LA CONSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES:

A PARTIR DE LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES DE EUDOXO Y DE LA TEORÍA DE LAS CORTADURAS DE DEDEKIND. UN ENFOQUE HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

EIBAR VELÁSQUEZ MAYA – EULER NARVÁEZ CASANOVA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
2019

LA CONSTITUCIÓN DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES: A PARTIR DE LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES DE EUDOXO Y DE LA TEORÍA DE CORTADURAS DE DEDEKIND. UN ENFOQUE HISTÓRICO EPISTEMOLÓGICO

EIBAR VELÁSQUEZ MAYA

EULER NARVÁEZ CASANOVA

Trabajo de Grado presentado como requisito

para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Vicente Erdulfo Ortega Patiño
Magister en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2019

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1° del No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

Vicente Erdulfo Ortega Patiño
Director

Andrés Chaves Beltrán
Jurado

José Francisco Ocaña
Jurado

San Juan de Pasto, 18 de julio de 2018

Resumen

La presente tesis muestra bajo un enfoque histórico-epistemológico dos momentos relevantes en el surgimiento y la constitución de los números irracionales como objeto matemático. Uno de estos momentos históricos es la formulación de la teoría de las proporciones por parte de Eudoxo de Cnido en el siglo IVA.C, como respuesta al problema matemático encontrado por los griegos, esto es, el de las magnitudes inconmensurables; siendo más específicos con respecto al marco de estudio de la teoría de proporciones, se enfatiza en la definición cinco del libro V de los *Elementos* de Euclides. El otro instante corresponde al planteamiento de la teoría de cortaduras de Dedekind en la búsqueda de una salida categórica a la falta de una fundamentación aritmética de los números reales en el siglo XIX. Finalmente, se presentan algunas equivalencias y divergencias entre las dos teorías citadas, con respecto a la conocida tesis histórica de que la teoría histórica de que la teoría de proporciones de Eudoxo constituye una anticipación a teorías formales del número real, en este caso, la teoría de cortaduras de Dedekind.

Palabras claves: Historia, Epistemología, irracional, proporción, cortaduras, Eudoxo, Dedekind, equivalencias, divergencias.

Abstract

This thesis shows under a historical-epistemological approach two relevant moments in the emergence and constitution of irrational numbers as a mathematical object. One of these historical moments is the formulation of the theory of the proportions by Eudoxo de Cnido in the IV A.C century, in response to the mathematical problem encountered by the Greeks, that is, that of immeasurable magnitudes; being more specific with respect to the framework of study of the theory of proportions, it is emphasized in definition five of book V of the Elements of Euclid. The other moment corresponds to the approach of Dedekind´s theory of cuts in the search for a categorical exit to the lack of an arithmetic foundation of real numbers in the 19th century. Finally, some equivalences and divergences are presented between the two theories cited, with respect to the well-known historical thesis that the historical theory that Eudoxo´s theory of proportions constitutes an anticipation of formal theories of the real number, in this case, Dedekind´s theory of cuts.

Keywords: History, Epistemology, irrational, proportion, cuts, Eudoxus, Dedekind, equivalences, divergences.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Es pertinente recordar que el concepto de número hizo presencia tempranamente en la historia de la humanidad, por cuanto ciertos hechos y factores permiten pensar que el ser humano, de las épocas primitivas, llegó a poseer al menos una vaga idea de número y, de manera gradual, fue aprendiendo a utilizar esa imprecisa noción cada vez que se lo exigían sus necesidades prácticas y utilitarias. El concepto inicial de número corresponde al de *número natural,* surgido como abstracción del proceso de contar colecciones finitas de objetos. Sin embargo, el contar colecciones de objetos no fue suficiente y se hizo necesario medir magnitudes, como longitudes, áreas, pesos y tiempos. Para encontrar el origen de la operación de contar hay que remontarse a los tiempos primitivos cuando el ser humano, al observar en la naturaleza fenómenos cuantitativos pudo llegar a distinguir entre la unidad y la pluralidad.

Estas primeras observaciones condujeron, en una primera etapa de la numeración, al principio que hoy se conoce como correspondencia biunívoca, es decir, la correspondencia unidad por unidad, que permitió comparar dos colecciones de seres u objetos, de la misma o de distinta naturaleza, y así fue posible asociar a una colección de objetos observados un grupo de signos o de cosas. Se ha dicho también que los primeros pasos de la operación de conteo se efectuaron penosamente dibujando palotes sobre la arena o con montones de guijarros o con gestos de la mano o de la cabeza. Como preludio del nacimiento de la numeración escrita, luego aparecerían las marcas hechas con objetos cortantes sobre huesos o en madera, cuya sintaxis era la concatenación, en la época del hombre de Neanderthal, del período paleolítico 30000 años a. c. aproximadamente.

En aquellas épocas no se concebía el número desde una perspectiva de abstracción, sino más bien de un modo cualitativo, reducido a una noción global bastante confusa de la *"pluralidad material"* que adquiría el aspecto de una realidad concreta que no se podía disociar de la naturaleza de los seres o de los objetos considerados, según lo explica Ifrah en los siguientes términos:

> Las posibilidades numéricas de dichos pueblos se reducen a esa especie de capacidad natural llamada normalmente la *percepción directa del número* o, más sencillamente, la *sensación numérica.* Aptitud natural que evidentemente no hay que confundir con la *facultad abstracta de contar,* que a su vez procede de un fenómeno mental mucho más complejo y constituye una adquisición relativamente reciente de la inteligencia humana. (Ifrah, 1987, p. 1)

De manera gradual el ser humano fue aprendiendo a utilizar esa imprecisa noción de número cada vez que se lo exigían sus necesidades prácticas y utilitarias. Poco a poco, los conceptos de número natural, cero, número negativo, fracción, número racional y número irracional surgieron de manera tímida, pero su propia existencia estaba sustentada fundamentalmente sobre consideraciones de naturaleza geométrica. Sólo siglos después, en la época de los griegos, el número se convirtió en un objeto que podía ser estudiado teniendo en cuenta su propia naturaleza.

La fundamentación lógica y rigurosa del sistema de los números reales sólo fue posible llevarla a cabo hasta finales del siglo XIX. Este hecho se presenta como uno de los acontecimientos más importantes de la historia de las matemáticas.

Al respecto, se hace referencia al hecho de que fueron los griegos quienes, desde muy temprano se dieron cuenta "de las grandes dificultades inherentes a los conceptos matemáticos de continuidad, movimiento e infinitud, así como al problema de medir magnitudes arbitrarias con unidades prefijadas" (Courant y Robbins, 1979, p. 3). Señalan además, que Eudoxo realizó un admirable esfuerzo para superar tales dificultades y desarrolló su *teoría de las proporciones*, llamada también *del continuo geométrico*. Esta teoría, sostienen, "fue de tal perfección, que para encontrar algo que pueda comparársele es necesario que, dos milenios más tarde, aparezca la teoría moderna de los números irracionales" (Courant y Robbins, 1979, p. 3).

Precisamente, Eudoxo superó la dificultad de expresar la razón entre dos magnitudes inconmensurables al definir, no la razón misma sino la proporción, es decir, la igualdad entre dos razones. Para tal efecto, en la teoría de las proporciones, utilizó una definición independiente del carácter conmensurable o no conmensurable de los elementos de dicha proporción. Se afirma que "esa definición, en que aparecen desigualdades y números enteros, recuerda extrañamente a las cortaduras de Dedekind, que constituyen una de las formas actuales de definir los números reales, que incluyen a los irracionales" (Babini, 1972, p. 6). Relacionado con esta definición, Eudoxo introdujo también "un principio que, en definitiva, no es sino el actual axioma de continuidad y cuyo carácter axiomático mostrará más adelante Arquímedes" (Babini, 1972, p. 6).

Otra hecho referente es que "es muy posible que el descubrimiento de las dificultades relacionadas con las *cantidades inconmensurables* desviara a los griegos del desarrollo del cálculo numérico, alcanzado con anterioridad en Oriente, para afrontar estas dificultades, los griegos optaron por abrirse camino a través de la geometría axiomática." (Courant y Robbins, 1979, p. 4). En consecuencia, se tuvo que divagar, bajo la influencia de la tradición del pensamiento matemático griego, durante cerca de dos mil años, lo cual constituyó un retraso de la inevitable evolución del concepto de número, lo mismo que el incipiente desarrollo de las operaciones algebraicas que, como bien se conoce, más tarde formarían parte de los conceptos básicos de la ciencia moderna (Courant y Robbins, 1979, p. 4).

La historia de las matemáticas continuó su curso, en estas condiciones, hasta el siglo XIX, es decir, tratando las cantidades continuas únicamente sobre una base geométrica.

Precisamente, en el siglo XIX, fue Dedekind quien se dio cuenta, muy pronto, de que la aritmética de los números reales carecía de una fundamentación lógica adecuada. En tal sentido, se negaba a recurrir a la evidencia geométrica cuando se trataba de demostrar proposiciones tales como la que afirma que toda magnitud que crece de una manera continua pero no acotada, debe aproximarse a un valor límite. Durante mucho tiempo se dedicó a reflexionar sobre estos temas, pero no encontró un fundamento puramente aritmético y completamente riguroso sobre los que serían los principios del análisis matemático.

Previamente, a su dedicación al estudio de los números irracionales, partió de la presuposición del desarrollo de la aritmética de los números racionales. De este modo, estableció una comparación entre los números racionales y los puntos de la recta numérica. De inmediato, planteó su estudio de la continuidad y de la línea recta y, en este caso, desde el comienzo, llamó la atención sobre el hecho de que en una línea recta existe una infinidad de puntos que no correspondían a números racionales. En consecuencia, señaló que *la recta es infinitamente más rica en puntos individuales* que el dominio de *los números racionales en números individuales*. Dedekind pensaba que este hecho conducía a completar el dominio de los números racionales, creando nuevos números, de tal manera que dicho campo obtuviera la misma continuidad que la línea recta. Como no estaba de acuerdo con los métodos mediante los cuales habitualmente se introducían los números irracionales, basados en la concepción de longitudes prolongadas, propuso "que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma", (Dedekind, 1872, Ferreirós, 1998, p. 84). Así, el problema se redujo a la determinación aritmética de la continuidad.

Ahora, puesto que Dedekind intentaba definir completamente los números irracionales sólo mediante los números racionales y, teniendo en cuenta que la comparación del dominio de los números racionales con los puntos de la recta conducía al reconocimiento de "agujeros o huecos", es decir, de una cierta discontinuidad de los números, entonces planteó el problema en términos de la siguiente pregunta: "¿En qué consiste propiamente esta discontinuidad?" (Dedekind, 1872, citado por Ferreirós, 1998, p. 84). Y señaló que: "Todo depende de la respuesta a esta cuestión y, sólo mediante ella obtendremos una base científica para la búsqueda de todos los dominios continuos". Entonces, según Dedekind, el problema consistía en indicar una característica precisa de la continuidad que pudiera servir de base para deducciones válidas. Puntualizaba que, cada punto de una línea recta producía una separación en dos partes, de tal modo que, cada punto de una de las partes está situado a la izquierda de cada punto de la otra parte. Al considerar esta situación en sentido recíproco, Dedekind encontró la esencia de la continuidad y entonces, formuló el siguiente principio:

> Si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces existe un único punto que produce esta división de todos los puntos en dos clases, esta separación de la línea recta en dos porciones. (Dedekind, 1872, citado por Ferreirós, 1998, p. 85).

Al considerar que esta proposición no podía ser demostrada, afirmaba que, en consecuencia, constituía un axioma por el cual se atribuye la propiedad de continuidad a la línea recta. Posteriormente, en su obra *Continuidad y números irracionales*, introdujo la noción de cortadura, al considerar la división de los números racionales en dos clases tales que todo número de la primera clase es inferior a todo número de la segunda. Es esta división de los números racionales la que denomino una cortadura. Entonces, de acuerdo con esta concepción, cada número racional produce una cortadura que posee la propiedad de que, entre los números de la primera clase, existe un número que es el mayor o que, entre los números de la segunda clase, existe un número que es el menor. Así mismo, de manera recíproca, toda cortadura en los números racionales para los cuales existe el mayor de los números en la primera clase o el menor de ellos en la segunda, está determinada por un número racional.

Dedekind, señalaba además que es posible afirmar y mostrar la existencia de infinitas cortaduras que no están determinadas por números racionales. Sostenía que, para cada una de tales cortaduras, es posible crear un nuevo número irracional que está completamente definido mediante cada una de ellas.

El propósito central de este trabajo, expresado en el objetivo general, es hacer un estudio sistemático, tanto de la teoría de las proporciones de Eudoxo, como de la teoría de las cortaduras de Dedekind, consideradas como dos problemáticas cruciales de la actividad matemática que condujeron al surgimiento y a la constitución de los números irracionales como objeto matemático.

Para tal fin, en el primer capítulo, de acuerdo con el primer objetivo específico, se analiza la Teoría de las Proporciones de Eudoxo (TPE), tomando como fuente de referencia el libro V de los *Elementos* de Euclides, de la Editorial Gredos, con traducción y notas de María Luisa Puertas Castaños. Así mismo se han tenido en cuenta autores como Boyer, Babini, Corry, Gonzales, Kline, Recalde y Vega.

El segundo capítulo, en concordancia con el segundo objetivo específico, se realiza el estudio de la Teoría de las Cortaduras de Dedekind (TCD), con base en la obra ¿*Qué son y para qué sirven los números*?, con edición y traducción de José Ferreirós de Alianza Editorial. De la misma manera, se ha considerado el artículo "La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind", de autoría de Leo Corry, y expuesta en la revista *Mathesis*. También se ha tenido en cuenta el capítulo V escrito por Gabriela Arbeláez y Fernando Gálvez, el cual hace parte del libro *Los Números Reales Como Objeto Matemático. Una perspectiva histórica-epistemológica* (ver bibliografía). En el mismo sentido se han analizado las referencias pertinentes de los textos de Bares y Climent, Collete, Hilbert, Moreno y Recalde.

En el tercer capítulo, en correspondencia con el tercer objetivo específico, se hace el estudio de la relación entre la teoría de las proporciones de Eudoxo y la teoría de las cortaduras de Dedekind, con base en las referencias pertinentes de Barón, Corry, Courant y Robbins, Edwards, Heath, Moise y Zubieta. Estas referencias, forman parte de los argumentos relacionados con la discusión histórico-epistemológica de la teoría de las proporciones de Eudoxo como anticipación de la teoría de las cortaduras de Dedekind, con lo cual se ha tratado de dar cumplimiento al cuarto objetivo específico del presente trabajo.

El capítulo cuarto corresponde al estudio formal de los números reales, como campo ordenado arquímediano completo, mediante cortaduras. Para este tema se han tomado como referencia los autores Spivak, Severi, Rudin, Ferreirós.

Finalmente se presentan las conclusiones y las referencias bibliográficas.

1. OBJETIVOS

1.1 Objetivo general

- Estudiar, de manera sistemática, la importancia de la teoría de las proporciones de Eudoxo y de la teoría de las cortaduras de Dedekind, en relación con el surgimiento y la constitución de los números irracionales como objeto matemático.

1.2 Objetivos específicos

- Analizar el concepto de proporción entre magnitudes geométricas, en el libro V de los *Elementos* de Euclides.
- Analizar el concepto de cortadura, sobre un campo ordenado, propuesto por Dedekind.
- Expresar, en términos formales, la relación entre la teoría de las proporciones de Eudoxo y la teoría de las cortaduras de Dedekind.
- Buscar argumentos, de algunos autores, relacionados con la discusión histórico-epistemológica de la teoría de proporciones de Eudoxo como anticipación de las cortaduras de Dedekind.

2. METODOLOGÍA

La metodología empleada en esta investigación, se basó en estudiar fuentes de información articuladas con los objetivos, a través de textos historiográficos analizados desde una perspectiva epistemológica y en el marco de la corriente internalista de las matemáticas, entendida esta en los términos que la explica Maribel Anacona en el artículo "La historia de las matemáticas en la educación matemática".

Desde la corriente internalista, se considera que el objeto de la Historia de las Ciencias, es la ciencia misma. Es así como se trata de hacer una historia de los conceptos, atendiendo básicamente su estructura lógica de producción. Desde la externalista, se considera que las explicaciones sobre acontecimientos científicos se pueden obtener primordialmente desde el ámbito social, postura que se acerca más a una sociología de las ciencias. (Anacona, 2003, p. 31).

Al hacer el recorrido historiográfico, se analizó el caso de las magnitudes inconmensurables, uno de los contextos que hicieron posible la aparición del problema de la irracionalidad, desconocido por los griegos y que Eudoxo logró superar mediante la definición de proporción, utilizando un proceso independiente de la naturaleza conmensurable o inconmensurable de los elementos de la proporción. En consecuencia, fue necesario estudiar, en los *Elementos* de Euclides, el libro V que trata de la teoría de proporciones de Eudoxo.

Así mismo, se abordó el tema de las cortaduras que comienza con la presuposición que hizo Dedekind, del desarrollo de la aritmética de los números racionales y estableció una comparación entre estos y los puntos de la línea recta y, al estudiar la continuidad de esta, observó que en ella existen infinitos puntos que no corresponden a números racionales y propuso la determinación aritmética de la continuidad.

El recorrido historiográfico se realizó analizando la importancia de la teoría de proporciones de Eudoxo y de la teoría de las cortaduras de Dedekind, desde la perspectiva del surgimiento y de la constitución de los números irracionales como objeto matemático, teniendo en cuenta los aspectos epistemológicos y matemáticos que están en el trasfondo del problema.

El estudio formal de los números reales, como campo ordenado arquímediano completo mediante cortaduras, como ya se mencionó, se realizó con base en los textos de reconocidos autores como Spivak, Severi, Rudin y Ferreirós.

Capítulo 1

3. LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES DE EUDOXO (TPE)

Generalmente se considera que las matemáticas griegas comenzaron con Thales (585 A.C) y el establecimiento de la Escuela Pitagórica (550 A.C). Ningún documento material de este periodo ha sobrevivido y toda la información disponible ha sido dada por varios comentaristas estudiosos de la Historia de las Matemáticas, siglos más tarde. La Historia de las Matemáticas griegas empezó, aproximadamente, en el siglo VI A.C. Según Proclo, Pitágoras, que es posterior a Thales, transformo la geometría "(…) en una forma de educación liberal, examinando sus principios desde el comienzo y demostrando los teoremas de una manera inmaterial e intelectual. Así descubrió la teoría de las proporciones y la construcción de las figuras cósmicas" (Boyer, 1959, p . 78).

Es ampliamente conocido el lema insignia de la Escuela Pitagórica "todo es número". Es decir que, uno de los principios fundamentales del pitagorismo establecía que la esencia de todas las cosas era explicable en términos de *arithmos,* esto es, por medio de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. Sin embargo, en los Diálogos de Platón, se dice que "la comunidad matemática se vio grandemente sorprendida por el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables". Este descubrimiento consistía en que "incluso dentro de la geometría misma los números naturales y sus razones resultaban inadecuados para dar cuenta de algunas propiedades fundamentales, así fueran muy sencillas." (Boyer, 1959, p. 106).

Los miembros de la Escuela Pitagórica sostenían que todo podía reducirse a números, considerando como tales, sólo a los números enteros positivos; por su parte, los babilonios y los egipcios trabajaron con estos números, con base en aproximaciones, aunque sin tener conciencia de la falta de exactitud, es decir, sin darse cuenta de la diferencia radical entre razones conmensurables e inconmensurables. Dado que, para los griegos la palabra número significaba «número entero positivo»; y en el caso de dos magnitudes AB y CD cualesquiera, existían dos números enteros m y n tal que $m\,(AB) = n\,(CD)$. Entendiéndose así, que las magnitudes eran conmensurables, sin embargo, ellos llegaron al resultado de que no siempre es posible encontrar tales enteros, lo que implicaba la existencia de magnitudes inconmensurables, es decir, en términos simbólicos, que $m\,(AB) \neq n\,(CD)$ para cualquier par de números enteros m y n.

En consecuencia, una fracción a/b no indicaría un número racional, sino una relación entre los números enteros a y b, la "razón" entre a y b. En el sentido actual sería un par ordenado de números. (González, 2008) sostiene que para los pitagóricos dos razones a/b, c/d, se dice que son "proporcionales": $a/b = c/d$, cuando existen enteros p, q, m, n, tales que $a = mp$, $b = mq$, $c = np$, $d = nq$; interpretando esto con un ejemplo se tiene: 12/15=16/20, porque 12 contiene cuatro de las cinco partes de 15, al igual que 16 contiene cuatro de las cinco partes de 20. A partir de esta base se desarrolló inicialmente la teoría pitagórica de la proporcionalidad.

De esta manera se deduce que los números naturales y sus razones no son suficientes para poder comparar la longitud de la diagonal de un cuadrado con su lado, o la longitud de la diagonal de un pentágono regular con su lado o arista, "tales parejas de segmentos son inconmensurables, por muy pequeña que sea la unidad de medida elegida" (Boyer, 1959, p. 106). En otras palabras, existen pares de segmentos de recta, tales como el lado y la diagonal de un cuadrado, que no son conmensurables, porque ellos no pueden ser subdivididos de tal manera que sean múltiplos de segmentos de la misma longitud y, por lo tanto la razón de sus longitudes no es igual a la razón de dos números enteros. Este es el caso conocido, que hace referencia al teorema de Pitágoras, según el cual, el cuadrado de la diagonal de un cuadrado, cuyo lado tiene como longitud la unidad, es igual a 2. Lo que, en términos modernos, dió lugar a un "desajuste" que hizo necesario un nuevo examen a fondo de los fundamentos de las matemáticas de aquella época, una tarea que ocupó gran parte del siglo IV A.C. Durante este periodo, el álgebra y la geometría griega asumieron una forma altamente organizada y rigurosamente deductiva. Sin embargo, el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables condujo a que la teoría pitagórica de proporciones enteras invalidará la comparación de razones de magnitudes geométricas, y, por lo tanto, también se invalidó las pruebas geométricas que utilizaban los conceptos de proporcionalidad pitagórica.

La crisis de fundamentos fue resuelta por Eudoxo de Cnido (408-355 A.C.), un estudiante de la Academia de Platón en Atenas, quien llegó a ser el más grande matemático del siglo IV A.C. En efecto, como una primera contribución importante, a las matemáticas griegas, propuso una nueva teoría de proporciones, ya que habiendo encontrado un número cada vez mayor de razones inconmensurables, vió la necesidad de hacer frente a *tales razones*. Estas razones, que los griegos no identificaban como números, aparecían en razonamientos geométricos, mientras que los números enteros y las razones entre números enteros aparecían en geometría y en el estudio general de la cantidad. Surgió entonces el interrogante de cómo poder extender a los inconmensurables las demostraciones geométricas que se habían hecho para longitudes, áreas y volúmenes conmensurables.

Eudoxo introdujo un principio matemático central en términos de la idea de magnitud continua, que no hacía referencia a números, sino a entidades tales como segmentos rectilíneos, ángulos, áreas, volúmenes, tiempo, entre otros, que podían variar de manera continua. En este sentido, a las magnitudes no se les asignaba valor numérico cuantitativo alguno, mientras que los números aparecían en forma discreta. "Eudoxo definía entonces una razón de magnitudes y a partir de ella una proporción, es decir, una igualdad de dos razones, cubría los casos de razones conmensurables e inconmensurables" (Kline, 1972, p. 79). Pero para expresar tales razones no se utilizaba número alguno, quedando así, ligados a la geometría los conceptos de razón y proporción.

De esta manera, Eudoxo consiguió evitar los números irracionales en tanto que números; en otras palabras, eludió dar valores numéricos a las longitudes de segmentos, a los tamaños de los ángulos y a otras magnitudes, y de la misma manera a las razones de magnitudes.

Es conveniente destacar aquí la observación que hace Kline al respecto: "mientras la teoría de Eudoxo permitió a los matemáticos griegos hacer grandes progresos en geometría, suministrándoles los fundamentos lógicos necesarios para las razones inconmensurables, también tuvo varias consecuencias desafortunadas." (Kline, 1972, p. 79).

Por ejemplo, obligó a establecer una clara separación entre número y magnitud geométrica, por cuanto las razones inconmensurables sólo tenían sentido y se podían manejar en la geometría. En consecuencia, la matemática griega se volvió geométrica y de esta manera, la geometría se convirtió en "la base de casi toda la matemática rigurosa dentro de los 2000 años siguientes" (Kline, 1972, p. 79). Esta fue la razón por la cual los matemáticos griegos se desentendieron del álgebra y de las ideas aritméticas que hacia el futuro conducirían a los números irracionales.

Se tiene referencias de que los pitagóricos poseían una teoría de la proporción en términos de la igualdad entre dos razones, pero únicamente para magnitudes conmensurables, cuyas razones serían expresables como cocientes entre dos números enteros; sin embargo, los matemáticos anteriores a Eudoxo, que utilizaron proporciones, carecían, en general, de una fundamentación rigurosa para el tratamiento de las magnitudes inconmensurables. En cambio, el libro V de los *Elementos* de Euclides, basado en los trabajos de Eudoxo, a pesar de que evita la introducción de los números irracionales, "extiende la teoría de las proporciones a razones inconmensurables" (Kline, 1972, p. 103). Al respecto, se sostiene que "como lo *inexpresable* era la razón entre dos cantidades inconmensurables, Eudoxo elimina la dificultad definiendo, no la razón misma, sino la igualdad de razones, es decir, la proporción, mediante un proceso independiente del carácter conmensurable o no de los elementos proporcionales. Esa definición, en la que aparecen desigualdades y números enteros recuerda extrañamente a las *cortaduras* de Dedekind, que constituyen una de las formas actuales de definir los números reales que incluyen a los irracionales." (Babini, 1972, p. 6).

