p$, entonces $ab \in \mathcal{Q}_p$.
- (iii) Si $a \in \mathcal{Q}_p$ y $b \in \mathcal{N}_p$, entonces $ab \in \mathcal{N}_p$.
- (iv) Si $a \in \mathcal{Q}_p$, entonces $a^{-1} \in \mathcal{Q}_p$ y si $a \in \mathcal{N}_p$, entonces $a^{-1} \in \mathcal{N}_p$.
- (v) $|\mathcal{Q}_p| = \frac{p-1}{2} = |\mathcal{N}_p|$. Además $\mathbb{Z}_p = \{0\} \cup \mathcal{Q}_p \cup \mathcal{N}_p$.

Definición 1.42. (Residuos cúbicos) Sea p un número primo impar y a un entero tal que $p \nmid a$. Se dice que a es un residuo cúbico módulo p , si existe un entero x tal que $x^3 \equiv a \pmod{p}$. En caso contrario se dice que a es un residuo no cúbico módulo p . Con $\mathcal{C}_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ se denotará el conjunto de residuos cúbicos módulo p .

CAPÍTULO 2

NÚMEROS DE RAMSEY

En 1930, Frank Ramsey [18], estudiando un problema de lógica formal, probó un Teorema que en la actualidad se conoce como Teorema de Ramsey. Este Teorema dio origen a la teoría de Ramsey que es un campo de estudio dentro de la combinatoria, el cual tuvo grandes avances gracias los trabajos de Paul Erdős (1913 – 1996).

El Teorema de Ramsey garantiza la existencia de ciertos enteros positivos denominados números de Ramsey. Determinar exactamente estos números no es un proceso fácil, a menudo se requiere de una larga enumeración de todos los casos posibles, por esta razón, es un problema abierto de la teoría de números y la combinatoria. Aunque se conocen pocos valores exactos de estos números, se han hecho grandes avances en encontrar cotas para los números desconocidos.

Los números de Ramsey se pueden aplicar para la solución de diferentes problemas de la matemática, por ejemplo, en el Teorema de la amistad, el cual establece lo siguiente: *En cualquier grupo de seis personas, existen por lo menos tres personas que son mutuamente conocidas o por lo menos tres que son mutuamente desconocidas.* La solución a este problema es consecuencia de la prueba del primer número de Ramsey no trivial.

A continuación se muestra una tabla donde se presentan los números de Ramsey exactos conocidos hasta el momento y algunas cotas. Los valores exactos conocidos aparecen con sus referencias y para las cotas, las cotas inferiores aparecen como entradas superiores y los límites superiores como entradas inferiores.

Tabla 2.1: Valores y cotas para $R(p, q; 2)$, $p \leq 10$, $q \leq 10$

p, q	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6 [10]	9 [10]	14 [10]	18 [3]	23 [9]	28 [16]	36 [11]	40 42
4		18 [10]	25 [17]	36 41	49 61	59 84	73 115	92 149
5			43 48	58 87	80 143	101 216	133 316	149 442
6				102 165	115 298	134 495	183 780	204 1171
7					205 540	217 1031	252 1713	293 2826
8						282 1870	329 3583	343 6090
9							565 6588	581 12677
10								798 23556

Fuente: Small Ramsey Numbers - Radziszowski, 2017.

2.1 Teoría de Ramsey

Teorema 2.1. (Ramsey para 2-coloraciones)

Sea r un entero positivo. Si $p, q \geq r$, entonces existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente: en cualquier 2-coloración $\{C_1, C_2\}$ de $P_r(S)$, existe un subconjunto S_1 de S de cardinal p tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ o bien existe un subconjunto S_2 de S de cardinal q tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$.

El menor entero N_0 que satisface el teorema se llama número de Ramsey y se denota como $R(p, q; r)$.

Demostración. Se probará por inducción sobre p, q y r que el número de Ramsey $R(p, q; r)$ existe. Inicialmente se probará que $R(p, q; 1) = p + q - 1$. En efecto, sea S un conjunto tal que $|S| = p + q - 1$. Tomando las clases de coloración C_1 y C_2 como las cajas en la forma general del principio de Dirichlet (Teorema 1.23) y los subconjuntos de S de cardinal 1 como los objetos se garantiza la existencia de por lo menos p elementos en C_1 o por lo menos q elementos en C_2 . Si $\{x_1\}, \{x_2\}, \dots, \{x_p\} \subseteq C_1$, tomando $S_1 = \bigcup_{i=1}^p \{x_i\}$ se tiene $P_1(S_1) \subseteq C_1$. Si $\{y_1\}, \{y_2\}, \dots, \{y_q\} \subseteq C_2$, tomando

$S_2 = \bigcup_{i=1}^q \{y_i\}$ se tiene $P_1(S_2) \subseteq C_2$, en consecuencia $R(p, q; 1) \leq p + q - 1$. Además, de la demostración de la forma general del Principio de Dirichlet $p + q - 1$ es el menor entero con el que se asegura que habrá al menos p subconjuntos de cardinal 1 en C_1 o

al menos q subconjuntos de cardinal 1 en C_2 . De manera que $R(p, q; 1) \geq p + q - 1$, por tanto $R(p, q; 1) = p + q - 1$.

A continuación se probará que $R(r, q; r) = q$. Sean S un conjunto tal que $|S| = q$ y sea $\{C_1, C_2\}$ una 2-coloración de $P_r(S)$. Si $C_1 = \emptyset$, entonces $P_r(S) \subseteq C_2$ y tomando $S_2 = S$ se tiene un subconjunto de cardinal q tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$. Si $C_1 \neq \emptyset$, se puede elegir $S_1 \in C_1$, luego $S_1 \subseteq S$ y $|S_1| = r$, entonces, $P_r(S_1) = \{S_1\} \subseteq C_1$. Con esto se llega a que $R(r, q; r) \leq q$. Ahora, sea S un conjunto tal que $|S| \leq q - 1$. Tomando las clases de coloración $C_1 = \emptyset$ y $C_2 = P_r(S)$ se define una 2-coloración de $P_r(S)$ para la cual no existe $S_1 \subseteq S$ de cardinal r tal que $P_r(S_1) \subseteq C_1$ y tampoco existe $S_2 \subseteq S$ de cardinal q tal que $P_r(S_2) \subseteq C_2$, luego $R(r, q; r) \geq q$ y por tanto $R(r, q; r) = q$. Similarmente, se prueba que $R(r, p; r) = p$. Para continuar, sean $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ tales que $p, q \geq r$ y por hipótesis inductiva suponga que

- (i) $R(p, q; r - 1)$ existe para todo $p, q \geq r - 1$.
- (ii) Existe el número $q_1 = R(p, q - 1; r)$ para todo $p, r \geq r$.
- (iii) Existe el número $p_1 = R(p - 1, q; r)$ para todo $q, r \geq r$.

Se probará que también se cumple para r, p y q . Por contradicción suponga que no existe el número $R(p, q; r)$. Por el ítem (i) de la hipótesis de inducción existe el número $R(p_1, q_1; r - 1)$. Ahora, sea $N > R(p_1, q_1; r - 1)$ y sean S un conjunto tal que $|S| = N$ y $x \in S$, además, considere el conjunto $S_1 = S - \{x\}$, luego $|S_1| = N - 1 \geq R(p_1, q_1; r - 1)$. Sea $\{C, D\}$ es una 2-coloración de $P_r(S)$ y se define

$$C_1 = \{A \in C : x \notin A\} \text{ y } D_1 = \{A \in D : x \notin A\},$$

entonces, $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$ ya que $S_1 = S - \{x\}$. Considere los siguientes conjuntos

$$C_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in C\} \text{ y } D_x = \{A \in P_{r-1}(S_1) : A \cup \{x\} \in D\}.$$

Para cualquier $A \in P_{r-1}(S_1)$ se tiene que $A \cup \{x\} \in P_r(S)$, luego $A \cup \{x\} \in C$ o $A \cup \{x\} \in D$, lo que implica que $A \in C_x$ o $A \in D_x$, entonces $\{C_x, D_x\}$ es una 2-coloración de $P_{r-1}(S_1)$. Ahora, aplicando (i) de la hipótesis inductiva y como $|S_1| \geq R(p_1, q_1; r - 1)$ se debe cumplir que existe un subconjunto U de S_1 tal que $|U| = p_1$ donde $P_{r-1}(U) \subseteq C_x$ o existe un subconjunto $V \subseteq S_1$ tal que $|V| = q_1$ donde $P_{r-1}(V) \subseteq D_x$. En el primer caso, dado que $p_1 = R(p - 1, q; r)$ y $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$, por hipótesis (iii) existe ya sea un $U_1 \subseteq U$ de cardinal $p - 1$ tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un $U_2 \subseteq U$ de cardinal q tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Si existe el subconjunto U_1 luego, $U_1 \cup \{x\}$ es un subconjunto de S de cardinal p , si $A \subseteq U_1 \cup \{x\}$ es un subconjunto de cardinal r , se tiene que, si $x \notin A$, entonces $A \subseteq U_1$, luego $A \in C$; si $x \in A$, entonces $A - \{x\}$ es un subconjunto de U de cardinal $r - 1$, así, $A - \{x\} \in C_x$, por tanto $A = (A - \{x\}) \cup \{x\} \in C$, de lo anterior se tiene que $U_1 \cup \{x\}$ es un subconjunto de S de cardinal p para el que $P_r(U_1 \cup \{x\}) \subseteq C$. Por otro lado, si existe un $U_2 \subseteq U$ de cardinal q , entonces el propio U_2 es un subconjunto de S de cardinal q tal que $P_r(U_2) \subseteq D$.

Para el segundo caso, como $q_1 = R(p, q - 1; r)$ y $\{C_1, D_1\}$ es una 2-coloración de $P_r(S_1)$,

luego por (ii) de la hipótesis inductiva, existe ya sea un $U_1 \subseteq U$ de cardinal p tal que $P_r(U_1) \subseteq C_1 \subseteq C$ o un subconjunto $U_2 \subseteq U$ de cardinal $q-1$ tal que $P_r(U_2) \subseteq D_1 \subseteq D$. Observe que en el primer caso ya se tiene un subconjunto U_1 de cardinal p tal que $P_r(U_1) \subseteq C$ y para el segundo caso, se tiene un subconjunto $U_2 \cup \{x\} \subseteq S$ de cardinal q para el cual $P_r(U_2 \cup \{x\}) \subseteq D$. De lo anterior se sigue que

$$R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1.$$

Por la hipótesis de inducción se tiene que $R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$ existe y es finito, por tanto $R(p, q; r)$ existe para cada $p, q, r \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ con $p, q \geq r$. ■

Teorema 2.2. (Ramsey para k -coloraciones). Sean k y r enteros positivos. Si $q_1, q_2, \dots, q_k \geq r$, entonces, existe un entero positivo N tal que para todo conjunto finito S con $|S| \geq N$ se cumple lo siguiente, para cada k -coloración $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de $P_r(S)$ existe al menos un $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ y un subconjunto S_i de S de cardinal q_i tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$.

El menor entero N_0 que satisface el teorema se llama número de Ramsey y se denota como $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$.

Demostración. Se probará por inducción sobre el número de colores k que el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe. Por el Teorema 2.1 se puede tomar $k \geq 3$. Inicialmente se prueba que $R(q_1; r) = q_1$. En efecto, sea S un conjunto, con $|S| \geq q_1$, tomando una 1-coloración $\{C_1\}$ de $P_r(S)$ y un subconjunto $S_1 \subseteq S$, tal que $|S_1| = q_1$ se tiene $P_r(S_1) \subseteq P_r(S) \subseteq C_1$. Ahora, suponga que el Teorema se cumple para $(k-1)$ colores, es decir, para cualesquier enteros $r \geq 1$ y q_1, q_2, \dots, q_{k-1} tal que $q_i \geq r$ para $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ el número de Ramsey $R(q_1, q_2, \dots, q_{k-1}; r)$ existe, se probará que también se cumple para k colores. Por el Teorema 2.1 existe $p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$ y por hipótesis de inducción existe el número de Ramsey $N = R(q_1, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r)$. Sea S un conjunto finito tal que $|S| \geq N$ y sea $\{C_1, \dots, C_{k-1}, C_k\}$ una k -coloración de $P_r(S)$ y defina la $(k-1)$ -coloración $\{C_1, \dots, C_{k-2}, D_{k-1}\}$ de $P_r(S)$ donde $D_{k-1} = C_{k-1} \cup C_k$, entonces existe al menos un subconjunto S_i de S de cardinal q_i tal que $P_r(S_i) \subseteq C_i$, donde $i \in \{1, 2, \dots, k-2\}$ o un subconjunto U_{k-1} de S de cardinal p_{k-1} tal que $P_r(U_{k-1}) \subseteq D_{k-1}$, en el primer caso el Teorema se seguiría de inmediato, para el segundo caso, considere las siguientes clases de coloración

$$E_{k-1} = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_{k-1}\} \text{ y } E_k = \{A \in P_r(U_{k-1}) : A \in C_k\},$$

observe que $\{E_{k-1}, E_k\}$ es una 2-coloración de $P_r(U_{k-1})$. Como $|U_{k-1}| = p_{k-1} = R(q_{k-1}, q_k; r)$, entonces existe ya sea un subconjunto $S_{k-1} \subseteq U_{k-1}$ de cardinal q_{k-1} tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq E_{k-1}$ o un subconjunto $S_k \subseteq U_{k-1}$ de cardinal q_k tal que $P_r(S_k) \subseteq E_k$. Note que por construcción $E_{k-1} \subseteq C_{k-1}$ y $E_k \subseteq C_k$, lo que implica que existe ya sea un subconjunto $S_{k-1} \subseteq S$ de cardinal q_{k-1} tal que $P_r(S_{k-1}) \subseteq C_{k-1}$ o un subconjunto $S_k \subseteq S$ de cardinal q_k tal que $P_r(S_k) \subseteq C_k$. De lo anterior se tiene que

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; r) \leq R(q_1, q_2, \dots, q_{k-2}, p_{k-1}; r),$$

por tanto, el número $R(q_1, q_2, \dots, q_k; r)$ existe. ■

En la prueba del Teorema de Ramsey no se da una fórmula explícita para calcular el valor exacto de los números de Ramsey, el Teorema asegura la existencia y proporciona una cota superior para cada uno de estos números, lo cual ocurre a menudo en las demostraciones de la teoría de Ramsey, solo proporcionan cotas superiores para el tamaño de las estructuras combinatorias de interés. Encontrar este tipo de números es uno de los problemas más importantes en la teoría de Ramsey.

Por otra parte, como se mencionó anteriormente, la teoría de Ramsey puede verse como una generalización del principio de Dirichlet generalizado, esto pasa cuando $r = 1$ en el Teorema de Ramsey, en este caso las clases de coloración hacen el papel de las cajas y el enunciado queda de la siguiente forma.

Corolario 2.3. Sean $q_1, q_2, \dots, q_k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Si $N = R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1)$ objetos se distribuyen en k cajas C_1, C_2, \dots, C_k , entonces se cumple lo siguiente: hay al menos q_1 objetos en la caja C_1 , o hay al menos q_2 objetos en la caja C_2, \dots , o hay al menos q_k objetos en la caja C_k . Además, se tiene que

$$R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_k - k + 1.$$

La formulación habitual del principio del Dirichlet en forma simple se escribe, en términos de números de Ramsey, como

$$R(\underbrace{2, 2, \dots, 2}_{t\text{-veces}}; 1) = t + 1.$$

Es decir, $t + 1$ es el mínimo entero que permite asegurar, que si se distribuyen ese número de objetos en t cajas, al menos una de ellas contiene dos o más objetos.

Conocida la existencia de los números de Ramsey es común preguntarse por el valor exacto de estos números, ¿cómo encontrarlos?, ¿qué métodos utilizar para su cálculo?, etc. Para esto, los métodos por medio de los cuales se obtuvieron avances significativos en el cálculo de los números de Ramsey de la forma $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$ se basan en la teoría de grafos. Utilizando esta teoría, hasta el momento se logró establecer el valor exacto de nueve números de Ramsey para 2-coloraciones y un número de Ramsey para 3-coloraciones. En adelante los números de la forma $R(p_1, p_2, \dots, p_k; 2)$ se denotarán con $R(p_1, p_2, \dots, p_k)$.

2.2 Números de Ramsey para 2-coloraciones de grafos

Notación 2.4. Sean $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, con $R(p, q)$ se denota el mínimo entero N (en caso que exista) tal que cualquier 2-coloración de las aristas del grafo K_N , usando los colores rojo y azul, contiene al menos un subgrafo completo K_p monocromático de color rojo o contiene al menos un subgrafo completo K_q monocromático de color azul.

Corolario 2.5. Para todo par $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, El número $R(p, q)$ existe

A continuación, se presentan algunos resultados generales que serán de gran utilidad para establecer los valores exactos de algunos números de Ramsey y para acotar superiormente otros de estos números. Además, para la prueba es necesario el siguiente lema

Lema 2.6. (Apretón de manos) Si χ es una 2-coloración de un grafo $G = (V(G), E(G))$, entonces la suma de los grados-rojos es igual al doble del número de aristas rojas ($|E|$ denota el número total de aristas rojas)

$$\sum_{v \in V(G)} d_r(v) = 2|E|.$$

Para la prueba de este Lema ver "Theorem 2.2" del libro de Wilson [1].

Teorema 2.7. *Para los números de Ramsey se verifica*

- (1) $R(q_1, q_2, \dots, q_k; 1) = q_1 + q_2 + \dots + q_k - k + 1$.
- (2) $R(p, r; r) = R(r, p; r) = p$. para $p \geq r$
- (3) $R(p, q; r) \leq R(R(p-1, q; r), R(p, q-1; r); r-1) + 1$.
- (4) $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$.
- (5) Si $R(p-1, q)$ y $R(p, q-1)$ son números pares, entonces $R(p, q) < R(p-1, q) + R(p, q-1)$.

Demostración. El ítem (1) es consecuencia del Principio de Dirichlet general, los ítems (2) y (3) se justificaron en la prueba del Teorema 2.1. Para el ítem (4) sea $t = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ y sea $\chi : E \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ una 2-coloración del grafo completo $K_t = (V, E)$. Se probará que K_t contiene un subgrafo K_p monocromático de color rojo o contiene un subgrafo K_q monocromático de color azul. Sea v un vértice de K_t , luego

$$d_r(v) + d_a(v) = t - 1 = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1.$$

Observe que, $d_r(v) < R(p-1, q)$ y $d_a(v) < R(p, q-1)$ implican que $d_r(v) + d_a(v) < t - 1$, lo cual no es posible. Así que $d_r(v) \geq R(p-1, q)$ o $d_a(v) \geq R(p, q-1)$.

Si $d_r(v) \geq R(p-1, q)$, considere un clique formado por $R(p-1, q)$ vértices del conjunto $N_r(v)$, por definición de los números de Ramsey existe algún subgrafo K_{p-1} monocromático de color rojo o algún subgrafo K_q monocromático de color azul. En el segundo caso ya se tiene un subgrafo K_q de K_t con todas sus aristas de color azul. Para el primer caso, considere el clique K_p que se forma al conectar los $p-1$ vértices del subgrafo monocromático rojo K_{p-1} con el vértice v , dado que todas estas aristas que se añaden son de color rojo, el clique K_p es monocromático de color rojo.

Si $d_a(v) \geq R(p, q-1)$, un procedimiento análogo al anterior garantiza la existencia de un subgrafo K_p monocromático de color rojo o un subgrafo K_q monocromático de color azul. Esto finaliza la prueba del ítem (4). Para el ítem (5), suponga que $R(p, q) = R(p-1, q) + R(p, q-1)$ y que los números $R(p-1, q), R(p, q-1)$ son pares. Sea $n = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1$, luego $n < R(p, q)$ y por definición de números de Ramsey existe una 2-coloración del grafo completo K_n que no contiene ni un subgrafo K_p monocromático rojo ni un subgrafo K_q monocromático azul. Sea v un vértice del grafo K_n , luego

$$d_r(v) + d_a(v) + 1 = n = R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1,$$

con un argumento similar al del ítem (4) se obtienen dos posibilidades, $d_r(v) \geq R(p-1, q) - 1$ o $d_a(v) \geq R(p, q-1) - 1$. Ahora, suponga que $d_r(v) > R(p-1, q) - 1$, en este caso, se puede considerar el subgrafo completo formado por $R(p-1, q)$ vértices de $N_r(v)$. Por el Teorema de Ramsey y dado que no existe un subgrafo K_q monocromático azul, debe existir un subgrafo K_{p-1} monocromático rojo, sin embargo, $K_{p-1} \cup \{v\}$ forma un subgrafo K_p monocromático rojo en K_n , lo que contradice la escogencia de la 2-coloración de K_n , por tanto $d_r(v) = R(p-1, q) - 1$, y de forma similar se obtiene $d_a(v) = R(p, q-1) - 1$. Dado que el vértice v era arbitrario, se concluye que cada vértice de K_n está conectado a los otros $n-1$ vértices por $R(p-1, q) - 1$ aristas rojas y $R(p, q-1) - 1$ aristas azules. Por el Lema 2.6, el total de aristas rojas en K_n está dado por

$$|E| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(K_n)} (R(p-1, q) - 1) = \frac{n}{2} (R(p-1, q) - 1)$$

$$\frac{1}{2} ((R(p-1, q) + R(p, q-1) - 1) (R(p-1, q) - 1).$$

Sin embargo, $R(p-1, q)$ y $R(p, q-1)$ son pares, por tanto $|E|$ no puede ser entero, lo que contradice la igualdad. Así, $R(p, q) < R(p-1, q) + R(p, q-1)$. ■

Corolario 2.8. Para cualesquier $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ se tiene que

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-2}{p-1}.$$

Demostración. Se prueba por inducción sobre la suma de los dos parámetros $n = p+q$. Note que se cumple para $n = 4$, es decir $p = q = 2$

$$R(2, 2) = 2 \leq \binom{2+2-2}{2-1} = 2.$$

Ahora, suponiendo que se cumple para $n-1 = p-1+q = p+q-1$, es decir $R(p, q-1)$ y $R(p-1, q)$ existen, se probará que también se cumple para $R(p, q)$. En efecto, utilizando el Teorema 2.7, ítem (4), se tiene

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$$

$$\leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1}.$$

Usando la regla de Pascal,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

se obtiene que

$$R(p, q) \leq \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{p+q-3}{p-1} = \binom{p+q-2}{p-1}.$$
■

2.3 Valores exactos para algunos números de Ramsey

A continuación se presenta la demostración de seis de los números de Ramsey no triviales conocidos hasta la fecha. En general, el método para probar que $N = R(p, q)$ es el siguiente Utilizando el Teorema 2.7 se muestra que $R(p, q) \leq N$, luego, se define una 2-coloración del grafo completo K_{N-1} en la cual no existe ni un K_p monocromático de color rojo ni un K_q monocromático de color azul.

