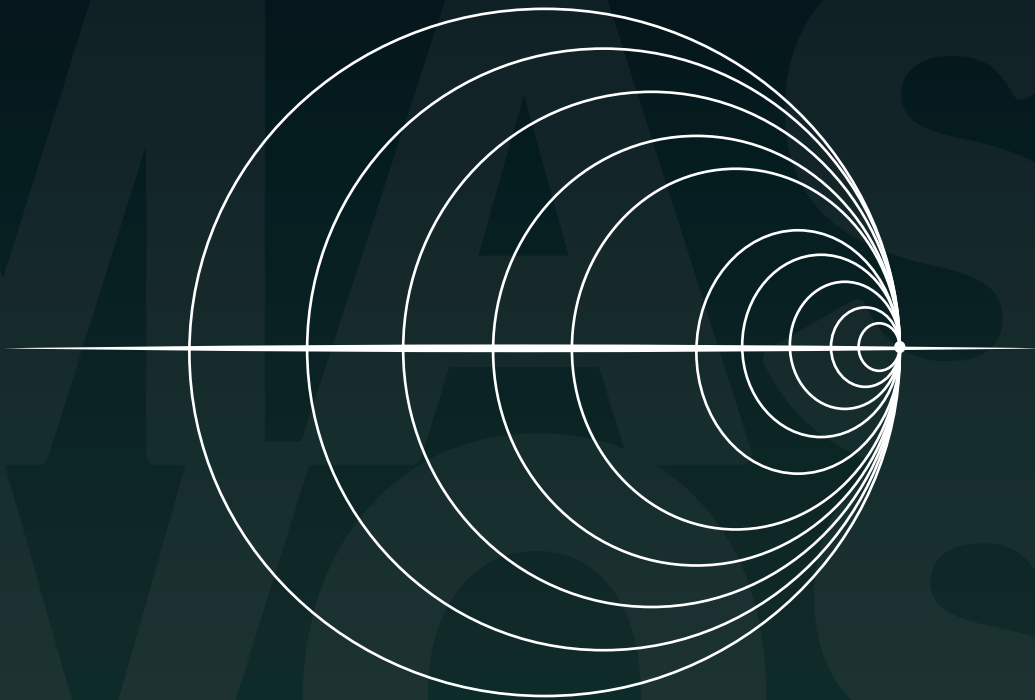


Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo

*German Enrique Ramos Zambrano
Bruto Max Pimentel*



Editorial
Universidad de Nariño

êditorial

Universidad de **Nariño**

**Teoría de
Fotones Masivos
en las Coordenadas
de Plano Nulo**

Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo

German Enrique Ramos Zambrano
Departamento de Física
Universidad de Nariño

Bruto Max Pimentel
Instituto de Física Teórica
Universidade Estadual Paulista
São Paulo, Brasil

êditorial
Universidad de **Nariño**

Ramos Zambrano, German Enrique

Teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo / German Enrique Ramos Zambrano, Bruto Max Pimentel—1ª. Ed.-- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2026

167 páginas : gráficas.

Incluye referencias bibliográficas al final de cada capítulo

ISBN: 978-628-7864-81-8 Impreso

ISBN: 978-628-7864-82-5 Digital

1. Teoría de fotones masivos 2. Método de Faddeev-Jackiw 3. Teoría de campos clásicos 4. Formulación de Dirac 5. Teoría de campos de gauge 6. Álgebra de Poincaré 7. Campo electromagnético. I. Pimentel, Bruto Max

539.7217 R175 – SCDD-Ed. 22



SECCIÓN DE BIBLIOTECA

Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo

© Editorial Universidad de Nariño

© German Enrique Ramos Zambrano

Bruto Max Pimentel

ISBN Impreso: 978-628-7864-81-8

ISBN Digital: 978-628-7864-82-5

DOI: <https://doi.org/10.22267/lib.udn.069>

Primera edición

Corrección de estilo: Christian Benavides Martínez

Diagramación y diseño: Angie Gabriela Ordoñez Chaves

Fecha de publicación: Mayo 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o cualquier propósito, sin la autorización escrita de sus Autores o de la Editorial Universidad de Nariño

Prólogo

Una manera alternativa de generar masa a los campos gauge consiste en romper simetría a través de mecanismo de Higgs. En QED es posible atribuir una masa al fotón y aún mantener una teoría renormalizable y unitaria. Tal posibilidad no ocurre en teorías de gauge no abelianas, sin embargo, existe un mecanismo de rompimiento dinámico de simetría donde los campos de la teoría se reorganizan generando el equivalente del bosón de Higgs y campos de gauge masivos. Un ejemplo clásico de este tipo de teorías es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio y el mecanismo es denominado rompimiento dinámico de simetría. En este libro se estudiara la estructura canónica de la densidad Lagrangiana propuesta por Cornwall que le da masa al campo electromagnético y aún garantiza la invariancia de gauge de la teoría. Para cumplir este propósito, se utilizara la formulación de Dirac y de Faddeev-Jackiw que permite deducir en forma natural la estructura simplificada del espacio de fase y los paréntesis generalizados de la teoría.

Bruto Max Pimentel agradece a CNPq-Brazil por el apoyo financiero parcial, mientras que German Ramos expresa su agradecimiento tanto a la Vicerrectoría de Investigación e Interacción Social como al Departamento de Física de la Universidad de Nariño, Colombia.

Índice general

1. Introducción	8
2. El Plano Nulo	18
2.1. Álgebra de Poincaré	23
2.2. Problema de Valores Iniciales Sobre el Plano Nulo	25
Bibliografía	31
3. Método de Faddeev-Jackiw	33
3.1. Formalismo de Faddeev-Jackiw sin Vínculos	35
3.2. Formalismo de Faddeev-Jackiw con Vínculos	39
3.3. Formalismo de Faddeev-Jackiw en Teoría de Campos	42
3.4. Modelo de Schwinger Quiral Anómalo	48
3.5. Campo Electromagnético en las Coordenadas de Instante Forma	69
Bibliografía	81
4. Campos Clásicos en las Coordenadas de Plano Nulo	82
4.1. Campo Electromagnético	82
4.2. Campo de Dirac	94
4.3. QED en 2 Dimensiones	106
5. Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo	141
5.1. Formulación de Dirac	141
5.2. Formulación de Faddeev-Jackiw	149
Bibliografía	162
6. Conclusiones Generales	163

Capítulo 1

Introducción

El desarrollo reciente de la física de partículas elementales se ha caracterizado por el notable avance de la teoría de campos de gauge y por la confirmación experimental de numerosas predicciones fundamentales derivadas de los modelos construidos sobre este marco teórico. En este contexto, se espera que todas las interacciones fundamentales, incluida la gravitatoria, puedan describirse de manera unificada mediante teorías más generales, como las teorías de cuerdas.

Las teorías de gauge pertenecen a la clase de las denominadas teorías lagrangianas singulares, las cuales se caracterizan por la presencia de ligaduras o restricciones. Debido a esta propiedad, los métodos estándar de cuantización no pueden aplicarse de forma directa. Si bien la electrodinámica admite una cuantización relativamente sencilla, la extensión directa de esquemas análogos a teorías más complejas puede dar lugar a resultados físicamente inconsistentes, como fue señalado por Feynman [1].

Esta situación motivó el estudio sistemático de los problemas generales asociados a la cuantización de teorías singulares. El enfoque más desarrollado y consistente hasta la fecha es el basado en la formulación hamiltoniana, es decir, en la cuantización canónica. En este marco, la característica fundamental de las teorías lagrangianas singulares es la existencia de ligaduras, por lo que el problema de su cuantización puede formularse, en términos generales, como la cuantización de sistemas hamiltonianos con restricciones.

Los fundamentos clásicos y las ideas esenciales para la cuantización de dichos sistemas fueron establecidos en el trabajo pionero de Dirac [2]. Posteriormente, Faddeev [3] desarrolló un método de cuantización y la correspondiente construcción de la integral funcional para teorías con ligaduras de primera clase en calibres canónicos. Faddeev [4] extendió este análisis al considerar teorías con ligaduras de primera y segunda clase, así como su generalización al caso de variables de Grassmann. Gitman y Tyutin [5, 6, 7, 8, 9], analizaron diversos aspectos de la formulación hamiltoniana de teorías lagrangianas singulares, incluyendo la caracterización del sector físico de una teoría de gauge arbitraria y la cuantización canónica

de teorías con derivadas de orden superior y con ligaduras dependientes del tiempo. En conjunto, estos resultados establecen, en principio, la posibilidad de cuantizar canónicamente cualquier teoría lagrangiana singular.

Aunque el método de cuantización canónica presenta ventajas fundamentales, como el control explícito de propiedades esenciales de la teoría cuántica, entre ellas la unitariedad y la positividad de la métrica, no es manifiestamente covariante bajo transformaciones de Lorentz. En la práctica, resultan más convenientes las formulaciones relativísticamente covariantes de la teoría cuántica, las cuales también pueden obtenerse a partir del enfoque hamiltoniano. En este contexto, Fradkin, Fradkina, Vilkovisky, Batalin y Vasiliev [10, 11, 12, 13] estudiaron la cuantización de sistemas hamiltonianos con ligaduras en calibres relativistas. Durante la construcción de la formulación operatorial mediante este método surgen dificultades relacionadas con el ordenamiento de operadores, cuya resolución fue propuesta por Batalin y Fradkin [14].

Como alternativa, la cuantización lagrangiana ofrece una formulación manifiestamente covariante de Lorentz. Para teorías con simetrías de gauge, las reglas correspondientes fueron establecidas por De Witt [15], Faddeev y Popov [16], Mandelstam [17], así como por Tyutin y Fradkin [18], y son conocidas como las reglas de Faddeev–Popov [19]. Estudios posteriores demostraron que, para teorías de carácter más general, dichas reglas requieren modificaciones [20, 21]. La formulación más general del problema fue desarrollada por De Witt y Van Holten [22], y de manera sistemática por Batalin y Vilkovisky [23, 24] en el denominado formalismo BV. Algunos aspectos particulares de este enfoque fueron analizados por Voronov y Tyutin [25, 26].

A pesar de estos avances, en el marco general de la cuantización lagrangiana permanecen abiertas cuestiones fundamentales, en particular la demostración rigurosa de la unitariedad de la teoría cuántica resultante y su equivalencia con la teoría obtenida mediante cuantización canónica. Se espera que estas cuestiones puedan resolverse mediante extensiones del método propuesto, para teorías específicas, por Kugo y Ojima.on simetrías de gauge [27].

Una manera alternativa de generar masa a los campos gauge consiste en romper simetría a través de mecanismo de Higgs. En electrodinámica cuántica (QED) es posible atribuir una masa al fotón y aún mantener una teoría renormalizable y unitaria [28]. Tal posibilidad no ocurre en teorías de gauge no abelianas, sin embargo, existe un mecanismo de rompimiento dinámico de simetría donde los campos de la teoría se reorganizan generando el equivalente del bosón de Higgs y campos de gauge masivos. Un ejemplo clásico de este tipo de teorías es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio [29].

Analicemos cómo es posible construir una Lagrangiana masiva invariante de gauge en el caso abeliano. Consideremos la densidad Lagrangiana para un modelo dinámico, el cual incluye un término de masa para un campo vectorial A^μ , propuesto por Cornwall, que es

descrito por [30, 31]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2A_\mu A^\mu, \quad (1.1)$$

donde $M \neq 0$. Esta Lagrangiana, denominada electrodinámica masiva o Lagrangiana de Stueckelberg, corresponderá a una teoría con un bosón vectorial masivo. Aunque no es invariante de gauge, para garantizar esta simetría, se reescribirá de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 \left[A_\mu + \frac{i}{e} (\partial_\mu U) U^{-1} \right]^2, \quad (1.2)$$

donde e es una constante de acoplamiento y

$$U(x) = \exp[-i\theta(x)]. \quad (1.3)$$

Esta Lagrangiana es invariante por las transformaciones

$$U \rightarrow VU \quad , \quad A_\mu \rightarrow VA_\mu V^{-1} + \frac{i}{e} V\partial_\mu V^{-1}, \quad (1.4)$$

donde V es una matriz de transformación del grupo de simetría $U(1)$. Básicamente, este modelo pertenece al mismo grupo de simetría de la electrodinámica de Maxwell, con la diferencia de poseer un término de masa.

A mediados del siglo XX, Dirac impuso dos requerimientos sobre sistemas dinámicos relativistas: que cumplan con la relatividad espacial y que sus ecuaciones de movimiento puedan ser expresadas en forma Hamiltoniana. Estas condiciones no definen por completo el sistema dinámico, pero limitan sus posibles formas. Una descripción completa de la dinámica implica que se especifiquen todas las posibles interacciones del sistema. En la mecánica no relativista, la evolución de un sistema está determinada por el Hamiltoniano: el estado del sistema en un instante $t = \text{cte}$ permite calcular su comportamiento en un instante posterior. Dirac propuso tres diferentes formas de dinámica relativista dependiendo del tipo de superficies donde las condiciones iniciales fueran consideradas [32]. La primera de ellas, identificada como *frente forma*, corresponde a la selección de una superficie de tipo espacial, siendo frecuentemente la más utilizada. La segunda, *punto forma*, considera una rama de la superficie hiperbólica $x^\mu x_\mu = \kappa^2$, $x_0 > 0$. Finalmente, el *frente forma* es una superficie de una simple onda de luz, comúnmente identificada como *formalismo de plano nulo*.

En el frente forma, dos puntos en tiempos iguales poseen una separación tipo espacio, por lo que los campos definidos en esos puntos son cantidades independientes. Sin embargo, en el plano nulo la situación difiere, ya que el principio de microcausalidad conduce a un requerimiento de localidad en las componentes transversales y de no localidad en la coordenada longitudinal [33]. Las coordenadas de plano nulo no están relacionadas por una transformación de Lorentz a las coordenadas tradicionales utilizadas en el frente forma, y como tal la descripción del mismo contenido físico en una teoría dinámica sobre el plano nulo podría diferir de aquella descrita en el tratamiento convencional [34, 35].

Una ventaja importante señalada por Dirac sobre la formulación de plano nulo es que siete de los generadores del grupo de Poincaré son cinemáticos, mientras que en el tratamiento convencional solo seis tiene esta propiedad. Otra característica interesante de una teoría relativista descrita en el plano nulo es que da origen a Lagrangianos singulares, es decir, a sistemas dinámicos con ligaduras [2]. Esto en general conduce a una reducción en el número de operadores de campo independientes en el espacio fase correspondiente.

Neville and Rohrlich [36, 37] observaron que la cuantización sobre el plano nulo implica cuantizar sobre las superficies características de las ecuaciones de campo clásicas; es decir, deben especificarse condiciones sobre ambas características, $x^+ = \text{cte}$, $x^- = \text{cte}$, y no solo sobre un plano nulo. Sin embargo, Steinhardt [38] destacó un problema importante asociado al procedimiento de cuantización sobre el plano nulo. Después de que se introduce la condición de gauge en la teoría y se eliminan los vínculos de manera que ya no existen transformaciones de gauge propias, todavía persisten transformaciones de gauge impropias, las cuales son consecuencia de una definición inadecuada de las condiciones de frontera. Estas transformaciones no pueden eliminarse introduciendo condiciones de gauge adicionales, ya que pueden eliminar posibles estados físicos [39]. Además, la presencia de las transformaciones de gauge impropias no permite definir coherentemente los conmutadores de la teoría.

Una característica fundamental de una teoría relativista sobre el plano nulo es que el Lagrangiano que describe un sistema físico se vuelve singular; es decir, que este se torna en un sistema dinámico con vínculos y, por ende, el procedimiento apropiado deberá ser utilizado con el fin de cuantizar la teoría correspondiente.

Dirac [2] desarrolló un formalismo canónico generalizado que establece un procedimiento sistemático para estudiar cualquier Lagrangiano singular e incorporar de manera consistente los vínculos. Este enfoque permite expresar las ecuaciones de movimiento en forma canónica en términos de un Hamiltoniano generalizado, conocido como Hamiltoniano total [40]. El formalismo de Dirac constituye el punto de partida para cuantizar canónicamente teorías gauge, ya que el método permite deducir de manera natural los grados de libertad de la teoría y deducir un conjunto de corchetes generalizados, conocidos como *corchetes de Dirac*, los cuales se cuantizan por principio de correspondencia [41].