(Puertas, 1994) afirma que el libro V contiene la TPE y es considerado como un capítulo importante y trascendental de los *Elementos*. Abarca el campo de las proporciones entre magnitudes geométricas, pero se debe tener en cuenta que las nociones o definiciones eran muy limitadas en el siglo IV a. C, por ejemplo, las magnitudes cumplían con las condiciones de ser *homogéneas* y *arquímedianas.*

Este libro está constituido por 18 definiciones y 25 proposiciones, todas ellas como teoremas, con las cuales se construye una laboriosa teoría sobre la razón o cociente de magnitudes y proporciones. En los *Elementos* se enfatiza en las proporciones entre cualquier tipo de magnitudes; sin embargo, a pesar de que en el libro V las definiciones son importantes, no hay en él una definición de magnitud, pero se consideran como tales, las longitudes, las áreas y los volúmenes.

En consonancia con lo anterior, en la temática desarrollada en el libro V de los *Elementos* de Euclides, y de acuerdo con la presentación que hace Puertas de esta obra; se exponen, en primer lugar, las definiciones, en segundo lugar, las proposiciones junto con algunos comentarios e interpretaciones tanto de las definiciones como de las proposiciones.

Teniendo en cuenta los propósitos de este trabajo, es pertinente presentar algunas de las definiciones del libro V, junto con algunos comentarios de estudiosos del tema:

3.1 Definiciones

Definición 1. Una magnitud es parte de una magnitud, la menor de la mayor, cuando mide a la mayor.

Vega, 1994, citado por Puertas, 1994, p. 74, considera que las magnitudes son abstracciones e idealizaciones de objetos geométricos que únicamente tienen en cuenta la cantidad. Por ejemplo, la longitud, el área y el volumen son tres magnitudes geométricas plenamente conocidas.

(Kline, 1972) señala en este caso que, *parte* significa submúltiplo. En términos numéricos actuales, se diría que 3 es submúltiplo de 9 porque $3 \cdot 3 = 9$; sin embargo 4 no es submúltiplo de 9 porque no existe un entero n tal que $4 \cdot n = 9$. En general, si a y b son dos magnitudes homogéneas tales que $a < b$, entonces a mide a b, si existe un entero n tal que $n \cdot a = b$.

Definición 2. Una magnitud mayor es múltiplo de la menor cuando es medida por la menor.

De manera análoga al caso anterior, *múltiplo* significa *múltiplo entero*.

Definición 3. Una *razón* es determinada relación con respecto a su *tamaño* entre dos magnitudes homogéneas.

El significado de esta definición está íntimamente ligado con la definición IV.

Definición 4. Se dice que guardan razón entre si las magnitudes que al multiplicarse, pueden exceder una a otra.

En otras palabras, dos magnitudes tienen razón cuando se puede multiplicar a una de ellas por un número entero positivo de modo que supere a la otra. (Recalde, 2018) destaca la importancia de esta definición porque se basa en la propiedad arquimediana, según la cual, si a y b son dos magnitudes (que pueden ser inconmensurables), entonces siempre existe un entero n tal que $n \cdot a > b$. De igual manera recuerda que el significado de esta propiedad tiene que ver con el hecho de que todos los segmentos son de un orden de magnitud comparable, es decir, que no existe ni una magnitud infinitamente pequeña, ni una magnitud infinitamente grande, ni tampoco una magnitud de cantidad cero. El significado de la definición IV establece que hay razón entre a y b si algún múltiplo entero (incluyendo 1) de a es mayor que b y algún múltiplo entero de b (incluyendo 1) es mayor que a.

Según esta definición, no es posible formar una razón entre una magnitud finita y otra infinita. (Kline, 1972) afirma que, la definición excluye un concepto que apareció más tarde, el cual hace referencia a una cantidad infinitamente pequeña y no nula, a la que se llamó *infinitésimo*. En este sentido, no cabe razón entre dos magnitudes si una de ellas es tan pequeña que ninguno de sus múltiplos enteros excede a la otra. De la misma manera, quedan excluidas magnitudes infinitamente grandes, a las que no superaría ningún múltiplo entero de la cantidad menor.

La definición 5 es la clave en la TPE, y ha sido motivo de comentarios e interpretaciones, no sin dar lugar a controversias, desde la traducción misma.

Definición 5. Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente.

(Recalde, 2018) afirma que si a, b, c y d son cuatro magnitudes; se dice que a y b están en la misma razón que c y d (simbólicamente $a: b = c: d$); cuando para todo entero n y todo entero m se tienen las siguientes implicaciones, según los tres únicos casos posibles: (i) si $na > mb$ implica $nc > md$, (ii) si $na = mb$ implica $nc = md$, (iii) si $na < mb$ implica $nc < md$.

Sostiene también que, en una visión moderna, Eudoxo, está definiendo lo que se conoce como una cortadura en los números racionales, observando que la variación de m y n en los naturales, produce el universo de los números racionales positivos ($\mathbb{Q}^+$), de tal forma que se pueden escribir las anteriores condiciones como:

(i) Si $a: b = m: n$ entonces, $c: d = m: n$
(ii) Si $a: b > m: n$ entonces, $c: d > m: n$
(iii) Si $a: b < m: n$ entonces, $c: d < m: n$.

Agrega además que, con esta definición, si se toma como base la razón $a: b$, el universo de los racionales positivos $\mathbb{Q}^+$, quedaría fragmentado en tres o dos clases, dependiendo si a y b son conmensurables o no. Esta fragmentación se denomina una cortadura de $\mathbb{Q}^+$. Si a y b son conmensurables, se formará la clase (i) formada por el racional m/n. La clase (ii) de los racionales positivos menores que a/b y la clase (iii) de los racionales positivos mayores que a/b. Si las magnitudes son inconmensurables, se tiene que el conjunto de los racionales positivos quedará fragmentado sólo en las clases (ii) y (iii).

Recuerda también que en el siglo XIX, Dedekind probó que existen infinidad de cortaduras que no son producidas por números racionales, cada una de las cuales da origen a un número irracional que se considera completamente definido por ellas. En consecuencia, cada cortadura definida corresponde a un número racional o irracional y dos números son diferentes, siempre y cuando correspondan a cortaduras esencialmente diferentes.

(Recalde, 2018) también recalca que la definición 5 es esencial para el libro V, porque iguala relaciones cuantitativas de una manera operativa, y que, desde la perspectiva actual, se puede decir que en ella se encuentra un esbozo de caracterización de los números reales positivos.

De esta manera, es posible comparar magnitudes inconmensurables, como la longitud de la diagonal del cuadrado con la longitud del lado del mismo, como relación entre magnitudes homogéneas entre sí, pero no como relación entre números. En consecuencia, no es viable considerar la proporción en calidad de igualdad de fracciones en términos operativos. Al respecto, se afirma que: “la proporción es, por tanto, una comparación entre dos diferentes razones dadas y no un esquema operacional entre cuatro cantidades numéricas”. (Corry, 1994, p. 5). Esta afirmación se aclara con la proposición 2 del libro XII de los *Elementos* que dice: “Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros”.

Es claro que, con dicha definición, "Eudoxo eliminó la dificultad de expresar la razón entre dos cantidades inconmensurables, por cuanto al no definir la razón sino la proporción, que consiste en la igualdad de dos razones, utiliza un proceso que es independiente del carácter conmensurable o inconmensurable de los elementos proporcionales." (Babini, 1972, p. 6). En relación con esta definición, "Eudoxo introduce un principio, que hoy se conoce como *axioma de continuidad*, y que funciona en conexión con un método, este método recibe en la actualidad el nombre de *método de exhaución.*" (Babini, 1972, p. 6). Este principio y este método también fueron expuestos en el libro V de los *Elementos* de Euclides.

En la traducción de los *Elementos* de Euclides, de la Editorial Gredos, hecha por María Luisa Puertas Castaños[1], se anexa la siguiente nota cuando se hace referencia a la definición 5 del Libro V.

> (…) Suele considerarse que esta Def. V, 5, constituye la piedra angular de la teoría de la proporción. Desde luego, suministra un criterio necesario y suficiente de proporcionalidad. Por otro lado, además de su importancia sistemática, ha adquirido relieve en una perspectiva histórica. No sólo, podría ser una clave para determinar las relaciones entre el legado de Eudoxo y la reelaboración de Euclides; también reviste importancia, a la hora de apreciar la suerte conocida por las versiones posteriores por la teoría Euclídea misma. Por último, no estará demás advertir cierta diferencia entre la forma lógica de esta definición y la forma lógica de su aplicación habitual en las proposiciones demostradas por su mediación. La forma lógica de la Def. 5 viene a ser de una disyunción de conjunciones: a, b, c, d unas magnitudes del dominio de la teoría y m, n unos números naturales cualesquiera, se da una proporción $a : b :: c : d$ sí y sólo si: o $((m.a > n.b)$ y $(m.c > n.d))$ o $((m.a = n.b)$ y $(m.c = n.d))$ o $((m.a < n.b)$ y $(n.c < n.d))$. Sin embargo, la forma lógica de su aplicación en la proposición V 11, por ejemplo, corresponde más bien a una conjunción de condiciones: (si $m.a > n.b$, entonces $m.c > n.d$) y (si $m.a = n.b$, entonces $m.c = m.d$) y (si $m.a < n.b$, entonces $m.c < n.d$). Estas dos formas, de suyo, no son lógicamente equivalentes ni, por cierto, la primera implica la segunda. Pero en el contexto de la teoría devienen efectivamente equivalentes gracias a la suposición implícita de que las magnitudes consideradas constituyen un sistema de objetos totalmente ordenado. (Puertas, 1994, p.12).

Como ya lo mencionó Puertas en la interpretación de la definición V, una conjunción de condiciones no es lógicamente equivalente con la interpretación de la definición V empleando una disyunción de conjunciones, sino es bajo el marco de que las magnitudes conformen elementos de un sistema totalmente ordenado. En ese sentido surge la pregunta ¿Cómo pueden ser equivalentes las interpretaciones ya mencionadas por Puertas acerca de la definición V, si se asume la hipótesis de que las magnitudes forman un conjunto totalmente ordenado?

[1] Se hace la aclaración de que la Introducción General de la traducción de los *Elementos* de Euclides, llevada a cabo por María Luisa Puertas, es obra de Luis Vega.

Por otra parte, (Kline, 1972) enuncia la definición V como sigue:

Definición 5. Se dice que ciertas magnitudes están en la misma razón, la primera con la segunda y la tercera con la cuarta, cuando al tomar cualquier equimúltiplo de la primera y la tercera, y cualquier equimúltiplo de la segunda y la cuarta, el múltiplo de la primera es mayor, igual o menor que el de la segunda según que el de la tercera sea mayor, igual o menor que el de la cuarta.

Su interpretación establece que a: b = c: d si cuando se multiplica a y c por cualquier número entero m, y b y d por *cualquier* número entero n, sean cuales fueren m y n, se tiene que:

(i) $ma < nb$ implica $mc < nd$,
(ii) $ma = nb$ implica $mc = nd$, y
(iii) $ma > nb$ implica $mc > nd$.

Empleando términos numéricos y terminología actual, se propone el siguiente ejemplo: si $\sqrt{3}: 1 = \sqrt{15}: \sqrt{5}$ se debe probar, al menos en términos teóricos, que para cualesquier números enteros m y n:

Si $m\ (\sqrt{3}) > n\ (1)$ entonces $m\ (\sqrt{15}) > n\ (\sqrt{5})$
Si $m\ (\sqrt{3}) = n\ (1)$ entonces $m\ (\sqrt{15}) = n\ (\sqrt{5})$
Si $m\ (\sqrt{3}) < n\ (1)$ entonces $m\ (\sqrt{15}) < n\ (\sqrt{5})$.

Con este ejemplo se infiere que la igualdad $m\ (\sqrt{3}) = n\ (1)$ no es posible, ya que m y n son números enteros mientras que $\sqrt{3}$ es un número irracional, lo que significa que tampoco es posible que se dé la igualdad $m\ (\sqrt{15}) = n\ (\sqrt{5})$; es decir, la definición V establece únicamente que si alguna de las tres alternativas del lado izquierdo es cierta, también lo es el enunciado correspondiente del lado derecho. En otros términos, una forma equivalente de mencionar la definición V, sería que los enteros m y n, para los cuales $ma < nb$, son los mismos que los enteros $m´$ y $n´$, para los cuales $m´c < n´d$.

Definición 6. Llámense *proporcionales* las magnitudes que guardan la misma razón.

Al respecto de esta definición (Vega, 1994, citado por Puertas, 1994, p.77) afirma que es primordial saber que una proporción es una relación cuaternaria entre magnitudes, mas no es una identidad entre razones ni tampoco una igualdad entre dos objetos. Por ende, esta definición introduce el concepto de proporcionalidad. En este sentido se aprecia que la definición de proporción propuesta por Vega es distinta de la citada por Puertas.

En términos simbólicos se diría, dadas cuatro magnitudes c, d, e, f, sea c/d la razón de las dos primeras y e/f la razón de las restantes. Si $c/d = e/f$ entonces se dice que dichas magnitudes son proporcionales y viceversa. En un tono más tradicional $c : d :: e : f$. Euclides, que no usaba ninguna notación, diría “como c es a d, así e es a f”.

Definición 7. Entre los equimúltiplos, cuando el múltiplo de la primera excede al múltiplo de la segunda pero el múltiplo de la tercera no excede al múltiplo de la cuarta, entonces se dice que la primera con la segunda una razón mayor que la tercera con la cuarta.

De acuerdo con Vega, en términos actuales se puede expresar la definición 7 de la siguiente manera, "x es a y más que z a w sí y solo si se da $mx > ny$, pero no se da $mz > nw$, para algún m, n." (Vega, 1994, citado por Puertas, 1994, p. 78). Vega también considera que esta definición es una contribución de Euclides, y un criterio de *no proporcionalidad* respecto a la teoría de proporciones, como prueba de este hecho señala su uso implícito en la prueba de la proposición 18 del libro V que junto con otro supuesto tácito, esto es la existencia de una cuarta se obtiene la *propiedad de tricotomía*, y con esta última se producen, las demostraciones mediante reducción al absurdo. En consecuencia, este tipo de pruebas se cataloga dentro de las demostraciones indirectas de proporcionalidad, debido a que dadas dos magnitudes o razones cualesquiera, una magnitud o razón es mayor, igual o menor que la otra.

Se retoma la idea de establecer un orden entre razones de magnitudes, es decir, dadas las magnitudes a, b, c, d, supóngase que existen los m, n donde se verifique que: $ma > nb$ pero $mc < nd$. Entonces se deduce que $a/b > n/m > c/d$. Por lo tanto, que $a/b > c/d$ y existe una fracción n/m entre las dos razones.

Definición 8. Una proporción entre tres términos es la menor posible.

Esta definición nos dice que una proporción consta de tres o cuatro términos. Por ejemplo, en la denominada proporción continua, $a/b = b/c$, el término b se cuenta dos veces.

Definición 9. Cuando tres magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la tercera una razón duplicada de la que (guarda) con la segunda.

Una interpretación de este enunciado es que dadas tres magnitudes a, b, c proporcionales, es decir: $a/b = b/c$ se dice que a/c tiene una *razón duplica* de a/b. El apelativo de razón duplicada surge del siguiente suceso: $a/c = (a/b)\ (b/c) = (a/b)\ (a/b)$. Concluyendo que, a/c es el cuadrado de a/b.

Definición 10. Cuando cuatro magnitudes son proporcionales, se dice que la primera guarda con la cuarta una razón triplicada de la que (guarda) con la segunda, y así siempre, sucesivamente, sea cual fuere la proporción.

Esto es, dadas cuatro magnitudes a, b, c, d que cumplen las siguientes proporciones $a/b = b/c$ y $b/c = c/d$, entonces a/d guarda una *razón triplicada* con a/b y así sucesivamente. En efecto, $a/d = (a/d)\ (b/b)\ (c/c) = (a/b)\ (b/c)\ (c/d) = (a/b)\ (a/b)\ (a/b)$. Así a/d es la razón triplicada de a/b y así sucesivamente cuadruplicada, quintuplicada,…

Definición 11. Se llama magnitudes correspondientes las antecedentes en relación con las antecedentes y las consecuentes con las consecuentes.

En la proporción $a/b = c/d$ entre cuatro magnitudes, a y c (antecedentes) y b, d (consecuentes) se dice que son *correspondientes.*

Definición 12. Una razón por *alternancia* consiste en tomar el antecedente en relación con el antecedente y el consecuente en relación con el consecuente.

Si $a/b = c/d$ entonces $a/c = b/d$

Definición 13. Una razón por *inversión* consiste en tomar el consecuente como antecedente en relación con el antecedente como consecuente.

Esto quiere decir que en vez de la razón a/b se considera la razón b/a.

Definición 14. La composición de una razón consiste en tomar el antecedente junto con el consecuente como una sola (magnitud) en relación con el propio consecuente.

En este sentido, composición equivale a decir suma. La razón a/b se convierte en la suma $(a + b)/b$, en términos de proporciones, si $a/b = c/d$ entonces $(a + b)/b = (c + d)/d$

Definición 15. La separación de una razón consiste en tomar el exceso por el que el antecedente excede al consecuente en relación con el propio consecuente.

Es decir, la razón a/b se convierte en $(a – b)/b$. En términos de proporción, si $a/b = c/d$ entonces $(a - b)/b = (c - d)/d$.

Definición 16. La conversión de una razón consiste en tomar el antecedente en relación con el exceso por el que el antecedente excede al consecuente.

Lo que equivale a decir que la razón a/b se transforma en $a/(a - b)$. Para una proporción se infiere que, si $a/b = c/d$ entonces $a/(a - b) = c/(c - d)$.

Definición 17. Una razón por *igualdad* se da cuando, habiendo varias magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, sucede que como la primera es a la última – entre las primeras magnitudes –, así – entre las segundas magnitudes – la primera es la última; o, dicho de otro modo, consiste en tomar los extremos sin considerar los medios.

Una interpretación de esta definición dice que si las magnitudes $a, b, c, d, \ldots j, k$ y otras iguales en número $a', b', c', d', \ldots j', k'$ se dice que son proporcionales si al tomar por pares de razones entre los dos grupos de magnitudes, es decir, de la siguiente manera: $a/b = a'/b'$, $b/c = b'/c'$, $c/d = c'/d'$, …, $j/k = j'/k'$. Y después igualando el producto de las razones de los lados izquierdo y derecho de todas las igualdades anteriores, esto es $(a/b)\,(b/c)\,(c/d)\ldots(j/k) = (a'/b')\,(b'/c')\,(c'/d')\ldots(j'/k')$ se obtiene como resultado de la simplificación de términos que: $a/k = a'/k'$. Esta última parte se expresa diciendo que "la primera magnitud es a la última, en el primer grupo, así la primera es a la última, en el segundo grupo". Obsérvese que esta definición tiene más similitud con una proposición que con un teorema (para mayor información consúltese la Proposición 17 del Libro V).

Definición 18. Una proporción *perturbada* se da cuando habiendo tres magnitudes y otras iguales a ellas en número, sucede que como al antecedente es al consecuente – entre las primeras magnitudes –, así – entre las segundas magnitudes – el antecedente es al consecuente, y como el consecuente es a alguna otra (magnitud) – entre las primeras magnitudes –, así – entre las segundas magnitudes – alguna otra (magnitud) es el antecedente.

Las ternas de magnitudes *a, b, c* y *a', b', c'* guardan una proporción perturbada cuando se cumple que $a/b = a'/b'$ y $b/c = a'/b'$, de aquí se obtiene como consecuencia que $a/c = a'/c'$. Obsérvese que esta definición es un caso particular de la definición 17.

Después de haber mostrado las anteriores definiciones, Euclides presentó 25 teoremas y dos porismas sobre magnitudes y razones entre magnitudes. Históricamente, el libro V representó una salida conceptual al problema de la relación cuantitativa utilizando sólo el referente numérico de los enteros positivos. Como se sabe, los antiguos griegos no manejaban el concepto de número irracional. Esto se presentaba como una limitación en los primeros libros, pues se carecía de un sistema de referencia al cual amarrar una teoría de la medida. En el libro V, justamente a partir de la teoría de proporciones, Eudoxo logró satisfacer de alguna manera esta carencia.

Así que, en la mención de las proposiciones del Libro V y una interpretación en terminología matemática actual bastará para mostrar cómo Eudoxo dedujo las propiedades de las proporciones y los elementos de una teoría abstracta de razón a partir de sus definiciones. Las proposiciones son las siguientes:

3.2 Proposiciones

Proposición 1. Si hay un número cualquiera de magnitudes respectivamente equimúltiplos de cualesquiera otras magnitudes iguales en número, cuantas veces una sea múltiplo de otra, tantas veces lo serán todas de todas.

Interpretación algebraica: $[m\,(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)] = mx_1 + mx_2 + \ldots + mx_n$.

Proposición 2. Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda, que una tercera de una cuarta, y una quinta es también el mismo múltiplo de la segunda que una sexta de la cuarta, la suma de la primera y la quinta será el mismo múltiplo de la segunda que la suma de la tercera y la sexta de la cuarta.

Interpretación algebraica: Si m y n enteros, se tiene que: $(m + n)\,x = mx + nx$.

Proposición 3. Si una primera (magnitud) es el mismo múltiplo de una segunda que una tercera de una cuarta, y se toman equimúltiplos de la primera y la tercera, también por igualdad cada una de las dos (magnitudes) tomadas serán equimúltiplos, respectivamente, una de la segunda, y la otra de la cuarta.

Interpretación algebraica: $m(nx) = (mn)x$.

Proposición 4. Si una primera (magnitud) guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera guardarán la misma razón con cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta respectivamente, tomados en el orden correspondiente.

Interpretación algebraica: Si $w/x = y/z$, entonces para todo m y n (donde m y n son números enteros) se tiene que $mw/nx = my/nz$.

Proposición 5. Si una magnitud es el mismo múltiplo de otra que una (magnitud) quitada (a la primera) lo es de otra quitada (a la segunda), la (magnitud) restante (de la primera) será también el mismo múltiplo de la (magnitud) restante (de la segunda) que la (magnitud) entera de la (magnitud) entera.

Interpretación algebraica: $m(x – y) = mx – my$.

Proposición 6. Si dos magnitudes son equimúltiplos de dos magnitudes y ciertas (magnitudes) quitadas de ellas son equimúltiplos de estas (dos segundas), las restantes también son iguales a las mismas o equimúltiplos de ellas.

Interpretación algebraica: $(m – n)x = mx – nx$.

Proposición 7. Las (magnitudes) iguales guardan la misma razón con una misma (magnitud) y la misma (magnitud) guarda la misma razón con las (magnitudes) iguales.

Interpretación algebraica: Si $x = y$, entonces $x/z = y/z$ y $z/x = z/y$

Porisma 1: Si algunas magnitudes son proporcionales, también son proporcionales por inversión.

Interpretación algebraica: Si $w/x = y/z$ entonces $x/w = z/y$.

Proposición 8. De magnitudes desiguales, la mayor guarda con una misma (magnitud) una razón mayor que la menor, y la misma (magnitud) guarda con la menor una razón mayor que con la mayor.

Interpretación algebraica: Si $y > x$ entonces $y/z > x/z$ y $z/x > z/y$.

Proposición 9. Las (magnitudes) que guardan con una misma (magnitud) la misma razón son iguales entre sí; y aquellas con las que una misma (magnitud) guarda la misma razón, son iguales.

Interpretación algebraica: Si $x/z = y/z$ entonces $x = y$. Y si $z/x = z/y$ entonces $x = y$.

Proposición 10. De las (magnitudes) que guardan razón con una misma (magnitud), la que guarda una razón mayor, es mayor. Y aquella con la que la misma (magnitud) guarda una razón mayor, es menor.

Interpretación algebraica: Si $x/z > y/z$ entonces $x > y$; por otra parte, si $z/x > z/y$ entonces $y > x$.

Proposición 11. Las razones que son iguales a una misma razón son también iguales entre sí.

Interpretación algebraica: Si $u/v = w/x$ y $w/x = y/z$ entonces $u/v = y/z$.

Proposición 12. Si un número cualquiera de magnitudes fueren proporcionales, como sea una de las antecedentes a una de las consecuentes, así serán todas las antecedentes a las consecuentes.

Interpretación algebraica: Si $x_1/y_1 = x_2/y_2 = \ldots = x_n/y_n$ entonces

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)/(y_1 + y_2 + \ldots + y_n) = x_i/y_i \text{ donde } i = 1, 2, \ldots, n$$

Proposición 13. Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y la tercera guarda con la cuarta una razón mayor que una quinta con una sexta, la primera guardará también con la segunda una razón mayor que la quinta con la sexta.

Interpretación algebraica: Si $u/v = w/x$ y $w/x > y/z$, entonces $u/v > y/z$.

Proposición 14. Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta y la primera es mayor que la tercera, la segunda será también mayor que la cuarta, y si es igual, será igual, y si menor, menor.

Interpretación algebraica: Si $w/x = y/z$ y w $(>, =, <)$ y, entonces x $(>, =, <)$ z.

Proposición 15. Las partes guardan la misma razón entre sí que sus mismos múltiplos, tomados en el orden correspondiente.

Interpretación algebraica: $x/y = nx/ny$.

Proposición 16. Si cuatro magnitudes son proporcionales, también por alternancia serán proporcionales.

Interpretación algebraica: Si $w/x = y/z$, entonces $w/y = x/z$.

Proposición 17. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por separación serán proporcionales.

Interpretación algebraica: Si $(w + x)/x = (y + z)/z$ entonces $w/x = y/z$.

Proposición 18. Si unas magnitudes son proporcionales por separación, también por composición serán proporcionales.

Interpretación algebraica: Si $w/x = y/z$ entonces $(w + x)/x = (y + z)/z$.

Proposición 19. Si como un todo es a otro todo, así una (parte) quitada (de uno) a una (parte) quitada (de otro), la (parte) restante será también a la (parte) restante como el todo es al todo.

Interpretación algebraica: Si $(w + x)/ (y + z) = w/y$, entonces $(w + x)/ (y + z) = x/z$.