2.3.1 Número de Ramsey $R(3, 3)$

Teorema 2.9. $R(3, 3) = 6$. Greenwood y Gleason 1955 [10]

Demostración. Considere el grafo completo K_6 y sea v uno de sus vértices, luego $d(v) = 5$. Por el principio de Dirichlet, por lo menos tres aristas con extremo v tienen el mismo color y sin pérdida de generalidad, se puede suponer que estas tres aristas son de color rojo, como se ilustra en el siguiente gráfico Si por lo menos una de las

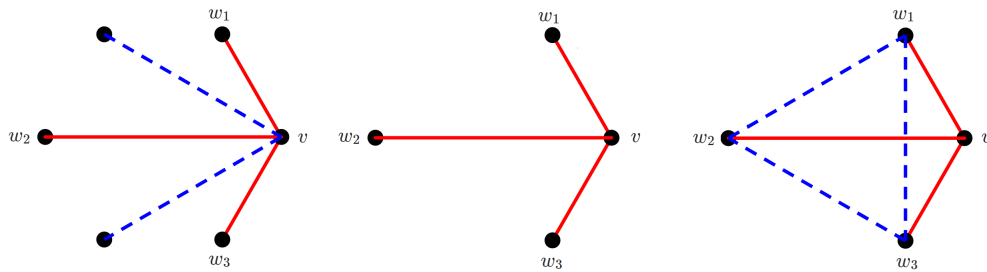


Figura 2.1: Formación de un subgrafo K_3 monocromático azul. Modificado de [10]

aristas $\{w_1, w_2\}$, $\{w_1, w_3\}$ o $\{w_2, w_3\}$ es de color rojo, se tiene un subgrafo K_3 monocromático de color rojo, en caso contrario, se obtiene un subgrafo K_3 monocromático de color azul. Así que, $R(3, 3) \leq 6$ ¹. Para probar que $R(3, 3) > 5$, considere el grafo completo K_5 con vértices v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 y la siguiente 2-coloración,

$$\chi : E(K_5) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\},$$

dada por

$$\chi(\{v_1, v_2\}) = \chi(\{v_2, v_3\}) = \chi(\{v_3, v_4\}) = \chi(\{v_4, v_5\}) = \chi(\{v_5, v_1\}) = \text{rojo}$$

$$\chi(\{v, w\}) = \text{azul}, \text{ siempre que } \{v, w\} \notin \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_1\}\}.$$

Gráficamente se tiene

¹Esta desigualdad también se obtiene utilizando el ítem (4) del Teorema 2.7

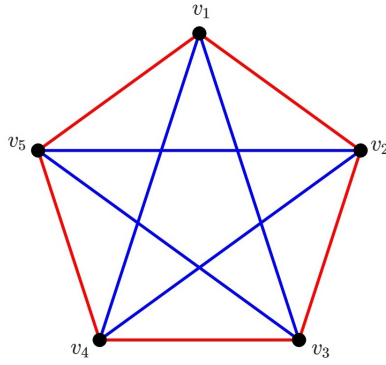


Figura 2.2: Ejemplo de una 2-coloración de K_5 . Modificado de [10]

En esta 2-coloración no hay ningún subgrafo K_3 monocromático rojo ni azul. ■

2.3.2 Número de Ramsey $R(3, 4)$

Teorema 2.10. $R(3, 4) = 9$. Greenwood y Gleason 1955 [10].

Demostración. Como $R(2, 4) = 4$ y $R(3, 3) = 6$, por el ítem (5) del Teorema 2.7, luego

$$R(3, 4) < R(2, 4) + R(3, 3) = 4 + 6 = 10.$$

Así, $R(3, 4) \leq 9$. Para probar que $R(3, 4) > 8$, considere el grafo K_8 con vértices etiquetados en el grupo cíclico \mathbb{Z}_8 y la 2-coloración $\chi : E(K_8) \rightarrow \{\text{rojo, azul}\}$, dada por

$$\chi(\{v_i, v_j\}) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } i - j \in \{1, 4, 7\}. \\ \text{azul} & \text{si } i - j \in \{2, 3, 5, 6\}. \end{cases}$$

Además, si $i - j \in \{1, 4, 7\}$ o $\{2, 3, 5, 6\}$, entonces $j - i \in \{1, 4, 7\}$ o $\{2, 3, 5, 6\}$ respectivamente. Así, Gráficamente se tiene

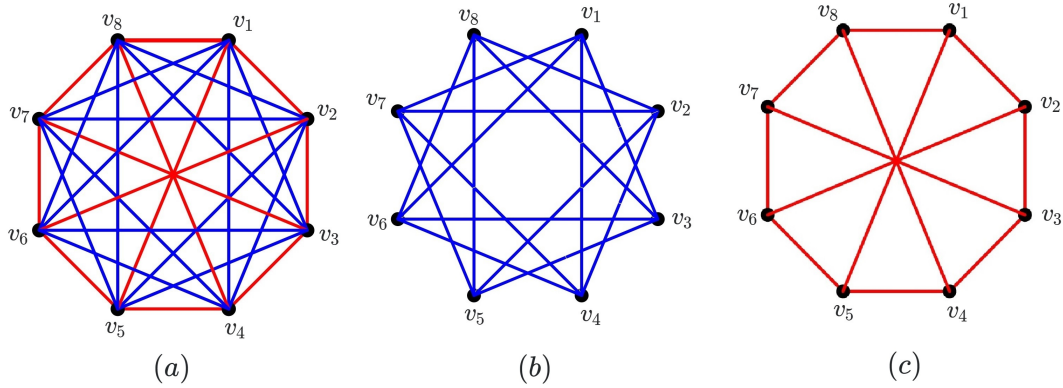


Figura 2.3: (a) 2-coloración de K_8 . (b) K_8 azul y (c) K_8 rojo para una inspección más cercana. Modificado de [10].

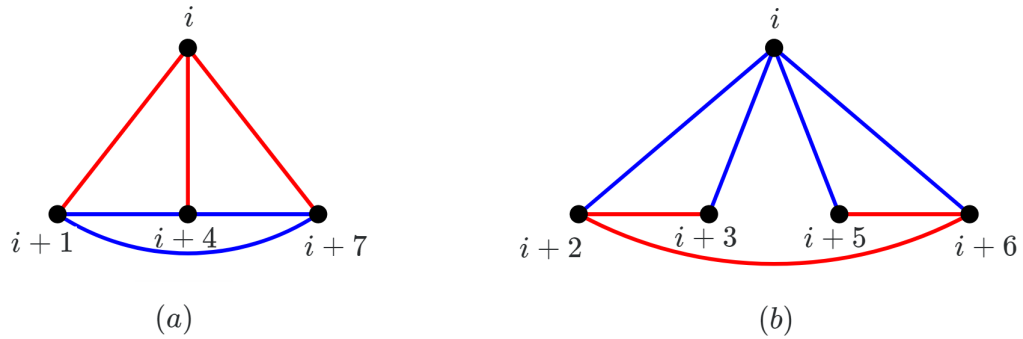


Figura 2.4: Representación gráfica de $N_r(i)$ y $N_a(i)$. Modificado de [10].

Sea i uno de los vértices del grafo K_8 , por la definición de la 2-coloración χ , $N_r(i) = \{i + k : k = 1, 4, 7\}$, sin embargo,

$$\chi(\{i + 1, i + 4\}) = \chi(\{i + 1, i + 7\}) = \chi(\{i + 7, i + 4\}) = \text{azul},$$

por lo tanto, no existe un subgrafo K_3 monocromático de color rojo con vértice $i \in \{0, 1, \dots, 7\}$ (ver Figura 2.4(a)). Ahora, suponga que existe un subgrafo K_4 monocromático de color azul y que i es uno de sus vértices, luego, $N_a(i) = \{i + k : k = 2, 3, 5, 6\}$. Observe que $i + 2$ no puede ser otro vértice del subgrafo K_4 monocromático azul ya que

$$\chi(\{i + 2, i + 3\}) = \chi(\{i + 2, i + 6\}) = \text{rojo}.$$

Entonces los vértices de este subgrafo son $\{i, i + 3, i + 5, i + 6\}$, pero esto es una contradicción ya que $\chi(\{i + 5, i + 6\}) = \text{rojo}$ (ver Figura 2.4(b)). Por tanto, no existe un subgrafo K_3 de color rojo, ni un subgrafo K_4 monocromático de color azul en esta 2-coloración del grafo K_8 . Por lo tanto, $R(3, 4) > 8$. ■

2.3.3 Número de Ramsey $R(3, 5)$

Teorema 2.11. $R(3, 5) = 14$. Greenwood y Gleason 1955 [10].

Demostración. Dado que $R(3, 4) = 9$ y $R(2, 5) = 5$, entonces por ítem (4) del Teorema 2.7, se tiene $R(3, 5) \leq R(3, 4) + R(2, 5) = 14$. Para probar que $R(3, 5) > 13$, se definirá una 2-coloración del grafo K_{13} que no contiene un subgrafo K_3 rojo, ni un subgrafo K_5 azul. Considere los elementos del cuerpo \mathbb{Z}_{13} como los vértices del grafo K_{13} . Usando la Definición 1.42, se puede verificar que $\mathcal{C}_{13} = \{1, 5, 8, 12\}$. Ahora, considere la 2-coloración χ definida de la siguiente forma

$$\chi(\{i, j\}) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } j - i \in \mathcal{C}_{13}. \\ \text{azul} & \text{si } j - i \notin \mathcal{C}_{13}. \end{cases}$$

La función χ está bien definida ya que; $j - i \in \mathcal{C}_{13}$, si y solo si, $i - j \in \mathcal{C}_{13}$. La representación gráfica de la 2-coloración χ es la siguiente

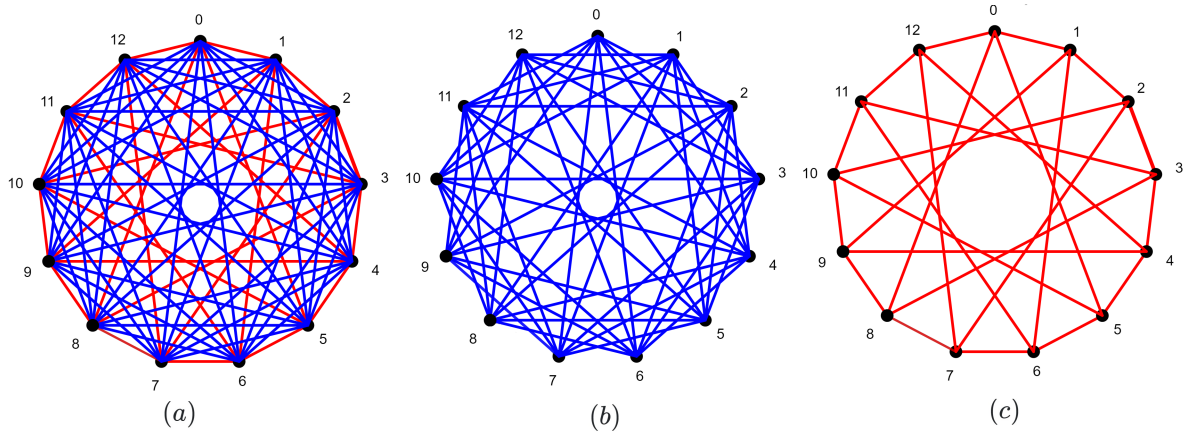


Figura 2.5: (a) 2-coloración de K_{13} . (b) K_{13} azul y (c) K_{13} rojo para una inspección más cercana. Modificado de [10].

Ahora, se probará que no existe un subgrafo K_3 monocromático de color rojo. En efecto, elija tres vértices cualesquiera del grafo K_{13} , sea v uno de estos vértices, por definición

$$N_r(v) = \{v + 1, v + 5, v + 8, v + 12\}.$$

Para $u, w \in \{v + 1, v + 5, v + 8, v + 12\}$, se tiene que las diferencias $w - u \in \{2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}$, entonces $\chi(\{u, w\}) = \text{azul}$, por tanto no puede existir un subgrafo K_3 monocromático rojo con esta 2-coloración de K_{13} .

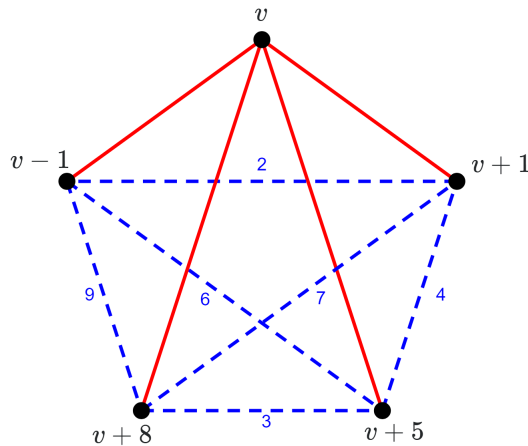


Figura 2.6: Representación gráfica de $N_r(v)$. Modificado de [10]

Suponga que en esta 2-coloración existe un subgrafo K_5 monocromático de color azul y sea v uno de los vértices de este subgrafo (ver Figura 2.6). Luego,

$$N_a(v) = \{v + i : i = 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11\}.$$

Suponga que el segundo vértice del subgrafo K_5 es $v + 2$, entonces los tres vértices restantes se deben seleccionar del conjunto

$$N_a(v) - \{v + 3, v + 7, v + 10\} = \{v + 4, v + 6, v + 9, v + 11\},$$

sin embargo,

$$(v + 9) - (v + 4) = (v + 11) - (v + 6) = 5 \in \mathcal{C}_{13},$$

por tanto $\chi(\{v + 4, v + 9\}) = \chi(\{v + 6, v + 11\}) = \text{rojo}$. De lo anterior, se tiene que $v + 2$ no puede ser uno de los vértices del subgrafo K_5 monocromático azul. Ahora, suponga que el segundo vértice de este subgrafo K_5 es $v + 3$, entonces los tres vértices restantes se deben seleccionar del conjunto

$$N_a(v) - \{v + 4, v + 11\} = \{v + 6, v + 7, v + 9, v + 10\},$$

sin embargo,

$$(v + 7) - (v + 6) = (v + 10) - (v + 9) = 1 \in \mathcal{C}_{13},$$

por tanto $\chi(\{v + 6, v + 7\}) = \chi(\{v + 9, v + 10\}) = \text{rojo}$. De lo anterior, se tiene que $v + 3$ no puede ser uno de los vértices del subgrafo K_5 monocromático azul. Similarmente, suponiendo que el segundo vértice del subgrafo K_5 monocromático azul es $v + 4$, los otros vértices se deben seleccionar de $N_a(v) - \{v + 9\} = \{v + 6, v + 7, v + 10, v + 11\}$. Pero $(v + 7) - (v + 6) = (v + 11) - (v + 10) = 1 \in \mathcal{C}_{13}$, con esto se tiene que $v + 4$ no puede ser un vértice de K_5 azul. Si $v + 6$ es el segundo vértice del subgrafo K_5 monocromático azul, los otros vértices se deben seleccionar de $N_a(v) - \{v + 7, v + 11\} = \{v + 9, v + 10\}$, pero con cuatro vértices es imposible formar el subgrafo K_5 monocromático azul. Finalmente, solo quedan los vértices $\{v + 7, v + 9, v + 10, v + 11\}$ como los únicos candidatos para los cuatro vértices restantes del subgrafo K_5 monocromático azul, sin embargo $v + 10$ y $v + 11$ son vértices consecutivos, con esto, se debe eliminar uno de ellos de la lista, haciendo imposible la construcción del subgrafo K_5 monocromático azul. ■

2.3.4 Número de Ramsey $R(4, 4)$

Teorema 2.12. $R(4, 4) = 18$. Greenwood y Gleason 1955 [10].

Demostración. Dado que $R(3, 4) = R(4, 3) = 9$, aplicando el ítem (4) del Teorema 2.7, se tiene $R(4, 4) \leq R(4, 3) + R(3, 4) = 18$. Para probar que $R(4, 4) > 17$, considere los elementos del campo \mathbb{Z}_{17} como los vértices del grafo K_{17} . Usando la Definición 1.40 $\mathcal{Q}_{17} = \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$. Ahora, considere la 2-coloración χ definida de la siguiente forma

$$\chi(\{i, j\}) = \begin{cases} \text{rojo} & \text{si } j - i \in \mathcal{Q}_{17}. \\ \text{azul} & \text{si } j - i \notin \mathcal{Q}_{17}. \end{cases}$$

Esta función está bien definida porque

$$x - y \equiv a^2 \pmod{17}, \text{ si y solo si, } y - x = (4a)^2 \pmod{17}.$$

La representación gráfica de esta 2-coloración χ es la siguiente

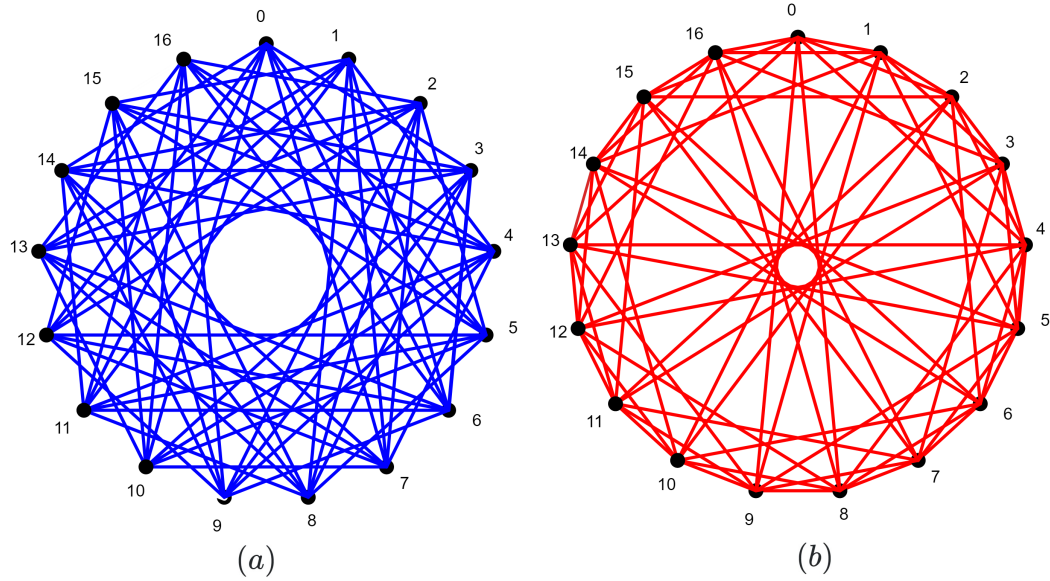


Figura 2.7: 2-coloración de K_{17} . (a) K_{17} azul y (b) K_{17} rojo para una inspección más cercana. Modificado de [10].

Suponga que existe un subgrafo K_4 monocromático en la 2-coloración χ , donde los cuatro vértices son $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{17}$, luego los elementos del conjunto $A = \{a - b, a - c, a - d, b - c, b - d, c - d\}$ son todos residuos cuadráticos o ninguno lo es. Dado que $(a - b) \in \mathbb{Z}_{17} - \{0\}$, entonces existe su inverso $x = (a - b)^{-1} \in \mathbb{Z}_{17}$. Al multiplicar cada elemento del conjunto A por x se obtiene el conjunto $Ax = \{1, (a - c)x, (a - d)x, (b - c)x, (b - d)x, (c - d)x\}$ y por el Teorema 1.41 cada elemento de Ax es un residuo cuadrático. Sean $B = (a - d)x$ y $C = (a - c)x$, se tiene

$$\begin{aligned} (b - c)x &= ((a - c) - (a - b))x = (a - c)x - (a - b)x = C - 1; \\ (b - d)x &= ((a - d) - (a - b))x = (a - d)x - (a - b)x = B - 1; \\ (c - d)x &= ((b - d) - (b - c))x = (b - d)x - (b - c)x = B - C. \end{aligned}$$

Luego, $Ax = \{1, C, B, C - 1, B - 1, B - C\} \subseteq \mathcal{Q}_{17}$, entonces

$$C - 1, B - 1 \in \{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\},$$

luego,

$$C, B \in \{2, 3, 5, 9, 10, 14, 16\} \cap \mathcal{Q}_{17} = \{2, 9, 16\},$$

no obstante, $B - C \in \{14, 7, 3, 10\} \cap \mathcal{Q}_{17} = \emptyset$, lo que es una contradicción. Por tanto, no puede existir un subgrafo K_4 monocromático del mismo color en la 2-coloración χ de K_{17} . Así, $R(4, 4) > 17$. ■

2.3.5 Número de Ramsey $R(3, 6)$

A continuación se probará que $R(3, 6) = 18$, para esto se usará el siguiente lema.