El formalismo de Dirac clasifica los vínculos en primera y segunda clase, bajo la siguiente interpretación: los vínculos de segunda clase permiten reducir el espacio fase de manera única, mientras que los de primera clase poseen la propiedad fundamental de estar relacionados con la simetrías de gauge de la teoría [41]. Uno de los aspectos más discutidos del formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares ha sido la conjetura de Dirac [42, 43], según la cual todos los vínculos de primera clase, primarios y secundarios, actúan como generadores independientes de transformaciones canónicas infinitesimales que no alteran el estado físico del sistema. Si la hipótesis es correcta, la dinámica del sistema se describe en forma alternativa en términos del denominado Hamiltoniano extendido, el cual se obtiene

adicionando al Hamiltoniano total todos los vínculos secundarios de primera clase, acompañados por multiplicadores de Lagrange. La importancia de la conjetura de Dirac radica en que solo el Hamiltoniano extendido conduce a procedimientos consistentes para cuantizar teorías gauge e incorpora la máxima libertad de gauge que la teoría posee. Sin embargo, una dinámica basada en el Hamiltoniano extendido ha sido cuestionada por muchos autores [44, 45, 46, 46, 48, 49], debido a que las ecuaciones de movimiento en este formalismo no son estrictamente equivalentes a su contraparte Lagrangiana.

Al final de la década de 1980, Faddeev y Jackiw [50] desarrollaron una nueva formulación para cuantizar sistemas dinámicos con vínculos siguiendo un tratamiento geométrico básico centrado en la estructura simpléctica del espacio fase [51], que surgió como una alternativa al tradicional y exitoso método propuesto por Dirac. Esta propuesta consideraba Lagrangianos de primer orden en las derivadas temporales, sin embargo, aun cuando inicialmente parecería que restringe el tipo de sistemas físicos a los cuales puede ser aplicado, se debe recordar que una teoría descrita por lagrangianos de segundo orden se puede transformar en una de primer orden expandiendo el espacio de configuración. Esta nueva formulación para analizar sistemas singulares es conocido como el método de Faddeev-Jackiw y consiste en diagonalizar, por medio de una transformación de Darboux, la matriz 2-forma simpléctica asociada al Lagrangiano reducido. Si la matriz es singular, se obtienen nuevos vínculos, los cuales se incorporan al Lagrangiano reducido. El procedimiento continúa a través de una nueva diagonalización y finaliza cuando se obtiene una matriz simpléctica no singular, que representa los corchetes generalizados en el espacio fase reducido. El método pone en evidencia las variables cíclicas, lo que permite identificar fácilmente las ecuaciones de los vínculos que serán usadas para eliminar las variables superfluas, reduciendo así el espacio fase.

La importancia del método de Faddeev-Jackiw radica en que no surge la necesidad de clasificar los vínculos en primera y segunda clase, y permite obtener los corchetes generalizados apropiados para cuantizar el sistema físico sin seguir paso a paso el método de Dirac. Además, evita procedimientos engorrosos y complicados que surgen en este último método.

La equivalencia entre ambos métodos no está bien establecida, pues cada uno de ellos tiene sus propias características que se mantienen durante su aplicación. Sin embargo, la principal diferencia entre estos métodos radica en que, en Faddeev-Jackiw, la reducción del espacio fase conduce directamente a los grados de libertad del sistema. En contraste, en el enfoque de Dirac, aunque se pueden eliminar variables redundantes mediante la implementación de los corchetes de Dirac calculados con los vínculos de segunda clase, los grados de libertad superfluos asociados a los vínculos de primera clase permanecen hasta que se fijan las condiciones de gauge apropiadas. En el método de Faddeev-Jackiw, la reducción del espacio fase cuando están presentes vínculos de primera clase se puede realizar sin afectar el contenido físico de la teoría. Esto significa que el método de Faddeev-Jackiw fija la condición de gauge implícitamente durante la ejecución del propio método, lo que dará origen a los grados de libertad físicos.

La idea del presente texto es cuantizar canónicamente la teoría descrita por la densidad Lagrangiana (1.2) que describe fotones masivos en las coordenadas de plano nulo. Para ello, se utilizará el método de Dirac y el de Faddeev-Jackiw. Se pretende deducir el espacio fase reducido y los corchetes generalizados, los cuales se cuantizarán aplicando el principio de correspondencia. Finalmente, se pretende encontrar la equivalencia entre estas dos formulaciones. El presente texto está organizado de la siguiente manera: El Capítulo 2, se introduce una formulación alternativa de la dinámica relativista basada en la propuesta de Dirac de 1949, centrando el análisis en el frente de onda o plano nulo como superficie de evolución temporal. En el Capítulo 3 se expone una metodología alternativa y más directa al formalismo de Dirac para el estudio de sistemas con ligaduras. A diferencia del método tradicional, el enfoque de Faddeev-Jackiw (FJ) se centra en la geometría del espacio de fase y la estructura simpléctica derivada de un Lagrangiano de primer orden, permitiendo obtener los corchetes de la teoría de forma más directa. El Capítulo 4 está destinado a aplicar el método de Faddeev-Jackiw en el frente de onda para tres sistemas: el campo electromagnético, donde resuelve la redundancia de gauge y la no-localidad; el campo de Dirac, donde simplifica la dinámica proyectando los campos espinores; y la QED_2 , donde analiza la interacción materia-radiación en dos dimensiones. En el Capítulo 5 se analiza la propuesta de Cornwall para dotar de masa al fotón manteniendo la invarianza de gauge. Se realiza el análisis canónico comparativo entre los métodos de Dirac y Faddeev-Jackiw, demostrando su equivalencia técnica al deducir los corchetes generalizados y la estructura del Hamiltoniano final para fotones masivos. Finalmente, en el Capítulo 6 presentaremos nuestras conclusiones.

Bibliografía

- [1] Richard P. Feynman, “Quantum theory of gravitation”, *Acta Physica Polonica*, vol. 24, no. 6, pp. 697–722, 1963.
- [2] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*. New York, NY, USA: Yeshiva Univ., 1964.
- [3] Faddeev, L. D., “The Feynman integral for singular Lagrangians”, *Theo. and Math. Phys.*, vol. 1, no.1, pp. 3–18, 1969.
- [4] Fradkin, E. S., “Hamiltonian Formalism and Gauge Invariance in Quantum Field Theory”, *Proc. of Tenth Winter School of Theoretical Physics in Karpacz, Acta Univ. Wratisl.*, no.207, pp. 33–115, 1973.
- [5] Gitman, Dmitriy M. and Tyutin, Igor V. “Canonical quantization of singular theories”, *Soviet Phys. Journ.*, vol. 26, no. 5, pp. 423–428, 1983.
- [6] Gitman, Dmitriy M. and Tyutin, Igor V., “The Structure of Gauge Theories in the Lagrangian and Hamiltonian Formalisms”, in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics: Essays in Honor of the Sixtieth Birthday of E. S. Fradkin*, vol.1, ed. by L.A. Batalin, G.A. Isham, G.A. Vilkovisky, pp. 143–164, 1987.
- [7] Gitman, Dmitriy M. and Lyakhovich, Semen L. and Tyutin, Igor V., “Hamiltonian formulation of a theory with higher-order derivatives”, *Soviet Phys. Journ.*, vol. 26, no. 8, pp. 730–736, 1983.
- [8] Gitman, Dmitriy M. and Tyutin, Igor V., “Canonical quantization of theories with constraints dependent on time”, *Soviet Phys. Journ.*, vol. 29, no. 3, pp. 176–181, 1986.
- [9] Gitman, Dmitriy M. and Tyutin, Igor V., “Foundations of the Hamiltonian Formalism of Singular Theories”, *Theses of the School-Seminar "Foundations of Physics"*, Sochi, 1989.
- [10] Fradkin, Efim S. and Vilkovisky, Grigory A., “Quantization of relativistic systems with constraints”, *Phys. Lett. B*, vol. 55, no. 2, pp. 224–226, 1975.
- [11] Fradkin, Efim S. and Vasiliev, Mikhail A., “Model of supergravity with axial photon”, *Phys. Lett. B*, vol. 72, no. 1, pp. 70-74, 1977.

- [12] Fradkin, Efim S. and Fradkina, Tatyana E., “Quantization of relativistic systems with boson and fermion first- and second-class constraints”, *Phys. Lett. B*, vol. 72, no. 3, pp. 343–348, 1978.
- [13] Batalin, Igor A. and Vilkovisky, Grigory A., “Relativistic S-matrix of dynamical systems with boson and fermion constraints”, *Phys. Lett. B*, vol. 69, no. 3, pp. 309–312, 1977.
- [14] Batalin, Igor A. and Fradkin, Efim S., “Operatorial Quantization of Dynamical Systems Subject to Constraints. A Further Study”, *Ann. Inst. Henri Poincaré. Physique théorique*, vol. 49, no. 2, pp. 145–214, 1988.
- [15] DeWitt, B. S., “Quantum Theory of Gravity. II. The Manifestly Covariant Theory”, *Phys. Rev.*, vol. 162, no. 5, pp. 1195–1239, 1967.
- [16] Faddeev, L. D. and Popov, V. N., “Feynman diagrams for the Yang-Mills field”, *Phys. Lett. B*, vol. 25, no. 1, pp. 29–30, 1967.
- [17] Mandelstam, Stanley, “Feynman Rules for Electromagnetic and Yang-Mills Fields from the Determination of the Intermediate-State Sum”, *Phys. Rev.*, vol. 75, no. 5, pp. 1580–1603, 1968.
- [18] Fradkin, E. S. and Tyutin, I. V., “S Matrix for Generalized Fields”, *Phys. Rev. D*, vol. 2, no. 12, pp. 2841–2857, 1970.
- [19] Slavnov, Andrei A. and Faddeev, Ludvig D., *Introduction to Quantum Theory of Gauge Fields*. Nauka, Moscú, 1978.
- [20] Fradkin, Efim S. and Vasiliev, Mikhail A., “Minimal hypothesis of gauge interaction of mixed-symmetry (spin-2) fields”, *Phys. Lett. B*, vol. 85, no. 1, pp. 47–51, 1979.
- [21] Kallosh, Renata E., “Modified Faddeev-Popov determinant and invariant theory of gravity”, *JETP Lett.*, vol. 26, no. 7, pp. 573–576, 1977.
- [22] de Wit, Bernard and van Holten, J. W., “Multiplets of linearized SO(2) supergravity”, *Phys. Lett. B*, vol. 79, no. 4-5, pp. 389–393, 1978.
- [23] Batalin, Igor A. and Vilkovisky, Grigory A., “Gauge algebra and quantization”, *Phys. Lett. B*, vol. 102, no. 1, pp. 27–31, 1981.
- [24] Batalin, Igor A. and Vilkovisky, Grigory A., “Quantization of gauge theories with linearly dependent generators”, *Phys. Rev. D*, vol. 28, no. 10, pp. 2567–2582, 1983.
- [25] Voronov, Boris L. and Tyutin, Igor V., “Formulation of gauge theories of general type. I”, *Teor. Mat. Fiz.*, vol. 50, no. 3, pp. 333–343, 1982.
- [26] Voronov, Boris L. and Tyutin, Igor V., “Formulation of gauge theories of general type. II”, *Teor. Mat. Fiz.*, vol. 52, no. 1, pp. 14–24, 1982.

- [27] Kugo, Taichiro and Ojima, Izumi, "Local Covariant Operator Formalism of Non-Abelian Gauge Theories and Quark Confinement Problem", *Suppl. of the Progress of Theoret. Physics.*, no. 66, pp. 1-130, 1979.
- [28] E. de Rafael, *Lectures on Quantum Electrodynamics*, 1st part. Center Phys. Théorique, 1976.
- [29] Y. Nambu and G. Jona Lasinio, "Dynamical Model of Elementary Particles Based on an Analogy with Superconductivity. I", *Phys. Rev.*, vol. 122, no. 1, pp. 345-358, 1961.
- [30] J. M. Cornwall, "Spontaneous symmetry breaking without scalar mesons. II", *Phys. Rev.*, vol. 10, no. 2, pp. 500-517, 1974.
- [31] J. M. Cornwall, "Dynamical mass generation in continuum quantum chromodynamics", *Phys. Rev.*, vol. 26, no. 6-15, pp. 1453-1478, 1982.
- [32] P. A. M. Dirac, "Forms of Relativistic Dynamics", *Rev. Mod. Phys.*, vol. 21, no. 3, pp. 392-399, 1949.
- [33] P. P. Srivastava, "Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in ϕ^4 theory", Lecture at XIV Encontro Nacional Partículas e Campos, Caxambu, Brazil, sep., 1993. hep-th/9312064.
- [34] P. P. Srivastava, "Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model", in *1st U.S.-Brazil Workshop Topol., Geom., Phys.*, UNICAMP, Campinas, Brazil, jul., 1996. hep-th/9610149.
- [35] P. P. Srivastava, "Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results", in *Saga of Field Theory, From Points to Strings*, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India, aug., 1999. hep-ph/9908492.
- [36] R. A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum field theory on null planes", *Nuovo Cim.A*, vol. 1, pp. 625-644, 1971.
- [37] F. Rohrlich, "Null plane field theory", *Acta Phys. Austriaca*, Suppl. VIII, pp. 277-322, 1971.
- [38] P. J. Steinhardt, "Problems of quantization in the infinite momentum frame", *Ann. Phys.*, vol. 128, no. 2, pp. 425-447, 1980.
- [39] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, "Aspects of the Hamiltonian dynamics of interacting gravitational gauge and Higgs fields with applications to spherical symmetry", *Nucl. Phys.B*, vol. 122, no.1, pp 61-99, 1976.
- [40] K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics: with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model", *Lect. Notes Phys.*, vol. 169. Berlin, Heidelberg New York: Springer, 1982.

- [41] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona: Springer-Verlag, 1990.
- [42] C. Becchi, A. Rouet and S. Stora, "Renormalization of gauge theories", *Ann. Phys.*, vol. 98, no. 2, pp. 287-321, 1976.
- [43] C. Becchi, A. Rouet and S. Stora, "The abelian Higgs Kibble model, unitarity of the S-operator", *Phys. Lett. B*, vol. 52, no. 3, pp. 344-346, 1974.
- [44] R. Cawley, "Determination of the Hamiltonian in the presence of constraints". *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, no. 7, pp. 413-416, 1979.
- [45] A. Frenkel, "Comment on Cawley's counterexample to a conjecture of Dirac" *Phys. Rev. D*, vol. 21, no. 10, pp. 2986-2987, 1980.
- [46] N. Mukunda, "Generators of Symmetry Transformations for Constrained Hamiltonian Systems", *Phys. Scr.*, vol. 21, no. 6, pp. 783-791, 1980.
- [47] I. Castellani, "Symmetries in constrained Hamiltonian systems", *Ann. Phys.*, vol. 143, no. 2, pp. 357-371, 1982.
- [48] R. Sugano, "Poincaré-Cartan Invariant Form and Dynamical Systems with Constraints", *Prog. Theor. Phys.*, vol. 67, no. 6, pp. 1966-1988, 1972.
- [49] R. Sugano and T. Kimura, "On the Relation of First-Class Constraints to Gauge Degrees of Freedom", *Prog. Theor. Phys.*, vol. 69, no. 1, pp. 252-261, 1983.
- [50] L. Faddeev and R. Jackiw, "Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems", *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, no. 17, pp. 1692-1694, 1988.
- [51] V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*. New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong, Barcelona, Budapest: Springer-Verlag, 1978.

Capítulo 2

El Plano Nulo

Dirac estableció que un sistema relativista debería cumplir con dos requisitos [1], a saber:

- Que la relatividad exige que las leyes de la física se expresen en términos de un sistema de coordenadas curvilínea en el espacio-tiempo, y que además ellas deben ser invariantes por transformaciones de un sistema de coordenadas a otro.
- Que según la mecánica cuántica, las ecuaciones de movimiento tienen que ser expresadas en forma Hamiltoniana.

Aunque estos requerimientos no definen un sistema dinámico, sí limitan las posibles formas que este puede tener. Para describir completamente la dinámica del sistema, es necesario especificar todas las interacciones posibles. Por lo tanto, resulta fundamental considerar nuevos sistemas dinámicos y verificar si ellos describen el mundo atómico de manera más adecuada [1]. Después de todo, estos nuevos sistemas dinámicos deberán cumplir con los principios de la relatividad general y las ecuaciones de Hamilton de movimiento.

Por otra parte, la dinámica no relativista tiene una única forma posible, ya que las interacciones deben estar contenidas en el Hamiltoniano, mientras que los demás generadores del grupo de Galileo son independientes de dichas interacciones. De acuerdo con Dirac, el problema central en una formulación Hamiltoniana consiste en proporcionar una representación particular de los diez generadores del grupo de Poincaré, los cuales están definidos por las siguientes relaciones de corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}\{P^\mu, P^\nu\} &= 0 \\ \{M^{\mu\nu}, P^\rho\} &= g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\} &= g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma},\end{aligned}\quad (2.1)$$

en términos de un conjunto de variables dinámicas independientes, tales como las coordenadas, los momentos, el espín, etc. Por lo tanto, cualquier teoría dinámica invariante de

Poincaré que describa, por ejemplo, la interacción de partículas deberá proporcionar una realización particular del álgebra de Poincaré (2.1).

