CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA SOBRE EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS

PABLO HERLEY LASSO ORDOÑEZ

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO

2019

CLASIFICACIÓN DE LAS ÁLGEBRAS DE LIE SEMISIMPLES DE DIMENSIÓN FINITA SOBRE EL CUERPO DE LOS COMPLEJOS

PABLO HERLEY LASSO ORDOÑEZ

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Wilson Fernando Mutis Cantero
Ph. D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO
2019

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Wilson Fernando Mutis Cantero

Asesor del trabajo de grado

John Hermes Castillo Gómez

Jurado

Andrés Chaves Beltrán

Jurado

San Juan de Pasto, 19 de noviembre de 2019

Este trabajo está dedicado a:
Mis padres: Giovanny Lasso y Edelmira Ordoñez.
Mis hermanos: Eyner, Carlos y Cristian.
A la memoria de mi abuelo Alonso.
Pablo.

Agradecimientos

En primer lugar agradezco a Dios por acompañarme y permitir que se cumplan mis metas. Agradecer a mis padres y mis hermanos por estar siempre con migo, por su apoyo, por sus ánimos y todo lo brindado hacia mi durante esta etapa de mi vida. Con todo el corazón agradezco a mi madrina Arcenides y mi prima Michelle por todo lo que hicieron por mi para que esta meta se lograra. Agradezco al Profesor Wilson Mutis por dedicar su tiempo al desarrollo de este trabajo, por sus paciencia, por sus consejos y sus enseñanzas. A los docentes del departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño les agradezco por compartir sus conocimientos y por formarme como profesional. Le dedico un agradecimiento a mis familiares y amigos por brindarme siempre su apoyo. Un sincero agradecimiento a mis compañeros por todo lo compartido durante nuestra estancia en la universidad. Un agradecimiento especial a Vanessa por su compañía, sus concejos, su paciencia, su apoyo y todo lo compartido durante este tiempo. Por ultimo pero no menos importante agradezco a mi abuelo Alonso por haberme enseñado a sonreír sin importar lo que este pasando, sea bueno o sea malo.

Resumen

Un tema de gran importancia dentro de la teoría de las álgebras de Lie es el estudio de la clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita. Un resultado conocido establece que las $\mathbb{C}$-álgebras de Lie semisimples finitas se pueden caracterizar mediante la teoría de los sistemas de raíces y los diagramas de Dynkin. En este documento se presenta la teoría necesaria para comprender el teorema de clasificación de las álgebras de Lie semisimples finitas sobre los números complejos.

Palabras clave: Álgebra de Lie semisimple, subálgebras de Cartan, sistema de raíces, diagramas de Dynkin, isomorfismo.

Abstract

A topic of great importance within the theory of Lie algebras is the study of the classification of semisimple Lie algebras of finite dimension. A known result states that the semisimple Lie $\mathbb{C}$-algebra can be characterized by the theory of root systems and Dynkin diagrams. This paper presents the theory necessary to understand the theorem of classification of semisimple Lie algebras finite over complex numbers.

Keywords: Semisimple Lie algebra, Cartan subalgebras, root system, Dynkin diagrams, isomorphism.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Introducción

Sophus Lie dio inicio a las ideas que conformaron, la hoy denominada teoría de Lie y aunque en los primeros trabajos de Lie la idea era construir una teoría de grupos continuos, en la actualidad, la teoría de las álgebras de Lie ha evolucionado y se ha convertido en un objeto central de estudio y con aplicaciones en distintas áreas de investigación. Entre las álgebras de Lie, se destacan las álgebras de Lie semisimples, las cuales se pueden caracterizar a través de sus componentes simples. El matemático Levi-Civita estableció una descomposición de una álgebra de Lie general en una parte semisimple y otra que excluía la semisimplicidad mientras que el matemático Anatoly Ivanovich determinó la unicidad de dicha descomposición bajo un automorfismo interior del álgebra de Lie [10]. A una álgebra de Lie semisimple se le asocia un sistema de raíces que es un conjunto de transformaciones lineales definidas en una determinada subálgebra que satisfacen ciertas propiedades y que permiten caracterizar, por medio de los diagramas de Dynkin, las álgebra de Lie semisimples. En este trabajo de grado se realizó un estudio monográfico de la teoría de álgebras de Lie y los sistemas de raíces que permiten justificar el teorema de clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita sobre el cuerpo de los complejos. En este sentido, el trabajo está organizado en 4 capítulos. En el Capítulo 1, se presentan algunas conceptos y teoremas (sin demostración) conocidos del Álgebra Lineal y de la teoría básica de las Álgebras de Lie, con el ánimo de indicarle al lector lo necesario para abordar los capítulos posteriores. El Capítulo 2, está dedicado al Teorema de Lie, al criterio de Cartan y a la forma de Killing que son importantes para establecer el teorema de clasificación. En el Capítulo 3, se estudia los sistemas de raíces en abstracto, separado de las álgebras de Lie. Se presentan las pruebas detalladas de teoremas, lemas y proposiciones que en varios textos solo se limitan a mencionarlas o incluso omitirlas. Al final de este capítulo, se presenta la clasificación de los sistemas de raíces irreducibles haciendo uso de los diagramas de Dynkin. Mediante esta clasificación de los sistemas de raíces se permite clasificar las álgebras de Lie semisimples en el ultimo capítulo. Finalmente, en el Capítulo 4, se introduce el concepto de raíz de un álgebra de Lie semisimple con respecto a una subálgebra de Cartan, el conjunto de estas raíces termina formando un sistema de raíces en el sentido del Capítulo 3. Se finaliza este capítulo con el Teorema de clasificación de las álgebras de Lie semisimples de dimensión finita sobre los complejos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Álgebra lineal

Para el desarrollo del presente trabajo se asume que el lector tiene conocimiento de la teoría de álgebra de matrices, conceptos y teoremas básicos de la teoría de cuerpos y álgebra lineal, los cuales se utilizarán a lo largo de este documento. Sin embargo se presentan algunas definiciones y teoremas necesarios para una adecuada comprensión del texto. Para una mayor información de estas teorías se pueden consultar [6], [8] y [11].
Primero se presentan algunas definiciones y resultados de espacios vectoriales.

Definición 1.1 (**Espacio vectorial**)**.** Un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$, en adelante $\mathbb{F}$-espacio vectorial, consta de un grupo abeliano V bajo la suma, junto con una función $f : \mathbb{F} \times V \longrightarrow V$, denominada multiplicación por escalar, que asigna a cada par ordenado $(\alpha, v) \in \mathbb{F} \times V$ un elemento denotado $\alpha v \in V$, tal que para todos los $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $u, v \in V$ se satisfacen las siguientes condiciones.

(a) $\alpha u \in V$.

(b) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$.

(c) $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$.

(d) $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$.

(e) $1u = u$.

Los elementos de V se denominan **vectores** y los elementos de $\mathbb{F}$ se denominan **escalares**.

Definición 1.2 (**Subespacio**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Un subconjunto W de V se llama subespacio de V si W es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial con respecto a la restricción a W de la suma de vectores y multiplicación por un escalar.

Teorema 1.3. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y sea W un subconjunto no vacío de V. Entonces W es un subespacio de V si y solo si*

(a) Para todo $u, w \in W$ se tiene $u + w \in W$.

(b) Si $u \in W$ y $\alpha \in \mathbb{F}$, entonces $\alpha u \in W$.

Definición 1.4 (**Subespacio generado**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y sean S un subconjunto de V y $\mathcal{W}(S)$ la colección de subespacios de V que contienen a S. EL subespacio generado por S, denotado $gen(S)$, se define por

$$gen(S) = \bigcap_{W \in \mathcal{W}(S)} W.$$

Además, se dice que S genera a V si $gen(S) = V$.

Teorema 1.5. *Sean V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y S es un subconjunto de V, se tiene*

(a) Si $S = \emptyset$, entonces $gen(S) = \{0\}$.

(b) Si $S \neq \emptyset$, entonces

$$gen(S) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i v_i : n \in \mathbb{Z}^+, a_i \in \mathbb{F}, v_i \in S \right\}.$$

Definición 1.6 (**Base**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Un subconjunto S de V es una base de V, sobre $\mathbb{F}$, si S es linealmente independiente y S genera a V.

Proposición 1.7. *Si V es un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y W un subespacio de V, entonces* $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Definición 1.8 (**Codimensión**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea K un subespacio de V. La codimensión de K en V, denotado *codim* K, es la diferencia entre las dimensiones de V y K, es decir, *codim* $K = \dim V - \dim K$.

Ahora, se presentan algunos conceptos y propiedades básicos del álgebra de matrices, se asume que el lector conoce la suma, multiplicación y producto por escalar usuales. Se denota con $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ al conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ con componentes en el cuerpo $\mathbb{F}$, si $m = n$ se denota $M_n(\mathbb{F})$ el conjunto de matrices de orden n.

Definición 1.9 (**Traza de una matriz**)**.** Sea $A \in M_n(\mathbb{F})$, se denomina traza de la matriz A, denota por $tr(A)$, a la suma de las componentes de la diagonal principal de A, es decir $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Proposición 1.10. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ entonces*

(a) $tr(A + B) = tr(A) + tr(B)$.

(b) $tr(\alpha A) = \alpha tr(A)$.

(c) $tr(AB) = tr(BA)$.

Definición 1.11 (**Matriz nilpotente**). $A \in M_n(\mathbb{F})$. Se dice A es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.

Definición 1.12 (**Matrices semejantes**). Dos matrices $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ son semejantes si existe una matriz invertible $P \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $A = P^{-1}BP$. Si A y B son matrices semejantes se denota por $A \sim B$.

Proposición 1.13. *Sean $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Si $A \sim B$ entonces $tr(A) = tr(B)$.*

Proposición 1.14. *Si $A \in M_n(\mathbb{F})$, entonces existen matrices S diagonal y N nilpotente, S y N de orden n, tal que $A \sim (S + N)$.*

Definición 1.15 (**Matriz diagonalizable**). Una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal $D \in M_n(\mathbb{F})$ tal que $A \sim D$.

A continuación se presentan algunos resultados de transformaciones lineales.

Definición 1.16 (**Transformación lineal**). Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales. La función $T : V \longrightarrow W$ se denomina transformación lineal si

(a) $T(v + u) = T(v) + T(u)$, para todo $u, v \in V$.

(b) $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ para todo $v \in V$ y todo $\alpha \in \mathbb{F}$.

Teorema 1.17. *Una transformación lineal T sobre un espacio vectorial V esta completamente determinada por su acción sobre una base de V.*

Definición 1.18 (**Kernel e imagen de una transformación lineal**). Sean V y W dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales y sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal. Entonces

1. El kernel (o núcleo) de T, denotado $ker(T)$, es el subconjunto de V que consta de todos los vectores v tales que $T(v) = 0$, es decir, $ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}$.

2. La imagen de T, denotada $T(V)$, es el conjunto de vectores en W que son imágenes, bajo T, de vectores en V, es decir, $T(V) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}$.

Definición 1.19 (**Matriz de una transformación lineal**). Sea $T : V \longrightarrow W$ una transformación lineal entre dos $\mathbb{F}$-espacios vectoriales V y W de dimensión finita. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V y $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de W. La matriz A_{mn} cuyas columnas son $[T(v_1)]_S, \ldots, [T(v_n)]_S$ es la única matriz que satisface $[T(x)]_S = A[x]_B$ para todo x en V. La matriz A se denomina matriz de T con respecto a las bases B y S. Si $V = W$ y $B = S$, A se llama matriz de T con respecto a B.

Definición 1.20 (**Transformación lineal nilpotente**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Una transformación lineal T en V se dice nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n = \underbrace{T \circ T \circ \cdots \circ T}_{n\text{-veces}} = 0.$$

Análogamente, se dice que una matriz $A \in M_n(\mathbb{F})$ es nilpotente si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$.

Teorema 1.21. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita. Si T es una transformación lineal nilpotente en V, entonces $tr(T) = 0$.*

Definición 1.22 (**Valor propio**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y sea T una transformación lineal sobre V. Un valor propio de T es un escalar $\alpha \in \mathbb{F}$ tal que existe vector no nulo $v \in V$ con $T(v) = \alpha v$. Si α es un valor propio de T, entonces

(a) Todo vector no nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \alpha v$ se denomina **vector propio** de T asociado con el valor característico α.

(b) El conjunto de todos los v tal que $T(v) = \alpha v$ se denomina el **espacio propio** asociado con v.

Teorema 1.23 (**Polinomio propio**)**.** *Si $A \in M_n(\mathbb{F})$, entonces $p(x) = det(A - xI_n)$ es un polinomio en la variable x con coeficientes en el cuerpo $\mathbb{F}$ que satisface las siguientes condiciones*

1. $gra(p(x)) = n$

2. $p(0) = det(A)$

El coeficiente principal de $p(x)$ es $(-1)^n$.

Teorema 1.24. *Si $\mathbb{F}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado. Entonces, b es un valor propio de $A \in M_n(\mathbb{F})$ si, y sólo si, b es una raíz del polinomio $p(x)$.*

Ahora, se presenta algunas definiciones y teoremas de formas bilineales.

Definición 1.25 (**Forma bilineal**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Una forma bilineal en V es una función φ, que asigna a cada par ordenado de vectores en V un escalar en $\mathbb{F}$, $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$, y que satisface

(a) $\varphi(u, v + w) = \varphi(u, v) + \varphi(u, w)$

(b) $\varphi(u + v, w) = \varphi(u, w) + \varphi(v, w)$

(c) $\alpha\varphi(u, w) = \varphi(\alpha u, w) = \varphi(u, \alpha w)$

para todo $u, v, w \in V$ y $\alpha \in \mathbb{F}$.

Definición 1.26 (**Matriz de una forma bilineal**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Sea $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ una forma bilineal, se define la matriz de φ en la base B, $[\varphi]_B$, por $[\varphi]_B = [a_{ij}]_{n\times n}$, donde $a_{ij} = \varphi(u_i, u_j)$.

Definición 1.27 (**Forma bilineal simétrica**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial. Una forma bilineal $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ se dice simétrica si $\varphi(v, w) = \varphi(w, v)$ para todo $v, w \in V$. Si $\varphi(v, w) = -\varphi(w, v)$ se dice que la forma bilineal es antisimetrica.

Teorema 1.28. *Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea φ una forma bilineal. Sea B una base de V, entonces φ es simétrica si y solo si $[\varphi]_B$ es simétrica.*

Definición 1.29 (**Kernel de una forma bilineal simétrica**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ una forma bilineal simétrica. El kernel de φ, denotado $ker(\varphi)$, se define por $ker(\varphi) = \{v \in V : \varphi(v, w) = 0, \text{ para todo } w \in V\}$. Si $ker(\varphi) = \{0\}$ se dice que φ es **no degenerada**.

Definición 1.30 (**Descomposición de Jordan**)**.** Sea V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial y sea x una transformación lineal sobre V. La descomposición de Jordan de x es la expresión única de x como una suma $x = D + N$, donde D es una transformación lineal diagonalizable, N es una transformacional lineal nilpotente y $[D]_B$ y $[N]_B$ conmutan respecto a una base B de V.

Una transformación lineal diagonalizable de un espacio vectorial es también denominada semisimple.

Teorema 1.31. *Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y sea x una transformación lineal sobre V con descomposición de Jordan $x = D + N$. Entonces,*

(a) Existe un polinomio $p(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que $p(x) = D$.

(b) Se fija una base B de V en la que D es diagonal. Sea $\overline{d}$ la transformación lineal cuya matriz con respecto a la base B es el conjugado complejo de la matriz de D. Existe un polinomio $q(X) \in \mathbb{C}[X]$ tal que $q(x) = \overline{d}$.

Para finalizar esta sección, se presentan algunas definiciones adicionales las cuales serán de gran utilidad en el desarrollo del Capítulo 3.

Definición 1.32 (**Producto interno**)**.** Una forma bilineal simétrica $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ definida positiva, es decir, $\varphi(u, v) > 0$ para todo $u, v \in V$, se denomina producto interno.

En adelante el producto interno se denotará por $(\ , \ )$.

Definición 1.33 (**Espacio Euclidiano**)**.** Un $\mathbb{R}$-espacio vectorial E provisto de un producto interno se denomina espacio Euclidiano.

Definición 1.34 (Vectores ortogonales). Sea E un espacio Euclidiano. los vectores $x, y \in E$ se denominan ortogonales si $(x, y) = 0$.

Definición 1.35 (Conjuntos mutuamente ortogonales). Sea E un espacio Euclidiano. Dos conjuntos $A, B \in E$ se dicen mutuamente ortogonales si $(x, y) = 0$ para todo $x \in A$ y todo $y \in B$.

1.2. Álgebra de Lie

En esta sección se presentan definiciones y teoremas de la teoría de las álgebra de Lie necesarios para entender el teorema de clasificación de álgebras de Lie semisimples el cual es el tema central de este trabajo de grado. Todos los espacios vectoriales y las transformaciones lineales se consideran sobre el mismo cuerpo $\mathbb{F}$. Los teoremas que se muestran a continuación son resultados conocidos de la teoría de álgebras de Lie y sus demostraciones se pueden consultar en [3], [4], [5], [7] y [10].

Definición 1.36 ($\mathbb{F}$-álgebra). Una $\mathbb{F}$-álgebra es un espacio vectorial V junto con una aplicación $* : V \times V \to V$, llamada multiplicación, que asigna a cada par ordenado $(a, b) \in V \times V$ un vector $a * b \in V$, tal que para todo $a, b, c \in V$ y todo par de escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se satisfacen las dos condiciones siguientes

1. $a * (\alpha b + \beta c) = \alpha(a * b) + \beta(a * c)$,
2. $(\alpha a + \beta b) * c = \alpha(a * c) + \beta(b * c)$.

Además, se dice que V es una álgebra asociativa si $(a * b) * c = a * (b * c)$, una álgebra con identidad si existe un elemento $1 \in V$ tal que $1 * a = a * 1 = a$ para todo $a \in V$, y una álgebra conmutativa si $a * b = b * a$.

Ejemplo 1.37. El espacio vectorial $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ de las matrices de tamaño $m \times n$ con entradas en el cuerpo $\mathbb{F}$ con la multiplicación usual de matrices es una álgebra asociativa con identidad.

Definición 1.38 (Álgebra de Lie). Una álgebra de Lie es una $\mathbb{F}$-álgebra L con multiplicación $[\ ,\ ] : L \times L \to L$, denominada corchete o conmutador de Lie, que satisface las siguientes condiciones:

(a) **Anticonmutatividad**: Para todo $x \in L$ se tiene $[x, x] = 0$.

(b) **Identidad de Jacobi**: Para todo $x, y, z \in L$ se tiene $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$.

Ejemplo 1.39. El espacio vectorial L de las matrices cuadradas de orden n con entradas en los complejos es una álgebra de Lie definiendo el corchete por $[A, B] = AB - BA$, para todo par de matrices $A, B \in L$.

Ejemplo 1.40. Todo espacio vectorial V es una álgebra de Lie definiendo el corchete en forma trivial, es decir $[x, y] = 0$ para todo par de vectores $x, y \in V$. Esta estructura de álgebra de Lie sobre V se denomina abeliana.

Definición 1.41 (**Subálgebra e Ideal**). Sea L una álgebra de Lie. Un subespacio S de L es una subálgebra de L si para todo par de vectores $a, b \in S$ se tiene $[a, b] \in S$. Un subespacio I de L es un ideal de L si para todo vector $a \in L$ y todo vector $b \in I$ se tiene que $[a, b] \in I$.

Ejemplo 1.42. Sea L la álgebra de Lie de las matrices cuadradas de orden n. El subespacio S de las matrices diagonales es una subálgebra abeliana de L porque $[A, B] = 0$ para todo $A, B \in S$. Además, el subespacio $sl_n = \{A \in L : tr(A) = 0\}$ es un ideal de L porque $tr([A, B]) = tr(AB - BA) = 0$ para todo $A \in L$ y toda $B \in sl_n$.

Ejemplo 1.43. Sea L una álgebra de Lie. El centro de L, denotado por $Z(L)$, es el subespacio de L definido por $Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0, \text{ para todo } y \in L\}$. Observe que, para $a, b \in L$ y $c \in Z(L)$ se tiene $[a, [b, c]] = [a, 0] = 0$, luego $[b, c] \in Z(L)$ y por lo tanto $Z(L)$ es ideal de L. Además, $Z(L) = \{0\}$ si y solo si L es abeliana.

Observación 1.44. Todo ideal de una álgebra de Lie L es una subálgebra de L, pero no toda subálgebra de L es un ideal. Además, toda álgebra de Lie L contiene por lo menos dos ideales $\{0\}$ y L, denominados ideales triviales.

Definición 1.45 (**Álgebra de Lie simple**). Sea L una álgebra de Lie no abeliana. Se dice que L es una álgebra de Lie simple si los únicos ideales de L son los triviales.

Ejemplo 1.46. Una base para sl_2 es el conjunto $\{e, f, h\}$, donde $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Observe que $[e, f] = ef - fe = h$, luego sl_2 no es abeliana y se puede probar que los únicos ideales de sl_2 son los triviales, por lo tanto sl_2 vista como álgebra de Lie, es simple.

Teorema 1.47. *Sea L una álgebra de Lie. Si I y J son ideales de L, entonces*

(a) $I \cap J$ es ideal de L.

(b) $I + J = \{x + y : x \in I, y \in J\}$ es ideal de L.

(c) $[I, J] = gen\{[x, y] : x \in I, y \in J\}$ es ideal de L. En particular, el ideal $[L, L] = L'$ se denomina la subálgebra derivada de L.

Definición 1.48 (**Homomorfismo de álgebras de Lie**). Sean L_1 y L_2 álgebras de Lie. Un homomorfismo de álgebras de Lie es una transformación lineal $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ tal que

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)],$$

para todo x, y en L_1. Se dice que φ es un **monomorfismo** si $ker(\varphi) = \{0\}$, un **epimorfismo** si $im(\varphi) = L_2$ y un **isomorfismo** si es monomorfismo y epimorfismo. Además, si φ es un epimorfismo, se dice que L_2 es una imagen homomorfica de L_1. Si φ es un isomorfismo, se dice que L_1 y L_2 son álgebras de Lie isomorfas y esto se denota con $L_1 \cong L_2$.

Un homomorfismo de L en L se denomina endomorfismo en L.

Ejemplo 1.49. Si L es una álgebra de Lie y $x \in L$, entonces la aplicación $ad_x : L \longrightarrow L$ definida por $ad_x(y) = [x, y]$ para todo $y \in L$ es una transformación lineal de L en L. Además, el espacio vectorial $gl(L)$ de las transformaciones lineales de L en L es una álgebra de Lie definiendo el corchete como

$$[f, g] = f \circ g - g \circ f, \text{ para todo } f, g \in gl(L).$$

Luego $ad : L \longrightarrow gl(L)$ definida por $ad(x) = ad_x$, para todo $x \in L$, es un homomorfismo de álgebras de Lie denominado **representación adjunta** de L y se tiene $ker(ad) = \{x \in L : ad_x = 0\} = Z(L)$.

Ejemplo 1.50. Toda $\mathbb{C}$-álgebra de Lie L de dimensión 3 que cumpla $L = L'$ es isomorfa a sl_2. Los detalles de la prueba estan en Erdmann and Wildon (2006) [4].

Teorema 1.51. *Si $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces*

(a) $ker(\varphi)$ es un ideal de L_1.

(b) $\varphi(L_1)$ es una subálgebra de L_2. Si φ es sobreyectivo, entonces $\varphi(L_1)$ es un ideal de L_2.

(c) Si J es un ideal de L_2, entonces $\varphi^{-1}(J) = \{x \in L_1 : \varphi(x) \in J\}$ es un ideal de L_1.

(d) Si B es un ideal de L_1 y φ es sobreyectivo, entonces $\varphi(B)$ es un ideal de L_2.

Proposición 1.52. *Sea L una álgebra de Lie y sea J un ideal de L, entonces el espacio vectorial L/J tiene estructura de álgebra de Lie definiendo el conmutador como sigue*

$$[x + J, y + J] = [x, y] + J, \textit{ para todo } x, y \in L.$$

El álgebra de Lie de la Proposición 1.52 se denomina álgebra cociente. En adelante se denotara por $\overline{x}$ a los elementos de la álgebra cociente, es decir $\overline{x} = x + J$ para todo $x + J \in L/J$.

Observación 1.53. Sea L una álgebra de Lie y L' la subálgebra derivada de L. La álgebra cociente L/L' es abeliana, de hecho todo subespacio de L/L' es un ideal. En efecto, sea R un subespacio de L/L', entonces para $\overline{x} \in L/L'$ y $\overline{r} \in R$ se tiene que $[\overline{x}, \overline{r}] = \overline{0} \in R$, así R es ideal de L/L'.

Teorema 1.54. *Sean L_1 y L_2 dos álgebras de Lie. Se satisfacen los siguientes enunciados.*

(a) Si $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces $L/ker(\varphi) \cong Im(\varphi)$.

(b) Si I y J son ideales de L tal que $I \subset J$, entonces J/I es un ideal de L/I y $(L/I)/(J/I) \cong L/J$.

(c) Si I y J son ideales de L, entonces $(I + J)/J \cong I/(I \cap J)$.

Definición 1.55 (**Módulo de una álgebra de Lie**)**.** Sean L una álgebra de Lie y V un espacio vectorial. Se dice que V es un L-módulo si existe una aplicación bilineal $\bullet : L \times V \longrightarrow V$ que asigna a cada pareja ordenada $(x, v) \in L \times V$ un vector $v \cdot x \in V$ y satisface que

$$[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v).$$

En este caso se dice que L actúa sobre V.

Ejemplo 1.56. Sea V un espacio vectorial, se puede probar que el espacio $gl(V)$ de las transformaciones lineales en V es una álgebra de Lie definiendo el corchete por $[f, g] = f \circ g - g \circ f$, para todo $f, g \in gl(V)$. Si $\varphi : L \longrightarrow gl(V)$ es un homomorfismo de álgebras de Lie, entonces V es un L-módulo definiendo $x \cdot v = \varphi(x)(v),$ para todo $x \in L,$ y toda $v \in V.$
Como un ejemplo particular de la situación anterior se tiene que toda álgebra de Lie es un L-módulo definiendo la acción de L en L por medio de la representación adjunta, es decir, para $x, y \in L$ se define $x \cdot y = ad_x(y) = [x, y]$.

Definición 1.57 (**Submódulo**)**.** Sea V un L-módulo. Un subespacio W de V es un submódulo de V si W es invariante bajo la acción de L, es decir, para todo $x \in L$ y toda $w \in W$ se tiene $x \cdot w \in W$.

Ejemplo 1.58. Todo L-módulo V tiene por lo menos dos submódulos $\{0\}$ y V, denominados submódulos triviales. Los submódulos de una álgebra de Lie L son los ideales de L.

Definición 1.59 (**Módulo irreducible**)**.** Un L-módulo V se llama irreducible si los únicos submódulos de V son los triviales.

Ejemplo 1.60. Toda álgebra de Lie L es un L-módulo, en este caso los ideales de L son los submódulos, en particular el álgebra de Lie sl_2 es un sl_2-módulo irreducible porque sus únicos submódulos son los triviales.

Definición 1.61 (**L-módulos isomorfos**)**.** Sean V y W dos L-módulos. Se dice que V y W son L-módulos isomorfos si existe una transformación lineal biyectiva $\varphi : V \to W$ tal que para todo $x \in L$ y todo vector $v \in V$ se satisface $\varphi(x \cdot v) = x \cdot \varphi(v)$.

La caracterización de los L-módulos irreducibles bajo isomorfismo es una linea de investigación importante y difícil dentro de la teoría de las álgebras de Lie. En particular, todos los sl_2-módulos han sido caracterizados y en el trabajo de grado de Aguanary y Bolaños (2017) [1], se recopilan las pruebas completas de los teoremas que permiten caracterizar los sl_2-módulos de dimensión finita, algunos de estos resultados serán utilizados en el Capítulo 4 del presente trabajo y se enuncian a continuación.

Teorema 1.62. *Sea $\mathbb{C}[X, Y]$ el espacio vectorial de los polinomios en las variables X, Y con coeficientes complejos y sea $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. El subespacio $V_d = gen\{X^d, X^{d-1}Y, \ldots, Y^d\}$ es un sl_2-módulo* *irreducible definiendo la acción de sl_2 sobre V_d de la siguiente forma*

$$e \cdot P = X\frac{\partial}{\partial Y}(P), \;\; f \cdot P = Y\frac{\partial}{\partial X}(P), \;\; h \cdot P = X\frac{\partial}{\partial X}(P) - Y\frac{\partial}{\partial Y}(P),$$

para todo polinomio $P \in V_d$.