Lema 2.13. Si χ es una 2-coloración del grafo $G = K_{13}$ tal que no contiene un clique K_3 monocromático rojo ni un subgrafo K_5 monocromático azul, entonces para todo vértice $u \in V(G)$ se tiene $d_r(u) = 4$.

Demostración. Sea χ una 2-coloración de G la cual no contiene un clique K_3 monocromático rojo ni un subgrafo K_5 monocromático azul. Sea $u \in V(G)$ y considere $N_r(u) = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$, dado que $\chi(\{u_i, u_j\}) = \text{azul}$, para evitar triángulos rojos, entonces $t = d_r(u) \leq 4$. Ahora, suponga que existe $x \in V(G)$ tal que $d_r(x) \leq 3$ y considere el subgrafo completo H generado por los vértices del conjunto $W = V(G) - N_r[x]$, entonces

$$|W| = 13 - (t + 1) \geq 13 - 4 = 9.$$

Por el Teorema 2.10 se conoce que $R(3, 4) = 9$ y dado que H no contiene un clique K_3 monocromático rojo, entonces deben existir cuatro vértices $z_1, z_2, z_3, z_4 \in W$ los cuales forman un subgrafo K_4 monocromático azul, lo que es una contradicción porque los cuatro vértices z_1, z_2, z_3, z_4 junto al vértice u formarían un subgrafo K_5 monocromático azul en G . Por lo tanto, $d_r(u) = 4$. ■

Observe que por el Teorema 2.7, se tiene

$$R(3, 6) < R(2, 6) + R(3, 5) = 6 + 14 = 20.$$

Sin embargo, esta cota no es óptima. A continuación se prueba por contradicción que $R(3, 6) \leq 18$.

Teorema 2.14. $R(3, 6) \leq 18$. D. Cariolaro 2007 [3].

En cualquier 2-coloración de K_{18} existe un K_3 monocromático de color rojo o un K_6 monocromático de color azul.

Demostración. En efecto, sea $G = (V(G), E(G))$ el grafo completo con 18 vértices y suponga que existe una 2-coloración χ del grafo G la cual no contiene ni un clique K_3 monocromático rojo ni un subgrafo K_6 monocromático azul. Con esta suposición se tienen las siguientes afirmaciones.

Afirmación 2.15. Para todo vértice $v \in V(G)$, se tiene que $4 \leq d_r(v) \leq 5$.

Demostración. Sea $v \in V(G)$ y suponga que $N_r(v) = \{s_1, s_2, \dots, s_t\}$, con esto $d_r(v) = t$. Como $\chi(\{v, s_i\}) = \text{rojo}$, para $s_i \in N_r(v)$ y no existe ningún subgrafo K_3 monocromático rojo, entonces

$$\chi(\{s_i, s_j\}) = \text{azul}, \text{ para todo } 1 \leq i < j \leq t.$$

Así, los vértices de $N_r(v)$ forman un subgrafo K_t monocromático azul de G y por hipótesis no puede existir un subgrafo K_6 azul en G , por tanto $t \leq 5$. Por otro lado, si

$t \leq 3$, considere el subgrafo completo generado por los vértices del conjunto $W = V(G) - N_r[v]$, entonces

$$|W| = |V(G) - N_r[v]| = 18 - (t + 1) = 17 - t \geq 17 - 3 = 14.$$

Por el Teorema 2.11 se conoce que $R(3, 5) = 14$ y dado que no existe ningún clique K_3 monocromático rojo, entonces deben existir cinco vértices en W los cuales forman un subgrafo K_5 monocromático azul. Sean y_1, y_2, y_3, y_4 y y_5 estos vértices, como $\chi(\{v, y_i\}) = \text{azul}$ para $i = 1, 2, 3, 4, 5$, se tiene que el conjunto de vértices $\{v, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$ forman un subgrafo K_6 monocromático azul en G , lo que contradice la escogencia de la 2-coloración χ . Por tanto $t \geq 4$. ■

Afirmación 2.16. Para todo vértice $v \in V(G)$ se tiene, $d_r(v) = 5$.

Demostración. Por la Afirmación anterior, para todo $v \in V(G)$, $4 \leq d_r(v) \leq 5$. Ahora, suponga que existe un vértice $u \in V(G)$ tal que $d_r(u) = 4$ y considere el subgrafo completo H con 13 vértices generado por el conjunto de vértices $V(G) - N_r[u]$. Por hipótesis, H no contiene un clique K_3 monocromático rojo. Además, si H contiene un subgrafo K_5 monocromático azul, entonces los vértices de este subgrafo K_5 junto con el vértice u formaran un subgrafo K_6 monocromático azul en G , lo que es una contradicción. Así, el grafo H satisface las hipótesis de la Afirmación 2.13, luego para cada $x \in V(H)$ se tiene $|H \cap N_r(x)| = 4$. Ahora, sea $z \in N_r(u)$, dado que $4 \leq d_r(z) \leq 5$, deben existir al menos tres vértices $z_1, z_2, z_3 \in H$ tal que

$$\chi(\{z, z_i\}) = \text{rojo}, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Asimismo, $\chi(\{z_i, z_j\}) = \text{azul}$ para $i \neq j$, de otro modo, se formara un clique K_3 monocromático rojo. Además, por lo anterior,

$$|H \cap N_r(z_i)| = 4, \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

así que, $d_r(z_i) = 5$ para $i = 1, 2, 3$, esto implica que $N_r(z_i) \cap N_r(u) = \{z\}$ para $i = 1, 2, 3$, lo cual es una contradicción ya que los vértices del conjunto $(N_r(u) - \{z\}) \cup \{z_1, z_2, z_3\}$ forman un subgrafo K_6 monocromático azul en G . Esto prueba que para cualquier $v \in V(G)$, $d_r(v) = 5$. ■

Afirmación 2.17. Para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$, donde $\chi(\{u, v\}) = \text{azul}$, se cumple que

$$1 \leq |N_r(u) \cap N_r(v)| \leq 2.$$

Demostración.

Sean $u, v \in V(G)$ donde $\chi(\{u, v\}) = \text{azul}$ y $N_r(u) = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$. Suponga que $N_r(u) \cap N_r(v) = \emptyset$, entonces $\chi(\{v, u_i\}) = \text{azul}$, para $i = 1, \dots, 5$, y de esta forma el conjunto de vértices $\{v, u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ generan un subgrafo completo K_6 monocromático azul en G , lo que es una contradicción, por tanto $|N_r(u) \cap N_r(v)| \geq 1$. Ahora, suponga que $|N_r(u) \cap N_r(v)| \geq 3$, como $d_r(u) = d_r(v) = 5$, se tiene

$$|N_r(u) \cup N_r(v)| = d_r(u) + d_r(v) - |N_r(u) \cap N_r(v)| = 10 - |N_r(u) \cap N_r(v)| \leq 7,$$

en consecuencia,

$$|N_a(u) \cap N_a(v)| = 16 - |N_r(u) \cup N_r(v)| \geq 9.$$

En este caso se puede considerar el subgrafo H generado por los vértices del conjunto $N_a(u) \cap N_a(v)$. Por el Teorema 2.10 $R(3, 4) = 9$ y dado que H no puede contener un clique K_3 monocromático rojo, entonces H contiene un subgrafo K_4 monocromático azul, el cual junto a los vértices u y v forman un subgrafo K_6 monocromático azul en G , lo que no puede pasar, por lo tanto $|N_r(u) \cap N_r(v)| \leq 2$. ■

Para la prueba de las siguientes afirmaciones, con $\epsilon(u, v)$ se denotará el cardinal del conjunto $N_r(u) \cap N_r(v)$, es decir,

$$\epsilon(u, v) = |N_r(u) \cap N_r(v)|.$$

Afirmación 2.18. Sea $v \in V(G)$. Si H es el subgrafo completo generado por los vértices del conjunto $V(G) - N_r[v]$, entonces se cumple lo siguiente

- 1) $|\{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 1\}| = 4$.
- 2) $|\{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 2\}| = 8$.
- 3) Si $p, q \in V(H)$ tales que $N_r(p) \cap N_r(v) = N_r(q) \cap N_r(v)$, entonces $p = q$.

Demostración. Considere los conjuntos

$$A = \{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 1\} \text{ y } B = \{p \in V(H) : \epsilon(p, v) = 2\}.$$

Observe que para cada vértice $p \in V(H)$ se tiene $\chi(\{p, v\}) = \text{azul}$, así, la Afirmación anterior garantiza $1 \leq \epsilon(p, v) \leq 2$, luego, $V(H) = A \cup B$. Por otro lado, dado que $|V(G)| = 18$ y $|N_r[v]| = 6$, entonces $|V(H)| = 12$. Además, para cada vértice $s \in N_r(v)$, se tiene $N_r(s) \cap N_r(v) = \emptyset$, porque en caso contrario se formaría un clique K_3 monocromático rojo. Recuerde que $d_r(v) = d_r(s) = 5$, luego $|N_r(s) \cap V(H)| = 4$, en consecuencia, existen 20 aristas rojas que unen vértices de $N_r(v)$ con vértices de $V(H)$. Note que, por cada vértice en A se cuenta una arista roja que une vértices de $N_r(v)$ con vértices de H y por cada vértice en B se cuenta dos de estas aristas, luego $|A| + 2|B| = 20$. Además,

$$|A| + |B| = |A \cup B| = |V(H)| = 12,$$

entonces $20 - 2|B| + |B| = 12$, es decir, $|B| = 8$ y $|A| = 4$. Para probar el ítem (3), considere las funciones $f : A \rightarrow N_r(v)$ definida por

$$f(p) = s \text{ si y solo si } \chi(\{p, s\}) = \text{rojo},$$

y la función $g : B \rightarrow P_2(N_r(v))$ definida por

$$g(p) = \{u, w\} \text{ si y solo si } \chi(\{p, u\}) = \chi(\{p, w\}) = \text{rojo}.$$

Se probará que f y g son funciones inyectivas. En efecto, sean $p, q \in A$ tal que $f(p) = f(q)$, luego existe un vértice $s \in N_r(v)$ para el cual se tiene

$\chi(\{p, s\}) = \chi(\{q, s\}) = \text{rojo}$. Si $\chi(\{p, q\}) = \text{azul}$, entonces los vértices del conjunto $\{p, q\} \cup (N_r(v) - \{s\})$ forman un subgrafo K_6 monocromático azul, lo cual es una contradicción, por tanto $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, sin embargo, si esto ocurre, $\{p, q, s\}$ forman un subgrafo K_3 monocromático rojo, lo que también es una contradicción, por tanto $p = q$, es decir f es inyectiva. Con esto se prueba que si $p, q \in A$ y $N_r(p) \cap N_r(v) = N_r(q) \cap N_r(v)$ entonces $p = q$. Similarmente, sean $p, q \in B$ tal que $f(p) = f(q)$, luego existen $s, t \in N_r(v)$ para los cuales $f(p) = \{s, t\} = f(q)$, con esto $\chi(\{p, s\}) = \chi(\{p, t\}) = \chi(\{q, s\}) = \chi(\{q, t\}) = \text{rojo}$, entonces $N_r(s) \cap N_r(t) = \{v, p, q\}$ lo que también es una contradicción por la Afirmación 2.17, por tanto $p = q$, es decir que la función g es inyectiva. Esto prueba que si $p, q \in B$ y $N_r(p) \cap N_r(v) = N_r(q) \cap N_r(v)$ entonces $p = q$, lo que completa la prueba ya que $V(H) = |A| \cup |B|$. ■

Afirmación 2.19. Con la notación de la Afirmación anterior, los vértices del conjunto A inducen un 4-ciclo rojo.

Demostración. Suponga que $N_r(v) = \{s_1, s_2, s_3, s_4, t\}$ y $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Por la Afirmación anterior, considere que $\chi(\{p_i, s_j\}) = \text{rojo}$, si y solamente si, $i = j$. Además,

$$\chi(\{p_i, t\}) = \text{azul}, \text{ para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Sea $N_r(t) = \{v, t_1, t_2, t_3, t_4\}$, observe que $t_i \in V(H) - A$ para $i = 1, 2, 3, 4$, luego $\{t_1, t_2, t_3, t_4\} \subset B$. Además, como $|B| = 8$, entonces existe $\{w_1, w_2, w_3, w_4\} \subset V(H)$ tal que

$$B = \{t_1, t_2, t_3, t_4, w_1, w_2, w_3, w_4\},$$

en consecuencia,

$$V(G) = \{v, s_1, s_2, s_3, s_4, t, t_1, t_2, t_3, t_4, p_1, p_2, p_3, p_4, w_1, w_2, w_3, w_4\}.$$

Dado que $\epsilon(t_i, v) = 2$ y $t \in N_r(t_i) \cap N_r(v)$ para $t_i \in (N_r(t) - \{v\})$, entonces existe un único vértice $s_k \in (N_r(v) - \{t\})$ tal que $s_k \in N_r(t_i) \cap N_r(v)$. Dado que la función g definida en la Afirmación 2.18 es inyectiva y $w_i \in B$, entonces para cada w_{ij} en $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ existe un único par $\{s_i, s_j\} \subset (N_r(v) - \{t\})$ tal que $\chi(\{s_i, w_{ij}\}) = \chi(\{s_j, w_{ij}\}) = \text{rojo}$. Ahora, considere los conjuntos

$$F = \{p_i, p_j, s_i, s_j, w_{ij}\} \text{ y } T = N_r(v) - \{s_i, s_j\}.$$

Por la Afirmación anterior se tiene $\chi(\{x, y\}) = \text{azul}$, para todo $x \in F$ y todo $y \in T$, sin embargo, dado que $\chi(\{p_j, s_j\}) = \chi(\{s_j, w_{ij}\}) = \text{rojo}$, entonces $\chi(\{p_j, w_{ij}\}) = \text{azul}$, similarmente se tiene que $\chi(\{p_i, w_{ij}\}) = \text{azul}$. Observe que, si $\chi(\{p_i, p_j\}) = \text{azul}$, entonces los vértices del conjunto $T \cup \{p_i, p_j, w_{ij}\}$ formarían un subgrafo K_6 monocromático azul en G , por tanto $\chi(\{p_i, p_j\}) = \text{rojo}$.

Ahora, considere los conjuntos $C_i = N_r(w_i) \cap N_r(v)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Para cada vértice $s \in N_r(v)$, con $s \neq t$, se probará que existen exactamente dos números $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, tal que $s \in C_i \cap C_j$. En efecto, suponga que $s_1 \in C_i$ y $s_1 \notin C_j$, para todo $j \neq i$, luego los únicos conjuntos C_j posibles son $\{s_2, s_3\}, \{s_2, s_4\}, \{s_3, s_4\}$ y con esto se tiene que

$\chi(\{p_2, p_3\}) = \chi(\{p_2, p_4\}) = \chi(\{p_3, p_4\}) = \text{rojo}$, luego los vértices $\{p_2, p_3, p_4\}$ forman un subgrafo K_3 monocromático rojo, lo que es una contradicción, así, cada s_i pertenece a por lo menos dos conjunto C_i , ahora, suponga que s_1 pertenece a tres conjuntos C_i , las posibilidades para estos C_i son $\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_3\}, \{s_1, s_4\}$ y con esto se tiene que

$$\chi(\{p_1, p_2\}) = \chi(\{p_1, p_3\}) = \chi(\{p_1, p_4\}) = \text{rojo},$$

y el conjunto C_i faltante debe estar conformado por dos elementos $\{s_i, s_j\} \subset \{s_2, s_3, s_4\}$ y cualquiera que sea la elección, el conjunto $\{p_1, p_i, p_j\}$ formaría un subgrafo K_3 monocromático rojo. Por lo tanto, el vértice s pertenece a exactamente dos conjuntos C_i .

Para terminar, considere los conjuntos $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ y $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$. Por lo hecho en el párrafo anterior, $g(W) = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$, donde g es la función definida en la Afirmación 2.18, asimismo, $C_i \subset S$ para toda $i = 1, 2, 3, 4$. A continuación, si fuese necesario, se cambiarán las etiquetas de los elementos de los conjuntos W y S , de tal manera que $g(w_1) = \{s_1, s_2\}$. Sea s_3 el único vértice en S tal que $\{s_2, s_3\}$ es uno de los conjuntos C_i y denote con w_2 el único vértice de W tal que $g(w_2) = \{s_2, s_3\}$. Observe que $\chi(\{p_1, p_3\}) = \text{azul}$, en caso contrario los vértices $\{p_1, p_2, p_3\}$ formarían un triángulo rojo, por esta razón, el único vértice s_4 tal que $\{s_3, s_4\}$ es uno de los conjuntos C_i satisface que $s_4 \neq s_1$. Dado que cada vértice de S pertenece a exactamente dos de los cuatro conjuntos C_i , la única posibilidad restante es que $g(w_4) = \{s_1, s_4\}$. Por la manera como se etiquetaron los vértices de W y S , se tiene que

$$\chi(\{p_1, p_2\}) = \chi(\{p_2, p_3\}) = \chi(\{p_3, p_4\}) = \chi(\{p_4, p_1\}) = \text{rojo}.$$

Es decir, los vértices del conjunto $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ inducen un 4-ciclo rojo. ■

Afirmación 2.20. Con la notación de la Afirmación 2.18, para cada $p \in A$ se tiene $\epsilon(p, t) = 1$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ y que $p_1 p_2 p_3 p_4$ es el 4-ciclo rojo inducido por A . Dado que $\chi(\{p, t\}) = \text{azul}$, para todo $p \in A$, por la Afirmación 2.17, se tiene

$$1 \leq \epsilon(p_i, t) \leq 2, \text{ para toda } i = 1, 2, 3, 4.$$

Suponga que $\epsilon(p_i, t) = 2$ para algún i , no se pierde generalidad al suponer que $i = 1$, ya que de ser necesario se pueden reetiquetar los elementos en A . Sea $N_r(p_1) \cap N_r(t) = \{t_1, t_2\}$. Dado que $\epsilon(p_2, t) \geq 1$ y que G no contiene triángulos rojos, existe $t_3 \in N_r(p_2) \cap (N_r(t) - \{t_1, t_2\})$. Similarmente, $\chi(\{p_1, p_3\}) = \text{azul}$, entonces $1 \leq \epsilon(p_1, p_3) \leq 2$, pero $p_2, p_4 \in N_r(p_1) \cap N_r(p_3)$, luego $t_1, t_2, t_3 \notin N_r(p_3)$, así que, necesariamente $N_r(p_3) \cap N_r(t) = \{t_4\}$. Finalmente, $t_1, t_2, t_4 \notin N_r(p_4) \cap N_r(t)$ porque en caso contrario se tendría un triángulo rojo, entonces $t_3 \in N_r(p_4) \cap N_r(t)$, sin embargo, en este caso, $\epsilon(p_2, p_4) = 3$, en contradicción con la Afirmación 2.17. Esto termina la prueba. ■

Ahora, para probar que $R(3, 6) \leq 18$, se hace uso de todas las afirmaciones anteriores. Así, usando la notación de estas afirmaciones, sin pérdida de generalidad, suponga que $p_1p_2p_3p_4$ es el 4-ciclo rojo inducido por el conjunto $A = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ en G . Para cada $i = 1, 2, 3, 4$ se tiene $\{p_{i-1}, p_{i+1}, s_i, t_i\} \subseteq N_r(p_i)$, donde $p_5 = p_1$ y $p_0 = p_4$. Dado que $d_r(p_i) = 5$, existe un único $w_i \in W$ tal que $w_i \in N_r(p_i)$. Ahora, sea $s \in S$, se conoce que s pertenece a exactamente dos de los conjuntos C_i definidos en la Afirmación 2.19, luego $|N_r(s) \cap W| = 2$, además, $|N_r(s) \cap A| = 1$ y $v \in N_r(s)$, dado que $d_r(s) = 5$, se debe tener $\epsilon(s, t) = 1$. Por otro lado, para $t_i \in \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ se tiene $|N_r(t_i) \cap A| = 1$, $|N_r(t_i) \cap S| = 1$, $t \in N_r(t_i)$ y $d_r(t_i) = 5$, luego $|N_r(t_i) \cap W| = 2$. Por lo anterior, se pueden etiquetar los vértices de los conjuntos A, B y $N_r(v)$ de tal forma que $A = \{p_i : i = 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{t_i, w_i : i = 1, 2, 3, 4\}$ y $N_r(v) = \{s_i : i = 1, 2, 3, 4\} \cup \{t\}$ y además,

$$\chi(\{p_i, s_i\}) = \chi(\{p_i, t_i\}) = \chi(\{p_i, w_i\}) = \text{rojo, para } i = 1, 2, 3, 4.$$

Una representación gráfica de las aristas rojas de G se presenta en la Figura 2.8.

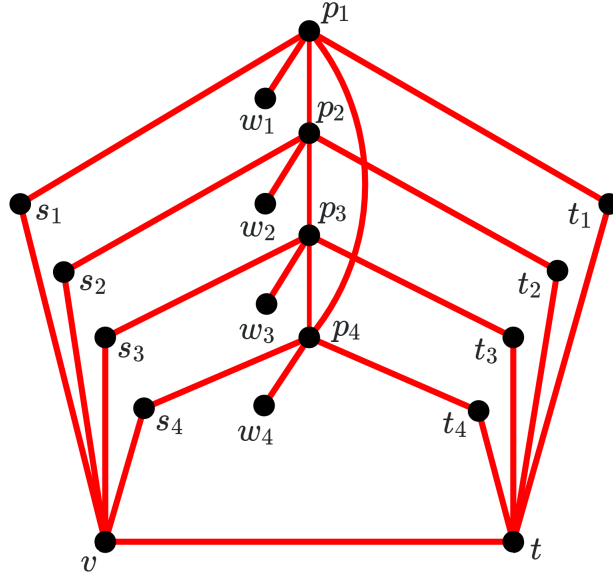


Figura 2.8: Representación de las aristas rojas de G . Modificado de [3].