Una realización elemental de (2.1) consiste en escoger un punto del espacio-tiempo x^μ y su respectivo momento conjugado p^ν como variables canónicas, de modo que satisfagan la siguiente álgebra:

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu} \quad , \quad \{x^\mu, x^\nu\} = 0 \quad , \quad \{p^\mu, p^\nu\} = 0 \quad , \quad (2.2)$$

de tal manera que los correspondientes generadores de Poincaré tienen la siguiente estructura:

$$P^\mu = p^\mu \quad , \quad M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad , \quad (2.3)$$

con lo cual se puede mostrar que (2.1) es satisfecha. No obstante, a pesar de que (2.3) es una representación covariante, sufre de varias deficiencias, entre ellas, que no describe ninguna interacción. Para un sistema de partículas, los generadores son simplemente la suma de los generadores de una simple partícula. Además, la representación (2.3) no lleva en consideración la condición on-shell $p^2 = m^2$ que garantiza la causalidad relativista.

Con el fin de solucionar esta situación, se procede a elegir una variable de tiempo, es decir, una foliación del espacio-tiempo en el espacio tiempo Σ con normal tipo luz o tipo tiempo. La superficie Σ deberá ser seleccionada de tal forma que cruce todas las posibles líneas de mundo una y solo una vez. Aparte de esta consistencia necesaria con la causalidad, la elección de la foliación parece arbitraria. Sin embargo, dada una particular foliación, es posible preguntar por los generadores de Poincaré que dejan la hiper-superficie Σ invariante. El conjunto de tales generadores definen un subgrupo de grupo de Poincaré llamado grupo de estabilidad G_Σ de Σ . Los generadores asociados a este subgrupo son llamados cinemáticos, mientras que los restantes son denominados dinámicos. Estos últimos mapean Σ en otra hiper-superficie Σ' y por tanto involucran la evolución temporal. Por ello, se espera que este tipo de generadores dependan del Hamiltoniano y, en consecuencia, de la interacción, ya que se trata de una cantidad dinámica.

Se espera que el grupo de estabilidad que corresponde a una hiper-superficie irregular y que no tenga un alto grado de simetría sea vacío. Por ende, se exigirá que el grupo G_Σ actúe transitivamente sobre Σ , es decir, que dos puntos sobre Σ se puedan conectar por una transformación que pertenece a G_Σ .

En lo que respecta a la construcción de una teoría dinámica, esta se realiza en dos pasos:

- Primero se especifican los generadores del grupo de estabilidad, o en otras palabras, se determina la cinemática dentro de la superficie Σ . La característica principal de estos generadores es su independencia de la interacción, con lo cual las variables dinámicas y los estados físicos se transforman, bajo el grupo de estabilidad, de una manera simple.

- Luego se tienen en cuenta los generadores de Poincaré que no pertenecen al grupo de estabilidad y que transforman la superficie Σ en alguna otra superficie Σ' . En particular, estos generadores describirán la evolución del sistema como una función del tiempo. Estos generadores contienen toda la información de la dinámica del sistema, y por ende se conocen como *formas Hamiltonianas*, según Dirac.

El mismo procedimiento puede aplicarse a la dinámica no relativista, donde el grupo relevante es el de Galileo. Para este caso, existe una única superficie inicial con la propiedad de interceptar cada línea de mundo una sola vez: la superficie $x^0 = \text{cte}$. Por lo tanto, hay una manera posible de dividir el grupo de Galileo en una parte cinemática y otra dinámica. El subgrupo de Galileo que mantiene invariante el instante $x^0 = \text{cte}$ posee nueve generadores, y además presenta un simple Hamiltoniano que genera desplazamientos en el tiempo. Dirac estableció que la unicidad del Hamiltoniano no relativista es perdida en el caso no relativista. Esto se debe a que la causalidad restringe la familia de líneas de mundo y permite un gran número de superficies Σ [1, 3]. En principio, alguna superficie que no presenta direcciones tipo tiempo podría ser considerada.

Si la hiper-superficie Σ no posee simetrías, el grupo de estabilidad es nulo. En este caso, la descripción no contiene la parte cinemática y cada uno de los diez generadores del grupo de Poincaré es un Hamiltoniano. Por tanto, se consideran superficies Σ para las cuales el grupo de estabilidad G_Σ puede por lo menos ser transitivo, con lo cual todos los puntos sobre Σ son equivalentes. Con este requerimiento adicional existen cinco clases inequivalentes de superficies [3]

Tres de ellas fueron identificadas por Dirac [1]:

- El instante de tiempo $\tau \equiv x^0 = 0$ conocido como *instante forma* (i).
- Una superficie del hiperboloide $\tau \equiv x^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$, al que se denomina *punto forma* (ii).
- La superficie definida por $\tau \equiv x^0 + x^3 = 0$, conocida como *plano nulo* (iii).

Una reciente clasificación de todos los subgrupos del grupo de Poincaré tiene en cuenta dos clases posibles y adicionales de superficies iniciales con sus respectivos grupos de estabilidad [4]. Una de ellas consiste en considerar una de las superficies del hiperboloide $\tau \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$ (iv), en tanto que la otra es definida por: $\tau \equiv x_0^2 - x_3^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$ (v).

Así, la unicidad de la descripción Hamiltoniana no relativista resulta ser cinco veces ambigua en el caso relativista. Es importante tener en cuenta que en todas las formas se toma $\lim_{c \rightarrow \infty} \tau = t$, esto implica que en el caso no relativista existe solo una posible foliación conduciendo al tiempo absoluto Galileano. Esto es consistente con el hecho de que no existe

una velocidad límite en el caso no relativista, y por tanto la hiper-superficie $\Sigma_{nr} : t = \text{cte}$ es la única que corta todas las posibles líneas de mundo.

Con el fin de determinar cuáles de los generadores del grupo de Poincaré son cinemáticos, se parte de que la acción del grupo de Poincaré sobre alguna función $F(x)$ es dada por:

$$\delta F(x) = \left\{ F(x), \delta G \right\} = \delta a_\mu \partial^\mu F - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F, \quad (2.4)$$

donde $\delta G = \delta a_\mu P^\mu - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ es el generador de las transformaciones infinitesimales de Poincaré.

Considerando que Σ es de la forma $\Sigma : \tau = F(x)$ y que P^μ y $M^{\mu\nu}$ como generadores cinemáticos para algún valor de μ o ν , entonces, para estos índices particulares se deberá cumplir que:

$$\partial^\mu F = 0, \quad (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F = 0, \quad (2.5)$$

es decir, el gradiente y la “derivada angular” de $F(x)$ deben ser nulos.

Según Dirac [1], las diez cantidades fundamentales para un sistema dinámico son tales que algunas de ellas son simples y otras tienen una estructura más compleja. Las cantidades complejas son identificadas con los Hamiltonianos y tienen el mismo papel de un Hamiltoniano en la dinámica no relativista, mientras que las cantidades simples serán identificadas como los generadores cinemáticos. La elección del tiempo Galileano $\tau = t$ es generalmente la más común, aun en el caso relativista, por tanto, se construirá la representación asociada de los generadores del grupo de Poincaré sobre la hiper-superficie $\Sigma : t = 0$. La idea es usar el vínculo $p^2 = m^2$ para eliminar la variable conjugada a t , que en este caso es $p^0 = N \cdot p = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo N un vector normal al hiper-plano, y posteriormente elegir $x^0 = 0$ en (2.3). Utilizando la idea de Dirac [1], se adiciona el vínculo on-shell a los generadores de Poincaré (2.3) mediante multiplicadores de Lagrange:

$$P^\mu = p^\mu + \lambda^\mu (p^2 - m^2) \quad (2.6)$$

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \lambda^{\mu\nu} (p^2 - m^2). \quad (2.7)$$

Ahora, se impone la condición de que el lado derecho sea independiente de p^0 . Derivando la parte derecha de (2.6) y (2.7) con relación a p^0 y resolviendo, se determinan los siguientes valores para los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^0 = -\frac{1}{2p^0}, \quad \lambda^i = 0, \quad \lambda^{0i} = -\frac{x^i}{2p^0}, \quad \lambda^{ij} = 0, \quad (2.8)$$

De esta manera, por su estructura simple, los generadores de Poincaré de carácter cinemático son:

$$P^i = p^i, \quad M^{ij} = x^i p^j - x^j p^i, \quad (2.9)$$

en tanto que los de carácter dinámico tienen la siguiente forma:

$$P^0 = \omega_p \quad , \quad M^{i0} = x^i \omega_p \quad , \quad (2.10)$$

con $\omega_p \equiv (p^i p^i + m^2)^{\frac{1}{2}}$.

Comparando con (2.3), p^0 fue substituido por ω_p , y x^0 se torna nulo. Como regla, se puede observar que los generadores que contienen p^0 en la representación (2.6), y (2.7) tienen en cuenta los multiplicadores de Lagrange que no desaparecen. Ellos se identifican como los generadores dinámicos, que en el caso del instante forma son dados por el Hamiltoniano P^0 y los generadores boosts M^{i0} . De acuerdo con la relación (2.5), para $\Sigma : \tau = F(x) = t = \text{cte}$, se deduce que:

$$\partial^i F(x) = 0 \quad , \quad (x^i \partial^j - x^j \partial^i) F(x) = 0 \quad , \quad (2.11)$$

de tal manera que $\Sigma : t = \text{cte}$ es invariante por rotaciones y traslaciones, con lo cual se establece que el grupo de estabilidad tiene dimensión seis. De otra manera,

$$\partial^0 F(x) = 1 \neq 0 \quad , \quad (x^0 \partial^j - x^j \partial^0) F(x) = -x^j \neq 0 \quad . \quad (2.12)$$

Aparte del Hamiltoniano, los boost son generadores dinámicos por tanto $\Sigma : t = \text{cte}$ no es invariante por transformaciones generadas por este tipo de elementos, ya que estos generadores mezclan las coordenadas de espacio y tiempo. Las representaciones (2.9) y (2.10) garantizan que el álgebra de Poincaré sea compatible con el vínculo $x^0 = 0$. Utilizando la relación $\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}$, es posible mostrar que los generadores (2.9) y (2.10) obedecen a los corchetes de Poisson (2.1).

Tal como ocurre en el instante forma, se puede construir la representación asociada a los generadores de Poincaré sobre el plano nulo $\Sigma : \tau = x^+ \equiv x^0 + x^3 = 0$, el cual se identifica como un plano tangente al cono de luz. Esta hiper-superficie puede ser vista equivalentemente como el frente de onda de una onda de luz plana viajando hacia la dirección z positiva. Por ello, la hiper-superficie $\Sigma := x^+ = 0$ es también denominada *frente de luz*.

Ahora, con el fin de eliminar la variable canónica conjugada a x^+ , es decir, p^- , y posteriormente seleccionar $x^+ = 0$ en (2.3), se considera que el lado derecho de las ecuaciones (2.6) y (2.7) sean independientes de p^- . De esta manera, se pueden mostrar los siguientes valores para los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \lambda^i = 0 \quad , \quad \lambda^- = -\frac{1}{2p^+} \\ \lambda^{+-} = -\frac{x^+}{2p^+} = 0 \quad , \quad \lambda^{i-} = -\frac{x^i}{2p^+} \quad , \quad \lambda^{+i} = 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por tanto, se obtiene la siguiente representación (3 + 1) de los generadores de Poincaré de carácter cinemático:

$$\begin{aligned} P^i = p^i \quad , \quad P^+ = p^+ \quad , \quad M^{+i} = -x^i p^+ \quad , \\ M^{+-} = -x^- p^+ \quad , \quad M^{12} = x^1 p^2 - x^2 p^1 \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$

De igual manera, los generadores de carácter dinámico pueden expresarse de la siguiente manera:

$$p^- = \frac{p^i p^i + m^2}{p^+} \quad , \quad M^{-i} = x^- p^i - x^i p^- \quad , \quad i = 1, 2 . \quad (2.15)$$

Dado que siete de los generadores de Poincaré son cinemáticos, el plano nulo conduce al grupo de estabilidad de mayor dimensión. Las dimensiones de los grupos de estabilidad para hiper-superficies (i), (ii), (iv) y (v) son 6, 6, 4 y 4, respectivamente. Además, los grupos de estabilidad de las superficies (i) a (v) no son isomórficos, por lo que no pueden deformarse entre sí mediante difeomorfismos [2]. De esta manera, las teorías Hamiltonianas invariantes de Poincaré, basadas sobre superficies in-equivalentes iniciales en un instante de referencia, difieren en la forma en que los diez generadores de Poincaré se dividen entre cinemáticos y dinámicos [3]. El cuestionamiento que surge es si esta diferencia es solo formal o si existen consecuencias físicas inherentes. Hasta el momento, el trabajo de Dirac no ofrece respuestas [1].

Es importante destacar que el Hamiltoniano P^- no contiene una raíz cuadrada, como ya lo había señalado Dirac. Sin embargo, existe una singularidad en $p^+ = 0$ que resulta peculiar y que en el lenguaje de teorías gauge corresponde a que la matriz de Faddeev-Popov desaparezca. También, se puede destacar que para un valor positivo de p^+ el signo del Hamiltoniano P^- es también positivo, con lo cual no existe ambigüedad en el signo de la energía en la formulación del plano nulo. No obstante, para una partícula de masa cero y $p^i = 0$, el valor de $p^+ = 0$ conduce a un valor indeterminado de P^- . Aun para partículas masivas, se debe dar una prescripción para desplazarse alrededor de la singularidad $p^+ = 0$.

2.1. Álgebra de Poincaré

Se considera un boost en la dirección z con rapidez ω que, expresado en el sistema de coordenadas del instante forma, se escribe de la siguiente forma:

$$t' = t \cosh \omega + z \sinh \omega \quad , \quad z' = z \cosh \omega + t \sinh \omega . \quad (2.16)$$

Se sabe que las transformaciones de boost mezclan coordenadas espaciales y temporales. A partir de la relación (2.16), se puede determinar que la acción del boost en el plano nulo tienen la forma:

$$x'^+ = e^{\omega} x^+ \quad , \quad x'^- = e^{-\omega} x^- . \quad (2.17)$$

Por tanto, las transformaciones de Lorentz tienen una forma muy simple en este sistema de coordenadas, donde la característica más notable es que las variables x^+ y x^- no llegan a mezclarse bajo esta transformación [4]. Estas simplemente sufren una transformación de escala, manteniendo el producto $x^+ x^-$ invariante. Las coordenadas de plano nulo diagonalizan el boost en la dirección z . Se debe anotar que los puntos sobre la hiper-superficie $\Sigma : x^+ = 0$ son mapeados sobre ella misma, por lo que el generador $M^{+-} = 2M^{30} = -2K^3$ es cinemático. No

obstante, los otros generadores cinemáticos M^{+i} actúan sobre las coordenadas transversales manteniéndolas inalterables [2, 3].

Ahora bien, las relaciones de corchetes de Poisson no nulos de los siete generadores de Poincaré son:

$$\begin{aligned} \{M^{12}, M^{+-}\} &= \varepsilon^{ij} M^{+j} \\ \{M^{12}, P^i\} &= \varepsilon^{ij} P^j \\ \{M^{+i}, P^-\} &= -2P^i \\ \{M^{+i}, P^j\} &= -\delta^{ij} P^+ , \end{aligned} \quad (2.18)$$

con $i = 1, 2$, en tanto que el restante conjunto de corchetes de Poisson es nulo. Es interesante considerar el grupo de Galileo bidimensional donde los generadores, para una partícula libre de masa m , son: dos momentos k^i , un momento angular $L = \varepsilon^{ij} x^i p^j$, dos transformaciones de boost de Galileo $G^i = m x^i$, un Hamiltoniano $H = \frac{k^i k^i}{2m}$ y la masa m que es el operador de Casimir. Utilizando $\{x^i, k^j\} = \delta^{ij}$ e identificando $P^i \leftrightarrow k^i$, $M^{12} \leftrightarrow L$, $M^{+i} \leftrightarrow -2G^i$, $P^+ \leftrightarrow 2m$ y $P^- \leftrightarrow H$, se puede mostrar que (2.18) es una subálgebra del álgebra de Poincaré, isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Galileo bidimensional [5]. Las dos primeras relaciones en (2.18) establecen que M^{+i} y P^i se transforman en vectores bidimensionales. Por tanto, se espera que la cinemática del plano nulo muestre un comportamiento no relativista que es asociado a la dimensión transversa y gobernada por el grupo de Galileo bidimensional [6, 7].