Teorema 1.63. *Si V es un sl_2-módulo irreducible de dimensión finita, entonces V es isomorfo a V_d para algún entero $d \geq 0$.*

Observación 1.64. De la acción de sl_2 sobre el módulo V_d, para todo $j = 0, \ldots, d$, se tiene que

$$h \cdot X^{d-j}Y^j = X\frac{\partial}{\partial X}(X^{d-j}Y^j) - Y\frac{\partial}{\partial Y}(X^{d-j}Y^j) = (d-2j)(X^{d-j}Y^j).$$

Por lo tanto, los valores propios de la transformación lineal $\varphi_h : V \to V$, definida por $\varphi_h(v) = h \cdot v$ para todo $v \in V$, son los enteros $\{d - 2j : 0 \leq j \leq d\}$.

El Teorema de Weyl, que se enuncia a continuación, es un resultado conocido de la teoría de álgebras de Lie, su prueba se puede consultar en Erdmann and Wildon (2006) [4].

1.3. Álgebras de Lie solubles y nilpotentes

Definición 1.65 (Serie derivada). Sea L una álgebra de Lie. La serie derivada de L es la siguiente sucesión de ideales de L

$$L^{(0)} = L, \; L^{(1)} = [L, L], \; L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}], \ldots, \; L^{(i)} = [L^{(i-1)}, L^{(i-1)}].$$

Definición 1.66 (Álgebra de Lie soluble). Sea L una álgebra de Lie. Se dice que L es soluble si $L^{(k)} = \{0\}$, para algún entero positivo k.

Ejemplo 1.67. El conjunto de todas las matrices triangulares superiores de orden n denotado por

$$ut_n(\mathbb{F}) = \{[a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F}) : a_{ij} = 0 \text{ cuando } i > j\}$$

es una álgebra de Lie soluble.

Teorema 1.68. *Sea L una álgebra de Lie.*

(a) Si L es soluble, entonces también lo son todas las subálgebras e imagen homomorficas de L.

(b) Si I es un ideal soluble de L tal que L/I es soluble, entonces L es soluble.

(c) Si I, J son ideales solubles de L, entonces $I + J$ es soluble.

Proposición 1.69. *Sea L un álgebra de Lie de dimensión finita. Existe un único ideal soluble de L que contiene cada ideal soluble de L.*

Los detalles de la demostración se puede ver en Erdmann and Wildon (2006) [4]. El ideal de la proposición anterior se conoce como radical de L y se denota $rad(L)$. El radical se convertirá en una herramienta esencial para ayudar a describir las álgebras de Lie de dimensión finita. También sugiere la siguiente definición.

Definición 1.70 (**Álgebra de Lie semisimple**)**.** Sea L una álgebra de Lie no abeliana. Se dice que L es semisimple si $rad(L) = \{0\}$.

Observe que toda álgebra de Lie simple es semisimple pues sus únicos ideales son los triviales, $\{0\}$ y la misma álgebra, luego su radical es $\{0\}$, pero existen álgebras de Lie semisimples que no son simples.

Definición 1.71 (**Serie central**)**.** Sea L una álgebra de Lie. Se define una nueva sucesión de ideales de L como sigue

$$L^0 = L,\, L^1 = [L, L],\, L^2 = [L, L^1], \ldots,\, L^i = [L, L^{i-1}].$$

Esta sucesión se denomina la serie central de L.

Definición 1.72 (**Álgebra de Lie nilpotente**)**.** Sea L una álgebra de Lie. Se dice que L es nilpotente si $L^k = \{0\}$, para algún entero positivo k.

Ejemplo 1.73. Una álgebra de Lie nilpotente es el conjunto de matrices estrictamente triangulares superiores de orden 3 con entradas en los complejos, denotadas por

$$\eta(3, \mathbb{C}) = \{[a_{ij}] \in M_3(\mathbb{C}) : a_{ij} = 0 \text{ cuando } i \geqslant j\}.$$

Teorema 1.74. *Sea L una álgebra de Lie.*

(a) Si L es nilpotente, entonces también lo son todas las subálgebras e imagen homomorficas de L.

(b) Si $L/Z(L)$, es nilpotente, entonces L es nilpotente.

(c) Si L nilpotente, entonces $Z(L) \neq \{0\}$.

Definición 1.75 (**ad-nilpotente**)**.** Sea L una álgebra de Lie y $x \in L$. Se dice que x es ad-nilpotente si ad_x es un endomorfismo nilpotente.

Teorema 1.76 (**Teorema de Engel**)**.** *Sea L una álgebra de Lie. Si todo elemento de L es ad-nilpotente, entonces L es nilpotente.*

La prueba de este teorema se puede ver en Humphreys (1972) [7].

Capítulo 2

Álgebras de Lie semisimples

En este capitulo se presentan el Teorema de Lie el cual permite identificar cada elemento de una álgebra de Lie soluble con una matriz triangular superior, el Teorema de Cartan el cual es un criterio que permite saber cuando una álgebra de Lie es soluble y por ultimo se presenta una forma bilineal simetrica denominada la forma de Killing la cual es de gran importancia en el Capitulo 4 pues mediante esta forma bilineal se define el producto interno en el espacio dual de una cierta clase de subálgebras de una álgebra de Lie semisimple. En adelante se trabaja con la hipótesis de que $\mathbb{F}$ es un cuerpo algebraicamente cerrado y de característica cero.

2.1. Teoremas de Lie y Cartan

Teorema 2.1. *Sea L una subálgebra soluble de $gl(V)$, V de dimensión finita. Si $V \neq \{0\}$, entonces V contiene un vector propio común para todos los endomorfismos de L.*

Demostración. Se usa inducción sobre la dimensión de L. Si $\dim L = 1$, entonces $L = gen\{x\}$, para algún x no cero. Sea $y \in L$, entonces $y = \alpha x$, para algún $\alpha \in \mathbb{F}$. Dado que $\mathbb{F}$ es algebraicamente cerrado, existe β valor propio de x, luego existe un vector no nulo $w \in V$ tal que $x(w) = \beta w$. Entonces $y(w) = \alpha x(w) = (\alpha\beta)w$ donde w es un vector propio de y asociado al valor propio $\alpha\beta$. Suponga que el teorema se satisface para toda subálgebra soluble H de $gl(V)$ con $\dim H \leqslant n$, para algún $n \in \mathbb{Z}_{\geqslant 1}$, es decir existe un vector $u \in V$ tal que u es un vector propio común para todo $x \in H$. Sea L una subálgebra soluble de $gl(V)$, con $\dim L = n + 1$. Puesto que L es soluble, L contiene propiamente a $[L, L]$. Además $L/[L, L]$ es abeliana, pues para $x, y \in L$ se tiene

$$[x + [L, L], y + [L, L]] = [x, y] + [L, L] = [L, L].$$

Luego, se satisface que cualquier subespacio de $L/[L, L]$ es un ideal. Ahora, existe un subespacio de $L/[L, L]$ de codimensión 1, entonces su imagen inversa es un ideal en L de codimensión 1. En efecto, sea T un subespacio de $L/[L, L]$ tal que $codT = 1$. Por el homomorfismo canónico

$\pi : L \longrightarrow L/[L, L]$ definido por $\pi(u) = \overline{u}$ para todo $u \in L$, la imagen inversa de T es un ideal de L, donde $\pi^{-1}(T) = \{x \in L : \pi(x) = \overline{x} \in T\} = K$. Dado que $codT = 1$ existe $\overline{z} \in L/[L, L]$ tal que $\overline{z} \notin T$, entonces $L/[L, L] = T + gen\{\overline{z}\}$. Observe que $z \notin K$, se probará que $L = K + gen\{z\}$. Sea $w \in L$, entonces $\pi(w) = \overline{w} \in L/[L, L] = T + gen\{\overline{z}\}$. Luego, existen $\overline{x} \in T$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ tales que $\overline{w} = \overline{x} + \alpha\overline{z} = \overline{x + \alpha z}$, entonces $w - (x + \alpha z) \in [L, L] \subseteq K$. Así, $w - (x + \alpha z) = k$ para algún $k \in K$, esto es $w = (x + k) + \alpha z$ donde $(x + k) \in K$ y $\alpha z \in gen\{z\}$. De lo anterior se tiene que $codK = 1$. Por hipótesis inductiva K satisface el teorema, es decir, existe $v \in V$ tal que v es vector propio común para todo elemento en K. Luego, para cada $x \in K$ existe un escalar $\lambda(x)$ tal que $x(v) = \lambda(x)v$ y se tiene la función $\lambda : K \longrightarrow \mathbb{F}$ la cual asigna a cada $x \in K$ un elemento $\lambda(x) \in \mathbb{F}$. Se puede probar que λ es una transformación lineal. En efecto, sean $x, y \in K$ entonces

$$\begin{aligned}(x+y)(v) &= x(v) + y(v)\\ &= \lambda(x)v + \lambda(y)v\\ &= (\lambda(x) + \lambda(y))v\end{aligned}$$

pero, $(x + y)(v) = \lambda(x + y)v$, así que $(\lambda(x) + \lambda(y))v = \lambda(x + y)v$ y $v \neq 0$. Por lo tanto se satisface la igualdad $\lambda(x + y) = \lambda(x) + \lambda(y)$. Al fijar λ, se tiene es subespacio de L

$$W = \{w \in V : xw = \lambda(x)w, \forall x \in K\} \neq \{0\}.$$

Ahora, se probará que L deja invariante a W. Se asume por el momento que está hecho. Luego se puede ver que $L = K + gen(z)$, por tanto existe un vector propio $w_0 \in W$ distinto de cero que es un vector propio para z (para algún valor propio de z). Entonces se puede afirmar que w_0 es un vector propio común para todo $p \in L$. Cualquier $p \in L$ se puede escribir de la forma $p = a + \beta z$ para algún $a \in K$ y $\beta \in \mathbb{F}$ y se tiene $p(w_0) = a(w_0) + \beta z(w_0) = \lambda(a)w_0 + \beta\mu w_0$ donde μ es el valor propio de z correspondiente a w_0. Resta probar que L deja invariante a W. Sean $y \in L$ y $w \in W, w \neq 0$. Se debe probar que $y(w) \in W$. En efecto, para $x \in K$ arbitrario, se tiene

$$\begin{aligned}[x, y] &= xy - yx\\ xy &= yx + [x, y]\\ x(yw) &= y(xw) + [x, y](w)\\ x(yw) &= \lambda(x)yw + \lambda([x, y])w.\end{aligned}$$

Note que $[x, y] \in K$, puesto que K es ideal. Por lo tanto, lo que se debe probar es que el valor propio del conmutador $[x, y]$ es cero. Considere $U = gen\{w, y(w), y^2(w), \dots, \}$, este es un subespacio de V de dimensión finita. Sea m el menor entero positivo tal que los vectores $w, y(w), y^2(w), \dots, y^m(w)$ son linealmente dependientes. Así, $\dim U = m$, además U tiene como base $\{w, y(w), y^2(w), \dots, y^{m-1}(w)\}$. Sea $s \in K$, se probará que con respecto a la base anterior s tiene una matriz triangular superior con entradas en la diagonal principal iguales a $\lambda(s)$.

$$\begin{pmatrix} \lambda(s) & \star & \cdots & \star \\ 0 & \lambda(s) & \cdots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda(s) \end{pmatrix}.$$

Se procede por inducción en el número de la columna. Primero, $sw = \lambda(s)w \in U$ da la primera columna de la matriz. Luego, puesto que $[s, y] \in K$, se tiene

$$s(yw) = y(sw) + [s, y]w = \lambda(s)y(w) + \lambda([s, y])w$$

da la segunda columna. Para la columna r, se tiene $s(y^r(w)) = sy(y^{r-1}w) = ys(y^{r-1}w) + [s, y]y^{r-1}w$. Se puede decir que $s(y^{r-1}w) = \lambda(s)y^{r-1}w + u$ para algún $u \in gen\{y^j w : j < r-1\}$. Sustituyendo se tiene $ys(y^{r-1}w) = \lambda(s)y^r w + yu$, donde $yu \in gen\{y^j w : j < r\}$. Además, puesto que $[s, y] \in K$, se obtiene por inducción que $[s, y]y^{r-1}w = v$, para algún $v \in gen\{y^j w : j < r-1\}$. Combinando los dos últimos resultados se muestra que la columna r es como se indica. Ahora, se toma $s = [x, y]$. Se mostró que la traza de la matriz de s actuando sobre U es $m\lambda(s)$. Por otra parte, U es invariante bajo la acción de $x \in K$, y U es invariante bajo la acción de y por construcción. Así, la traza de s sobre U es la traza de $xy - yx$, visto como transformación lineal de U, y esta es cero. Por lo tanto $m\lambda([x, y]) = 0$. Puesto que $\mathbb{F}$ tiene característica cero, se sigue que $\lambda([x, y]) = 0$. ■

Corolario 2.2 (Teorema de Lie). *Sea L una subálgebra soluble de $gl(V)$, con $\dim V = n < \infty$. Entonces existe una base de V en la que cada elemento de L está representado por una matriz triangular superior.*

Demostración. Se procede por inducción sobre la dimensión de V. Si $\dim V = 1$ es evidente, pues los elementos de L serán representados por matrices de orden 1. Suponga que el enunciado del corolario se satisface para todo espacio vectorial de dimensión menor que n. Ahora, sea V un espacio vectorial de dimensión n, por el Teorema 2.1 existe $v_1 \in V$ que es un vector propio común para todo $x \in L$. Sea $W = gen\{v_1\}$, entonces $\dim V/W = n - 1$. Para $x \in L$ se tiene la función $\overline{x} : V/W \to V/W$ definida por $\overline{x}(\overline{v}) = \overline{x(v)}$, para todo $\overline{v} \in V/W$, la cual es una transformación lineal de V/W. En efecto, sean $\overline{v}, \overline{u} \in V/W$ tales que $\overline{v} = \overline{u}$. Luego, $v - u \in W$, entonces $v = u + \lambda v_1$, para algún $\lambda \in \mathbb{F}$. Así, $\overline{x}(\overline{v}) = \overline{x}(\overline{u + \lambda v_1}) = \overline{x(u + \lambda v_1)} = \overline{x(u) + \lambda x(v_1)} = \overline{x(u)} + \lambda\overline{x(v_1)}$ pero v_1 es un vector propio de x, luego existe $\beta \in \mathbb{F}$ tal que $x(v_1) = \beta v_1$, entonces $\overline{x(u)} + \lambda\overline{x(v_1)} = \overline{x(u)} + \lambda\beta\overline{v_1} = \overline{x(u)} = \overline{x}(\overline{u})$. Ahora, sean $\overline{v}, \overline{w} \in V/W$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, se debe probar que $\overline{x}(\alpha\overline{v} + \beta\overline{w}) = \alpha\overline{x}(\overline{v}) + \beta\overline{x}(\overline{w})$. En efecto

$$\overline{x}(\alpha\overline{v} + \beta\overline{w}) = \overline{x(\alpha v + \beta w)} = \overline{x(\alpha v) + x(\beta w)} = \alpha\overline{x(v)} + \beta\overline{x(w)} = \alpha\overline{x}(\overline{v}) + \beta\overline{x}(\overline{w}).$$

Entonces $\overline{x} \in gl(V/W)$. Ahora, sea $\overline{L} = \{\overline{x} : x \in L\} \subseteq gl(V/W)$, observe que para todo $\overline{x}, \overline{y} \in \overline{L}$ se tiene que $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = \overline{\alpha x + \beta y}$, entonces $\overline{\alpha x + \beta y} \in \overline{L}$. Además note que

$$[\overline{x}, \overline{y}] = \overline{x} \cdot \overline{y} - \overline{y} \cdot \overline{x} = \overline{xy} - \overline{yx} = \overline{xy - yx} = \overline{[x, y]} \in \overline{L}.$$

Puesto que L es soluble, entonces $L^{(k)} = \{0\}$, para algún entero positivo k. Luego

$$\overline{L}^{(1)} = [\overline{L}, \overline{L}] = gen\{[\overline{x}, \overline{y}] : x, y \in L\} = gen\{\overline{[x, y]} : x, y \in L\},$$
$$\overline{L}^{(2)} = [\overline{L}^{(1)}, \overline{L}^{(1)}] = gen\{\overline{[x, y]} : x, y \in \overline{L}^{(1)}\},$$
$$\overline{L}^{(k)} = [\overline{L}^{(k-1)}, \overline{L}^{(k-1)}] = gen\{\overline{[x, y]} : x, y \in \overline{L}^{(k-1)}\} = gen\{\overline{0}\} = \{\overline{0}\}.$$

Así, $\overline{L}$ es una subálgebra soluble. Luego por hipótesis inductiva existe una base $\overline{B} = \{\overline{v}_2, \ldots, \overline{v}_n\}$ de V/W tal que para cada $\overline{x} \in \overline{L}$, la matriz $[\overline{x}]_{\overline{B}}$ es triangular superior. Ahora, se probará que $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base para V. En efecto, para los elementos de B se satisface que $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, luego $-\alpha_1 v_1 = \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in W$. Así, $\alpha_2 \overline{v_2} + \cdots + \alpha_n \overline{v_n} = \overline{0} \in V/W$, con lo cual $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$, de lo anterior $\alpha_1 v_1 = 0$, entonces $\alpha_1 = 0$. Por lo tanto, B es una base para V. Ahora para $x \in L$ se tiene que $x(v_1) = a_{11} v_1$, puesto que

$$[\overline{x}]_{\overline{B}} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

entonces $\overline{x}(\overline{v}_j) = a_{2j}\overline{v}_2 + a_{3j}\overline{v}_3 + \cdots + a_{jj}\overline{v}_j = \overline{a_{2j}v_2 + \cdots + a_{jj}v_j} = \overline{x(v_j)}$. Con lo cual se tiene que $x(v_j) = a_{1j}v_1 + a_{2j}v_2 + a_{3j}v_3 + \cdots a_{jj}v_j$. Por lo tanto,

$$[x]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

■

Corolario 2.3. *Sea L una álgebra de Lie soluble, entonces existe una cadena de ideales de L, $0 = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n = L$, tal que* $\dim I_j = j$.

Demostración. Se considera la representación adjunta de L (ad_L), la cual es una subálgebra soluble de $gl(L)$. Por el Corolario 2.2, existe una base $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de L tal que para todo $y \in L$, se tiene que $[y]_B$ es triangular superior, esto es

$$[y]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

donde las a_{ij} dependen de y. Puesto que $y \in ad_L$, entonces $y = ad_w$ para algún $w \in L$, luego

$$[ad_w]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

de donde la i-ésima columna está dada por $[x_i]_B$, con $x_i \in B$. Luego,

$$I_0 = 0,\ I_1 = gen\{x_1\},\ \ldots,\ I_n = gen\{x_1, \ldots, x_n\} = L.$$

Así, $ad_w(x_1) = a_{11}x_1 \in I_1$, en general, $ad_w(x_j) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \cdots + a_{jj}x_j \in I_j$. De lo anterior se tiene que $\dim I_j = j$, además, $0 = I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_n = L$. ■

Corolario 2.4. *Sea L una álgebra de Lie soluble. Entonces $x \in L'$ implica que $ad_L x$ es nilpotente, es decir, todos los elementos de L' son ad-nilpotentes. En particular L' es una álgebra nilpotente.*

Demostración. Sean L una álgebra de Lie soluble y $0 = I_0 \subset I_1 \subset \cdots \subset I_n = L$ una cadena de ideales de L. Sea $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ una base de L, para la cual $B_j = \{x_1, x_2, \ldots, x_j\}$ genera I_j. Las matrices de ad_L con respecto a la base B están en el álgebra de matrices triangulares superiores $t(n, \mathbb{F})$. Así, las matrices de $[ad_L, ad_L] = ad_{[L,L]} = ad_{L'}$ están en $t(n, \mathbb{F})' = \eta(n, \mathbb{F})$. Luego para $x \in L'$, $ad_L x$ es nilpotente, y por el Teorema 1.76 L' es nilpotente. ■

Ahora se dará a conocer el criterio de Cartan el cual permite determinar la solubilidad de una álgebra de Lie mediante el cálculo de la traza de ciertos operadores, pero antes del criterio de solubilidad, recuerde que si x, y, z son endomorfismos de un espacio vectorial V de dimensión finita, entonces

$$tr([x, y]z) = tr(x[y, z]). \tag{2.1.1}$$

Para verificar lo anterior, se escribe $[x, y]z = xyz - yxz$ y $x[y, z] = xyz - xzy$, y se usa el hecho de que $tr(y(xz)) = tr((xz)y)$.

Teorema 2.5 (**Criterio de Cartan**). *Sean V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial y L una subálgebra de Lie de $gl(V)$. Si $tr(xy) = 0$ para todo $x, y \in L$, entonces L es soluble.*

Demostración. Se debe probar que cada $x \in L'$ es una función lineal nilpotente. Luego, por el Teorema 1.76 L' es nilpotente, y por lo tanto, L es soluble. En efecto, sea $x \in L'$ que tiene la descomposición de Jordan $x = d + n$, donde d es diagonalizable, n es nilpotente, además d y n conmutan. Se puede fijar una base B de V en la que la matriz $[d]_B$ es diagonal, con entradas diagonales $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ y $[n]_B$ es estrictamente triangular superior, además sea $\overline{d}$ la función lineal cuya matriz $[\overline{d}]_B$ es el conjugado complejo de la matriz $[d]_B$ donde $[\overline{d}]_B = diag(\overline{\lambda}_1, \dots, \overline{\lambda}_m)$. Así, el objetivo es probar que $d = 0$, para ello es suficiente mostrar que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{\lambda}_i = 0$. Observe que

$$tr(\overline{d}x) = tr(\overline{d}(d+n)) = tr(\overline{d}d) + tr(\overline{d}n) = tr(\overline{d}d) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{\lambda}_i,$$

por lo tanto $tr(\overline{d}x) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \overline{\lambda}_i$. Por otro lado, puesto que $x \in L'$, entonces $x = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j [y_j, z_j]$; donde $\gamma_j \in \mathbb{C}$ y $y_j, z_j \in L$ con lo cual basta mostrar que $tr(\overline{d}x) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_j tr(\overline{d}[y_j, z_j]) = 0$. Por (2.1.1) se tiene que

$$\sum_{j=1}^{r} \gamma_j tr([\overline{d}, y_j] z_j]) = 0 \tag{2.1.2}$$

para que esto se cumpla, se debe mostrar que $[\overline{d}, y_j] \in L$. En otras palabras que L es $ad_{\overline{d}}$-invariante. Observe que la descomposición de Jordan de ad_x es $ad_d + ad_n$. Ahora, existe un polinomio $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(ad_x) = \overline{ad_d} = ad_{\overline{d}}$. Luego L es ad_x-invariante, así que L también es $p(ad_x)$-invariante, es decir, $ad_{\overline{d}}$-invariante, por lo tanto $[\overline{d}, y_j] \in L$ y se satisface (2.1.2), con lo cual L' es nilpotente y por lo tanto L es soluble. ∎

Corolario 2.6. *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie. Entonces L es soluble si y solo si $tr(ad_x \circ ad_y) = 0$ para todo $x \in L, y \in L'$.*

Demostración. Suponga que L es soluble. Entonces $ad_L \subseteq gl(L)$ es una subálgebra soluble de $gl(L)$, por el Corolario 2.2 se tiene que cada elemento de ad_L y $ad_{L'}$ está representado por una matriz triangular superior con lo cual $tr(ad_x \circ ad_y) = 0$, para todo $x \in L$ y todo $y \in L'$. Por otro lado, si $tr(ad_x \circ ad_y) = 0$ para todo $x \in L$ y todo $y \in L'$, entonces por el Teorema 2.5 se tiene que $ad_{L'}$ es soluble. Así que L' es soluble y por lo tanto L es soluble. ∎

2.2. Forma de Killing

En esta sección se presenta una forma bilineal simétrica, la cual permite saber cuando una álgebra de Lie es semisimple. Además, en el capítulo 4 se define el producto interno mediante esta forma bilineal simétrica.

Definición 2.7 (**Forma de Killing**)**.** Sea L una álgebra de Lie. Si $x, y \in L$, se define

$$\kappa(x, y) = tr(ad_x \circ ad_y),$$

donde κ es una forma bilineal simétrica sobre L denominada la forma de Killing. La función κ es también asociativa, en el sentido de que $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$, esto se sigue del hecho que $tr([x, y], z) = tr(x, [y, z])$ para endomorfismos x, y, z en un espacio vectorial V de dimensión finita.

Teorema 2.8. *Sean L una álgebra de Lie e I un ideal de L. Si κ es la forma de Killing sobre L y κ_I la forma de Killing sobre I (visto como álgebra de Lie), entonces $\kappa_I(x,y) = \kappa(x,y)$ para $x, y \in I$.*

Demostración. Sea $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ una base de I y sea $B' = B \cup \{u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ la base B de I extendida a una base de L. Para $x, y \in I$, se tiene $[ad_x \circ ad_y]_{B'} = [ad_x]_{B'}[ad_y]_{B'}$ pero observe que $ad_x(u_i) = [x, u_i] \in I$, para todo $i = 1, \ldots, m, m+1, \ldots, n$, esto es

$$ad_x(u_1) = \alpha_{11}u_1 + \alpha_{12}u_2 + \cdots + \alpha_{1m}u_m + 0u_{m+1} + \cdots + 0u_n$$

$$ad_x(u_2) = \alpha_{21}u_1 + \alpha_{22}u_2 + \cdots + \alpha_{2m}u_m + 0u_{m+1} + \cdots + 0u_n$$

$$\vdots$$

$$ad_x(u_m) = \alpha_{m1}u_1 + \alpha_{m2}u_2 + \cdots + \alpha_{mm}u_m + 0u_{m+1} + \cdots + 0u_n$$

$$ad_x(u_{m+1}) = \alpha_{m+1,1}u_1 + \alpha_{m+1,2}u_2 + \cdots + \alpha_{m+1,m}u_m + 0u_{m+1} + \cdots + 0u_n$$

$$\vdots$$

$$ad_x(u_n) = \alpha_{n1}u_1 + \alpha_{n2}u_2 + \cdots + \alpha_{nm}u_m + 0u_{m+1} + \cdots + 0u_n$$

con lo cual se tiene que

$$[ad_x]_B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}.$$

De lo anterior

$$[ad_x]_{B'} = \begin{pmatrix} [ad_x]_B & Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Análogamente se procede con y, con lo cual

$$[ad_x \circ ad_y]_{B'} = \begin{pmatrix} [ad_x]_B[ad_y]_B & ZZ' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solo el bloque $[ad_x]_B[ad_y]_B$ contribuye a la traza de esta matriz, por lo tanto

$$tr([ad_x \circ ad_y]_{B'}) = tr([ad_x]_B[ad_y]_B) = tr([ad_x \circ ad_y]_B).$$

Así, $\kappa(x,y) = tr([ad_x]_B[ad_y]_B) = \kappa_I$. ■

Una forma bilineal simétrica, en este caso la forma de Killing, se dice que es no degenerada si $ker(\kappa) = \{0\}$. Una forma de probar que la función κ es no degenerada es la siguiente: Se fija una base $B = \{x_1, \ldots, x_n\}$ de L, entonces κ es no degenerada si y solo si la matriz cuadrada de orden n, cuya entrada i,j está dada por $\kappa(x_i, x_j)$, tiene determinante distinto de cero.

Ejemplo 2.9. Se calcula la forma de Killing de sl_2 usando la base canónica teniendo en cuenta el orden

$$B = \left\{ e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

No es difícil ver que $[h, e] = 2e$, $[h, f] = -2f$, $[e, f] = h$. Así, se obtienen las matrices de los operadores adjuntos

$$[ad_e]_B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ [ad_h]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } [ad_f]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por otra parte, se puede ver que $\kappa(e, e) = \kappa(e, h) = \kappa(h, f) = \kappa(f, f) = 0$, $\kappa(e, f) = 4$ y $\kappa(h, h) = 8$. De donde se tiene la matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cuyo determinante es -128. Con lo cual κ es no degenerada.

Recuerde que una álgebra de Lie L es semisimple si $rad(L) = \{0\}$. Esto equivale a decir que L no posee ideales abelianos distintos de cero. En efecto, cualquier ideal abeliano es soluble por lo que está contenido en el radical de L. Recíprocamente, si $rad(L) \neq \{0\}$ y $rad(L) = I^{(0)}, \ldots, I^{(k-1)}, I^{(k)} = 0$ es la serie derivada del radical de L, entonces cada $I^{(j)}$ es un ideal de L además $I^{(k-1)} \neq 0$ es un ideal abeliano.