Dado que $d_r(w_i) = 5$ y la 2-coloración χ de G no contiene triángulos rojos, entonces se tiene

$$N_r(w_1) \cap N_r(v) \subset \{s_2, s_3, s_4\} \text{ y } N_r(w_1) \cap N_r(t) \subset \{t_2, t_3, t_4\}.$$

Además, dado que $\epsilon(w_1, v) = \epsilon(w_1, t) = 2$, en cualquiera de los casos, debe existir $i \in \{2, 3, 4\}$ tal que $\chi(\{w_1, s_i\}) = \chi(\{w_1, t_i\}) = \text{rojo}$. Para el caso $i = 2$, se tiene

$$N_r(w_1) \cap N_r(p_2) = \{s_2, t_2, p_1\},$$

y para el caso $i = 4$, se tiene

$$N_r(w_1) \cap N_r(p_4) = \{s_4, t_4, p_1\},$$

pero en estos dos casos, $\chi(\{w_1, p_i\}) = \text{azul}$, lo que contradice el hecho que $1 \leq \epsilon(w_1, p_i) \leq 2$ establecido por la Afirmación 2.17. Por tanto $i = 3$, es decir $\chi(\{w_1, s_3\}) = \chi(\{w_1, t_3\}) = \text{rojo}$ y $s_3 \in g(w_1)$. Ahora, suponga que $s_2 \in g(w_1)$. Por lo anterior, $\text{rojo} = \chi(\{w_1, s_2\}) \neq \chi(\{w_1, t_2\})$, entonces $\chi(\{w_1, t_4\}) = \text{rojo}$. Ahora, considere el par de vértices $\{t, s_2\}$. Dado que $v \in N_r(s_2) \cap N_r(t)$, entonces existe un único $t_i \in N_r(s_2) \cap N_r(t)$ para $i = 1, 2, 3, 4$. No puede ser t_2 para evitar que el subgrafo K_3 monocromático rojo generado por los vértices $\{s_2, p_2, t_2\}$, no puede ser t_3 para evitar que el subgrafo K_3 monocromático rojo generado por $\{s_2, w_1, t_3\}$ y no puede ser t_4 para evitar que el subgrafo K_3 monocromático rojo generado por $\{s_2, w_1, t_4\}$, por tanto la única posibilidad es que $t = 1$, es decir, $\chi(\{s_2, t_1\}) = \text{rojo}$, pero si esto ocurre, entonces $N_r(s_2) \cap N_r(p_1) = \{p_2, w_1, t_1\}$, lo que contradice la Afirmación 2.17. La prueba es similar suponiendo $s_4 \in g(w_1)$. Por tanto, en la 2-coloración χ de G debe existir un subgrafo K_3 monocromático rojo o un subgrafo K_6 monocromático azul. ■

Teorema 2.21. $R(3, 6) = 18$

Demostración. En Apéndice A, se muestra que $R(3, 6) > 17$ y por el Teorema 2.14, se concluye que $R(3, 6) = 18$. ■

2.3.6 Número de Ramsey $R(3, 7)$

Para la prueba de este número de Ramsey es necesario añadir nueva notación y definiciones a este trabajo.

Definición 2.22. Sean $G = K_n$ un grafo y $\chi : E(G) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ una 2-coloración de G . Con $C_\chi(G) = t$ se denota el máximo número de vértices tal que G contiene un subgrafo K_t monocromático de color rojo y con $I_\chi(G) = r$ se denota el máximo número de vértices tal que G contiene un subgrafo K_r monocromático de color azul. Además, si se fija la 2-coloración χ se escribirá $C(G)$ en lugar de $C_\chi(G)$ e $I(G)$ en lugar de $I_\chi(G)$.

Definición 2.23. (x, y) -grafo.

Sea χ una 2-coloración de un grafo completo G . Si $x > C_\chi(G)$ e $y > I_\chi(G)$ se dice que G es un (x, y) -grafo con respecto a χ .

Definición 2.24. Complemento de una 2-coloración.

Sea G un grafo completo y χ una 2-coloración de G . El complemento de χ es una 2-coloración $\bar{\chi} : E(G) \rightarrow \{\text{rojo}, \text{azul}\}$ definida por

$$\bar{\chi}(\{v, w\}) = \begin{cases} \text{azul} & \text{si } \chi(\{v, w\}) = \text{rojo.} \\ \text{rojo} & \text{si } \chi(\{v, w\}) = \text{azul.} \end{cases}$$

Lema 2.25. G es un (x, y) -grafo con respecto a la 2-coloración χ , si y solo si, G es un (y, x) -grafo con respecto a la 2-coloración $\bar{\chi}$.

Demostración. G es un (x, y) -grafo si y solo si,

$$x > C_\chi(G) = I_{\bar{\chi}}(G) \quad e \quad y > I_\chi(G) = C_{\bar{\chi}}(G),$$

luego, G es un (y, x) -grafo con respecto a $\bar{\chi}$. ■

Observación 2.26. Sean $m, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, se define

$$R'(m, n) = R(m, n) - 1.$$

En consecuencia, para cada grafo completo G tal que $|V(G)| \leq R'(m, n)$, existe una 2-coloración χ tal que $C_\chi(G) < m$ y $I_\chi(G) < n$. Es decir, G es un (m, n) -grafo con respecto a χ . Así,

$$R'(m, n) = \text{máx} \{|V(G)| : G \text{ es un } (m, n) \text{ - grafo con respecto a } \chi\}.$$

Lema 2.27. Sea χ una 2-coloración de un grafo $G = K_n$. Si G es un (x, y) -grafo con respecto a χ , entonces, para cada $v \in V(G)$ se cumple

$$(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq d_r(v) \leq R'(x - 1, y).$$

Demostración. Sea H un subgrafo de G tal que $V(H) = N_r(v)$, luego $\chi|_H$ es una 2-coloración del subgrafo completo H , así, $I_{\chi|_H}(H) \leq I_\chi(G) < y$. Además,

$$C_{\chi|_H}(H) \leq C_\chi(G) - 1 < x - 1.$$

Así que, H es un $(x - 1, y)$ -grafo con respecto a $\chi|_H$, es decir, $d_r(v) \leq R'(x - 1, y)$. Por otro lado, sea H' el subgrafo de G tal que $V(H') = N_a(v)$, luego,

$$I_{\chi|_{H'}}(H') \leq I_\chi(G) - 1 < y - 1 \quad \text{y} \quad C_{\chi|_{H'}}(H') \leq C_\chi(G) < x.$$

Es decir, H' es un $(x, y - 1)$ -grafo con respecto a $\chi|_{H'}$, luego, $d_a(v) \leq R'(x, y - 1)$. Además, se tiene que $d_r(v) + d_a(v) = n - 1$, por tanto,

$$d_r(v) \geq (n - 1) - R'(x, y - 1).$$

■

Definición 2.28. Sea G un (x, y) -grafo completo con respecto a una 2-coloración χ . Se define

$$\sigma(G) = R'(x - 1, y) - \delta_r(G).$$

Lema 2.29. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si G es (x, y) -grafo con respecto a una 2-coloración χ , entonces

$$\text{a) } n \leq R'(x - 1, y) + R'(x, y - 1) + 1 - \sigma(G).$$

$$\text{b) } \sigma(G) \leq R'(x - 1, y) + R'(x, y - 1) + 1 - n.$$

Demostración. Por el Lema 2.27, se tiene $(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq d_r(p)$ para todo $p \in V(G)$, eligiendo p de tal forma que $d_r(p) = R'(x - 1, y) - \sigma(G)$, entonces

$$(n - 1) - R'(x, y - 1) \leq R'(x - 1, y) - \sigma(G),$$

de donde se obtiene a) y b) despejando n y $\sigma(G)$ respectivamente. ■

Lema 2.30.

$$R'(x, y) \leq R'(x, y - 1) + R'(x - 1, y) + 1.$$

La desigualdad estricta se cumple cuando $R'(x, y - 1)$ y $R'(x - 1, y)$ son ambos números pares.

Demostración. Por la observación 2.26, $R'(m, n) = R(m, n) - 1$ y por Teorema 2.7 ítems (4) y (5) se tiene que $R(x, y) \leq R(x, y - 1) + R(x - 1, y)$ y la desigualdad estricta se cumple cuando $R(x, y - 1)$ y $R(x - 1, y)$ son ambos números pares, así

$$R'(x, y) + 1 \leq R'(x, y - 1) + 1 + R'(x - 1, y) + 1.$$

$$R'(x, y) \leq R'(x, y - 1) + R'(x - 1, y) + 1.$$

■

Definición 2.31. Sea $G = K_n$ un (x, y) -grafo completo con respecto a la 2-coloración χ . A un vértice $p \in V(G)$ se lo denomina preferido cuando al conjunto de vértices $V(G)$ se lo divide en dos subconjuntos complementarios, $N_r(p)$ y $N_a(p)$. Además, si $H_1(p) = (V', E')$ donde $V' = N_r(p)$ y $H_2(p) = (V'', E'')$ donde $V'' = N_a(p)$, entonces por la prueba del Lema 2.27 se tiene que $H_1(p)$ es un $(x - 1, y)$ -grafo con respecto a χ y $H_2(p)$ es un $(x, y - 1)$ -grafo con respecto a χ .

Para un (x, y) -grafo completo G , se definen los números $r_j = R'(x - 1, y) - j$, $s_j = |\{v \in V(G) : d_r(v) = r_j\}|$ y $e = |\{\{v, w\} \in E(G) : \chi(\{v, w\}) = \text{rojo}\}|$. Además, para un vértice preferido p considere los subgrafos $H_1(p)$ y $H_2(p)$ definidos anteriormente, así, se definen $t_j = |\{v \in V' : d_r(v) = r_j\}|$ y

$$e_1(p) = |\{\{v, w\} \in E' : \chi(\{v, w\}) = \text{rojo}\}| \text{ y } e_2(p) = |\{\{v, w\} \in E'' : \chi(\{v, w\}) = \text{rojo}\}|.$$

Lema 2.32. Si $G = K_n$ es un (x, y) -grafo con respecto a una 2-coloración χ y considerando los números anteriores para un vértice preferido $p \in V(G)$, se cumple la siguiente ecuación

$$e_2(p) - e_1(p) = R'(x - 1, y) \left[\frac{n}{2} - R'(x - 1, y) + j \right] + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Demostración. Sean G un (x, y) -grafo completo con respecto a la 2-coloración χ y $p \in V(G)$ un vértice preferido. Ahora, se contará el número de aristas rojas de G de dos maneras diferentes.

Por definición 2.28 se tiene que $\sigma(G) = R'(x - 1, y) - q$ donde $q = \delta_r(G)$, luego,

$$\begin{aligned} 2e &= qs_{\sigma(G)} + (q + 1)s_{\sigma(G)-1} + (q + 2)s_{\sigma(G)-2} + \cdots + R'(x - 1, y)s_0 \\ e &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (R'(x - 1, y) - j)s_j = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j s_j \end{aligned}$$

Similarmente, se cuenta el cardinal $|N_r(w_i)|$ para cada $w_i \in H_1(p)$, luego $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j t_j$ cuenta una vez las aristas rojas que salen de $H_1(p)$ y dos veces las aristas rojas de $H_1(p)$, entonces

$$e = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j t_j - e_1(p) + e_2(p).$$

Eliminado e se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j s_j &= \sum_{j=1}^{\sigma(G)} r_j t_j - e_1(p) + e_2(p), \\ e_2(p) - e_1(p) &= \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \left(\frac{s_j}{2} - t_j \right) (R'(x-1, y) - j). \end{aligned}$$

Además, se tiene que $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j = n$ y $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j = r_j$, por tanto

$$\begin{aligned} e_2(p) - e_1(p) &= \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \left(\frac{s_j}{2} - t_j \right) (R'(x-1, y) - j) \\ &= \sum_{j=0}^{\sigma(G)} R'(x-1, y) \frac{s_j}{2} - \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \frac{s_j}{2} - \sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j R'(x-1, y) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j t_j \\ &= R'(x-1, y) \left(\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j - \sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j \right) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right) \\ &= R'(x-1, y) \left(\frac{n}{2} - r_j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right). \end{aligned}$$

■

Lema 2.33. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ y $p \in V(G)$ un vértice preferido tal que $d_r(p) = r_j$, entonces

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

Demostración. Por el Lema 2.32 se tiene

$$e_2(p) - e_1(p) = R'(x-1, y) \left(\frac{n}{2} - r_j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right),$$

Sin embargo, como $R(2, y) = y$, entonces $R'(2, y) = y - 1$. Además, por definición $C_\chi(G) < 3$, es decir $e_1 = 0$, por tanto.

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right).$$

■

Lema 2.34. Sea G un $(3, y)$ -grafo completo sobre n vértices y χ una 2-coloración. Si existen vértices p y p' tal que $d_r(p) = d_r(p') = r_j$, donde $\chi(\{p, p'\}) = \text{rojo}$, entonces prefiriendo uno de los vértices, se obtiene

$$e_2(p) \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) \quad \text{o} \quad e_2(p') \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right).$$

Demostración. Usando la notación del Lema 2.32, sea $t'_j = |\{v \in N_r(p') : d_r(v) = r_j\}|$ y $e_2(p')$ el número de aristas rojas en $H_2(p')$ cuando p' es preferido. Como $\chi(\{p, p'\}) = \text{rojo}$ y $C_\chi(G) < 3$, entonces $N_r(p) \cap N_r(p') = \emptyset$, así $t_j + t'_j \leq s_j$ para todo j . Además,

$$\sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t'_j - \frac{s_j}{2} \right) = \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j + t'_j - s_j) \leq 0.$$

Ahora, por el Lema 2.33, se tiene

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t_j - \frac{s_j}{2} \right),$$

y

$$e_2(p') = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j \left(t'_j - \frac{s_j}{2} \right),$$

para p y p' respectivamente. Luego, sumando las dos igualdades se tiene

$$e_2(p) + e_2(p') = 2(y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right) + \sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j + t'_j - s_j).$$

Por tanto

$$e_2(p) + e_2(p') \leq 2(y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$$

donde $e_2(p) \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$ o $e_2(p') \leq (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 1 + j \right)$. ■

Lema 2.35. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si $\sigma(G) = 1$ y G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ , entonces existe un vértice $p \in V(G)$ con $d_r(p) = r_1$ donde

$$e_2(p) \leq (y-1) \left[\frac{n}{2} - y + 2 \right].$$

Además, si la igualdad se cumple para todos los vértices $p_i \in V(G)$ con $d_r(p) = r_1$, entonces el conjunto de estos vértices se divide en dos clases, cada una con $s_1/2$ vértices tal que las aristas que unen los vértices de estas dos clases son todas de color rojo y las aristas que unen vértices de la misma clase son todas de color azul.

Demostración. Si hay dos vértices $p, p' \in V(G)$ tal que $d_r(p) = r_1 = d_r(p')$ y $\chi(\{p, p'\}) = \text{rojo}$, entonces el Lema 2.34 proporciona la desigualdad. Ahora, sea $A = \{p_1, p_2, \dots, p_{s_1}\}$ todos los vértices tal que $d_r(p_i) = r_1$. Si $\chi(\{p_i, p_j\}) = \text{azul}$, para

todo $i \neq j$ y $\sigma(G) = 1$, entonces $\sum_{j=1}^{\sigma(G)} j(t_j - s_j/2) = t_1 - s_1/2$, luego $t_1 = 0$ y por el Lema 2.33

$$e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right) - \frac{s_1}{2}.$$

Suponga que $e_2(p) = (y-1) \left(\frac{n}{2} - y + 2 \right)$ se cumple para todo $p_i \in A$, luego $t_1 = \frac{s_1}{2}$. Sean $p, q \in A$ donde $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, se define los conjuntos

$$A_p = \{w \in N_r(p) : d_r(w) = r_1\} \text{ y } A_q = \{w' \in N_r(q) : d_r(w') = r_1\}.$$

Observe que $|A_p| = |A_q| = \frac{s_1}{2}$ y para evitar triángulos rojos, se tiene $A_p \cap A_q = \emptyset$, luego $|A_p| + |A_q| = s_1$. Ahora, suponga que existe un vértice $z \in A_q$ tal que $A_p \neq A_z$, es decir, existe $t \in A_z$ y $t \notin A_p$, si esto ocurre, entonces necesariamente $t \in A_q$, lo que es una contradicción, ya que los vértices $\{q, z, t\}$ forman un triángulo rojo. Por tanto, para todo $z \in A_q$ se tiene que $A_p = A_z$. Así, A se divide en dos clases $C_1 = N_r(p_1) \cap A$ y $C_2 = A - (N_r(p_1) \cap A)$. ■

En vista de los Lemas precedentes, es claro que el número de aristas rojas en un (x, y) -grafo con respecto a una 2-coloración χ es información útil. Ahora, se deriva una fórmula que da límites inferiores en el número de aristas rojas de un (x, y) -grafo sobre n vértices con respecto a una 2-coloración χ .

Definición 2.36. Si $G = K_n$ es un (x, y) -grafo con respecto a χ , entonces $e(x, y, n)$ denota el número mínimo de aristas rojas posibles en G .

Observe que dado un grafo $G = K_n$ donde G es un (x, y) -grafo con respecto a χ y $p \in V(G)$ para el cual $d_r(p) = d$, entonces por el Lema 2.27 $H_2(p)$ es un $(x, y-1)$ -grafo con respecto a χ con $n-d-1$ vértices, así $e_2 \geq e(x, y-1, n-d-1)$.

Lema 2.37. Sea $G = K_n$ un grafo completo. Si G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ con e aristas rojas, entonces

$$ne \geq \sum_{i=0}^{\sigma(G)} \{e(3, y-1, n-r_i-1) + r_i^2\} s_i,$$

donde r_i y s_i están definidos en el Lema 2.32.

Demostración. Usando la notación del Lema 2.32, sea $G = K_n$ un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ y sea p un vértice preferido con $d_r(p) = r_i$. Observe que en un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ se tiene que $e_1 = 0$ ya que $C(G) < 3$, es decir que $H_1(p)$ forma un subgrafo completo donde todas sus aristas son de color azul. Así, sea $\beta_{ij}(p)$ el número de vértices $v \in H_1(p)$ tal que $d_r(v) = r_j$, es decir $\beta_{ij}(p) = |\{v \in H_1(p) : d_r(v) = r_j\}|$, luego $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j \beta_{ij}(p)$ cuenta el total de aristas rojas que salen de $H_1(p)$, por tanto

$$\sum_{j=0}^{\sigma(G)} r_j \beta_{ij}(p) = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (y-1-j) \beta_{ij}(p) = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (y-1-i) \beta_{ij}(p) + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j) \beta_{ij}(p),$$

donde $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} (y-1-i)\beta_{ij}(p) = r_i \sum_{j=0}^{\sigma(G)} \beta_{ij}(p) = r_i |H_1(p)| = r_i^2$, luego el total de aristas rojas en G está dado por

$$e = e_2(p) + r_i^2 + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j)\beta_{ij}(p).$$

Se sabe que $e_2(p) \geq e(3, y-1, n-r_i-1)$, luego,

$$e \geq e(3, y-1, n-r_i-1) + r_i^2 + \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j)\beta_{ij}(p).$$

Si se suma esto sobre todos los vértices $p \in V_i$, donde $V_i = \{p \in V(G) : d_r(p) = r_i\}$, note que el término

$$\sum_{i=0}^{\sigma(G)} \sum_{p \in V_i} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} (i-j)\beta_{ij}(p) = 0.$$

En efecto, sea $A = [a_{ij}]$, donde $a_{ij} = \sum_{p \in V_i} (i-j)\beta_{ij}(p)$, como $\sum_{p \in V_i} \beta_{ij}(p) = \sum_{p \in V_i} \beta_{ji}(p)$, la matriz A es antisimétrica, por tanto

$$\sum_{i=0}^{\sigma(G)} \sum_{j=0}^{\sigma(G)} a_{ij} = 0.$$

Y para los demás términos se tiene

$$ne = \sum_{i=0}^{\sigma(G)} s_i e \geq \sum_{i=0}^{\sigma(G)} s_i (e(3, y-1, n-r_i-1)) + \sum_{i=0}^{\sigma(G)} s_i (r_i^2).$$

Por tanto

$$ne \geq \sum_{i=0}^{\sigma(G)} \{e(3, y-1, n-r_i-1) + r_i^2\} s_i.$$

■

Con éste Lema y el Lema 2.32 es posible calcular el valor exacto o cotas inferiores del número $e(x, y, n)$ para un (x, y) -grafo con respecto a χ . La existencia de tales grafos se evitará por el momento.

Lema 2.38. $e(3, 3, 4) = 2$, $e(3, 3, 5) = 5$, $e(3, 4, 7) = 6$, $e(3, 4, 8) \geq 10$, $e(3, 5, 9) = 7$, $e(3, 5, 10) = 10$, $e(3, 5, 11) \geq 15$, $e(3, 5, 12) \geq 20$.