Con ello en mente, es importante destacar algunas características fundamentales de las coordenadas de plano nulo:

- Las coordenadas de plano nulo $x^\mu : (x^+, x^\perp, x^-)$, donde $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}$ y $x^\perp = (x^1, x^2)$, no están relacionadas por una transformación de Lorentz con las coordenadas tradicionales $x^\mu : (x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$ [8]. Por lo tanto, la descripción del mismo contenido físico de una teoría dinámica sobre el plano nulo, que estudia la evolución temporal del sistema en x^+ en lugar de x^0 , podría ser diferente de aquella determinada por el tratamiento convencional. Este es el caso de la descripción del rompimiento de simetría y del estudio de los modelos de teorías gauge en dos dimensiones, en donde fue demostrado que la cuantización sobre el plano nulo es apropiada para la exhibición de los grados de libertad relevantes, lo cual conduce a un espacio de Hilbert físico [9, 10].
- En general, se conoce que dos puntos que pertenecen al hiperplano $x^0 = \text{cte}$ son separados por distancias tipo espacio $(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x - y)^2 = -(x - y)^2 < 0$, y que la separación se torna tipo luz cuando los dos puntos coinciden. Sin embargo, los puntos en el hiper-plano $x^+ = \text{cte}$ también tienen una separación tipo espacio cuando $x^i \neq y^i$, $(x - y)^2 = (x^+ - y^+) (x^- - y^-) - (x^i - y^i)^2 = -(x^i - y^i)^2 < 0$, y se

torna tipo luz en el caso $x^i = y^i$; no obstante, con la diferencia de que los puntos no necesitan coincidir, ya que $(x^- - y^-)$ no requiere ser nulo. Cuando se combina con el principio de micro-causalidad, esta observación establece que la dinámica en el plano nulo puede llegar a ser no local con respecto a las coordenadas longitudinales x^- [11].

- Una teoría dinámica en las coordenadas de plano nulo posee una característica general: siempre es una teoría dinámica por Lagrangianos singulares [12], por lo que la construcción de una formulación Hamiltoniana consistente no es simple. Es necesario implementar el procedimiento de Dirac [13, 14, 15] o métodos análogos para el estudio de sistemas dinámicos con vínculos. Una formulación Hamiltoniana clásica autoconsistente es la más conveniente para cuantizar las teorías siguiendo el principio de correspondencia de los corchetes de Dirac con los conmutadores/anticommutadores de los correspondientes operadores.

2.2. Problema de Valores Iniciales Sobre el Plano Nulo

Con el fin de iniciar la discusión, se considerará el campo escalar libre masivo clásico $\phi(x)$ que satisface la siguiente ecuación de campo:

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) \phi(x) = 0. \quad (2.19)$$

Es bien sabido que, sobre una superficie tipo espacio Σ , un conjunto completo de condiciones iniciales se obtiene al especificar tanto el campo como sus derivadas sobre dicha superficie. La cuestión es, entonces, determinar cuál sería el valor del campo en un punto arbitrario y fuera de la superficie. Este problema se resuelve utilizando la solución covariante de campo libre, para lo cual se debe considerar siguiente teorema [16]:

Teorema 1 En un punto y fuera de la superficie tipo espacio Σ el campo es dado por:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int_{\Sigma} d^4x \left[\Delta(y-x) \partial_\mu^x \phi(x) - \phi(x) \partial_\mu^x \Delta(y-x) \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^4x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $\Delta(y-x)$ es la función de Schwinger, la cual tiene las propiedades: es solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon-Fock (KGF), es real, nula fuera del cono de luz y es antisimétrica. Por tanto, el campo así determinado corresponde a la propagación causal, es decir, $\phi(y)$ es solo influenciada por puntos $x \in \Sigma$ que están detrás o delante del cono de luz asociado a y , dependiendo de si y está después o antes de Σ (ver Figura 2.1)

Si se selecciona a Σ como una superficie plana con tiempo constante $x^0 = \text{cte}$, la solución apropiada del problema de valores iniciales se escribe como:

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_t^x \phi(x). \quad (2.21)$$

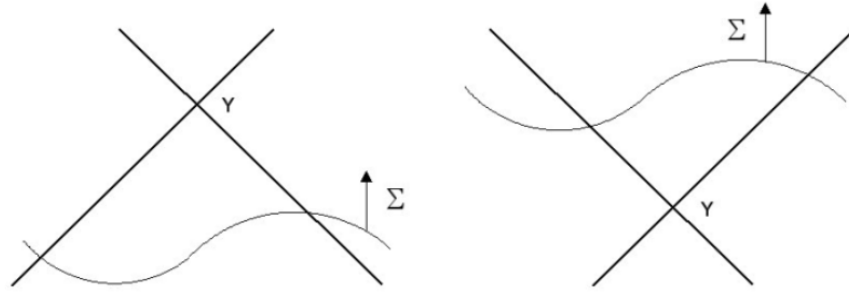


Figura 2.1: En la primera figura el punto y es influenciado causalmente por puntos que están en Σ . En la segunda figura, y influencia causalmente aquellos puntos que están dentro de su cono de luz en Σ .

La solución tradicional de teoría de campos se basa en la bien entendida teoría de Cauchy-Kowalewski de las ecuaciones hiperbólicas [17, 18], que proporciona teoremas para la existencia y unicidad de las soluciones cuando el campo y sus derivadas temporales son conocidas sobre una hiper-superficie tipo espacio. Ahora, surge la controversia sobre las condiciones para la existencia y unicidad de las soluciones para datos impuestos sobre el plano nulo. Con el fin de responder a ello, la ecuación diferencial (2.19) se expresará en términos de las coordenadas de plano nulo ¹

$$\left(\partial^+ \partial^- + m^2\right) \phi = 0 . \quad (2.22)$$

En términos de las coordenadas de plano nulo, la ecuación de KG^F se expresa en la forma canónica de la ecuación diferencial hiperbólica [17, 18], donde x^\pm son denominadas como superficies características de la ecuación diferencial. En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se demuestra que la especificación del campo y un número finito de derivadas sobre una característica no determina una solución única de la ecuación diferencial [19]. Por lo tanto, al tratar con este tipo de ecuación, se enfrenta un problema de valores iniciales característicos, lo que implica que se deben especificar condiciones sobre ambas características $x^\pm = \text{cte}$.

El problema de valores iniciales característicos se formula de la siguiente manera: se busca determinar una solución $\phi(x^+, x^-)$ que satisfaga las siguientes condiciones iniciales:

$$\phi(x^+, x_0^-) = f(x^+) \quad , \quad \phi(x_0^+, x^-) = g(x^-) , \quad (2.23)$$

y la condición de continuidad:

$$\phi(x_0^+, x_0^-) = f(x_0^+) = g(x_0^-) . \quad (2.24)$$

¹Se considerará el caso en dos dimensiones por simplicidad.

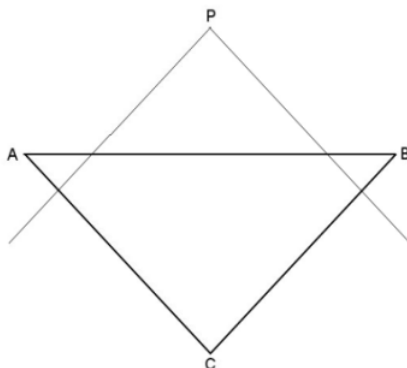


Figura 2.2: Contorno de integración usado en la derivación de (2.27).

Las funciones f y g , que especifican ϕ sobre ambas características, se conocen como datos característicos. De acuerdo con Neville e Rohrlich [20], la solución del problema de valores iniciales característicos se obtiene de la relación (2.21) del problema de Cauchy y utilizando el teorema de Gauss. Entonces, es posible mostrar que:

$$\partial_x^\mu \left[\Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (2.25)$$

recordando que ϕ como Δ satisfacen la ecuación de KGF. Integrando la relación (2.25) por el volumen limitado por ABC (ver Figura 2.2), donde el plano $x^0 = 0$ intercepta la parte de atrás del cono de luz del punto P, AB: $x^0 = 0$, BC: $x^+ = x_0^+$ y AC: $x^- = x_0^-$. Por el teorema de Gauss se obtiene que:

$$\int d^4x \partial_x^\mu \left[\Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (2.26)$$

o explícitamente:

$$\left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right) d\Sigma(x) n^\mu \left[\Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (2.27)$$

donde $d\Sigma$ es el elemento de superficie apropiado y n^μ es un vector normal a la superficie. De (2.21) se deriva que,

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_0^x \phi(x) \\ &= \int_{CB} dy^+ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_+^x \phi(x) + \int_{CA} dy^- \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_-^x \phi(x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Debido a que la normal a un plano nulo se encuentra en el mismo plano, el conocimiento de ϕ sobre el plano nulo implica su derivada normal. Se establece el siguiente teorema [20]:

Teorema 2 La solución de la ecuación de KGF (2.22) para $m \geq 0$ es únicamente determinada por (2.27) en la región conexa limitada por la cuña formada por los planos $x^\pm = \text{cte}$, si ϕ se especifica sobre esos planos.

Utilizando el hecho de que Δ desaparece sobre argumentos de tipo espacio, $(x - y)^2 < 0$, las integrales en (2.27) se extienden desde la cuña (punto C Fig. (2.2)) hasta $+\infty$. Por lo tanto, aquellas partes que están fuera del cono característico de P no contribuyen a la integral. Al comparar (2.27) con (2.21), se determina que el lado derecho de la solución del problema de Cauchy, en términos de las condiciones iniciales (2.23), se expresa como:

$$\begin{aligned} \phi(x^+, x^-) = & \int_{x_0^+}^{\infty} dy^+ \left[\Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \frac{\partial f}{\partial y^+} - f(y^+) \frac{\partial}{\partial y^+} \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \right] \\ & + \int_{x_0^+}^{\infty} dy^- \left[\Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \frac{\partial g}{\partial y^-} - g(y^-) \frac{\partial}{\partial y^-} \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \right]. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Esta es la solución del problema de valores característicos para la ecuación de KGF en el plano nulo en términos de las condiciones iniciales f y g y la función de Schwinger Δ . Entonces, con el fin de obtener una solución única, es necesario especificar condiciones iniciales sobre las dos características y no solamente sobre una.

Para una teoría cuántica de campos en $d = 1 + 1$ dimensiones, la relación (2.29) implica que se debe cuantizar sobre el plano nulo [21]. Para entender mejor esta afirmación, se sabe que el conmutador de dos campos escalares libre se puede expresar en términos de la función de Schwinger de la siguiente forma [22]:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y), \quad (2.30)$$

del cual se pueden determinar los siguientes conmutadores a tiempos iguales entre los campos en las coordenadas tradicionales:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0, \quad [\dot{\phi}(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta(x - y). \quad (2.31)$$

De la relación (2.21) se puede determinar que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int dz \left\{ [\dot{\phi}(z), \phi(y)] \Delta(x - z) - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^0} \Delta(x - z) \right\}_{x^0=z^0}. \quad (2.32)$$

Insertando en esta relación la expresión (2.31), se obtiene la identidad (2.30). Así, la ecuación (2.32) es una condición de consistencia que expresa el conmutador para tiempos arbitrarios diferentes $x^0 > y^0$ a través de las condiciones de Cauchy a tiempo $x^0 = y^0$ [23].

Con el fin de derivar una condición de consistencia análoga a (2.32), se escogerá $x_0^\pm = 0$; por lo tanto, usando (2.29), se obtiene que el conmutador de campos a tiempos diferentes

es dado por:

$$\begin{aligned}
 [\phi(x), \phi(y)] = & \int_0^\infty dz^+ \left[\Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^+} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^+} \Delta(x-z) \right]_{x^- = z^-} \\
 & + \int_0^\infty dz^- \left[\Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^-} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^-} \Delta(x-z) \right]_{x^+ = z^+}
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

lo que implica que para todo x^\pm deben especificarse dos conmutadores independientes:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^\pm = y^\pm} = -\frac{i}{4} \epsilon(x^\mp - y^\mp), \tag{2.34}$$

es decir, el problema de valores iniciales característicos corresponde a cuantizar en el plano nulo.

En la literatura los conmutadores son especificados sobre una sola característica, usualmente $x^+ = 0$, lo cual es indispensable si se desea una formulación Hamiltoniana con un solo parámetro de evolución temporal x^+ , lo que estaría en contradicción con los resultados obtenidos. Por tanto, la cuantización sobre una sola característica es posible si se imponen condiciones sobre la segunda [20, 23]. Un caso interesante se obtiene si se mueve el plano nulo $x^- = \text{cte}$ hacia el pasado distante y sobre este imponer $\phi = 0$; explícitamente,

$$\lim_{x^- \rightarrow -\infty} \phi = 0, \quad \forall x, \quad x^+ \geq x_0^+, \tag{2.35}$$

obteniéndose de (2.29) la solución:

$$\phi(x) = \int_{x^+ = x_0^+} dy^- \Delta(x-y) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_- \phi(y). \tag{2.36}$$

Consecuentemente, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 3 *Especificado ϕ sobre el plano $x^+ = x_0^+$ y la condición asintótica (2.35), la ecuación de KGF, para $m \geq 0$, tendrá una única solución dada por (2.36) en el plano $x^+ \geq x_0^+$ [20].*

Corolario: *Cualquier solución de la ecuación de KGF que satisfaga (2.35) y que se anule sobre el plano nulo definido por $x^+ = x_0^+$, también se anula para $x^+ \geq x_0^+$.*

En (2.36), la integración sobre y^- se extiende de $-\infty$ hasta $+\infty$, aunque el conjunto abierto $y^- \in (x^-, \infty)$ no contribuya, ya que Δ desaparece para argumentos de tipo espacio. Los puntos del cono característico deben estar todos dentro del dominio de integración, y ϕ será correctamente dada por esta ecuación para algún $x^+ > x_0^+$. Sin embargo, en el límite cuando x^+ se aproxima de x_0^+ , es necesario imponer una condición de convergencia para $x^- \rightarrow +\infty$ sobre la integral (2.36). Así, se impone la siguiente restricción adicional:

$$\lim_{x^- \rightarrow \infty} \phi = 0, \quad \text{sobre } x^+ = x_0^+, \tag{2.37}$$

y, con esto, se verifica la consistencia de (2.36) tomando P sobre el plano nulo x_0^+ [20].

En este capítulo se desarrolló de manera detallada la formulación de la dinámica relativista sobre el plano nulo, siguiendo la clasificación de las formas de la dinámica introducida por Dirac. Se mostró que la elección de la hipersuperficie $x^+ = 0$ conduce a una estructura hamiltoniana sustancialmente distinta de la formulación instantánea, modificando la identificación entre variables dinámicas y generadores de la evolución temporal.

El análisis de los generadores del grupo de Poincaré permitió establecer con claridad la separación entre generadores cinemáticos y dinámicos, evidenciando que en el plano nulo un mayor número de generadores resulta independiente de la interacción. Esta propiedad tiene consecuencias importantes, ya que simplifica la implementación de ciertas simetrías relativistas y afecta directamente la estructura de los vínculos del sistema.

Se discutió además el papel del grupo de estabilidad asociado a la hipersuperficie inicial y se destacó que el plano nulo posee un subgrupo de estabilidad de mayor dimensión que otras formulaciones. Esto refuerza la idea de que la elección de la superficie inicial no es arbitraria, sino que determina propiedades físicas y estructurales relevantes del sistema dinámico.

En conclusión, el capítulo establece que la formulación en el plano nulo constituye un marco consistente, rico y conceptualmente distinto para la descripción de sistemas relativistas, justificando su adopción como el escenario natural para el análisis de teorías de campos con vínculos desarrollado en los capítulos siguientes.

Bibliografia

- [1] P. A. M. Dirac, "Forms of Relativistic Dynamics", *Rev. Mod. Phys.*, 21, pp. 392-399, 1949.
- [2] T. Heinzl, "Light-Cone Quantization: Fundamentation and Applications", *Lect. Notes Phys.*, 572, pp. 55-142, 2001.
- [3] H. Leutwyler and J. Stern, "Relativistic dynamics on a null plane", *Ann. Phys.*, 112, pp. 94-164, 1978.
- [4] J. Patera, P. Winternitz and H Zassenhaus, "Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group", *J. Math. Phys.*, 16, pp. 1597-1614, 1975.
- [5] P. P. Srivastava, "Light-Front Quantization of Field Theory", in *Topics in Theoretical Physics*, V. C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio, Eds., São Paulo: IFT - SP, 1995, pp. 206 - 217.
- [6] P. E. Soper, "Field Theories in the Infinite Momentum Frame", Ph.D. Thesis, SLAC, Stanford Univ., Stanford, CA, 1971.
- [7] J. B. Kogut and D. E. Soper, "Quantum Electrodynamics in the Infinite Momentum Frame", *Phys. Rev.D*, vol. 1, no. 10, pp. 2901-2914, 1970.
- [8] P. P. Srivastava, "Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results", in *Saga of Field Theory, From Points to Strings*, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India, aug., 1999. hep-ph/9908492.
- [9] P. P. Srivastava, "Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model", in *1st U.S.-Brazil Workshop Topol., Geom., Phys.*, UNICAMP, Campinas, Brazil, jul., 1996. hep-th/9610149.
- [10] Th. Heinzl, St. Krusche and E. Werner, "Spontaneous symmetry breaking in light cone quantum field theory", *Phys. Lett.B*, vol. 272, no. 1-2, pp. 54-60, 1991.
- [11] P. P. Srivastava, "Light-Front Quantized Field Theory: (an introduction) Spontaneous Symmetry Breaking. Phase transition in ϕ^4 Theory", Lecture at XIV Encontro Nacional Partículas e Campos, Caxambu, Brazil, sep., 1993. hep-th/9312064.