Teorema 2.10. *Sea L una álgebra de Lie. Entonces L es semisimple si y solo si su forma de Killing es no degenerada.*

Demostración. Sea L una álgebra de Lie. Suponga que L es semisimple, entonces $rad(L) = \{0\}$. Sea $S = ker(\kappa) = \{x \in L : \kappa(x, y) = 0, \text{ para todo } y \in L\}$, luego para $u \in S$ y $w \in L$ se tiene que $\kappa_S(u, w) = 0$, en particular para $w \in S'$. Luego, por el Corolario 2.6 S es soluble, pero S es un ideal de L por tanto $S \subset rad(L) = \{0\}$ con lo cual $S = \{0\}$, así κ es no degenerada. Por otro lado, sea L una álgebra de Lie tal que su forma de Killing es no degenerada, es decir $S = ker(\kappa) = \{0\}$. Para probar que L es semisimple basta con mostrar que todo ideal abeliano I de L está contenido en S. Suponga $x \in I$, $y \in L$, entonces $(ad_x \circ ad_y)$ envía L en I y $(ad_x \circ ad_y)^2$ envía L en $[I, I] = 0$. Esto significa que $(ad_x \circ ad_y)$ es nilpotente de traza cero, es decir $0 = tr(ad_x \circ ad_y) = \kappa(x, y)$. Así, $I \subset S = \{0\}$, luego todo ideal abeliano es cero y por lo tanto L es semisimple. ∎

Capítulo 3

Sistemas de raíces

A cada $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple de dimensión finita L se le puede asociar un subconjunto de transformaciones lineales en el dual de una clase particular de subálgebra conmutativa de L, este subconjunto de transformaciones satisface las condiciones de la definición de sistemas de raíces que es una noción importante dentro de la demostración del teorema de clasificación que se presenta en el capitulo final de esta monografía. En este capítulo se presenta la teoría básica de los sistemas raíces en abstracto, separado de la noción de las álgebras de Lie. En el desarrollo de este capítulo se trabaja con un espacio Euclidiano E de dimensión positiva y se denotará por $(,)$ al producto Euclidiano de tal espacio. Recuerde que un hiperplano del espacio E es un subespacio H tal que $\dim H = \dim E - 1$.

3.1. Definición de sistema de raíces

Definición 3.1 (**Reflexión**). Una reflexión en un espacio Euclidiano E es una transformación lineal invertible $\mathcal{R}$ la cual tiene asociado un hiperplano $P \subset E$, llamado hiperplano reflectante, que satisface las siguientes propiedades.
$(Rf1)$ Para cada vector $w \in P$, se tiene $\mathcal{R}(w) = w$.
$(Rf2)$ Si v es un vector ortogonal a P, entonces $\mathcal{R}(v) = -v$.

Sea $\mathcal{R} : E \to E$ una reflexión y sea P su hiperplano reflectante. Suponga que $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ es una base de P. Por definición, el complemento ortogonal de P está dado por $P^{\perp} = \{v \in E : (w, v) = 0, \text{ para todo } w \in P\}$ y por la teoría de espacios vectoriales con producto interno se sabe que $E = P \oplus P^{\perp}$, luego $\dim P^{\perp} = 1$ y se puede escoger un vector no nulo $v \in E$ tal que $P^{\perp} = gen\{v\}$. Ahora, para cada $w \in E$ existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha \in \mathbb{F}$ tal que $w = \alpha v + \sum_{1}^{n-1} \alpha_i w_i$, aplicando las condiciones $(Rf1)$ y $(Rf2)$ de la definición de reflexión se tiene

$$\mathcal{R}(w) = \alpha\mathcal{R}(v) + \sum_{1}^{n-1} \alpha_i \mathcal{R}(w_i) = -\alpha v + \sum_{1}^{n-1} \alpha_i w_i = w - 2\alpha v.$$

Pero, $(w,v) = \left(\alpha v + \sum_1^{n-1} \alpha_i w_i, v\right) = \alpha(v,v) + \sum_1^{n-1} \alpha_i (w_i, v)$, y dado que $(w_i, v) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n-1$ se sigue que $\alpha = \frac{(w,v)}{(v,v)}$. Por lo tanto,

$$\mathcal{R}(w) = w - 2\frac{(w,v)}{(v,v)}v, \text{ para todo } w \in E.$$

De lo anterior, cada vector no nulo v determina la reflexión $\mathcal{R}_v$ definida por la fórmula

$$\mathcal{R}_v(w) = w - 2\frac{(w,v)}{(v,v)}v, \tag{3.1.1}$$

con hiperplano reflectante $P_v = \{w \in V : (w,v) = 0\}$. Observe que dos reflexiones que tienen asociado el mismo hiperplano reflectante son iguales, pues $\mathcal{R}_v(v) = -v$ y fija a todo vector $w \in P_v$. Además, un vector proporcional a v da origen a la misma reflexión ya que si α es cualquier escalar diferente de cero, se tiene que

$$\mathcal{R}_{\alpha v}(w) = w - 2\frac{(w,\alpha v)}{(\alpha v, \alpha v)}(\alpha v) = w - 2\frac{(w,v)}{(v,v)}v = \mathcal{R}_v(w),$$

para todo vector $w \in E$. Puesto que el número $2\frac{(w,v)}{(v,v)}$ aparecerá con frecuencia, en adelante se lo denotará por $\langle w, v\rangle$. Note que para todo $w_1, w_2, v \in E$ se cumple $\langle w_1 + w_2, v\rangle = \langle w_1, v\rangle + \langle w_2, v\rangle$, es decir, $\langle , \rangle$ es lineal en la primera componente pero no es lineal en la segunda.
Para continuar, recuerde que una transformación lineal $\mathcal{T} : E \longrightarrow E$ deja invariante a un subconjunto A de E, si $\mathcal{T}(A) \subset A$. Un hecho útil que caracteriza a las reflexiones es el siguiente.

Proposición 3.2. *Sea Φ un conjunto finito que genera al espacio Euclidiano E y suponga que todas las reflexiones $\mathcal{R}_v$, con $v \in \Phi$, dejan invariante a Φ. Si $\mathcal{R}$ es una transformación lineal invertible en E que cumple con las siguientes propiedades*

(a) $\mathcal{R}$ deja invariante a Φ.

(b) $\mathcal{R}$ fija a todos los puntos de un hiperplano $P \subset E$, es decir, $\mathcal{R}(z) = z$, para todo $z \in P$.

(c) Existe un vector no nulo $w \in \Phi$ tal que $\mathcal{R}(w) = -w$.

Entonces, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_w$ y $P = P_w$.

Demostración. Dado que w es no nulo, por las propiedades (b) y (c) se tiene $w \notin P$, luego $E = P + S$ donde $S = gen\{w\}$. Defina la transformación $\tau = \mathcal{R}\mathcal{R}_w$, entonces, para cada $x = \alpha w \in S$, se tiene

$$\tau(x) = \mathcal{R}\mathcal{R}_w(\alpha w) = \alpha\mathcal{R}(-w) = -\alpha\mathcal{R}(w) = -\alpha(-w) = x.$$

Ahora, sea $\{x_2, \ldots, x_n\}$ una base de P, luego $\{w, x_2, \ldots, x_n\}$ es una base de E. En el espacio cociente E/S defina la correspondencia $\overline{\mathcal{R}} : E/S \longrightarrow E/S$ por $\overline{\mathcal{R}}(\overline{u}) = \mathcal{R}(u) + S$, para todo $\overline{u} \in E/S$. Observe que $\overline{\mathcal{R}}$ esta bien definida porque tomando $\overline{x} = \overline{y}$ en E/S existe $u \in S$ tal que $x = y + u$ y se tiene

$$\overline{\mathcal{R}}(\overline{x}) = \mathcal{R}(x) + S = \mathcal{R}(y+u) + S = (\mathcal{R}(y) - u) + S = \mathcal{R}(y) + S = \overline{\mathcal{R}}(\overline{y}).$$

Dado que $\mathcal{R}$ es lineal se sigue que $\overline{\mathcal{R}}$ es un endomorfismo en E/S. Para cada $x \in E$ existen escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tal que $x = \alpha_1 w + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$, entonces

$$\overline{x} = \left(\alpha_1 w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right) + S = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i + S.$$

Dado que $\mathcal{R}(z) = z$ para todo $z \in P$, se tiene

$$\overline{\mathcal{R}}(\overline{x}) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \mathcal{R}(x_i) + S = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i + S = \overline{x}.$$

Por lo tanto, $\overline{\mathcal{R}} = Id_{E/S}$. De forma similar se puede probar que $\overline{\tau} : E/S \longrightarrow E/S$ definida por $\overline{\tau}(\overline{x}) = \tau(x) + S$, para todo $\overline{x} \in E/S$, es un endomorfismo, y para $\overline{x} = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i + S$ se tiene

$$\overline{\tau}(\overline{x}) = \mathcal{R}\mathcal{R}_w \left(\alpha_1 w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right) + S = \mathcal{R} \left(-\alpha_1 w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right) + S = \left(\alpha_1 w + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i x_i \right) + S = \overline{x}.$$

Por lo tanto, $\overline{\tau}(\overline{x}) = \overline{x}$, para todo $\overline{x} \in E/S$, así que $\overline{\tau} = \overline{\mathcal{R}}$. Dado que $\tau(x) = x$, para todo $x \in S$, se tiene que $\lambda = 1$ es un valor propio de τ. Suponga existe un valor propio $\lambda \neq 1$ de τ, entonces existe $p \in P$ y $\beta \in \mathbb{R}$ tales que $\tau(p + \beta w) = \lambda(p + \beta w)$ con $p \neq 0$, entonces

$$\overline{\tau}(\overline{p}) = \lambda(p + \beta w) + S = \lambda(p) + S = \lambda(p + S) = \lambda(\overline{p}).$$

Luego, λ es un valor propio de $\overline{\tau}$, pero $\overline{\tau} = Id_{E/S}$, con lo cual $\lambda = 1$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto el único valor propio de τ es 1, así el polinomio minimal de τ es $P(x) = (x-1)^m$, donde $m \leq \dim E$. Por otro lado, $\tau(\Phi) = \Phi$ y Φ es finito. Sea $x_i \in \{x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \Phi$, considere los vectores $x_i, \tau(x_i), \tau^2(x_i), \ldots, \tau^r(x_i)$ que están en Φ, luego deben existir $r, s \in \mathbb{Z}^+$, con $r > s$, tales que $\tau^r(x_i) = \tau^s(x_i)$ entonces $\tau^{r-s}(x_i) = x_i$. Sea $m_i = \text{mín}\{k \in \mathbb{Z}^+ : \tau^k(x_i) = x_i\}$ y sea $d = mcd(m_2, \ldots, m_n)$, luego $\tau^d(x_i) = x_i$, con $i = 2, \ldots, n$. Así, $P(x) = (x-1)^m$ divide al polinomio $x^d - 1$, entonces $P(x) = (x-1)^m$ divide al $mcd((x-1)^l, x^d - 1) = x - 1$, con lo cual el polinomio minimal de τ es $P(x) = (x-1)$ de donde se sigue que $\tau - Id = 0$, por lo tanto $\tau = Id_E$. ■

Definición 3.3 (**Sistema de raíces**). Un subconjunto Φ de un espacio Euclidiano E se denomina un sistema de raíces en E si los siguientes enunciados se satisfacen.

(R1) Φ es finito, genera a E y no contiene al vector nulo.

(R2) Si $\alpha \in \Phi$, los únicos múltiplos de α en Φ son $\pm\alpha$.

(R3) Si $\alpha \in \Phi$, la reflexión $\mathcal{R}_\alpha$ deja invariante a Φ.

(R4) Si $\alpha, \beta \in \Phi$, entonces $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.

Los elementos de Φ se denominan raíces. Hay cierta redundancia en los enunciados de la definición 3.3, en particular, tanto (R2) como (R3) implican que $\Phi = -\Phi$. Observe que (R1) no es tan estricto, ya que si Φ es un conjunto finito que no contiene al vector nulo y satisface (R2), (R3) y (R4), entonces Φ es un sistema de raíces en el subespacio $V = gen\{\Phi\}$. Ahora, si Φ satisface (R1), (R3) y (R4); y suponga que $\alpha \in \Phi$ tal que $k\alpha \in \Phi$ con $k \in \mathbb{R}$, entonces puesto que los números $\langle \alpha, k\alpha \rangle$ y $\langle k\alpha, \alpha \rangle$ son enteros se tiene que $\frac{2}{k}, \frac{k}{2} \in \mathbb{Z}$ lo cual se satisface si y solo si $k \in \{\pm\frac{1}{2}, \pm 1, \pm 2\}$. En efecto,

$$\langle \alpha, k\alpha \rangle = \frac{1}{k}\langle \alpha, \alpha \rangle = \frac{1}{k}\frac{2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2}{k}.$$

Por otro lado se tiene

$$\langle k\alpha, \alpha \rangle = 2\frac{(k\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{(\alpha, k\alpha)}{(\alpha, \alpha)} =$$

$$2\frac{(\alpha, k\alpha)}{(\alpha, \alpha)}\frac{(k\alpha, k\alpha)}{(k\alpha, k\alpha)} = 2\frac{(\alpha, k\alpha)}{(k\alpha, k\alpha)}\frac{k^2(\alpha, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \frac{2}{k}k^2 = 2k.$$

Puesto que $\langle \alpha, k\alpha \rangle = \frac{2}{k} \in \mathbb{Z}$, entonces $k \in \{\frac{2}{n} : n \in \mathbb{Z}\}$. Así, para $k = \frac{2}{n}$ se tiene

$$\left\langle \frac{2}{n}\alpha, \alpha \right\rangle = 2\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n} \in \mathbb{Z},$$

con lo cual $n \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$. Luego, $k \in \left\{\frac{2}{\pm 1}, \frac{2}{\pm 2}, \frac{2}{\pm 4}\right\} = \left\{\pm 2, \pm 1, \pm\frac{1}{2}\right\}$. La información suministrada por los múltiplos extras es fácil de obtener a partir de $\pm\alpha$. De lo anterior, el incluir (R2) permite evitar este estudio. Knapp (1986) [9], aborda los sistemas de raíces excluyendo (R2) y denomina «sistema de raíces reducido» al incluir R(2), lo cual en este trabajo se presenta como sistema de raíces. Mediante R(3) se puede ver como actuá un subgrupo del conjunto de todos las transformaciones lineales invertibles, $GL(E)$, el cual se denomina grupo de Weyl y se presenta con más detalle en la Sección 3.5. La condición (R4) limita el valor del ángulo entre dos raíces. Se sabe que el ángulo θ entre los vectores no nulos α y β en E satisface la igualdad $||\alpha||\ ||\beta|| \cos\theta = (\alpha, \beta)$, luego

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = 2\frac{||\alpha||||\beta||}{||\alpha||^2}\cos\theta = 2\frac{||\beta||}{||\alpha||}\cos\theta,$$

así, $\langle \alpha, \beta \rangle\langle \beta, \alpha \rangle = 4\cos^2\theta$. Dado que $0 \leq \cos^2\theta \leq 1$ y que $\langle \alpha, \beta \rangle$ y $\langle \beta, \alpha \rangle$ tiene el mismo signo, se sigue

$$\langle \alpha, \beta \rangle\langle \beta, \alpha \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si y solo si } \theta = \frac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{si y solo si } \theta \in \{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}; \\ 2, & \text{si y solo si } \theta \in \{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\}; \\ 3, & \text{si y solo si } \theta \in \{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\}; \\ 4, & \text{si y solo si } \theta \in \{0, \pi\}. \end{cases}$$

Ahora, tomando $\alpha \neq \beta$ y suponiendo $||\beta|| \geq ||\alpha||$, se tienen las siguientes posibilidades para el cociente $\frac{||\beta||^2}{||\alpha||^2}$.

Tabla 3.1: Longitudes relativas. Modificado de: Humphreys (1972), [7].

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\frac{\|\|\beta\|\|^2}{\|\|\alpha\|\|^2}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	indeterminado
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

Lo anterior permite determinar algunas características que satisfacen los elementos de un sistema de raíces.

Lema 3.4. *Sean α y β dos raíces no proporcionales, se cumplen los siguientes enunciados*

(a) Si $(\alpha, \beta) > 0$, entonces $\alpha - \beta$ es raíz.

(b) Si $(\alpha, \beta) < 0$, entonces $\alpha + \beta$ es raíz.

Demostración. Dado que $(\alpha, \beta) > 0$, entonces

$$\langle \alpha, \beta \rangle = 2\frac{(\alpha, \beta)}{(\beta, \beta)} > 0$$

y utilizando la Tabla 3.1 se tiene $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$ o $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$. Si $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, por la condición R(3)

$$\mathcal{R}_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta = \alpha - \beta \in \Phi.$$

De igual forma, si $\langle \beta, \alpha \rangle = 1$, se tiene $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta - \alpha \in \Phi$ y por la condición R(2), $\alpha - \beta \in \Phi$. El segunda enunciado se sigue del primero porque $-\beta \in \Phi$, luego $(\alpha, -\beta) > 0$ entonces $\alpha - (-\beta) \in \Phi$ esto es $\alpha + \beta \in \Phi$. ■

Definición 3.5 (**α-cadena**)**.** Sean $\alpha, \beta \in \Phi$ dos raíces no proporcionales. La α-cadena por β es el conjunto de raíces en Φ de la forma $\beta + j\alpha$ con $j \in \mathbb{Z}$.

Dado que Φ es finito, existen enteros positivos maximales r y q tales que $\beta - r\alpha$ y $\beta + q\alpha$ son raíces. Una aplicación del Lema 3.4 es el siguiente resultado.

Corolario 3.6. *Sean $\alpha, \beta \in \Phi$ dos raíces no proporcionales. Si r y q son los enteros positivos maximales tales que $\beta - r\alpha$ y $\beta + q\alpha$ son raíces en Φ, entonces $\beta + j\alpha \in \Phi$ para todo entero $-r \leq j \leq q$, es decir la α-cadena por β es el conjunto $\{\beta + j\alpha : -r \leq j \leq q\}$.*

Demostración. Si alguno de los $\beta + j\alpha$ no es raíz, se puede encontrar $p, s \in \mathbb{Z}$, con $-r \leq p < s \leq q$, tales que $\beta + p\alpha \in \Phi$, $\beta + (p+1)\alpha \notin \Phi$, $\beta + (s-1)\alpha \notin \Phi$ y $\beta + s\alpha \in \Phi$. Si $(\alpha, \beta + s\alpha) > 0$, por el Lema 3.4 se tiene que $\beta + (s-1)\alpha \in \Phi$, lo que es absurdo. De forma análoga, si $(\alpha, \beta + p\alpha) < 0$ entonces se tiene la contradicción $\beta + (p+1)\alpha \in \Phi$. Por lo tanto $(\alpha, \beta + s\alpha) \leq 0$ y $(\alpha, \beta + p\alpha) \geq 0$, de donde se tiene que $(\alpha, \beta) + p(\alpha, \alpha) \geq 0$ y $(\alpha, \beta) + s(\alpha, \alpha) \leq 0$ que equivale a $-(\alpha, \beta) - s(\alpha, \alpha) \geq 0$ y al sumar las desigualdades del mismo sentido se tiene

$$p(\alpha, \alpha) - s(\alpha, \alpha) \geq 0, \text{ es decir, } p \geq s$$

pero esto es absurdo pues $p < s$ y $\alpha \neq 0$. ∎

Corolario 3.7. *Con la hipótesis del corolario anterior se tiene* $\mathcal{R}_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - r\alpha$.

Demostración. En efecto, por la condición R(3) de la definición 3.3 se sigue $\mathcal{R}_\alpha(\beta + k\alpha) \in \Phi$, con $-r \leq k \leq q$, pero $\mathcal{R}_\alpha(\beta + k\alpha) = \mathcal{R}_\alpha(\beta) + k\mathcal{R}_\alpha(\alpha) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha - k\alpha = \beta - (t+k)\alpha$, donde $t = \langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$. En particular, $\mathcal{R}_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (t+q)\alpha$, luego $t + q \leq r$. Además, $\mathcal{R}_\alpha(\beta - r\alpha) = \beta + (r-t)\alpha$ de donde $r - t \leq q$. Al combinar estos dos resultados se puede ver que $r \leq t + q \leq r$ entonces $t + q = r$. De lo anterior

$$\mathcal{R}_\alpha(\beta + q\alpha) = \beta - (t+q)\alpha = \beta - r\alpha,$$

así que $r - q = t = \langle \beta, \alpha \rangle$. ∎

De esta discusión se sigue que las cadenas de raíces son de longitud a lo más 4.

Teorema 3.8. *Sea Φ un conjunto finito que genera el espacio Euclidiano E que satisface (R2). Una condición necesaria y suficiente para que Φ sea un sistema de raíces en E es que para dos vectores $\alpha, \beta \in \Phi$ que sean linealmente independientes, existen dos enteros no negativos r y q, maximales tales que $\beta + k\alpha \in \Phi$ para todo entero $-r \leq k \leq q$ y también satisfacen $\langle \beta, \alpha \rangle = r - q$.*

Demostración. La necesidad se sigue por el Corolario 3.6 y el Corolario 3.7. Para la suficiencia, puesto que Φ es un conjunto que genera al espacio E, (R1) se satisface. Además, se tiene que $-r \leq -(r-q) \leq q$, luego $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta - (r-q)\alpha \in \Phi$ por lo que se satisface (R3). Por hipótesis, los productos $\langle \lambda, \delta \rangle$ son $r - q$ o bien ± 2, que son enteros y se tiene (R4). Por lo tanto, Φ es un sistema de raíces. ∎

Definición 3.9 (Rango). El rango de un sistema de raíces Φ es la dimensión del espacio E y se denota por $rank(\Phi) = \dim E$.

A continuación, se presentan algunos ejemplos de sistemas de raíces. El producto interno para los ejemplos donde $E = \mathbb{R}^2$ esta definido por el producto punto, es decir, para $\alpha = (a, b)$ y $\beta = (c, d)$ vectores en $\mathbb{R}^2$, el producto interno de α y β es el escalar dado por $(\alpha, \beta) = ac + bd$.

Ejemplo 3.10. Sea $E = \mathbb{R}$, para $\alpha \in E$, con $\alpha \neq 0$, se tiene que $\Phi = \{\pm\alpha\}$ es un sistema de raíces, el cual se denota por A_1 y gráficamente se presenta en la Figura 3.1.

Figura 3.1: Sistema de raíces A_1. Modificado de: Rodríguez (2007), [10].

Ejemplo 3.11. En $E = \mathbb{R}^2$, sean $\alpha = (0,1)$ y $\beta = (1,0)$ de donde se tiene el conjunto $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$, que gráficamente se tiene la siguiente figura.

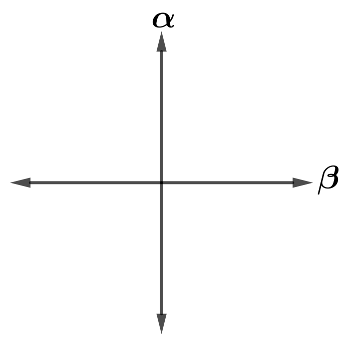


Figura 3.2: Sistema de raíces $A_1 \times A_1$. Modificado de: Rodríguez (2007), [10].

Note que Φ es finito no contiene el vector nulo y no es difícil probar que generan a $\mathbb{R}^2$, además los únicos múltiplos son sus negativos por lo tanto (R1) y (R2) se satisfacen. Para verificar (R3) se puede hacer uso de la Figura 3.2 y notar que las reflexiones

$$\mathcal{R}_\alpha : \begin{array}{ccc} \alpha & \longrightarrow & -\alpha \\ \beta & \longrightarrow & \beta \end{array} \quad \text{y} \quad \mathcal{R}_\beta : \begin{array}{ccc} \alpha & \longrightarrow & \alpha \\ \beta & \longrightarrow & -\beta \end{array}$$

dejan invariante a Φ. Al calcular los enteros $\langle \gamma, \delta \rangle \in \{0, \pm 2\}$, donde $\gamma, \delta \in \Phi$, se asegura que (R4) se satisface. Así, Φ es un sistema de raíces al cual se denota con $A_1 \times A_1$.

Ejemplo 3.12. En $E = \mathbb{R}^2$, sean $\alpha = (1,0)$ y $\beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ con las cuales se forma el conjunto $\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta)\}$. No es difícil ver que (R1) y (R2) se satisfacen sin inconveniente alguno. Se puede comprobar que al aplicar las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, $\mathcal{R}_\beta$, $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ a los elementos de Φ este conjunto es invariante y puesto que $\mathcal{R}_{-\alpha} = \mathcal{R}_\alpha$ y de igual forma con los otros elementos de Φ, se verifica que (R3) se cumple. No es difícil ver que $\langle \gamma, \delta \rangle \in \{\pm 1, \pm 2\}$, donde $\gamma, \delta \in \Phi$. De esta manera Φ es un sistema de raíces que se denota por A_2. Gráficamente se representa en la Figura 3.3.

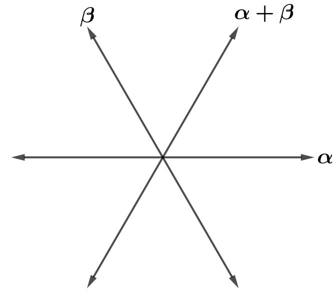


Figura 3.3: Sistema de raíces A_2. Modificado de: Rodríguez (2007), [10].

Ejemplo 3.13. En $E=\mathbb{R}^2$, sean $\alpha=(1,0)$ y $\beta=(-1,1)$. Se define $\Phi=\{\pm\alpha,\pm\beta,\pm\mathcal{R}_\beta(\alpha),\pm\mathcal{R}_\alpha(\beta)\}$, por la fórmula (3.1.1), se verifica que $\mathcal{R}_\beta(\alpha)=\alpha+\beta=(0,1)$ y $\mathcal{R}_\alpha(\beta)=\beta+2\alpha=(1,1)$. En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\beta(\alpha) &= \alpha-2\langle\alpha,\beta\rangle\beta=\alpha-2\tfrac{(\alpha,\beta)}{(\beta,\beta)}\beta=(1,0)-2\tfrac{1(-1)+0(1)}{-1(-1)+1(1)}(-1,1)\\ &=(1,0)-2\tfrac{(-1)}{2}(-1,1)=(1,0)+(-1,1)=\alpha+\beta=(0,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\alpha(\beta) &= \beta-2\langle\beta,\alpha\rangle\alpha=\beta-2\tfrac{(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha=(-1,1)-2\tfrac{-1(1)+1(0)}{1(1)+0(0)}(1,0)\\ &=(-1,1)-2\tfrac{(-1)}{1}(1,0)=(-1,1)+2(1,0)=\beta+2\alpha=(1,1).\end{aligned}$$

Gráficamente este conjunto se presenta en la Figura 3.4.

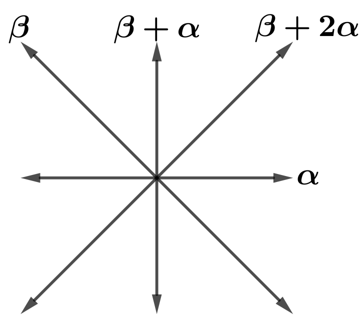


Figura 3.4: Sistema de raíces B_2. Modificado de: Rodríguez (2007), [10].

Es claro que Φ satisface (R1) pues es finito, no contiene al vector nulo y no es difícil ver que genera a $\mathbb{R}^2$, además los únicos múltiplos de cada elemento son sus negativos satisfaciendo así (R2). Al verificar que Φ es invariante al aplicar las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, $\mathcal{R}_\beta$, $\mathcal{R}_{\alpha+\beta}$ y $\mathcal{R}_{2\alpha+\beta}$ a cada uno de sus elementos, se tiene que R(3) se cumple. Mediante los cálculos pertinentes se puede verificar que $\langle\gamma,\delta\rangle\in\{0,\pm1,\pm2\}$, donde $\gamma,\delta\in\Phi$. Así, Φ es un sistema de raíces que se denota con B_2.

Ejemplo 3.14. En $E=\mathbb{R}^2$, sean $\alpha=(1,0)$ y $\beta=\left(-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, ahora se tienen los siguientes vectores

$\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta + 3\alpha = \left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathcal{R}_\beta(\alpha) = \alpha + \beta = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}_\beta(\alpha) = \beta + 2\alpha = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\mathcal{R}_\beta\mathcal{R}_\alpha(\beta) = 2\beta + 3\alpha = (0, \sqrt{3})$. Estos vectores y sus negativos forman el conjunto

$$\Phi = \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha+\beta), \pm(2\alpha+\beta), \pm(3\alpha+\beta), \pm(3\alpha+2\beta)\}.$$

De forma similar a los ejemplos anteriores se puede verificar que este conjunto es un sistema de raíces que se denota por G_2 y gráficamente se presenta en la Figura 3.5.

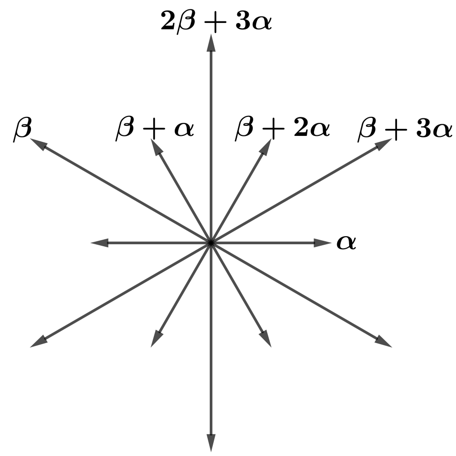


Figura 3.5: Sistema de raíces G_2. Modificado de: Rodríguez (2007), [10].