Porisma 2. Si unas magnitudes son proporcionales por composición, también por conversión serán proporcionales.

Interpretación algebraica: Si $(u + v)/ (x + y) = v/y$, entonces $(u + v)/ (x + y) = u/x$.

Proposición 20. Si hay tres magnitudes y otra iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y sí, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual, y si es menor, menor.

Interpretación algebraica: Si $u/v = x/y$, $v/w = y/z$ y se tiene que si u (>, =, <) w, entonces x (>, =, <) z.

Proposición 21. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón y su proporción es perturbada, y si, por igualdad, la primera es mayor que la tercera, también la cuarta será mayor que la sexta; y si es igual, igual; y si es menor, menor.

Interpretación algebraica: Si $u/v = y/z$ y $v/w = x/y$, como también u (>, =, <) w, entonces x (>, =, <) z.

Proposición 22. Si hay un número cualquiera de magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, por igualdad guardarán la misma razón.

Interpretación algebraica: Si $x_1/x_2 = y_1/y_2$, $x_2/x_3 = y_2/y_3, \ldots$, y $x_{n-1}/ x_n = y_{n-1}/y_{n-1}$, entonces $x_1/ x_n = y_1/ y_n$.

Proposición 23. Si hay tres magnitudes y otras iguales a ellas en número que, tomadas de dos en dos, guardan la misma razón, y su proporción es perturbada, por igualdad guardarán también la misma razón.

Interpretación algebraica: Si $u/v = y/z$ y $v/w = x/y$, entonces $u/w = x/z$.

Proposición 24. Si una primera (magnitud) guarda con una segunda la misma razón que una tercera con una cuarta, y una quinta guarda con la segunda la misma razón que la sexta con la cuarta, la primera y la quinta, tomadas juntas, guardarán también la misma razón con la segunda que la tercera y la sexta con la cuarta.

Interpretación algebraica: Si $u/v = w/x$ e $y/v = z/x$, entonces $(u + y)/v = (w + z)/x$.

Proposición 25. Si cuatro magnitudes son proporcionales, la mayor y la menor (juntas) son mayores que las dos restantes.

Interpretación algebraica: Si $w/x = y/z$, $w > x$ y $w > y$, $x > z$ e $y > z$, entonces $w + z > x + y$.

Capítulo 2

4. LA TEORÍA DE LAS CORTADURAS DE DEDEKIND (TCD)

La Matemática, como todos los restantes temas, debe ser ahora sometida al microscopio, y revelar al mundo cualquier debilidad que pueda existir en sus fundamentos.

F.W. Westaway

La fundamentación de los números, a lo largo de la historia de las matemáticas ha sido un proceso largo y complejo. Al respecto, Hilbert en su libro *Fundamentos de las Matemáticas*, afirma:

> Tomando como punto de partida el concepto de número 1, se piensa normalmente que los demás números enteros positivos 2, 3, 4, … , así como las leyes que rigen sus operaciones, surgen gracias al proceso de contar. Se pasa después, debido a la exigencia de generalidad de la sustracción, al número negativo. Luego puede definirse el número fraccionario, por ejemplo, con un par de números – se tiene entonces que toda función lineal posee una raíz – y finalmente a un *número real* como *una cortadura* o como una sucesión fundamental (…). (Hilbert, 1993, p. 17).

En la Historia de las Matemáticas, es apenas en la Edad Media y en el Renacimiento cuando, en Europa, tratan de incorporarse los logros matemáticos de Oriente, entre ellos se encuentra el sistema de numeración posicional, el cual facilitaba los procedimientos algorítmicos. La matemática Hindú ya había empleado los números negativos y el cero, encontrando sentido práctico para estos números con el uso de terminologías como las del 'debe y haber'. De esta manera, la noción de número, durante estas épocas, era ante todo de carácter pragmático. Tal es el caso del excepcional aporte de Oresme, (1223 – 1382), al inventar, entre sus contribuciones matemáticas importantes, una especie de operadores y reglas equivalentes a las actuales leyes sobre exponentes, lo mismo que notaciones específicas para potencias fraccionarias e irracionales, junto con un modelo geométrico, tratando de representar para calcular. Todas estas contribuciones las desarrolló a partir de consideraciones muy ingeniosas sobre una posible extensión de las proporciones.

En el Renacimiento surge la pregunta ¿las fracciones y los números negativos son verdaderos números? Entre quienes avanzaron para dar respuesta a este interrogante, en procura de fundamentar el estudio de los números, está Simón Stevin quien en su obra *La Disme,* propuso la siguiente definición: "número es aquello mediante lo que se explica la magnitud de alguna cosa" (Simon, 1585, citado por Ferreirós, 1998, p. 8). Ferreirós afirma que esta definición de número no es nada original ya que trata de comparar ‘número’ con ‘proporción entre magnitudes’; de esta manera la TPE se convierte en base para la aritmética. (Moreno, 1991) afirma que Stevin asumió desde su perspectiva y su propia experiencia una actitud crítica hacia el concepto de *arithmos*, proveniente de la matemática griega, y que en cambio depositó su confianza por el sistema digital y posicional arábigo, cuestión que sale fuera de las intenciones del marco teórico de los griegos.

Mucho más adelante, Newton marca una diferencia con respecto a los griegos, y propone su definición:

> Entendemos por número no tanto una multitud de unidades cuanto la razón entre una cantidad abstracta cualquiera y otra del mismo género que se toma por unidad. (Newton citado por Ferreirós, 1998, p.8).

(Ferreirós, 1998) asevera que el avance logrado es que se denomina ‘número’ a cualquier proporción que se encuentre, alcanzando una *gran parte* de los números reales positivos.

“Charles Méray puso en evidencia el hecho de definir el número irracional como el límite de una sucesión de números racionales, pero no tuvo en cuenta el hecho de que la existencia del límite presupone una definición de los números reales.” (Collete, 1985, p. 364).

Por su parte, (Collete, 1985) sostiene que Weierstrass intentó separar el cálculo diferencial e integral de la geometría, fundamentando estos campos sobre el concepto de número sin aludir al concepto de límite. Su teoría consistió básicamente en, eludir la existencia previa de los límites y en, agregar números racionales.

Finalmente se llega al tema en cuestión, no sin antes decir que lo que provocó el estudio de una teoría adecuada para los números irracionales fue la búsqueda de fundamentos para el análisis matemático. Pero los números irracionales no fueron el único obstáculo en la fundamentación del marco teórico aritmético, sino que el tema de discusión incluía además el problema de buscar cómo otorgar el status de número, tanto a los números negativos como a los números imaginarios. Para una ilustración breve y clara de esta situación, se menciona lo dicho por Hamilton a principios del siglo XIX:

> (…) no ha sucedido con los principios del Álgebra lo mismo que con los principios de la Geometría. (…) Pues no requiere especial escepticismo dudar, o incluso no creer, la doctrina de Negativos e Imaginarios (…), cuando se propone, (como ha sido común), con principios como estos: que *una magnitud mayor puede ser sustraída de una menor*, y que el resto es *menor que nada*; que dos *números negativos*, o números que denotan cantidades menores que nada; pueden ser *multiplicados* uno por otro, y que el producto será un número *positivo*, o un número que denota una cantidad mayor que nada; y que aunque

> el *cuadrado* de un número, o el producto obtenido al multiplicar ese número por sí mismo, es por tanto *siempre positivo*, ya sea el número positivo o negativo, con todo pueden encontrarse o concebirse o determinarse números, llamados *imaginarios*, con los que se opera con todas las reglas de los números positivos y negativos, como si estuvieran sometidos a esas reglas, *aunque tienen cuadrados negativos*, y por tanto debe suponerse que no son números positivos ni negativos, ni tampoco nulos, de modo que las magnitudes que se supone que denotan no pueden ser mayores que nada, ni menores que nada, ni siquiera iguales a nada. Debe ser difícil fundar una CIENCIA sobre principios como éstos, por más que las formas de la lógica puedan construir a partir de ellos un sistema de expresiones simétrico, y por mucho que se pueda aprender un arte práctica de aplicar correctamente reglas útiles que parecen depender de ellos (Hamilton, 1837, citado por Ferreirós, 1998, p. 11).

Como señala (Ferreirós, 1998), en cuanto a la discusión de la aceptación de los números negativos, ya se disponía de la representación geométrica de estos números sobre la recta real. Para el caso de los números imaginarios, hubo que esperar a Gauss y Argand, quienes ofrecieron una interpretación geométrica de los números complejos a principios del siglo XIX.

Volviendo al tema central, (Collete, 1985) señala que Hamilton propuso la idea de la partición de los números racionales en dos clases, definiendo al número irracional como el representante de tal partición. Si *A* y *B* son dos conjuntos de números racionales tal que cada elemento de *A* es menor que cada individuo de *B*, y adicionalmente si los de *A* y *B* están definidos en extensión,[2] puede ocurrir que no exista ningún número racional entre *A* y *B*. Hamilton llego a este pensamiento a partir de la intuición de continuidad del tiempo. Por otra parte, (Ferreirós, 1998) afirma que la obra de Hamilton, *Lectures on Quaternios* (1853), sirvió de inspiración a muchos matemáticos, entre ellos a Dedekind.

Por lo anteriormente expuesto se puede inferir que la definición de cortadura no es original de Dedekind, porque las reflexiones de Dedekind sobre los números irracionales se originaron en 1858, tal como él mismo lo manifiesta en el prólogo de *¿Qué son y para qué sirven los números?* (*Was sind und was sollen die Zahlen*), cinco años después de la obra de Hamilton. Sin embargo, el desarrollo de la propuesta de Hamilton para el tratamiento de los números irracionales se limitó básicamente a determinar los números irracionales mediante los números racionales.

(Recalde, 2018) manifiesta que un punto culminante en la conceptualización de los números irracionales sucede en el siglo XIX, cuando se establece un "matrimonio" entre número y magnitud (…), y que solo las construcciones de los números reales, mediante sucesiones

[2]"(…) el acto que permite pasar de un dominio, bien definido estructuralmente, a otro más rico e igualmente bien definido, que conserva intacta la estructura del primero". (Arbeláez y Gálvez, 2011. pp. 153 – 154).

fundamentales de Cantor y cortaduras de Dedekind, brinda la posibilidad de caracterizar completamente a $\mathbb{R}$, no sólo a las raíces no exactas, sino también a números trascendentes como π y e, entre otros.

Las anteriores ideas, relacionadas con el tratamiento de algunas problemáticas asociadas al desarrollo histórico de los números reales ($\mathbb{R}$), ofrecen antecedentes epistemológicos y filosóficos para abordar el momento crucial de dicho proceso, la creación de los números reales en el siglo XIX. Particularmente la teoría de cortaduras de Richard Dedekind (1831-1916); en este sentido, cabe hacer alusión a la siguiente frase:

Los números son la libre creación de la mente humana. (Dedekind, R.)

Dado que, en la Historia de las Matemáticas, Dedekind fue un Logicista y, sin duda, uno de los matemáticos más notables del siglo XIX; esta corta frase, que sirve de epígrafe, pone de manifiesto su posición filosófica en torno al origen de los números. A diferencia de Kronecker, para quien los números naturales anteceden al hombre, Dedekind consideraba que los números en general son producto de la mente sin otras consideraciones en cuanto a su origen. De ahí que, algunas de sus ideas, al igual que las de Georg Cantor, eran revolucionarias para su época y sólo fueron comprendidas y adoptadas después de su muerte. Junto con Galois, Dedekind es considerado además como uno de los fundadores del álgebra moderna.

Hacia el año de 1858 cuando, como profesor, tuvo a su cargo, el curso de cálculo diferencial e integral, en el Politécnico de Zúrich, Dedekind se dio cuenta de la carencia de fundamento lógico adecuado de la aritmética de los números reales y, rechazaba el tener que recurrir a la evidencia geométrica para demostrar ciertos teoremas, como, por ejemplo, el que establece que "*toda magnitud que crece de manera continua pero no sin límite, debe aproximarse a un valor límite*". Dedekind consideraba inadmisible recurrir a la intuición geométrica en los inicios de la enseñanza del cálculo diferencial. A pesar de que si consideraba útil, desde el punto de vista didáctico, el tener que apelar a dicha intuición, no le daba validez legítimamente matemática a este recurso. Fue entonces, cuando se propuso reflexionar detenidamente para encontrar una fundamentación puramente aritmética y perfectamente rigurosa de los principios del análisis infinitesimal, y, según él, debido a que:

> Se dice muy frecuente que el cálculo infinitesimal se ocupa de magnitudes continuas y sin embargo no se proporciona nunca una explicación de esta continuidad,…, sino que apelan más bien apelan a representaciones geométricas, (…) (Dedekind, citado por Bares y Climent, 1998, p. 1).

(Bares y Climent,1998) en la traducción de la obra de Dedekind titulada *Continuidad y Números Irracionales* dicen que es oportuno recordar que el cálculo del siglo XVIII hacía uso de nociones como las de infinitésimo y cantidad evanescente, las cuales no tenían una fundamentación adecuada. El trabajo de Dedekind en este tema, consistió en descubrir su auténtico origen en los elementos de la aritmética y en el logro de una legitima definición de continuidad, consignada el 24 de Noviembre de 1858. Debido a que, en aquella época, el dominio de variación de las variables, que era la recta real, estaba lleno de vaguedades y confusiones, se juzga que históricamente fue necesario pasar primero por una definición irreprochable de la continuidad de funciones reales antes de llegar a una construcción rigurosa de los números reales. Y, precisamente, con motivo de su preocupación didáctica, en los inicios de la enseñanza del cálculo diferencial, se propuso buscar y encontrar una construcción del conjunto de los números reales a partir de los enteros. Al respecto manifestaba que:

> Sobre el concepto de una magnitud variable que tiende hacia un valor límite fijo y, en particular, para probar el teorema de que toda magnitud que crece indefinidamente, pero no más allá del límite, debe necesariamente tender hacia un valor límite, yo buscaba refugio en las evidencias geométricas. Incluso ahora, admitir así la intuición geométrica en la primera enseñanza del cálculo diferencial me parece, desde el punto de vista didáctico, extraordinariamente útil, incluso indispensable, si no se quiere perder tiempo. Pero nadie negará que esta manera de introducirlo no pueda de ninguna manera pretender tener un carácter científico. Mi sentimiento de insatisfacción fue tan poderoso que tomé la firme decisión de reflexionar hasta encontrar un fundamento puramente aritmético y perfectamente riguroso de los principios del análisis infinitesimal. (Dedekind, 1872, Bares y Climent, 1998).

En efecto, como resultado de una profunda reflexión sobre este problema, pudo darse cuenta de que "la clave de la solución debería ser buscada en el concepto del continuo, visto como un concepto de *orden*, y no bajo la analogía geométrica que era usualmente aceptada" (Corry, 1994, p.5).

Teniendo en cuenta que en torno al concepto de número, en aquella época se presentaban muchos problemas, Dedekind pensaba en la necesidad de definir todos los números utilizando una palabra genérica que no hiciera evocación del número mismo. Para tal efecto se propuso buscar un conjunto que pudiera ponerse en correspondencia biunívoca con los números y que, al mismo tiempo, pudiera describirse desde el exterior. Esta situación lo condujo a encontrar su método de construcción de los números reales, que se conoce con el nombre de cortaduras de Dedekind.

(Collete, 1985) afirma que Dedekind, previamente al inicio del estudio de los números irracionales, presupone el desarrollo de la aritmética de los números racionales y, a continuación establece una comparación entre los números racionales y los puntos de la recta numérica y presenta su estudio de la continuidad de la misma. Entonces, desde el comienzo, llama la atención acerca del hecho de que en una línea recta existe una infinidad de puntos que no corresponden a números racionales y, por lo tanto, la recta es infinitamente más rica en puntos individuales que el dominio de los números racionales en números individuales. A partir de esto se propone completar el dominio de los números, mediante la creación de nuevos números, de tal manera que el campo de los números llegara a tener la misma *"continuidad"* que la línea recta.

Dedekind, insatisfecho con los métodos habituales para introducir los números irracionales propone, en cambio, "que la aritmética se desarrolle a partir de sí misma" y, en consecuencia, el problema quedaba reducido, de esta manera, a la determinación aritmética de la continuidad y, hace entonces la pregunta: "¿En qué consiste esta continuidad? Todo depende de la respuesta a esta cuestión y, solo mediante ella obtendremos una base científica para la búsqueda de todos los dominios continuos" (Collete, 1985, p. 373).

En estas condiciones, según Dedekind, el problema residía en indicar una característica precisa de la continuidad que pudiera servir de base para deducciones válidas, y para él es necesario, la continuidad de manera puramente matemática, es decir, tomando como punto de partida la aritmética de los números naturales y sus operaciones. Debido a que los números racionales se podían definir rigurosamente a partir de los números enteros.

(Arbeláez y Gálvez, 2011) señalan tres propiedades importantes del dominio de los números racionales ($\mathbb{Q}$), estas son: *transitividad*, *densidad* y *cortadura*, donde mencionan que la última característica se considera tan natural que ninguna persona antes que Dedekind la había enunciado. Sin embargo, esta propiedad constituiría la clave epistemológica para dilucidar a los números reales, ya que en ella se encuentra la esencia de la continuidad. Por otra parte, estos mismos autores sostienen que los anteriores atributos identifican a $\mathbb{Q}$ como un dominio unidimensional, con un orden total y que se equipara a la recta geométrica si se piensa en ésta como un conglomerado de puntos.

Antes de señalar las propiedades de los números racionales considera, de que a pesar de presuponer el desarrollo de la aritmética de los mismos, le "parece conveniente resaltar algunos de los momentos principales sin entrar en detalles, simplemente para indicar de antemano el punto de vista al que se atendrá en lo sucesivo". (Dedekind citado por Ferreirós, 1998, p. 80).

Teniendo en cuenta que Dedekind consideró a la aritmética, en su conjunto "como una consecuencia necesaria, o al menos natural, del acto aritmético más simple, el de contar y, contar como la creación sucesiva de la sucesión infinita de los números enteros positivos, en la cual cada individuo se define por el que le precede inmediatamente" (Ferreirós, 1998, p. 80), señala las siguientes leyes o propiedades de los números racionales:

I. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Siempre que a, c sean dos números distintos (o desiguales) y que b sea mayor que uno de ellos y menor que el otro, queremos expresarlo, sin temor a la reminiscencia de representaciones geométricas, diciendo: b está entre los números a y c.

II. Si a y c son números distintos, existen siempre infinitos números b que están entre a y c.

III. Si a es un número determinado, todos los números del sistema $\mathbb{Q}$ se descomponen en dos clases, A_1, A_2, cada una de las cuales contiene infinitos individuos; la primera clase A_1 abarca todos los números a_1 que son $< a$, la segunda clase A_2 abarca todos los números a_2 que son $> a$; el número a puede asignarse arbitrariamente a la primera o a la segunda clase, y de acuerdo con ello es o bien el mayor número de la primera clase o el menor de la segunda. En cada caso la división del sistema $\mathbb{Q}$ en las dos clases A_1 y A_2 es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2.

Dedekind, mencionando por Ferreirós, 1998 afirma que los números racionales, junto con las cuatro operaciones aritméticas básicas, alcanzan una riqueza inagotable para el espíritu humano. También sostiene que este sistema (los números racionales) posee una autonomía y satisfacen la propiedad de cerradura, característica de un campo. Donde la propiedad de cierre es consistente con las operaciones básicas, siempre ejecutables entre dos elementos arbitrarios de $\mathbb{Q}$, haciendo la única salvedad de la división por 0.

Dedekind también hace énfasis en que una propiedad importante de $\mathbb{Q}$ es que constituye un dominio unidimensional bien ordenado, infinito en ambas direcciones opuestas. Y que esta propiedad queda suficientemente clara con la elección de expresiones tomadas de las representaciones geométricas; señalando el hecho que la propiedad aritmética correspondiente, es independiente de las representaciones ajenas a ella.

Al hacer la comparación de los números racionales con los puntos de la recta, Dedekind afirma que:

Las propiedades de $\mathbb{Q}$ ya mencionadas, recuerdan las relaciones recíprocas de posición entre los puntos de una línea recta L. Distinguiéndose en la recta dos direcciones opuestas que en ella existen como 'izquierda' y 'derecha'; hay que añadir que si p y q son dos puntos distintos,

Las propiedades de los números racionales recién indicadas nos recuerdan las relaciones del lugar recíprocas entre los puntos de una línea recta L. Si distinguimos las dos direcciones opuestas que en ella existen como 'izquierda' y 'derecha', y si p, q son dos puntos distintos, entonces p está a la derecha de q, y al mismo tiempo q se encuentra a la izquierda de p, y la siguiente opción es q este a la derecha de p, y a la vez p se ubique a la izquierda de q. Falta decir, que si p y q son puntos distintos, entonces un tercer caso no es posible. Teniendo en cuenta lo anteriores hechos, suceden las siguientes leyes:

I. Si p está a la derecha de q, y q a la derecha de r, entonces también p está a la derecha de r; y se dice que q está entre los puntos p y r.

II. Si p, r son dos puntos distintos, hay siempre infinitos puntos q que están entre p y r.

III. Si p es un determinado punto de L, todos los puntos de L se descomponen en dos clases, P_1 y P_2, cada una de los cuales contiene infinitos elementos; la primera clase P, abarca todos los puntos p_1 que están a la izquierda de p, y la segunda clase P_2, contiene todos los puntos p_2 que están a la derecha de p; donde el punto p puede asignarse arbitrariamente a la primera o la segunda clase.

Dedekind citado por Ferreirós, 1998 afirma que en cada caso, la descomposición de la recta L en ambas clases, P_1 y P_2, es tal que todo punto de la primera clase P_1 está a la izquierda de cada punto de la segunda clase P_2. Como ya se mencionó anteriormente, esta analogía entre los números racionales y los puntos de una recta se convierte en una correlación si se toma en la recta geométrica un determinado origen o punto cero (**o**) y una unidad de medida para la medida de segmentos. En consecuencia, todo número racional a tiene una longitud correspondiente, donde dicha longitud se traslada hacia la derecha o hacia la izquierda, dependiendo de si a es positivo o negativo, alcanzando un determinado punto final p que es el punto correspondiente al número a;

añadiendo el hecho de que al número racional cero le corresponde el punto **o**. En términos generales, a cada número racional a, le corresponde un y solo un punto p, o lo que es lo mismo un individuo de L. Es decir, si a dos números a, b les corresponden respectivamente los puntos p, q y si $a > b$, entonces p está a la derecha de q.

Como efecto de lo anterior ocurre que a las leyes de los números racionales, I, II y III le corresponden las propiedades I, II y III de los puntos de la recta.

A continuación Dedekind analiza detenidamente la continuidad de la línea recta, en los siguientes términos:

> Es de la mayor importancia el hecho de que en la recta L hay infinitos puntos que no corresponden a ningún número racional. Si al punto p le corresponde el número racional a, como se sabe la longitud op es conmensurable con la unidad de longitud invariable empleada para la construcción, esto es, existe una tercera longitud, llamada medida común, de la cual ambas longitudes son múltiplos enteros. Pero ya los antiguos griegos supieron y demostraron que existen longitudes que son inconmensurables con una unidad de longitud dada, por ejemplo la diagonal del cuadro cuyo lado es la unidad de longitud. Si esa longitud se lleva desde el punto o sobre la recta, se obtiene un punto final al que no corresponde ningún número racional. Como además se puede demostrar fácilmente que existen infinitas longitudes que son inconmensurables con la unidad de medida, podemos afirmar: la recta L es infinitamente más rica en individuos-punto que el dominio $\mathbb{Q}$ de los números racionales en individuos-número.
>
> Si ahora pretendemos, como ciertamente es nuestro deseo, seguir aritméticamente todos los fenómenos de la recta, los números racionales no bastan para ello, y por tanto es imprescindible refinar esencialmente el instrumento $\mathbb{Q}$, que fue construido mediante la creación de los números racionales, mediante la creación de nuevos números tales que el dominio numérico adquiera la misma completud o, como queremos decir igualmente, la misma $continuidad$ que la línea recta.
>
> Las consideraciones precedentes son tan conocidas y familiares para todos, que muchos habrán considerado superflua su repetición. Sin embargo esta recapitulación me pareció necesaria para preparar apropiadamente la cuestión principal. La introducción de los números irracionales habitual hasta el momento se refiere directamente a la noción de magnitud extensiva –que nunca es definida rigurosamente- y define el número como el resultado de la medición de una tal magnitud mediante otra homogénea”. (Dedekind citado por Ferreirós, 1998, pp. 83 - 84.)

A continuación, se enfatiza la siguiente exigencia "la aritmética debe desarrollarse a partir de sí misma" (Dedekind, citado por Ferreirós, 1998, p. 84.) Dedekind también afirmó que las representaciones no aritméticas motivaron la extensión de la noción de número, exceptuando el caso de los números complejos; pero que esto no justifica bajo ninguna circunstancia que esas consideraciones ajenas al campo aritmético constituya la ciencia de los números. Y de la misma manera en que los racionales se obtienen de los numeros enteros mediante una creación libre, los números irracionales deben ser deducidos a partir de los números racionales.

Por otra parte, la comparación del dominio $\mathbb{Q}$ con los puntos de la recta, ha llevado al reconocimiento de la lacunariedad, incompletitud o discontinuidad de $\mathbb{Q}$, caso contrario sucede en la recta, a la que se atribuye completitud, carencia de lagunas o continuidad. De esa manera, Dedekind se formula la siguiente pregunta "¿En qué consiste propiamente esta continuidad?, a la cual él mismo responde que lo que se busca es "una característica precisa de la continuidad que pueda emplearse como base para auténticas deducciones" (Dedekind citado por Ferreirós, 1998, p. 84).