Demostración. Las igualdades se pueden probar por construcción, por ejemplo $e(3, 4, 7) = 6$. Sea $G = K_7$ un $(3, 4)$ -grafo completo con respecto a χ . Suponga que en G existe un vértice p tal que $d_r(p) = 0$, luego $d_a(p) = 6$, como $R(3, 3) = 6$, entonces en $H_2(p)$ existe un subgrafo K_3 monocromático de color azul, sin embargo, los vértices que forman el K_3 monocromático azul junto con el vértice p forman un subgrafo K_4

monocromático azul en G , lo que es una contradicción. Ahora suponga $d_r(p) = 1$, luego se tiene que $H_2(p)$ es un $(3, 3)$ -grafo con respecto a χ sobre 5 vértices, como $e(3, 3, 5) = 5$ y las 5 aristas rojas junto con la arista roja disjunta forman un $(3, 4)$ -grafo con al menos 6 aristas rojas. Similarmente se prueba para $d_r(p) \neq 1$.

Las desigualdades se prueban usando los Lemas 2.37 y 2.32, por ejemplo $e(3, 4, 8) \geq 10$. Sea $G = K_8$ un $(3, 4)$ -grafo completo con respecto a χ con $e = e(3, 4, 8)$. Por el Lema 2.27, $\sigma(G) = 2$.

Por el Lema 2.37 se tiene que

$$8e \geq (e(3, 3, 4) + 9)s_0 + (e(3, 3, 5) + 4)s_1 = 11s_0 + 9s_1.$$

Usando el Lema 2.32, se tiene $2e = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j r_j = 3s_0 + 2s_1$ y $8 = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j = s_0 + s_1$. Es decir, con estos Lemas se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 11s_0 + 9s_1 &\leq 8e \\ 3s_0 + 2s_1 &= 2e \\ s_0 + s_1 &= 8. \end{aligned}$$

La solución a este sistema que minimiza e es $s_0 = s_1 = 4$ y $e = 10$. Para minimizar el sistema se usó programación entera mixta (MIP) en Sagemath. (Ver Apéndice B). ■

Lema 2.39. Si $G = K_{13}$ es un $(3, 5)$ -grafo completo con respecto a χ , entonces

$$e(3, 5, 13) = 26.$$

Además, para todo $p \in V(G)$ se tiene que $d_r(p) = 4$.

Demostración. Empleando el Lema 2.27, se tiene que $\sigma(G) = 0$. Usando el Lema 2.37, se obtiene que $13e \geq (e(3, 4, 8) + 16)s_0 = 26s_0$, es decir que $e = 2s_0$. Por otro lado, $13 = \sum_{j=0}^{\sigma(G)} s_j = s_0$, por tanto $e \geq 26$. Además, como $s_0 = |\{v \in V(G) : d_r(v) = r_0\}|$ es igual a 13 y $r_0 = 4$ implica que, para todo $p \in V(G)$ se tiene que $d_r(p) = 4$. ■

Lema 2.40.

$$e(3, 6, 17) \geq 38.$$

Demostración. Usando el Lema 2.27 se tiene que $\sigma(G) = 3$. Además, por el Lema 2.37 se obtiene

$$17e \geq (e(3, 5, 11) + 25)s_0 + (e(3, 5, 12) + 16)s_1 + (e(3, 5, 13) + 9)s_2 = 40s_0 + 36s_1 + 35s_2.$$

Empleando el Lema 2.32, se tiene que $2e = 5s_0 + 4s_1 + 3s_2$ y $17 = s_0 + s_1 + s_2$. Luego, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} 40s_0 + 36s_1 + 35s_2 &\leq 17e \\ 5s_0 + 4s_1 + 3s_2 &= 2e \\ s_0 + s_1 + s_2 &= 17. \end{aligned}$$

La solución a este sistema que minimiza e es $s_0 = 8$, $s_1 = 9$, $s_2 = 0$ y $e = 38$. Nuevamente, para minimizar el sistema se usó programación entera mixta (MIP) en Sagemath. (Ver Apéndice C). ■

Para probar que $e(3, 6, 17) \geq 40$, es necesario algunas técnicas adicionales que se presentan a continuación.

Definición 2.41. Sean G un grafo completo y χ una 2-coloración de G . Un conjunto independiente máximo en G , se refiere a un conjunto independiente en G que contiene $I_\chi(G)$ vértices. Un vértice $p \in V(G)$ se llamará esencial si pertenece a todo conjunto independiente máximo de G .

Lema 2.42. Sean χ una 2-coloración del grafo completo G y $p, q \in V(G)$ tal que $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$. Si χ' es la 2-coloración de G' tal que $\chi'(\{p, q\}) = \text{azul}$, entonces

- (1) Cualquier conjunto independiente en G con respecto a χ es independiente en G' con respecto a χ' .
- (2) Si p o q no son esenciales en G' , entonces $I_{\chi'}(G') = I_\chi(G)$.
- (3) Si p y q son esenciales en G' , entonces $I_{\chi'}(G') = I_\chi(G) + 1$.
- (4) Si p es esencial en G , entonces p es esencial en G' y q no es esencial en G' .

Demostración. (1) Por la construcción de χ' , si S es un conjunto independiente en G , como $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$ y esa arista roja no está en S , luego S es independiente en G' .

- (2) Si p no es esencial en G' , existe un conjunto independiente máximo T en G' tal que $p \notin T$, luego T también es un conjunto independiente máximo en G , es decir $I_\chi(G) = I_{\chi'}(G')$, la prueba es similar cuando q no es esencial en G' .
- (3) Observe que, si $I_\chi(G) = I_{\chi'}(G')$, entonces cualquier conjunto independiente máximo en G es también máximo en G' y no debe contener a p y q al mismo tiempo. Luego si p y q son esenciales en G' , entonces $I_\chi(G) < I_{\chi'}(G')$; sin embargo si se quita p o q de un conjunto independiente máximo en G' se obtiene un conjunto independiente máximo en G , luego $I_{\chi'}(G') = I_\chi(G) + 1$.
- (4) Sea p esencial en G . Suponga que p no es esencial en G' , por (2) existe un conjunto independiente máximo $T \in G$ tal que $p \notin T$, es decir que p no es esencial en G , luego p debe ser esencial en G' . Suponga que q es esencial en G' , luego por (3), si p y q son esenciales en G' , entonces ninguno de los dos p y q son esenciales en G lo que también contradice la hipótesis. por tanto si p es esencial en G , entonces p debe ser esencial en G' pero q no puede ser esencial en G' . ■

Lema 2.43. Sean χ una 2-coloración de un grafo completo G y g_i el número de subgrafos conexos de G con i aristas rojas. Si G tiene circunferencia roja z , entonces para todo entero $0 \leq w < z$,

$$(-1)^w I_\chi(G) \leq (-1)^w \sum_{i=0}^w (-1)^i g_i.$$

La igualdad se cumple si G es libre de ciclos rojos y la sumatoria es sobre todos los subgrafos conexos.

Demostración. La prueba se hará por inducción sobre el número de aristas rojas del grafo.

Hipótesis inductiva (HI) Sea G un grafo completo con circunferencia roja mayor a w , sean χ una 2-coloración del grafo G y $p \in V(G)$. Existe una partición de los subgrafos

conexos de G con w o menos aristas rojas entre dos clases, los subgrafos de una clase serán llamados positivos y los de la otra clase negativos. Para $i = 0, 1, 2, \dots, w - 1$ existen funciones $f_i : S_i^+ \rightarrow S_{i+1}^-$ (donde S_j^+ es el conjunto de subgrafos positivos con j aristas rojas y S_j^- el conjunto de subgrafos negativos con j aristas rojas). También se cumplen las siguientes condiciones.

- (1) S_0^- es un conjunto independiente máximo;
- (2) Si $p \in S_0^-$, entonces p es esencial en G ;
- (3) f_i es biyectiva para $i = 1, 2, \dots, w - 1$;
- (4) Para todo subgrafo positivo H con menos de w aristas rojas, p es un vértice de H si y solo si p es un vértice de $f_i(H)$;
- (5) Si G tiene w o menos aristas rojas, entonces $S_w^+ = \emptyset$.

Nota: (Elección de S_0^- y S_0^+). Para $p \in V(G)$, si p es esencial defina S_0^- como cualquier conjunto independiente máximo, si p no es esencial, defina S_0^- como uno de los conjuntos independientes máximos tal que $p \notin S_0^-$ y defina S_0^+ como el complemento de S_0^- .

Observe primero que, si la HI se cumple para un grafo G , entonces $\sum_{i=0}^w (-1)^i g_i = I_\chi(G) + (-1)^w |S_w^+|$, (pues S_i^+ cancela S_{i+1}^- por la biyección), luego la proposición vale para G ; multiplicando ambos lados por $(-1)^w$:

$$(-1)^w \sum_{i=0}^w (-1)^i g_i = (-1)^w I_\chi(G) + (-1)^{2w} |S_w^+| = (-1)^w I_\chi(G) + |S_w^+|, \text{ donde } |S_w^+| \geq 0.$$

Segundo, note que la HI se cumple para todo grafo con todas sus aristas azules, además si G es un grafo que satisface la HI para algún vértice p , entonces G unido con cualquier vértice aislado también va a satisfacer la hipótesis (condiciones (2) y (4) se satisfacen trivialmente para cualquier vértice aislado). Para $z = \infty$ la igualdad se cumple ya que no hay ciclos rojos y la sumatoria es sobre todos los subgrafos conexos, hay varios casos en el que $z = \infty$, ejemplo: suponga un grafo G con k vértices donde en su 2-coloración χ solo existen 3 aristas rojas, pueden ocurrir dos casos,

si las 3 aristas rojas están separadas entonces, $g_0 = k$ y $g_1 = 3$, por tanto,

$$\begin{aligned} (-1)^w I_\chi(G) &= (-1)^w (g_0 - g_1 + \dots + (-1)^w g_w) \\ (-1)^w (k - 3) &= (-1)^w (k - 3 + 0 - \dots + 0 * (-1)^w), \end{aligned}$$

si hay 1 arista roja separada y 2 aristas rojas conectadas, entonces $g_0 = k, g_1 = 3$ y $g_2 = 1$, por tanto,

$$\begin{aligned} (-1)^w I_\chi(G) &= (-1)^w (g_0 - g_1 + \dots + (-1)^w g_w) \\ (-1)^w (k - 2) &= (-1)^w (k - 3 + 1 - \dots + 0 * (-1)^w), \end{aligned}$$

Para $z = 3$, suponga un grafo G con k vértices donde en su 2-coloración χ existen 3 aristas rojas las cuales forman un K_3 monocromático rojo, suponga que $\{p, q, r\}$ son los vértices del triángulo rojo, como p no es esencial, (denotando como pq al subgrafo conexo de una arista roja $\{p, q\}$) se pueden definir

$S_0^- = \{s \in V(G) : s \text{ es aislado}\} \cup \{r\}$, $S_0^+ = \{p, q\}$, $S_1^- = \{pq, qr\}$, $S_1^+ = \{pr\}$, $S_2^- = \{pqr\}$, $S_2^+ = \{prq, pqr\}$, definiendo estos conjuntos se cumple la HI y se verifica la desigualdad para $w = 0, 1, 2$. Ahora, suponga que la HI se satisface para todos los grafos con menos de n aristas rojas. Sea G un grafo con n aristas rojas y sea $p \in V(G)$ no aislado.

Caso 1: p es esencial en G .

Elija cualquier arista roja de G que tenga a p como un extremo y llame q al otro extremo. Sea χ' la 2-coloración de G' tal que $\chi'(\{p, q\}) = \text{azul}$. Aplicando la HI a G' usando el vértice p , sea la partición de los subgrafos conexos denotada por π' y las funciones f'_i . Además, aplicando de nuevo la HI para el grafo G' y el vértice q , sea π'' la partición de subgrafos conexos y f''_i las funciones en este caso. Dado un subgrafo conexo H de G teniendo w o menos aristas rojas, note que es libre de ciclos rojos (ya que G tiene circunferencia roja $z > w$). Luego, si H contiene una arista roja entre dos vértices p y q , por la construcción de χ'' , $\chi'(\{p, q\}) = \text{azul}$ en G' , es decir que H se divide en 2 componentes rojas. Llame a la componente roja que contiene a p la p -componente roja de H y a la otra la q -componente roja de H . Los subgrafos conexos de G con w o menos aristas rojas son ahora particionados en las clases positivas y negativas de la siguiente forma, (denotando con $\text{sig}_\pi(H)$ como el signo que toma H con relación a la partición π). Si $H \in \pi'$, entonces $\text{sig}_\pi(H) = \text{sig}_{\pi'}(H)$ y si $H \notin \pi'$, entonces $\text{sig}_\pi(H) = \text{sig}_{\pi''}(q - \text{componente roja de } H)$, es decir H conserva el signo de su q -componente roja bajo la partición π'' . La asignación de los subgrafos positivos es especificado de la siguiente forma: Si H es positivo con $i < w$ aristas rojas y $H \in \pi'$, se define $f_i(H) = f'_i(H)$, pero si H es positivo con $i < w$ aristas rojas y $H \notin \pi'$, entonces $f_i(H)$ será igual al grafo conexo con p -componente roja igual que en H y la q -componente roja igual a f''_i aplicada a la q -componente roja de H . Note que este será un subgrafo conexo de G , ya que (4) de la HI asegura que q es un vértice de f''_i aplicado a la q -componente roja de H . Ahora, ya se ha definido la partición π y las funciones f_i de G con el vértice p , luego se prueba que cumple con las condiciones de la HI. Por el Lema 2.42, $I_\chi(G) = I_{\chi'}(G')$ y p es esencial en G' , por tanto (1) y (2) de la HI se satisfacen, (note que todos los vértices son particionados por π'). Para probar (3), seleccione un subgrafo H en G de la clase negativa con $i + 1$ aristas rojas con $i \geq 0$. Suponga que $H \in \pi'$, como f'_i es biyectiva, existe un único subgrafo H' con i aristas rojas tal que $f_i(H') = f'_i(H') = H$. Ahora, suponga que $H \notin \pi'$, dado que $q \in S_0^+$, cualquier $H \in \pi'$ cuya q -componente roja es el vértice aislado q debe ser de la clase positiva, por tanto la q -componente roja de H contiene por lo menos una arista roja. Como f''_i satisface las condiciones (3) y (4) de HI, luego existe un subgrafo $K \in \pi''$ tal que $q \in V(K)$ y $f''_i(K)$ equivale a la q -componente roja de H , luego el único subgrafo conexo H' con q -componente roja K , p -componente roja igual que el de H es asignado en H por f_i y es único. La condición (4) se sigue directamente del hecho de que f'_i satisface (4) y todos los subgrafos no asignados por f'_i contienen la arista roja entre p y q , por lo tanto contienen a p de cualquier forma. Finalmente, considere el caso en que G tiene w o menos aristas rojas. Si G tiene menos de w aristas rojas o si G no es conexo, entonces $S_w^+ = \emptyset$. Ahora, si G es conexo y tiene w aristas rojas, existe un solo subgrafo T con w aristas rojas, la q -componente roja de T es el subgrafo máximo

conexo de G' que contiene a q (observe que tiene menos de w aristas rojas). El hecho de que f'' debe satisfacer (4) requiere de la q -componente roja de T , en consecuencia T debe estar en la clase negativa, por tanto $S_w^+ = \emptyset$.

Caso 2: p no es esencial en G .

Elija cualquier arista roja con p como uno de los extremos y sean q y G' como el caso 1.

Caso 2a: $I_\chi(G) = I_{\chi'}(G')$.

Por el Lema 2.42 se sabe que p no es esencial en G' . En este caso se aplica la HI al grafo G' usando el vértice p y se usa solo las funciones f'_i para definir f_i . Para este caso, los subgrafos no contenidos en π' son particionados y asignados por sus p -componentes rojas. La verificación de las condiciones (1), (2), (3), (4), y (5) es igual que en el caso 1.

Caso 2b: $I_\chi(G) = I_{\chi'}(G') - 1$

De nuevo, por el Lema 2.42, p y q son esenciales en G' . Como en el caso 1, se aplica la HI a G' usando a p y a G' usando al vértice q , se realiza el procedimiento del caso 1 con una excepción. Como q es esencial, $q \in S_0^-$, pero cada subgrafo conexo H de G' cuyo q componente rojo consiste en el vértice aislado q sería de signo negativo aun sin ser la imagen de algún subgrafo bajo la función f_i , por lo tanto, los subgrafos que contienen a la arista roja entre p y q van a ser clasificados y asignados de acuerdo a sus q componentes rojas a menos que sus q -componentes rojas consistan en un único vértice. En este último caso se particiona y asigna de acuerdo a sus p -componentes rojas.

Aún quedan dos detalles menores. Primero, la arista roja entre p y q tiene signo negativo, pero no es la imagen de f_i . En segundo lugar, S_0^- es independiente en G' pero no en G . Ambos detalles se corrigen removiendo p de S_0^- (ver Lema 2.42), esto es, poniendo en S_0^+ y asignando p sobre la arista roja entre p y q . La verificación de las condiciones (1), (2), (3), (4) y (5) son rutinarios. Por lo tanto, la proposición ha sido demostrada. ■

Para los siguientes Lemmas es necesario dar algunas definiciones adicionales.

Sea $G = K_n$ un $(3, y)$ -grafo completo con respecto a χ . Considere un conjunto independiente H_1 de G y sea H_2 el subgrafo generado por los vértices restantes. Sea G_j el conjunto de subgrafos conexos de H_2 con j aristas rojas. Defina $r_i(j) = |\{A \in G_j : \sum_{u \in A} |N_r(H_1, u)| = i\}|$. Además, para K un subgrafo de H_2 defina

$$\omega(K) = |\{r \in H_1 : \chi(\{r, p\}) = \text{rojo, para algun } p \in K\}|.$$

$$\mu(K) = \sum_{u \in K} |N_r(H_1, u)|.$$

Teniendo en cuenta esto, se puede definir $r_i(j) = |\{A \in G_j : \mu(A) = i\}|$.

Definición 2.44. Sea $p \in H_2$. Se dice que p está sobre un r -subconjunto S de H_1 si $N_r(p) \cap H_1 \subseteq S$. Además, defina $\text{supp}(p) = \{u \in H_1 : \chi(\{p, u\}) = \text{rojo}\}$.

Definición 2.45. Sea S un r -subconjunto de H_1 . Se define el subgrafo T soportado por S como el subgrafo de H_2 generado por todos los vértices $p \in H_2$ tales que p está sobre S .

Definición 2.46. Sea $K \in G_j$. Se dice que un r -subconjunto $S \subseteq H_1$ soporta al subgrafo K si existe un subgrafo $T \subseteq H_2$ tal que

- (i) $K \subseteq T$.
- (ii) T es soportado por S .

Sea G un $(3, y)$ - grafo con respecto a una 2-coloración χ . Si H_1 es un conjunto independiente de G con v vértices y $H_2 \subseteq (G - H_1)$ tal que $N_r(p) \cap H_1 \neq \emptyset$ para todo $p \in H_2$, entonces

Lema 2.47. Para cada $K \in G_j$ existe un único subgrafo $T \subseteq H_2$ tal que

- (i) $K \subseteq T$.
- (ii) T es soportado por un r -subconjunto S .

Demostración. Sean

$$S = \{q \in H_1 : q \in N_r(p) \text{ para algún } p \in V(K)\}$$

y T el subgrafo de H_2 soportado por S . Sean $p \in V(K)$ y $q \in N_r(p) \cap H_1$, luego $q \in S$, es decir que p está sobre S , como T es soportado por S , por definición $p \in V(T)$, por tanto $K \subseteq T$.

Ahora, suponga que existe un subgrafo T_1 soportado por el r -subconjunto S_1 tal que $K \subseteq T_1$, sea $p \in V(T_1)$, luego p está sobre S_1 y $|S_1| = |S|$. Si p no está sobre S , entonces existe un vértice $q \in N_r(p) \cap H_1$ tal que $q \notin S$, es decir que existe un vértice $q' \in (S - S_1)$, con esto se tiene que existe un vértice $p' \in K$ tal que $q' \in N_r(p') \cap H_1$ ya que K está sobre S , luego $K \not\subseteq T_1$, lo que es una contradicción, por tanto $T_1 \subseteq T$. Similarmente se prueba que $T \subseteq T_1$. Con lo cual se tiene que $T = T_1$. ■

Lema 2.48. Si $K \in G_j$ y $|H_1| = v$, entonces existen exactamente $\binom{v-\omega(K)}{r-\omega(K)}$ r -subconjuntos de H_1 que soportan a K .

Demostración. Sea $S = N_r(K) \cap H_1$. Además, sea T el subgrafo de H_2 soportado por S , luego $|S| = \omega(T)$, por el Lema 2.47, T es único y $K \subseteq T$. Si $\omega(T) \leq r$ entonces hay exactamente $\binom{v-\omega(T)}{r-\omega(T)}$ r -subconjuntos de H_1 que soportan el subgrafo T , si $\omega(T) > r$ se define $\binom{v-\omega(T)}{r-\omega(T)} = 0$ ya que no existiría un r -subconjunto de H_2 que soporte a T . Además $\omega(K) = \omega(T)$, en efecto, como $K \subseteq T$, luego $\omega(K) \leq \omega(T)$ y por construcción de S , $\omega(T) \leq \omega(K)$, por tanto también existen exactamente $\binom{v-\omega(K)}{r-\omega(k)}$ r -subconjuntos de H_1 que soportan el subgrafo K . ■

Lema 2.49. Sea G un $(3, y)$ -grafo completo con respecto a una 2-coloración χ y $|H_1| = v$. Para K un subgrafo conexo de H_2 y las definiciones de $r_i(j), \omega(K), \mu(K)$ se tiene que

$$[r + y - 1 - v] \binom{v}{r} \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{i=0}^r \binom{v-i}{r-i} r_i(j) \right) + \epsilon(a, r),$$

donde a es impar y todos los subgrafos de G los cuales son soportados por un r -subconjunto de H_1 tienen una circunferencia roja mayor que a , y donde

$$\epsilon(a, r) = \sum_{j=0}^a (-1)^j \left\{ \sum_{K \in G_j} \left[\binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)} - \binom{v - \mu(K)}{r - \mu(K)} \right] \right\}.$$

Demostración. Sea S un subconjunto de r vértices en H_1 y T el subgrafo de H_2 soportado por S . Dado que G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a χ y H_1 es un conjunto independiente entonces $v = |H_1| \leq y - 1$, es decir $(y - 1) - (v - r) \geq 0$.