3.2. Isomorfismos de sistemas de raíces

En esta sección se presenta la definición de isomorfismo de sistemas de raíces, que es una relación de equivalencia conocida en toda estructura algebraica. Los isomorfismos permiten distinguir cuando dos sistemas de raíces son esencialmente el mismo, y es claro que el interés está en estudiar los sistemas de raíces salvo sus isomorfos.

Proposición 3.15. *Sea Φ un sistema de raíces en E. Si $\mathcal{R} \in GL(E)$ deja invariante a Φ, entonces $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{R}(\alpha)}$ para todo $\alpha \in \Phi$ y además $\langle\beta, \alpha\rangle = \langle\mathcal{R}(\beta), \mathcal{R}(\alpha)\rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$.*

Demostración. Para cada $\beta \in \Phi$ y toda $\alpha \in \Phi$ se tiene que $\mathcal{R}_\alpha(\beta) \in \Phi$. Sea $\tau = \mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1}$, se probará que $\tau(\Phi) = \Phi$. En efecto, sea $\delta \in \Phi$, dado que $\mathcal{R}$ es biyectiva y deja invariante a Φ se tiene la función $\mathcal{R} : \Phi \longrightarrow \Phi$. Luego, existe $\beta \in \Phi$ tal que $\mathcal{R}(\beta) = \delta$, así $\tau(\delta) = \mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}(\beta)) = \mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha(\beta) \in \Phi$, con lo cual τ deja invariante a Φ, mientras fija a todo punto del hiperplano $\mathcal{R}(P_\alpha)$ puesto que $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}(P_\alpha)) = \mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha(P_\alpha) = \mathcal{R}(P_\alpha)$ y envía a $\mathcal{R}(\alpha)$ en $-\mathcal{R}(\alpha)$. Por la Proposición 3.2 se tiene que $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{R}(\alpha)}$. Ahora, por linealidad

$$(\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1})(\mathcal{R}(\beta)) = \mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \mathcal{R}(\beta - \langle\beta,\alpha\rangle\alpha) = \mathcal{R}(\beta) - \langle\beta,\alpha\rangle\mathcal{R}(\alpha).$$

Por otro lado, $\mathcal{R}_{\mathcal{R}(\alpha)}(\mathcal{R}(\beta)) = \mathcal{R}(\beta) - \langle \mathcal{R}(\beta), \mathcal{R}(\alpha) \rangle \mathcal{R}(\alpha)$. Estos dos resultados permiten verificar que $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \mathcal{R}(\beta), \mathcal{R}(\alpha) \rangle$. ■

Proposición 3.16. *Sean E un espacio Euclidiano de dimensión finita y $(,)_1, (,)_2$ dos productos euclidianos en E. Suponga que Φ es un sistema de raíces en $(E, (,)_1)$ y $\varphi : (E, (,)_1) \longrightarrow (E, (,)_2)$ es una transformación lineal invertible. Una condición necesaria y suficiente para que $\varphi(\Phi)$ sea un sistema de raíces en $(E, (,)_2)$ es que $\langle \alpha, \beta \rangle_1 = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle_2$ para todo par de raíces α y β en Φ.*

Demostración. Para la necesidad, suponga que $\varphi(\Phi)$ es un sistema de raíces en $(E, (,)_2)$, entonces cada $\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}$ deja invariante a $\varphi(\Phi)$, es decir, $\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) = \varphi(\beta) - \langle \varphi(\beta), \varphi(\alpha) \rangle_2 \varphi(\alpha) \in \varphi(\Phi)$, para todo α y β en Φ. Ahora, cada raíz en Φ se puede escribir como $\mathcal{R}_\alpha(\beta)$, para algunos α y β en Φ, luego $\varphi(\mathcal{R}_\alpha(\beta)) = \varphi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle_1 \varphi(\alpha) \in \varphi(\Phi)$. Como φ es biyectiva, se sigue que $\varphi^{-1}\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi(\beta) \in \Phi$ para todo par de raíces α y β. Además, $\varphi^{-1}\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi$ deja invariante a Φ, envía a α en su negativo y deja fijos a todos los puntos en el hiperplano $\varphi^{-1}(P_{\varphi(\alpha)})$. Por la Proposición 3.2, se tiene que $\varphi^{-1}\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}\varphi = \mathcal{R}_\alpha$ para todo $\alpha \in \Phi$ y se tiene la igualdad $\langle \beta, \alpha \rangle_1 = \langle \varphi(\beta), \varphi(\alpha) \rangle_2$. Para la suficiencia, si φ satisface la igualdad anterior, entonces $\varphi(\Phi)$ satisface (R4); por ser φ lineal y biyectiva, $\varphi(\Phi)$ satisface (R1) y (R2). Por último, sean $\varphi(\alpha), \varphi(\beta) \in \varphi(\Phi)$, entonces

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) &= \varphi(\beta) - \langle \varphi(\beta), \varphi(\alpha) \rangle_2 \varphi(\alpha) \\
&= \varphi(\beta) - \langle \beta, \alpha \rangle_1 \varphi(\alpha) \\
&= \varphi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle_1 \alpha) \\
&= \varphi(\mathcal{R}_\alpha(\beta)) \in \varphi(\Phi),
\end{aligned}$$

con lo cual $\varphi(\Phi)$ satisface (R3). Así, $\varphi(\Phi)$ es un sistema de raíces en $(E, (,)_2)$. ■

Teorema 3.17. *Sean $(E_1, (,)_1)$ y $(E_2, (,)_2)$ dos espacios Euclidianos de dimensión finita sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Si $\dim E_1 = \dim E_2$, entonces existe una correspondencia uno a uno entre los sistemas de raíces de E_1 y los sistemas de raíces de E_2.*

Demostración. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es una base ortonormal de E_1 y $\{f_1, \ldots, f_n\}$ es una base ortonormal de E_2, se tiene la función $\tau : E_1 \longrightarrow E_2$ definida por $\tau(e_i) = f_i$ para todo $e_i \in E_1$, con $i = 1, \ldots, n$, y $\langle f_i, f_j \rangle = \langle \tau(e_i), \tau(e_j) \rangle$. Es fácil ver que τ es un isomorfismo que preserva los productos interiores. Por la Proposición 3.16, a cada sistema de raíces Φ en E_1, le corresponde $\tau(\Phi)$ en E_2. ■

Lo anterior permite introducir la definición de isomorfismo de sistemas de raíces.

Definición 3.18 (Isomorfismo). Sean Φ y Φ' dos sistemas de raíces en los espacios euclidianos E y E' respectivamente. Se dice que (Φ, E) y (Φ', E') son isomorfos, y se denota por $\Phi \cong \Phi'$, si existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\varphi : E \longrightarrow E'$ que envíe a Φ en Φ' tal que $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \varphi(\beta), \varphi(\alpha) \rangle$ para cada par de raíces $\alpha, \beta \in \Phi$.

Ejemplo 3.19. Cualquier sistema de raíces Φ en $\mathbb{R}$ es isomorfo al sistema de raíces A_1, puesto que por (R2) Φ tiene dos raíces β y $-\beta$. El isomorfismo esta dado por $\beta \longrightarrow \alpha$.

3.3. Base de un sistema de raíces

Es claro que trabajar en un sistema de raíces Φ de dimensión finita es muy extenso y complicado, por ello es necesario centrar el estudio en un subconjunto Δ de Φ que represente de manera adecuada el comportamiento de las demás raíces y que permita extraer sin inconvenientes todas sus propiedades. A este subconjunto se lo conoce como base. En esta sección Φ denota un sistema de raíces de rango l en un espacio Euclidiano E.

Definición 3.20 (**Base**)**.** Un subconjunto Δ de Φ se denomina una base de Φ si satisface las siguientes condiciones.

(B1) Δ es una base de E.

(B2) Cada raíz β puede ser escrita como $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, con coeficientes enteros k_α todos no negativos o todos no positivos.

Los elementos de Δ se denominan raíces **simples**. De (B1) se tiene que $|\Delta| = l$ y la representación para β en (B2) es única, salvo el orden en que aparecen los sumandos.

Ejemplo 3.21. Las raíces α y β en cada ejemplo presentado en la Sección 3.1 forman una base para el respectivo sistema de raíces de cada ejemplo. En particular en el Ejemplo 3.14, el conjunto $\Delta = \left\{\alpha = (1,0), \beta = \left(-\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$ es una base para $\Phi = G_2$ y se puede observar que las raíces de G_2 están escritas como combinación lineal de los elementos de Δ y los escalares están en $\mathbb{Z}$, satisfaciendo la condición (B2).

Mediante el uso de los coeficientes k_α de la condición (B2) se puede dar la siguiente definición.

Definición 3.22 (**Altura**)**.** Sea Δ una base de Φ. Se define la altura de una raíz $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$ con respecto a Δ como

$$alt(\beta) = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha.$$

Por (B2), la altura de cualquier raíz es un número entero, además $alt(\beta) = 1$ si y solo si β es una raíz simple.

Definición 3.23 (**Raíz positiva**)**.** Sea Δ una base de Φ. Si β es una raíz para la cual todos los coeficientes k_α de (B2) son no negativos, (respectivamente para no positivos), se dirá que β es una raíz positiva (raíz negativa) con respecto a Δ y se denotará por $\beta \succ 0$ ($\beta \prec 0$).

El conjunto de raíces positivas (raíces negativas) con respecto a Δ se denota con Φ^+ (Φ^-). Es claro que $\Phi^- = -\Phi^+$, así solo bastara con estudiar las raíces positivas de un sistema de raíces. Otro hecho es que la suma de dos raíces positivas, si es una raíz, esta necesariamente es positiva. En realidad

Δ induce un orden parcial sobre E compatible con la notación $\alpha \succ 0$. Se define $\beta \prec \alpha$ si y solo si $\alpha - \beta$ es una suma de raíces positivas o $\beta = \alpha$.
En los ejemplos de sistemas de raíces dados en la Sección 3.3, dado que las raíces α y β forman una base en cada caso, el ángulo entre estas raíces es obtuso es decir $(\alpha, \beta) \leq 0$. Esto se asegura mediante el siguiente lema.

Lema 3.24. *Si Δ es una base de Φ, entonces $(\alpha, \beta) \leq 0$ para todo $\alpha, \beta \in \Delta$, con $\alpha \neq \beta$, y $\alpha - \beta$ no es una raíz.*

Demostración. Suponga que $(\alpha, \beta) \geq 0$. Puesto que $\alpha \neq \beta$, es evidente que $\alpha \neq -\beta$, por el Lema 3.4, $\alpha - \beta$ es raíz, lo que es absurdo por la condición (B2). ■

El único inconveniente con la definición de base es que no se garantiza la existencia. Para ello se presenta el siguiente teorema.

Teorema 3.25. *Φ tiene una base.*

Para la demostración de este teorema son necesarias las definiciones de conjunto positivo de un vector, vector regular y raíz descomponible, las cuales se presentan a continuación. Además, la demostración proporciona un método para construir todas las posibles bases de Φ.

Definición 3.26 (Conjunto positivo de γ). Para cada vector $\gamma \in E$, con $\gamma \neq 0$, se define el conjunto positivo de γ por $\Phi^+(\gamma) = \{\alpha \in \Phi : (\gamma, \alpha) > 0\}$.

Proposición 3.27. *Sea $\gamma \in E$. Si $\gamma \neq 0$, entonces $\Phi^+(\gamma)$ es un conjunto no vacío.*

Demostración. En efecto, dado que $gen\Phi = E$, entonces el complemento ortogonal de Φ tendrá como único elemento al vector nulo, es decir, $\Phi^\perp = \{0\}$. Ahora, si $\gamma \neq 0$ entonces $\gamma \notin \Phi^\perp$, luego existe $\alpha \in \Phi$ tal que $(\gamma, \alpha) \neq 0$, con lo cual se tiene o bien $(\gamma, \alpha) > 0$ de donde $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ o bien $(\gamma, \alpha) < 0$ entonces $-\alpha \in \Phi^+(\gamma)$, por lo tanto $\Phi^+(\gamma) \neq \emptyset$ cuando $\gamma \neq 0$. ■

Definición 3.28 (Vector regular). Se dice que $\gamma \in E$ es regular si no está en ningún hiperplano ortogonal a alguna raíz en Φ, es decir

$$\gamma \in E - \bigcup_{\alpha \in \Phi} P_\alpha.$$

Se dirá que es singular en otro caso.

Definición 3.29 (Raíz descomponible). Sea γ un vector regular. Se denomina a $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ una raíz descomponible si se puede escribir como suma de dos raíces en $\Phi^+(\gamma)$, es decir, si existen $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$ tales que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$. Se dice que α es una raíz indescomponible en otro caso.

Proposición 3.30. *Sea γ un vector regular. Puesto que $\Phi^+(\gamma)$ es un conjunto finito, no todas sus raíces pueden ser descomponibles, es decir, siempre existen raíces indescomponibles en un sistema de raíces.*

Demostración. En efecto, sea γ regular y suponga que toda raíz en $\Phi^+(\gamma)$ es descomponible. Sea $\beta_0 \in \Phi^+(\gamma)$, entonces

$$\beta_0 = \beta_1 + \beta_1' \text{ para algunas } \beta_1, \beta_1' \in \Phi^+(\gamma)$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \beta_2' \text{ para algunas } \beta_2, \beta_2' \in \Phi^+(\gamma)$$

$$\vdots$$

$$\beta_{k-1} = \beta_k + \beta_k' \text{ para algunas } \beta_k, \beta_k' \in \Phi^+(\gamma)$$

$$\vdots$$

Observe que $\beta_{j+1}' \neq 0$ porque $0 \notin \Phi$ con lo cual $\beta_j \neq \beta_{j+1}$, luego $\{\beta_1, \beta_2, \ldots,\} \subset \Phi^+(\gamma) \subset \Phi$. Ahora, suponga $\beta_r = \beta_{r+j}$, entonces

$$\beta_r - \beta_{r+1} = \beta_{r+1}'$$

$$\beta_{r+1} - \beta_{r+2} = \beta_{r+2}'$$

$$\vdots$$

$$\beta_{r+j-1} - \beta_{r+j} = \beta_{r+j}'.$$

De lo anterior se tiene que $\beta_r - \beta_{r+j} = \sum\limits_{k=1}^{j} \beta_{r+k}' = 0$. Luego,

$$\left(\gamma, \sum_{k=1}^{j} \beta_{r+k}'\right) = (\gamma, 0) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{j} (\gamma, \beta_{r+k}') = 0$$

lo cual es una contradicción. Al conjunto de todas las raíces indescomponibles en $\Phi^+(\gamma)$ se denota por $\Delta(\gamma)$. ∎

Teorema 3.31. *Si $\gamma \in E$ es regular, entonces el conjunto $\Delta(\gamma)$ es una base para Φ y toda base se obtiene de este modo.*

Demostración. Se procede por pasos.

1. Cada raíz en $\Phi^+(\gamma)$ es una combinación $\mathbb{Z}$-lineal no negativa de elementos en $\Delta(\gamma)$. En efecto, suponga lo contrario, algún $\alpha \in \Phi^+(\gamma)$ no puede ser escrita de tal forma, se toma α tal que (γ, α) sea lo más pequeño posible. Obviamente, $\alpha \notin \Delta(\gamma)$, así $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, con $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+(\gamma)$, por tanto, $(\gamma, \alpha) = (\gamma, \beta_1) + (\gamma, \beta_2)$. Pero (γ, β_1) y (γ, β_2) son positivos y menores que (γ, α) lo que contradice la suposición inicial.

2. Si $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$, entonces $(\alpha, \beta) \leq 0$, a menos que $\alpha = \beta$. En efecto, se asume que $\alpha \neq \beta$ y suponga que $(\alpha, \beta) > 0$, por lo tanto $\alpha - \beta \in \Phi$. Puesto que $\alpha \neq -\beta$, se tiene que $\alpha - \beta$ o bien $\beta - \alpha$ está en $\Phi^+(\gamma)$. Si $\alpha - \beta \in \Phi^+(\gamma)$, entonces $\alpha = \beta + (\alpha - \beta)$ lo que hace a α descomponible. Por otro lado, si $\beta - \alpha \in \Phi^+(\gamma)$, se tiene que $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ es descomponible. Esto contradice la elección de α y β.

3. $\Delta(\gamma)$ es un conjunto L.I. En efecto, suponga que $\sum r_\alpha \alpha = 0$, con $\alpha \in \Delta(\gamma)$ y $r_\alpha \in \mathbb{R}$. Separando los índices para los que $r_\alpha \geq 0$, denotados por s_α de los que $r_\alpha < 0$, denotados por $-t_\beta$, se tiene $\sum s_\alpha \alpha - \sum t_\beta \beta = 0$, es decir, $\sum s_\alpha \alpha = \sum t_\beta \beta$, con $\alpha, \beta \in \Delta(\gamma)$. Sea $\epsilon = \sum s_\alpha \alpha$, entonces
$$0 \leq (\epsilon, \epsilon) = \left(\sum s_\alpha \alpha, \sum t_\beta \beta\right) = \sum s_\alpha t_\beta (\alpha, \beta) \leq 0,$$
donde la última desigualdad se tiene por el paso 2 y $s_\alpha, t_\beta \geq 0$. Esto fuerza a que $\epsilon = 0$, entonces $0 = (\gamma, \epsilon) = \sum s_\alpha (\gamma, \alpha)$ lo que implica que cada $s_\alpha = 0$. De igual forma, se tiene que cada $t_\beta = 0$ y por lo tanto todos los r_α son cero. Este argumento actualmente muestra que cualquier conjunto finito de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ de un espacio Euclidiano E que satisface $(v_i, v_j) \leq 0$ para todo $i \neq j$ es un conjunto linealmente independiente.

4. $\Delta(\gamma)$ es una base de Φ. Observe para γ regular y $\sigma \in \Phi$ entonces $\gamma \notin P_\sigma$, luego $(\gamma, \sigma) \neq 0$ para todo $\sigma \in \Phi$. Así, $(\gamma, \sigma) > 0$ entonces $\sigma \in \Phi^+(\gamma)$ o $(\gamma, \sigma) < 0$ de donde $(\gamma, -\sigma) > 0$ entonces $-\sigma \in \Phi^+(\gamma)$, es decir, $\sigma \in -\Phi^+(\gamma)$. Por lo tanto $\Phi = \Phi^+(\gamma) \cup -\Phi^+(\gamma)$. De lo anterior se tiene que (B2) se satisface por el paso 1. Ahora, $\Delta(\gamma)$ genera a E y combinado con el paso 3 se satisface (B1).

5. Cada base Δ de Φ es de la forma $\Delta(\gamma)$ para algún $\gamma \in E$ regular. En efecto, dada una base Δ, se escoge $\gamma \in E$ tal que $(\gamma, \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$, esto es posible, porque la intersección de medio espacio abierto «positivo» asociado a cualquier base de E es no vacío, pues para cada $\alpha \in \Delta$ se define $P_\alpha^+ = \{\gamma \in E : (\gamma, \alpha) > 0\}$, sea $\gamma \in \bigcap P_\alpha^+$ con $\alpha \in \Delta$ entonces $(\gamma, \alpha) > 0$. Ahora, si $\beta \in \Phi$ entonces $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$, con lo cual $(\gamma, \beta) = \sum b_\alpha (\gamma, \alpha) \neq 0$, de donde se concluye que γ es regular. Si $\beta \in \Phi^+$, entonces $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$ con $b_\alpha \geq 0$, luego se tiene que $(\gamma, \beta) = \sum b_\alpha (\gamma, \alpha) > 0$, con lo cual $\Phi^+ \subset \Phi^+(\gamma)$, de igual forma se tiene que $\Phi^- = -\Phi^+ \subset -\Phi^+(\gamma)$. Por otra parte, sea $\beta \in \Phi^+(\gamma)$, es decir $(\gamma, \beta) > 0$, luego $\beta = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$ entonces $(\gamma, \alpha) = \sum\limits_{\alpha \in \Delta} b_\alpha (\gamma, \alpha)$, pero $b_\alpha \geq 0$ ó $b_\alpha \leq 0$, para todo $\alpha \in \Delta$. Si se satisface la

segunda opción se tiene $b_\alpha(\gamma, \alpha) \leq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$ entonces $\sum\limits_{\alpha\in\Delta} b_\alpha(\gamma, \alpha) \leq 0$ de donde $0 < (\gamma, \beta) \leq 0$ lo cual no es posible. Así $\Phi^+(\gamma) \subset \Phi^+$, por lo tanto $\Phi^+ = \Phi^+(\gamma)$, luego Δ debe de consistir únicamente de elementos indescomponibles, en otras palabras, se tiene que $\Delta \subset \Delta(\gamma)$. Pero ambos conjuntos son bases de E con lo cual $|\Delta| = |\Delta(\gamma)|$, de donde se concluye que $\Delta = \Delta(\gamma)$.

■

Definición 3.32 (**Cámara de Weyl**). Una cámara de Weyl (abierta) de Φ es un subconjunto abierto y conexo maximal del espacio $E - \bigcup\limits_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$.

Si un vector $\gamma \in E$ pertenece a una cámara de Weyl de Φ, se denota a tal cámara de Weyl por $\mathfrak{C}(\gamma)$, más aun, cada vector regular está en alguna cámara de Weyl. Humphreys (1972) [7].

Teorema 3.33. *Existe una correspondencia uno-a-uno entre las cámaras de Weyl de un sistema de raíces Φ y sus bases.*

Demostración. Si $\mathfrak{C}(\gamma) = \mathfrak{C}(\gamma')$, entonces γ y γ' están del mismo lado de cada hiperplano P_α para cada $\alpha \in \Phi$. Esto implica que $\langle\gamma, \alpha\rangle$ y $\langle\gamma', \alpha\rangle$ tienen el mismo signo para toda raíz $\alpha \in \Phi$, es decir, $\Phi^+(\gamma) = \Phi^+(\gamma')$. Luego, es claro que $\Delta(\gamma) = \Delta(\gamma')$. ■

Definición 3.34 (**Cámara fundamental**). Sean γ un vector regular y $\Delta(\gamma)$ una base de Φ. La cámara fundamental de Weyl para Φ con respecto a $\Delta(\gamma)$ es la cámara $\mathfrak{C}(\gamma)$ y se denota por $\mathfrak{C}(\Delta)$.

La cámara fundamental de Weyl se describe como el conjunto convexo abierto que consiste de todos los vectores $\delta \in E$ que satisfacen $(\delta, \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$.

3.4. Lemas sobre raíces simples

En esta sección se presentan varios lemas y corolarios sobre el comportamiento de las raíces simples. Para ello, se fija una base Δ de Φ.

Lema 3.35. *Si α es una raíz positiva pero no es simple, entonces $\alpha - \beta$ es una raíz, necesariamente positiva, para alguna raíz simple β.*

Demostración. Si $(\alpha, \beta) \leq 0$ para todo $\beta \in \Delta$, por el comentario final del paso 3 en la demostración del Teorema 3.31 se tiene que el conjunto $\Delta \cup \{\alpha\}$ es L.I, lo que no es posible puesto que Δ es una base de E. Así, $(\alpha, \beta) > 0$ para algún $\beta \in \Delta$, puesto que $\alpha \notin \Delta$, es claro que $\beta \neq \pm\alpha$, entonces $\alpha - \beta \in \Phi$. Ahora, se escribe $\alpha = \sum\limits_{\gamma\in\Delta} k_\gamma \gamma$, donde $k_\gamma \geq 0$ y necesariamente algún $k_\gamma > 0$, con $\gamma \neq \beta$. Restando β a α se tiene una combinación $\mathbb{Z}$-lineal de raíces simples en la cual al menos un coeficiente es positivo. Esto fuerza a que todos los coeficientes de $\alpha - \beta$ sean no negativos por (B2). ■

Corolario 3.36. *Cada* $\beta \in \Phi^+$ *puede ser escrita en la forma* $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, *con* $\alpha_i \in \Delta$ *no necesariamente distintos, de tal manera que cada suma parcial es una raíz.*

Demostración. Se procede por inducción sobre $alt(\beta)$. Para el caso $alt(\beta) = 1$, se tiene que β es simple y se satisface el corolario. Suponga que el corolario se satisface para toda raíz positiva de altura menor que k. Sea $\beta \in \Phi^+$ tal que $alt(\beta) = k > 1$, es claro que $\beta \notin \Delta$. Por el Lema 3.35, existe $\gamma \in \Delta$ tal que $\beta - \gamma \in \Phi^+$ y $alt(\beta - \gamma) = k - 1$. Por hipótesis, se tiene que $\beta - \gamma = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{k-1}$ donde cada raíz α_i es simple y cada suma parcial es una raíz. Si $\alpha_k = \gamma$, se tiene el resultado. ■

Lema 3.37. *Si* α *una raíz simple, entonces* $\mathcal{R}_\alpha$ *permuta las raíces positivas distintas de* α.

Demostración. Sea $\beta \in \Phi^+ - \{\alpha\}$, $\beta = \sum\limits_{\gamma \in \Delta} k_\gamma \gamma$. Es claro que β no es proporcional a α, por lo tanto hay algún $k_\gamma \neq 0$ con $\gamma \neq \alpha$. Pero el coeficiente de γ en $\mathcal{R}_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ sigue siendo k_γ, en otras palabras $\mathcal{R}_\alpha(\beta)$ tiene al menos un coeficiente positivo, relativo a Δ, luego $\mathcal{R}_\alpha(\beta) \in \Phi^+$. Además, $\mathcal{R}_\alpha(\beta) \neq \alpha$ pues la imagen de α bajo $\mathcal{R}_\alpha$ es $-\alpha$. ■

Corolario 3.38. *Si* $\delta = \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta \succ 0} \beta$, *entonces* $\mathcal{R}_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$ *para todo* $\alpha \in \Delta$.

Demostración. Por linealidad de las reflexiones, $\mathcal{R}_\alpha(\delta) = \frac{1}{2} \sum\limits_{\beta \succ 0} \mathcal{R}_\alpha(\beta)$. Suponga que hay s raíces positivas, esto es, $\Phi^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, \alpha\}$. Por el Lema 3.37, se sabe que $\mathcal{R}_\alpha(\beta_i) = \beta_j$, para todo par de indices $i, j \in \{1, 2, \ldots, s-1\}$, es claro que $\mathcal{R}_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Así, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\alpha(\delta) &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s-1} \beta_i - \alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s-1} \beta_i - \alpha + \alpha - \alpha\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta \succ 0} \beta - 2\alpha\right) \\
&= \delta - \alpha.
\end{aligned}$$

Observe que esto implica que $\langle \delta, \alpha \rangle = 1$ para todo $\alpha \in \Delta$. ■

Lema 3.39. *Sean* $\alpha_1, \ldots, \alpha_t \in \Delta$, *no necesariamente distintas. Si* $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t)$ *es negativa, donde* $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{\alpha_i}$, *entonces para algún índice* $1 \leq s < t$,

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_t = \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}.$$

Demostración. Sean $\beta_i = \mathcal{R}_{i+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t)$ para $0 \leq i \leq t-2$ y $\beta_{t-1} = \alpha_t$. Puesto que $\beta_0 \prec 0$ y $\beta_{t-1} \succ 0$, existe el índice s más pequeño para el cual $\beta_s \succ 0$, entonces $\mathcal{R}_s(\beta_s) = \beta_{s-1} \prec 0$ y por el Lema 3.37 se fuerza a que $\beta_s = \alpha_s$. Luego, $\mathcal{R}_{\beta_s} = \mathcal{R}_{\mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t)}$ y por la Proposición 3.15, $\mathcal{R}_s = (\mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}) \circ \mathcal{R}_t \circ (\mathcal{R}_{t-1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s+1})$. Ahora

$$\mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ \mathcal{R}_s \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1} \circ \mathcal{R}_t =$$

$$\mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ [(\mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}) \circ \mathcal{R}_t \circ (\mathcal{R}_{t-1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s+1})] \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1} \circ \mathcal{R}_t,$$

el resultado se tiene del hecho que $\mathcal{R}_i^2 = id$. ■

Corolario 3.40. *Si $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_t$ es una expresión en términos de reflexiones correspondientes a raíces simples, con t tan pequeño como sea posible, entonces $\mathcal{R}(\alpha_t) \prec 0$.*

Demostración. Suponga que $\mathcal{R}(\alpha_t) \succ 0$, es decir,

$$\mathcal{R}(\alpha_t) = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1} \circ \mathcal{R}_t(\alpha_t) \succ 0$$

$$\mathcal{R}(\alpha_t) = -(\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1})(\alpha_t) \succ 0,$$

luego $\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}(\alpha_t) \prec 0$. Por el Lema 3.39, existe $s \in \{1, \ldots t-1\}$ el cual permite que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{s-1} \circ \mathcal{R}_{s+1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}$ lo cual contradice la minimalidad de t. ■

3.5. El grupo de Weyl

En esta sección se presenta un grupo generado por las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, con $\alpha \in \Phi$, y las características sobre el sistema de raíces, en particular sobre una base Δ que se presenta en el Teorema 3.45, el cual se usa para la demostración del Teorema 4.20 en el Capítulo 4.