Dedekind dice que la observación, que en apariencia carece de importancia, es justamente lo que necesita para determinar la continuidad, esta característica se enuncia como: "cada punto de una línea recta produce una separación en dos porciones de tal manera que, cada punto de una porción está situado a la izquierda de cada punto de la otra porción". (Dedekind, citado por Ferreirós, 1998, p. 84). De esta manera Dedekind encuentra la esencia de la continuidad en el enunciado inverso, que lo formula de la siguiente manera:

> Si todos los puntos de la recta se descomponen en dos clases tales que todo punto de la primera clase está a la izquierda de cada punto de la segunda clase, entonces existe un y sólo un punto que produce esta partición de todos los puntos en dos clases, este corte de la recta en dos partes. (Ferreirós, 1998, p. 85).

Agrega entonces que: "Como ya he dicho, creo que no me equivoco al suponer que todo el mundo concederá en seguida la verdad de esta afirmación; la mayoría de mis lectores quedarán muy decepcionados al saber que mediante esta trivialidad se pretende haber descubierto el misterio de la continuidad. Sobre esto anoto lo siguiente. Me gustará mucho que todo el mundo encuentre el principio anterior tan evidente y tan coincidente con sus representaciones de una línea; porque no estoy en condiciones de ofrecer ninguna demostración de su corrección, y nadie lo está". (Dedekind citado por Ferreirós, 1998, p. 85)

Al respecto, Dedekind sostiene que esta proposición es un axioma en virtud del cual se atribuye por primera vez la continuidad de la línea recta.

A continuación, Dedekind empieza el proceso de creación de los números irracionales mediante el concepto de cortadura, haciendo énfasis en la propiedad III de los números racionales. Retoma el hecho de que cada número racional a origina una división de $\mathbb{Q}$ en dos clases, A_1 y A_2, tal que todo número a_1, de la primera clase A_1 es menor que cada número a_2 de la segunda clase. A esta partición de $\mathbb{Q}$, en dos clases, A_1 y A_2, Dedekind la denomina *cortadura*, y la denota como (A_1,

A_2). En consecuencia, todo número racional a produce una cortadura, o propiamente dos, que sin embargo no se consideran esencialmente diferentes.

Dedekind prueba que existen cortaduras que no son producidas por numeros racionales de la siguiente manera: elige un número D, entero positivo, que no sea el cuadrado de ningún número entero, es decir, $D \neq n^2$ donde n es un número natural ($\mathbb{N}$). Entonces existe un número entero positivo λ tal que:

$$\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$$

Luego define la clase A_2 como la clase de los números racionales a_2 cuyo cuadrado es mayor que D, y en la clase A_1 el resto de los números racionales a_1, esta partición constituye una cortadura (A_1, A_2), lo que quiere decir que todo número a_1 es menor que todo número a_2. Especialmente los números $a_1 \leq 0$, debido a que los números a_2 son números positivos; y en consecuencia si $a_1 \leq 0$ entonces $(a_1)^2 < D$. El paso siguiente es demostrar que esta cortadura no es producida por ningún número racional, o lo que equivale a decir que no hay número racional cuyo cuadrado sea D.

En efecto, si D es un número positivo y $D \neq n^2$ para todo número $n \in \mathbb{N}$, se definen los conjuntos:

$$A_1 = \{a_1 \in \mathbb{Q} / a_1 \leq 0 \text{ ó } (a_1)^2 < D\}$$
$$A_2 = \{a_2 \in \mathbb{Q} / a_2 > 0 \text{ ó } (a_2)^2 > D\}$$

Si $a_1 \in A_1$ y $a_1 > 0$, se debe llegar a que si $(a_1)^2 < D < (a_2)^2$, entonces $a_1 < a_2$. Como ya se probó si $a_1 \in A$ y $a_1 \leq 0$, entonces $a_1 < a_2$, ya que $a_2 > 0$. Dedekind sigue su demostración empleando el método de contradicción, esto es:

Sean p, q números enteros positivos tales que $(p^2/q^2) = D$; donde q es el menor número entero positivo que cumple con la igualdad:

$$Dq^2 = p^2$$

Como λ es un entero positivo tal que $\lambda^2 < D < (\lambda + 1)^2$; entonces se tiene que

$$\lambda^2 < (p^2/q^2) < (\lambda + 1)^2$$

$$\lambda q < p < (\lambda + 1)q$$

$$0 < p - \lambda q < q$$

Luego se define $p´$ y $q´$ de la siguiente manera:

$$q´ = p - \lambda q, \text{ y de aquí } q´ < q, \text{ y}$$

$$p´ = Dq - \lambda p > 0, \text{ por ende } p´ > 0.$$

Obteniendo

$$(p')^2 - D\,(q')^2 = (\lambda^2 - D)\,(p^2 - Dq^2) = 0;$$

Lo que conduce a

$$(p^2 - Dq^2) = 0$$

Contradiciendo la suposición sobre q. En consecuencia, $x^2 < D$ o $x^2 > D$, para toda $x \in \mathbb{Q}$

Finalmente Dedekind prueba que (A_1, A_2), no es producida por un número racional; para esto demuestra que A_1 no tiene máximo y A_2 no tiene mínimo. Para esto sí x es un número real positivo de la clase A_1 ó de la clase A_2, se define el número y como:

$$y = \{[(x)\,(x^2 + 3D)]/\,(3x^2 + D)\}$$

Deduciendo que

$$y - x = \{[(2x)\,(D - x^2)]/\,(3x^2 + D)\}, \text{ e}$$

$$y^2 - D = [(x^2 - D)^3/\,(3x^2 + D)^2]$$

Luego si x es un número real positivo de la clase A_1, entonces $x^2 < D$ y en consecuencia, $y > x$ lo cual conlleva a que $y^2 < D$, por lo tanto $y \in A_1$; lo que quiere decir que A_1 no tiene elemento máximo. Por otra parte, si $x \in A_2$, entonces $x^2 > D$, y en consiguiente $y < x$, y > 0 e $y^2 > D$, por ende $y \in A_2$, lo que significa que A_2 no tiene elemento mínimo.

Entonces Dedekind citado por Recalde, 2018 concluye que (A_1, A_2) no es creado por un número racional, A_1 es un conjunto de números racionales, acotado superiormente, no tiene elemento máximo mientras que A_2 es un conjunto de números racionales, acotado inferiormente que no tiene elemento mínimo; particularmente los elementos de A_2 son cotas superiores de A_1 y los miembros de A_1 son cotas inferiores de A_2, Dedekind entonces crea un nuevo número, ($\sqrt{D}$) que corresponde al supremo de A_1 y al mínimo de A_2. Esto es:

$$\text{Sup } A_1 = \text{Inf } A_2 = \sqrt{D}.$$

Dedekind identifica cada número con la cortadura que produce. Por lo tanto, el conjunto de todas las cortaduras en $\mathbb{Q}$ corresponde al conjunto de los números reales: $\mathbb{R}$

Posteriormente, Dedekind citado por Recalde (2018) pasa a definir aquí un orden, a proponer unas operaciones aritméticas mediante cortaduras racionales. Y a probar que $\mathbb{R}$ satisface la versión aritmética del principio de continuidad. Para establecer un orden, Dedekind empieza por comparar dos cortaduras, (A_1, A_2) y (B_1, B_2) con el objetivo de definir la igualdad y la desigualdad entre estas cortaduras. La identidad se denota por $\alpha = \beta$ o $\beta = \alpha$, donde α y β son los números reales que producen las cortaduras (A_1, A_2) y (B_1, B_2), respectivamente. En el caso de ambas cortaduras no sean iguales, suceden dos implicaciones, $\alpha > \beta$ o $\beta > \alpha$. Y $\alpha < \beta$ si $A_1 \subset B_1$.

Con estos argumentos las propiedades fundamentales de los números reales se enuncian como:

I. Si $\alpha > \beta$ y $\beta > \gamma$ entonces $\alpha > \gamma$ y se dice que el número β se encuentra entre α y γ.

II. Si α, γ son dos números cualesquiera diferentes, entonces existe una infinidad de números diferentes β que se encuentran entre α y γ.

III. Si α es un número real arbitrario, entonces todos los números reales se dividen en dos clases A_1 y A_2, de tal forma que cada una de ellas posee un número infinito de elementos, donde cada individuo de A_1 es inferior a α y cada individuo de A_2 es superior a α. Este número α se asigna a cualquiera de las dos clases, A_1 o A_2.

Y además, Dedekind complementa las anteriores propiedades, con el principio de continuidad, una interpretación de este principio es la siguiente:

> Si el sistema de los números reales está dividido en dos clases, A_1 y A_2, de tal manera que cada miembro de A_1 es inferior a todos los miembros de A_2, entonces existe un único número α por el cual se produce esta separación.

Pasando a las operaciones aritméticas por medio de cortaduras, Dedekind propone la operación de adición[3] del siguiente modo:

Si (A_1, A_2) y (B_1, B_2) y c es un número racional arbitrario, entonces se lo ubica en la clase C_1, si cumple el siguiente requisito, si a_1 pertenece a A_1 y b_1 se encuentra en B_1, entonces $c \leq a_1 + b_1$. En caso contrario, ponemos a todo número racional c en la clase C_2. De esa forma la partición (C_1, C_2), constituye una cortadura (para los detalles de la demostración hecha por Dedekind, esto es que (C_1, C_2) es un corte, véase la página 91 de la traducción de Ferreirós de ¿*Qué son y para qué sirven los números*? de Dedekind.) De esa manera se forma una cortadura (C_1, C_2), en donde cada elemento de la clase C_1 es menor que cada miembro de la clase C_2.

Dedekind también dice que una cortadura (A_1, A_2) está completamente determinada si simplemente la primera clase A_1 es conocida, definiendo A_2 como todos los números racionales que no pertenecen a A_1. Otra propiedad enunciada por este matemático con es que si $a \in A_1$, entonces todo número $b < a$, también pertenece a A_1, y si un número $c \in A_2$, entonces todo número $d > c$, también pertenece a A_2.

Otro concepto introducido por Dedekind es el de intervalo, quien lo expresa como:

Intervalo: un sistema A de números racionales, tiene la siguiente característica: Si a y a' son números del sistema A, entonces todos los números racionales comprendidos entre a y a' están también situados en A.

Intervalo finito: si hay un número a_1 que es menor, y un número racional a_2 que es mayor que cada número del intervalo A, entonces se dice que A es un intervalo finito. A partir de aquí se puede concluir que existen infinitos números de las mismas características de a_1, e infinitos números de las propiedades de a_2.

[3] Para mayor información consultar la definición 4.5.6 del capítulo cuatro.

Dedekind propone como ejemplos de intervalos el sistema de los números racionales y las dos clases de cualquier cortadura. Y es posible dividir $\mathbb{Q}$ en tres partes, A_1, A y A_2, y hay dos números racionales o irracionales, α_1 y α_2 perfectamente determinados a los que él denomina como la *cota inferior* y *cota superior* (o *menor* o *mayor*) del intervalo A. Apoyados en estas definiciones, se tiene los siguientes sucesos:

- La cota inferior α_1 está determinada por la cortadura cuya primera clase está determinada por el conjunto A_1, y la cota superior α_2 viene determinada por la cortadura en la que A_2 constituye la segunda clase.
- De cada número comprendido entre α_1 y α_2 se dice que está situado al interior del intervalo A.
- Si todos los números de un intervalo A son también números de B, entonces A se denomina una parte de B.

Con lo anterior Dedekind definió un orden, cerrando el acto de extensión con la introducción de los números irracionales, manteniendo las propiedades de densidad de $\mathbb{Q}$, por medio de las cortaduras racionales producidas por estos mismos números. En otros términos, Dedekind dice que entre dos números reales se garantiza la existencia de infinitos números reales, y por ende, se tiene un hecho epistemológico fundamental para Dedekind, que es la conservación del orden en $\mathbb{Q}$ como subdominio de $\mathbb{R}$. Por otra parte, los números reales constituyen un dominio unidimensional bien ordenado.

Dedekind retoma de nuevo el hecho de que la partición de los números reales, en las dos clases, A_1 y A_2, es tal que todo número de la primera clase A_1 es menor que cada número de la segunda clase A_2, y esta división viene determinada por el número α que determina la cortadura.

Por todo lo anteriormente expuesto, $\mathbb{R}$ posee las propiedades de transitividad, densidad y cortadura y además también tiene la propiedad de continuidad que es indispensable para garantizar la extensión y permitir la estabilidad de las propiedades de $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R}$. De esa manera es válido el siguiente resultado:

Teorema: Si el sistema $\mathbb{R}$ de todos los números reales se subdivide en dos clases, A_1 y A_2 tales que cada número α_1 de la clase A_1 es menor que cada número de la clase A_2, entonces existe un y sólo un número α por el cual esa división está determinada.

Demostración. Si $\mathbb{R}$ se descompone en A_1 y A_2 y al mismo tiempo se tiene una cortadura (A_1, A_2) del sistema de los números racionales, en donde:

A_1: Contiene todos los números racionales de la clase A_1.
A_2: Contiene todos los números racionales de la clase A_2.

Ahora si α es el número que determina esa cortadura entonces (A_1, A_2) y β es número cualquiera, pero diferente de α, entonces por una de las propiedades de las cortaduras, existen infinitos números racionales c, situados entre α y β.

Luego, si $\beta < \alpha$, entonces $c < \alpha$; de aquí $c \in A_1$ y por lo tanto, también pertenece a A_1, y ya que $\beta < c$, entonces $\beta \in A_1$ a causa de que cada número en A_2 es mayor que cada número c en A_1. Si por el contrario, $\beta > \alpha$, entonces $c > \alpha$; entonces $c \in A_2$, en consecuencia, $c \in A_2$, y puesto que $\beta > c$, se obtiene que $\beta \in A_2$, debido a que cada número en A_1 es menor que cada número c en A_2. A continuación, cada número β diferente de α pertenece a la clase A_1 o a la clase A_2, según sea $\beta < \alpha$ ó $\beta > \alpha$. Y como efecto colateral, α es o bien el número máximo en A_1 o el mínimo en A_2. En conclusión, α es un número, y claramente el único que determina la división de $\mathbb{R}$ en dos clases, A_1 y A_2, que es lo que se quería demostrar.

Una conclusión general es que $\mathbb{R}$ es un dominio unidimensional totalmente ordenado y continuo. Con Dedekind se cierra un capítulo interesante de la Historia de las Matemáticas, en la cual participaron filósofos y matemáticos en un período de más de dos milenios. Por otra parte, se ha mostrado, en este estudio, que los números reales tienen existencia autónoma y no necesitan de apoyo en la geometría. En el mismo sentido, se debe tener en cuenta que si bien la geometría analítica ha permitido establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales, en este caso se trata de un recurso esencialmente didáctico pero no necesario para justificar la existencia de los mismos. Usualmente se habla de los puntos de la recta real como si se tratara de los números reales, pero siempre se debe recordar que la existencia de los números reales antecede a la asociación que se hace de los mismos con los puntos de la recta como sucede en la geometría analítica.

Capítulo 3

5. LA RELACIÓN ENTRE LA TEORÍA DE LAS PROPORCIONES DE EUDOXO Y LA TEORÍA DE CORTADURAS DE DEDEKIND

Tanto matemáticos como historiadores de las matemáticas y/o estudiosos de la obra de los *Elementos* de Euclides, de una u otra manera han hecho referencia a la correspondencia entre la TPE y la TCD. Este caso ha dado lugar a la ya conocida disertación histórica conforme a la cual la TPE constituye una anticipación plena a teorías modernas sobre los orígenes de los números irracionales como la TCD; y fue precisamente, el mismo Dedekind quien propuso una interpretación relacionada con la conexión entre su teoría y la TPE. (Moise, 1968) afirma que Dedekind encontró, de manera sorprendente, que las ideas de Eudoxo eran precisamente lo que se necesitaba para erigir los fundamentos del sistema de los números reales.

Por tales razones, en algunos casos, se señala tal correspondencia en términos de coincidencia y, en otros, se podría establecer una cierta equivalencia formal parcial entre las dos mencionadas teorías. Tal es el caso por ejemplo, de las afirmaciones de Heath cuando hace los comentarios a la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides, la cual se considera que constituye la piedra angular de la teoría de las proporciones. Heath señala que "existe una correspondencia exacta, casi una coincidencia, entre la definición euclídea de identidad de razones y la teoría moderna, debida a Dedekind, de los números irracionales"

"Certain it is that there is an exact correspondence, almost coincidence, between Euclid's definition of equal ratios and modern theory of irrationals due to Dedekind". (Heath, 1956, p. 124).

La equivalencia entre los dos conceptos de proporción y cortadura, se sustenta teniendo en cuenta que, dado un cociente x/y entre dos magnitudes homogéneas, se debe poder asociar una cortadura a dicho cociente. En tal caso, dados dos cocientes cualesquiera, si estos resultan ser iguales (en el sentido de Eudoxo), entonces se debe probar que las cortaduras de Dedekind asociadas a ellos son también equivalentes.

Así que, si x/y es un cociente cualquiera, se define A como el conjunto de todos los racionales a/b, tales que $a/b \leq x/y$, y B se define como, el conjunto de todos los racionales a/b, tales que $x/y < a/b$. Se toma ahora otro cociente x'/y' y se definen los conjuntos A' y B' de manera similar.

Entonces, si x/y es igual a x'/y', y se toma el número racional a/b perteneciente a A, es claro que a/b también pertenece a A', porque si a/b es menor o igual que x/y, entonces $ay \leq bx$, pero como a y b son enteros, entonces según la definición de Euclides se obtiene que $ay' \leq bx'$ y, por lo tanto $a/b \leq x'/y'$.

Es de tener en cuenta el hecho que fueron los griegos quienes, desde muy temprano se dieron cuenta “de las grandes dificultades inherentes a los conceptos matemáticos de continuidad, movimiento e infinitud, así como al problema de medir magnitudes arbitrarias con unidades prefijadas” (Courant y Robbins,1979, p. 3), señalan además, que Eudoxo realizó un admirable esfuerzo para superar tales dificultades y desarrolló su *teoría de las proporciones*, llamada también *del continuo geométrico*. Sostienen que esta teoría, “fue de tal perfección, que para encontrar algo que pueda comparársele es necesario que, dos milenios más tarde, aparezca la teoría moderna de los números irracionales” (Courant y Robbins, 1979, p. 3).

De igual manera, se manifiesta que, “(…) la definición de proporcionalidad de Eudoxo, para razones geométricas, es simplemente un camino necesariamente laborioso de decir lo que es la evidentemente esencial en el caso de las razones de números” (Edwards[4], 1979, p 13), y a partir de ahí comenta que, “Dedekind estableció una primera fundamentación para el sistema de los números reales, retomando algunos de los pasos que dio Eudoxo hace dos mil años atrás”. Adicionalmente afirma que se puede observar que dadas dos magnitudes inconmensurables a y b, la definición efectivamente divide el campo de los números racionales m/n en dos conjuntos disjuntos: el conjunto L el cual contiene a aquellos elementos que satisfacen (1), o $m: n< a: b$, y el conjunto U cuyos elementos verifican (3), o $m: n > a: b$. Una separación de los números racionales en dos subconjuntos disjuntos L y U, tal que cada elemento de L es menor que cada elemento de U, es lo que ahora se llama “Cortadura de Dedekind”. (Edwards,1979, pp. 13 -14).

En un artículo denominado *La definición de proporción de Eudoxio*, se manifiesta que: “Esta nota presenta la definición del número real atribuida a Dedekind como una interpretación de la definición de proporción de Eudoxio, tal como lo enuncia Euclides al principio de su libro V” (Zubieta, 1991, p. 477), y agrega que: “Esto significa que la definición de número real propuesta por Richard Dedekind es la misma que la que presentada por Eudoxio” (Zubieta, 1991, p. 478).

(Barón, 1969), al hacer el análisis del significado de la teoría de las proporciones en las matemáticas griegas, señala que, como resultado importante de la geometrización de los fundamentos de las matemáticas, los segmentos rectilíneos, en términos de los cuales fueron expresadas todas las magnitudes geométricas, no pueden ser considerados numéricamente medibles, debido a la existencia de segmentos inconmensurables. En consecuencia, solo es posible comparar tales cantidades con otra cantidad para, poder decir que están en una relación determinada con respecto a alguna otra cantidad. Por lo tanto sería imposible comparar directamente áreas con volúmenes. Así por ejemplo, al referirse al área de un círculo es necesario utilizar la formula $A_1/\ A_2 =\ kd_1^2/kd_2^2$, esto es, dos círculos son entre sí como el cuadrado de sus diámetros.

[4] Traducción en primera versión, realizada por Eibar Velásquez y Euler Narváez, de: *The Historical Development of the Calculus. Area, Number and Limit Concepts in Antiquity*; p. 1-28.

Por tales razones, destaca que la TPE, es de fundamental importancia, porque representa, esencialmente, una teoría formal del sistema de los números reales. Y considerando la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides, concluye que esta divide a los números racionales en dos clases coexistentes y, por consiguiente, establece una equivalencia con la idea de cortadura, mediante la cual Dedekind define los números irracionales.

"Sin embargo, se han señalado también divergencias fundamentales entre ambas teorías que un análisis histórico serio debe establecer y remarcar" (Corry, 1994, p. 22).

En este orden de ideas, para entender la divergencia entre ambas teorías es preciso considerar que el concepto de cortadura de Dedekind responde a una motivación general que permea sus varios trabajos fundacionales, correspondientes a los sistemas numéricos. "En consecuencia, dicho concepto debe ser pensado como un caso específico de una tendencia mucho más general, que guio una parte esencial de la creación matemática de Dedekind y no, simplemente, como un refinamiento de la definición euclideana de proporción" (Corry, 1994, p. 22).

En el mismo sentido, se debe tener en cuenta que, por una parte, el propio Dedekind hizo un detallado análisis axiomático de la TPE, y por otra, si se examina el significado de la TCD, como un caso particular, dentro de una mucha más amplia explicación del concepto de número, en sus varias manifestaciones, se entiende con mayor claridad la motivación básica que guio a Dedekind al desarrollar su teoría de cortaduras como instrumento para entender el sistema de los números reales.

Así las cosas, si se afirma, con base únicamente en una equivalencia formal, que la teoría de las proporciones de Eudoxo y la teoría de las cortaduras de Dedekind "*son una sola y la misma, y que la contribución de Dedekind se manifiesta tan sólo en cambios de estilo y en refinamiento de la formulación, implica una desvirtuación histórica de los aportes de estos dos científicos al desarrollo de las ideas matemáticas. Tales aportes pueden ser comprendidos en su justo valor sólo al considerar ambas teorías dentro de sus respectivos marcos conceptuales históricamente localizados y no como sistemas de ideas intemporales sin connotación fuera del ámbito formal"* (Corry, 1994, p.22).

Capítulo 4

6. LOS NÚMEROS REALES COMO CAMPO ORDENADO COMPLETO MEDIANTE CORTADURAS

En ciencia, lo que se puede probar no debe ser creído sin demostración

Richard Dedekind (1887)

6.0. Consideraciones preliminares

(Ferreirós, 1998) establece tres etapas en la constitución de la TCD en relación con los números reales. Éstas son:

Primera etapa: El número real como un objeto preexistente, en el sentido de que el número real *produce* una cortadura. Segunda etapa: A la que denomina como la etapa del *pensamiento concreto*, y donde cada número real es una cortadura. Tercera etapa: según el término acuñado por Hilbert esta fase se conoce como, la etapa del *pensamiento axiomático* y es el eslabón donde se demuestra que un campo ordenado arquímediano completo es consistente con las operaciones aritméticas de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

De acuerdo con Ferreirós, este capítulo lo que se pretende es contestar dos preguntas, que son las siguientes: "1. ¿Existe un cuerpo ordenado completo? 2. ¿Existe solamente un cuerpo ordenado completo?" (Spivak, 1996, pp. 803 - 804).

De esta manera, lo que se quiere es formar un conjunto $\mathbb{R}$ (el conjunto de los números reales), que goce de todas las propiedades que tiene $\mathbb{Q}$, es decir que tenga una estructura de campo y un orden que concuerden con las operaciones usuales de adición y multiplicación en $\mathbb{Q}$. En ese sentido, $\mathbb{Q}$ es un *campo ordenado*, pero no es un *conjunto completo*; y haciendo una interpretación topológica de este hecho, quiere decir que si se hace una correspondencia entre los números racionales y los puntos de la recta geométrica, se observa que en esta última existen "agujeros" o "huecos" que no se corresponden con ningún número racional y por lo tanto, $\mathbb{Q}$ no es suficiente para garantizar la continuidad de la línea recta, o, en términos aritméticos, $\mathbb{Q}$ no es un conjunto completo. Esencialmente, $\mathbb{R}$ es construido con el propósito de que tenga la propiedad de *completez*.

En síntesis, se va a formar un conjunto $\mathbb{R}$ que va a ser un campo, ordenado, arquímediano completo, y, como ya se mencionó anteriormente, la propiedad de completez es la que marca una nítida diferencia con $\mathbb{Q}$. Por lo tanto, si se logra dilucidar matemáticamente esta propiedad, se tendría la característica que define a $\mathbb{R}$. Este capítulo pretende demostrar que cualquier campo ordenado completo es isomorfo al campo de las cortaduras y además es único salvo isomorfismo.

6.1. Algunas nociones y terminología sobre conjuntos

Definición 6.1.1 *Conjunto*[5]**.** Desde el punto de vista matemático, *conjunto* es un concepto primitivo, en consecuencia, no existe una definición matemática formal de este término. No obstante, una noción sobre esta idea, es que conjunto es una agrupación, colección o reunión de *elementos*. De aquí en adelante, a menos que se especifique lo contrario, las letras mayúsculas vienen a representar conjuntos y las letras minúsculas denotan los elementos o miembros de estos mismos. En particular, hay un conjunto que no posee elementos, comúnmente conocido como conjunto *vacío* y cuyo símbolo es Ø o { }. Cuando un conjunto posee al menos un elemento, recibe el nombre de conjunto *no vacío*.