Sea W un conjunto independiente máximo contenido en T , luego $|W| = I_\chi(T)$, entonces $W \cup (H_1 - S)$ es un conjunto independiente contenido en G , y se tiene

$$y - 1 \geq |W \cup (H_1 - S)| = |W| + |H_1 - S| = I_\chi(T) + (v - r).$$

Es decir, $I_\chi(T) \leq (y - 1) - (v - r)$. Además, como a es impar y por el Lema 2.43,

$$I_\chi(T) \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j g_j,$$

donde g_j es el número de subgrafos conexos de T el cual tienen j aristas rojas. Así;

$$[r + y - 1 - v] \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j g_j.$$

Sumando esta desigualdad para todos los r -subconjuntos de H_1 , el lado izquierdo queda;

$$[r + y - 1 - v] \binom{v}{r}$$

ya que se suma la misma cantidad $\binom{v}{r}$ veces. En el lado derecho se cuentan subgrafos conexos con j aristas rojas del subgrafo T determinado por el r -subconjunto S , sin embargo por el Lema 2.48 un subgrafo $K \in G_j$ se cuenta exactamente $\binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)}$ veces, por tanto

$$[r + y - 1 - v] \binom{v}{r} \geq \sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{K \in G_j} \binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)} \right),$$

y el lado derecho puede ser escrito como

$$\sum_{j=0}^a (-1)^j \left\{ \sum_{K \in G_j} \binom{v - \mu(K)}{r - \mu(K)} + \sum_{K \in G_j} \left[\binom{v - \omega(K)}{r - \omega(K)} - \binom{v - \mu(K)}{r - \mu(K)} \right] \right\},$$

o simplemente

$$\sum_{j=0}^a (-1)^j \left(\sum_{i=1}^r \binom{v - i}{r - i} r_i(j) \right) + \epsilon(a, r).$$

■

Para discutir las consecuencias de la proposición anterior se introduce la siguiente terminología un vértice p de H_2 tal que $|N_r(H_1, p)| = j$ será llamado un j -vértice y una arista roja entre un i -vértice y un j -vértice será llamada una (i, j) -arista (roja o azul).

Observación 2.50. El número a del Lema 2.49 se puede elegir igual a 1 o 3 en todos los casos en que G sea un $(3, y)$ -grafo, (todos los subgrafos tienen circunferencia roja por lo menos 4).

Observación 2.51. Si G es un $(3, y)$ -grafo completo con respecto a χ y H_1 tiene $y - 1$ vértices, entonces

- (1) $r_0(0) = 0$.
- (2) Hay a lo más un 1-vértice sobre cualquier 1-subconjunto de H_1 .
- (3) Si hay 3 vértices sobre un 2-subconjunto de H_1 , dos de ellos deben ser 1-vértices unidos por arista roja y el tercero un 2-vértice.
- (4) Puede haber a lo más $(R'(3, r + 1) - r)$ vértices sobre un r -conjunto de H_1 .

Demostración. (1) Por construcción de H_1 y H_2 no pueden haber 0-vértices.

- (2) Dos 1-vértices sobre un 1-subconjunto junto con los $y - 2$ vértices restantes de H_1 forman un y -conjunto independiente, lo que es una contradicción.
- (3) Dados 3 vértices sobre un 2-subconjunto, esos 3 vértices juntos con los 2 del 2-subconjunto de H_1 forman un $(3, 3)$ -grafo con respecto al mismo χ de 5 vértices (ya que no pueden haber triángulos rojos en G y si existe un K_3 azul en el subgrafo de los 5 vértices, el K_3 azul junto a los $y - 3$ vértices restantes de H_1 forman un y -conjunto independiente en G), y en un $(3, 3)$ -grafo Y con respecto a χ de 5 vértices cada $v \in V(Y)$ tienen $d_r(v) = 2$, con lo que se cumplen las condiciones de (3).
- (4) Considere un subgrafo K generado por un r -subconjunto de H_1 y los vértices sobre este r -subconjunto. Los vértices de K tienen aristas azules con los $y - 1 - r$ vértices restantes de H_1 , así si K contiene $r + 1$ vértices independientes, entonces los $y - 1 - r$ vértices de H_1 junto con los $r + 1$ de K formarían un y -conjunto independiente, por tanto K puede tener a lo más $R'(3, r + 1)$ vértices, de los cuales $(R'(3, r + 1) - r)$ están sobre un r -subconjunto de H_1 . ■

Lema 2.52. Si G es un $(3, y)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ , $v = y - 1$, $k = 3$, escogiendo $a = \infty$ entonces

$$\epsilon(\infty, 3) = \sum_{i=1}^4 c_i$$

donde c_i es el número de configuraciones del tipo C_i (ver Figura 2.9) que están contenidas en G (por contenidas se entiende que hay un 3-subconjunto de H_1 tal que el subgrafo dado por ese 3-subconjunto y los vértices sobre éste es de tipo C_i).

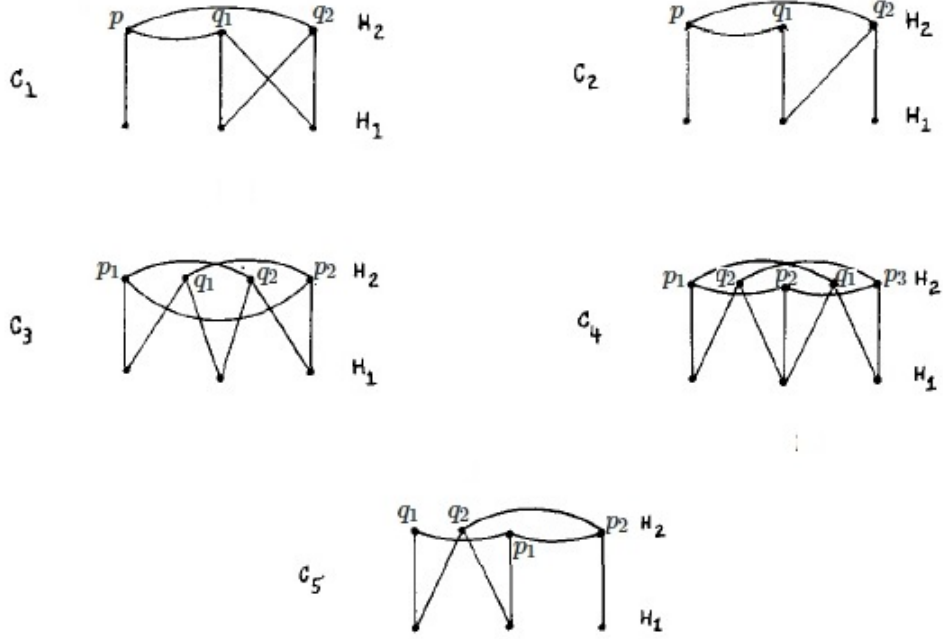


Figura 2.9: Configuraciones C_i . Fuente [9]

Demostración. Sean p, q vértices de H_2 tal que $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, para evitar formar triángulos rojos en G , $\text{supp}(p) \neq \text{supp}(q)$. Luego si K consiste de solo una arista roja y 2 vértices o si K sólo es un vértice, entonces $\omega(K) = \mu(K)$.

Considere un subgrafo conexo K con al menos 2 aristas rojas que está sobre un 3-subconjunto de H_1 , sea $p, q_1, q_2 \in V(K)$ tal que $\chi(\{p, q_1\}) = \chi(\{p, q_2\}) = \text{rojo}$. Para evitar triángulos rojos en G , ninguno de los vértices p, q_1, q_2 puede ser un j -vértices para $j > 2$. Si p fuese un 2-vértice se tendría que q_1 y q_2 son 1-vértice que forman aristas rojas con un único vértice de H_1 , lo que contradice (2) de la observación 2.51, por tanto p es 1-vértice. Ahora, considere todos los posibles subgrafos conexos de H_2 que tienen 2 aristas rojas sobre un 3-subconjunto, luego como p es 1-vértice, q_1 y q_1 son ambos 1-vértice o q_1 es 1-vértice y q_2 es un 2-vértice o ambos son 2-vértices. Observe que,

$$\epsilon(\infty, 3) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left\{ \sum_{K \in G_j} \left[1 - \binom{v - \mu(K)}{3 - \mu(K)} \right] \right\},$$

si $\omega(K) = \mu(K)$ ($\mu(K) = 3$) para algún j , no se aporta nada en la sumatoria de $\epsilon(\infty, 3)$, si $\mu(K) > 3$ para algún j se aporta 1 o -1 a la sumatoria dependiendo si j es par o impar respectivamente.

Si q_1 y q_1 son ambos 1-vértice, entonces $\omega(K) = \mu(K)$ lo que no aporta a $\epsilon(\infty, 3)$. Si

q_1 es 1-vértice y q_2 es un 2-vértice (ver Configuración C_2), como $\mu(K) = 4$ y $j = 2$, aporta 1 a $\epsilon(\infty, 3)$. Finalmente, si q_1 y q_2 son ambos 2-vértices (ver Configuración C_1), como $\mu(K) = 5$, aporta 1 a $\epsilon(\infty, 3)$.

Ahora, considere todos los posibles subgrafos conexos de H_2 que tienen 3 aristas rojas soportados por un 3-subconjunto de H_1 . Sean $p, q_1, q_2, q_3 \in G_3$ tal que $\chi(\{p, q_1\}) = \chi(\{p, q_2\}) = \chi(\{p, q_3\}) = \text{rojo}$, se probó que p es 1-vértice, entonces q_1, q_2, q_3 están sobre un 2-subconjunto de H_1 , luego los $y - 3$ vértices de H_1 junto con q_1, q_2, q_3 forman un y -conjunto independiente en G , por tanto el único subgrafo conexo con 3 aristas rojas sobre un 3-subconjunto es un camino simple de longitud 3. Sea $q_1, p_1, p_2, q_2 \in H_2$ tal que $\chi(\{q_1, p_1\}) = \chi(\{p_1, p_2\}) = \chi(\{p_2, q_2\}) = \text{rojo}$, se probó que p_1 y p_2 deben ser 1-vértices, q_1 y q_2 no pueden ser ambos 1-vértices ya que 4 1-vértices deben estar sobre un 4-subconjunto. Así, si q_1 es 1-vértice y q_2 es un 2-vértice (ver Configuración C_5). El subgrafo K generado por q_1, p_1, p_2 no aporta a $\epsilon(\infty, 3)$ ya que $\omega(K) = \mu(K)$, el subgrafo K' generado por p_1, p_2, q_2 aporta 1 a $\epsilon(\infty, 3)$, ya que $\mu(K') = 4$ y $j = 2$, mientras que todo el subgrafo C_5 aporta -1 a $\epsilon(\infty, 3)$ ya que $\mu(C_5) = 5$ y $j = 3$, luego en total la configuración C_5 no aporta nada a $\epsilon(\infty, 3)$. Si q_1 y q_2 son ambos 2-vértices (ver Configuración C_3). El subgrafo generado por p_1, p_2, q_1 (2 aristas rojas) contribuye 1, el subgrafo generado por p_2, p_1, q_2 (2 aristas rojas) contribuye 1 y el subgrafo generado por q_2, p_1, p_2, q_1 (3 aristas rojas) contribuye -1 , es decir que la configuración C_3 aporta en total 1 a $\epsilon(\infty, 3)$.

Finalmente, considere los subgrafos sobre un 3-subconjunto de H_1 que tienen más de 3 aristas rojas. Al igual que antes, ningún vértice puede ser adyacente a 3 vértices por aristas rojas, los 2-vértices en el subgrafo deben ser de grado rojo 1 en el subgrafo y pueden haber más de tres 1-vértices. La única configuración posible es un camino de cuatro aristas rojas con los extremos siendo 2-vértices (ver Configuración C_4), para este caso, los subgrafos generados por $q_1, p_1, p_2; p_2, p_3, q_2$ (2 aristas rojas) y q_1, p_1, p_2, p_3, q_2 (4 aristas rojas), cada subgrafo contribuye 1, los subgrafos generados por $q_1, p_1, p_2, p_3; p_1, p_2, p_3, q_2$ (3 aristas rojas), cada uno contribuye -1 y el subgrafo generado por p_1, p_2, p_3 no contribuye nada, por tanto la configuración C_4 aporta en total 1 a $\epsilon(\infty, 3)$. ■

Lema 2.53.

$$e(3, 6, 17) \geq 40$$

Demostración. Sean G un $(3, 6)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ sobre 17 vértices y p un vértice preferido tal que $d_r(p) = 3$. Existe una única solución en el Lema 2.40 teniendo un valor mínimo de 38 aristas rojas para $e(3, 6, 17)$ donde $s_2 = 0$ (s_2 es el número de vértices de grado 3) en ésta solución. Como $d_r(p) = 3$, luego G tiene 39 o más aristas rojas. Por definición 2.31 $H_2(p)$ es un $(3, 5)$ -grafo sobre 13 vértices y por el Lema 2.39 $H_2(p)$ tiene exactamente 26 aristas rojas, como $\sum_{j=0}^{\sigma(G)} t_j r_j = e - e_2 \geq 13$, entonces $H_1(p)$ contiene por lo menos un vértice q tal que $d_r(q) = 5$ en G . Sin embargo para todo $w \in V(H_2(p))$ $d_r(w) = 4$ lo que implica que en $H_2(p)$ solo existen 0-vértices y 1-vértices, luego los 4 1-vértices sobre q más los 2 restantes de $H_1(p)$ forman un 6-conjunto independiente en G , lo que es una

contradicción, por tanto no pueden haber vértices $p \in G$ tal que $d_r(p) = 3$.

Ahora, sea $G = K_{17}$ un $(3, 6)$ -grafo con 38 aristas rojas, si p es un vértice preferido tal que $d_r(p) = 4$ entonces $H_2(p)$ debe contener un 0-vértice. En efecto, suponga que $H_2(p)$ no contiene un 0-vértice, en $H_2(p)$ existen por lo menos 20 aristas rojas, es decir que hay a lo más 14 aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$, por otro lado, si un vértice en $H_1(p)$ es adyacente a 3 o más 1-vértices, esos 3 1-vértices, junto con los 3 vértices restantes de $H_1(p)$ forman un 6-conjunto independiente, por tanto un vértice en $H_1(p)$ es adyacente a lo más a 2 1-vértices en $H_2(p)$. Así, en $H_2(p)$ existen a lo más 8 1-vértices, si no hay 0-vértices, entonces los 4 vértices restantes de $H_2(p)$ son 2-vértices, con lo que existen al menos 16 aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$, lo que contradice el primer conteo, por tanto, existe un 0-vértice q en $H_2(p)$, si se extiende el grafo $G = K_{17}$ a un $(3, 6)$ -grafo con respecto a la 2-coloración χ cambiando la arista $\chi(\{p, q\}) = \text{rojo}$, entonces si se demuestra la no existencia de un $(3, 6)$ -grafo con respecto a χ sobre 17 vértices con 39 aristas rojas, la no existencia de un $(3, 6)$ -grafo con respecto a χ con 17 vértices y 38 aristas rojas se demuestra simultáneamente extendiendo el grafo.

Sea $G = K_{17}$ un $(3, 6)$ -grafo con respecto a una 2-coloración χ con 39 aristas rojas; G debe contener 7 vértices de grado-rojo 4 y 10 vértices de grado-rojo 5. Suponga que existe un vértice p preferido tal que $d_r(p) = 4$ adyacente a 3 vértices de grado-rojo 5, luego $H_2(p)$ es un $(3, 5)$ -grafo con respecto a χ sobre 12 vértices y 20 aristas rojas, este grafo es único, (ver Figura 2.10(a)), se prueba que es imposible poner las aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$. (Ver Apéndice D).

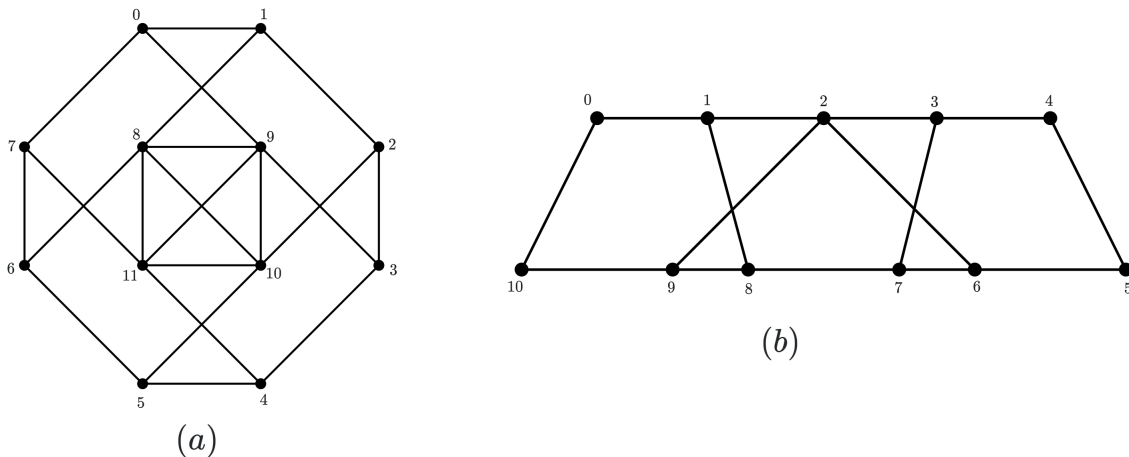


Figura 2.10: Representación gráfica de $H_2(p)$ para los dos casos. Fuente [9]

Ahora, considere los conjuntos

$$T_1 = \{v \in V(G) : d_r(v) = 4\} \text{ y } T_2 = \{v \in V(G) : d_r(v) = 5\}.$$

Sea $n = |\{x, y\} : x \in T_1 \text{ y } y \in T_2|$, por lo que se probó en Apéndice D, cada vértice de grado-rojo 4 está conectado a por lo menos 2 vértices de grado-rojo 5, es decir cada

vértices de grado-rojo 4 está conectado por una arista roja a lo mas a 2 vértices de grado-rojo 5, luego $n \leq 2 * 7 = 14$.

Por otro lado, suponiendo que cada vértice de grado 5 está conectado por arista roja a por lo menos 2 vértices de grado 4 se tiene que $n \geq 2 * 10 = 20$ lo que es una contradicción. Por tanto, existe un vértice de grado 5 conectado con arista roja a por lo menos 4 vértice de grado 5. Además, si existe un vértice de grado 5 conectado con arista roja a 5 vértices de grado 5, prefiriendo ese vértice se tiene que H_2 es un $(3, 5, 11) \geq 15$. Por tanto, debe existir un vértice p de grado 5 conectado con aristas rojas a 4 vértices de grado 5 y 1 vértice de grado 4, prefiriendo el vértice p , se tiene que $H_2(p)$ es un $(3, 5)$ –grafo con respecto a χ sobre 11 vértices y 15 aristas rojas, este grafo es único, (ver Figura 2.10(b)). Como antes, se puede probar que es imposible poner aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$ de tal forma que se forme un $(3, 6)$ –grafo con respecto a χ , (ver Apéndice D). Se sigue entonces que cualquier $(3, 6)$ –grafo con respecto a una 2–coloración χ con 17 vértices debe tener 40 aristas rojas o más. ■

Teorema 2.54.

$$R'(3, 7) \leq 22.$$

Demostración. Sea $G = K_{23}$ un $(3, 7)$ –grafo completo con respecto a una 2–coloración χ y sea $p \in V(G)$. Si $d_r(p) \leq 4$, entonces prefiriendo ese vértice $H_2(p)$ tendrá 18 vértices o más, se sabe que $R(3, 6) = 18$, es decir existe un 6–conjunto independiente en $H_2(p)$ el cual, junto a p forma un 7–conjunto independiente. Si $d_r(p) = 5$, entonces $H_2(p)$ es un $(3, 6)$ –grafo con respecto a χ el cual tiene 40 o más aristas rojas, aplicando el Lema 2.35 se obtiene

$$40 \leq 6 \left(\frac{23}{2} - 7 + 2 \right) = 39,$$

por tanto, G contiene solo vértices con $d_r(p) = 6$.

Debido a su longitud, el resto de la prueba se divide en Lemas.

Lema 2.55. Para cualquier vértice preferido p , $r_i(0) = 0$ cuando $i \geq 4$.

Demostración. Sean p' un i –vértice ($N_r(p', H_1) = i$) y W_1 el subgrafo de G formado por los vértices que están conectados mediante una arista roja a p o p' o a ambos. Sea W_2 el subgrafo de G formado por los vértices de G distintos de p, p' y de los vértices de W_1 , (W_2 es un subgrafo de $H_2(p)$), cualquier conjunto independiente en W_2 puede extenderse con p y p' , por tanto W_2 debe ser un $(3, 5)$ –grafo con respecto a χ . Como $d_r(p) = d_r(p') = 6$, entonces W_1 tiene $(12 - i)$ vértices y W_2 tiene $(9 + i)$ vértices, además se conoce que $R'(3, 5) \leq 13$, por tanto $i \leq 4$. Ahora, suponga que $i = 4$, es decir que W_2 tiene 13 vértices, por el Lema 2.39 $e(3, 5, 13) = 26$ y para todo $p_i \in V(G)$ se cumple que $N_r(p_i, W_2) = 4$ y $N_r(p_i, G) = 6$, luego existen $13 * 2 = 26$ aristas rojas entre W_2 y W_1 .