Definición 3.41 (El grupo de Weyl). Sea Φ un sistema de raíces en E. El grupo de Weyl de Φ es el subgrupo de $GL(E)$ generado por las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, llamadas reflexiones de Weyl, donde $\alpha \in \Phi$, y es denotado por $\mathcal{W}$.

Por el axioma (R1), se sabe que Φ es un conjunto finito y genera a E, por lo que $\mathcal{W}$ es un grupo finito. Por el axioma (R3) se tiene que $\mathcal{W}$ permuta al conjunto Φ.

Proposición 3.42. *Sean $w \in E$ regular y $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ tales que $\mathcal{R}(w) \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$, entonces se satisface que $(\mathcal{R}(w), \alpha_0) = (w, \mathcal{R}^{-1}(\alpha_0))$, para algún $\alpha_0 \in \Phi$.*

Demostración. Se procede por inducción sobre $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_t$, donde $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_t \circ \cdots \circ \mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_t = \mathcal{R}_{\beta_t}$. Si $t = 1$ se tiene

$$(\mathcal{R}(w), \alpha_0) = (w - \langle w, \beta_1\rangle \beta_1, \alpha_0) = (w, \alpha_0) - \langle w, \beta_1\rangle(\beta_1, \alpha_0) = (w, \alpha_0) - \langle \alpha_0, \beta_1\rangle(w, \beta_1)$$

$$(w, \alpha_0 - \langle \alpha_0, \beta_1\rangle \beta_1) = (w, \mathcal{R}(\alpha_0)) = (w, \mathcal{R}^{-1}(\alpha_0)).$$

Suponga que la proposición se satisface para $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1}$, es decir, $(\mathcal{R}(w), \alpha_0) = (w, \mathcal{R}^{-1}(\alpha_0))$. Ahora, sea $\mathcal{T} = \mathcal{R}_1 \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{t-1} \circ \mathcal{R}_t$, entonces $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{R}_t \circ \mathcal{R}^{-1}$. Luego,

$$(\mathcal{T}(w), \alpha_0) = (\mathcal{R}(\mathcal{R}_t(w)), \alpha_0) = (\mathcal{R}_t(w), \mathcal{R}^{-1}(\alpha_0)) = (w, \mathcal{R}_r^{-1}(\mathcal{R}^{-1}(\alpha_0))) = (w, \mathcal{T}^{-1}(\alpha_0)).$$

■

Proposición 3.43. *Si $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$, entonces $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma)) = \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\gamma))$, es decir, el grupo de Weyl envía a una cámara de Weyl sobre otra.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ no está contenido en $E - \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$, entonces existe $\omega \in \mathfrak{C}(\gamma)$ con $\mathcal{R}(\omega) \in \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$ y así, existe $\alpha_0 \in \Phi$ tal que $0 = (\mathcal{R}(\omega), \alpha_0) = (\omega, \mathcal{R}^{-1}(\alpha_0))$. Por lo tanto, ω es ortogonal a la raíz $\mathcal{R}^{-1}(\alpha_0)$, lo cual no es imposible. Luego, se concluye que $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ está contenido en $E - \bigcup_{\alpha\in\Phi} P_\alpha$. No es difícil ver que $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\gamma))$ es una cámara de Weyl y cualquier $\omega \in \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\gamma))$ satisface que $(\omega,\alpha)(\mathcal{R}(\gamma),\alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Phi$. Así, se debe probar que $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ es abierto, conexo y contiene a $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\gamma))$. $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ es un conjunto abierto, en efecto, sea $\mathcal{R}$ una reflexión y sea $B(x;d) \subset E$ esto es $\{y \in E : ||x-y|| < d\} = \{y \in E : (x-y, x-y)^{\frac{1}{2}} < d\}$. Ahora, sea $y \in B(x;d)$, entonces $\mathcal{R}(y) = y - \langle y - \alpha\rangle\alpha$, luego,

$$(\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(y), \mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(y))^{\frac{1}{2}} = (\mathcal{R}(x-y), \mathcal{R}(x-y))^{\frac{1}{2}} = (x-y, x-y)^{\frac{1}{2}} = ||x-y|| < d,$$

por lo tanto $\mathcal{R}(y) \in B(\mathcal{R}(x);d)$, así, $\mathcal{R}(B(x;d)) \subset B(\mathcal{R}(x);d)$. Ahora, sea $z \in B(\mathcal{R}(x);d)$, entonces existe $y \in E$ tal que $\mathcal{R}(y) = z$ luego,

$$\begin{aligned} ||\mathcal{R}(x) - z|| &= ||\mathcal{R}(x) - \mathcal{R}(y)|| = ||\mathcal{R}(x-y)|| \\ &= (\mathcal{R}(x-y), \mathcal{R}(x-y))^{\frac{1}{2}} = (x-y, x-y)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||x-y|| < d. \end{aligned}$$

Así, $y \in B(\mathcal{R}(x);d)$ y $z = \mathcal{R}(y) \in \mathcal{R}(B(x;d))$, por lo tanto $B(\mathcal{R}(x);d) \subset \mathcal{R}(B(x;d))$ con lo cual $B(\mathcal{R}(x);d) = \mathcal{R}(B(x;d))$. De lo anterior, es fácil ver que si A es un conjunto abierto en E, entonces $\mathcal{R}(A)$ es un conjunto abierto en E, esto es claro pues si $\mathcal{R}(a) \in \mathcal{R}(A)$, puesto que A es abierto existe $B(a;d) \subset A$, entonces $\mathcal{R}(B(a;d)) \subset \mathcal{R}(A)$. Así, $B(\mathcal{R}(a);d) \subset \mathcal{R}(A)$ con lo cual $\mathcal{R}(A)$ es abierto. Tome $A = \mathfrak{C}(\gamma)$ y se tiene que $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ es abierto. $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ es conexo, en efecto, sean U_1 y U_2 subconjuntos abiertos de E tales que $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma)) = U_1 \cup U_2$. Dado que $\mathcal{R}$ es biyectiva se tiene que

$$\mathfrak{C}(\gamma) = \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))) = \mathcal{R}^{-1}(U_1 \cup U_2) = \mathcal{R}^{-1}(U_1) \cup \mathcal{R}^{-1}(U_2).$$

Puesto que $\mathcal{R}$ es continua se tiene que $\mathcal{R}^{-1}(U_i)$, $i \in \{1,2\}$, es un subconjunto abierto de E. Pero $\mathfrak{C}(\gamma)$ es conexo, luego $\mathcal{R}^{-1}(U_1) \cap \mathcal{R}^{-1}(U_2) \neq \emptyset$, así $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Por lo tanto $\mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$ es conexo. Para probar que $\mathfrak{C}(\mathcal{R}(\gamma)) \subset \mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$, sea $\omega \in \mathfrak{C}(\mathcal{R}(\gamma))$ y $\alpha \in \Phi$, entonces $(\mathcal{R}^{-1}(\omega), \alpha) = (\omega, \mathcal{R}(\alpha))$. Así,

$$(\mathcal{R}^{-1}(\omega), \alpha)(\gamma, \alpha) = (\omega, \mathcal{R}(\alpha))(\mathcal{R}(\gamma), \mathcal{R}(\alpha)) > 0,$$

por lo que $\mathcal{R}^{-1}(\omega) \in \mathfrak{C}(\gamma)$, lo cual sucede si y solo si $\omega \in \mathcal{R}(\mathfrak{C}(\gamma))$, que es lo que se buscaba. ■

Definición 3.44 (Raíces conjugadas). Sean $\alpha, \beta \in \Phi$. Se dice que α y β son conjugadas si existe $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathcal{R}(\alpha) = \beta$.

Teorema 3.45. *Sea Δ una base de Φ.*

(a) Si $\gamma \in E$ es regular, existe $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ tal que $(\mathcal{R}(\gamma), \alpha) > 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. ($\mathcal{W}$ actúa transitivamente en las cámaras de Weyl).

(b) Si Δ' es otra base de Φ, entonces $\mathcal{R}(\Delta') = \Delta$ para algún $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$. ($\mathcal{W}$ actúa transitivamente en las bases).

(c) Si $\alpha \in \Phi$, existe $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathcal{R}(\alpha) \in \Delta$.

(d) $\mathcal{W}$ es generado por las reflexiones $\mathcal{R}_\alpha$, con $\alpha \in \Delta$, las cuales se denominan reflexiones simples.

(e) Si $\mathcal{R}(\Delta) = \Delta$, con $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$, entonces $\mathcal{R} = id$. ($\mathcal{W}$ actúa simplemente transitivamente en las bases).

Demostración. Sea $\mathcal{W}'$ el subgrupo de $\mathcal{W}$ generado por las reflexiones simples. Se probará (a), (b) y (c) para $\mathcal{W}'$ para luego probar que $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$.

(a) Sea $\delta = \frac{1}{2} \sum\limits_{\alpha \succ 0} \alpha$ y se elige $\mathcal{R} \in \mathcal{W}'$ para el cual $(\mathcal{R}(\gamma), \delta)$ sea tan grande como sea posible. Si α es simple, entonces $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}$ está en $\mathcal{W}'$ así que la elección de $\mathcal{R}$ implica que

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}(\gamma), \delta) &\geq (\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}(\gamma), \delta) \\ &= (\mathcal{R}(\gamma), \mathcal{R}_\alpha(\delta)) \\ &= (\mathcal{R}(\gamma), \delta - \alpha) \\ &= (\mathcal{R}(\gamma), \delta) - (\mathcal{R}(\gamma), \alpha).\end{aligned}$$

Esto fuerza a que $(\mathcal{R}(\gamma), \alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Puesto que γ es regular, no se puede tener que $(\mathcal{R}(\gamma), \alpha) = 0$ para toda raíz simple α, porque entonces γ podría ser ortogonal a $\mathcal{R}'(\alpha)$. Así, las inecuaciones son estrictas, es decir $(\mathcal{R}(\gamma), \alpha) > 0$. Con lo cual, $\mathcal{R}(\gamma)$ está en la cámara fundamental de Weyl $\mathfrak{C}(\Delta)$ y $\mathcal{R}$ envía a $\mathfrak{C}(\gamma)$ en $\mathfrak{C}(\Delta)$.

(b) Puesto que $\mathcal{W}'$ permuta las cámaras de Weyl, por (a) también permuta las bases de Φ (transitivamente).

(c) Por (b), es suficiente probar que cada raíz pertenece a alguna base. Puesto que las únicas raíces proporcionales a α son $\pm\alpha$, los hiperplanos P_β son distintos a P_α, cuando $\beta \neq \alpha$. Se escoge γ' tal que $(\gamma', \alpha) = \epsilon > 0$ mientras que $|(\gamma', \beta)| > \epsilon$ para todo $\beta \neq \pm\alpha$, es decir, γ' es un vector regular tal que $(\gamma', \alpha) > 0$ y $(\gamma', \beta) \neq 0$, para todo $\beta \in \Phi$, así $|(\gamma', \beta)| > 0$. Luego, sea $\epsilon' = \text{mín}\{|(\gamma', \beta)| : \beta \in \Phi\}$, ahora, sea $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $\frac{(\gamma', \alpha)}{N} < \epsilon'$. Tomando $\gamma = \frac{\gamma'}{N}$ se tiene que

$$0 < (\gamma, \alpha) = \frac{1}{N}(\gamma', \alpha) < \epsilon' \leq (\gamma', \beta), \text{ para todo } \beta \neq \pm\alpha.$$

Evidentemente, $\alpha \in \Delta(\gamma')$, de no ser así, sean $\beta_1, \beta_2 \in \Phi^+$ tales que $\alpha = \beta_1 + \beta_2$, luego, $(\gamma', \alpha) = (\gamma', \beta_1) + (\gamma', \beta_2) > \epsilon'$ lo cual no es posible.

(d) Para mostrar que $\mathcal{W} = \mathcal{W}'$, basta con mostrar que cada reflexión $\mathcal{R}_\alpha$, con $\alpha \in \Phi$, está en $\mathcal{W}'$. Usando (c), para $\alpha \in \Phi$ existe $\mathcal{R} \in \mathcal{W}'$ tal que $\beta = \mathcal{R}(\alpha) \in \Delta$, entonces $\mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha\mathcal{R}^{-1}$, con lo cual $\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}_\beta\mathcal{R} \in \mathcal{W}'$.

(e) Suponga que $\mathcal{R}(\Delta) = \Delta$ y $\mathcal{R} \neq id$. Si $\mathcal{R}$ se escribe minimalmente como un producto de una o más reflexiones simples, entonces se contradice el Corolario 3.40.

■

Definición 3.46 (Expresión reducida y longitud). Si $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ se escribe como $\mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t}$, con $\alpha_i \in \Delta$ y t minimal, se dice que $\mathcal{R}$ está en su expresión reducida y se define la longitud de $\mathcal{R}$, relativa a Δ, como $l(\mathcal{R}) = t$. Por definición, $l(id) = 0$.

Una forma de caracterizar la longitud de un elemento en el grupo de Weyl es mediante el número de raíces positivas α para las cuales $\mathcal{R}(\alpha) \prec 0$ y se denota por $n(\mathcal{R})$.

Lema 3.47. *Si $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$, entonces $l(\mathcal{R}) = n(\mathcal{R})$*

Demostración. Procederemos por inducción sobre $l(\mathcal{R})$. El caso $l(\mathcal{R}) = 0$ es claro, puesto que si $l(\mathcal{R}) = 0$ implica que $\mathcal{R} = id$ así $n(\mathcal{R}) = 0$. Suponga que el lema se satisface para todo $\mathcal{T} \in \mathcal{W}$ con $l(\mathcal{T}) < l(\mathcal{R})$. Se escribe a $\mathcal{R}$ en su expresión reducida como $\mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t}$ y sea $\alpha = \alpha_t$. Por el Corolario 3.40 $\mathcal{R}(\alpha) \prec 0$ y el Lema 3.37 implica que $n(\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha) = n(\mathcal{R}) - 1$ puesto que $\mathcal{R}_\alpha$ permuta todas las raíces positivas excepto α ya que $\mathcal{R}_\alpha(\alpha) = -\alpha$. Por otro lado, $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t} \circ \mathcal{R}_\alpha$ pero $\alpha = \alpha_t$ por lo tanto $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_{t-1}}$. Así, $l(\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha) = l(\mathcal{R}) - 1 < l(\mathcal{R})$, luego por hipótesis inductiva se tiene que $l(\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha) = n(\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha)$. Por lo tanto $l(\mathcal{R}) = n(\mathcal{R})$. ■

Observación 3.48. Para todo $\delta \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ se tiene $(\delta, \beta) \geq 0$, para todo $\beta \in \Delta$. En efecto, para $\epsilon = 1$ sea $x_1 \in \bar{B}(\delta, 1)$ tal que $(x_1, \beta) > 0$, par toda $\beta \in \Delta$. Para $\epsilon = \frac{1}{2}$ sea $x_2 \in \bar{B}(\delta, \frac{1}{2})$ tal que $(x_2, \beta) > 0$, para todo $\beta \in \Delta$. Continuando de igual forma se tiene que para $\epsilon = \frac{1}{n}$ sea $x_n \in \bar{B}(\delta, \frac{1}{n})$ tal que $(x_n, \beta) > 0$, para todo $\beta \in \Delta$, y se puede seguir así indefinidamente. Se puede ver que $x_n \longrightarrow \delta$ y puesto que el producto interno es bilineal, la función $f_x : E \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(\omega) = (x, \omega)$, para todo $\omega \in E$, es continua para $x \in E$. Luego, para $\beta \in \Delta$ se tiene $f_\beta(x_n) \longrightarrow f_\beta(\delta)$, es decir, $(x_n, \beta) \longrightarrow (\delta, \beta)$, y puesto que $(x_n, \beta) > 0$ entonces $(\delta, \beta) > 0$, para todo $\beta \in \Delta$.

El siguiente lema prueba que cada vector en E es $\mathcal{W}$-conjugado a un punto de la clausura $\overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ de la cámara fundamental de Weyl relativa a Δ.

Lema 3.49. *Sea $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Si $\mathcal{R}(\lambda) = \mu$ para algún $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$, entonces $\mathcal{R}$ es un producto de reflexiones simples que fijan a λ, en particular $\lambda = \mu$.*

Demostración. Procederemos por inducción en $l(\mathcal{R})$. El caso $l(\mathcal{R}) = 0$ es claro, sea $l(\mathcal{R}) > 0$, por el Lema 3.47, existe una raíz que mediante la acción de $\mathcal{R}$ la envía a una raíz negativa. Así, $\mathcal{R}$ no puede enviar todas las raíces simples a raíces positivas. Suponga que $\mathcal{R}(\alpha) \prec 0$ para algún $\alpha \in \Delta$, entonces

$$0 \geq (\mu, \mathcal{R}(\alpha)) = (\mathcal{R}^{-1}(\mu), \alpha) = (\lambda, \alpha) \geq 0$$

porque $\lambda, \mu \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Esto implica que $(\lambda, \alpha) = 0$, de sonde se tiene que $\mathcal{R}_\alpha(\lambda) = \lambda$ y $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha(\lambda) = \mu$. Por el Lema 3.37, $l(\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha) = l(\mathcal{R}) - 1$ y por hipótesis inductiva, $\mathcal{R}\mathcal{R}_\alpha = \mathcal{R}_{\beta_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\beta_{t-1}}$, donde $\mathcal{R}_{\beta_i}$ son reflexiones simples que fijan a λ. Ahora, al multiplicar por $\mathcal{R}_\alpha$ a ambos lados finaliza la prueba. ■

3.6. Sistemas de raíces irreducibles

Definición 3.50 (Irreducible). Se dice que un sistema de raíces Φ es irreducible si no puede ser expresado como la unión de dos subconjuntos propios Φ_1 y Φ_2 mutuamente ortogonales.

En adelante $(A, B) = 0$ denotará que dos subconjuntos A y B de un espacio Euclidiano son mutuamente ortogonales.

Teorema 3.51. *Sea Φ sistema de raíces con base Δ. Φ es irreducible si y solo si Δ no puede ser expresada como la unión de dos subconjuntos Δ_1 y Δ_2 tal que $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$.*

Demostración. Sea Δ una base de Φ tal que Δ no puede expresarse como la unión de dos subconjuntos Δ_1 y Δ_2 tal que $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Suponga que $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, con $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$. A menos que Δ este totalmente contenido en Φ_1 o Φ_2, esto induce una partición similar de Δ, pero $\Delta \subset \Phi_1$ implica que $(\Delta, \Phi_2) = 0$ y por tanto, $(E, \Phi_2) = 0$, puesto que Δ genera a E. Esto implica que Φ_2 es vacío. Análogamente, si $\Delta \in \Phi_2$, entonces Φ_1 es vacío. En el otro sentido, sea Φ irreducible y suponga $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ con $(\Delta_1, \Delta_2) = 0$. Por ítem (c) del Teorema 3.45 cada raíz es conjugada a una raíz simple, así $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, donde Φ_i es el conjunto de raíces que tiene un conjugado en Δ_i, es decir, $\Phi_i = \{\alpha \in \Phi : \mathcal{R}(\alpha) \in \Delta_i, \text{ para algún } \mathcal{R} \in \mathcal{W}\}$. Recuerde que $(\alpha, \beta) = 0$ implica que $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta = \mathcal{R}_\beta \mathcal{R}_\alpha$. Sea $\alpha \in \Phi_1$, luego existe $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathcal{R}(\alpha) = \lambda \in \Delta_1$ de donde $\alpha = \mathcal{R}^{-1}(\lambda)$, pero $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t} \circ \mathcal{R}_{\beta_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\beta_s}$, de tal manera que $\alpha_i \in \Delta_1, i = 1, \ldots, t$ y $\beta_j \in \Delta_2, j = 1, \ldots, s$, esto por que $(\alpha, \beta) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t} \circ \mathcal{R}_{\beta_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\beta_s}(\lambda) \\ &= \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t} \circ \mathcal{R}_{\beta_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\beta_{s-1}}(\lambda - \langle \lambda, \beta_s \rangle \beta_s) \end{aligned}$$

pero $\langle \lambda, \beta_s \rangle = 0$, entonces

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_t}(\lambda) \\ &= \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_{t-1}}(\lambda - a_t \alpha_t) \\ &= \mathcal{R}_{\alpha_1} \circ \cdots \circ \mathcal{R}_{\alpha_{t-2}}(\lambda - a_t \alpha_t - a_{t-1}\alpha_{t-1}) \\ &\;\;\vdots \\ &= \alpha - a_t \alpha_t - \cdots - a_1 \alpha_1 \in gen \Delta_1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, Φ_i se encuentra en el subespacio E_i de E generado por Δ_i y facilmente se puede ver que $(\Phi_1, \Phi_2) = 0$ lo que fuerza a ser $\Phi_1 = \emptyset$ o $\Phi_2 = \emptyset$ de donde $\Delta_1 = \emptyset$ 0 $\Delta_2 = \emptyset$. ■

Lema 3.52. *Sea Φ irreducible. Relativo al orden parcial $\prec$, existe una única raíz maximal β (en particular $\alpha \neq \beta$ implica $alt(\alpha) < alt(\beta)$ y $(\beta, \alpha) \geq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$). Si $\beta = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} k_\alpha \alpha$ entonces $k_\alpha > 0$.*

Demostración. Sea $\beta = \sum\limits_{\alpha\in\Delta} k_\alpha\alpha$ maximal en el orden parcial $\prec$, es claro que β es positiva. Si $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta : k_\alpha > 0\}$ y $\Delta_2 = \{\alpha \in \Delta : k_\alpha = 0\}$, entonces $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Suponga que $\Delta_2 \neq \emptyset$, entonces $(\alpha, \beta) \leq 0$ para todo $\alpha \in \Delta_2$ y puesto que Φ es irreducible, al menos un $\alpha \in \Delta_2$ no es ortogonal a Δ_1 forzando a que $(\alpha, \alpha_1) < 0$ para algún $\alpha_1 \in \Delta_1$, luego, $(\alpha, \beta) < 0$. Esto implica que $\beta + \alpha$ es una raíz contradiciendo la maximalidad de β. Así, Δ_2 debe ser vacío y toda $k_\alpha > 0$. Este argumento muestra también que $(\alpha, \beta) \geq 0$ para todo $\alpha \in \Delta$. Ahora la existencia de una raíz maximal en el orden $\prec$ se sigue del hecho de que Φ es finito. Para la unicidad, si β' es otra raíz maximal. El argumento anterior se aplica a β', así β' involucra, con coeficientes positivos, al menos un $\alpha \in \Delta$ para el cual $(\alpha, \beta) > 0$, de donde $(\beta', \beta) > 0$ con lo cual se tiene que $\beta - \beta'$ es raíz, a menos que $\beta' = \beta$. Si $\beta - \beta'$ fuese positiva, entonces $\beta' \prec \beta$, lo que es absurdo, de igual forma, si $\beta - \beta'$ fuese negativa. Así, $\beta - \beta'$ no es una raíz y $\beta = \beta'$. ■

Proposición 3.53. *Si E' es un subespacio de E invariante bajo $\mathcal{R}_\alpha$, entonces $\alpha \in E'$ o bien $E' \subset P_\alpha$.*

Demostración. Suponga que $\alpha \notin E'$. Por hipótesis, $\mathcal{R}_\alpha(\gamma) \in E'$ para todo $\gamma \in E'$. Si $(\gamma, \alpha) \neq 0$, entonces existe $\omega \in E'$ tal que $\omega = \gamma - \langle\gamma, \alpha\rangle\alpha$, luego $\alpha = \frac{\gamma-\omega}{\langle\gamma,\alpha\rangle} \in E'$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto γ es ortogonal a α. ■

Lema 3.54. *Sea Φ un sistema de raíces irreducible y $\mathcal{W}$ su grupo de Weyl. Si $F \neq 0$ es un subespacio de E $\mathcal{W}$-invariante, entonces $F = E$. En particular, $gen\mathcal{W}(\alpha) = E$ para cualquier $\alpha \in \Phi$, donde $\mathcal{W}(\alpha) = \{\mathcal{R}(\alpha) : \mathcal{R} \in \mathcal{W}\}$. En este caso se dice que $\mathcal{W}$ actuá de forma irreducible sobre E.*

Demostración. Sea F un subespacio no nulo de E invariante bajo $\mathcal{W}$. El complemento ortogonal $F^\perp$ de F es también invariante bajo $\mathcal{W}$ y $E = F \oplus F^\perp$. Por la Proposición 3.53, para $\alpha \in \Phi$, se tiene que $\alpha \in F$ o $F \subset P_\alpha$. Sí, $\alpha \notin F$ implica que $\alpha \in F^\perp$, así cada raíz está en un subespacio o en el otro. Esto parte a Φ en subconjuntos mutuamente ortogonales, lo que fuerza a uno de los dos ser nulo. Se infiere que todas las raíces están en uno de los dos subespacios F o $F^\perp$, sin embargo si $\Phi \subset F^\perp$ entonces $F^\perp = E$ y $\langle F, E\rangle = 0$ implica que $F = 0$ lo cual es una contradicción, por lo tanto $\Phi \subset F$ y $F = E$. Ahora, se tiene que $gen\mathcal{W}(\alpha)$, para cualquier $\alpha \in \Phi$, es un subespacio no nulo y $\mathcal{W}$-invariante de E, así la segunda afirmación se sigue de la primera. ■

Lema 3.55. *Si Φ es irreducible, entonces como máximo existen 2 longitudes distintas de raíces. Ademas todas las raíces de una longitud dada se conjugan bajo $\mathcal{W}$.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in \Phi$. Dado que Φ es irreducible se tiene que $gen\mathcal{W}(\alpha) = E$, luego β no puede ser ortogonal a todo vector de $\mathcal{W}(\alpha)$, es decir, existe $\alpha' \in \mathcal{W}(\alpha)$ tal que $(\beta, \alpha') \neq 0$. Además, para $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ se tiene que

$$||\mathcal{R}(\alpha)|| = \sqrt{(\mathcal{R}(\alpha), \mathcal{R}(\alpha))} = \sqrt{(\alpha, \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R}(\alpha))} = \sqrt{(\alpha, \alpha)} = ||\alpha||.$$

Suponga que existen $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ tales que $||\alpha|| < ||\beta|| < ||\gamma||$ y sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{W}(\alpha)$ tales que $(\beta, \alpha_1) \neq 0$ y $(\gamma, \alpha_2) \neq 0$, entonces

$$\left(\frac{||\beta||}{||\alpha||}\right)^2 = \left(\frac{||\beta||}{||\alpha_1||}\right)^2 \in \{2, 3\}$$

$$\left(\frac{||\gamma||}{||\alpha||}\right)^2 = \left(\frac{||\gamma||}{||\alpha_2||}\right)^2 \in \{2, 3\},$$

pero

$$\left(\frac{||\beta||}{||\alpha_1||}\right)^2 = \left(\frac{||\gamma||}{||\alpha_2||}\right)^2$$

entonces $||\beta|| = ||\gamma||$ lo cual es una contradicción, necesariamente

$$\left(\frac{||\beta||}{||\alpha||}\right)^2 = 2 \text{ y } \left(\frac{||\gamma||}{||\alpha||}\right)^2 = 3$$

con lo cual

$$\frac{\left(\frac{||\gamma||}{||\alpha||}\right)^2}{\left(\frac{||\beta||}{||\alpha||}\right)^2} = \left(\frac{||\gamma||}{||\beta||}\right)^2 = \frac{3}{2}.$$

Pero existe $\beta' \in \mathcal{W}(\beta)$ tal que $(\gamma, \beta') \neq 0$ y $||\beta|| = ||\beta'||$, luego

$$\left(\frac{||\gamma||}{||\beta||}\right)^2 = \left(\frac{||\gamma||}{||\beta'||}\right)^2 \in \{2, 3\},$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $|\{||\alpha|| : \alpha \in \Phi\}| \leq 2$. Ahora suponga que α y β tienen la misma longitud, se puede sustituir una de las raíces por otra conjugada suya que no sea ortogonal a la primera, como antes, suponga pues que $\alpha, \beta \in \Phi$ con $||\alpha|| = ||\beta||, (\alpha, \beta) \neq 0, \beta \neq \pm\alpha$. Se tiene en este caso que $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = \pm 1$. Si $\langle \beta, \alpha \rangle = -1$ se puede sustituir β por $-\beta$ de modo que se tenga $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle = 1$. Entonces $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta \mathcal{R}_\alpha(\beta) = \mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta(\beta - \alpha) = \mathcal{R}_\alpha(-\beta - \alpha + \beta) = \alpha$. ∎

Definición 3.56 (Raíces largas y cortas). En un sistema de raíces irreducible con dos longitudes distintas de raíces, las raíces de longitud mayor se denominan raíces largas, y a las otras raíces cortas. Si solo hay una longitud de raíces, se les llamara raíces largas a todas.