Definición 6.1.2. *Relación de pertenencia y no pertenencia.* Las relaciones de pertenencia y no pertenencia, se establecen entre un elemento y un conjunto. Para señalar que un elemento α pertenece a un conjunto A, se emplea el símbolo $\in$ (*pertenece*), de esta manera, una posible lectura de $\alpha \in A$, es "alfa pertenece o alfa es miembro de A"; en caso contrario, si α no es un elemento de A, se representa con el símbolo $\notin$ (*no pertenece*), en consecuencia, $\alpha \notin A$ equivale a decir "alfa no pertenece" o "α no es miembro de A".

Definición 6.1.3. *Relación de contenencia y no contenencia entre conjuntos.* Dados dos conjuntos A y B diferentes del vacío, se dice que $A \subseteq B$, si para todo $\alpha \in A$; $\alpha \in B$. $A \subseteq B$ se lee "A está contenido en B" o también, "A está incluído en B"; y una vez suceda $A \subseteq B$, se puede decir que A es un *subconjunto* de B. El símbolo ($\subseteq$) se lo denomina *contenencia* o *inclusión* y otra expresión que equivale decir $A \subseteq B$ es, $B \supseteq A$ significando "B contiene al conjunto A". Se menciona el hecho de que todo conjunto es subconjunto de sí mismo y que el conjunto vacío es subconjunto de todos los conjuntos existentes.

Para una relación de inclusión "más exigente", es decir, donde $A \subseteq B$, pero existe al menos un $\beta \in B$ y $\beta \notin A$; se dice $A \subset B$ y una posible lectura de esta expresión es "A está estrictamente contenido en B" o "A está estrictamente incluído en B". Si sucede el caso citado, A viene siendo un *subconjunto propio* de B. En cambio sí, dados dos conjuntos A y B diferentes de vacío, se dice que $A \not\subset B$, si existe por lo menos una $\alpha \in A$, pero $\alpha \notin B$. $A \not\subset B$ se lee "A no está contenido en

[5] Se hace hincapié en que la teoría de conjuntos fue formulada por George Cantor, contemporáneo de Richard Dedekind, donde este último también contribuyó en la constitución de esta teoría. Por otra parte, si bien es cierto que la teoría formal de conjuntos apenas estaba "germinando" en el siglo XIX, existe la posibilidad de que "la teoría intuitiva" de conjuntos, o al menos los elementos más básicos de ésta, ya se hubieren incorporado al conocimiento matemático cotidiano durante ese período.

B" o también, "A no está incluído en B". El símbolo ($\not\subset$) recibe por nombre *no contenencia* o *no inclusión*.[6]

Definición 6.1.4. *Igualdad de conjuntos*. Se dice que dos conjuntos son iguales ($A = B$) si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.

6.2. Operaciones elementales entre conjuntos

Definición 6.2.1. *Unión*. Dados dos conjuntos A y B, se define la *unión* de conjuntos como el conjunto formado por todos los elementos bien sea de A, o de B, o de ambos y se representa mediante el símbolo ∪ (Unión), con lo que "A unión B" viene siendo $A \cup B$. En términos simbólicos $A \cup B = \{\alpha / \alpha \in A \text{ o } \alpha \in B\}$.

Si F es una colección arbitraria de conjuntos, entonces la reunión de todos los elementos de F se define como el conjunto de los elementos que pertenecen a uno, por lo menos, de los conjuntos de F, y se designa por

$$\bigcup_{A \in F} A.$$

Definición 6.2.2. *Intersección*. Dados dos conjuntos A y B, se define la *intersección* de conjuntos como el conjunto formado los elementos comunes a ambos conjuntos y se representa por medio del símbolo ∩, de esta manera, A intersección B es $A \cap B$. En términos simbólicos $A \cap B = \{\alpha / \alpha \in A \text{ y } \alpha \in B\}$. Si A y B no tienen elementos comunes, entonces $A \cap B$ es el conjunto vacío y A y B llevan por nombre *conjuntos disjuntos*.

Si F es una colección arbitraria de conjuntos, la intersección de F se define como el conjunto cuyos elementos son los miembros comunes que pertenecen a todos los conjuntos de F, y se denota

$$\bigcap_{A \in F} A$$

Definición 6.2.3. El *complemento* de A relativamente a B, simbolizado por $B - A$, se define como el conjunto

$$B - A = \{x\text{: } x \in B, \text{ pero } x \notin A\}.$$

[6] Para el propósito de esta investigación, a menos que se diga lo contrario, se va a hacer en muchas ocasiones caso omiso de la distinción de los dos tipos de contenencia. Esta omisión obedece al hecho de que el símbolo de contenencia (⊂) es de más fácil manejo en la compilación del documento que el símbolo (⊆), por ende, se optó por esta primera opción tipográfica.

Se puede inferir a partir de esta definición que $B - (B - A) = A$. Además, $B - A = B$ si $A \cap B$ es el conjunto vacío.

6.3. Campos

Definición 6.3.1. *Campo*. Un conjunto *F*, con dos operaciones + y ·, denominadas *suma* (*adición*) y *multiplicación* (*producto*) respectivamente, y, que conforman la estructura [F, +, ·] se llama *campo* o *cuerpo* si satisface las siguientes condiciones:

Suma o adición

(S-1) *Propiedad clausurativa o de cerradura con relación a la suma*. Si $a, b \in F$, entonces $a + b \in F$

(S-2) *Propiedad asociativa con respecto a la adición*. Si $a, b, c \in F$ entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$

(S-3) *Existencia del elemento neutro para la suma.* Para todo número $a \in F$, existe un elemento *e*, donde $e \in F$, tal que $a + e = e + a = a$. El número *e* se denomina 0 (cero).

(S-4) *Existencia del inverso con respecto a la suma.* Para todo número $a \in F$, existe un elemento *x*, con $x \in F$, donde se verifica que, $a + x = x + a = a$. El número *x* recibe el nombre de *inverso aditivo* y se denota por $-a$.

(S-5) *Propiedad conmutativa de la suma.* Si $a, b \in F$, entonces $a + b = b + a$.

Multiplicación o producto

(M-1) *Propiedad clausurativa o de cerradura con relación a la multiplicación*. Si $a, b \in F$, entonces $a \cdot b \in F$.

(M-2) *Propiedad asociativa de la multiplicación.* Si $a, b, c \in F$ entonces

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)^{7}.$$

[7] Otra notación usada para $a \cdot b$ es $(a)\,(b)$ o también es válida ab.

(M-3) *Existencia del elemento neutro para la multiplicación.* Para todo número $a \in F$, existe un elemento u, donde $u \in F$, de forma que, $a \cdot u = u \cdot a = a$. El número u se denomina *elemento neutro para el producto* y se denota como, 1 (uno). Además, $1 \neq 0$[8].

(M-4) *Existencia del inverso multiplicativo.* Para todo número $a \neq 0 \in F$, existe un número $z \in F$, que cumple con la condición, $a \cdot z = z \cdot a = 1$. La notación para z viene siendo a^{-1}, o también se usa, $(1/a)$; a^{-1} se llama *recíproco* o *inverso multiplicativo*.

(M-5) *Propiedad conmutativa de la multiplicación.* Dados $a, b \in F$, se satisface la igualdad $a \cdot b = b \cdot a$.

Suma y multiplicación

[SM-1]. *Propiedad distributiva*. Para cada $a, b, c \in F$, se tiene que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Si x, y, z son elementos de F, y F es un campo, ocurre que:

Teorema 6.3.2. Los axiomas con respecto a la suma producen los siguientes resultados:

(a) Si $x + y = x + z$, entonces $x = z$ (Ley cancelativa)
(b) Si $x + y = x$, entonces $y = 0$ (Unicidad del elemento neutro con relación a la adición)
(c) Si $x + y = 0$, entonces $y = -x$ (Unicidad del elemento inverso con respecto a la suma)
(d) $-(-x) = x$.

Teorema 6.3.3. Los axiomas con respecto a la multiplicación implican los siguientes hechos:

(a) Si $x \neq 0$ y $xy = xz$, entonces $y = z$
(b) Si $x \neq 0$ y $xy = x$, entonces $y = 1$
(c) Si $x \neq 0$ y $xy = 1$, entonces $y = 1/x$
(d) Si $x \neq 0$, entonces $1/(1/x) = x$.

Teorema 6.3.4. Si x, y, z son elementos de un campo F, se cumplen los siguientes enunciados

(a) $0x = 0$
(b) Si $x \neq 0$ e $y \neq 0$, entonces $xy \neq 0$
(c) $(-x)\, y = -(xy) = x\,(-y)$
(d) $(-x)(-y) = xy$.

[8] De esta última parte del axioma (M-3) se deduce que el conjunto formado únicamente por el elemento 0 no constituye un campo.

6.4. Cuerpos ordenados, cotas superiores e inferiores

Definición 6.4.1. Si S es un conjunto, un *orden* en S es una relación representada por el símbolo $<$ y tiene las dos propiedades siguientes:

(i) *Propiedad de tricotomía*. Si $x \in S$ e $y \in S$, una y sólo una de las siguientes proposiciones es cierta:

$$x < y, x = y, y < x$$

(ii) *Propiedad transitiva*. Si $x, y, z \in S$, y si $x < y$, $y < z$, entonces $x < z$.

La proposición "$x < y$" se lee "x es menor que y" o "x es más pequeño que y" o también "x precede a y". Por otra parte, $y > x$ equivale a decir $x < y$. Y, $x \leq y$. quiere decir que, $x < y$ o $x = y$.

Definición 6.4.2. Un *conjunto ordenado* es aquel en donde se ha definido un orden.

Definición 6.4.3. Si S es un conjunto ordenado, y $E \subset S$. Se dice que E es un conjunto *acotado superiormente* si existe un $\beta \in S$ tal que, $x \leq \beta$ para cada $x \in E$, a β se le denomina la *cota superior de E*.

Si una cota superior b es, además, un elemento de E, b se denomina *último elemento* o *elemento máximo* de E. Un conjunto carente de cotas superiores se denomina *no acotado superiormente.*

Definición 6.4.4. Si S es un conjunto ordenado, y $F \subset S$. Se dice que F es un conjunto *acotado inferiormente* si existe un ʎ $\in S$ tal que, ʎ $\leq x$ para cada $x \in F$, a ʎ se le denomina la *cota inferior de F*.

Si una cota inferior c también es un elemento de F, c se denomina *primer elemento* o *elemento mínimo* de F. Un conjunto que no tenga cotas inferiores se llama *no acotado inferiormente.*

Definición 6.4.5. Supóngase que S es un conjunto ordenado, y $E \subset S$, y E está acotado superiormente. Supóngase, además, que existe $\alpha \in S$ con las siguientes propiedades:

(i). α es una cota superior de E.
(ii). Si $\gamma < \alpha$, entonces γ no es una cota superior de E.

Entonces α se denomina la *mínima cota superior de E* o el *supremum* (supremo) de E, y se escribe

$$\alpha = \sup E.$$

Nota: a partir de la condición (ii) se puede inferir que a lo más existe una única α tal que $\alpha = \sup E$.

Definición 6.4.6. Supóngase que S es un conjunto ordenado, y $E \subset S$, y E está acotado inferiormente. Supóngase, además, que existe $\delta \in S$ que cumple las siguientes condiciones:

(i). δ es una cota inferior de E.
(ii). Si $\delta < \theta$, entonces θ no es una cota inferior de E.

Entonces δ se denomina la *máxima cota inferior de E* o el *infimum* (ínfimo) de E, y se denota

$$\delta = \inf E.$$

Nota: de forma similar a la definición de supremo, se puede deducir que a lo más existe un único δ tal que $\delta = \inf E$.

Definición 6.4.7. Un *campo ordenado* es un *campo F* que a su vez es un *conjunto ordenado,* y que tiene las siguientes propiedades:

(i) Si $x, y, z \in F$ e $y < z$ entonces $x + y < x + z$
(ii) $xy > 0$ si $x \in F$, $y \in F$, $x > 0$, e $y > 0$.

Si $x > 0$, se dice que x es *positivo,* si $x < 0$, entonces x es *negativo*.

Teorema 6.4.8. En todo campo ordenado las siguientes afirmaciones son ciertas:

(a) Si $x > 0$, entonces $-x < 0$, y viceversa.
(b) Si $x > 0$, e $y < z$, entonces $xy < xz$.
(c) Si $x < 0$ e $y < z$, entonces $xy > xz$.
(d) Si $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. En particular, $1 > 0$.
(e) $0 < x < y$, entonces $0 < 1/y < 1/x$.

(Spivak, 1996) propone otra versión de un *campo ordenado F* que va a ser de utilidad en algunas de las demostraciones posteriores. En primer lugar define un conjunto P (*conjunto de los números positivos*) donde $P \subset F$, de la siguiente manera:

Los números que cumplen $x > 0$, se denominan *positivos*, mientras los que cumplen $x < 0$ se llaman *negativos*. Spivak define la positividad en función del orden (<) invirtiendo el proceso, es decir, $a < b$ significa que $b - a$ es positivo. De esta manera, P es el conjunto de todos los números positivos.

Definición 6.4.9. Un *campo ordenado* (definición alternativa) es un *campo F* (con las dos operaciones + y ·) junto con cierto subconjunto P de F (los elementos "positivos") con las siguientes propiedades:

(P_1) *Propiedad de tricotomía*. Para todo $r \in F$, se satisface una y solo una de las siguientes condiciones:

(a) $r = 0$
(b) $r \in P$
(c) $-r \in P$

(P_2) *La suma es cerrada.* Si r y $t \in P$, entonces $r + t \in P$

(P_3) *La multiplicación es cerrada*. Si r y $t \in P$, entonces $r \cdot t \in P$.

Las tres propiedades anteriores se complementan con las siguientes definiciones:

$$r > t \text{ si } r - t \in P$$
$$r < t \text{ si } t > r$$
$$r \geq t \text{ si } r > t \text{ o } r = t$$
$$r \leq t \text{ si } r > t \text{ o } r = t$$

Teorema 6.4.10. La definición alternativa de campo ordenado se deduce a partir de la definición habitual de este mismo concepto.

Demostración. Si $r, s, t, u \in F$ y además se cumple que $r < s$ y $t < u$ y si se aplica el inciso (i) de campo ordenado (Def. 4.4.7) dos veces se obtiene:

$$r + t < s + t \quad (1)$$
$$t + s < u + s \quad (2)$$

Combinando (1) y (2) se obtiene, $r + t < s + t < u + s$, ahora si se aplica la propiedad transitiva de campo ordenado se concluye que: $r + t < u + s$. En particular, si $r = t = 0$, entonces $0 < s$ y $0 < u$, así: $0 < u + s$, de esta manera se cumple (P_2). Por otra parte, supóngase que $a < 0$, entonces $-a > 0$ ya que de lo contrario, si $-a < 0$ se tiene $0 = a + (-a) < 0$, refutando la propiedad de tricotomía de un campo ordenado; en consecuencia sucede (P_1). Finalmente, P_3 es un enunciado equivalente al ítem (ii) de la definición 6.4.7, ya que P representa a los números positivos.

Es natural formular el siguiente interrogante ¿la definición "alternativa" de campo ordenado (Def. 6.4.9) implica la definición "habitual" de campo ordenado (Def. 6.4.7)?

Antes de proseguir con todo el arsenal de definiciones, teoremas, y demostraciones, entre otros; se hace un énfasis especial en el hecho de que este capítulo de la tesis se inspira principalmente en dos libros: Estos son los capítulos 28 (*Construcción de números*) y 29 (*Unicidad de los números reales*) del libro titulado *Cálculo Infinitesimal* (Segunda Edición) cuyo autor es, Michael Spivak y; en el *Apéndice* del libro denominado *Principios de Análisis Matemático* de Walter Rudin.

Definición 6.4.11. Un conjunto ordenado S tiene la *propiedad de la mínima cota superior* si para todo conjunto $E \neq \emptyset$, $E \subset S$ y E, conjunto acotado superiormente; se tiene que, existe una mínima cota superior (sup E) en S.

Si además S es un campo ordenado, entonces se dice que S es un *campo ordenado completo*[9]; y se añade que S posee la *propiedad de completez*.

[9] Campo ordenado completo en el sentido de Dedekind.

Apoyados en esta definición nace el interrogante ¿Si S es un conjunto ordenado con la propiedad de la mínima cota superior, entonces S es un campo ordenado completo?

Teorema 6.4.12. Supóngase que S es un conjunto ordenado con la propiedad de la mínima cota superior. Luego, si $B \neq \emptyset$, $B \subset S$ y B es conjunto acotado inferiormente. Entonces se tiene que si L es el conjunto de todas las cotas inferiores de B se infiere que: $\alpha = \sup L$, existe en S y además, el $\inf B$ también existe en S y $\alpha = \inf B$.

Demostración. Ya que B está acotado inferiormente, $L \neq \emptyset$ y como L es el conjunto de todas las $y \in S$ que son cotas inferiores de B, entonces se cumple que $y \leq x$, para cada $x \in B$, lo cual también quiere decir que: cada $x \in B$ es una cota superior de L. En consecuencia, L está acotado superiormente. Como por hipótesis, S es un conjunto ordenado con la propiedad de la mínima cota superior, esto implica que L tiene un supremo (α) en S.

Según el ítem (ii) de la definición de mínima cota superior se tiene que si $\gamma < \alpha$ entonces γ no es una cota superior de L, así que $\gamma \notin B$. Y por otra parte, $\alpha \leq x$ para toda $x \in B$. De esta manera $\alpha \in L$.

Si $\alpha < \beta$, se deduce del hecho de que $\alpha = \sup L$, que $\beta \notin L$. En otros términos, α es una cota inferior de B, y β no lo es si $\beta > \alpha$, lo que equivale a decir que $\alpha = \inf B$.

6.5. El campo de las cortaduras de Dedekind

Definición 6.5.1. Un *número real* o *cortadura real* es un conjunto α, de números racionales, con las tres propiedades siguientes:

(1) $\alpha \neq \emptyset$ y $\alpha \neq \mathbb{Q}$.
(2) Si $x \in \alpha$ e y es un número racional con $y < x$, entonces $y \in \alpha$.
(3) No existe ningún elemento máximo en α; lo que equivale a decir que, si $x \in \alpha$ entonces existe algún y en α con $y > x$. El conjunto de los números reales se designa por $\mathbb{R}$.

A menos que se especifique lo contrario, los números racionales serán designados mediante letras minúsculas del alfabeto latino (x, y, z, a, b, c), y los números reales mediante letras minúsculas griegas (α, β, γ); las letras mayúsculas (A, B, C) se utilizarán para designar conjuntos de números reales.

Teorema 6.5.2. Si α es un número real, ocurren las siguientes implicaciones:

(i) Si $p \in \alpha$ y $q \notin \alpha$, entonces $p < q$.
(ii) Si $r \notin \alpha$ y $r < s$, entonces $s \notin \alpha$.

Demostración. Para probar el ítem (i), supóngase que $q < p$, luego por la condición (2) de la definición de cortadura real se tiene que $q \in \alpha$, pero esto contradice la hipótesis que dice que $q \notin \alpha$, en cuyo caso $p < q$. En cuanto al inciso (ii), supóngase que $s \in \alpha$ luego, por la misma condición anterior y por la hipótesis $r < s$ se obtiene que $r \in \alpha$, pero esto es absurdo ya que por la condición inicial, $r \notin \alpha$. En consecuencia, $s \notin \alpha$.

Definición 6.5.3. Si α, β son números reales, entonces $\alpha < \beta$ significa que α está contenido en β. Es decir, todo elemento de α es también un elemento de β, pero $\alpha \neq \beta$.

Si α y β son números reales, entonces $\alpha \leq \beta$ sí y sólo si α está contenido en β.

Teorema 6.5.4. El conjunto de los números reales es un conjunto ordenado.

Demostración. Dados α, β, γ cortaduras reales; supóngase que $\alpha < \beta$ y $\beta < \gamma$, se infiere partiendo de la definición anterior y del hecho de que un subconjunto propio de un subconjunto propio es un subconjunto propio que: $\alpha < \gamma$; lo que equivale a decir que se satisface la propiedad de transitividad de conjunto ordenado.

Por otra parte, supóngase que en $\mathbb{R}$ se verifica la propiedad de tricotomía, esto es: $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$. Ahora suponga que es verdad que $\alpha < \beta$, entonces por la definición 6.5.3 existe $x \in \beta$ tal que $x \notin \alpha$, de esta forma las alternativas $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ se descartan. Continuando, si la posibilidad $\alpha > \beta$ es cierta, entonces aplicando el mismo razonamiento anterior se llega a una conclusión similar. Posteriormente, si sucede que $\alpha = \beta$, esto significa que para toda $x \in \alpha$, x también pertenece a β, y viceversa. Obteniendo como resultado el despacho de las condiciones $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$. En conclusión, si la propiedad de tricotomía es cierta a lo más una de las relaciones $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ se cumple para cualquier par α, β.

Finalmente, si al menos una es verdadera, considérese que las primeras dos posibilidades no lo son. De acuerdo con esto, α no es un subconjunto de β, luego existe un $p \in \alpha$ y $p \notin \beta$. Ahora sí $q \in \beta$, se infiere que $q < p$, esto es debido al ítem (ii) del teorema 6.5.2 y en conformidad con la condición (2) de número real, $q \in \alpha$. En consecuencia $\beta \subset \alpha$. Ya que $\alpha \neq \beta$, se deduce que: $\alpha > \beta$. En otras palabras, al menos una de las condiciones $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$ es cierta. Por todo lo anterior, la propiedad de tricotomía se cumple en $\mathbb{R}$. En síntesis, $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado.

Teorema 6.5.5. Si A es un conjunto de números reales, $A \neq \emptyset$ y A es acotado superiormente, entonces A tiene una mínima cota superior.

Demostración. Sea $\beta = \{x / \ x$ está en algún α de $A\}$. Entonces β es una colección de números racionales; para demostrar que β es un número real se tienen que comprobar tres hechos:

(1) Ya que A es una cortadura, $A \neq \varnothing$, luego existe algún α en A. Puesto que α es un número real, existe algún x en α. Esto significa que x está en β, de modo que $\beta \neq \varnothing$.

Por otra parte, Puesto que A es acotado superiormente, existe algún número real γ tal que $\alpha < \gamma$ para todo α de A. Como γ es un número real existe algún número racional $x \notin \gamma$. Ahora bien, $\alpha < \gamma$ significa que $\alpha \subset \gamma$, luego se cumple que $x \notin \alpha$ para todo α de A. Esto significa que $x \notin \beta$; así pues $\beta \neq \mathbb{Q}$.

(2) Supóngase que $x \in \beta$ e $y < x$. De aquí que $x \in \alpha$ para algún α de A. Al ser α un número real, la suposición $y < x$ implica que $y \in \alpha$. Por lo tanto, $y \in \beta$.

(3) Supóngase que $x \in \beta$. Entonces $x \in \alpha$ para algún α de A. Ya que α no tiene elemento máximo, existe algún número racional y con $x < y$, e y en α. Esto significa que $y \in \beta$; así β carece de elemento máximo. De (1), (2), (3) se infiere que β es un número real.

Hay que probar que $\beta = \sup A$. Si $\alpha \in A$, entonces $\alpha \subset \beta$; eso quiere decir que $\alpha \leq \beta$, en consecuencia β es una cota superior de A. Por otra parte, si γ es una cota superior de A, se obtiene $\alpha \leq \gamma$ para todo α de A; esto significa que $\alpha \subset \gamma$, para todo α de A, y esto implica que $\beta \subset \gamma$. Lo que quiere decir que $\beta \leq \gamma$; así, $\beta = \sup A$.

Definición 6.5.6. Si α y β son números reales, entonces

$$\alpha + \beta = \{x = y + z \text{ donde } y \in \alpha \text{ y } z \in \beta\}.$$

Teorema 6.5.7. Si α y β son números reales, entonces $\alpha + \beta$ es un número real.

Demostración. Se deben verificar tres cosas, haciendo la salvedad de empezar por la condición (2) de la definición de número real mediante cortaduras.

(2) Supóngase que $w < x$ para algún x de $\alpha + \beta$. Entonces $x = y + z$ para algún y de α y algún z de β, lo que significa que $w < y + z$, en consecuencia $w - y < z$. Es decir, $w - y \in \beta$ (ya que $z \in \beta$ y β es un número real. Como $w = y + (w - y)$, se obtiene que $w \in \alpha + \beta$.

(1) Ya que $\alpha \neq \varnothing$ y $\beta \neq \varnothing$, entonces $\alpha + \beta \neq \varnothing$. Puesto que, $\alpha \neq \mathbb{Q}$ y $\beta \neq \mathbb{Q}$, existen números racionales a y b tales que $a \notin \alpha$ y $b \notin \beta$. Todo x de α satisface $x < a$ (Ya que si $a < x$, entonces la condición (2) de número real implicaría que $a \in \alpha$); análogamente, si $y \in \beta$, entonces $y < b$. Así, $x + y < a + b$ para cualquier x de α e y de β. Entonces $a + b \notin \alpha + \beta$, de modo que $\alpha + \beta \neq \mathbb{Q}$.

(3) Si $x \in \alpha + \beta$, entonces $x = y + z$, si $y \in \alpha$ y z en β. Existen y' en α y z' en β con $y < y'$ y $z < z'$; entonces $x < y' + z'$ e $y' + z' \in \alpha + \beta$. Por lo tanto $\alpha + \beta$ no tiene elemento máximo.

Teorema 6.5.8. Si α, β y γ son números reales, entonces $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Demostración. Puesto que $(x + y) + z = x + (y + z)$ para todos los números racionales x, y, z, todo elemento de $(\alpha + \beta) + \gamma$ es también un elemento de $\alpha + (\beta + \gamma)$, y, viceversa.