Además, para $q_i \in W_1$ con $i = 1, 2, \dots, 8$ se tiene que $d_r(q_1) + d_r(q_2) + \dots + d_r(q_8) = 48$, de las cuales 12 corresponden a las aristas rojas que van a p y p' , 26 corresponden a las aristas rojas que van a W_2 y las 10 restantes corresponden a las aristas rojas que hay en W_1 , pero en W_1 pueden haber a lo más 4 aristas rojas, lo que es una contradicción, por tanto i no puede ser 4. ■

Lema 2.56. Para cualquier vértice preferido p ,

$$r_1(0) = 2 + r_3(0) \quad \text{y} \quad r_2(0) = 14 - 2r_3(0) \quad (1)$$

más aún, si z es el número de aristas rojas entre 1-vértices y 3-vértices y $\epsilon = \epsilon(\infty, 3)$, entonces

$$2r_2(1) \geq [6 - 2r_3(0)] + r_3(2) + (z + \epsilon). \quad (2)$$

Demostración. Por observación 2.51(1), $r_o(0) = 0$ y por el Lema anterior $r_i(0) = 0$ para $i \geq 4$, así $r_1(0) + r_2(0) + r_3(0) = 16$ (ya que existen 16 vértices en $H_2(p)$), cada vértice en $H_1(p)$ está conectado con una arista roja a 5 vértices de $H_2(p)$, luego $r_1(0) + 2r_2(0) + 3r_3(0) = 30$ (ya que existen 30 aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$), obteniendo el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} r_1(0) + r_2(0) + r_3(0) &= 16. \\ r_1(0) + 2r_2(0) + 3r_3(0) &= 30. \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones se tiene $r_2(0) = 14 - 2r_3(0)$. Y multiplicando por (-2) la primera ecuación y restando la segunda se obtiene $r_1(0) = 2 + r_3(0)$. Además, aplicando el Lema 2.49 con $a = \infty$ y $a = 3$, se obtiene

$$\begin{aligned} [3] \binom{6}{3} &\geq \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\sum_{i=1}^3 \binom{6-i}{3-i} r_i(j) \right) + \epsilon \\ &\geq \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \left(\binom{5}{2} r_1(j) + \binom{4}{1} r_2(j) + \binom{3}{0} r_3(j) \right) + \epsilon \\ &\geq \binom{5}{2} r_1(0) + \binom{4}{1} r_2(0) + \binom{3}{0} r_3(0) - \binom{4}{1} r_2(1) - \binom{3}{0} r_3(1) + \binom{3}{0} r_3(2) + \epsilon \\ 60 &\geq 10r_1(0) + 4r_2(0) + r_3(0) - 4r_2(1) - r_3(1) + r_3(2) + \epsilon, \end{aligned} \quad (3)$$

donde se excluyó $r_1(1), r_1(2), r_2(2)$ ya que $r_1(1) = r_1(2) = r_2(2) = 0$.

Ahora, sea $\tau = \sum [|N_r(q, H_2(p))|]$ para todo $q \in H_2(p)$, donde q es un 1-vértices, observe que $\tau = 5r_1(0)$. Además, cada arista roja que une dos 1-vértices se cuenta 2 veces en τ , cada arista roja que un 1-vértice y un 2-vértice se cuenta una sola vez en τ , también cada arista roja que une un 1-vértice con un 3-vértice se cuenta una vez en τ . Pero el número de aristas rojas que unen dos 1-vértices es $r_2(1)$, el número de aristas rojas que unen un 1-vértice con un 2-vértice es $r_3(1)$ y como z es el número de aristas rojas entre 1-vértices y 3-vértices, se tiene que $\tau = 2r_2(1) + r_3(1) + z$, usando esta y las ecuaciones en (1) para eliminar $r_3(1), r_1(0)$ y $r_2(0)$ de (3) se obtiene

$$\begin{aligned} 60 &\geq 10(2 + r_3(0)) + 4(14 - 2r_3(0)) + r_3(0) - 4r_2(1) - (5r_1(0) - z - 2r_2(1)) + r_3(2) + \epsilon \\ &\geq 70 + 3r_3(0) - 5(2 + r_3(0)) - 2r_2(1) + z + r_3(2) + \epsilon \\ 2r_2(1) &\geq [6 - 2r_3(0)] + r_3(2) + (z + \epsilon). \end{aligned}$$

■

Lema 2.57. Para cualquier vértice preferido p ,

$$2 \leq r_3(0) \leq 4.$$

Demostración. Por observación 2.51(2), hay a lo más seis 1-vértices en $H_2(p)$ y por el Lema anterior $r_3(0) = r_1(0) - 2$, es decir que $r_3(0) \leq 4$. Ahora, si $r_3(0) = 0$, entonces $r_1(0) = 2$, por tanto $r_2(1) \leq 1$ (de otro modo $r_1(0) > 2$), sustituyendo en (2) del Lema anterior se tiene

$$2 \geq 6 + r_3(2) + (z + \epsilon).$$

por el Lema 2.49, $\epsilon \geq 0$, así la inecuación no se cumple, con lo que $r_3(0) \neq 0$.

Si $r_3(0) = 1$, entonces $r_1(0) = 3$, por tanto $r_2(1) \leq 2$, sustituyendo en (2) del Lema anterior se tiene

$$2r_2(1) \geq 4 + r_3(2) + (z + \epsilon) \geq 4 + r_3(2),$$

sin embargo, si $r_2(1) = 2$, entonces $r_3(2) = 1$, con lo cual se tiene que $4 \geq 4 + 1$, lo que es una contradicción, por tanto $r_3(0) \neq 1$. ■

Lema 2.58. Para cualquier vértice preferido p ,

$$r_3(0) \neq 2 \quad \text{y} \quad r_3(0) \neq 3.$$

Para la prueba de este Lema ver Appendix A del artículo de Graver and Yackel [9]. La prueba se basa en mostrar caso por caso todas las posibilidades para un $(3, 7)$ -grafo sobre 23 vértices, introduciendo nueva notación y usando un Lema auxiliar, el Lema 2.49 y la observación 2.51.

Lema 2.59. Para cualquier vértice preferido p ,

$$r_3(0) \neq 4.$$

Demostración. En lugar de involucrarse con otro largo Lema en el sentido de que $r_3(0) \neq 4$, se concluirá la prueba de que un $(3, 7)$ -grafo sobre 23 vértices con respecto a χ no puede existir contando cuadriláteros. En efecto, sea $p \in V(G)$, por los Lemas 2.58 y 2.59, se tiene que $r_3(0) = 4$, en consecuencia, por el Lema 2.56, $r_2(0) = 6$ y $r_1(0) = 6$. Ahora, cualquier cuadrilátero que contenta al vértice p , contiene exactamente un vértice de $H_2(p)$, sin embargo, los 1-vértices no pertenecen a ninguno de esos cuadriláteros, los 2-vértices están contenidos en exactamente uno cada uno y cada 3-vértices está contenido en exactamente tres cuadriláteros. Por lo tanto, hay 18 cuadriláteros en G que contienen al vértice p y $\frac{18 \cdot 23}{4}$ cuadriláteros en total en G , lo cual es imposible. ■

Así, $r_3(0)$ no puede tomar ninguno de los valores posibles, lo cual es un absurdo. lo cual implica el resultado del Teorema 2.54. ■

Teorema 2.60. $R'(3, 7) \geq 22$.

Demostración. Se probará que es posible construir un $(3, 7)$ –grafo sobre 22 vértices con respecto a una 2–coloración χ . En efecto, sea p un vértice tal que $N_r(p) = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$. Sean p_{ij} los vértices para $1 \leq i < j \leq 6$, donde $\chi(\{p_{ij}, p_i\}) = \chi(\{p_{ij}, p_j\}) = \text{rojo}$ (las mismas serán aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$ cuando p sea preferido). Finalmente, conecte con una arista roja los vértices p_{ij} con p_{kh} si i, j, k y h son todos distintos entre sí. El grafo producido de esta manera tiene 22 vértices, no tiene 7–conjuntos independientes, pero sí triángulos rojos. Considere el vértice $p_1 \in H_1(p)$, este es rojo-adyacente a cinco vértices $p_{12}, p_{13}, \dots, p_{16}$, pero ningún par de estos vértices es rojo-adyacente, por lo que p_1 no está en ningún triángulo rojo. Del mismo modo, ningún vértice de $H_1(p)$ está en un triángulo, luego los triángulos rojos solo pueden estar en $H_2(p)$.

Ahora, $H_2(p)$ tiene un ciclo Hamiltoniano rojo C , el orden de los vértices en C es

$$p_{12}, p_{35}, p_{16}, p_{23}, p_{56}, p_{24}, p_{36}, p_{45}, p_{13}, p_{46}, p_{15}, p_{26}, p_{14}, p_{25}, p_{34}$$

, pasando por cada triángulo exactamente una vez. Sea G el grafo obtenido cambiando las aristas rojas de C por aristas azules del grafo descrito anteriormente. Entonces G es un $(3, 7)$ –grafo. Cambiando las aristas rojas de C . Observe que el nuevo $H_2(p)$ es un $(3, 6)$ –grafo. En efecto, suponga que existe un conjunto X independiente de orden 6. Primero se prueba que X no es independiente en $H_2(p)$. Por la simetría de $H_2(p)$, suponga que $p_{12} \in X$, luego los vértices en H_2 independientes de P_{12} son

$$p_{13}, p_{14}, p_{15}, p_{16}, p_{23}, p_{24}, p_{25}, p_{26}$$

Observe que $\chi(\{p_{13}, p_{24}\}) = \chi(\{p_{14}, p_{23}\}) = \chi(\{p_{15}, p_{26}\}) = \chi(\{p_{16}, p_{25}\}) = \text{rojo}$, así, solo es posible tomar uno de cada par de vértices en X , puede haber un máximo de cinco vértices en H_2 . Ahora se sabe que X contiene dos vértices rojo-adyacentes en el ciclo Hamiltoniano (existen 15 posibilidades), considere una posibilidad; X contiene a P_{35} y P_{16} en $H_2(p)$ reducido, son rojo-adyacentes a uno de ellos en el ciclo Hamiltoniano o contiene uno de los subíndices 3, 5 y uno de los subíndices 1, 6, así las posibilidades son $p_{12}, p_{13}, p_{15}, p_{23}, p_{36}, p_{56}$, sin embargo

$$\chi(\{p_{12}, p_{36}\}) = \chi(\{p_{13}, p_{56}\}) = \chi(\{p_{15}, p_{23}\}) = \text{rojo}.$$

A lo más pueden haber cinco vértices independiente. Similarmente para cualquier posibilidad. Por tanto el nuevo $H_2(p)$ es un $(3, 6)$ –grafo.

Asumiendo esto, cualquier 7–conjunto independiente debería contener 2 o más vértices de $N_r(p)$. Primero elija dos vértices cualesquiera de $N_r(p)$ y llame a los vértices restantes p_a, p_b, p_c, p_d . Si los dos vértices elegidos pertenecen a un 7–conjunto independiente, entonces los 5 vértices restantes deben estar sobre $\{p_a, p_b, p_c, p_d\}$. Los vértices sobre estos 4 vértices son $p_{ab}, p_{cd}, p_{ac}, p_{bd}, p_{ad}, p_{bc}$ y fueron unidos de a pares por las 3 aristas rojas de la construcción original. Luego, se tienen 5 vértices independientes entre si en G si el cambio de rojo a azul de las aristas de C cambio 2 o más de estas aristas.

Ahora, observe que cada arista roja de C está sobre un 4-conjunto distinto de H_1 de tal manera que haya a lo más 4 vértices independientes sobre $\{p_a, p_b, p_c, p_d\}$. Si se elige un 3-conjunto de $N_r(p)$, entonces el 3-conjunto complementario tiene sólo 3 vértices de H_2 sobre el, por lo tanto ningún 3-conjunto de $N_r(p)$ puede ser extendido a un 7-conjunto independiente eligiendo vértices de H_2 . De manera análoga no se puede extender 4-conjuntos y 5-conjuntos de $N_r(p)$ a 7-conjuntos independientes. De manera que se tiene un $(3, 7)$ -grafo de 22 vértices. ■

Teorema 2.61. $R(3, 7) = 23$. *Graver y Jackel 1968 [9].*

Demostración. En consecuencia de los Teoremas 2.54 y 2.60, se obtiene $R'(3, 7) = 22$, por lo tanto $R(3, 7) = 23$. ■

CAPÍTULO 3

UNA IMPLEMENTACIÓN DE LOS NÚMEROS DE RAMSEY EN SAGEMATH

La implementación que se proporciona en esta tesis se basa en el trabajo de Barton, 2016 [2], la cual genera todas las 2-coloraciones de los grafos completos en un orden específico y analiza cada grafo coloreado para ver si se satisfacen o no las condiciones de un número de Ramsey dado. El código que se presenta es un método de fuerza bruta, calcula todas las 2-coloraciones de un grafo (incluso aquellos que tienen una estructura similar o se sabe que ya contienen subgrafos completos monocromáticos) y se repite iterativamente en cada subgrafo completo del tamaño analizado por el número de Ramsey. No se tomó en cuenta eficiencia ni orden computacional.

Cabe resaltar que al ejecutar esta implementación, no se encontró con ninguna excepción que permitiera reducir las cotas de algún número de Ramsey. Algo comprensible, ya que la posibilidad de que una computadora personal que ejecute todos los casos y encuentre una excepción es extremadamente baja. En cambio, esto sirvió para analizar $R(3, 6) > 17$ y afirmaciones fuertes de $R(3, 7) = 23$, además, también puede servir como una línea de base para que otros puedan construir y mejorar un algoritmo comprensible y eficiente para determinar valores exactos para los números de Ramsey.

3.1 Representación de las coloraciones en un grafo completo

Se requiere representar de alguna forma todas las 2-coloraciones de un grafo, para esto, es necesario representar cada una de las aristas del grafo completo e identificar si la arista es roja o azul. Con este requisito binario, se lleva a considerar a los números binarios como un conducto para representar todas las aristas del grafo.

Con esto es posible representar cualquier grafo completo dado como una lista de números binarios con un 1 o un 0 en una posición específica, correspondiente a si la arista es de color rojo o azul respectivamente.

En un grafo completo K_n existen $\binom{n}{2}$ aristas y $2^{\binom{n}{2}}$ posibles 2-coloraciones, lo que complica el cálculo, sin embargo es posible convertir cada número de 0 a $2^{\binom{n}{2}} - 1$ como una única representación binaria.

Ejemplo 3.1. En la Figura 3.1 se muestra la representación de todas las 2-coloraciones del grafo K_3 y el número binario correspondiente.

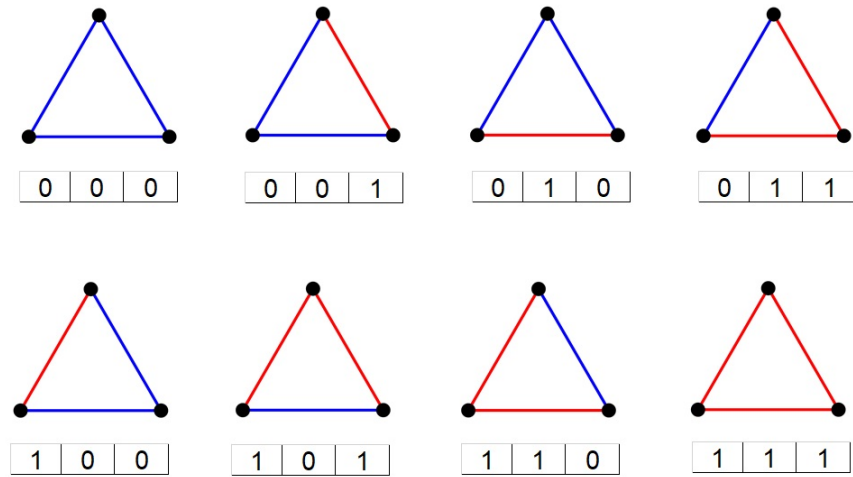


Figura 3.1: Representación binaria de todas las 2–coloraciones de K_3 . Fuente [2].

La implementación en SAGEMATH para convertir un entero a binario se presenta a continuación.

```

def CBinario(numin):
    L=[]
    while numin!=0:
        L.append(numin%2)    # % residuo
        numin=numin//2     # // cociente
    return L

```

CBinario toma un entero como entrada y genera una lista de ceros y unos correspondiente a la conversión del entero en binario.

3.2 Matrices de coloración

Si bien producir una representación binaria de un entero asociado a la 2coloración es útil, no es suficiente al momento de analizar estas representaciones, por tanto se utiliza matrices de coloración, es decir, a cada 2–coloración χ de K_n se le asocia la matriz A estrictamente triangular superior de orden n de componentes a_{ij} con $i < j$, para $v_i, v_j \in V(K_n)$ definido de la siguiente forma

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(\{v_i, v_j\}) = \text{rojo,} \\ 0 & \text{si } \chi(\{v_i, v_j\}) = \text{azul.} \end{cases}$$

Esta matriz se denomina matriz de coloración asociada a la 2–coloración χ .

La representación en lista binaria de un grafo se transfiere a la representación de la matriz de coloración de manera que un 1 en la representación binaria corresponde a un 1 en la ubicación de la matriz asignada y un 0 en la representación binaria corresponde a un 0 en la ubicación de la matriz asignada.

Ejemplo 3.2. En la siguiente Figura se muestran 3 representaciones equivalentes de una 2-coloración del grafo K_4 . Donde, la lista binaria es asignada de acuerdo al orden de aristas del grafo, para este caso, $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ de izquierda a derecha (CBinario regresa la lista binaria de izquierda a derecha para facilitar la colocación de 1 y 0 en la matriz de coloración, además para esta 2-coloración el entero correspondiente es 11).

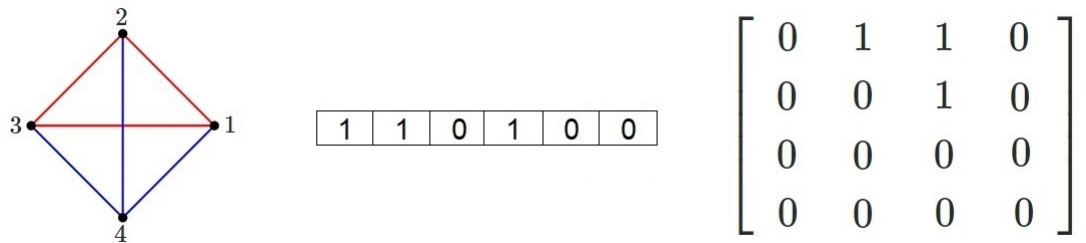


Figura 3.2: Representación gráfica, binaria y matriz de coloración del grafo K_3 . Fuente [2].

El siguiente código toma elemento por elemento de la lista binaria y va asignando los elementos a la matriz de forma que priorice el llenado de cada fila en orden. Por ejemplo, para llenar la matriz de coloración $n \times n$, se asigna el primer elemento de la lista binaria a la posición $(1, 2)$ de la matriz, el segundo a $(1, 3)$ y así sucesivamente, luego cuando el $n - 1$ elemento de la representación binaria se asigna a $(1, n)$, el siguiente elemento se asigna a la segunda fila de la matriz $(2, 3)$, el $n + 1$ elemento se asigna a $(2, 4)$ y así sucesivamente hasta que los últimos 3 elementos llenen $(n - 1, n - 2)$, $(n, n - 2)$ y $(n, n - 1)$ respectivamente (ver ejemplo 3.2).

```
import numpy as np
def CrearMatriz(num, dim):
    G=np.zeros((dim, dim), dtype=np.int)
    A=CBinario(num)
    i=0
    for x in range(dim):
        for y in range(x+1, dim):
            if len(A)!=0:
                G[x][y]=A[i]
                A.pop(i)
    return G
```

CrearMatriz toma un entero en base 10 y una dimensión n y devuelve una matriz $n \times n$ correspondiente a la 2-coloración.

Para completar la biyección entre la 2-coloración del grafo, la lista binaria y la matriz de coloración, se crea un código que dado el entero que representa la 2-coloración y usando CrearMatriz, el código genera la 2-coloración en representación de una gráfica.

```

def CrearGrafo(Numero_matriz,Dim):
    M=CrearMatriz(Numero_matriz,Dim)
    L=[]
    L1=[]
    for x in range(Dim):
        for y in range(x+1,Dim):
            U=M[x][y]
            R=(x,y)
            if U==1:
                L.append(R)
            if U==0:
                L1.append(R)
    G=graphs.CompleteGraph(Dim)
    P=G.plot(edge_colors={"red":L,"blue":L1})
    return P

```

CrearGrafo toma un entero y la dimensión de la matriz y devuelve la representación gráfica de la 2-coloración.

3.3 Buscando triángulos rojos

En una 2-coloración de un grafo existe un triángulo rojo con vértice común i , si sobre la i -ésima fila de la matriz de adyacencia A existen por lo menos dos 1's, suponga $a_{ij} = a_{ik} = 1$, para $i < j < k$, en este caso el triángulo rojo se completa si $a_{jk} = 1$. En SAGEMATH la implementación que busca triángulos rojos es la siguiente

```

def Triangulos(A):
    for i in range(len(A)):
        for j in range(i+1,len(A)):
            if A[i][j] == 1:
                for k in range(j+1,len(A)):
                    if A[i][k]==1 and A[j][k]==1:
                        return True
    return False

```

Triangulos toma una matriz de coloración A como entrada y devuelve verdadero si existe un triángulo rojo o falso si no.