Lema 3.57. *Sea Φ irreducible, con 2 longitudes distintas de raíces. Entonces la raíz maximal del Lema 3.52 es larga.*

Demostración. Sea $\beta \in \Phi$ raíz maximal y sea $\alpha \in \Phi$ arbitraria, basta con probar que $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$. Puesto que $\mathcal{W}$ actuá transitivamente sobre $\mathfrak{C}(\Delta)$, se reemplaza α por una $\mathcal{W}$-conjugada que este en la clausura de la cámara fundamental de Weyl, suponga $\alpha' = \mathcal{R}(\alpha)$. Por maximalidad de β se tiene que $\beta - \alpha' \succ 0$ (Lema 3.52), esto implica que para todo $\gamma \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$ se tiene $(\gamma, \beta - \alpha') \geq 0$, entonces $(\gamma, \beta) - (\gamma, \alpha') \geq 0$, $(\gamma, \beta) \geq (\gamma, \alpha')$. Ahora, se puede sustituir γ por β y γ por α' puesto que $\beta \succ 0$ y $\alpha' \in \overline{\mathfrak{C}(\Delta)}$. Aplicando al caso $\gamma = \beta$ se tiene $(\beta, \beta) \geq (\beta, \alpha')$, luego $\gamma = \alpha'$ se tiene $(\alpha', \beta) \geq (\alpha', \alpha')$, de donde $(\beta, \beta) \geq (\alpha', \alpha')$. Por lo tanto $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$. ■

3.7. Matriz de Cartan de Φ

En esta sección se presenta la matriz de Cartan la cual es una herramienta que caracterizan a los sistemas de raíces y permite presentar las relaciones que satisfacen las raíces simples. En adelante Φ denota un sistema de raíces de rango l, $\mathcal{W}$ su grupo de Weyl y Δ una base de Φ.

Definición 3.58 (**Matriz de Cartan**). Sea $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l\}$ una base ordenada de Φ. La matriz de Cartan de Φ, denotada por C^{Φ}, es la matriz cuadrada de orden l cuya ij-ésima componente es el entero $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Los componentes de la matriz de Cartan se denominan enteros de Cartan.

Ejemplo 3.59. Las matrices de Cartan de los sistemas de raíces presentados en los ejemplos de la Sección 3.1 son:

$$C^{A_1 \times A_1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \; C^{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \; C^{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \; C^{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matriz de Cartan depende del orden elegido en la base Δ, aunque esto no presenta mayor inconveniente. Por otra parte la matriz no depende de la base elegida esto se debe al Teorema 3.45.

Proposición 3.60. *Sea $\Phi' \subset E'$ otro sistema de raíces, con base $\Delta' = \{\alpha'_1, \cdots, \alpha'_l\}$. Si para todo par de enteros $i, j \in \{1, \ldots, l\}$ se cumple $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha'_i, \alpha'_j \rangle$, entonces la biyección $\alpha_i \longrightarrow \alpha'_i$ se extiende (unicamente) a un isomorfismo $\phi : E \longrightarrow E'$ enviando Φ en Φ' y satisfaciendo $\langle \phi(\alpha), \phi(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$. Por lo tanto, la matriz de Cartan de Φ determina a Φ hasta isomorfismo.*

Demostración. Puesto que Δ y Δ' son bases de E y E' respectivamente, existe un único isomorfismo de espacios vectoriales $\phi : E \longrightarrow E'$ que envía α_i a α'_i con $1 \leq i \leq l$. Si $\alpha, \beta \in \Delta$, la hipótesis asegura que

$$\mathcal{R}_{\phi(\alpha)}(\phi(\beta)) = \phi(\beta) - \langle \phi(\beta), \phi(\alpha) \rangle \phi(\alpha) = \phi(\beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha) = \phi(\mathcal{R}_\alpha(\beta)).$$

Los grupos de Weyl $\mathcal{W}, \mathcal{W}'$ son generados por reflexiones simples respectivamente, así se sigue que la función $\mathcal{R} \longrightarrow \phi \mathcal{R} \phi^{-1}$ es un isomorfismo de $\mathcal{W}$ en $\mathcal{W}'$ que envía $\mathcal{R}_\alpha$ a $\mathcal{R}_{\phi(\alpha)}$, con $\alpha \in \Delta$, pero cada $\beta \in \Phi$ es conjugado bajo $\mathcal{W}$ a una raíz simple, suponga $\beta = \mathcal{R}(\alpha)$, con $\alpha \in \Delta$. Esto a su vez fuerza a que $\phi(\beta) = (\phi \mathcal{R} \phi^{-1})(\phi(\alpha)) \in \Phi'$. Se sigue que ϕ envía Φ en Φ', además la formula para una reflexión (3.1.1) prueba que ϕ preserva todo entero de Cartan. ■

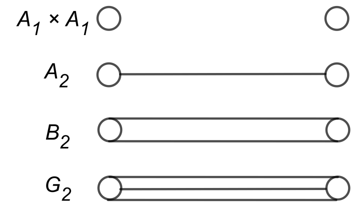
La proposición muestra que es posible recuperar Φ conociendo los enteros de Cartan. Para ilustrar con un ejempo se toma la matriz de Cartan $C^{A_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ la cual permite saber que el sistema de raíces tiene rango dos con una base $\Delta = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ de tal manera que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = -1$. Al conocer las raíces α_1 y α_2 se procede a localizar el resto de ellas, enfocándose solo en las positivas. Se comienza por las de altura dos, para lo cual se considera la α_1-cadena por α_2. Si tal cadena es $\alpha_2 - r\alpha_1, \ldots, \alpha_2 + q\alpha_1$, recuerde que $r - q = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle$, además $\alpha_2 - \alpha_1$ no es una raíz por lo tanto $r = 0$ y $q = 1$ con lo cual la α_1-cadena por α_2 es simplemente $\{\alpha_2, \alpha_2 + \alpha_1\}$. Puesto que en este caso se trata de una matriz simétrica, la α_2-cadena por α_1 se reduce a $\{\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2\}$, así las únicas raíces de altura dos son $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$. Ahora, se procede con las raíces de altura 3, pero las únicas posibles raíces positivas de altura tres son $\alpha_1 + 2\alpha_2$ o $\alpha_2 + 2\alpha_1$ donde si alguna de ellas fuera una una raíz, la α_1-cadena por α_2 (o la α_2-cadena por α_1) sería más larga de lo que se encontró en el paso anterior. Por lo tanto el sistema de raíces es el conjunto $\{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2)\}$. De lo anterior no es difícil elaborar un algoritmo practico para escribir todas las raíces, o simplemente las raíces positivas. El mejor enfoque es considerar cadenas de raíces. Se comienza con las raíces de altura uno, es decir, las raíces simples. Para las raíces de altura 2 se usara las raíces de altura 1 y las α_j-cadenas. Las entradas de la matriz de Cartan da los números $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ y por el Lema 3.24, se tiene que $\alpha_i - \alpha_j$ no es una raíz y así, $r = 0$ con lo que $q = -\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$. Continuando con las raíces de altura 3, teniendo ya todas las rices de altura 2, se puede obtener los números $\langle \alpha - \alpha_j \rangle$. Si α es cualquier raíz de altura 2, el entero r es fácil de encontrar pues α_j se puede restar como máximo una vez (Lema 3.35), para algún j, y así $q = r - \langle \alpha, \alpha_j \rangle$. Continuando de esta manera y Conociendo las raíces de altura $k-1$ y por el Corolario 3.36, se sabe que las raíces de altura k se pueden escribir como una suma de raíces simples de tal manera que cada suma parcial es una raíz. Así, es posible conocer a todas las raíces de altura k.

3.8. Grafos de Coxeter y diagramas de Dynkin

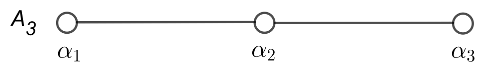
La matriz de Cartan es una forma útil de comprimir la información dada por un sistema de raíces. Otra forma de comprimir aún más esta información es mediante el grafos de Coxeter, y a partir de este grafo se obtiene el diagrama de Dynkin. Esta sección se dedica a los grafos de Coxeter y la clasificación de los diagramas de Dynkin. Recuerde que, de la Tabla 3.1, si α y β son raíces positivas distintas entonces $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 0, 1, 2$ o 3.

Definición 3.61 (**Grafo de Coxeter**). Dado un sistema de raíces Φ con base Δ de cardinal l, se define el grafo de Coxeter como aquel grafo que tiene l vértices y cada dos vértices i, j ($i \neq j$) se unen con tantas aristas como el número $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ indique.

Ejemplo 3.62. Los grafos de Coxeter de los sistemas de raíces presentados en los ejemplos de la Sección 3.1 son



Para una mejor interpretación del grafo de Coxeter se etiquetan los vértices con los nombres de las raíces simples. La matriz de Cartan de un sistema de raíces claramente determina el grafo de Coxeter. Ahora, el proceso inverso, es decir, dado un grafo de Coxeter se permita recuperar la matriz de Cartan no presenta inconvenientes cuando se trata de un grafo simple, por ejemplo dado el grafo de Coxeter



se tiene que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = 1$ lo que implica que $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle = -1$, se descarta que $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 1$ puesto que no cumple la definición de raíz ni satisface la condición (B2) de la definición de base. De forma análoga $\langle \alpha_2, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_2 \rangle = -1$ y $\langle \alpha_1, \alpha_3 \rangle = \langle \alpha_3, \alpha_1 \rangle = 0$. Por lo tanto la matriz de Cartan de este sistema de raíces es

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

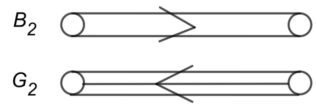
Sin embargo, cuando en el grafo de Coxeter hay más de una arista uniendo dos vértices, construir su respectiva matriz de Cartan no resulta tan directo, por ejemplo suponga el grafo

en el cuál la matriz de Cartan tiene dos posibilidades

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

dependiendo cuál sea la raíz larga, la de la derecha o la de la izquierda. Para superar este pequeño inconveniente, se definen los **diagramas de Dynkin**, los cuales se basan en el grafo de Coxeter, donde simplemente se añade una flecha que apunte a la raíz más corta. Esta información permite recuperar los enteros de Cartan.

Ejemplo 3.63. Los diagramas de Dynkin de los sistemas de raíces B_2 y G_2 son



Definición 3.64 (**Diagrama de Dynkin conexo**). Un diagrama de Dynkin es conexo si para cualesquiera dos vértices i y j, existe una sucesión de vértices $i_1, i_2, \ldots, i_k$ tales que $i_1 = i$, $i_k = j$ y el vértice i_s está conectado por al menos una arista con el vértice i_{s+1} para todo entero $1 \leq s \leq k$.

Proposición 3.65. *Un sistema de raíces Φ es irreducible si y solo si su diagrama de Dynkin es conexo.*

Demostración. Sea Φ un sistema de raíces irreducible tal que su diagrama de Dynkin no es conexo, se define el conjunto A que consiste de todos los vértices para los cuales existe un camino que los une entre si, y el conjunto B que consiste de los vértices para los cuales no todos están conectados entre si ni con ningún elemento de A. Es decir, se puede escribir a Φ como la unión disjunta de A y B. Ahora, para todo $v \in A$ y todo $w \in B$ se tiene que $\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle = 0$ con lo cual A y B son mutuamente ortogonales y por tanto Φ no es irreducible. Análogamente Si Φ no es irreducible entonces existen $A, B \subset \Phi$ mutuamente ortogonales tales que $\Phi = A \cup B$ luego en el diagrama de Dynkin de Φ se tiene que para todo $v \in A$ y todo $w \in B$, $\langle v, w\rangle\langle w, v\rangle = 0$ de donde se tiene que no es conexo. ■

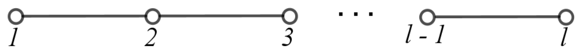
Proposición 3.66. *Un sistema de raíces Φ se descompone (unicamente) como la unión de sistemas de raíces irreducibles Φ_i (en subespacios E_i de E) tal que $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ (suma directa ortogonal).*

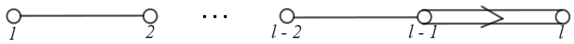
Demostración. Si Φ es irreducible no hay nada que probar. Ahora, si Φ no es irreducible, en su diagrama de Dynkin existirán un número de componentes conexas. Sean $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \cdots \cup \Delta_t$ la partición de Δ en subconjuntos mutuamente ortogonales, Φ_i la combinación $\mathbb{Z}$-lineal de elementos en Δ_i que son raíces y $E_i = gen\Delta_i$, entonces $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_t$ y cada Φ_i es un sistema de raíces irreducible en E_i cuyo grupo de Weyl es la restricción a E_i del subgrupo de $\mathcal{W}$ generado por las raíces simples en Δ_i. Puesto que cada E_i es invariante bajo $\mathcal{W}$, la Proposición 3.53 muestra que cada raíz de Φ está en algún E_i. ■

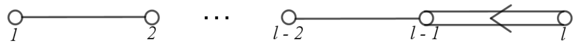
3.9. Teorema de Clasificación

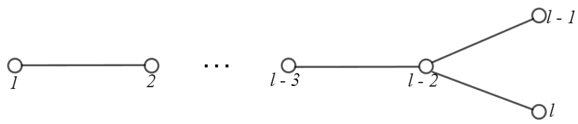
La discusión previa muestra que es suficiente con clasificar los sistemas de raíces irreducibles, o equivalentemente, los diagramas de Dynkin conexos.

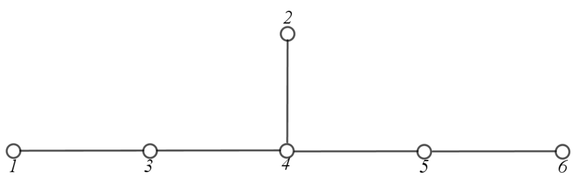
Teorema 3.67. *Si Φ es un sistema de raíces irreducible de rango l, entonces su diagrama de Dynkin es uno de los siguientes (en los primeros 4 casos hay l vértices)*

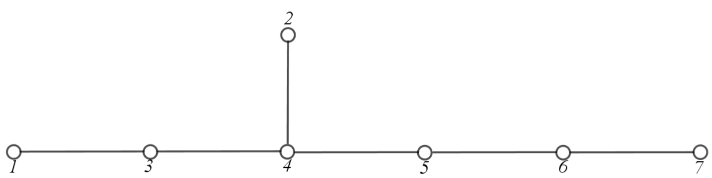
1. A_l $(l \geq 1)$: 

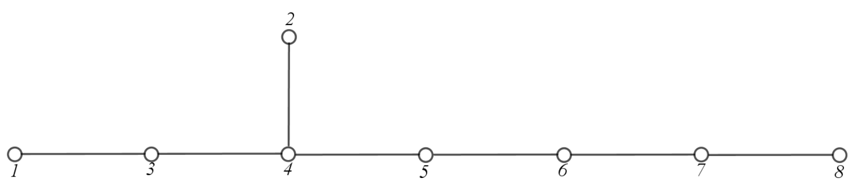
2. B_l $(l \geq 2)$: 

3. C_l $(l \geq 3)$: 

4. D_l $(l \geq 4)$: 

5. E_6 : 

6. E_7 : 

7. E_8 : 

8. F_4 : 

9. G_2 : 

y sus respectivas matrices de Cartan son

$$C^{A_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{B_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{C_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{D_l} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{E_6} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{E_7} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{E_8} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C^{F_4} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C^{G_2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

La restricción en l para los tipos A_l - D_l se imponen en orden para evitar duplicados. Una inspección de los diagramas antes listados muestra que en todos los casos excepto B_l, C_l los diagramas de Dynkin pueden ser deducidos de los grafos de Coxeter. Sin embargo B_l y C_l provienen del mismo grafo de Coxeter y difieren en el número de raíces simples cortas y largas.

Demostración. En la demostración lo que se pretende es clasificar los grafos de Coxeter, ignorando las longitudes relativas de las raíces, para luego ver los diagramas de Dynkin resultantes. Puesto que se ignoran las longitudes es más fácil, por el momento, trabajar con conjuntos de vectores unitarios. Para la demostración, se tendrá en cuenta las siguientes suposiciones:

- E es un espacio Euclidiano de cualquier dimensión.

- $\mathcal{A} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto de n vectores unitarios linealmente independientes que satisfacen $(e_i, e_j) \leq 0$ y $4(e_i, e_j)^2 = 0, 1, 2$ o 3 con $i \neq j$. A tal conjunto de vectores se lo denomina *admisible*.

A cada conjunto admisible se le asociara un grafo Γ con n vértices donde los vértices i y j están unidos por $4(e_i, e_j)^2$ aristas, con $i \neq j$. Ahora, la tarea es determinar todos los grafos conexos asociados a los conjuntos admisibles, esto incluye los grafos de Coxeter conexos. Esto se hará en pasos, el primero de los cuales es obvio.

1. Si alguno de los e_i es eliminado del conjunto $\mathcal{A}$, el conjunto resultante $\mathcal{A} - \{e_i\}$ sigue siendo un conjunto admisible, cuyo grafo se obtiene del anterior quitando el vértice correspondiente al e_i y las aristas que parten de él.

2. El número de pares de vértices en Γ unidos por al menos una arista es estrictamente menor que n. En efecto, sea $e = \sum_{i=1}^{n} e_i$, puesto que los e_i son L.I se tiene que $e \neq 0$. Así,

$$0 < (e, e) = n + 2 \sum_{i<j} (e_i, e_j).$$

Sean i, j un par de índices distintos para los cuales $(e_i, e_j) \neq 0$, es decir que los vértices i, j están conectados. Entonces $4(e_i, e_j)^2 = 1, 2$ o 3, en particular se tiene que $2(e_i, e_j) \leq -1$. Sea m el número de pares de vértices conectados por al menos una arista, luego se tiene que

$$0 < (e, e) = n + 2 \sum_{i<j} (e_i, e_j) = n + \sum_{i<j} 2(e_i, e_j) \leq n + m(-1) = n - m.$$

Por lo tanto $m < n$.

3. Γ no contiene ciclos. En efecto, Suponga que Γ contiene ciclos, el subconjunto $\mathcal{A}'$ de los vectores asociados a los vértices del ciclo sería un conjunto admisible por ítem 1. Ahora, en ese subconjunto el número de pares conectados, por al menos una arista, sería igual al cardinal de dicho conjunto, es decir por cada vector hay un único par conectado, él con el siguiente en el ciclo, por ejemplo. Pero esto contradice lo que dice el ítem 2, luego no puede haber ciclos.

4. No puede haber un vértice en Γ del que partan más de tres aristas. En efecto, sea e un elemento de $\mathcal{A}$ y $e_1, \ldots, e_k$ los vectores en $\mathcal{A}$ conectados con e, es decir, $(e, e_i) < 0$ con $e, e_1, \ldots, e_k$ distintos. Puesto que Γ no contiene ciclos, por ítem 3, no pueden haber dos e_i´s conectados, así $(e_i, e_j) = 0$ para $i \neq j$. Ahora, como $\mathcal{A}$ es L.I, debe haber algún vector unitario e_0 en el subespacio generado por $e, e_1, \ldots, e_k$, ortogonal a todos los e_i, claramente $(e, e_0) \neq 0$. Luego (por el método de Gram-Schmidt), $e_0, e_1, \ldots, e_k$ es un sistema ortonormal que genera el mismo subespacio que los $e, e_1, \ldots, e_k$, ademas $(e, e_j) = \alpha_i \sum_{i=0}^{k} (e_i, e_j) = \alpha_j$ y por tanto,

$e = \sum_{i=0}^{k} (e, e_i)e_i$ con lo cual se tiene $1 = (e, e) = \sum_{i=0}^{k} (e, e_i)^2$. Esto fuerza a que $\sum_{i=1}^{k} (e, e_i)^2 < 1$ o $\sum_{i=1}^{k} 4(e, e_i)^2 < 4$. Pero $4(e, e_i)^2$ es el número de aristas que conecta los vértices e y e_i en Γ.

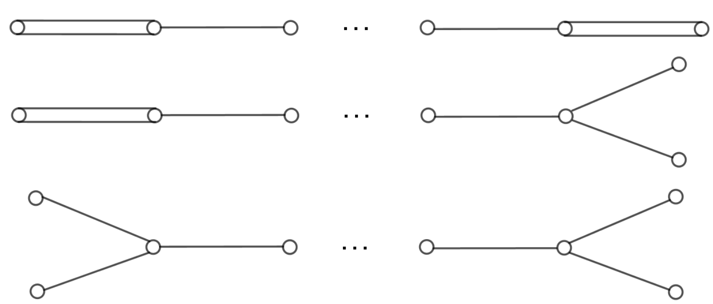
5. El único grafo conexo Γ posible, para un conjunto admisible $\mathcal{A}$, que contiene una arista triple, es decir un par de vértices unidos por tres aristas, es el grafo de Coxeter G_2: . Esto se deduce trivialmente del ítem anterior. Además, si G_2 tuviera otro vértice, este no estaría conectado con ningún otro, con lo cual G_2 no seria conexo.

6. Sea $\{e_1, \ldots, e_k\} \subset \mathcal{A}$ tal que el subgrafo asociado sea , una cadena simple en Γ. Si $\mathcal{A}' = (\mathcal{A} - \{e_1, \ldots, e_k\}) \cup \{e\}$, donde $e = \sum_{i=1}^{k} e_i$, entonces $\mathcal{A}'$ es admisible y el grafo se obtiene al reducir Γ a un solo vértice. En efecto, claramente $\mathcal{A}'$ es L.I, por tanto solo se debe probar las condiciones sobre los productos escalares. Por hipótesis $4(e_i, e_{i+1})^2 = 1$ con $1 \leq i \leq k - 1$ y debido a que son elementos de un conjunto admisible entonces $2(e_i, e_{i+1}) = -1$. Así,

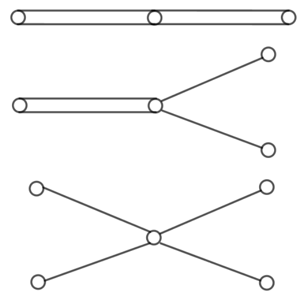
$$(e, e) = k + 2\sum_{i=1}^{k-1} (e_i, e_{i+1}) = k - (k - 1) = 1,$$

luego e es unitario. Claramente si $e_0 \in \mathcal{A} - \{e_1, \ldots, e_k\}$ solo se puede conectar con un e_i como mucho, puesto que si se conecta con dos de ellos, e_i, e_j, entonces $\{e_0, e_i, e_j\}$ formarían un ciclo lo que contradice el ítem 3. Se tiene que $(e, e_0) = 0$ si no está conectado con ningún e_i o $(e, e_0) = (e_i, e_0)$ si está conectado con e_i, en cualquier caso se tiene que $4(e, e_0)^2 = 0, 1, 2$ o 3 y $(e, e_0) \leq 0$ por lo tanto $\mathcal{A}'$ es admisible. Esto también determina el grafo asociado de $\mathcal{A}'$.

7. Γ no contiene subgrafos de la forma

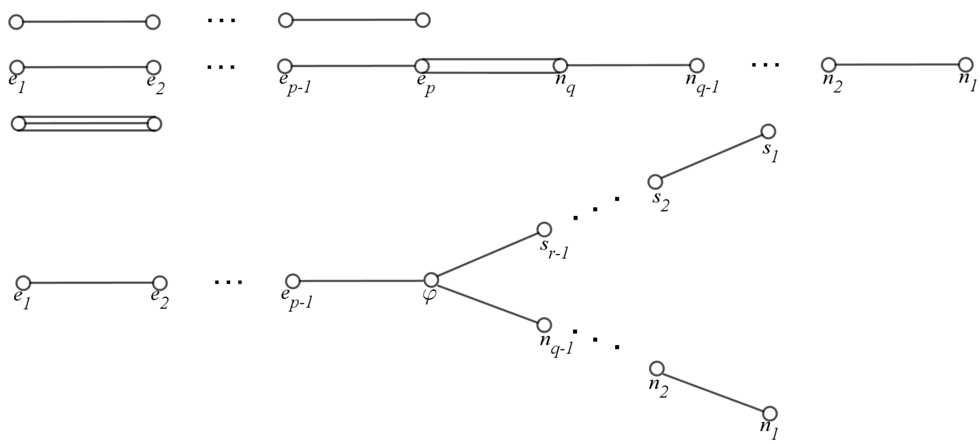


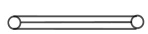
En efecto, Suponga que estos subgrafos ocurren en Γ. Por ítem 1, deben de ser las gráficas de subconjuntos admisibles, pero por el ítem 6, se puede eliminar la cadena simple en cada caso y obtener las gráficas



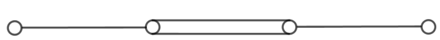
las cuales, evidentemente, contradicen el ítem 4.

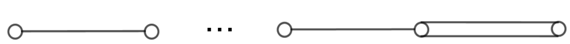
8. Cualquier grafo conexo Γ de un conjunto admisible tiene una de las siguientes formas



En efecto, solamente  contiene una arista triple, por ítem 5. Ahora, si tiene aristas dobles, observe que por ítem 7 no puede tener más de una, puesto que si tuviera dos, o más, contendría un subgrafo de la forma  lo cual contradice el ítem 7. Igualmente, si tiene una arista doble no puede tener una bifurcación porque en tal caso por el ítem 7 se llega a una contradicción, luego sería un grafo del segundo tipo. Si tiene alguna bifurcación con el mismo razonamiento se deduce que solo puede tener una y que además no puede tener aristas dobles por lo que tendríamos un grafo del cuarto tipo. Por último, si no tiene ni aristas triples, ni dobles, ni bifurcaciones, debe ser una cadena simple, es decir, un grafo del primer tipo.

9. Los únicos grafos del segundo tipo en el ítem 8 son los grafos de Coxeter

F_4 : 

$B_n (= C_n)$: .

En efecto, sean $e = \sum\limits_{i=1}^{p} ie_i$ y $n = \sum\limits_{j=1}^{q} jn_j$. Por hipótesis $2(e_i, e_{i+1}) = -1 = 2(n_j, n_{j+1})$ y los demás pares son ortogonales. Así,

$$(e,e) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$(n,n) = \sum_{j=1}^{q} j^2 - \sum_{j=1}^{q-1} j(j+1) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Ahora, puesto que $4(e_p, n_q)^2 = 2$ se tiene que

$$(e,n)^2 = \left(\sum_{i=1}^{p} ie_i, \sum_{j=1}^{q} jn_j \right)^2 = (pe_p, qn_q)^2 = p^2q^2(e_p, n_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}.$$

La desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que $(e,n)^2 \leq (e,e)(n,n)$, y dado que $\{e,n\}$ es L.I se tiene la desigualdad estricta $(e,n)^2 < (e,e)(n,n)$, sustituyendo

$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}$$

$$pq < \frac{(p+1)(q+1)}{2}$$

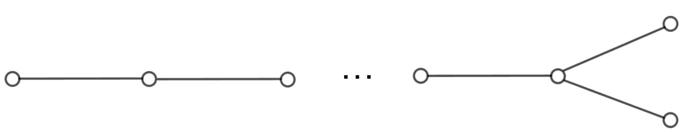
$$2pq < pq + p + q + 1$$

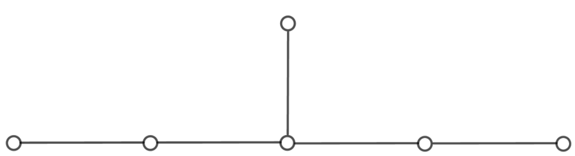
$$pq - p - q + 1 < 2$$

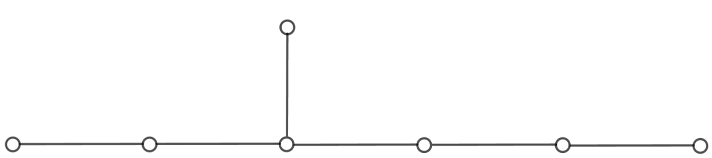
$$(p-1)(q-1) < 2.$$

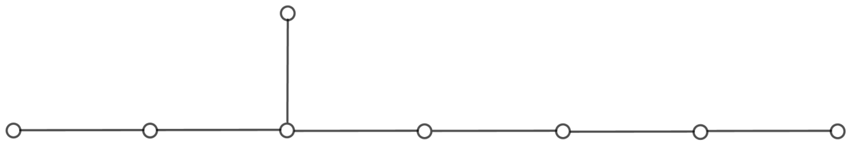
Luego, las únicas posibilidades son $p = q = 2$ de donde se obtiene F_4 ó $p = 1$ (q arbitrario), $q = 1$ (p arbitrario) donde se obtiene la otra posibilidad.