Teorema 6.5.9. Si α, β son números reales, entonces $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Demostración. Por definición, $\alpha + \beta$ es el conjunto de todos los $r + s$ con $r \in \alpha$, $s \in \beta$. Igualmente $\beta + \alpha$ es el conjunto de todos los $s + r$; ya que r y s son cualquier par de números racionales, entonces $r + s = s + r$. En consecuencia, $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Definición 6.5.10. Se define $\mathbf{0}$ como: $\mathbf{0} = \{x \text{ en } \mathbb{Q}: x < 0\}$.

Teorema 6.5.11. $\mathbf{0}$ es un número real.

Teorema 6.5.12. Si α es un número real, entonces $\alpha + \mathbf{0} = \alpha$.

Demostración. Si $x \in \alpha$ e $y \in \mathbf{0}$, entonces $y < 0$, de modo que $x + y < x$. Esto implica que $x + y \in \alpha$. Así, todo elemento de $\alpha + \mathbf{0}$ es también un elemento de α. Por otra parte, si $x \in \alpha$, existe un número racional $y \in \alpha$ tal que $y > x$. Puesto que $x = y + (x - y)$, donde $y \in \alpha$, y $x - y < 0$ (así $x - y \in \mathbf{0}$), luego $x \in \alpha + \mathbf{0}$. En consecuencia, todo elemento de α pertenece a $\alpha + \mathbf{0}$.

Definición 6.5.13. $\mathbb{Q} - \alpha = \{x \text{ en } \mathbb{Q}: -x \notin \alpha\}$

Definición 6.5.14. Si α es un número real, entonces:

$$-\alpha = \{x \text{ en } \mathbb{Q}: -x \notin \alpha \text{ y } -x \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbb{Q} - \alpha\}$$

Teorema 6.5.15. Si α es un número real, entonces $-\alpha$ es un número real.

Demostración.

(1) Ya que $\alpha \neq \mathbb{Q}$, existe algún número racional $y \notin \alpha$. Si se supone que y no es el número racional mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$ (si sucede esto se sustituye y por y'). Entonces $-y \in -\alpha$. Así, $-\alpha \neq \emptyset$. Por otra parte, como $\alpha \neq \emptyset$, existe algún x en α. Entonces $-x \notin -\alpha$, de modo que $-\alpha \neq \mathbb{Q}$.

(2) Supóngase que $x \in -\alpha$ e $y < -x$, entonces $-y > -x$. Como $-x \notin \alpha$, entonces $-y$ tampoco está en α. Y como es evidente que $-y$ no es elemento mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$, ya que $-x < -y$. Dando como resultado que, $y \in -\alpha$.

(3) Si $x \in -\alpha$, entonces $-x \notin \alpha$ y existe algún número racional $y < -x$ que tampoco está en α. Si z es un número racional con $y < z < -x$. Entonces $z \notin \alpha$, y claramente z no es el elemento mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$. Así, $-z \in -\alpha$. Ya que $-z > x$, luego $-\alpha$ carece de elemento máximo.

Lema 6.5.16. Sea α un número real, y z un número real positivo. Entonces existen números racionales x en α, y no en α, tales que $y - x = z$. Además, podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$.

Demostración. Supóngase que $z \in \alpha$. Si los números z, $2z$, $3z$,… estuviesen *todos* en α, entonces número racional estaría en α, ya que todo número racional w satisface $w < nz$ para algún n, (ya que los números racionales satisfacen la propiedad arquimediana, esto es, si $x \in \mathbb{Q}$ con $x > 0$. Entonces para cualquier y de $\mathbb{Q}$ existe algún n que pertenece a los números naturales tal que $nx > y$).

Pero esto contradice el hecho de que α es un número real, luego existe algún k tal que $x = kz$ está en α e $y = (k + 1)\, z \notin \alpha$. En consecuencia, $y - x = z$. Además, si ocurre que y es el elemento mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$, sea $x' > x$ un elemento de α y sustitúyase x por x' e y por $y + (x' - x)$. Si $z \notin \alpha$, se prueba similarmente que los números $(-n)\, z$ no pueden estar todos en α.

Teorema 6.5.17. Si α es un número real, entonces $\alpha + (-\alpha) = \mathbf{0}$.

Demostración. Supóngase que $x \in \alpha$ y que $y \in -\alpha$. Entonces $-y \notin \alpha$, de modo que $-y > x$. Por ende $x + y < 0$, de modo que $x + y \in \mathbf{0}$. Así, todo elemento de $\alpha + (-\alpha) \in \mathbf{0}$. Si $z \in \mathbf{0}$, entonces $-z > 0$. Según el lema anterior, existe algún x en α, y algún $y \notin \alpha$, donde y no es el elemento mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$, tales que $y - x = -z$. Reescribiendo esta ecuación como $x + (-y) = z$, se obtiene que como x está en α, y $-y$ está en $-\alpha$, se prueba que $z \in \alpha + (-\alpha)$.

Definición 6.5.18. $P = \{\alpha \text{ en } \mathbb{R}: \alpha > \mathbf{0}\}$. Obsérvese que $\alpha + \beta$ está claramente en P si lo están α y β.

Teorema 6.5.19. Si α es un número real, entonces se cumple una y sólo una de las condiciones siguientes:

(i) $\alpha = \mathbf{0}$,
(ii) α está en P,
(iii) $-\alpha$ está en P.

Teorema 6.5.20. Si α, β y γ son números reales y $\alpha > \beta$, entonces $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Demostración. Como $\alpha > \beta$, implica que $\beta \subset \alpha$; luego de la definición de suma (+) se sigue que $\beta + \gamma \subset \alpha + \gamma$. De aquí que, $\alpha + \gamma \geq \beta + \gamma$. Se excluye la posibilidad de igualdad ya que: $\alpha + \gamma = \beta + \gamma$, implica que $\alpha = (\alpha + \gamma) + (-\gamma) = (\beta + \gamma) + (-\gamma) = \beta$, lo cual es falso, así pues, $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.

Definición 6.5.21. Si α, β son números reales y $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha \bullet \beta = \{z\text{: } z \leq 0 \text{ o } z = x \bullet y \text{ para algún } x \text{ de } \alpha \text{ e } y \text{ de } \beta \text{ con } x, y > 0\}.$$

Teorema 6.5.22. Si α y β son números reales con $\alpha, \beta > \mathbf{0}$, entonces $\alpha \bullet \beta$ es un número real.

Demostración. Se deben comprobar tres condiciones.

(1) Claramente $\alpha \bullet \beta \neq \emptyset$, ya que todos los numeros racionales negativos pertenecen a $\alpha \bullet \beta$. Por otra parte, Si $x \notin \alpha$ e $\notin \beta$, entonces $x > x'$ para todos los x' de α, e $y > y'$ para todos los y´ de β. Por ende, $xy > x'y'$ para todo x' e y'. Así, $xy \notin \alpha \bullet \beta$; en consecuencia $\alpha \bullet \beta \neq \mathbb{Q}$.

(2) Supóngase que $w < z$, donde $z \in \alpha \bullet \beta$. Si $w \leq 0$ entonces $w \in \alpha \bullet \beta$. En cambio, si $w > 0$, se tiene que $z > 0$, de forma que $z = xy$ para los número positivos x de α e y de β. De esta manera, $w = (wz/z) = (wxy/z) = [(wx/z)\, y]$.
Como $0 < w < z$, se tiene que $w/z < 1$, de modo que $(w/z) \bullet x \in \alpha$. Así, $w \in \alpha \bullet \beta$.

(3) Supóngase que $w \in \alpha \bullet \beta$, y $w \leq 0$. Existen x en α con $x > 0$ e y en β con $y > 0$. Luego $z = xy \in \alpha \bullet \beta$ y $z > w$. Supóngase ahora que $w > 0$. Entonces $w = xy$ para números positivos x de α y algún y de β. Además, α contiene algún $x' > x$; si $z = x'y$, entonces $z > xy = w$, y z está en $\alpha \bullet \beta$. Así $\alpha \bullet \beta$ carece de elemento máximo.

Obsérvese que $\alpha \bullet \beta > \mathbf{0}$, si $\alpha > \mathbf{0}$ y $\beta > \mathbf{0}$. De esta manera, $\mathbb{R}$ satisface el ítem (ii) de la definición de campo ordenado. El caso general de la multiplicación involucra definir primero el valor absoluto de α ($|\alpha|$).

Definición 6.5.23. Si α es un número real, entonces

$$|\alpha| = \begin{cases} \alpha, \text{si } \alpha \geq \mathbf{0} \\ -\alpha, \text{si } \alpha < \mathbf{0} \end{cases}$$

Definición 6.5.24. Si α y β son números reales, entonces

$$\alpha \bullet \beta = \begin{cases} \mathbf{0}, \text{si } \alpha = \mathbf{0} \text{ o } \beta = \mathbf{0} \\ |\alpha| \bullet |\beta|, \text{si } \alpha > \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0} \text{ o } \alpha < \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0} \\ -(|\alpha| \bullet |\beta|), \text{si } \alpha > \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0} \text{ o } \alpha < \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0} \end{cases}$$

Teorema 6.5.25. Si α y β son números reales, entonces $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$.

Demostración. Existen nueve posibilidades para comprobar este enunciado; estas son:

Tabla 6.1. Propiedad conmutativa de los números reales mediante cortaduras de Dedekind $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$

Caso 1	$\alpha = \mathbf{0}, \beta = \mathbf{0}$	Caso 4	$\alpha > \mathbf{0}, \beta = \mathbf{0}$	Caso 7	$\alpha < \mathbf{0}, \beta = \mathbf{0}$
Caso 2	$\alpha = \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$	Caso 5	$\alpha > \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$	Caso 8	$\alpha < \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$
Caso 3	$\alpha = \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$	Caso 6	$\alpha > \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0}$	Caso 9	$\alpha < \mathbf{0}, \beta < \mathbf{0}$

En cuanto al caso 5, esto es $\alpha > \mathbf{0}$, $\beta > \mathbf{0}$ se tiene por definición de multiplicación de números reales positivos que:

$$\alpha \bullet \beta = \{z \,/\, z \leq 0 \text{ o } z = x \cdot y \text{ para algún } x \text{ de } \alpha \text{ e } y \text{ de } \beta \text{ con } x, y > 0\}.$$

Debido a que x, y son números racionales positivos, se infiere que $x \cdot y = y \cdot x$, ya que en $\mathbb{Q}$ se satisface la propiedad conmutativa, de esta manera y haciendo unas ligeras modificaciones a la definición inicial, se llega a:

$\alpha \bullet \beta = \{z \,/\, z \leq 0 \text{ o } z = y \cdot x \text{ para algún } y \text{ de } \beta \text{ y } x \text{ de } \alpha \text{ con } y, x > 0\} = \beta \bullet \alpha$, en conclusión $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$ cuando $\alpha > \mathbf{0}$ y $\beta > \mathbf{0}$.

Los casos 1, 2, 3, 4, 7 se deducen inmediatamente de la definición de multiplicación de números reales mediante cortaduras (Def. 6.5.24) dando como resultado $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha = \mathbf{0}$.

En lo concerniente al caso 6, es decir, $\alpha > \mathbf{0}$ y $\beta < \mathbf{0}$, sucede por la definición 6.5.24 que:

$\alpha \bullet \beta = -(|\alpha| \bullet |\beta|)$ luego empleando la definición de valor absoluto, se obtiene que $-(|\alpha| \bullet |\beta|) = -(\alpha \bullet -\beta)$, a causa de que $\alpha > \mathbf{0}$ y $-\beta > \mathbf{0}$. De esa forma, $-(\alpha \bullet -\beta) = -(-\beta \bullet \alpha)$, a razón de que la propiedad conmutativa se cumple para $\alpha > \mathbf{0}$ y $-\beta > \mathbf{0}$, según la demostración hecha para el caso 5.

Continuando con la prueba, $-(-\beta \bullet \alpha) = -(|\beta| \bullet |\alpha|) = \beta \bullet \alpha$. (Def. 6.5.24). Se obtiene que $\alpha \bullet \beta = \beta \bullet \alpha$ cuando $\alpha > \mathbf{0}$ y $\beta < \mathbf{0}$.

La demostración relativa al caso 8, es muy similar al caso 6, y finalmente para el caso 9, o lo que viene a ser $\alpha < \mathbf{0}$ y $\beta < \mathbf{0}$ se tiene por la definición 6.5.24 que: $\alpha \bullet \beta = (|\alpha| \bullet |\beta|) = (-\alpha \bullet -\beta)$, esto último por la definición de valor absoluto, y ya que $-\alpha > \mathbf{0}$ y $-\beta > \mathbf{0}$ debido a la propiedad de tricotomía de un conjunto ordenado se llega al resultado (-α • - β) = (-β • - α) que es equivalente con (|β| • |α|), la que a su vez lleva al resultado β • α.

En resumen general, α • β = β • α, donde α y β son cualquier par de números reales.

Teorema 6.5.26. Si α, β, γ son números reales, entonces α • (β • γ) = (α • β) • γ.

Demostración. Existen 27 casos para verificar este teorema, estos son:

Tabla 4.2. Propiedad asociativa de los números reales mediante cortaduras de Dedekind
α • (β • γ) = (α • β) • γ

Caso 1	α > **0**, β > **0**, γ > **0**	Caso 10	α = **0**, β > **0**, γ > **0**	Caso 19	α < **0**, β > **0**, γ > **0**
Caso 2	α > **0**, β > **0**, γ = **0**	Caso 11	α = **0**, β > **0**, γ = **0**	Caso 20	α < **0**, β > **0**, γ = **0**
Caso 3	α > **0**, β > **0**, γ < **0**	Caso 12	α = **0**, β > **0**, γ < **0**	Caso 21	α < **0**, β > **0**, γ < **0**
Caso 4	α > **0**, β = **0**, γ > **0**	Caso 13	α = **0**, β = **0**, γ > **0**	Caso 22	α < **0**, β = **0**, γ > **0**
Caso 5	α > **0**, β = **0**, γ = **0**	Caso 14	α = **0**, β = **0**, γ = **0**	Caso 23	α < **0**, β = **0**, γ = **0**
Caso 6	α > **0**, β = **0**, γ < **0**	Caso 15	α = **0**, β = **0**, γ < **0**	Caso 24	α < **0**, β = **0**, γ < **0**
Caso 7	α > **0**, β < **0**, γ > **0**	Caso 16	α = **0**, β < **0**, γ > **0**	Caso 25	α < **0**, β < **0**, γ > **0**
Caso 8	α > **0**, β < **0**, γ = **0**	Caso 17	α = **0**, β < **0**, γ = **0**	Caso 26	α < **0**, β < **0**, γ = **0**
Caso 9	α > **0**, β < **0**, γ < **0**	Caso 18	α = **0**, β < **0**, γ < **0**	Caso 27	α < **0**, β < **0**, γ < **0**

En primer lugar sean *x*, *y*, *z* números racionales, donde $x \in \alpha$, $y \in \beta$, $z \in \gamma$. Con referencia al caso 1 sucede que: α > **0**, β > **0**, γ > **0**. Obsérvese que (β • γ) > 0 (campo ordenado [ii]), luego se puede emplear la definición 4.5.21 para decir que:

$$\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = \{w /\ w \leq 0 \text{ o } w = x \cdot (y \cdot z) \text{ para algún } x \text{ en } \alpha \text{ e } y \cdot z \text{ de } (\beta \bullet \gamma) \text{ con } x, y, z > 0\}.$$

El punto central de esta demostración consiste en el hecho de que *x*, *y*, *z* números racionales, y como en $\mathbb{Q}$ se cumple la propiedad asociativa, se tiene que, $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Luego, si se hace unas modificaciones a la definición inicial se obtiene que

$$\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = \{w /\ w \leq 0 \text{ o } w = (x \cdot y) \cdot z \text{ para algún } (x \cdot y) \text{ en } (\alpha \bullet \beta) \text{ y } z \text{ de } \gamma \text{ con } x, y, z > 0\}.$$

Pero esta última parte precisamente corresponde a (α • β) • γ cuando α > **0**, β > **0**, γ > **0.**

Los casos 2, 4, 5, 6, 8, 10 – 18, 20, 22, 23, 24 y 26 se deducen inmediatamente aplicando una o dos veces, la definición de multiplicación de números reales (Def. 6.5.24); dando como resultado α • (β • γ) = (α • β) • γ = **0**.

Pasando al caso 3, que equivale a decir que α > **0**, β > **0**, γ < **0** se tiene que:

α • (β • γ) = α • [−(|β| • |γ|)] (Def. de multiplicación de números reales)
α • [−(|β| • |γ|)] = α • [- (β • - γ)] (Def. de valor absoluto)

Por la propiedad de tricotomía (Teorema 6.5.19), si $\gamma < \mathbf{0}$ entonces $-\gamma > \mathbf{0}$ y ya que $\beta > \mathbf{0}$ se obtiene $(\beta \bullet -\gamma) > \mathbf{0}$. Luego por el ítem de conjunto ordenado, $-(\beta \bullet -\gamma) < \mathbf{0}$.

De esta manera,

$$\alpha \bullet [-(\beta \bullet -\gamma)] = -[|\alpha| \bullet |-(\beta \bullet -\gamma)|] \text{ (Def. de multiplicación de números reales)}$$
$$-[|\alpha| \bullet |-(\beta \bullet -\gamma)|] = -[\alpha \bullet (\beta \bullet -\gamma)] \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$-[\alpha \bullet (\beta \bullet -\gamma)] = -[(\alpha \bullet \beta) \bullet -\gamma] \text{ (Caso 1, ya que } \alpha > \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}, -\gamma > \mathbf{0}\text{)}$$
$$-[(\alpha \bullet \beta) \bullet -\gamma] = -[|(\alpha \bullet \beta)| \bullet |\gamma|] \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$-[|(\alpha \bullet \beta)| \bullet |\gamma|] = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma. \text{ (Def. de multiplicación de números reales).}$$

Así, $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$.

El caso 7 se reduce al caso 3 intercambiando los lugares de β y γ, mediante la propiedad conmutativa de la multiplicación. A partir de $(\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$, el caso 19 viene siendo el mismo caso 3, intercambiando primero los puestos de α y β, y luego cambiando la ubicación de γ y $(\alpha \bullet \beta)$, obteniendo $\gamma \bullet (\beta \bullet \alpha)$; todo esto por la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Pasando al caso 21, o lo que es lo mismo decir, $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta > \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$ se tiene que:

$$\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = \alpha \bullet [-(|\beta| \bullet |\gamma|)] \text{ (Def. de multiplicación en los números reales)}$$
$$\alpha \bullet [-(|\beta| \bullet |\gamma|)] = \alpha \bullet [-(\beta \bullet -\gamma)] \text{ (Def. de valor absoluto)}$$

Por la propiedad de tricotomía (Teorema 6.5.19), si $\gamma < \mathbf{0}$ entonces $-\gamma > \mathbf{0}$ y ya que $\beta > \mathbf{0}$ se obtiene $(\beta \bullet -\gamma) > \mathbf{0}$ por el inciso (ii) de campo ordenado. De nuevo por el mismo teorema 6.5.19, $-(\beta \bullet -\gamma) < \mathbf{0}$ y recalcando el hecho de que, $\alpha < \mathbf{0}$ se tiene como efecto:

$$\alpha \bullet [-(\beta \bullet -\gamma)] = |\alpha| \bullet |-(\beta \bullet -\gamma)| \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R}\text{)}$$
$$|\alpha| \bullet |-(\beta \bullet -\gamma)| = -\alpha \bullet (\beta \bullet -\gamma) \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$-\alpha \bullet (\beta \bullet -\gamma) = (-\alpha \bullet \beta) \bullet -\gamma \text{ (Caso 1, ya que } -\alpha > \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}, -\gamma > \mathbf{0}\text{)}$$
$$(-\alpha \bullet \beta) \bullet -\gamma = (\beta \bullet -\alpha) \bullet -\gamma \text{ (Propiedad conmutativa de la multiplicación)}$$
$$(\beta \bullet -\alpha) \bullet -\gamma = |-(\beta \bullet -\alpha)| \bullet |\gamma| \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$|-(\beta \bullet -\alpha)| \bullet |\gamma| = [-(\beta \bullet -\alpha)] \bullet \gamma \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R}\text{)}$$
$$[-(\beta \bullet -\alpha)] \bullet \gamma = [-|\beta| \bullet |\alpha|] \bullet \gamma \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$[-|\beta| \bullet |\alpha|] \bullet \gamma = (\beta \bullet \alpha) \bullet \gamma \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R}\text{)}$$
$$(\beta \bullet \alpha) \bullet \gamma = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma \text{ (Propiedad conmutativa en } \mathbb{R}\text{)}$$

En consecuencia, $\alpha \bullet (\beta \bullet \gamma) = (\alpha \bullet \beta) \bullet \gamma$ cuando $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta > \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$

Ahora considerando el caso 9, que dice $\alpha > \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$, y a partir de $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ se observa que si se intercambian los lugares de γ y $(\alpha \cdot \beta)$ y posteriormente los de α y β, se obtiene como resultado $\gamma \cdot (\beta \cdot \alpha)$, donde esta posibilidad es abarcada por el caso 21. La anterior observación se infiere por una doble aplicación de la propiedad conmutativa de los números reales con respecto a la multiplicación. Por otra parte, el caso 25 se reduce al caso 21 permutando la posición de las cortaduras β y γ.

Finalmente, para el caso 27, o su equivalente $\alpha < \mathbf{0}$, $\beta < \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$ se tiene:

$$\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = \alpha \cdot (|\beta| \cdot |\gamma|) \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R})$$
$$\alpha \cdot (|\beta| \cdot |\gamma|) = \alpha \cdot (-\beta \cdot -\gamma) \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$\alpha \cdot (-\beta \cdot -\gamma) = -[|\alpha| \cdot |(-\beta \cdot -\gamma)|] \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R})$$
$$-[|\alpha| \cdot |(-\beta \cdot -\gamma)|] = -[|\alpha| \cdot |(-\beta \cdot -\gamma)|] \text{ (Def. de valor absoluto)}$$

Como $\beta < \mathbf{0}$ y $\gamma < \mathbf{0}$, entonces $-\beta > \mathbf{0}$ y $-\gamma > \mathbf{0}$ a causa de la propiedad de tricotomía (Teorema 4.5.19), por esta razón, $|(-\beta \cdot -\gamma)| = (-\beta \cdot -\gamma)$, esto último es consecuencia del inciso (ii) de campo ordenado; algo similar ocurre con $|(-\alpha \cdot -\beta)| = -\alpha \cdot -\beta$.

$$-[|\alpha| \cdot |(-\beta \cdot -\gamma)|] = -[-\alpha \cdot (-\beta \cdot -\gamma)] \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$-[-\alpha \cdot (-\beta \cdot -\gamma)] = -[(-\alpha \cdot -\beta) \cdot -\gamma] \text{ (Ya que } -\alpha > 0, -\beta > 0, -\gamma > 0 \text{ [caso 1])}$$
$$-[(-\alpha \cdot -\beta) \cdot -\gamma] = -[|(-\alpha \cdot -\beta)| \cdot |\gamma|] \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$-[|(-\alpha \cdot -\beta)| \cdot |\gamma|] = (-\alpha \cdot -\beta) \cdot \gamma \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R})$$
$$(-\alpha \cdot -\beta) \cdot \gamma = (|\alpha| \cdot |\beta|) \cdot \gamma \text{ (Def. de valor absoluto)}$$
$$(|\alpha| \cdot |\beta|) \cdot \gamma = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma \text{ (Def. de multiplicación en } \mathbb{R})$$

Por lo tanto, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$. Y en síntesis general, $\alpha \cdot (\beta \cdot \gamma) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma$ donde α, β, γ son cualquier terna de cortaduras reales.

Definición 6.5.27. Se define $\mathbf{1} = \{x \text{ en } \mathbb{Q}: x < 1\}$.

Teorema 6.5.28. Se tiene que **1** es un número real.

Teorema 6.5.29. Si α es un número real, entonces $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$.

Demostración. Si $\alpha > \mathbf{0}$ se deduce fácilmente que todo elemento de $\alpha \cdot \mathbf{1}$ es también un elemento de α. Por otra parte, si $x \in \alpha$ y $x \leq 0$, se infiere inmediatamente que $x \in \alpha \cdot \mathbf{1}$. Si $x > 0$, existe algún número racional y en α tal que $x < y$. Entonces $x = y \cdot (x/y)$, y $x/y \in \mathbf{1}$, de modo que $x \in \alpha \cdot \mathbf{1}$. Esto demuestra que $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$ si $\alpha > \mathbf{0}$.

Si $\alpha < \mathbf{0}$, entonces, aplicando el resultado que acabamos de demostrar; se tiene

$$\alpha \bullet \mathbf{1} = -\,(|\alpha| \cdot |1|) = -(|\alpha|) = \alpha.$$

Finalmente, el teorema se deduce fácilmente cuando $\alpha = \mathbf{0}$.

Definición 6.5.30. Si α es un número real y $\alpha > \mathbf{0}$, entonces

$$\alpha^{-1} = \{x \text{ en } \mathbb{Q}\text{: } x \leq 0, \text{ o } x > 0 \text{ y } 1/x \notin \alpha, \text{ pero } 1/x \text{ no es el elemento mínimo de } \mathbb{Q} - \alpha\}$$

Si $\alpha < \mathbf{0}$, entonces $\alpha^{-1} = -(|\alpha|^{-1})$.

Teorema 6.5.31. Si α es un número real distinto de $\mathbf{0}$, entonces α^{-1} es un número real.

Demostración. Si $\alpha > \mathbf{0}$ sucede:

(1) Claramente $\alpha^{-1} \neq \emptyset$. Por otra parte, como $\alpha > \mathbf{0}$ existe algún número racional positivo x en α. Entonces $1/x \notin \alpha^{-1}$, luego $\alpha^{-1} \neq \mathbb{Q}$.

(2) Supóngase que $y < x$ y que $x \in \alpha^{-1}$. Sí $y \leq 0$, entonces $y \in \alpha^{-1}$. Sí $y > 0$, entonces $x > 0$, de modo que $1/x \notin \alpha$. Ya que $1/y > 1/x$, sucede que $1/y \notin \alpha$, y claramente $1/y$ no es el elemento mínimo de $\mathbb{Q}$ - α, así $y \in \alpha^{-1}$.