- [12] K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics: with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model", *Lect. Notes Phys.*, vol. 169, Berlin, Heidelberg New York: Springer, 1982.
- [13] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*. New York, NY, USA: Yeshiva Univ., 1964.
- [14] P. A. M. Dirac, "Generalized Hamiltonian Dynamics", *Can. J. Math.*, vol. 2, pp. 129 - 148, 1950.
- [15] P. A. M. Dirac, "The Hamiltonian Form of Field Dynamics", *Can. J. Math.*, vol. 3, pp. 1 - 23, 1951.
- [16] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*. New York, NY, USA: John Wiley and Sons, 1969.
- [17] J. Mathews and R. Walker, *Mathematical Method of Physics*. New York, NY, USA: W. A. Benjamin, 1965.
- [18] T. Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, New York, NY, USA: Amer. Elsevier, 1973.
- [19] N. E. Ligterink and B. L. G. Bakker, Vrije Universiteit Amsterdam, preprint 1993.
- [20] R. A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum field theory on null planes", *Nuovo Cim.A*, vol. 1, pp. 625-644, 1971.
- [21] G. Domokos, "Introduction to the characteristic initial value problem in quantum field theory", in *Boulder Lectures*, Vol. XIV, 1971. Eds. A. O. Barut and W. E. Brittin, Boulder: Colorado University Press, 1972.
- [22] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Berlin, Heidelberg, New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.
- [23] T. Heinzl and E. Werner, "Light front quantization as an initial-boundary value problem", *Z. Phys.C*, vol. 62, pp. 521-531, 1994.

Capítulo 3

Método de Faddeev-Jackiw

En este capítulo estudiaremos un formalismo alternativo al método de Dirac para sistemas con vínculos, el cual fue desarrollado por Faddeev-Jackiw [1]. Este método es aplicado a Lagrangianos de primer orden en las derivadas temporales, y se basa en la estructura simpléctica geométrica haciendo uso del teorema de Darboux [2], que a su vez permitirá obtener los resultados de los paréntesis generalizados y los Hamiltonianos, sin necesidad de seguir a rigor la formulación de Dirac [3, 4, 5].

Existen varias características que resaltan en el formalismo de Faddeev-Jackiw en relación con el método de Dirac. La primera se refiere al carácter lineal en las velocidades $\dot{\xi}^i$ del lagrangiano. En este caso, el Lagrangiano deberá ser de la forma

$$L(\xi^i, \dot{\xi}^i) = f_i(\xi) \dot{\xi}^i + C, \quad (3.1)$$

donde C es una función de las coordenadas. A partir de la definición del momento canónico π_i asociado a la variable ξ^i , se determina que

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = f_i(\xi), \quad (3.2)$$

de donde se resalta que no es posible expresar las velocidades $\dot{\xi}^i$ en función de los momentos π_i . De igual manera, cuando el sistema es descrito por Lagrangianos de la forma

$$L(\xi^i, \dot{\xi}^i) = g(\xi), \quad (3.3)$$

el momento canónico asociado es

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = 0. \quad (3.4)$$

En el método de Dirac, las relaciones (3.2) y (3.4) se interpretan como vínculos; sin embargo, en el formalismo de Faddeev-Jackiw esta interpretación ya no es introducida.

La principal diferencia entre ambas formulaciones radica en que en la formulación de Faddeev-Jackiw, donde todos los vínculos tendrán el mismo peso, no se considera la clasificación de los vínculos en primarios y secundarios, ni en vínculos de primera y segunda

clase. En la nueva formulación, los vínculos estarán asociados a la inversa de una matriz simpléctica. Además, la dependencia temporal de las variables dinámicas no será expresada explícitamente, ya que todas las cantidades serán evaluadas en el mismo instante de tiempo.

El formalismo de Faddeev-Jackiw es un método Lagrangiano. Para avanzar en el desarrollo de este capítulo, introduzcamos algunos elementos esenciales. Consideremos un sistema físico descrito por un número finito N de grados de libertad, donde la dinámica se deriva de una acción $A [q_i]$ que, escrita en términos del Lagrangiano $L (q_i, \dot{q}_i)$, se expresa como:

$$A [q_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt L (q_i, \dot{q}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (3.5)$$

El principio de Hamilton establece que el movimiento real descrito por el sistema será aquel que minimiza la acción, es decir, $\delta A [q_i] = 0$. De esta manera, las trayectorias que tornan un extremo (3.5) deberán ser solución del siguiente sistema de ecuaciones, conocido como ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.6)$$

las cuales determinarán la dinámica del sistema, mientras que el Lagrangiano $L (q_i, \dot{q}_i)$ describe el movimiento del sistema en el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) . De igual manera, es posible establecer una formulación equivalente según la cual la dinámica será gobernada por una nueva función $H (q_i, p_i)$, conocida como Hamiltoniano, y que dependerá tanto de las coordenadas generalizadas q_i como de los momentos canónicos conjugados p_i asociados a dichas coordenadas, los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (3.7)$$

Asumiendo, inicialmente, que el Lagrangiano que describe el sistema no es singular, a partir de (3.7) es posible expresar las velocidades generalizadas \dot{q}_i en términos de (q_i, p_i) , de tal manera que se deduce el siguiente sistema de relaciones:

$$\dot{q}_i = g_i (q, p). \quad (3.8)$$

Cuando este ocurre, es posible conectar el Lagrangiano $L (q_i, \dot{q}_i)$ con el Hamiltoniano $H (q_i, p_i)$ mediante la siguiente transformación de Legendre:

$$H (q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L (q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i=g_i(q,p)}, \quad (3.9)$$

donde se puede mostrar que el lado derecho es independiente de las velocidades generalizadas. A partir de la relación entre (3.8) y (3.9), se deduce que el Lagrangiano se puede expresar como

$$L_C (q_i, p_i) \equiv L (q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i=g_i(q,p)} = p_i \dot{q}_i - H (q_i, p_i), \quad (3.10)$$

donde $L_C (q_i, p_i)$ es denominado Lagrangiano canónico y, a diferencia de $L (q_i, \dot{q}_i)$, $L_C (q_i, p_i)$, está definido en el espacio fase (q_i, p_i) . La principal diferencia que existe entre ambas cantidades radica en que $L (q_i, \dot{q}_i)$ determina las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, mientras que de $L_C (q_i, p_i)$ se derivan las ecuaciones de Hamilton [6].

La ventaja de expresar el Lagrangiano en su forma canónica es que puede expresarse un Lagrangiano de cualquier orden en las velocidades en un Lagrangiano lineal respecto a estas. Lo anterior permitirá desarrollar el método de Faddeev-Jackiw, ya que esta formulación, como hemos destacado, se aplica a Lagrangianos de primer orden.

3.1. Formalismo de Faddeev-Jackiw sin Vínculos

Se identificará con ξ^i a cualquiera de las $2n$ variables dinámicas (q_i, p_i) que definen el espacio fase, tal que se realizará la siguiente asociación:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= q_1, & \xi^2 &= q_2, & \dots, & \xi^n &= q_n \\ \xi^{n+1} &= p_1, & \xi^{n+2} &= p_2, & \dots, & \xi^{2n} &= p_n, \end{aligned} \tag{3.11}$$

de tal manera que

$$\xi^i = (q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n), \quad i = 1, 2, 3, \dots, N = 2n. \tag{3.12}$$

No existirá necesariamente una correspondencia entre $\xi^i = q_i$ con cada $\xi^j = q_j$; es decir, no siempre estará presente a una dada variable q_i su correspondiente momento canónico conjugado p_i . De esta manera, N no siempre es un número par, a menos que exista dicha correspondencia. Por lo tanto, de ahora en adelante la formulación y descripción del sistema será realizada en términos de la variable ξ^i que se conocen como variable simpléctica.

Ahora consideremos un Lagrangiano de primer orden, es decir, lineal en $\dot{\xi}^i$, que en forma general se expresará de forma

$$L^{(0)} (\xi, \dot{\xi}) = a_i (\xi) \dot{\xi}^i - V (\xi), \tag{3.13}$$

donde $a_i (\xi)$ se conoce como las componentes de la uno forma canónica $a (\xi) = a_i (\xi) d\xi^i$, y $V (\xi)$ se define como el potencial simpléctico. En la literatura, esta representación de la teoría se denomina no estándar, ya que, como observaremos posteriormente, las ecuaciones de movimiento no involucrarán aceleraciones.

Una característica de las componentes de la uno forma canónica es que si $a_i (\xi)$ se modifica por la derivada de una función arbitraria $g (\xi)$, que depende únicamente de las variables simplécticas ξ^i , es decir,

$$a_i (\xi) \rightarrow a'_i (\xi) = a_i (\xi) + \frac{\partial g (\xi)}{\partial \xi^i}, \tag{3.14}$$

esto modificará las ecuaciones de movimiento. Con el fin de probar la anterior afirmación, escribamos

$$\begin{aligned}
L^{(0)'}(\xi, \dot{\xi}) &= \alpha_i'(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi) = \left[\alpha_i(\xi) + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i} \right] \dot{\xi}^i - V(\xi) \\
&= \left[\alpha_i(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi) \right] + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^i \\
&= L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i} \frac{d\xi^i}{dt} = L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) + \frac{dg(\xi)}{dt}.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Debido a que los Lagrangianos $L^{(0)'}$ $(\xi, \dot{\xi})$ y $L^{(0)}$ $(\xi, \dot{\xi})$ se diferencian en la derivada total de la función $g(\xi)$, se sabe que son equivalentes, por lo que generarán las mismas ecuaciones de movimiento. Es posible observar que el Hamiltoniano definido a partir de una transformación de Legendre del Lagrangiano $L^{(0)}$ $(\xi, \dot{\xi})$ de la siguiente forma

$$H^{(0)} = \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} \dot{\xi}^i - L^{(0)} \tag{3.16}$$

dependerá únicamente de las variables simplécticas ξ y no de $\dot{\xi}$, ya que

$$\begin{aligned}
H^{(0)} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \dot{\xi}^i - L = \dot{\xi}^i \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^i} \left[\alpha_j(\xi) \dot{\xi}^j - V(\xi) \right] - \left[\alpha_i(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi) \right] \\
&= \dot{\xi}^i \alpha_j(\xi) \frac{\partial \dot{\xi}^j}{\partial \dot{\xi}^i} - \alpha_i(\xi) \dot{\xi}^i + V(\xi) = \dot{\xi}^i \alpha_j(\xi) \delta_i^j - \alpha_i(\xi) \dot{\xi}^i + V(\xi) \\
&= V(\xi) = H^{(0)}(\xi)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De esta manera, se deduce que el Hamiltoniano es exactamente el potencial simpléctico, de tal manera que (3.13) puede expresarse de la siguiente forma:

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = \alpha_i(\xi) \dot{\xi}^i - H^{(0)}(\xi). \tag{3.18}$$

De (3.18) se pueden derivar las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial \alpha_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} = \alpha_i(\xi), \tag{3.19}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L^{(0)}}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} &= \frac{\partial \alpha_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \alpha_i(\xi) \\
&= \frac{\partial \alpha_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \alpha_i(\xi)}{\partial \xi^j} \dot{\xi}^j \\
&= \left(\frac{\partial \alpha_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \alpha_i(\xi)}{\partial \xi^j} \right) \dot{\xi}^j - \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0.
\end{aligned}$$

Definiendo

$$f_{ij}(\xi) = \frac{\partial \alpha_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \alpha_i(\xi)}{\partial \xi^j} = -f_{ji}(\xi), \tag{3.20}$$

las ecuaciones de movimiento se expresan como

$$f_{ij}(\xi) \dot{\xi}^j = \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (3.21)$$

Calculando la derivada exterior de la uno forma canónica $\alpha(\xi) = \alpha_i(\xi) d\xi^i$, se determina que

$$f(\xi) \equiv d\alpha(\xi) = \left(\frac{\partial \alpha_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial \alpha_i(\xi)}{\partial \xi^j} \right) d\xi^i \wedge d\xi^j = f_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j, \quad (3.22)$$

donde $f(\xi)$ se denomina la dos forma canónica, con f_{ij} representando sus componentes, el cual identificaremos de ahora en adelante como la matriz simpléctica. Ahora, un análisis de la ecuación (3.21) permitirá determinar dos casos:

- $\det f_{ij} \neq 0$. Este caso identificará a los sistemas regulares.
- $\det f_{ij} = 0$. Identificará sistemas singulares, es decir, con vínculos.

Consideremos en primer lugar los sistemas regulares. Si multiplicamos la ecuación (3.21) por f^{ij} , que representa la inversa f_{ij} , se obtendrá que:

$$\dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (3.23)$$

Ahora, teniendo en cuenta que la variable simpléctica ξ^i está asociada a las coordenadas del espacio fase (q_i, p_i) , la evolución temporal de la misma es dada a partir de las ecuaciones de Hamilton, que en términos de los paréntesis de Poisson se expresa como:

$$\dot{\xi}^i = \left\{ \xi^i, H^{(0)}(\xi) \right\} = \left\{ \xi^i, \xi^j \right\} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (3.24)$$

Comparando las relaciones (3.23) y (3.24) se puede establecer que

$$\left\{ \xi^i, \xi^j \right\} = f^{ij}. \quad (3.25)$$

Para el caso de un sistema regular, las relaciones (3.25) representarán los paréntesis fundamentales de Poisson entre las variables (q_i, p_i) del espacio fase. De esta manera, f^{ij} tendrá la siguiente representación matricial

$$\left(f^{ij} \right) = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

donde I es la matriz identidad $n \times n$. Es posible mostrar que para dos variables dinámicas $A(\xi)$ y $B(\xi)$, los paréntesis de Poisson se expresan de la siguiente manera:

$$\{A(\xi), B(\xi)\} = \frac{\partial A(\xi)}{\partial \xi^i} f^{ij}(\xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (3.27)$$

Mostremos que (3.25) satisface las propiedades de los paréntesis de Poisson:

- **Antisimetría:** de (3.25) se obtiene que

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij} = -f^{ji} = -\{\xi^j, \xi^i\}. \quad (3.28)$$

- **Linealidad:** utilizando (3.24), se deduce que α_1 y α_2 son constantes:

$$\{\xi^i, \alpha_1 \xi^j\} = \alpha_1 \{\xi^i, \xi^k\} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^k} = \alpha_1 \{\xi^i, \xi^k\} \delta_k^j = \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\}. \quad (3.29)$$

De igual forma:

$$\begin{aligned} \{\xi^i, \alpha_1 \xi^j + \alpha_2 \xi^k\} &= \alpha_1 \{\xi^i, \xi^k\} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^k} + \alpha_2 \{\xi^i, \xi^k\} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^k} \\ &= \alpha_1 \{\xi^i, \xi^k\} \delta_k^j + \alpha_2 \{\xi^i, \xi^k\} \delta_k^j \\ &= \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\} + \alpha_2 \{\xi^i, \xi^j\}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

- **Identidad de Jacobi:** Esta relación implica que se deberá cumplir:

$$IJ \equiv \{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = 0. \quad (3.31)$$

En el caso mas general, la inversa da la matriz simpléctica podrá ser función de las variables del espacio fase, y en esta caso la expresión (3.25) se reescribir en la forma:

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij}(\xi). \quad (3.32)$$

De esta manera, utilizando (3.24) y (3.32) se obtendrá que

$$\begin{aligned} IJ &= \{\xi^k, f^{ij}(\xi)\} + \{\xi^i, f^{jk}(\xi)\} + \{\xi^j, f^{ki}(\xi)\} \\ &= \{\xi^k, \xi^l\} \frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} + \{\xi^i, \xi^l\} \frac{\partial f^{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} + \{\xi^j, \xi^l\} \frac{\partial f^{ki}(\xi)}{\partial \xi^l} \\ &= f^{kl}(\xi) \frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} + f^{il}(\xi) \frac{\partial f^{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} + f^{jl}(\xi) \frac{\partial f^{ki}(\xi)}{\partial \xi^l}. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que $f^{ij}(\xi)$ y $f_{ij}(\xi)$ deben satisfacer la siguiente identidad matricial

$$f^{ij}(\xi) f_{jk}(\xi) = \delta_k^i, \quad (3.34)$$

al derivar la relación anterior se determina que

$$\frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} f_{jk}(\xi) + f^{ij}(\xi) \frac{\partial f_{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} = 0, \quad (3.35)$$

de tal manera que

$$\frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} f_{jk}(\xi) f^{km}(\xi) = \frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} \delta_j^m = \frac{\partial f^{im}(\xi)}{\partial \xi^l} = -f^{ij}(\xi) \frac{\partial f_{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{km}(\xi), \quad (3.36)$$

es decir:

$$\frac{\partial f^{im}(\xi)}{\partial \xi^l} = -f^{ij}(\xi) \frac{\partial f_{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{km}(\xi). \quad (3.37)$$