10. Los únicos grafos conexos del cuarto tipo en el ítem 8 son los grafos de Coxeter

D_n: 

E_6: 

E_7: 

E_8: 

En efecto, sean $e = \sum_{i=1}^{p-1} ie_i$, $n = \sum_{j=1}^{q-1} jn_j$ y $s = \sum_{k=1}^{r-1} ks_r$. Claramente $\{e, n, s\}$ es un conjunto de vectores L.I y mutuamente ortogonales, además φ no pertenece al espacio generado por estos tres vectores, es decir, $\{e, n, s, \varphi\}$ es L.I. Sean u_1, u_2, u_3 los vectores unitarios que tienen la misma dirección de los vectores e, n, s, respectivamente. Utilizando un argumento similar al utilizado al de la prueba del ítem 4, sea u_0 el vector unitario en el subespacio generado por $\{\varphi, u_1, u_2, u_3\}$ ortogonal a los vectores u_i, entonces $\sum_{i=0}^{3} (u_i, \varphi)^2 = 1$. Dado que $(u_0, \varphi) \neq 0$ se tiene $\sum_{i=1}^{3} (u_i, \varphi)^2 < 1$. Además,

$$(u_1, \varphi)^2 = \left(\frac{e}{\sqrt{(e,e)}}, \varphi \right)^2 = \frac{(e,\varphi)^2}{(e,e)} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{p-1} ie_i, \varphi \right)^2}{(e,e)}.$$

Luego,

$$(u_1, \varphi)^2 = \frac{(p-1)^2 (e_{p-1}, \varphi)^2}{(e,e)} = \frac{1}{4} \left(\frac{2(p-1)^2}{p(p-1)} \right) = \frac{p-1}{2p} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} \right).$$

De igual forma $(u_2, \varphi)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{q}\right)$ y $(u_3, \varphi)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)$. Sumando estas expresiones se obtiene

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r} \right) < 1,$$

entonces

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \tag{3.9.1}$$

Sin pérdida de generalidad se puede suponer que $p \geq q \geq r \geq 2$, ya que en el caso de p, q, o r sea igual a 1 se tendría un grafo del tipo A_n. Así que $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$, y por la desigualdad 3.9.1, se obtiene $\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} > 1$, luego $r = 2$. Entonces, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$ y se tiene $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$ luego $2 \leq q < 4$. Si $q = 2$, se tiene $r = 2$ y $p > 1$, en este caso el grafo resultante es el de D_n. Ahora si $q = 3$, entonces $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ y necesariamente $p < 6$, en este caso se tienen las posibilidades de los grafos E_6, E_7 o E_8.

■

En los diez pasos presentados anteriormente se prueba que todos los grafos de un conjunto admisible se encuentran entre los grafo de Coxeter listados al inicio del teorema, en particular, el grafo de Coxeter de un sistema de raíces debe ser uno de los mencionados en el teorema. Es claro que, a excepción de los tipos B_l y C_l, el diagrama de Dynkin queda determinado por el grafo de Coxeter.

Capítulo 4

Clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas

El propósito de este capítulo es la clasificación de las álgebras de Lie semisimples complejas de dimensión finita mediante diagramas de Dynkin. La clasificación consiste en mostrar que hay una relación biunívoca que asocia a cada clase de equivalencia de álgebras semisimples un solo diagrama y viceversa. En lo que sigue L denotará una álgebra de Lie semisimple compleja de dimensión finita.

4.1. Descomposición en espacios de raíces

En esta sección se presentan las Subálgebras de Cartan y un conjunto asociado al Dual de una subálgebra de Cartan el cual se probará que es un sistema de raíces bajo la definición 3.3 presentada en el Capítulo 3.

Definición 4.1 (**Subálgebra de Cartan**). Se dice que una subálgebra de Lie H de L es de Cartan, o CSA, si es abeliana, cada uno de sus elementos es semisimple y además es maximal con estas propiedades.

Para cada $x \in L$, la descomposición de Jordan garantiza que existen x_s y x_n en L tales que $x = x_s + x_n$ con x_s semisimple, x_n nilpotente y $[x_s, x_n] = 0$, Erdmann and Wildon (2006) [4]. Si $x_s = 0$ para todo $x \in L$, entonces todo elemento en L es nilpotente y por el Teorema 1.76 L es nilpotente, por lo tanto soluble, lo que contradice que L es semisimple. Luego existe $s \in L$ semisimple no nulo, así la colección de subálgebras abelianas no nulas de L que consta únicamente de elementos semisimples es no vacío puesto que $H = gen\{s\}$ es una de estas subálgebras y por el Lema de Zorn existe una subálgebra maximal con estas condiciones que por definición es una CSA de L.

Sea H una CSA de L, luego $ad_H = \{ad_h : h \in H\}$ es un conjunto de transformaciones lineales diagonalizables sobre L que conmutan mutuamente. Existe una base de L formada por vectores propios comunes a los elementos de ad_H, ver Apéndice B. Ahora, sea x un vector propio común para los elementos de ad_H y defina la función $\alpha : H \longrightarrow \mathbb{C}$ de la siguiente forma: para $h \in H$, sea $\alpha(h)$ el escalar que satisface $ad_h(x) = \alpha(h)x$. Se puede probar que α es un elemento del espacio dual H^*. Para cada $\alpha \in H^*$, sea $L_\alpha = \{x \in L : [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in H\}$. Dado que el corchete es bilineal y α es una transformación lineal se sigue que L_α es un subespacio de L, en particular, para $\alpha = 0$ se tiene el subespacio $L_0 = \{z \in L : [h, z] = 0, \text{ para todo } h \in H\} = C_L(H)$ y puesto que H es abeliana, $H \subset L_0$. Ahora, denote por Φ el conjunto de las transformaciones no nulas $\alpha \in H^*$ tales que $L_\alpha \neq \{0\}$, puesto que L es de dimensión finita, implica que Φ es finito. Cada elemento $\alpha \in \Phi$ se denomina raíz de H^* y el subespacio L_α se llama espacio de raíz asociado a α. Entonces, Erdmann and Wildon (2006) [4] presentan una descomponer en espacios de raíz para Lde la siguiente forma

$$L = L_0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha.$$

Teorema 4.2. *Si H es una CSA de L y C es el centralizador de H en L, se satisfacen los siguientes enunciados:*

(a) C contiene la parte semisimple y nilpotente de todos sus elementos.

(b) Todos los elementos semisimples de C están en H.

(c) La restricción de la forma de Killing a H es no degenerada.

(d) C es nilpotente.

(e) $H \cap [C, C] = 0$.

(f) C es abeliano.

(g) $C = H$.

Demostración.

(a) Sea $x \in C$, por la descomposición de Jordan $x = x_s + x_n$ y dado que x conmuta con H se tiene que $[x_s, H] = [x_n, H] = \{0\}$, entonces $x_s, x_n \in C$.

(b) Si $x \in C$ es semisimple, entonces $H + gen\{x\}$ es una subálgebra abeliana que consta de elementos semisimples, y por la maximalidad de H se tiene $H + gen\{x\} = H$, es decir $x \in H$.

(c) Primero se probará que la restricción de la forma de Killing a C es no degenerada. Sean $\beta, \alpha \in \Phi$ tales que $\beta + \alpha \neq 0$ se tiene que entonces existe $h \in H$ tal que $(\beta + \alpha)(h) \neq 0$, ahora para $x \in L_\alpha$ y $y \in L_\beta$, se tiene, usando la asociatividad de la forma Killing,

$$\alpha(h)\kappa(x, y) = \kappa([h, x], y) = -\kappa([x, h], y) = -\kappa(x, [h, y]) = -\beta(h)\kappa(x, y),$$

por lo tanto $(\alpha+\beta)(h)\kappa(x,y)=0$ lo que fuerza a que $\kappa(x,y)=0$, es decir $\kappa(L_\alpha,L_\beta)=\{0\}$. Ahora, sea $h\in C$ tal que $[h,x]=0$, para todo $x\in C$, y sea $z\in L$, por la descomposición en espacios de raíces $z=z_0+\sum\limits_{\alpha\in\Phi} z_\alpha$, donde $z_0\in C$ y $z_\alpha\in L_\alpha$. Luego,

$$\kappa(h,z)=\kappa(h,z_0)+\sum_{\alpha\in\Phi}\kappa(h,z_\alpha)=0,$$

entonces $h=0$. Ahora, sea $h\in H$ tal que $\kappa(h,x)=0$ para todo $x\in H$ y sea $z\in C$ con descomposición de Jordan $z=z_s+z_n$, entonces $z_s,z_n\in C$ y $z_s\in H$. Luego, $\kappa(h,z)=\kappa(h,z_n)$. Dado que $z_n\in C$, $[h,z_n]=0$ entonces $ad_h\circ ad_{z_n}=ad_{z_n}\circ ad_h$. Así, $(ad_h\circ ad_{z_n})^k=ad_h^k\circ ad_{z_n}^k=0$, porque z_n es nilpotente, por lo tanto $tr(ad_h\circ ad_{z_n})=\kappa(h,z_n)=0$, con lo cual $\kappa(h,z)=0$ para todo $z\in C$, así $h=0$.

(d) C es nilpotente. Si $x\in C$ es semisimple, entonces $x\in H$ por ítem (b), y $ad_x(C)=0$ es nilpotente. Por otra parte, si $x\in C$ es arbitrario, $x=x_s+x_n$. Puesto que x_s,x_n están en C, ítem (a), $ad_x(C)$ es la suma de conmutadores nilpotentes y, por lo tanto, es nilpotente. Por el Teorema 1.76, C es nilpotente.

(e) $H\cap[C,C]=0$. Puesto que κ es asociativa y $[H,C]=0$, $\kappa(H,[C,C])=0$. Usando el ítem (c) se tiene el resultado.

(f) C es abeliano. Observe que $Z(C)\neq\{0\}$ porque C es nilpotente, ahora sea $z\in Z(C)$, donde $z=z_s+z_n$ con $z_s,z_n\in C$ y $z_n\in Z(C)$, además $z_n\neq 0$. Luego, $\kappa(z_n,C)=0$ lo cual es una contradicción.

(g) $C=H$. De no ser así C contiene un elemento nilpotente no nulo x. Luego, para todo $y\in C$ se tiene que $\kappa(x,y)=tr(ad_x\circ ad_y)=0$, lo cual es una contradicción.

■

El Teorema 4.2 permite que la descomposición de suma directa de L en espacios de raíces se pueda escribir como $L=H\oplus\bigoplus\limits_{\alpha\in\Phi}L_\alpha$, la cual se denomina descomposición del espacio raíz. Cabe señalar que las raíces y los espacios de raíces dependen de la elección de la CSA H.

Proposición 4.3. *La función $\theta:H\longrightarrow H^*$ que asigna a cada elemento $h\in H$ la aplicación θ_h definida por $\theta_h(x)=\kappa(h,x)$ para todo $x\in H$ es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. Para cada $h\in H$, la aplicación $\theta_h\in H^*$ porque la forma de Killing es bilineal. Para mostrar que θ es una transformación lineal, sean $h_1,h_2\in H$, $a\in\mathbb{C}$ y $x\in H$, se tiene

$$\theta_{h_1+ah_2}(x)=\kappa(h_1+ah_2,x)=\kappa(h_1,x)+a\kappa(h_2,x)=\theta_{h_1}(x)+a\theta_{h_2}(x).$$

Luego, $\theta_{h_1+ah_2}=\theta_{h_1}+a\theta_{h_2}$. Por otro lado $ker(\theta)=\{0\}$ porque la forma de Killing es no degenerada en H. Finalmente, la sobreyectividad de θ es consecuencia de que $\dim H=\dim H^*$. ■

Observación 4.4. Por la proposición anterior, para cada $\alpha \in H^*$ existe un único elemento t_α en H tal que $\theta_{t_\alpha} = \alpha$, y se tiene la siguiente definición.

Definición 4.5 (**Forma de Killing en** H^***).** Sea H una CSA de L. La forma de Killing en el espacio dual H^* se define como: $\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta)$, para todo $\alpha, \beta \in H^*$.

Lema 4.6. *Suponga que $\alpha \in \Phi$ y que $x \in L_\alpha$, con $x \neq 0$. Entonces $-\alpha$ es una raíz y existe $y \in L_{-\alpha}$ tal que $gen\{x, y, [x, y]\}$ es una subálgebra de L isomorfa a $sl_2(\mathbb{C})$.*

Demostración. Primero se afirma que existe $y \in L_{-\alpha}$ tal que $\kappa(x, y) \neq 0$ y $[x, y] \neq 0$. En efecto, sea $x \in L_\alpha$, $x \neq 0$. Dado que κ es no degenerada en L, existe $w \in L$ tal que $\kappa(x, w) \neq 0$. Por la descomposición en espacios de raíz, $w = y_0 + \sum\limits_{\beta \in \Phi} y_\beta$, se tiene

$$\kappa(x, w) = \kappa\left(x, y_0 + \sum_{\beta \in \Phi} y_\beta\right) = \kappa(x, y_0) + \kappa(x, y_{-\alpha}) + \kappa\left(x, \sum_{\substack{\beta \in \Phi \\ \beta \neq -\alpha}} y_\beta\right).$$

Por otro lado, para $\beta, \alpha \in \Phi$ con $\beta + \alpha \neq 0$ se tiene que $\kappa(L_\alpha, L_\beta) = 0$. Así, $\kappa(x, w) = \kappa(x, y_{-\alpha}) \neq 0$, con lo cual se tiene que $y_{-\alpha} \neq 0$, es decir, $L_{-\alpha} \neq \{0\}$ entonces $-\alpha \in \Phi$, así se toma $y = y_{-\alpha}$. Puesto que $\alpha \neq 0$, existe $t \in H$ tal que $\alpha(t) \neq 0$ y $\kappa(t, [x, y]) = \kappa([t, x], y) = \alpha(t)\kappa(x, y) \neq 0$, así $[x, y]$ es un vector no nulo de H. Sea $S = gen\{x, y, [x, y]\}$, puesto que x y y son vectores propios para todo elemento de ad_H, en particular para $ad_{[x,y]}$, y se tiene que $[x, [x, y]] = -ad_{[x,y]}(x) = -\alpha([x, y])x \in S$ de igual forma $[y, [x, y]] = -\alpha([x, y])y \in S$, esto muestra que S es una subálgebra de L. Resta probar que S es isomorfa a $sl_2(\mathbb{C})$. Para probar que $\dim S = 3$, observe que $\alpha([x, y]) \neq 0$ porque en caso contrario $[[x, y], x] = [[x, y], y] = 0$, luego $[x, y]$ es nilpotente pero $[x, y] \in H$ y H es una CSA, así $[x, y]$ es semisimple, por lo tanto $[x, y] = 0$, lo cual contradice que $[x, y] \neq 0$. Ahora, sean $a, b, c \in \mathbb{C}$ tales que $ax + by + c[x, y] = 0$ se tiene

$$[[x, y], ax + by + c[x, y]] = 0$$

$$a[[x, y], x] + b[[x, y], y] + 0 = 0$$

$$a\alpha([x, y])x - b\alpha([x, y])y = 0$$

$$\alpha([x, y])(ax - by) = 0$$

entonces $ax - by = 0$, pero $x \in L_\alpha$ y $y \in L_{-\alpha}$ así $a = b = 0$ y $c = 0$. Por otro lado $S' = [S, S] = S$. Con lo cual S es una álgebra de Lie compleja 3-dimensional con $S' = S$. Por lo tanto S es isomorfa a $sl_2(\mathbb{C})$. ■

Lema 4.7. *Sea $\alpha \in \Phi$. Si $x \in L_\alpha$ y $y \in L_{-\alpha}$, entonces $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$.*

Demostración. Para $h \in H$, se tiene $\kappa(h,[x,y]) = \kappa([h,x],y) = \alpha(h)\kappa(x,y) = \kappa(t_\alpha,h)\kappa(x,y)$. Ahora, observe a $\kappa(x,y)$ como un escalar y se reescribe el lado derecho para obtener

$$\kappa(h,[x,y]) = \kappa(h,\kappa(x,y)t_\alpha).$$

Esto muestra que H es ortogonal a $[x,y]-\kappa(x,y)t_\alpha$, con lo cual $[x,y]=\kappa(x,y)t_\alpha$, pues κ restringido a H no es degenerado. ■

Observación 4.8. Sea $\alpha \in \Phi$, por el Lema 4.6 existen $x \in L_\alpha$, $y \in L_{-\alpha}$ y $h=[x,y] \in H$ tales que $S = gen\{x,y,h\}$ es una subálgebra de Lie isomorfa a $sl_2(\mathbb{C})$. Además, por el Lema 4.7 $h = \kappa(x,y)t_\alpha$. Sea $\lambda = \frac{2}{\alpha(t_\alpha)\kappa(x,y)}$ y considere $e_\alpha = x \in L_\alpha$, $f_\alpha = \lambda y \in L_{-\alpha}$ y $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha] = \lambda[x,y] \in H$, entonces $S = gen\{e_\alpha, f_\alpha, h_\alpha\}$. Ahora, defina $\gamma : sl_2(C) \longrightarrow S$, por $\gamma(e)=e_\alpha$, $\gamma(f)=f_\alpha$, $\gamma(h)=h_\alpha$ y se tiene que

- $\gamma([e,f]) = \gamma(h) = h_\alpha = [e_\alpha,f_\alpha] = [\gamma(e),\gamma(f)]$.
- $\gamma([h,e]) = \gamma(2e) = 2\gamma(e) = 2e_\alpha$, por otro lado

  $$[\gamma(h),\gamma(e)] = [h_\alpha,e_\alpha] = [\lambda h,x] = \lambda\alpha(h)x = \frac{2\alpha(h)x}{\alpha(t_\alpha)\kappa(x,y)} = \frac{2\kappa(x,y)\alpha(t_\alpha)x}{\alpha(t_\alpha)\kappa(x,y)} = 2x = 2e_\alpha,$$

  por lo tanto $\gamma([h,e]) = [\gamma(h),\gamma(e)]$.
- Análogamente se tiene que $\gamma([h,f]) = [\gamma(h),\gamma(f)]$.

De lo anterior se puede ver que $\alpha(h_\alpha) = \alpha(\lambda h) = \lambda\kappa(x,y)\alpha(t_\alpha) = \frac{2\kappa(x,y)\alpha(t_\alpha)}{\alpha(t_\alpha)\kappa(x,y)} = 2$.

Proposición 4.9. *Si $\alpha \in \Phi$, entonces los únicos múltiplos de α que se encuentran en Φ son $\pm\alpha$. Además, los espacios de raíces $L_{\pm\alpha}$ son 1-dimensionales.*

Demostración. Suponga que $c\alpha$ es una raíz para algún escalar $c \neq \pm 1$. Considere el subespacio $K = ker(\alpha) \oplus gen\{h_\alpha\} \subset H$, sea $M = K \oplus \bigoplus_{r\alpha\in\Phi} L_{r\alpha}$ y la acción $\varphi : sl_\alpha \times M \longrightarrow M$ definida mediante $\varphi((x,m)) = ad_x(m) = [x,m]$, luego M es un sl_α-módulo, y observe que $Ker(\alpha) \oplus sl_\alpha$ es un sl_α-submódulo de M contenido en $K \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$. Dado que sl_α es una álgebra de Lie simple, por el Teorema de Weyl **??**, existe un sl_α-submódulo $W \subset M$ tal que $M = Ker(\alpha) \oplus sl_\alpha \oplus W$, además $W \neq \{0\}$ porque $c \neq \pm 1$. Dado que $c\alpha$ es una raíz, existe un vector no nulo $x \in L_{c\alpha}$ tal que $[h,x] = c\alpha(h)x = 2cx$, para todo $h \in H$. Sea V un sl_α-submódulo irreducible de W tal que $x \in V$, por el Teorema 1.63, $V \cong V_d$ para algún $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ y por la Observación 1.64 los valores propios de la transformación $ad_{h_\alpha} : V \longrightarrow V$ son $\{d-2j : 0 \leq j \leq d\}$, en particular

$$ad_{h_\alpha}(x) = c\alpha(h_\alpha)x = 2cx,$$

es decir, $2c \in \{d-2j : 0 \leq j \leq d\}$, por lo tanto, d es par y 0 es un valor propio de ad_{h_α}, es decir, existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $[h_\alpha, v] = 0 = 0v$. Pero $v \in L_{r\alpha}$ para algún escalar r

diferente de cero, entonces $0 = [h_\alpha, v] = r\alpha(h_\alpha)v = 2rv$. Lo que es una contradicción pues $v \neq 0$. Por lo tanto los únicos múltiplos de α que se encuentran en Φ son $\pm\alpha$. Para completar la prueba suponga que $\dim L_\alpha \geq 2$ para algún $\alpha \in \Phi$ y considere el sl_α-módulo $M = K \oplus L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$. Con un argumento similar al anterior existe un sl_α-submódulo W tal que $M = Ker(\alpha) \oplus sl_\alpha \oplus W$, además $W \cap L_\alpha \neq \{0\}$. Sea x un vector no nulo en $W \cap L_\alpha$ y sea V un sl_α un submódulo irreducible de W tal que $x \in V$, entonces $ad_{h_\alpha}(x) = [h_\alpha, x] = 2x$. Luego 0 es un valor propio de ad_{h_α} y existe un vector no nulo $v \in V$ tal que $[h_\alpha, v] = 0$. Pero $v \in L_\alpha \oplus L_{-\alpha}$, entonces $v = v_1 + v_2$ para $v_1 \in L_\alpha$ y $v_2 \in L_{-\alpha}$ y se tiene $0 = [h_\alpha, v] = [h_\alpha, v_1 + v_2] = \alpha(h_\alpha)v_1 - \alpha(h_\alpha)v_2 = 2(v_1 - v_2)$, entonces $v_1 - v_2 = 0$ y dado que la suma es directa se sigue $v_1 = v_2 = 0$, así $v = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $\dim L_\alpha = 1$ para todo $\alpha \in \Phi$. ■

Proposición 4.10. *Suponga que $\alpha, \beta \in \Phi$ y $\beta \neq \pm\alpha$.*

(a) $\beta(h_\alpha) \in \mathbb{Z}$.

(b) Existen enteros $r, q \geq 0$ tales que $\beta + k\alpha \in \Phi$ si y solo si $k \in \mathbb{Z}$ y $-r \leq k \leq q$. Además, $r - q = \beta(h\alpha)$.

(c) Si $\alpha + \beta \in \Phi$, entonces $[x_\alpha, x_\beta]$ es un múltiplo escalar no nulo de $x_{\alpha+\beta}$.

(d) $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha \in \Phi$.

Demostración. Para probar el primer enunciado, considere el sl_α-módulo $M = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} L_{\beta+k\alpha}$, denominado la cadena de raíz de α a través de β. Por el Teorema de Weyl **??** todo sl_α-módulo es completamente reducible, luego, existen submódulos irreducibles $M_1, \ldots, M_t$ tales que $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$, y por la Observación 1.64 los valores propios de ad_{h_α} en cada submódulo M_i son enteros, entonces, los valores propios de ad_{h_α} en M son enteros. Ahora, tomando un vector no nulo $x \in L_\beta$ se tiene $ad_{h_\alpha}(x) = [h_\alpha, x] = \beta(h_\alpha)x$, es decir, $\beta(h_\alpha)$ es un valor propio de ad_{h_α} en M, y por lo tanto debe ser un elemento de $\mathbb{Z}$.

Para el segundo enunciado, se probará que M es irreducible. Como antes, sea $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ la descomposición de M en submódulos irreducibles y observe que $(\beta + k\alpha)h_\alpha = \beta(h_\alpha) + 2k$, entonces los valores propios de ad_{h_α} en M son todos pares o impares. Sin perdida de generalidad, suponga que todos los valores propios de ad_{h_α} en M son pares. Luego, existen vectores propios $x_1 \in M_1$ y $x_2 \in M_2$ asociados al valor propio 0, entonces $[h_\alpha, x_1] = 0 = [h_\alpha, x_2]$. Además, $x_1 \in L_{\beta+k_1\alpha}$ y $x_2 \in L_{\beta+k_2\alpha}$, para algún par de enteros k_1 y k_2, en consecuencia

$$(\beta(h_\alpha) + 2k_1)x_1 = 0 = (\beta(h_\alpha) + 2k_2)x_2.$$

Luego, $-2k_1 = \beta(h_\alpha) = -2k_2$ entonces $k_1 = k_2$, por tanto $x_1, x_2 \in L_{\beta+k_2\alpha}$, dado que $\dim L_{\beta+k\alpha} = 1$ siempre que $\beta + k\alpha$ sea una raíz, se tiene $x_1 \in gen\{x_2\} \subset M_2$. Con lo cual $M_1 \cap M_2 \neq \{0\}$ y dado que la suma es directa se debe tener $M_1 = M_2$. Por lo tanto M es un sl_α-módulo irreducible de dimensión

finita. Por el Teorema 1.63 $M \cong V_d$ para algún $d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. En V_d, los valores propios de ad_{h_α} son $\{d-2j : 0 \leq j \leq d\}$, mientras que en M, los valores propios de ad_{h_α} son $\{\beta(h_\alpha)+2k : \beta+k\alpha \in \Phi\}$. Estos conjuntos son iguales porque $M \cong V_d$, luego existe un único entero q tal que $d-2q = \beta(h_\alpha)$ y $0 \leq q \leq d$, así que, $-d = \beta(h_\alpha)+2(q-d)$. Tomando $r = d-q \geq 0$ se tiene que los valores propios de ad_{h_α} son $\{\beta(h_\alpha)+2k : -r \leq k \leq q\}$, es decir, $\beta+k\alpha \in \Phi$ si y solamente si $-r \leq k \leq q$.
Para probar el tercer enunciado, sean q y r los enteros dados en el segundo enunciado, entonces $M = \bigoplus_{k=-r}^{q} L_{\beta+k\alpha}$. Dado que $\beta+\alpha \in \Phi$, se tiene $q \geq 1$. Observe que si $[x_\alpha, x_\beta] = 0$, entonces $[x_\alpha, w] = 0$, para todo $w \in L_\beta$. En consecuencia $V = \bigoplus_{k=-r}^{0} L_{\beta+k\alpha} \subset M$, es un sl_α-submódulo no trivial de M, con lo cual M es reducible, lo que contradice el hecho que M es irreducible. Ahora, puesto que $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta}$, entonces $[x_\alpha, x_\beta] = tx_{\alpha+\beta}$, con $t \in \mathbb{Z}$.
Finalmente, el cuarto enunciado se sigue del segundo, puesto que, del párrafo anterior se tiene $\beta(h_\alpha) = d-2q$ y $\beta(h_\alpha) = 2r-d$, con lo cual al sumas estas dos igualdades resulta $\beta(h_\alpha) = r-q$. Así, $\beta - \beta(h_\alpha)\alpha = \beta-(r-q)\alpha$ y $-r \leq -r+q \leq q$. ■

Lema 4.11. *El conjunto de raíces satisface los siguientes enunciados.*

(a) Para cada $h \in H$, con $h \neq 0$, existe $\alpha \in \Phi$ tal que $\alpha(h) \neq 0$.

(b) $gen\Phi = H^*$

Demostración. Para probar el primer enunciado, sea h un vector de H y suponga que $\alpha(h) = 0$ para todo $\alpha \in \Phi$ y sea x un elemento arbitrario de L. Si $x \in H$ entonces $[h, x] = 0$, en caso contrario, por la descomposición de L en espacios de raíces, $x \in L_\alpha$ para algún $\alpha \in \Phi$, entonces $[h, x] = \alpha(h)x = 0$, por lo tanto $h \in Z(L)$ y dado que L es semisimple se sigue que $Z(L) = \{0\}$, es decir, $h = 0$. Ahora, para probar el segundo enunciado, sea $W = gen\Phi$ y sea W^0 el espacio anulador de W, definido por $W^0 = \{h \in H : \alpha(h) = 0 \text{ para todo } \alpha \in W\}$. Un resultado conocido del álgebra Lineal establece que $\dim H^* = \dim W + \dim W^0$, y por el enunciado anterior $W^0 = \{0\}$, entonces

$$\dim H^* = \dim W + 0 = \dim W.$$

Por lo tanto $W = H^*$. ■

Proposición 4.12. *Para cada $\alpha \in \Phi$ se tiene:*

(a) $t_\alpha = \frac{h_\alpha}{\kappa(e_\alpha, f_\alpha)}$ y $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}$

(b) $\kappa(t_\alpha, t_\alpha)\kappa(h_\alpha, h_\alpha) = 4$

Demostración. Del Lema 4.7 se tiene que $[x, y] = \kappa(x, y)t_\alpha$. Aplicado con $x = e_\alpha$, $y = f_\alpha$ y $h_\alpha = [e_\alpha, f_\alpha]$ en esta igualdad se tiene la expresión para t_α. Puesto que $\alpha(h_\alpha) = 2$, se tiene que

$2 = \kappa(t_\alpha, h_\alpha) = \kappa(t_\alpha, \kappa(e_\alpha, f_\alpha)t_\alpha)$, lo que implica que $\kappa(e_\alpha, f_\alpha)\kappa(t_\alpha, t_\alpha) = 2$. Ahora, se sustituye $\kappa(e_\alpha, f_\alpha)$ para obtener la segunda expresión. Finalmente, el ítem (b) se obtiene de

$$\kappa(h_\alpha, h_\alpha) = \kappa\left(\frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}, \frac{2t_\alpha}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}\right) = \frac{4}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)}.$$

■

Un resultado inmediato es el siguiente.