(3) Supóngase que $x \in \alpha^{-1}$. Si $x \leq 0$, luego existe algún y en α^{-1} con $y > x$, ya que α^{-1} contiene números racionales positivos. Si $x > 0$, luego $1/x \notin \alpha$, con $y < 1/x$. Si se elige un número racional z con $y < z < 1/x$. De esta manera, α^{-1} no contiene ningún elemento máximo.

Lema 6.5.32. Sea α un número real con $\alpha > \mathbf{0}$, y z un número racional con $z > 1$. Entonces existen números racionales x en α, tales que $y/x = z$. Además, podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbb{Q}$ - α.

Demostración. Supóngase primero que $z \in \alpha$. Puesto que $z - 1 > 0$ y

$$z^n = [1 + (z-1)]^n \geq 1 + n\,(z-1),$$

Se sigue que los números $z, z^2, z^3, \ldots$ no están todos en α. Existe por lo tanto algún k tal que $x = z^k \in \alpha$, e $y = z^{k+1} \notin \alpha$. Evidentemente $y/x = z$. Además, si y es el elemento mínimo de $\mathbb{Q}$ - α, sea $x' > x$ un elemento de α, y sustitúyase x por x' e y por (yx'/x).

Si $z \notin \alpha$, se puede demostrar análogamente que los números $1/z^k$ no pueden estar todos en α.

Teorema 6.5.33. Si α es un número real y $\alpha \neq \mathbf{0}$, entonces $\alpha \bullet \alpha^{-1} = \mathbf{1}$.

Demostración. Si se considera $\alpha > \mathbf{0}$, se obtiene $\alpha^{-1} > \mathbf{0}$. Supóngase que x es un número racional positivo de α, y que y es un número racional positivo de α^{-1}. Luego $1/y \notin \alpha$, de modo que $1/y > x$; en consecuencia $xy < 1$, lo que significa que $xy \in \mathbf{1}$. Ya que los numeros racionales $x \leq 0$ también pertenecen a $\mathbf{1}$, esto prueba que todo elemento de $\alpha \bullet \alpha^{-1}$ pertenece a $\mathbf{1}$.

Para probar el enunciado recíproco, supóngase que $z \in \mathbf{1}$. Si $z \leq 0$, entonces $z \in \alpha \bullet \alpha^{-1}$. Supóngase $0 < z < 1$. Según el lema anterior, existen números racionales positivos $x \in \alpha$ e $y \notin \alpha$, tales que $y/x = 1/z$; y podemos suponer que y no es el elemento mínimo de $\mathbb{Q} - \alpha$. Lo que significa que $z = x \bullet (1/y)$, donde $x \in \alpha$, y $1/y \in \alpha^{-1}$. En consecuencia, $z \in \alpha \bullet \alpha^{-1}$.

Teorema 6.5.34. Si α, β y γ son números reales, entonces $\alpha \bullet (\beta + \gamma) = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$.

Demostración. Existen 27 casos para demostrar este teorema. En primer lugar, supóngase que α, β, γ. Luego los dos numeros de la ecuación abarcan todos los números racionales menores o iguales que 0. Un número racional positivo de $\alpha \bullet (\beta + \gamma)$ es de la forma $x \bullet (y + z)$ para un x positivo de α, y en β y z en γ. Puesto que $x \bullet (y + z) = x \bullet y + x \bullet z$, donde $x \bullet y$ es un elemento positivo de $\alpha \bullet \beta$ y $x \bullet z$ es un elemento positivo de $\alpha \bullet \gamma$, este número también pertenece a $\alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$.

Por otra parte, un número racional positivo de $\alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma$ es de la forma $x_1 \bullet y + x_2 \bullet z$ para x_1, x_2 positivos en α, y en β y z en γ. Si $x_1 \leq x_2$, entonces $(x_1/x_2) \bullet y \leq y$ de modo que $(x_1/x_2) \bullet y \in \beta$. Así, $x_1 \bullet y + x_2 \bullet y = x_2 \bullet [(x_1/x_2) \bullet y + z] \in \alpha \bullet (\beta + \gamma)$. Ocurre algo similar si $x_2 \leq x_1$.

Falta considerar los casos en que α, β y γ no son todos mayores que $\mathbf{0}$. Si alguna de las tres cortaduras es $\mathbf{0}$, la demostración es trivial y los casos en que $\alpha < \mathbf{0}$ se deducen inmediatamente una vez se han considerado todas las posibilidades para β y γ. Así, si $\alpha > \mathbf{0}$ se considera tres casos: $\beta, \gamma < \mathbf{0}$; $\beta < \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$, y $\beta > \mathbf{0}, \gamma < \mathbf{0}$. El primer caso se infiere del caso ya demostrado, y el tercer caso es el mismo que el segundo solo que se intercambian β y γ.

Si se considera que $\beta > \mathbf{0}$, $\gamma < \mathbf{0}$ existen dos alternativas

(1) $\beta + \gamma \geq \mathbf{0}$. Entonces $\alpha \bullet \gamma = \alpha \bullet ([\beta + \gamma] + |\beta|) = \alpha \bullet (\beta + \gamma) + \alpha \bullet |\beta|$,

De modo que

$$\begin{aligned}\alpha \bullet (\beta + \gamma) &= -(\alpha \bullet |\beta|) + \alpha \bullet \gamma \\ &= \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma.\end{aligned}$$

(2) $\beta + \gamma < \mathbf{0}$. Entonces

$$\alpha \bullet |\beta| = \alpha \bullet (|\beta + \gamma| + \gamma) = \alpha \bullet |\beta + \gamma| + \alpha \bullet \gamma,$$

Así,

$$\alpha \bullet (\beta + \gamma) = -(\alpha \bullet |\beta + \gamma|) = -(\alpha \bullet |\beta|) + \alpha \bullet \gamma = \alpha \bullet \beta + \alpha \bullet \gamma.$$

Teorema 6.5.35. Existe un campo ordenado $\mathbb{R}$ completo.

Demostración. Ya se comprobó que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado y por el teorema 6.5.5, $\mathbb{R}$ tiene la propiedad de la mínima cota superior.

6.6. Algunas consideraciones sobre el campo real

Teorema 6.6.1. *El principio de Eudoxo-Arquímedes*. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha > \mathbf{0}$, entonces existe un entero n tal que $n\alpha > \beta$.

Demostración. Defínase $A = \{n\alpha /$ donde n toma todos los valores de los enteros positivos$\}$. Supóngase que el principio de Eudoxo-Arquímedes no es cierto, entonces β sería una cota superior de A, y como $\mathbb{R}$ es un conjunto ordenado con la propiedad de la mínima cota superior, entonces A tiene una mínima cota superior en $\mathbb{R}$. Sea $\gamma = \sup A$ y como $\alpha > \mathbf{0}$, $\gamma - \alpha < \gamma$, señalando el hecho que $\gamma - \alpha$ no es una cota superior de A. En consecuencia, $\gamma - \alpha < m\alpha$, donde m es un entero positivo. Así, $\gamma < (m + 1)\,\alpha \in A$, pero esto es absurdo ya que γ es una cota superior de A, lo que significa que el principio de Eudoxo-Arquímedes se garantiza en $\mathbb{R}$.

(Severi, 1951, p. 92) asegura que el postulado de Arquímedes (principio de Eudoxo-Arquímedes) se deduce como consecuencia del postulado de Dedekind, pero que no sucede lo mismo con el postulado de continuidad de Cantor, ya que el postulado de Arquímedes es independiente de este último; tal como lo han mostrado Veronese (1890) y Hilbert (1899). Severi enuncia el *postulado de continuidad de Cantor* de la siguiente manera:

Sean sobre una recta dos clases de puntos *H*, *H´*, tales que todo punto de *H* esté a la izquierda de todos los puntos de *H´* y que, dado un segmento σ arbitrario, sea posible encontrar un segmento menor que σ, que tenga el extremo inferior en *H* y el extremo superior en *H´*. Existe entonces un punto *M* de *separación* entre las dos clases: esto es, un punto que no tiene a la derecha ningún punto de *H* ni a la izquierda ningún punto de *H´* (Cantor, 1872, citado por Severi, 1951, pp.91 - 92).

De la observación hecha por Severi se deduce que el postulado de continuidad de Cantor y el postulado de continuidad geométrico de Dedekind no son equivalentes, Sin embargo, se recalca el hecho que el principio de Eudoxo-Arquímedes no se obtiene en este trabajo como consecuencia ni del principio de continuidad, ni del axioma de completez de Dedekind, pese a que el Teorema 6.6.1 puede dar indicios de lo contrario, se advierte que el axioma de Eudoxo-Arquímedes, o su versión aritmética (al menos en los numeros racionales); sirvió como herramienta en algunas demostraciones de que los números reales forman un campo ordenado completo mediante cortaduras. De esta manera surge la siguiente pregunta ¿Cómo puede deducirse el principio de Eudoxo-Arquímedes del principio de continuidad de Dedekind?

Teorema 6.6.2. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$ y $\alpha < \beta$, entonces existe $p \in \mathbb{Q}$ de tal manera que:

$$\alpha < p < \beta.$$

Demostración. Por hipótesis $\alpha < \beta$, luego $\alpha - \beta > \mathbf{0}$, y el teorema anterior proporciona un entero positivo n tal que:

$$n\,(\beta - \alpha) > \mathbf{1} \quad (1)$$

De nuevo si se aplica el principio de Eudoxo-Arquímedes, se obtienen los enteros positivos m_1 y m_2 de tal manera que cumplen las condiciones $m_1 > n\alpha$ y $m_2 > -(n\alpha)$. Por ende

$$-m_2 < n\alpha < m_1 \quad (2)$$

Luego existe un entero m que varía entre m_1 y m_2, esto es: $-m_2 \leq m \leq m_1$ que cumple con el requisito

$$m - \mathbf{1} \leq n\alpha < m \quad (3)$$

Adecuando y combinando las desigualdades (1), (2) y (3) se obtiene como resultado:

$$n\alpha < \mathrm{m} \leq \mathbf{1} + n\alpha < n\beta.$$

Como $n > 0$, se deduce a partir del teorema 6.4.8 y de la existencia del inverso multiplicativo en un campo, que para el número n se obtiene:

$$\alpha < (m/n) < \beta.$$

Si se nombra $p = m/n$, se obtiene la respuesta buscada, ya que p es un número racional.

6.7. Existencia y unicidad de cualquier raíz de grado entero

Teorema 6.7.1. Si $\alpha, \beta, ʎ, \phi \in P$ y $\alpha < \beta$ y $ʎ < \phi$ entonces $\alpha ʎ < \beta\varphi$.

Demostración. Como α, β, λ, $\phi \in P$ se tiene que $\alpha\lambda < \lambda\beta$ y $\beta\lambda < \beta\phi$ (teorema 6.4.8 [b]), en consecuencia: $\alpha\lambda < \beta\lambda$ y $\beta\lambda < \beta\phi$ (Propiedad conmutativa de la multiplicación en un campo). De esta manera, $\alpha\lambda < \beta\phi$ (Propiedad transitiva del conjunto ordenado $\mathbb{R}$).

Nota: Si $\alpha \in \mathbb{R}$, se denota (α) (α) $(\alpha)\ldots$ (α) (n veces α) como α^n.

Corolario 6.7.2. Si $\mathbf{0} < \delta < \theta$ entonces $\mathbf{0} < \delta^n < \theta^n$.

Demostración. Ya que $\mathbf{0} < \delta < \theta$, se iguala $\alpha = \lambda = \delta$ y $\beta = \phi = \theta$. Luego, aplicando reiteradamente el teorema 6.7.1, como también usando la notación anterior y sin olvidar el empleo de la condición (ii) de campo ordenado, se obtiene que: $\mathbf{0} < \delta^n < \theta^n$.

Lema 6.7.3. Si n pertenece a los enteros positivos y $n \geq 2$ entonces $b^n - a^n < (b - a)\, n\, b^{n-1}$ cuando $0 < a < b$.

Demostración. Dado que $b^n - a^n = (b - a)\, (b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1})$ se observa que el factor diestro del lado derecho de la igualdad tiene n sumandos, además la hipótesis inicial establece que $0 < a < b$; luego se cumple la condición para aplicar el inciso (b) del teorema 6.4.8, obteniendo los siguientes resultados:

$$
\begin{gathered}
b^{n-1} = b^{n-1} \\
b^{n-2}(a) < b^{n-2}(b) \\
b^{n-3}(a^2) < b^{n-3}(b^2) \\
\ldots \\
b^2(a^{n-3}) < b^2(b^{n-3}) \\
b(a^{n-2}) < b(b^{n-2}) \\
a^{n-1} < b^{n-1}
\end{gathered}
$$

En consecuencia empleando el ítem (i) de la definición de campo ordenado se obtiene que:

$$(b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}) < (b^{n-1} + b^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}) = n\, (b^{n-1}).$$

Por lo tanto

$$b^n - a^n = (b - a)\, (b^{n-1} + b^{n-2}a + \ldots + a^{n-1}) < (b - a)\, n\, (b^{n-1}).$$

En otras palabras: $b^n - a^n < (b - a)\, n\, (b^{n-1})$.

Teorema 6.7.4. Para todo número real $\alpha > \mathbf{0}$ y cada entero $n > 0$ hay un número real $\gamma > \mathbf{0}$, y solo uno, tal que $\gamma^n = \alpha$. Este número γ se denota $\sqrt[n]{\alpha}$, o $\alpha^{1/n}$.

Demostración. Supóngase que existen γ_1 e $\gamma_2 \in \mathbb{R}$, donde $\mathbf{0} < \gamma_1 < \gamma_2$, de modo que $\gamma_1 \neq \gamma_2$ y de tal forma que $\gamma_1^n = \alpha$ e $\gamma_2^n = \alpha$. Pero esto es imposible ya que el corolario 6.7.2 implica que si $\gamma_1 \neq \gamma_2$ entonces $\gamma_1^n \neq \gamma_2^n$. En conclusión, γ si es que existe es a lo más una.

Sea $E = \{\alpha \in \mathbb{R} / \alpha^n < x\}$ y sea $t = \alpha / (\alpha + \mathbf{1})$. En primer lugar se verifica que $\mathbf{0} < t < \mathbf{1}$. Ahora, en cuanto a la parte izquierda de esta desigualdad, esto es, $\mathbf{0} < t$, se tiene que por hipótesis $\alpha > \mathbf{0}$ y por el teorema 6.4.8 (b), $\mathbf{1} > \mathbf{0}$. Y ya que la suma es cerrada en un campo ordenado (Def. 6.4.9), $\mathbf{1} + \alpha > \mathbf{0}$. Luego por el teorema 6.4.8 (e) se tiene que $[\mathbf{1} / (\mathbf{1} + \alpha)] > \mathbf{0}$.

De esta manera, $\{\alpha [\mathbf{1} / (\mathbf{1} + \alpha)]\} = [\alpha / (\mathbf{1} + \alpha)] > \mathbf{0}$. (Definición de campo ordenado [ii]). En síntesis, $\mathbf{0} < t$.

En segundo lugar, para la desigualdad del lado derecho, es decir, $t < \mathbf{1}$, se supone lo contrario, o lo que es lo mismo, $t = \alpha / (\mathbf{1} + \alpha) \geq \mathbf{1}$ y multiplicando ambos lados de la desigualdad por $\mathbf{1} + \alpha$ se obtiene $\alpha \geq \mathbf{1} + \alpha$ (en uso del teorema 6.4.8 [b]), y sumando a ambos lados de esta última desigualdad $-\alpha$, y empleando la ley cancelativa se llega a que $\mathbf{0} \geq \mathbf{1}$, pero este resultado contradice el inciso (d) del teorema 6.4.8 [b], así $t < \mathbf{1}$. Finalmente se concluye que $\mathbf{0} < t < \mathbf{1}$.

Continuando con la demostración, por el corolario anterior: $t^{n-1} < \mathbf{1}^{n-1}$, de aquí, $t^{n-1} < \mathbf{1}$ (existencia del elemento neutro de la multiplicación [$\mathbf{1}$]). Multiplicando por t ambos lados de la desigualdad se tiene que por el teorema 6.4.8 [b] que $t^n < t$. Concluyendo que $t^n < t < \mathbf{1}$.

Falta probar que $t^n < \alpha$. Para esto supóngase que $t \geq \alpha$, entonces $[\alpha / (\mathbf{1} + \alpha)] \geq \alpha$. Ya que $\alpha > \mathbf{0}$, entonces $\mathbf{1}/\alpha > \mathbf{0}$ (Teorema 6.4.8 [e]). Basado en esto, multiplicando ambos lados de la desigualdad por $1/\alpha$, se obtiene $[\mathbf{1} / (\mathbf{1} + \alpha)] \geq \mathbf{1}$, luego multiplicando ambos lados de esta última desigualdad por $\mathbf{1} + \alpha$ se deduce que $\mathbf{1} \geq \mathbf{1} + \alpha$, por lo tanto, $\mathbf{0} \geq \alpha$; esto contradice la hipótesis inicial $\alpha > \mathbf{0}$.

De esta forma, $t = [\alpha / (\mathbf{1} + \alpha)] < \alpha$, y como $t^n < t$ por la propiedad transitiva de conjunto ordenado se llega al resultado $t^n < \alpha$. Así $t \in E$ y $E \neq \emptyset$.

Ahora, se considera el caso $t > \mathbf{1} + \alpha$ para obtener como resultado $t^n < t < \alpha$. Como $\mathbf{1} > \mathbf{0}$ (teorema 6.4.8 [d]) entonces $\mathbf{1} + \alpha > \mathbf{0} + \alpha = \alpha$, esto es debido al ítem (i) de la definición de campo ordenado. Ya que $t > \mathbf{1} + \alpha$ y $\mathbf{1} + \alpha > \alpha$, por la propiedad transitiva se infiere que $t > \alpha$.

Por hipótesis inicial, $\alpha > \mathbf{0}$, luego $\alpha + \mathbf{1} > \mathbf{0} + \mathbf{1}$, aplicando nuevamente el numeral (i) de la definición de campo ordenado, resulta que $\alpha + \mathbf{1} > \mathbf{1}$ y por la propiedad transitiva $t > \mathbf{1} > \mathbf{0}$. Ahora usando el corolario 1.11 se tiene que $t^{n-1} > \mathbf{1}^{n-1}$ o lo que es lo mismo $t^{n-1} > \mathbf{1}$ (existencia del neutro multiplicativo), ahora multiplicando ambos lados de la desigualdad por t se deduce que $t^n > t$ (una vez más por el teorema 6.4.8 [b] ya que $t > \mathbf{0}$).

En resumen, $t^n > t > \alpha$. Por lo tanto $t \notin E$. Así $E \neq \mathbb{R}$. Por otra parte, $\mathbf{1} + \alpha$ es una cota superior de E. De esta manera, el teorema 6.5.35 implica la existencia de $y = \sup E$.

Lo que se quiere ahora demostrar es que sí $y = \sup E$ entonces $\gamma^n = \alpha$. Para corroborar que esto sea cierto se hace uso de la propiedad de tricotomía de un campo ordenado y del método de reducción al absurdo, al descartar las posibilidades $\gamma^n < \alpha$, $\gamma^n > \alpha$.

En cuanto a la alternativa $\gamma^n < \alpha$, si se escoge h de tal forma que:

$$\mathbf{0} < h < \mathbf{1} \qquad (1)$$
$$h < \frac{\alpha - y^n}{n(y + 1)^{n-1}} \qquad (2)$$

Se infiere que tiene sentido escoger h de tal manera que cumpla estas condiciones ya que se puede comprobar que $\{(\alpha - y^n)/ [(n)\ (y + 1)^{n-1}]\} > \mathbf{0}$. Continuando con la prueba, en atribución del lema 6.7.3 se tiene que si $a = y$, $b = y + h$. Entonces

$$(y + h)^n - (y)^n < hn\ (y + h)^{n-1} < hn\ (y + 1)^{n-1} < x - y^n$$
$$(y + h)^n - (y)^n < \alpha - y^n$$

En consecuencia, $(y + h)^n < \alpha$, y por lo tanto $y + h \in E$. Debido a que $y + h > y$, se produce una contradicción, ya que $y = \sup E$.

En lo que respecta a la segunda opción, es decir, $\gamma^n > \alpha$ se obtiene que si

$$k < \frac{y^n - \alpha}{n(y)^{n-1}}$$

Se puede probar sin mayor dificultad que $\mathbf{0} < k < y$. Por otra parte, si $t \geq y - k$ se deduce que

$$y^n - t^n \leq y^n - (y - k)^n < kny^{n-1} = y^n - \alpha.$$

Por lo tanto, $t^n > \alpha$, así $t \notin E$. Por otra parte, se tiene que $y - k$ es una cota superior de E. Sin embargo $y - k < y$ contradiciendo la hipótesis de que y es la mínima cota superior de E.

Ya descartadas las alternativas $\gamma^n < \alpha$, $\gamma^n > \alpha$, se concluye que $\gamma^n = \alpha$.

Corolario 6.7.5. Si a y b son números reales positivos y n es un número entero positivo entonces

$$(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}.$$

Demostración. En virtud del teorema anterior existen α y β tales que $\alpha = a^{1/n}$, $\beta = b^{1/n}$. Se obtiene $ab = \alpha^n\, \beta^n = (\alpha\beta)\, (\alpha\beta) \ldots (\alpha\beta) = (\alpha\beta)^n$ debido a que la multiplicación en los numeros reales satisface la propiedad conmutativa. Y por la garantía de unicidad del anterior teorema se concluye que:

$$(ab)^{1/n} = \alpha\beta = a^{1/n}b^{1/n}.$$

6.8. Unicidad de los números reales salvo isomorfismos

Definición 6.8.1. *Función*[10]. Dados dos conjuntos S y T, cuyos elementos son objetos cualesquiera, supóngase que cada elemento x de S se relaciona, de cierta manera, con un elemento de T que se designará por $f(x)$. Se dice entonces que f es una *función* (*aplicación* o *mapeo*) de S en T.

La siguiente notación establece que mediante $f: S \to T$, se denota que f es una aplicación de S en T y se escribe $y = f(x)$ para un único y que pertenece a T. El conjunto S se llama *dominio de la función* f, o lo que es lo mismo f se encuentra definida en S y los elementos de $f(x)$ se llaman *imágenes* o *valores* de f. El conjunto de todos los valores de f se llama *rango* de f.

Definición 6.8.2. *Igualdad de funciones*. Sean $f: S \to T$ y $g: S \to T$ dos funciones, se dice que $f = g$, sí y solo si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in S$.

Definición 6.8.3. Una aplicación $f: S \to T$ es *sobreyectiva*, *suprayectiva* o simplemente *sobre* si todo $y \in T$ es imagen bajo f de algún $x \in S$; en otros términos si dado $y \in T$, existe un $x \in S$ tal que $y = f(x)$.

Además, si $f(S) = \{f(x) \in T \,/\, x \in S\}$, se tiene otra forma de definir función sobreyectiva, diciendo simplemente que: $f(S) = T$.

Definición 6.8.4. Una aplicación $f: S \to T$ es *inyectiva* o *uno a uno* (1 – 1) si para todo $x_1 \neq x_2$ en S implica que $f(x_1) \neq f(x_2)$ en T. Como una implicación es equivalente con su proposición contrarecíproca, esta misma definición se puede expresar diciendo que: si $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

Definición 6.8.5. Una aplicación $f: S \to T$ es una *función biyectiva* o una *biyección*, si f es función *inyectiva* y *sobreyectiva*.

Definición 6.8.6. *Si* F_1 y F_2 son dos campos, un *isomorfismo de* F_1 en F_2 es una función f de F_1 en F_2 que cumple las propiedades siguientes:

(1) Si $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$
(2) Si z está F_2, entonces $z = f(x)$ para algún x de F_1
(3) Si x, y están en F_1, entonces
(i) $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$,
(ii) $f(x \odot y) = f(x) \bullet f(y)$.

Nótese que las operaciones en F_1 se designan por $\oplus$, $\odot$, mientras que las operaciones en F_2 se denotan por $+$, $\bullet$. Por otra parte, si F_1 y F_2 son cuerpos ordenados que cumplen con la condición:

[10] La definición de función presentada en este capítulo es una definición "semiformal", un concepto mucho más riguroso de función de un conjunto en otro, se puede plantear en términos de un subconjunto del producto cartesiano de dichos conjuntos.

$$(4) \text{ Si } x < y \text{ entonces } f(x) < f(y).$$

Entonces se dice que f es un *isomorfismo ordenado* de F_1 en F_2. En concordancia con todo lo anterior se dice que los cuerpos F_1 y F_2 son *isomorfos* si existe un isomorfismo entre ellos.

Otro hecho notable es que las condiciones (1) y (2) equivalen a las definiciones de función inyectiva y función sobreyectiva respectivamente.

Lema 6.8.7. El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) no está acotado superiormente.

Teorema 6.8.8. Si F es un campo ordenado completo, entonces F es isomorfo a $\mathbb{R}$.

Demostración. De acuerdo con la definición 6.8.6 dos campos son isomorfos, si existe un isomorfismo entre ellos. De esta manera el objetivo es un construir una función f de $\mathbb{R}$ en F que sea un isomorfismo.

Antes de entrar en materia, en primer lugar, y a grandes rasgos se empieza por definir tal función para los números enteros, esto es:

$$f(0) = \mathbf{0}$$
$$f(n) = \mathbf{1} + \mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1} \ (n \text{ veces}) \text{ para } n > 0,$$
$$f(n) = -(\mathbf{1} + \mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1}) \ (n \text{ veces}) \text{ para } n < 0.$$

Apoyados en esta definición se puede verificar que:

$$f(m \oplus n) = f(m) + f(n)$$
$$f(m \odot n) = f(m) \bullet f(n).$$

Para todos los enteros m y n. Por otra parte, se denota $f(n)$ por $\boldsymbol{n}$.