Con lo que se deduce

$$\begin{aligned} IJ &= - \left[f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{mj}(\xi) + f^{il}(\xi) f^{jn}(\xi) \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{mk}(\xi) \right. \\ &\quad \left. + f^{jl}(\xi) f^{kn}(\xi) \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{mi}(\xi) \right] \\ &= f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) f^{jm}(\xi) \left[\frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} + \frac{\partial f_{ml}(\xi)}{\partial \xi^n} + \frac{\partial f_{ln}(\xi)}{\partial \xi^m} \right]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ahora, de (3.20) se deduce que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} &= \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} - \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^m}, \\ \frac{\partial f_{ml}(\xi)}{\partial \xi^n} &= \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} - \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^l}, \\ \frac{\partial f_{ln}(\xi)}{\partial \xi^m} &= \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^n}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

De esta manera, finalmente se muestra que si las componentes de la uno forma $a_m(\xi)$ son continuas, se cumple que

$$\begin{aligned} IJ &= f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) f^{jm}(\xi) \left[\frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} - \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^m} + \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} - \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^l} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^n} \right] \\ &= f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) f^{jm}(\xi) \left[\left(\frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} - \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} \right) + \left(\frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} - \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} \right) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.40)$$

3.2. Formalismo de Faddeev-Jackiw con Vínculos

Consideremos el caso cuando la matriz simpléctica, que denotaremos por $f_{ij}(\xi) \equiv f_{ij}^{(0)}(\xi)$, es singular [7, 8, 9]. Esto implica que de (3.23) no es posible determinar todas las derivadas temporales de las coordenadas simplécticas. Como consecuencia de la singularidad de $f_{ij}^{(0)}(\xi)$, existirán m ($m < n$) modos ceros $v_\alpha^{(0)}$ (con $\alpha = 1, 2, \dots, m$). Cada $v_\alpha^{(0)}$ corresponde a una matriz columna de n elementos que satisfacen la siguiente relación:

$$v_\alpha^{(0) i} f_{ij}^{(0)}(\xi) = 0. \quad (3.41)$$

Si se multiplica la ecuación de movimiento (3.23) por la izquierda con los vectores $v_\alpha^{(0) i}$, es posible mostrar que estas cantidades satisfacen una serie de identidades, es decir:

$$v_\alpha^{(0) i} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (3.42)$$

lo que constituye un conjunto de m relaciones entre las coordenadas que definen las variables simplécticas y que reducen el número de grados de libertad independientes del sistema. Por tanto, la relación (3.42) indica que $H^{(0)}(\xi)$ impondrá restricciones específicas sobre las variables de campo, de tal manera que se definirá un conjunto de m vínculos que de ahora en adelante se denotarán por $\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)$. De este modo, (3.42) se expresa de la siguiente forma:

$$\Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \equiv v_\alpha^{(0) i} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (3.43)$$

Al igual que su contraparte Hamiltoniana, es necesario que estas condiciones proporcionen una descripción consistente del sistema. Para tal fin, se deberá exigir que la subvariedad de vínculos definida por $\Omega_\alpha^{(0)}$ sea estable bajo la evolución temporal del sistema, lo cual se garantiza si

$$\frac{d}{dt} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) = \frac{\partial \Omega_\alpha^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^i = 0, \quad (3.44)$$

donde se observa que esta relación depende linealmente de la derivada temporal de la variable simpléctica. Ahora, la condición anterior deberá ser incorporada a la parte canónica de la acción original por medio de multiplicadores de Lagrange, $\lambda^{(0) \alpha}$, los cuales deberán ser adicionados al conjunto de variables dinámicas originales, lo que a su vez implicará que se amplíe el espacio de configuración. Este requisito es introducido con el fin de deformar la dos forma simpléctica $f_{ij}^{(0)}(\xi)$ y tornarla regular. De esta manera, el primer Lagrangiano en el proceso iterativo, que denotaremos por $L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha})$, se expresará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha}) &= L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) - \lambda^{(0) \alpha} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi) \\ &= a_i(\xi) \dot{\xi}^i - \lambda^{(0) \alpha} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi) - H^{(0)}(\xi). \end{aligned} \quad (3.45)$$

Sin embargo, la última relación podrá ser modificada como se muestra a continuación:

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha}) = a_i(\xi) \dot{\xi}^i + \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \dot{\lambda}^{(0) \alpha} - H^{(0)}(\xi) - \frac{d}{dt} \left[\lambda^{(0) \alpha} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \right]. \quad (3.46)$$

Ahora, sabemos que el último término no modifica las ecuaciones de movimiento, por lo que puede ser descartado. Teniendo en cuenta que se ha extendido el espacio de configuración, podemos definir una nueva variable simpléctica que incluya a los multiplicadores de Lagrange $\lambda^{(0) \alpha}$. Esta nueva variable será definida de la forma $\xi^{(1) i} \equiv (\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha})$. En términos de esta nueva variable, el primer Lagrangiano del proceso de iteración $L^{(1)}$, el cual deberá incorporar los vínculos, se define así:

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha}) = a_i^{(1)}(\xi^{(1)}) \dot{\xi}^{(1) i} - H^{(1)}(\xi), \quad (3.47)$$

donde

$$H^{(1)}(\xi) \equiv H^{(0)}(\xi) \Big|_{\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi)=0}. \quad (3.48)$$

Respecto a la correspondiente dos forma simpléctica, expresada en términos del nuevo conjunto de variables se define como:

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(1)}) = \frac{\partial a_j^{(1)}(\xi^{(1)})}{\partial \xi^{(1) i}} - \frac{\partial a_i^{(1)}(\xi^{(1)})}{\partial \xi^{(1) j}}. \quad (3.49)$$

La matriz $f_{ij}^{(1)}(\xi^{(1)})$ se caracteriza por contener $f_{ij}^{(0)}(\xi)$ como una submatriz. Por tanto, en cada paso, después de incluirlos vínculos, el número de variables simpléctica y, en consecuencia, la dimensión de la matriz simpléctica deberán cambiar. Ahora, si $\det f_{ij}^{(1)}$, entonces se han eliminados los vínculos exitosamente y se ha obtenido la estructura geométrica básica, la cual es dada por la inversa de la dos forma simpléctica. Sin embargo, en caso contrario, se deberá repetir el procedimiento anteriormente mencionado tantas veces como sea necesario hasta tornar la matriz simpléctica inversible. En este algoritmo se pueden presentar dos posibles resultados:

- Que después de un cierto número de pasos, es decir N , la matriz $f_{ij}^{(N)}$ es inversible. En este caso, la básica estructura geométrica se deduce directamente de los elementos $(f_{ij}^{(N)})^{-1}$. Es posible demostrar que estos elementos coincidirán con los corchetes de Dirac. Si no hay problemas en el ordenamiento de los operadores, los conmutadores cuánticos pueden obtenerse directamente de la inversa de $f_{ij}^{(N)}$. Es importante destacar que muchos de los pasos que se desarrollan en el formalismo de Dirac desaparecen en el proceso de cuantización geométrica, y para algunos problemas, los paréntesis generalizados se derivan de una manera más rápida y simple.
- En algunos casos es posible que se llegue a un punto donde la matriz simpléctica es singular y ningún nuevo vínculo se obtiene de los correspondientes modos cero; es decir, cuando el lado izquierdo de (3.42) desaparece idénticamente. Esto generalmente ocurre cuando se trabaja con teorías que son invariantes por reparametrización o teorías gauge. En este punto, un término de gauge fixing deberá ser introducido en el potencial simpléctico

$$H(\xi) \rightarrow \bar{H}(\xi) = H(\xi) + H_{gf}(\xi), \quad (3.50)$$

y se procederá de la misma forma de acuerdo con el algoritmo. La matriz simpléctica llegará a ser inversible con la introducción de $H_{gf}(\xi)$.

En este formalismo debe destacarse que los vínculos siempre pueden considerarse como relaciones fuertes en la parte del potencial simpléctico de Lagrangiano. De (3.42) se observa que los vínculos ya están incorporados en el potencial. Aquí esto difiere significativamente de la formulación de Dirac, donde es necesario introducir la noción de igualdades fuertes y débiles, ya que que los vínculos son inconsistentes con los paréntesis de Poisson originales.

No existen análogos a los paréntesis de Poisson en este contexto. Los paréntesis generalizados se definen solo al final del algoritmo y son equivalentes a los paréntesis de Dirac. Estos paréntesis serán compatibles con los vínculos y, como consecuencia, deben considerarse como igualdades fuertes.

3.3. Formalismo de Faddeev-Jackiw en Teoría de Campos

Ahora se introducirá la formulación de Faddeev-Jackiw en teoría de campos [10]. La acción más general que contiene derivadas de primer orden en los campos se define por una densidad Lagrangiana expresada en términos de dos funciones arbitrarias de los campos $[K_A(\varphi^A), V(\varphi^A)]$, tal que

$$L^{(0)}(\varphi^A, \dot{\varphi}^A) = \dot{\varphi}^A K_A(\varphi^A) - V(\varphi^A) \quad (3.51)$$

Las funcionales $K_A(\varphi^A)$ son componentes de la una forma canónica $K(\varphi^A) = K_A(\varphi^A) d\varphi^A$, en cuanto que la funcional $V(\varphi^A)$ se denomina el potencial simpléctico. El índice A correrá sobre los diferentes rangos del conjunto completo de variables de campo, que incluirá tanto el conjunto original de campos como un conjunto de campos auxiliares necesarios para transformar el Lagrangiano que describe el sistema en una cantidad de primer orden en las derivadas temporales; es decir, en la forma dada por (3.51). Por su parte, el conjunto de variables φ^A definirá el espacio de configuración extendido asociado al sistema.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange pueden expresarse en términos de derivadas funcionales de la siguiente manera:

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} = 0. \quad (3.52)$$

Para el caso del Lagrangiano descrito por (3.51), se determina que

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \varphi^A} &= \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A}, \\ \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} &= K_B(\varphi) \frac{\delta \dot{\varphi}^B}{\delta \dot{\varphi}^A} = K_A(\varphi), \end{aligned} \quad (3.53)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} &= \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} K_A(\varphi) \\ &= \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A} - \frac{\delta K_A(\varphi)}{\delta \varphi^B} \dot{\varphi}^B \\ &= \left(\frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} - \frac{\delta K_A(\varphi)}{\delta \varphi^B} \right) \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A} = 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

que finalmente se expresa en la forma:

$$M_{AB}(\varphi) \dot{\varphi}^B = \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A}, \quad (3.55)$$

donde $M_{AB}(\varphi)$ indica los elementos de la matriz simpléctica que son componentes de la dos forma simpléctica $M(\varphi) = dK(\varphi)$, que a su vez es la derivada exterior de la una forma canónica $K(\varphi)$ planteada como un rotor generalizado construido con las derivadas funcionales y de componentes:

$$M_{AB}(\varphi) = M_{AB}(x, y) = \frac{\delta K_B(y)}{\delta \varphi^A(x)} - \frac{\delta K_A(x)}{\delta \varphi^B(y)}, \quad (3.56)$$

Cuando la matriz simpléctica M_{AB} no es singular, definirá la dos forma simpléctica que caracterizará la dinámica del sistema descrita por (3.51). De la ecuación de movimiento (3.55) se deduce que

$$\dot{\varphi}^A(x) = \int d^3y \left[M^{AB}(x, y) \right]^{-1} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^B(y)}. \quad (3.57)$$

Ahora, es importante destacar que el potencial simpléctico coincidirá con el Hamiltoniano, el cual se puede expresar en términos de una densidad Hamiltoniana $\mathcal{H}(\varphi)$, de la siguiente forma:

$$V(\varphi) = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi). \quad (3.58)$$

La ecuación (3.57), escrita en términos de corchetes de Poisson asociado al sistema, se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^A(x) &= \left\{ \varphi^A(x), V(\varphi) \right\} = \left\{ \varphi^A(x), \varphi^B(y) \right\} \frac{\partial V(\varphi)}{\partial \varphi^B(y)} \\ &= \left[M^{AB}(x, y) \right]^{-1} \frac{\partial V}{\partial \varphi^B(y)}, \end{aligned} \quad (3.59)$$

de lo cual se deduce que

$$\left\{ \varphi^A(x), \varphi^B(y) \right\} = \left[M^{AB}(x, y) \right]^{-1}, \quad (3.60)$$

que son los corchetes generalizados del formalismo de Faddeev-Jackiw para la teoría de campos. Además, los elementos de $(M^{AB})^{-1}$ corresponderán a los corchetes de Dirac de la teoría. La transición a una teoría cuántica se obtiene de la manera usual, en la cual se reemplazan los campos clásicos por operadores de campo cuántico que actúan sobre un espacio de Hilbert. Por lo tanto, en esta caso, los métodos de Faddeev-Jackiw y de Dirac serán equivalentes. Sin embargo, si la teoría es invariante de gauge, además de los verdaderos grados de libertad, también habrá grados gauge de libertad y, como consecuencia, surgirán vínculos de primera clase, lo que implicará que la matriz M_{AB} sea singular.

En el formalismo de Faddeev-Jackiw, los vínculos aparecen como relaciones algebraicas que son necesarias para garantizar la consistencia de las ecuaciones de campo. En el caso de que existan m ($m < n$) (siendo n el número de variables de campo) modos ceros izquierdos o derechos $v_{(\alpha)}^A(x)$, con $\alpha = 1, 2, \dots, m$, de la matriz M_{AB} , se satisface la siguiente ecuación

$$\int d^3x v_{(\alpha)}^A(x) M_{AB}(x, y) = 0. \quad (3.61)$$

Como consecuencia de las ecuaciones de movimiento (3.55) y de (3.61), se obtiene el siguiente conjunto de m vínculos en el formalismo de Faddeev-Jackiw:

$$\Omega_{(\alpha)} \equiv \int d^3x v_{(\alpha)}^{\Lambda}(\mathbf{x}) \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^{\Lambda}(\mathbf{x})} = \int d^3x v_{(\alpha)}^{\Lambda}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \varphi^{\Lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}(\varphi). \quad \alpha = 1, 2, \dots, m \quad (3.62)$$

Las cantidades $\Omega_{(\alpha)}$ son introducidas en el Lagrangiano usando multiplicadores de Lagrange $\Lambda^{(\alpha)}$ de manera conveniente

$$L^{(1)}(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) - \Lambda^{(\alpha)} \Omega_{(\alpha)} - V(\varphi), \quad (3.63)$$

lo que definirá el primer Lagrangiano en el proceso de iteración. En la ecuación (3.63) se ha asumido que $\varphi^i(\mathbf{x})$ representa algún campo que pertenece al conjunto simpléctico, de tal manera que la submatriz $\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de la matriz (3.56) no es singular.

Si se redefine la variable $\Lambda^{(\alpha)}$ de la siguiente manera

$$\Lambda^{(\alpha)} \rightarrow -\dot{\zeta},$$

podemos expresar $L^{(1)}$ como se muestra a continuación:

$$L^{(1)} = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) + \dot{\zeta} \Omega_{(\alpha)} - V(\varphi). \quad (3.64)$$

En este punto, se aplica nuevamente el algoritmo simpléctico, aprovechando el hecho de que se ha expandido el espacio de configuración al conjunto de variables $\xi^{(\Lambda)} = (\varphi^i, \dot{\zeta})$, con lo cual expresamos el primer Lagrangiano iterado en la forma

$$L^{(1)}(\varphi, \dot{\varphi}, \zeta, \dot{\zeta}) = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) + \dot{\zeta} \Omega_{(\alpha)} - V^{(1)}(\varphi), \quad (3.65)$$

donde

$$V^{(1)}(\varphi) = V(\varphi) \Big|_{\Omega_{(\alpha)}=0}. \quad (3.66)$$

En términos de este nuevo conjunto de variables, la matriz simpléctica se expresa

$$M_{\Lambda B}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B(\mathbf{y})}{\delta \xi^{\Lambda}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A(\mathbf{x})}{\delta \xi^B(\mathbf{y})}, \quad (3.67)$$

con los siguientes componentes:

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_j(\mathbf{y})}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_i(\mathbf{x})}{\delta \xi^j(\mathbf{y})} = \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{M}_{ij} \\ M_{i\zeta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\zeta}(\mathbf{y})}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_i(\mathbf{x})}{\delta \xi^{\zeta}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} = \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i} \\ M_{\zeta i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_i(\mathbf{y})}{\delta \xi^{\zeta}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\zeta}(\mathbf{x})}{\delta \xi^i(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^i(\mathbf{y})} = -\left(\frac{\delta \Omega_{(\alpha)}}{\delta \varphi^i}\right)^{\text{T}} \\ M_{\zeta\zeta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.68)$$

de tal manera que

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ij} & \frac{\delta\Omega(\alpha)}{\delta\varphi^i} \\ -\left(\frac{\delta\Omega(\alpha)}{\delta\varphi^i}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.69)$$

con \bar{M}_{ij} siendo la matriz cuadrada no singular construida del conjunto simpléctico original de variables de campo $\varphi^i(\mathbf{x})$. La notación $\frac{\delta\Omega(\alpha)}{\delta\varphi^i}$ representará una matriz rectangular.