3.4 Buscando subgrafos monocromáticos

Para buscar subgrafos K_n azules con $n > 3$, es necesario crear una lista C , donde proporcione listas de vértices azul-adyacentes a cada vértice. Es decir, $C[n]$ corresponde a la lista de los vértices mayores que n azul-adyacentes a n , algún $C[n]$ puede ser vacío.

Teniendo esto, se construyen todas las posibles combinaciones de cada $C[w]$ y $n - 1$, donde w recorre el rango de la matriz y n es el tamaño del subgrafo monocromático K_n que se está buscando y al igual que `Triangulos` se verifica si en las posiciones correspondientes aparece un 0 para determinar si existe o no un subgrafo monocromático azul. La implementación en SAGEMATH es la siguiente

```
def Independiente(A, tamaño_conjunto):
    B=[]
    C=[]
    for i in range(A.shape[0]):
        B=[]
        for j in range(i+1,A.shape[0]):
            if A[i][j]==0:
                B.append(j)
        C.append(B)
    for w in range(A.shape[0]):
        PosibleKn=list(Combinations(C[w],tamaño_conjunto-1))
        if PosibleKn != []:
            for k in range(len(PosibleKn)):
                x=0
                for i in PosibleKn[k]:
                    for j in PosibleKn[k]:
                        x=x+A[i][j]
                if x == 0:
                    return True
    return False
```

`Independiente` toma como entrada una matriz, la dimensión de la matriz y el tamaño del subgrafo monocromático azul que se está buscando y devuelve verdadero si existe un subgrafo monocromático azul y falso si no.

Observe que si se quiere buscar subgrafos monocromáticos K_n de color rojo, se debe trabajar con el complemento de la matriz y aplicar el mismo algoritmo. El algoritmo que genera una matriz complemento queda como sigue

```
def Complemento(A):
    for x in range(A.shape[0]):
        for y in range(x+1,A.shape[0]):
            A[x][y]=1-A[x][y]
    return A
```

`Complemento` toma como entrada una matriz y devuelve su complemento.

Ejemplo 3.3. Se quiere probar que $R(3, 3) > 5$. En este caso se aplica el código sobre 5 vértices, este encontrará un contraejemplo, el cual lo muestra como representación de matriz y gráfica.

```

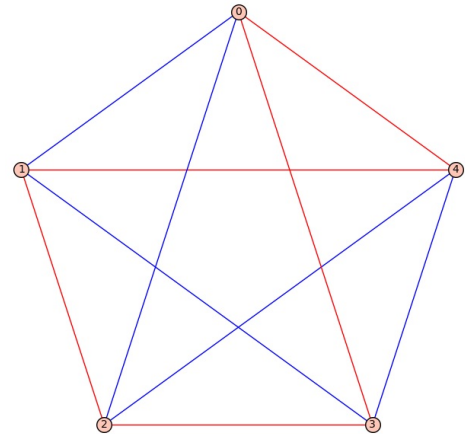
for k in range(2**10):
    G=CrearMatriz(k,5)
    if Triangulos(G)==True or Independiente(G,3)==True:
        print (str(k)+ " Passed")
        k=k+1
    else:
        print(k)
        U=CrearMatriz(k,5);U
        C=CrearGrafo(k,5);C
        print U
        break
print("Done")
C.plot()

```

```

...
219 Passed
220
.[[0 0 1 1]
.[ 0 0 1 0 1]
.[ 0 0 0 1 0]
.[ 0 0 0 0 0]
.[ 0 0 0 0 0]]
Done

```



Para el caso de 6 vértices el algoritmo recorrerá todas las 2^{15} posibles 2-coloraciones y no encontrará ningún contraejemplo.

```

R(3,3)=6
for k in range(2**15):
    G=CrearMatriz(k,6)
    if Triangulos(G)==True or Independiente(G,6,3)==True:
        print (str(k)+ " Passed")
        k=k+1
    else:
        print(k)
        U=CrearMatriz(k,5)
        print (U)
        break
print("Done")

```

```

-----
...
32765 Passed
32766 Passed
32767 Passed
Done

```

CONCLUSIONES

Los autores de las pruebas del teorema de Ramsey y de los seis números de Ramsey que se presentan en este trabajo de grado emplean en sus artículos notaciones diferentes. El autor de este trabajo logró unificar el lenguaje empleado en los diferentes artículos a fin de facilitar la comprensión de estos resultados.

Utilizando el software algebraico SAGEMATH y basandose en el algoritmo diseñado por Lane Barton en 2016, el autor elaboró una implementación que permite generar todas las 2-coloraciones de un grafo completo. Esta implementación permitió comprobar el valor exacto de los números $R(3, 3) = 6$ y $R(3, 4) = 9$. Para valores de n más grandes, desbordó la capacidad de memoria de los ordenadores que se utilizaron para el desarrollo de este trabajo, sin embargo, puede ser la base para desarrollar una implementación mejor y eficiente.

Para la prueba del número de Ramsey $R(3, 7) = 23$ y para la cota inferior $R(3, 6) > 17$ fue necesario usar la implementación desarrollada en el trabajo y diseñar códigos que permitieran verificar algunas afirmaciones en el artículo de Jack Graver y James Yanckel de 1968.

APÉNDICES

APÉNDICE A

Para encontrar una cota inferior de los números de Ramsey anteriores a $R(3, 6) = 18$ se ha venido construyendo 2-coloraciones de grafos con la ayuda de módulos, para este caso, se requiere construir una 2-coloración del grafo completo sobre 17 vértices que no contenga un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul, sin embargo ya no es posible usar módulos.

En <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/ramsey.html>, se encuentran todas las posibles 2-coloraciones de K_n para $n = 1, 2, \dots, 17$ que no contienen ni un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul. Para 17 vértices, existen 7 de las 2-coloraciones que se necesitan, no obstante no es posible probar que alguna de estas 2-coloraciones no contiene un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul como se ha venido desarrollando con los anteriores números, para este caso, se comprobará mediante las implementaciones `Triangulos` e `Independiente` del capítulo 3.

Para hacer esto es necesario encontrar el número binario y así usar `CrearMatriz`. La matriz de una 2-coloración del grafo completo K_{17} el cual no posee K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul es el siguiente

```
CrearMatriz(61381485421056196018508786574505654960677, 17)
```

```
-----  
array([[0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0],  
       [0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1],  
       [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]])
```

Teniendo la matriz de coloración ya es posible utilizar las implementaciones para saber si el grafo cumple con lo requerido.

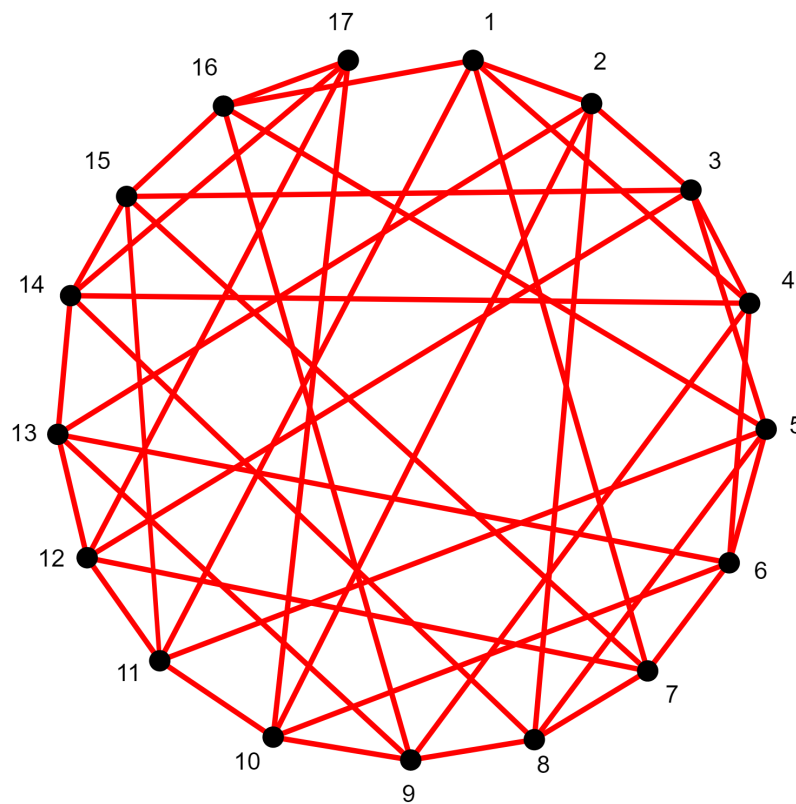
```

if Triangulos(Y)==True or Independiente(Y,17,6)==True:
    print "Existen triángulos o 6-conjuntos independientes"
else:
    print "No existen triángulos ni 6-conjuntos independientes"

```

No existen triángulos ni 6-conjuntos independientes

Con esto se concluye que la 2-coloración del grafo completo K_{17} no posee un K_3 monocromático rojo ni un K_6 monocromático azul. Además la representación gráfica de esta 2-coloración de K_{17} queda de la siguiente manera, (cabe resaltar que solo aparecen las aristas rojas con el fin de notar la forma del grafo).



APÉNDICE B

En el Lema 2.38 se quiere probar $e(3, 4, 8) \geq 10$, donde se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}11s_0 + 9s_1 &\leq 8e \\3s_0 + 2s_1 &= 2e \\s_0 + s_1 &= 8\end{aligned}$$

Usando programación entera mixta (MIP). Dividiendo entre 2 la segunda ecuación se obtiene la función objetivo e igualando la primera y tercera ecuación se obtiene una restricción y la tercera ecuación será la segunda restricción. Así,

Función objetivo: $e = \frac{3}{2}s_0 + s_1$
Restricciones: $s_0 + s_1 = 8$ y $-\frac{1}{8}s_0 + \frac{1}{8}s_1 \leq 0$.

En SAGEMATH fue necesario usar la librería PuLP (más información de esta librería en la página <https://pythonhosted.org/PuLP/>), la cual proporciona un lenguaje para modelar y resolver problemas de optimización utilizando programación lineal.

```
from pulp import *
from fractions import Fraction
prob=LpProblem("edges", LpMinimize)
x1= LpVariable("x1", lowBound=0, cat='Integer')
x2= LpVariable("x2", lowBound=0, cat='Integer')
prob += Fraction(5,2)*x1 + 2*x2
prob += (1)*x1 + (1)*x2 <= 12
prob += (1)*x1 + (1)*x2 >= 12
prob += Fraction(1,6)*x1 + Fraction(1,6)*x2 >= 0
prob

status = prob.solve() #Se resuelve usando solv de PuLP.
LpStatus[status] #Estado de la solución

-----
'Optimal'
-----
value(x1), value(x2), value(prob.objective)

-----
(0.0, 12.0, 24.0)
-----
```

APÉNDICE C

Para probar que $e(3, 6, 17) \geq 38$ en el Lema 2.40 se requiere la solución que minimiza e en el sistema

$$\begin{aligned}40s_0 + 36s_1 + 35s_2 &\leq 17e \\5s_0 + 4s_1 + 3s_2 &= 2e \\s_0 + s_1 + s_2 &= 17\end{aligned}$$

Dividiendo entre 2 la segunda ecuación se obtiene la función objetivo, la tercera ecuación será una restricción e igualando la primera y tercera ecuación se obtiene la segunda restricción. Así se tiene

Función objetivo: $e = \frac{5}{2}s_0 + 2s_1 + \frac{3}{2}s_2$
Restricciones: $s_0 + s_1 + s_2 = 17$ y $\frac{5}{34}s_0 - \frac{2}{17}s_1 - \frac{19}{34}s_2 \geq 0$.
Similarmente, se usa SAGEMATH para minimizar e

```
from pulp import *
from fractions import Fraction

prob=LpProblem("edges", LpMinimize)
x1= LpVariable("x1", lowBound=0, cat='Integer')
x2= LpVariable("x2", lowBound=0, cat='Integer')
x3= LpVariable("x3", lowBound=0, cat='Integer')
prob += Fraction(5,2)*x1 + 2*x2 + Fraction(3,2)*x3
prob += (1)*x1 + (1)*x2 + (1)*x3 >= 17
prob += (1)*x1 + (1)*x2 + (1)*x3 <= 17
prob += Fraction(5,34)*x1-Fraction(2,17)*x2
        -Fraction(19,34)*x3 >= 0
prob

status = prob.solve()
LpStatus[status]
-----
'Optimal'
-----
value(x1),value(x2), value(x3) ,value(prob.objective)
-----
(8.0, 9.0, 0.0, 38.0)
-----
```

APÉNDICE D

En este apéndice se presenta un código que el autor diseñó en el software algebraico libre SAGEMATH, el cual permite justificar los dos enunciados siguientes en un $(3, 6)$ –grafo con 17 vértices

- (a) No existe un vértice preferido p de grado 4 tal que $H_1(p)$ contenga 3 vértices de grado 5.
- (b) No existe un vértice preferido p de grado 5 tal que $H_1(p)$ contenga 4 vértices de grado 5.

Estos enunciados se utilizan en la prueba del Lema 2.53 para deducir que en un $(3, 6)$ –grafo con 17 vértices debe contener por lo menos 40 aristas rojas.

Para el ítem (a), como ya se conoce la matriz de coloración A de $H_2(p)$,

$$A = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

se crea una matriz de coloración B tamaño 17×17 , donde en las primeras 12×12 posiciones está la matriz de $H_2(p)$, la siguiente fila y columna pertenece al vértice p donde se sabe que $d_r(p) = 4$, así $H_1(p) = \{14, 15, 16, 17\}$, luego las componentes $b_{13,14}, b_{13,15}, b_{13,16}, b_{13,17}$ tienen un 1 y el resto se completan con 0,

$$B = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, como cada v3rtice 14, 15, 16, 17 se conectan mediante arista roja con 4 v3rtices en $H_2(p)$ y el v3rtice 16 se conecta con 3, entonces en la matriz B se completan con 1 en cada columna 13, 14, 15, 16 de tal forma que, los 4 v3rtices deben ser independientes y que existan exactamente 10 v3rtices de grado 5 y 7 v3rtices de grado 4.

Para esto se deben crear dos listas T y $T1$, las cuales busquen todos los posibles 4-conjuntos independientes en T de A y todos los posibles 3-conjuntos independientes en $T1$ de A .

```

C=[]
for i in range(12):
    D=[]
    for j in range(i+1,12):
        if A[i][j]==0:
            D.append(j)
    C.append(D)
"Busca 4-conjuntos independientes "
T=[]
for w in range(12):
    O=list(Combinations(C[w],3))
    if O != []:
        R=[w]
        for k in range(len(O)):
            x=0
            for i in O[k]:
                for j in O[k]:
                    x=x+A[i][j]
            if x != 0:
                pass
            else:
                for i in range(len(O[k])):
                    R.append(O[k][i])
                T.append(R)
        R=[w]

print T

-----
"Busca 3-conjuntos independientes "
T1=[]
for w in range(12):
    O=list(Combinations(C[w],2))
    if O != []:
        R=[w]
        for k in range(len(O)):
            x=0
            for i in O[k]:
                for j in O[k]:
                    x=x+A[i][j]
            if x != 0:
                pass
            else:
                for i in range(len(O[k])):
                    R.append(O[k][i])
                T1.append(R)
        R=[w]

print T1

```

Adem3s, es necesario saber cuantos v3rtices de grado 5 y cuantos de grado 4 hay. En SAGEMATH queda como sigue,

"detecta el grado de los vertices del grafo y en las dos ultimas posiciones, cuantos hay de grado 4 y cuantos de grado 5"

```
def valencia(A):
    L=[]
    v4=0
    v5=0
    for i in range(len(A)):
        s=0
        for k in range(i):
            s=s+A[k][i]
        for j in range(i+1,len(A)):
            s=s+A[i][j]
        L.append(s)
        if s==4:
            v4=v4+1
        if s==5:
            v5=v5+1
    L.append(v4)
    L.append(v5)
    return L
```

Teniendo esto, se crea un código el cual busque todas las posibles conexiones de $H_1(p)$ con $H_2(p)$, donde arroje cuantas soluciones son posibles sin que se pueda formar un (3,6)-grafo.

```
z=0
C=[x[:] for x in B]
for w in T:
    for s in range(4):
        C[w[s]][13]=1
    D=[x[:] for x in C]
    for i in T:
        for j in range(4):
            D[i[j]][14]=1
    F=[x[:] for x in D]
    for k in T:
        for r in range(4):
            F[k[r]][15]=1
    H=[x[:] for x in F]
    for m in T1:
        for n in range(3):
            H[m[n]][16]=1
    Y=valencia(H)
    if Y[17]==7 and Y[18]==10:
        if independiente(H,17,6)==True:
            pass
        else:
            z=z+1
    H=[x[:] for x in F]
    F=[x[:] for x in D]
    D=[x[:] for x in C]
    C=[x[:] for x in B]
print z, "soluciones"
0 soluciones
```

Similarmente, para el ítem (b), se muestra que es imposible poner las aristas rojas entre $H_1(p)$ y $H_2(p)$ sin formar un $(3, 6)$ -grafo para un vértice p preferido tal que $d_r(p) = 5$, donde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} = & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} = & \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Para este caso, se añade 1 en las posiciones $(12, 13)$, $(12, 14)$, $(12, 15)$, $(12, 16)$, $(12, 17)$ en la matriz B , como el vértice p es de grado 5, se recorre el código anterior sobre la lista T en las columnas 13, 14, 15, 16 y la columna 17 se recorre sobre $T1$.

```

z=0
C=[x[:] for x in B]
for w in T:
    for s in range(4):
        C[w[s]][12]=1
D=[x[:] for x in C]
for i in T:
    for j in range(4):
        D[i[j]][13]=1
F=[x[:] for x in D]
for k in T:
    for r in range(4):
        F[k[r]][14]=1
H=[x[:] for x in F]
for m in T:
    for n in range(4):
        H[m[n]][15]=1
Q=[x[:] for x in H]
for t in T1:
    for e in range(3):
        Q[t[e]][16]=1
Y=valencia(Q)
if Y[17]==7 and Y[18]==10:
    if Independiente(Q,17,6)==True:
        pass
    else:
        z=z+1
        Q=[x[:] for x in H]
        H=[x[:] for x in F]
        F=[x[:] for x in D]
        D=[x[:] for x in C]
        C=[x[:] for x in B]
print z, "soluciones"
-----
0 soluciones

```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] J.M. Aldous, S. Best, and R.J. Wilson. *Graphs and Applications: An Introductory Approach*. The Open University. Springer London, 2003.
- [2] Lyle E. Barton. Ramsey Theory. <https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2016/Barton.pdf>, 2016.
- [3] David Cariolaro. On the Ramsey number $R(3,6)$. *Australasian Journal of Combinatorics*, **37**:301–304, 2007.
- [4] Cesar Alfonzo Diaz. Tesis de licenciatura: Teoria de Ramsey y teorema de Erdos-Szekeres. 2013.
- [5] Geoffrey Exoo. On two classical Ramsey numbers of the form $R(3,n)$. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **2**(4):488–490, 1989.
- [6] Jan Goedgebeur and Stanisław P Radziszowski. New computational upper bounds for Ramsey numbers $R(3,k)$. *the electronic journal of combinatorics*, 20(1):28, 2013.
- [7] Ron Graham and Steve Butler. *Rudiments of Ramsey theory*, volume 123. American Mathematical Soc., 2015.
- [8] Ronald L Graham and Joel H. Spencer. *Ramsey Theory*. Wiley Series in Discrete Mathematics and Optimization, pages=208, year=1990.
- [9] Jack E Graver and James Yackel. Some graph theoretic results associated with Ramsey’s theorem. *Journal of Combinatorial Theory*, **4**(2):125–175, 1968.
- [10] Robert E Greenwood and Andrew Mattei Gleason. Combinatorial relations and chromatic graphs. *Canadian Journal of Mathematics*, **7**(1):7, 1955.
- [11] Charles M Grinstead and Sam M Roberts. On the Ramsey numbers $R(3,8)$ and $R(3,9)$. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **33**:27–51, 1982.
- [12] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford university press, 1979.
- [13] Kenneth Ireland and Michael Rosen. *A classical introduction to modern number theory*, volume 84. Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] Gerzson Kéry. On a theorem of Ramsey. *Math. Lapok*, 15:204–224, 1964.
- [15] Bruce M Landman and Aaron Robertson. *Ramsey Theory on the integers*, volume 73. American Mathematical Soc., 2014.

- [16] Brendan D McKay and Zhang Ke Min. The value of the Ramsey number $R(3,8)$. *Journal of Graph Theory*, **16**(1):99–105, 1992.
- [17] Brendan D McKay and Stanislaw P Radziszowski. $R(4,5)=25$. *Journal of Graph Theory*, **19**(3):309–322, 1995.
- [18] Frank P Ramsey. On a problem of formal logic. pages 264–286, 1930.
- [19] Fred S. Roberts. Applications of ramsey theory. *Discrete Applied Mathematics*, 9(3):251 – 261, 1984.
- [20] Vera Rosta. Ramsey theory applications. *Electronic Journal of Combinatorics*, 11, 05 2002.
- [21] Alexander Soifer. *Ramsey Theory: Yesterday, today, and tomorrow*, volume 285. Springer Science & Business Media, 2010.
- [22] Douglas Brent West et al. *Introduction to graph theory*, volume **2**. Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- [23] Robin J Wilson. *Introduction to graph theory*. Pearson Education India, 1979.