En segundo lugar, se define esta función para los números racionales de la siguiente manera:

$$f(m/n) = \boldsymbol{m}/\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{n}^{-1}$$

Aquí se recalca el hecho de que $\mathbf{1} + \ldots + \mathbf{1} \neq \mathbf{0}$ si $n > 0$, debido a que F es un campo ordenado. El enunciado anterior está bien definido ya que si $m/n = k/l$, entonces $ml = nk$, de modo que $\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{l} = \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{n}$, así que $\boldsymbol{m} \bullet \boldsymbol{n}^{-1} = \boldsymbol{k} \bullet \boldsymbol{l}^{-1}$.

De forma similar que a lo acontecido a los números enteros se puede verificar los siguientes hechos:

$$f(r_1 \oplus r_2) = f(r_1) + f(r_2),$$
$$f(r_1 \odot r_2) = f(r_1) \bullet f(r_2).$$

Para todos los números racionales r_1 y r_2. Además también se cumple el hecho de que si $r_1 < r_2$, entonces $f(r_1) < f(r_2)$ (Observación 1).

Finalmente, se construye $f(\alpha)$ para α, donde α es un número real arbitrario. A continuación se emboza la idea de cómo puede surgir esta construcción. Dado cualquier número real α, sea A_α un subconjunto de F y $A_\alpha = \{f(r) \ / \ r < \alpha$ donde $r \in \mathbb{Q}\}$. Se tiene que: $A_\alpha \neq \varnothing$ y A_α está acotado superiormente, ya que si $r_0 \in \mathbb{Q}$ y $r_0 > \alpha$, entonces $f(r_0) > f(r)$ para todos los $f(r)$ de A_α (esto es debido a la consideración anterior, hecha para todos los números racionales y a la definición de A_α.) Por otra parte, como F es un campo ordenado completo, el conjunto A_α tiene mínima cota superior, y se define $f(\alpha)$ como sup A_α.

En consecuencia, existen dos definiciones distintas para $f(x)$; la primera donde x es un número racional y la segunda donde x es un número real. Por lo tanto, hay que probar que estas dos definiciones concuerdan cuando x es un número racional; esto es:

$$Sup\ A_x = f(x).$$

Donde $f(x)$ denota aquí $\boldsymbol{m/n}$, para $x = m/n$, esto se debe a que F es un conjunto completo y en consecuencia, los elementos $\mathbf{1 + 1 + \ldots + 1}$ (n veces, para números naturales n) forman un conjunto que no es acotado superiormente (Lema 6.8.7, y haciendo la aclaración que la demostración se aplica para el conjunto F en lugar del conjunto $\mathbb{R}$). Partiendo de este hecho se llega a un teorema análogo al teorema 6.6.2. En ese sentido si a y b son elementos de F con $a < b$, existe un número racional r tal que

$$a < f(r) < b.$$

Volviendo al punto inicial, es decir a la demostración de si las dos definiciones de $f(x)$ concuerdan cuando x es racional, se obtiene que sí y es un número racional con $y < x$ entonces $f(y) < f(x)$ (Observación 1). De este modo, todo elemento de A_x es menor que $f(x)$. En consecuencia:

$$\text{Sup } A_x \leq f(x).$$

Considérese solo una de estas posibilidades, es decir, supóngase que:

$$\text{Sup } A_x < f(x).$$

Entonces por un teorema análogo al teorema 6.6.2 existe un número racional r tal que

$$\text{Sup } A_x < f(r) < f(x).$$

La condición $f(r) < f(x)$ implica que $r < x$ (ya que r y x son números racionales), lo que quiere decir que $f(r)$ está en el conjunto A_x; contradiciendo la condición sup $A_x < f(r)$. Esto prueba que la suposición original: Sup $A_x < f(x)$ no es cierta, por ende:

$$\text{Sup } A_x = f(x).$$

En conclusión, se tiene una función bien definida de $\mathbb{R}$ en F. Falta probar que f satisface las condiciones (1), (2), (3) y (4) de la definición de isomorfismo ordenado.

Continuando con la demostración se empieza por demostrar la condición (4). Si x e y son números reales con $x < y$, entonces $A_x \subset A_y$ (Definición de orden). Por lo tanto:

$$f(x) = \text{Sup } A_x \leq \text{Sup } A_y = f(y).$$

Para eliminar la condición de igualdad, esto es: Sup $A_x =$ Sup A_y, se tiene que si se aplica dos veces el teorema 6.6.2, se obtiene como consecuencia, la existencia de dos números racionales r y s diferentes entre sí de tal forma que:

$$x < r < s < y.$$

Como[11] $f(r) < f(s)$ (Observación 1) se sigue que:

$$f(x) \leq f(r) < f(s) \leq f(y).$$

Así, $f(x) < f(y)$.

La condición (1) se deduce de la condición (4); ya que si $x \neq y$, entonces por la propiedad de tricotomía de un campo ordenado se tiene que: $x < y$, o $y < x$. En el primer caso $f(x) < f(y)$, y en el segundo caso $f(y) < f(x)$; en ambos casos $f(x) \neq f(y)$.

En cuanto a la condición (2), si $a \in F$ y si $B = \{f(r) \,/\, f(r) < a \text{ y } r \in \mathbb{Q}\}$. El conjunto $B \neq \emptyset$, y es también acotado superiormente, ya que existe un número racional s con $f(s) > a$, por ende $f(s) > f(r)$ para r en B, lo cual implica que $s > r$. Por otra parte, Sea $x = \sup B$; entonces se quiere demostrar que $f(x) = a$. Para probar este suceso, se deben descartar las opciones:

[11] Se señala el hecho de que existen dos relaciones de orden, una en relación con el conjunto ordenado $\mathbb{R}$ y otra en el conjunto ordenado *F.* Pese a esto, no existe una distinción tipográfica de ningún tipo en este trabajo que haga palpable esta diferencia, excepto esta nota.

$$f(x) < a,$$
$$a < f(x).$$

Para el primer caso existe un número racional r con

$$f(x) < f(r) < a.$$

De aquí se observa que $x < r$ y que r está en B, contradiciendo el hecho de que $x = \sup B$. En el segundo caso tendría que existir un número racional r con

$$a < f(r) < f(x).$$

Esto conlleva a que $r < x$. Puesto que $x = \sup B$, esto quiere decir que $r < s$ para algún s de B. En consecuencia,

$$f(r) < f(s) < a,$$

Lo cual conduce a una contradicción. Así, $f(x) = a$.

Finalmente, para comprobar la condición (3), sean x e y números reales y supóngase que $f(x \oplus y) \neq f(x) + f(y)$. Entonces,

$$f(x \oplus y) < f(x) + f(y) \text{ o } f(x) + f(y) < f(x \oplus y).$$

En el primer caso existe un número racional r tal que

$$f(x \oplus y) < f(r) < f(x) + f(y)$$

Pero esto quiere decir que

$$x + y < r.$$

Por lo tanto r puede escribirse como suma de dos números racionales

$$r = r_1 \oplus r_2, \text{ donde } x < r_1 \text{ e } y < r_2.$$

Entonces, ya que f satisface las siguientes condiciones

$$f(r_1 \oplus r_2) = f(r_1) + f(r_2),$$
$$f(r_1 \odot r_2) = f(r_1) \bullet f(r_2).$$

Para todos los números racionales r_1 y r_2, se concluye que:

$$f(r) = f(r_1 \oplus r_2) = f(r_1) + f(r_2) > f(x) + f(y).$$

Lo cual conlleva a una contradicción. El segundo caso se trata de forma parecida.

Finalmente, si x e y son números reales positivos, el mismo tipo de razonamiento sirve para demostrar que

$$f(x \odot y) = f(x) \bullet f(y);$$

Definición 6.8.9. Sea S un conjunto no vacío y defínase I: $S \rightarrow S$ mediante $I(x) = x$ para todo $x \in S$. Esta función de S en sí mismo, recibe el nombre de *función identidad*.

Teorema 6.8.10. Si F es un campo ordenado completo, entonces la función identidad es un isomorfismo ordenado de F en sí mismo.

Definición 6.8.11. *Imagen inversa*. Si f es una aplicación de S en T, y $A \subseteq T$ entonces el conjunto $B = \{x \in S / f(x) \in A\}$, al cual se designará por $f^{-1}(A)$ y se llamará la *imagen inversa de A bajo f*.

Tal definición no define necesariamente una función de T en S. Esto es debido a dos razones, la primera dice que si f no es una función sobreyectiva, entonces existe por lo menos un elemento y en T que no es imagen de ningún elemento de x en S, de esta manera $f^{-1}(y) = \emptyset$. [12] La segunda razón es debido que si f no es una aplicación inyectiva, entonces existe por lo menos un elemento y en T para el cual hay dos o más elementos, $x_1 \neq x_2$; que cumplen con el requisito $f(x_1) = f(x_2) = y$. Por consiguiente, $f^{-1}(y) = x_1$ y $f^{-1}(y) = x_2$, de esta manera $f^{-1}(y)$ no es un único elemento, lo cual contradice la definición de función.

Definición 6.8.12. *Función inversa*. Si f es una aplicación de S en T, y si la imagen inversa de T bajo f define una función f^{-1} de T en S, entonces f^{-1} se denomina *función inversa* de f y la aplicación f recibe el nombre de *función invertible*.

En conformidad con esta definición y con la observación del concepto anterior, se pretende dar garantía de la existencia de la función inversa, con el teorema 6.8.15.

Definición 6.8.13. *Función compuesta*. Si f es una función de S en T y g es una función de T en U, entonces la *composición*, cuya notación es $(g * f)$, es la aplicación $g * f$ de S en U definida como $(g * f)(x) = g(f(x))$ para todo $x \in S$.

[12] Obsérvese que la notación f^{-1} se usa tanto para denotar elementos como conjuntos.

Es de señalar el hecho de que para que la composición de funciones f y g este bien definida, es decir, $g * f$ tenga sentido, el *conjunto de llegada* T de la aplicación f debe ser el *conjunto de partida* de la aplicación g.

Teorema 6.8.14. Si f, g, h son funciones de S en T, de T en U y de U en V, respectivamente; entonces $f * (g * h) = (f * g) * h$, o lo que es lo mismo, las aplicaciones verifican la propiedad asociativa bajo la composición.

Teorema 6.8.15. La función f de S en T es biyectiva sí y solo si f es invertible.

Demostración. Supóngase que f es una función de S en T, biyectiva; entonces se define g de T en S de la siguiente manera, para cualquier $y \in T$, $g(y) = x$, donde $x \in S$, y satisface la condición $f(x) = y$, debido a que f es una función sobreyectiva se garantiza la existencia de x, y ya que f es una función inyectiva se tiene que este x es único.

Se recalca el hecho de que para toda $x \in S$ se obtiene $y = f(x)$ y por la definición de g, $g(y) = x$, así que $(g * f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$ entonces $(g * f) = I_S$ (la función identidad en el conjunto S). De forma análoga, para cada $y \in T$, $x = g(y)$ y por la definición de f, $f(x) = y$, por lo tanto, $(f * g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$ entonces $(f * g) = I_T$ (la función identidad en el conjunto T).

Ahora, supóngase que g es una función inversa de f y x_1, x_2 son elementos de S tal que se satisface la condición $f(x_1) = f(x_2)$, entonces ya que g es la función inversa de f se obtiene: g $(f(x_1)) = x_1 = x_2 = g(f(x_2))$, lo cual significa que f es inyectiva. Por otra parte, para todo $y \in T$ se tiene que $y = f(g(y)) = f(x)$ donde $x = g(y)$, que corresponde a la definición de una aplicación sobreyectiva. En síntesis, si f es invertible entonces f es biyectiva.

Obsérvese que si f es invertible entonces f^{-1} es la notación de la función inversa de f. Y como efecto colateral de la demostración de este enunciado se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 6.8.16. Si f es una biyección de S en T, entonces $(f * f^{-1}) = I_T$ y $(f^{-1} * f) = I_S$, donde i_S e i_T son las aplicaciones identidad de S y T, respectivamente.

Otro hecho destacable es que $f^{-(-1)} = f$, lo cual se infiere a partir del teorema 6.8.15 y por este mismo resultado, f^{-1} es una biyección.

Teorema 6.8.17. Si f un isomorfismo ordenado de F_1 en F_2 y g un isomorfismo ordenado de F_2 en F_3; entonces $g * f$ es un isomorfismo ordenado de F_1 en F_3.

Demostración. En primer lugar sean x, y dos elementos diferentes de F_1, como f es un isomorfismo ordenado de F_1 en F_2 se tiene por la condición (1) de este concepto que: $f(x) \neq f(y)$. Nuevamente como g es un isomorfismo ordenado de F_2 en F_3 se deduce por el ítem (1) de isomorfismo que: $g(f(x)) \neq g(f(y))$ y en concordancia con la definición de función compuesta (Def. 6.8.13) esto equivale a decir que $(g * f)(x) \neq (g * f)(y)$, o lo que es lo mismo $g * f$ satisface la condición (1) de isomorfismo ordenado.

Supóngase que $z \in F_3$, entonces existe $y \in F_3$ de tal manera que $z = g(y)$, esto es debido a que g es isomorfismo ordenado de F_2 en F_3 y por ende se verifica la condición (2) de esta misma definición, de la misma manera, f es un isomorfismo ordenado de F_1 en F_2 entonces existe x en F_1 que cumple el requisito $z = f(x)$. De acuerdo a la definición de función compuesta: $z = (g * f)(x)$, así se prueba el requisito (2) para $g * f$.

En lo que respecta a la condición (3) de isomorfismo[13] ordenado se tiene:

Inciso 3 (i)

$$(g * f)(x + y) = g(f(x + y)) \text{ (definición de función compuesta)}$$
$$g(f(x + y)) = g(f(x) + f(y)) \text{ (ya que } f \text{ es un isomorfismo ordenado)}$$
$$g(f(x) + f(y)) = g(f(x)) + g(f(y)) \text{ (ya que } g \text{ es un isomorfismo ordenado)}$$
$$g(f(x)) + g(f(y)) = (g * f)(x) + (g * f)(y) \text{ (definición de función compuesta)}$$

Inciso 3 (ii)

$$(g * f)(x \bullet y) = g(f(x \bullet y)) \text{ (Definición de función compuesta)}$$
$$g(f(x \bullet y)) = g(f(x) \bullet f(y)) \text{ (ya que } f \text{ es un isomorfismo ordenado)}$$
$$g(f(x) \bullet f(y)) = g(f(x)) \bullet \mathrm{g}(f(y)) \text{ (ya que } g \text{ es un isomorfismo ordenado)}$$
$$(g * f)(x) \bullet (g * f)(y) \text{ (Definición de función compuesta)}$$

Finalmente en cuanto a la demostración de la condición (4) supóngase que $x < y$, luego como f es un isomorfismo ordenado de F_1 en F_2, se infiere de nuevo por la condición (4) que $f(x) < f(y)$, y de forma análoga y por la misma condición, como g es un isomorfismo ordenado de F_2 en F_3 se obtiene que $g(f(x)) < g(f(y))$, y en conformidad con la definición de función compuesta, $(g * f)(x) < (g * f)(y)$.

Teorema 6.8.18. Si f es un isomorfismo ordenado de F_1 en F_2, entonces f^{-1} existe, y f^{-1} es un isomorfismo ordenado de F_2 a F_1; donde F_1 y F_2 son dos campos ordenados completos.

Lema 6.8.19. Si f es una aplicación de S en T e i_S, i_T son las aplicaciones identidad de S y T en sí mismos y respectivamente, entonces:

$$i_T * f = f \text{ y } f * i_S = f$$

[13] Para simplificar el uso de los términos de suma y multiplicación tanto en F_1 como en F_2, no se hizo ninguna distinción entre las operaciones de ambos conjuntos en la demostración de este inciso.

Teorema 6.8.20. El único isomorfismo de $\mathbb{R}$ en sí mismo es la función identidad.

Teorema 6.8.21. Si F es un campo ordenado completo, existe un único isomorfismo f de $\mathbb{R}$ en F.

Demostración. En cuanto a la existencia, ya se construyó un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en F. En lo concerniente a la unicidad, supóngase que existen dos isomorfismos ordenados f, g de $\mathbb{R}$ en F. Como f, g son isomorfismos ordenados de $\mathbb{R}$ en F entonces f^{-1} y g^{-1} existen y son isomorfismos ordenados de F en $\mathbb{R}$ (Teorema 6.8.18). Luego, si x es un número real se tiene que $(g^{-1} * f)(x)$ representa un isomorfismo de $\mathbb{R}$ en sí mismo (Teorema 6.8.17), obteniendo como consecuencia del teorema 6.8.20 que $g^{-1} * f$ es la función identidad, en otros términos, $g^{-1} * f = I$ (donde I representa la función identidad en $\mathbb{R}$). Aplicando a esta última igualdad la función g, se obtiene que

$$g * (g^{-1} * f) = g * I$$

$(g * g^{-1}) * f = g$ (propiedad asociativa de la composición de funciones y Lema 6.8.19)

$(I_F) * f = g$ (Teorema 6.8.16 y Lema 6.8.19)

Cabe mencionar el hecho de que I_F representa la función identidad en F

$f = g$ (Lema 6.8.19).

7. CONCLUSIONES

1. Las referencias hechas por matemáticos, historiadores de las matemáticas y/o estudiosos de la obra de los *Elementos*, sobre la correspondencia entre la TPE y la TCD, se sintetizan en términos que expresan que la TPE constituye una anticipación plena a teorías modernas como la TCD, sobre los orígenes de los numeros irracionales, lo cual corroboró Dedekind al afirmar que las ideas de Eudoxo eran precisamente lo que se necesitaba para erigir los fundamentos del sistema de los numeros reales. Complementariamente, a pesar de que Barón, en referencia a la matemática griega, señala que si bien, debido a la existencia de segmentos inconmensurables, todas las magnitudes geométricas no podían ser consideradas numéricamente medibles, la TPE, es de fundamental importancia, porque representa, esencialmente, una teoría formal del sistema de los numeros reales, cuya idea esencial estaba implícita en la definición 5 del libro V de los *Elementos* de Euclides, la cual divide a los números racionales en dos clases coexistentes, de tal manera que coincide con la idea de cortadura, con la que Dedekind define los numeros irracionales.

2. Desde la perspectiva de la Educación Matemática se pone de manifiesto la importancia del estudio de la TPE y la TCD, por cuanto el hacer este estudio articulando las dos teorías aporta elementos conceptuales tales como la visualización de algunas huellas y hechos que permiten establecer, mediante el análisis epistemológico, tanto de problemáticas relacionadas con la búsqueda de objetividad matemática como de procesos de constitución de los objetos matemáticos, que hacen posible vivir experiencias de reconstrucción de teorías; tales como el caso de lo que se podría denominar el primer acercamiento formal entre número y magnitud, como parte de lo que históricamente se conoce como la constitución del continuo de los numeros reales como objeto matemático

3. Puesto que la construcción histórica de los números reales fue posible en la medida en que las magnitudes se pudieron operar como números, la TPE y la TCD constituyeron dos hitos centrales en el proceso de la constitución de los números reales como objeto matemático.

4. La definición de número propuesta por Stevin en 1585, trataba de identificar número con proporción entre magnitudes en el sentido de las matemáticas griegas. De esta manera, la TPE se convertía en la base de la nueva aritmética generalizada, lo cual, en ningún momento, constituyó un propósito que pretendieran alcanzar los griegos; sin embargo, y a pesar de que en los *Elemento*s de Euclides no había una fundamentación para los números irracionales, el enfoque orientado hacia la construcción de la nueva aritmética generalizada, que estaba implícito en la idea de identificar número con proporción entre magnitudes, era de tal trascendencia que tuvo aceptación general por parte de Descartes, Newton, Leibniz y aún por Cauchy y Lipschitz (Ferreirós,1998, p. 8).

5. Teniendo en cuenta que existía concordancia entre Dedekind, Weierstrass y Cantor sobre la idea de reducción de los números irracionales a los números racionales, a pesar de que Dirichlet consideraba que se hacía con un método carente de precisión, la construcción de los números irracionales, que era un paso problemático, de todos modos vino a resolver, de una vez, el problema de la aritmética de obtener una definición rigurosa y general de los números irracionales por construcción, empleando únicamente los números racionales y sus operaciones.

6. Para Dedekind, los números racionales ofrecían la garantía de obtener un nuevo dominio numérico, desde un punto de partida sólido, ya que los números racionales se podían definir con rigor mediante los enteros. Y para definir los números irracionales a partir de los números racionales se apeló a las propiedades de transitividad, densidad y de la *cortadura*; y puesto que en esta última estaría la esencia de la continuidad, la misma se constituía, en la clave epistemológica que lo conduciría a los números reales. Es decir, la propiedad de la cortadura le permitía atrapar la continuidad en un lenguaje matemático y al hacer la caracterización de este concepto pudo dar el paso definitivo para la formulación rigurosa del conjunto de los números reales.

7. A pesar de que es posible establecer una equivalencia formal, pero parcial, entre la TPE y la TCD, se debe tener en cuenta que existen diferencias fundamentales entre las dos teorías. En efecto el concepto de cortadura no puede considerarse simplemente como un refinamiento de la definición euclidiana de proporción, sino como un caso específico de una tendencia mucho más general que guío una parte esencial de la creación matemática de Dedekind" (Corry, 1994. p. 22). En consecuencia, afirmar que las dos teorías constituyen una sola y que la TCD es sólo un refinamiento en la formulación implica una desvirtuación histórica de los aportes de Eudoxo y de Dedekind. Por lo tanto los aportes de estos dos matemáticos "pueden ser comprendidos en su justo valor sólo al considerar ambas teorías dentro de sus respectivos marcos conceptuales históricamente localizados, y no como sistemas de ideas intemporales sin connotación fuera del ámbito formal (Corry, 1994, p. 22).

8. El corolario 6.7.4, esto es, si a y b son números reales positivos y n es un número entero positivo entonces $(ab)^{1/n} = a^{1/n}b^{1/n}$ responde explícitamente a la pregunta formulada por Dedekind sobre el hecho de encontrar una demostración aritmética de que $\sqrt{6} = \sqrt{2} \bullet \sqrt{3}$, basada en la teoria de cortaduras. La demostración de este caso particular concuerda con lo dicho por Dedekind en la correspondencia con Lipschitz en donde aseguraba que el modelo completo del dominio continuo de los números irracionales era lo que necesitaba para caracterizar cualquier proporción de magnitudes mediante un determinado número incluído en él.

9. Otro hecho de tener en cuenta es el apoyo de Dedekind a la noción de infinito actual, concepto tan controversial en la época de este personaje ya que muchas personas no aceptaban la inmiscusión de esta idea en las matemáticas, incluso científicos de primera línea. Esta idea se manifestó en las propiedades establecidas por Dedekind para la definición de cortaduras.

8. Referencias Bibliográficas

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, 1*(8), 30 - 46.

Babini, J. (1972). *Gotifredo Guillermo Leibniz - Isaac Newton: el cálculo infinitesimal: origen - polémica.* Buenos Aires: Eudeba.

Bares, J., & Climent, J. (1998). *Continuidad y números irracionales* (5a ed.). Madrid: Alianza Editorial.

Barón, M. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus.* New York: Pergamon Press.

Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and Its Conceptual Development.* New York: Dover Publications.

Collete, J. P. (1985). *Historia de las matemáticas* (Vol. 2). México, D.F: Siglo XXI Editores.

Corry, L. (1994). La teoría de las proporciones de Eudoxio interpretada por Dedekind. *Mathesis. Filosofía e Historia de la Matemática, 1*(10), 1 - 10.

Courant, R., & Robbins, H. (1979). *¿Qué es la matemática?* (5a ed. ed.). Madrid: Aguilar Ediciones.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus.* New York: Springer Verlag.

Ferreirós, J. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?* Madrid, España: Alianza Editorial.

Ferreirós, J. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial.

González, P. (2008). La solución de Eudoxo a la crisis de los inconmensurables. *Revista Sigma*(33), 101 - 130.

Heath, T. (1956). *The Thirteen Books of Euclid´s Elements, translated from the text of Heiberg* (Vol. 2). New York: Dover Publications.

Hilbert, D. (1993). *Fundamentos de las matemáticas.* (L. Segura, Trad.) México D.F: Facultad de Ciencias, UNAM.

Ifrah, G. (1987). *Las Cifras. Historia de una gran invención.* Madrid: Alianza Editorial.

Kline, M. (1972). *El pensamiento matemático de la antiguedad a nuestos días* (Vol. 1 y 2). Madrid: Alianza Editorial.

Moise, E. (1968). *Geometría elemental desde un punto de vista avanzado.* México, D.F: Compañia Editorial Continental.

Moreno, L. (1991). En torno a las nociones de número y variación. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 7*(2), 189 -204.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos.* Madrid, España: Editorial Gredos S.A.

Recalde, L. C. (2018). *Lecturas de Historia de las Matemáticas.* Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. C., Arbeláez, G. I., Arboleda, L. C., Torres, L. A., Patiño, M. R., Chávez, L. E., . . . Ortiz, G. (2011). *Los números reales como objeto matemático.* Cali: Universidad del Valle.

Recalde, L. C., Arbeláez, G. I., Arboleda, L. C., Torres, L. A., Patiño, M. R., Chávez, L. E., . . . Ortiz, G. (2011). *Los números reales como objeto matemático.* Cali: Universidad del Valle.

Rudin, W. (1980). *Principios de Ánalisis Matemático.* México D.F: Libros McGraw-Hill.

Severi, F. (1951). *Lecciones de análisis.* Barcelona: Labor.

Spivak, M. (1996). *Cálculo Infinitesimal.* Barcelona: Reverté, S.A.

Zubieta, F. (1991). La definición de proporción de Eudoxio. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 2*(7), 477 -486.