En el procedimiento simpléctico se deberá modificar la matriz simpléctica hasta que se eliminen todos los modos cero. Esto implica que el algoritmo deberá ser repetido hasta que ningún nuevo vínculo sea generado. En el caso de que el Lagrangiano describa una teoría gauge, este algoritmo no será capaz de generar una matriz simpléctica inversible. Debido a ello, se deberán introducir condiciones de gauge con el fin de obtener los corchetes generalizados.

La inversa $(M^{AB})^{-1}$ de la matriz simpléctica M_{AB} deberá satisfacer la condición de ser única. Así, para garantizar este criterio, se deben cumplir las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \int d^3z M_{AC}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (M^{CB})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \delta_\lambda^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \int d^3z (M^{AC})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) M_{CB}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) &= \delta_B^\lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.70)$$

Definiendo la inversa de la matriz simpléctica de la siguiente forma general

$$(M^{AB})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & B^{jp}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ C^{\beta k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & G^{\beta\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad (3.71)$$

del sistema de ecuaciones (3.70) se deduce que

$$\begin{aligned} &\int d^3z M_{AC}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) (M^{CB})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^3z \begin{pmatrix} \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) & \frac{\delta\Omega(\alpha)(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} \\ -\frac{\delta\Omega(\alpha)(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & B^{jp}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ C^{\alpha k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.72)$$

Donde I es la submatriz identidad asociada al espacio definida por \bar{M}_{ij} . De la anterior expresión se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones matriciales:

$$\int d^3z \left[\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \frac{\delta\Omega(\alpha)(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} C^{\alpha k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right] = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.73)$$

$$\int d^3z \left[\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{jp}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) + \frac{\delta\Omega(\alpha)(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \right] = 0 \quad (3.74)$$

$$-\int d^3z \frac{\delta\Omega(\alpha)(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = 0 \quad (3.75)$$

$$-\int d^3z \frac{\delta\Omega(\alpha)(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} B^{jp}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.76)$$

Usando el hecho que la inversa de una matriz antisimétrica también debe ser antisimétrica, se deberá cumplir que

$$B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C^{\rho j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (3.77)$$

Además, de la ecuación (3.74) se determina que

$$\int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = - \int d^3z \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \quad (3.78)$$

Recordando que la matriz $\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ no es singular, si multiplicamos la anterior relación por su inversa $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se obtendrá que

$$\begin{aligned} & \int d^3x (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ & = \int d^3z \left[\int d^3x (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ & = \int d^3z \delta_j^k \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = B^{k\rho}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ & = - \int d^3x d^3z (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.79)$$

de tal manera que se determina la siguiente componente:

$$B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C^{\rho j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = - \int d^3v d^3z (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^k(\mathbf{v})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}). \quad (3.80)$$

Ahora, de la relación (3.76) se determina que

$$\begin{aligned} - \int d^3z \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & = \int d^3z \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} \int d^3v d^3u (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \\ & \quad \frac{\delta\Omega_{(\beta)}(\mathbf{u})}{\delta\varphi^k(\mathbf{v})} G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ & = \int d^3u \left[\int d^3z d^3v \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{z})} (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \frac{\delta\Omega_{(\beta)}(\mathbf{u})}{\delta\varphi^k(\mathbf{v})} \right] \\ & \quad G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ & = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (3.81)$$

Definiendo

$$\int d^3u d^3v \frac{\delta\Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{u})} (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\delta\Omega_{(\beta)}(\mathbf{y})}{\delta\varphi^k(\mathbf{v})} \equiv \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (3.82)$$

determinamos que se debe cumplir la siguiente identidad:

$$\int d^3u \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.83)$$

Finalmente, de la ecuación (3.73) se obtiene que

$$\int d^3z \bar{M}_{ij}(x, z) A^{jk}(z, y) = \delta_i^k \delta^3(x - y) - \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^i(x)} C^{\alpha k}(z, y),$$

y multiplicando nuevamente por $(\bar{M}^{ij})^{-1}(x, y)$, se determina que

$$\begin{aligned} & \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \int d^3z \bar{M}_{ij}(x, z) A^{jk}(z, y) = \\ &= \int d^3z \left[\int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \bar{M}_{ij}(x, z) \right] A^{jk}(z, y) \\ &= \int d^3z \delta_j^i \delta^3(v - z) A^{jk}(z, y) = A^{lk}(v, y) \\ &= \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \delta_i^k \delta^3(x - y) - \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \\ & \quad \int d^3z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^i(x)} C^{\alpha k}(z, y) \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(v, y) + \int d^3x d^3z (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^i(x)} B^{k\alpha}(y, z) \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(v, y) - \int d^3x d^3z (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^i(x)} \\ & \quad \left[\int d^3w d^3u (\bar{M}^{km})^{-1}(y, w) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(u)}{\delta \varphi^m(w)} G^{\sigma\alpha}(u, z) \right] \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(v, y) - \int d^3z d^3u \left[\int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(v, x) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^i(x)} \right] \\ & \quad \left[\int d^3w (\bar{M}^{km})^{-1}(y, w) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(u)}{\delta \varphi^m(w)} \right] G^{\sigma\alpha}(u, z), \end{aligned}$$

de tal manera que la última componentes es dada por:

$$\begin{aligned} A^{ij}(x, y) &= (\bar{M}^{ij})^{-1}(x, y) - \int d^3z d^3u \left[\int d^3v (\bar{M}^{ik})^{-1}(x, v) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^k(v)} \right] \\ & \quad \left[\int d^3w (\bar{M}^{jm})^{-1}(y, w) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(u)}{\delta \varphi^m(w)} \right] G^{\sigma\alpha}(u, z). \end{aligned} \quad (3.84)$$

Lo anterior permite concluir que los corchetes generalizados entre las variables de campo simplécticas originales $\varphi^i(x)$ es dada por

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi^i(x), \varphi^j(y) \right\} &= A^{ij}(x, y) = (\bar{M}^{ij})^{-1}(x, y) - \int d^3z d^3u \\ & \quad \left[\int d^3v (\bar{M}^{ik})^{-1}(x, v) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(z)}{\delta \varphi^k(v)} \right] \\ & \quad \left[\int d^3w (\bar{M}^{jm})^{-1}(y, w) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(u)}{\delta \varphi^m(w)} \right] G^{\sigma\alpha}(u, z). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Las relaciones anteriores garantizan que los corchetes generalizados de Faddeev-Jackiw pueden ser calculados solo si $\Phi_{\alpha\beta}(x, y)$ y $\bar{M}_{ij}(x, y)$ son invertibles. De esta manera, toda la manipulación algebraica se reduce a calcular las matrices $(\bar{M}^{ij})^{-1}(x, y)$ y $G^{\alpha\beta}(x, y)$.

3.4. Modelo de Schwinger Quiral Anómalo

Ahora se considerará el bosonizado modelo de Schwinger Quiral Anómalo, el cual es descrito por la siguiente densidad Lagrangiana [11]:

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + e(\eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu})\partial_\mu\phi A_\nu + \frac{1}{2}ae^2A_\mu A^\mu, \quad (3.86)$$

donde

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \\ \eta^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \epsilon^{01} &= 1. \end{aligned} \quad (3.87)$$

En la relación (3.86), ϕ denota un campo escalar y e la constante de acoplamiento, mientras que a es un parámetro cuya determinación no es única, al depender del esquema empleado para evaluar el determinante fermiónico. Aunque la invariancia de gauge debería fijar su valor, la presencia de anomalías en el modelo impide hacerlo de manera unívoca. En consecuencia, a puede considerarse libre, sujeto únicamente a restricciones que delimitan un dominio específico de valores admisibles.

Con el fin de linealizar el Lagrangiano, definiremos los momentos canónicos conjugados a los campos utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= F^{\nu\mu}, \\ \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_\mu\phi)} &= \left[\partial^\alpha\phi + e(\eta^{\alpha\beta} - \epsilon^{\alpha\beta})A_\beta \right] \frac{\partial(\partial_\alpha\phi)}{\partial(\partial_\mu\phi)} = \partial^\mu\phi + e(\eta^{\mu\beta} - \epsilon^{\mu\beta})A_\beta, \end{aligned} \quad (3.88)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \Pi^\mu &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = F^{\mu 0}, \\ \Pi_\phi &\equiv \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial^0\phi + e(\eta^{0\beta} - \epsilon^{0\beta})A_\beta \\ &= \partial^0\phi + e\eta^{00}A_0 - e\epsilon^{01}A_1 = \partial^0\phi + e(A_0 - A_1). \end{aligned} \quad (3.89)$$

Con este término podemos expandir la densidad Lagrangiana así:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(0)} &= -\frac{1}{4}F_{01}F^{01} - \frac{1}{4}F_{10}F^{10} + \frac{1}{2}\partial_0\phi\partial^0\phi + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial^1\phi + e(\eta^{00} - \epsilon^{00})\partial_0\phi A_0 \\
 &+ e(\eta^{01} - \epsilon^{01})\partial_0\phi A_1 + e(\eta^{10} - \epsilon^{10})\partial_1\phi A_0 + e(\eta^{11} - \epsilon^{11})\partial_1\phi A_1 + \frac{1}{2}ae^2\mathcal{A}_\alpha A^\alpha \\
 &= \frac{1}{4}F^{10}F^{10} + \frac{1}{4}F^{10}F^{10} + \partial_0\phi \left[\frac{1}{2}\partial_0\phi + e(A_0 - A_1) \right] - \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi \\
 &+ e(A_0 - A_1)\partial_1\phi + \frac{1}{2}ae^2\mathcal{A}_\alpha A^\alpha \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}[\Pi_\phi - e(A_0 - A_1)][\Pi_\phi - e(A_0 - A_1) + 2e(A_0 - A_1)] \\
 &- \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(A_0 - A_1)\partial_1\phi + \frac{1}{2}ae^2\mathcal{A}_\alpha A^\alpha \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}[\Pi_\phi - e(A_0 - A_1)][\Pi_\phi + e(A_0 - A_1)] - \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi \\
 &+ e(A_0 - A_1)\partial_1\phi + \frac{1}{2}ae^2\mathcal{A}_\alpha A^\alpha \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \frac{1}{2}e^2(A_0 - A_1)^2 - \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(A_0 - A_1)\partial_1\phi \\
 &+ \frac{1}{2}ae^2\mathcal{A}_\alpha A^\alpha. \tag{3.90}
 \end{aligned}$$

Si sumamos el siguiente cero en la relación anterior

$$\Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \Pi^1\partial_0A_1 - \Pi_\phi\partial_0\phi = \Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \Pi^1\Pi^1 - \Pi^1\partial_1A_0 - \Pi_\phi^2 + e(A_0 - A_1)\Pi_\phi, \tag{3.91}$$

se obtendrá que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(0)} &= \Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 - \Pi^1\partial_1A_0 - \Pi_\phi^2 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 + e(A_0 - A_1)\Pi_\phi \\
 &- \frac{1}{2}e^2(A_0 - A_1)^2 - \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(A_0 - A_1)\partial_1\phi + \frac{1}{2}ae^2A_0A^0 + \frac{1}{2}ae^2A_1A^1 \\
 &= \Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 - \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \Pi^1\partial_1A_0 - \frac{1}{2}e^2(A_0^2 - 2A_0A_1 + A_1^2) \\
 &- \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)(A_0 - A_1) + \frac{1}{2}ae^2A_0^2 - \frac{1}{2}ae^2A_1^2 \\
 &= \Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 - \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \Pi^1\partial_1A_0 - \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)(A_0 - A_1) \\
 &+ \frac{1}{2}(a-1)e^2A_0^2 - \frac{1}{2}(a+1)e^2A_1^2 + e^2A_0A_1 \\
 &= \Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \left[\frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 + \Pi^1\partial_1A_0 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi - e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)(A_0 - A_1) \right. \\
 &\left. - \frac{1}{2}(a-1)e^2A_0^2 + \frac{1}{2}(a+1)e^2A_1^2 - e^2A_0A_1 \right], \tag{3.92}
 \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^1\dot{A}_1 + \Pi_\phi\dot{\phi} - \mathcal{H}^{(0)}, \tag{3.93}$$

donde se ha definido el potencial simpléctico en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} = & \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 + \Pi^1\partial_1\mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi - e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) \\ & - \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0^2 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2 - e^2\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Se deberá analizar los casos $\alpha > 1$ y $\alpha = 1$ por separado, ya que cada uno conlleva una estructura simpléctica diferente.

Caso $\alpha > 1$

Con el fin de calcular la matriz simpléctica, definiremos las variables simplécticas de la siguiente forma: $\xi_k^{(0)} = (\mathcal{A}_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, \mathcal{A}_0)$. De la (3.93) se puede determinar que

$$K_{\mathcal{A}_1}^{(0)} \rightarrow \Pi^1, \quad K_{\Pi^1}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_\phi^{(0)} \rightarrow \Pi_\phi, \quad K_{\Pi_\phi}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{\mathcal{A}_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (3.95)$$

Con lo cual podremos calcular la matriz simpléctica

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})} \quad (3.96)$$

con los siguientes elementos de matriz diferentes de cero:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}_1, \Pi^1}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_1}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\mathcal{A}_1}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{\Pi^1, \mathcal{A}_1}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\mathcal{A}_1}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_1}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ M_{\phi, \Pi_\phi}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\phi^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\phi^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ M_{\Pi_\phi, \phi}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_\phi^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\phi^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned} \quad (3.97)$$

de tal manera que $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tendrá la siguiente estructura matricial:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.98)$$

Se observa que esta matriz es singular con un autovalor cero. El autovalor correspondiente a esta matriz es dada por

$$\tilde{\nu}^{A(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \nu^{A_0}(\mathbf{x})), \quad (3.99)$$

donde $v^{\Lambda_0}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria. El vínculo asociado a este autovalor es

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}_a^{\Lambda_0} \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\xi_k^{(0)}) = \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda_0}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\xi_k^{(0)}) \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_0(\mathbf{x})} \int d^3y \left[\Pi^1(\mathbf{y}) \partial_1^y \mathcal{A}_0(\mathbf{y}) - e(\Pi_\phi(\mathbf{y}) + \partial_1^y \phi(\mathbf{y})) \mathcal{A}_0(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2}(\alpha - 1) e^2 \mathcal{A}_0^2(\mathbf{y}) - e^2 \mathcal{A}_0(\mathbf{y}) \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^1(\mathbf{y}) \partial_1^y - e(\Pi_\phi(\mathbf{y}) + \partial_1^y \phi(\mathbf{y})) - (\alpha - 1) e^2 \mathcal{A}_0(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. - e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \frac{\delta \mathcal{A}_0(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{A}_0(\mathbf{x})} \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[-\Pi^1(\mathbf{y}) \partial_1^x - e(\Pi_\phi(\mathbf{y}) + \partial_1^y \phi(\mathbf{y})) - (\alpha - 1) e^2 \mathcal{A}_0(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. - e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \left[\partial_1^x \Pi^1(\mathbf{x}) + e(\Pi_\phi(\mathbf{x}) + \partial_1^x \phi(\mathbf{x})) + (\alpha - 1) e^2 \mathcal{A}_0(\mathbf{x}) + e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \left[\partial_1^x \Pi^1(\mathbf{x}) + e(\Pi_\phi(\mathbf{x}) + \partial_1^x \phi(\mathbf{x})) + (\alpha - 1) e^2 \mathcal{A}_0(\mathbf{x}) + e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Sin embargo, debido a que la función $v^{\Lambda_0}(\mathbf{x})$ es completamente arbitraria, se puede escoger como vínculo Lagrangiano la siguiente relación:

$$\Omega^{(0)} \equiv \partial_1 \Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) + (\alpha - 1) e^2 \mathcal{A}_0 + e^2 \mathcal{A}_1 = 0. \quad (3.100)$$

El primer Lagrangiano del proceso de iteración se obtiene adicionando el vínculo anterior a la parte canónica de $\mathcal{L}^{(0)}$, con lo que se obtendrá