Corolario 4.13. *Si α y β son raíces, entonces $\kappa(h_\alpha, h_\beta) \in \mathbb{Z}$ y $\kappa(t_\alpha, t_\beta) \in \mathbb{Q}$.*

Por el Lema 4.11 se tiene que el conjunto de raíces Φ generan al espacio dual H^*, luego existe una base de H^* contenida en Φ, con esto se tiene el siguiente lema:

Lema 4.14. *Sea $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\} \subset \Phi$ una base de H^*. Si β es una raíz, entonces β es una combinación lineal de los α_i con coeficientes en $\mathbb{Q}$.*

Demostración. Ciertamente se puede escribir $\beta = \sum_{i=1}^{l} c_i\alpha_i$, con $c_i \in \mathbb{C}$. Utilizando la forma de Killing en el espacio dual H^*, ver definición 4.5, para cada j con $1 \leq j \leq l$, se tiene $\kappa(\beta, \alpha_j) = \sum_{i=1}^{l} c_i\kappa(\alpha_i, \alpha_j)$. Se pueden escribir estas ecuaciones utilizando matrices como

$$\begin{pmatrix} \kappa(\beta, \alpha_1) \\ \vdots \\ \kappa(\beta, \alpha_l) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa(\alpha_1, \alpha_1) & \cdots & \kappa(\alpha_1, \alpha_l) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(\alpha_l, \alpha_1) & \cdots & \kappa(\alpha_l, \alpha_l) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_l \end{pmatrix}$$

Donde $(\kappa(\alpha_i, \alpha_j))_{l\times l}$, es la matriz de la forma de Killing en H^* con respecto a la base $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$, por lo que es invertible. Además, por el Corolario 4.13 sus entradas son números racionales, así que las entradas de su matriz inversa también son racionales. Dado que $(\beta, \alpha_j) \in \mathbb{Q}$, los coeficientes c_i son racionales. ■

Proposición 4.15. *Sean H una CSA de L y Φ el conjunto de raíces de H^*. Si $E = gen_{\mathbb{R}}\Phi$, entonces la forma de Killing en H^* es un producto interno real sobre E.*

Demostración. Sea $\{h_1, \dots, h_r\}$ una base de H, y para cada $\gamma \in \Phi$, sea $L_\gamma = gen\{x_\gamma\}$. Por la descomposición en espacios de raíces $B = \{h_1, \dots, h_r\} \cup \{x_\gamma : \gamma \in \Phi\}$ es una base de L. Para $\alpha, \beta \in E$ se tiene $ad_{t_\alpha} \circ ad_{t_\beta}(h_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, r$. Además, para todo $\gamma \in \Phi$

$$ad_{t_\alpha} \circ ad_{t_\beta}(x_\gamma) = \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)x_\gamma.$$

Luego, $\kappa(\alpha, \beta) = tr(ad_{t_\alpha} \circ ad_{t_\beta}) = \sum_{\gamma\in\Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\beta)$. En particular, para $\alpha = \beta$ se tiene

$$\kappa(\alpha, \alpha) = \sum_{\gamma\in\Phi} \gamma(t_\alpha)\gamma(t_\alpha).$$

Pero, $\alpha = \sum\limits_{\sigma \in \Phi} a_\sigma \sigma$, donde $a_\sigma \in \mathbb{R}$ para todo $\sigma \in \Phi$. Así,

$$\gamma(t_\alpha) = \gamma\left(\sum_{\sigma\in\Phi} a_\sigma t_\sigma\right) = \sum_{\sigma\in\Phi} a_\sigma \gamma(t_\sigma) = \sum_{\sigma\in\Phi} a_\sigma \kappa(t_\gamma, t_\sigma).$$

Por Corolario 4.13 $\kappa(t_\gamma, t_\sigma) \in \mathbb{Q}$, luego que $\gamma(t_\alpha) \in \mathbb{R}$ y se tiene $\kappa(\alpha, \alpha) \geq 0$. Además, $\kappa(\alpha, \alpha) = 0$ si y solo si $\gamma(t_\alpha) = 0$ para todo $\gamma \in \Phi$, pero $\gamma(t_\alpha) = \kappa(t_\gamma, t_\alpha) = \alpha(t_\gamma)$. Luego, $\alpha(t_\gamma) = 0$ para todo $\gamma \in \Phi$, por el isomorfismo 4.3 $gen\{t_\gamma : \gamma \in \Phi\} = H$, por lo tanto $\alpha = 0$. La bilinealidad y la simetría son propiedades de la forma de Killing, esto finaliza la prueba. ∎

Como consecuencia de todos los resultados estudiados en esta sección, se tiene el siguiente teorema:

Teorema 4.16. *Si H una CSA de L y Φ es el conjunto de raíces de H^*, entonces Φ es un sistema de raíces (ver definición 3.3) para el espacio Euclidiano $E = gen_{\mathbb{R}}\Phi$.*

Demostración. Por la la Proposición 4.15, el espacio E es Euclidiano con producto interno definido por la forma de Killing en H^* y dado que $0 \notin \Phi$ se satisface la primera condición de la definición de sistema de raíces. La segunda condición es consecuencia de la Proposición 4.9. Las dos condiciones restantes son consecuencia de la Proposición 4.10 y del hecho que

$$\beta(h_\alpha) = \kappa(t_\beta, t_\alpha) = \frac{2\kappa(t_\beta, t_\alpha)}{\kappa(t_\alpha, t_\alpha)} = \frac{2\kappa(\beta, \alpha)}{\kappa(\alpha, \alpha)}.$$

∎

4.2. Álgebras semisimples isomorfas

En esta sección se presentan los resultados que justifican el teorema de clasificación de las $\mathbb{C}$-álgebras de Lie semisimples de dimensión finita.

Proposición 4.17. *Sea $\varphi : L \longrightarrow L'$ un epimorfismo de álgebras de Lie. Si H es una CSA de L, entonces $\varphi(H)$ es una CSA de L'. Además, para todo $x, y \in L$ se tiene que $\kappa(x, y) = \kappa(\varphi(x), \varphi(y))$.*

Demostración. Por el Teorema 1.74, $\varphi(H)$ es nilpotente y dado que H es abeliana también lo es $\varphi(H)$. Para la segunda parte, sea H' una subálgebra abeliana y nilpotente de L' tal que $\varphi(H) \subset H'$, entonces $\varphi^{-1}(H')$ es una subálgebra abeliana y nilpotente de L tal que $H \subset \varphi^{-1}(H)'$, luego, se tiene $H = \varphi^{-1}(H')$, o equivalentemente $\varphi(H) = H'$. Por lo tanto $\varphi(H)$ es una CSA de L'. Para la segunda parte, sean $x, y \in L$, luego $\kappa(x, y) = tr(ad_x \circ ad_y)$. Por otro lado, $\kappa(\varphi(x), \varphi(y)) = tr(ad_{\varphi(x)} \circ ad_{\varphi(y)})$, para $\varphi(x), \varphi(y) \in L'$. Ahora, sea $z \in L'$ entonces $(ad_{\varphi(x)} \circ ad_{\varphi(y)})(z) = [\varphi(x), [\varphi(y), z]]$, pero, existe un único $w \in L$ tal que $\varphi(w) = z$. Luego,

$$[\varphi(x), [\varphi(y), \varphi(w)]] = \varphi([x, [y, w]]) = \varphi(ad_x \circ ad_y)(w) = \varphi(ad_x \circ ad_y)\varphi^{-1}(z),$$

con lo cual $ad_{\varphi(x)} \circ ad_{\varphi(y)} = \varphi \circ ad_x \circ ad_y \circ \varphi^{-1}$, y por la la propiedad $tr(AB) = tr(BA)$, se tiene $\kappa(\varphi(x), \varphi(y)) = tr(\varphi \circ ad_x \circ ad_y \circ \varphi^{-1}) = \kappa(x, y)$. ∎

Teorema 4.18. *Sea $\varphi : L \longrightarrow L'$ un isomorfismo de álgebras de Lie y sean H_1 y H_2 CSA de L y L' respectivamente tal que $\varphi(H_1) = H_2$. Si Φ_i es el conjunto de raíces de H_i y $\alpha, \beta \in \Phi_1$, entonces se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $\alpha \circ \varphi^{-1} \in \Phi_2$, *además* $\Phi_1\varphi^{-1} = \{\alpha \circ \varphi^{-1} : \alpha \in \Phi_1\} = \Phi_2$.

(b) $\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(\alpha \circ \varphi^{-1}, \beta \circ \varphi^{-1})$.

Demostración. Para probar el primer enunciado, se sabe que para cada $\alpha \in \Phi_1$ existe $x \neq 0$ tal que $[h, x] = \alpha(h)x$ para todo $h \in H_1$. Observe que $[\varphi(h), \varphi(x)] = \varphi([h, x]) = \varphi(\alpha(h)x) = \alpha(h)\varphi(x)$. Ahora, sea $h_2 \in H_2$, dado que $\varphi(H_1) = H_2$, existe un único $h_1 \in H_1$ tal que $\varphi(h_1) = h_2$, entonces

$$[h_2, \varphi(x)] = [\varphi(h_1), \varphi(x)] = \varphi([h_1, x]) = \alpha(h_1)\varphi(x) = \alpha \circ \varphi^{-1}(h_2)\varphi(x),$$

además $\varphi(x) \neq 0$, entonces $L_{\alpha\circ\varphi^{-1}} \neq \{0\}$, esto muestra que $\alpha \circ \varphi^{-1}$ es una raíz para H_2, luego, $\Phi_1\varphi^{-1} \subset \Phi_2$. Análogamente, $\Phi_2\varphi \subset \Phi_1$ y se tiene $\Phi_1 = (\Phi_1\varphi^{-1})\varphi \subset \Phi_2\varphi \subset \Phi_1$ por lo tanto $\Phi_1 = \Phi_2\varphi$ y análogamente $\Phi_1\varphi^{-1} = \Phi_2$. Para el segundo enunciado, se sabe que para cada $\alpha \in \Phi_1$ existe un único $t_\alpha \in H_1$ tal que $\kappa(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ para todo $h \in H_1$. Dado que $\alpha \circ \varphi^{-1} \in \Phi_2$ existe un único $l_{\alpha\circ\varphi^{-1}} \in H_2$ tal que $\kappa(l_{\alpha\circ\varphi^{-1}}, h_2) = \alpha \circ \varphi^{-1}(h_2)$, para todo $h_2 \in H_2$. Escoja $h_2 \in H_2$ y sea h_1 el único elemento en H_1 tal que $\varphi(h_1) = h_2$, se tiene

$$\kappa(\varphi(t_\alpha), h_2) = \kappa(\varphi(t_\alpha), \varphi(h_1)) = \kappa(t_\alpha, h_1) = \alpha(h_1) = \alpha \circ \varphi(h_2).$$

Luego, $l_{\alpha\circ\varphi^{-1}} = \varphi(t_\alpha)$, así que

$$\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(t_\alpha, t_\beta) = \kappa(\varphi(t_\alpha), \varphi(t_\beta)) = \kappa(l_{\alpha\circ\varphi^{-1}}, l_{\beta\circ\varphi^{-1}}) = \kappa(\alpha \circ \varphi^{-1}, \beta \circ \varphi^{-1}).$$

■

Teorema 4.19. *Si L una álgebra de Lie semisimple compleja, entonces cualquier dos subálgebras de Cartan H_1, H_2 son conjugadas bajo algún automorfismo $\phi \in Inn\ L$.*

La prueba de este teorema se puede ver a detalle en Rodríguez (2007), [10].
Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y sean H una CSA de L, por el Teorema 4.16 el conjunto de raíces Φ de H^* es un sistema de raíces para el espacio Euclidiano $E = gen_{\mathbb{R}}\Phi$. Esto permitirá asociar un diagrama de Dynkin a la álgebra de Lie L y con los teoremas que se presentan a continuación se probará que el diagrama asociado a L es independiente de la elección de la subálgebra de Cartan H, además que dos álgebras de Lie semisimples de dimensión finita son isomorfas, si y solo si, tienen asociado el mismo diagrama de Dynkin.

Teorema 4.20. *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie semisimple de dimensión finita y sea H una CSA de L. Se satisfacen los siguientes enunciados*

(a) *Si Δ_1 y Δ_2 son bases del sistema de raíces Φ asociado a H, entonces sus diagramas asociados coinciden. De esa forma, H determina, sin ambigüedad, un diagrama de Dynkin.*

(b) *Los diagramas asociados a dos CSA de L coinciden.*

Demostración. En efecto, sea $\mathcal{W}$ el grupo de Weyl de Φ, por el Teorema 3.45 existe $\mathcal{R} \in \mathcal{W}$ tal que $\mathcal{R}(\Delta_1) = \Delta_2$. Por lo tanto las bases Δ_1 y Δ_2 determinan el mismo diagrama de Dynkin. Para el segundo enunciado, sean H_1 y H_2 dos CSA de L, por el Teorema 4.19 existe un automorfismo $\varphi \in InnL$ tal que $\varphi(H_1) = H_2$. Igualmente, si Φ_1 es el sistema de raíces asociado a H_1, entonces $\Phi_1\varphi^{-1}$ es el sistema de raíces asociado a H_2 y por el Teorema 4.18, para todo $\alpha, \beta \in \Phi_1$ se tiene que $\kappa(\alpha, \beta) = \kappa(\alpha \circ \varphi^{-1}, \beta \circ \varphi^{-1})$. Para terminar, si Δ_1 una base para Φ_1, entonces $\Delta_1\varphi^{-1}$ es una base para $\Phi_1\varphi^{-1}$. Por lo tanto los diagramas de Dynkin asociados a las subálgebras H_1 y H_2 coinciden. ■

Por lo anterior, a cada $\mathbb{C}$-álgebras de Lie semisimples de dimensión finita se le asocia un único diagrama de Dynkin. En el siguiente teorema se muestra que este diagrama es invariante bajo isomorfismos de álgebras de Lie.

Teorema 4.21. *Sean L_1 y L_2 dos $\mathbb{C}$-álgebras de Lie semisimples de dimensión finita. Si $L_1 \cong L_2$, entonces los diagramas de Dynkin asociados a L_1 y L_2 coinciden.*

Demostración. Sea $\varphi : L_1 \longrightarrow L_2$ un isomorfismo de álgebras de Lie y sea H_1 una CSA de L_1, por la Proposición 4.17, $H_2 = \varphi(H_1)$ es una CSA de L_2. Usando los argumentos que justifican el ítem (b) del Teorema 4.20, se sigue el resultado. ■

Proposición 4.22. *Sean L una álgebra de Lie semisimple y H una CSA de L, Φ el sistema de raíces de L relativo a H. Se fija una base Δ de Φ. Entonces L es generada (como álgebra de Lie) por los espacios de raíces L_α y $L_{-\alpha}$, con $\alpha \in \Delta$; o equivalentemente, L es generada por $x_\alpha \in L_\alpha$ y $y_\alpha \in L_{-\alpha}$ arbitrarios y no nulos.*

Demostración. Sea β una raíz positiva y arbitraria. Por el Corolario 3.36, $\beta = \alpha_1 + \cdots + \alpha_s$, donde $\alpha_i \in \Delta$ y cada suma parcial $\alpha_1 + \cdots + \alpha_i$ es una raíz. Además, para $\gamma, \delta, \gamma + \delta \in \Phi$ se tiene $[L_\gamma, L_\delta] = L_{\gamma+\delta}$. Usando inducción sobre s, es fácil ver que L_β se encuentra en la subálgebra de L generada por todos los L_α. De forma similar, si β es negativa, entonces L_β se encuentra en la subálgebra de L generada por todos los $L_{-\alpha}$. Pero, $L = H \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi} L_\alpha$, y $H = \sum_{\alpha\in\Phi} [L_\alpha, L_{-\alpha}]$. Así, se sigue el resultado. ■

Teorema 4.23. *Sean L y L' dos $\mathbb{C}$-álgebras de Lie simples y sean H y H' CSA de L y L' respectivamente. Si Φ, Φ' son sistemas de raíces asociados a H y H' respectivamente y existe un isomorfismo de Φ en Φ', entonces L y L' son álgebras de Lie isomorfas.*

Demostración. Para la demostración se utilizará el siguiente lema

Lema 4.24. *Sea L una álgebra de Lie simple. Si H es una CSA de L y Φ un sistema de raíces para H^*, entonces Φ es irreducible. (Ver definición 3.50).*

Para probar el lema, suponga lo contrario, entonces existen subconjuntos propios $\Phi_1, \Phi_2 \subset \Phi$ tales que $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$, y $\kappa(\Phi_1, \Phi_2) = \{0\}$. Sean $\alpha \in \Phi_1$ y $\beta \in \Phi_2$, entonces $\kappa(\alpha+\beta, \alpha) = \kappa(\alpha, \alpha) > 0$, luego $\alpha+\beta \notin \Phi_2$, de forma similar $\alpha+\beta \notin \Phi_1$, así $\alpha+\beta \notin \Phi$ y se tiene $[L_\alpha, L_\beta] \subset L_{\alpha+\beta} = \{0\}$. Ahora, para cada $\alpha \in \Phi$ se sabe que $L_\alpha = gen\{x_\alpha\}$, considere el subespacio no trivial $K = gen\{x_\alpha : \alpha \in \Phi_1\}$ y sean $x_\alpha, x_\gamma \in K$, luego $[x_\alpha, x_\gamma] \in L_{\alpha+\gamma}$. Si $L_{\alpha+\gamma} = \{0\}$, claramente $[x_\alpha, x_\gamma] \in K$, en caso contrario, $\alpha + \gamma \in \Phi$, además $\kappa(\alpha + \gamma, \alpha) \neq 0$ entonces $\alpha + \gamma \notin \Phi_2$, por lo tanto $\alpha + \gamma \in \Phi_1$, así $[x_\alpha, x_\gamma] \in K$. Así, K es una subálgebra de L. Sean $x \in L$ y $k \in K$, por la descomposición en espacios de raíces, se tiene las siguientes posibilidades: si $x \in H$, en cuyo caso $[x, k] = \alpha(x)k$, para algún $\alpha \in \Phi_1$, luego $[x, k] \in K$. Si $x \in K$, dado que K es una subálgebra se tiene $[x, k] \in K$, finalmente si $x \in L_\beta$, para algún $\beta \in \Phi_2$se tiene que $[x, k] \in L_{\beta+\alpha}$, para algún $\alpha \in \Phi_1$, pero $L_{\beta+\alpha} = \{0\}$, por lo tanto $[x, k] = 0 \in K$. Así, K es un ideal propio de L y dado que L es simple se debe tener $K = \{0\}$ y esto contradice la elección de K.

Retomando la demostración del teorema, Φ y Φ' sos irreducibles e isomorfos. Sean $E = gen_{\mathbb{R}}(\Phi)$ y $E' = gen_{\mathbb{R}}(\Phi')$, por la definición 3.18, existe un isomorfismo de espacios vectoriales $\varphi : E \longrightarrow E'$ que asigna a cada $\alpha \in E$ el elemento $\varphi(\alpha) = \alpha' \in E'$ y que cumple $\langle \beta, \alpha \rangle = \langle \beta', \alpha' \rangle$ para cada par de raíces $\alpha, \beta \in \Phi$. Sea Δ una base de Φ y Δ' una base de Φ' y para cada $\alpha \in \Delta$ y cada $\alpha' \in \Delta'$, sean $t_\alpha \in H$ y $t'_{\alpha'} \in H'$, los únicos elementos que satisfacen $\kappa(t_\alpha, h) = \alpha(h)$ para todo $h \in H$ y $\kappa(t'_{\alpha'}, h') = \alpha'(h')$ para todo $h' \in H'$. Considere el isomorfismo de espacios vectoriales $\pi : H \longrightarrow H'$ definido por $\pi(t_\alpha) = t'_{\alpha'}$ para cada $\alpha \in \Delta$. Dado que H y H' son abelianas, π es un isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras de Lie. Por otro lado, debido a la descomposición en espacios de raíces, para cada $\alpha \in \Delta$ existe $x_\alpha \in L_\alpha$ tal que $L_\alpha = gen\{x_\alpha\}$ y de forma similar, para cada $\alpha' \in \Delta'$ existe $x'_{\alpha'} \in L'_{\alpha'}$ tal que $L'_{\alpha'} = gen\{x'_{\alpha'}\}$. De esta forma se puede construir una base $B = \{x_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ del espacio $\bigoplus_{\alpha \in \Phi} L_\alpha$ y de igual forma una base $B' = \{x'_{\alpha'} : \alpha' \in \Delta'\}$ del espacio $\bigoplus_{\alpha' \in \Phi'} L'_{\alpha'}$. Además, siguiendo el procedimiento del Teorema 8.8 expuesto en [3, pág. 199], la elección de estas bases se puede hacer de tal manera que satisfagan $[x_\alpha, x_\beta] = [x'_{\alpha'}, x'_{\beta'}]$ para todo $\alpha, \beta \in \Phi$ y se puede definir el isomorfismo de álgebras de Lie $\Omega : L \longrightarrow L'$ dado por $\Omega(x_\alpha) = x'_{\alpha'}$ para todo $\alpha \in \Phi$ y $\Omega(h) = \pi(h)$ para todo $h \in H$. Por lo tanto L y L' son isomorfas. ∎

De los teoremas anteriores, si L y L' son dos álgebras de Lie simples que tienen el mismo diagrama de Dynkin entonces sus sistemas de raíces son isomorfos y las álgebras de Lie son isomorfas, es decir, L y L' son isomorfas si y solo si tienen el mismo diagrama de Dynkin.

Conclusiones

Los teoremas presentados utilizan resultados de álgebra lineal avanzada que en general no se estudian en el programa de Licenciatura en Matemáticas, en las pruebas desarrolladas en este trabajo se presentan los detalles en los cuales se usan tales resultados.

El estudio abstracto de los Sistemas de Raíces y su aplicación al Teorema de clasificación de las álgebras de Lie semisimples no aparecen simultáneamente en la bibliografía estudiada, En este trabajo se presentan los sistemas de raíces en abstracto a detalle y se presenta la relación con las álgebras de Lie mediante las subálgebras de Cartan.

Algunos textos especializados usan una «subálgebra toral máxima» en lugar de lo que hemos llamado un subálgebra de Cartan. Sin embargo es independiente el uso de estas subálgebras y por tanto establecemos que los dos tipos de álgebras son iguales. En [4] se presenta la conexión que existe entre estas dos clases de subálgebras.

Referencias

[1] Aguanary Yamith and Bolaños Edwin; Representaciones de la álgebra de Lie $sl(2, \mathbb{C})$, Tesis de pregrado, Universidad de Nariño, Pasto; pag 46-52. (2019).

[2] Apostol Tom; Carrera Jose and Lines Enrique (*Eds.*). Análisis Matemático, Reverté, California. Ed. 2. pag 57-66. (1976).

[3] Barrera San Martin. Álgebras de Lie, Unicamp, Campinas. Ed. 2. pag 193-201. (2005).

[4] Erdmann Karin and Wildon Mark. Introduction to Lie Algebras, Springer, Oxford. pag 1-4, 27-52, 77-124. (2006).

[5] González Martín. Álgebras no asociativas, Universidad de Málaga, Málaga. pag 111-124. (2008).

[6] Grossman Stanly; Flores José, Damy Alberto and Noriega Maria (*Eds.*). Álgebra Lineal, Mc Graw Hill, Montana. Ed. 7, pag 281-343, 458-479, 524-545. (2012). ISBN: 978-607-15-0760-0.

[7] Humphreys James. Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, New York. pag 1-24, 42-82. (1972).

[8] Jeronimo Gabriela, Sabia Juan and Tesauri Susana; Cabrelli Carlos, Lederman Claudia and Minian Gabriel (*Eds.*). Álgebra Lineal, Universidad de Buenos Aires, Buenos Aires. pag 47-102. (2008). ISBN: 1851-1317.

[9] Knapp Anthony; Bass Hyman and Weinstein Alan (*Eds.*). Lie Groups Beyond an Introduction, Birkhauser, Boston. Es. 2. pag 140-184. (1986).

[10] Rodríguez Enrique. Sistemas de Raíces Abstractas y Álgebras de Lie, Tesis de pregrado, Universidad de Sonora, Sonora. pag 7-53. (2007).

[11] Rojo Armando. Algebra II, El Ateneo, Buenos Aires. Ed. 13. pag 214-255. (1995). ISBN: 950-02-5205-8.

Apéndices

Apéndice A: Analisis Real

Este apéndice tiene el propósito de presentar algunos conceptos y teoremas básicos del Análisis Real, los cuales se utilizan en el Capítulo 3. Se recomiendan para lectura adicional el libro de Tom Apostol [2].

Definición. B.1 (Espacio métrico). Un espacio métrico es un par (X, d), donde X es un conjunto no nulo y $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ tal que

(a) $d(x, y) = 0$ si y solo si $x = y$.

(b) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in X$.

(c) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$, para todo $x, y, z \in X$.

Definición. B.2 (Bola abierta). Sea (X, d) un espacio métrico. Para $x \in X$ y $\epsilon > 0$ la bola abierta con centro x y radio ϵ, denotada por $B_d(x, \epsilon)$, se define por $B_d(x, \epsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Definición. B.3 (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$, con A no nulo. Un punto $a \in A$ se llama interior si $B_d(a, \epsilon) \subseteq A$.

Definición. B.4 (Conjunto abierto). Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es abierto si todo punto $a \in A$ es interior.

Definición. B.5 (Conjunto conexo). Sea (X, d) un espacio métrico. Un subconjunto $A \subseteq X$ es conexo si no existen subconjuntos abiertos B y C tales que $A = B \cup C$ y $B \cap C = \emptyset$.

Proposición. B.6. Si E es un espacio real con producto interno $(,)$, entonces se define una métrica en E mediante $d(v, w) = \sqrt{(v - w, v - w)}$, es decir, (E, d) es un espacio métrico.

Teorema. B.7. Sean E_1 y E_2 espacios métricos. $f : E_1 \longrightarrow E_2$ es una función continua si y solo si para todo conjunto abierto $U \subseteq E_2$ se tiene que $f^{-1}(E_1)$ es un conjunto abierto en E_1.

Apéndice B: Álgebra Lineal

Este apéndice tiene el propósito de presentar un teorema que no es usual verlo en un curso básico de álgebra lineal, el cual se utiliza en el Capítulo 4, Sección 4.1.

Teorema. A.1. Si $\mathcal{F}$ es un conjunto de endomorfismos en un espacio vectorial de dimensión finita V tal que

(a) Toda transformación en $\mathcal{F}$ es diagonalizable.

(b) Para todo $T_1, T_2 \in \mathcal{F}$ se tiene $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$.

Entonces, existe una base B de V tal que la matriz $[T]_B$ es diagonal para todo $T \in \mathcal{F}$.

Demostración. Si $\dim V = 1$ entonces todo elemento en $End(V)$ es múltiplo escalar de id_V, luego para todo $T \in \mathcal{F}$ se tiene $T = \lambda id_V$ para algún $\lambda \in \mathbb{F}$. Sea $v \in V - \{0\}$, $B = \{v\}$ es una base de V y $T(v) = \lambda id_V(v) = \lambda v$ entonces $[T]_B = [\lambda]$. Suponga que el enunciado se satisface para todo espacio vectorial de dimensión menor o igual a $n-1$ y sea $\dim V = n$. Se fija $T \in \mathcal{F}$ con $T \neq \lambda id_V$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$, sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios de T distintos dos a dos y sea

$$\begin{aligned} W_i &= \{v \in V : T(v) = \lambda_i v\} \\ &= \{v \in V : (T - \lambda_i id_V)(v) = 0\} \\ &= Ker(T - \lambda_i id_V). \end{aligned}$$

Entonces $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$ porque T es diagonalizable, además, para $H \in \mathcal{F}$ y $w \in W_i$ se tiene $T(H(w)) = H(T(w))H(\lambda_i w) = \lambda_i(H(w))$ entonces $H(w) \in W_i$, es decir, W_i es H-invariante. Dado que H es diagonalizable, entonces $H_{|W_i}$ es diagonalizable. Sea $\mathcal{F}_i = \{H_{|W_i} : H \in \mathcal{F}\}$ el conjunto de endomorfismos de W_i mutuamente conmutativos. Pero $\dim W_i < \dim V$, con lo cual por hipótesis inductiva existe una base B_i de W_i tal que $H_{|W_i}$ es diagonalizable para todo $H \in \mathcal{F}$. Sea $B = \bigcup_{i=1}^{r} B_i$ una base de V y para todo $H \in \mathcal{F}$ se tiene $H = H_{|W_1} + \cdots + H_{|W_r}$, así para $w \in B_i$ se tiene $H(w) = \lambda_i w$. ∎