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^1 \dot{\Lambda}_1 + \Pi_\phi \dot{\phi} + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (3.101)$$

donde

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (3.102)$$

Debido a que $\mathcal{H}^{(0)}$ se puede expresar en la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^{(0)} &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \mathcal{A}_0\partial_1\Pi^1 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi - e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)(\mathcal{A}_0 - \mathcal{A}_1) \\
 &\quad - \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0^2 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2 - e^2\mathcal{A}_0\mathcal{A}_1 \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \left[\partial_1\Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0 + e^2\mathcal{A}_1 \right] \mathcal{A}_0 \\
 &\quad + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \left[\partial_1\Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0 + (\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0 \right. \\
 &\quad \left. + e^2\mathcal{A}_1 - \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0 \right] \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)\mathcal{A}_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \left[\partial_1\Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + (\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0 + e^2\mathcal{A}_1 \right] \mathcal{A}_0 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0\mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)\mathcal{A}_1 + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2 \\
 &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 - \Omega^{(0)}\mathcal{A}_0 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0^2 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)\mathcal{A}_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2, \tag{3.103}
 \end{aligned}$$

se tendrá que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^{(1)} &= \frac{1}{2}\Pi^1\Pi^1 + \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 + \frac{1}{2}(\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0^2 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)\mathcal{A}_1 \\
 &\quad + \frac{1}{2}(\alpha + 1)e^2\mathcal{A}_1^2. \tag{3.104}
 \end{aligned}$$

El primer primer conjunto de variables simpléctica del proceso de iteración es:

$$\xi_k^{(1)} = \left(\mathcal{A}_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, \mathcal{A}_0, \lambda \right). \tag{3.105}$$

De la (3.101) se puede determinar que

$$\begin{aligned}
 K_{\mathcal{A}_1}^{(1)} &\rightarrow \Pi^1, \quad K_{\Pi^1}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_\phi^{(1)} \rightarrow \Pi_\phi, \quad K_{\Pi_\phi}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\mathcal{A}_0}^{(1)} \rightarrow 0, \\
 K_\lambda^{(1)} &\rightarrow \partial_1\Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + (\alpha - 1)e^2\mathcal{A}_0 + e^2\mathcal{A}_1. \tag{3.106}
 \end{aligned}$$

Con lo cual podremos calcular la primera iterada matriz simpléctica dos forma:

$$M_{AB}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_A^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_A^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)}, \tag{3.107}$$

con los siguientes elementos de matriz diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{A}_1, \Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\mathcal{A}_1, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = e^2 \frac{\delta \mathcal{A}_1(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{A}_1(\mathbf{x})} = e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, \mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_1}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \partial_1^y \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -\partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\phi, \Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\phi, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = e \partial_1^y \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \phi(\mathbf{x})} = e \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -e \partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi_\phi, \phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi_\phi, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = e \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} = e \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_0, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda_0}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda_0}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = (\alpha - 1) e^2 \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\
 &= (\alpha - 1) e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda_1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda_1}^{(1)}(\mathbf{y})} = -e^2 \frac{\delta A_1(\mathbf{x})}{\delta A_1(\mathbf{y})} = -e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\partial_1^x \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = -e \partial_1^x \frac{\delta \phi(\mathbf{x})}{\delta \phi(\mathbf{y})} = -e \partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi_{\phi}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_{\phi}}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_{\phi}}^{(1)}(\mathbf{y})} = -e \frac{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{y})} = -e \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \lambda_0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda_0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda_0}^{(1)}(\mathbf{y})} = -(\alpha - 1) e^2 \frac{\delta A_0(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} \\
 &= -(\alpha - 1) e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera iterada dos forma simpléctica tendrá la siguiente representación matricial:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -e \partial_1^x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (\alpha - 1) e^2 \\ -e^2 & -\partial_1^x & -e \partial_1^x & -e & -(\alpha - 1) e^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.108)$$

Se determina entonces que esta matriz es no singular. Por ende, es necesario el cálculo de su inversa, la cual se obtiene utilizando la siguiente ecuación funcional:

$$\int d^3z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_{\lambda}^{\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.109)$$

Donde se considerara que $[M^{CB(1)}]^{-1}$ tiene las siguientes componentes:

$$[M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \theta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \eta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \kappa_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (3.110)$$

De esta manera se tendrá que

$$\int d^3z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left[M^{CB(1)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \quad (3.111)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -e\partial_1^x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (a-1)e^2 \\ -e^2 & -\partial_1^x & -e\partial_1^x & -e & -(a-1)e^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \theta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \eta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \kappa_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \eta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \eta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \kappa_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \kappa_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De la ultima relación se puede determinar que

$$\begin{aligned} -\beta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e^2 \kappa_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ -\beta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e^2 \kappa_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\beta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e^2 \kappa_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\beta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e^2 \kappa_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\beta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e^2 \kappa_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\beta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e^2 \kappa_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.112)$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_1^x \kappa_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_1^x \kappa_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_1^x \kappa_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_1^x \kappa_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_1^x \kappa_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ \alpha_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_1^x \kappa_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.113)$$

De la misma manera se obtiene que

$$\begin{aligned} -\theta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\partial_1^x \kappa_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\theta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\partial_1^x \kappa_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\partial_1^x \kappa_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ -\theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\partial_1^x \kappa_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\theta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\partial_1^x \kappa_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\partial_1^x \kappa_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \end{aligned} \quad (3.114)$$

y también que

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(x, y) + e\kappa_1(x, y) &= 0 \\
 \gamma_2(x, y) + e\kappa_2(x, y) &= 0 \\
 \gamma_3(x, y) + e\kappa_3(x, y) &= 0 \\
 \gamma_4(x, y) + e\kappa_4(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 \gamma_5(x, y) + e\kappa_5(x, y) &= 0 \\
 \gamma_6(x, y) + e\kappa_6(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.115}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 (a - 1) e^2 \kappa_1(x, y) &= 0 \\
 (a - 1) e^2 \kappa_2(x, y) &= 0 \\
 (a - 1) e^2 \kappa_3(x, y) &= 0 \\
 (a - 1) e^2 \kappa_4(x, y) &= 0 \\
 (a - 1) e^2 \kappa_5(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 (a - 1) e^2 \kappa_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.116}$$

y, finalmente,

$$\begin{aligned}
 -e^2 \alpha_1(x, y) - \partial_1^x \beta_1(x, y) - e \partial_1^x \gamma_1(x, y) - e \theta_1(x, y) - (a - 1) e^2 \eta_1(x, y) &= 0 \\
 -e^2 \alpha_2(x, y) - \partial_1^x \beta_2(x, y) - e \partial_1^x \gamma_2(x, y) - e \theta_2(x, y) - (a - 1) e^2 \eta_2(x, y) &= 0 \\
 -e^2 \alpha_3(x, y) - \partial_1^x \beta_3(x, y) - e \partial_1^x \gamma_3(x, y) - e \theta_3(x, y) - (a - 1) e^2 \eta_3(x, y) &= 0 \\
 -e^2 \alpha_4(x, y) - \partial_1^x \beta_4(x, y) - e \partial_1^x \gamma_4(x, y) - e \theta_4(x, y) - (a - 1) e^2 \eta_4(x, y) &= 0 \\
 -e^2 \alpha_5(x, y) - \partial_1^x \beta_5(x, y) - e \partial_1^x \gamma_5(x, y) - e \theta_5(x, y) - (a - 1) e^2 \eta_5(x, y) &= 0 \\
 -e^2 \alpha_6(x, y) - \partial_1^x \beta_6(x, y) - e \partial_1^x \gamma_6(x, y) - e \theta_6(x, y) - (a - 1) e^2 \eta_6(x, y) &= \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

Del conjunto de ecuaciones diferenciales anteriores, se puede determinar que:

$$\kappa_5(x, y) = \frac{1}{(a - 1) e^2} \delta^3(x - y) \quad , \quad \kappa_i(x, y) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 6. \tag{3.118}$$

En forma similar,

$$\begin{aligned}
 \beta_1(x, y) &= -\delta^3(x - y) \quad , \quad \beta_5(x, y) = \frac{e^2}{(a - 1) e^2} \delta^3(x - y), \\
 \beta_i(x, y) &= 0 \quad , \quad i = 2, 3, 4, 6.
 \end{aligned} \tag{3.119}$$

Ahora, para α se tiene que

$$\begin{aligned}
 \alpha_2(x, y) &= \delta^3(x - y) \quad , \quad \alpha_5(x, y) = \frac{1}{(a - 1) e^2} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 \alpha_i(x, y) &= 0 \quad , \quad i = 1, 3, 4, 6.
 \end{aligned} \tag{3.120}$$

Para θ :

$$\begin{aligned}\theta_3(x, y) &= -\delta^3(x-y) \quad , \quad \theta_5(x, y) = -\frac{e}{(\alpha-1)e^2} \partial_1^x \delta^3(x-y), \\ \theta_i(x, y) &= 0 \quad , \quad i = 1, 2, 4, 6.\end{aligned}\quad (3.121)$$

Para γ :

$$\begin{aligned}\gamma_4(x, y) &= \delta^3(x-y) \quad , \quad \gamma_5(x, y) = -\frac{e}{(\alpha-1)e^2} \delta^3(x-y), \\ \gamma_i(x, y) &= 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 6.\end{aligned}\quad (3.122)$$

Y finalmente para η :

$$\begin{aligned}\eta_1(x, y) &= \frac{1}{(\alpha-1)e^2} \partial_1^x \delta^3(x-y) \quad , \quad \eta_2(x, y) = -\frac{1}{(\alpha-1)} \delta^3(x-y). \\ \eta_3(x, y) &= \frac{1}{(\alpha-1)e} \delta^3(x-y) \quad , \quad \eta_4(x, y) = -\frac{1}{(\alpha-1)e} \partial_1^x \delta^3(x-y). \\ \eta_5(x, y) &= 0 \quad , \quad \eta_6(x, y) = -\frac{1}{(\alpha-1)e^2} \delta^3(x-y).\end{aligned}\quad (3.123)$$

Con lo que se puede determinar que la inversa de la matriz simpléctica es

$$\left[M^{CB(1)} \right]^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{(\alpha-1)e^2} \partial_1^x & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(\alpha-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{(\alpha-1)e} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{(\alpha-1)e} \partial_1^x & 0 \\ \frac{1}{(\alpha-1)e^2} \partial_1^x & -\frac{1}{(\alpha-1)} & \frac{1}{(\alpha-1)e} & -\frac{1}{(\alpha-1)e} \partial_1^x & 0 & -\frac{1}{(\alpha-1)e^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(\alpha-1)e^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.124)$$

Con esta matriz se determinan los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simpléctica $\xi_k^{(1)} = (A_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, A_0, \lambda)$, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\left\{ \xi_{A_1}^{(1)}(x), \xi_{\Pi^1}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ A_1(x), \Pi^1(y) \right\} = \delta^3(x-y) \\ \left\{ \xi_{A_1}^{(1)}(x), \xi_{A_0}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ A_1(x), A_0(y) \right\} = \frac{1}{(\alpha-1)e^2} \partial_1^x \delta^3(x-y) \\ \left\{ \xi_{\Pi^1}^{(1)}(x), \xi_{A_0}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ \Pi^1(x), A_0(y) \right\} = \frac{1}{(\alpha-1)} \delta^3(x-y) \\ \left\{ \xi_\phi^{(1)}(x), \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ \phi(x), \Pi_\phi(y) \right\} = \delta^3(x-y) \\ \left\{ \xi_\phi^{(1)}(x), \xi_{A_0}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ \phi(x), A_0(y) \right\} = -\frac{1}{(\alpha-1)e} \delta^3(x-y) \\ \left\{ \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(x), \xi_{A_0}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ \Pi_\phi(x), A_0(y) \right\} = -\frac{1}{(\alpha-1)e} \partial_1^x \delta^3(x-y) \\ \left\{ \xi_{A_0^a}^{(1)}(x), \xi_{A_0^b}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ A_0^a(x), A_0^b(y) \right\} = \frac{g}{m^4} \delta^3(x-y) f^{abc} D_i^{cd}(x) \Pi_d^i(x) \\ \left\{ \xi_{A_0^a}^{(1)}(x), \xi_{\Pi_b^0}^{(1)}(y) \right\} &= \left\{ A_0^a(x), \Pi_b^0(y) \right\} = -\delta^{ab} \delta^3(x-y).\end{aligned}\quad (3.125)$$

Caso $\alpha = 1$

En este caso, el Lagrangiano inicial es dado por

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^1 \dot{\Lambda}_1 + \Pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{H}^{(0)}, \quad (3.126)$$

con el Hamiltoniano iterado

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^1 \Pi^1 + \frac{1}{2} \Pi_\phi^2 + \Pi^1 \partial_1 \Lambda_0 + \frac{1}{2} \partial_1 \phi \partial_1 \phi - e (\Pi_\phi + \partial_1 \phi) (\Lambda_0 - \Lambda_1) + e^2 \Lambda_1^2 - e^2 \Lambda_0 \Lambda_1. \quad (3.127)$$

De igual manera, el primer conjunto de variables es dado por $\xi_k^{(0)} = (\Lambda_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, \Lambda_0)$. Se puede determinar que

$$K_{\Lambda_1}^{(0)} \rightarrow \Pi^1, \quad K_{\Pi^1}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_\phi^{(0)} \rightarrow \Pi_\phi, \quad K_{\Pi_\phi}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{\Lambda_0}^{(0)} \rightarrow 0 \quad (3.128)$$

Dado que estas componentes no cambian, se puede determinar que $M_{AB}^{(0)}(x, y)$ tendrá la siguiente estructura matricial:

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y) \quad (3.129)$$

Se observa, nuevamente, que esta matriz es singular y le corresponde el siguiente autovalor:

$$\tilde{v}^{A(0)} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^{A_0}(x)), \quad (3.130)$$

donde $v^{A_0}(x)$ es una función arbitraria. El vínculo asociado a este autovalor es:

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}_a^{A(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_{A_a}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\xi_k^{(0)}) \\ &= \int d^3x v^{A_0}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\xi_k^{(0)}) \\ &= \int d^3x v^{A_0}(x) \frac{\delta}{\delta \Lambda_0(x)} \int d^3y \left[\Pi^1(y) \partial_1^\Psi \Lambda_0(y) - e (\Pi_\phi(y) + \partial_1^\Psi \phi(y)) \Lambda_0(y) \right. \\ &\quad \left. - e^2 \Lambda_0(y) \Lambda_1(y) \right] \\ &= \int d^3x v^{A_0}(x) \int d^3y \left[\Pi^1(y) \partial_1^\Psi - e (\Pi_\phi(y) + \partial_1^\Psi \phi(y)) - e^2 \Lambda_1(y) \right] \frac{\delta \Lambda_0(y)}{\delta \Lambda_0(x)} \\ &= \int d^3x v^{A_0}(x) \int d^3y \left[-\Pi^1(y) \partial_1^\Psi - e (\Pi_\phi(y) + \partial_1^\Psi \phi(y)) - e^2 \Lambda_1(y) \right] \\ &\quad \delta^3(x - y) \\ &= - \int d^3x v^{A_0}(x) \left[\partial_1^\Psi \Pi^1(x) + e (\Pi_\phi(x) + \partial_1^\Psi \phi(x)) + e^2 \Lambda_1(x) \right] \\ &= - \int d^3x v^{A_0}(x) \left[\partial_1^\Psi \Pi^1(x) + e (\Pi_\phi(x) + \partial_1^\Psi \phi(x)) + e^2 \Lambda_1(x) \right] \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Sin embargo, debido a que la función $v^{A_0}(\mathbf{x})$ es completamente arbitraria, se puede escoger como vínculo Lagrangiano la relación

$$\Omega^{(0)} \equiv \partial_1 \Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) + e^2 A_1 = 0. \quad (3.133)$$

El primer Lagrangiano del proceso de iteración se obtiene adicionando el vínculo anterior a la parte canónica de $\mathcal{L}^{(0)}$, con lo que se obtendrá que

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^1 \dot{A}_1 + \Pi_\phi \dot{\phi} + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (3.134)$$

donde

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (3.135)$$

Y debido a que $\mathcal{H}^{(0)}$ puede expresarse en la siguiente forma

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \frac{1}{2} \Pi^1 \Pi^1 + \frac{1}{2} \Pi_\phi^2 - A_0 \partial_1 \Pi^1 + \frac{1}{2} \partial_1 \phi \partial_1 \phi - e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi)(A_0 - A_1) \\ &\quad + e^2 A_1^2 - e^2 A_0 A_1 \\ &= \frac{1}{2} \Pi^1 \Pi^1 + \frac{1}{2} \Pi_\phi^2 - \left[\partial_1 \Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) + e^2 A_1 \right] A_0 + \frac{1}{2} \partial_1 \phi \partial_1 \phi \\ &\quad + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) A_1 + e^2 A_1^2 \\ &= \frac{1}{2} \Pi^1 \Pi^1 + \frac{1}{2} \Pi_\phi^2 - \Omega^{(0)} A_0 + \frac{1}{2} \partial_1 \phi \partial_1 \phi + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) A_1 + e^2 A_1^2, \end{aligned} \quad (3.136)$$

se tendrá que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^1 \Pi^1 + \frac{1}{2} \Pi_\phi^2 + \frac{1}{2} \partial_1 \phi \partial_1 \phi + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) A_1 + e^2 A_1^2 \quad (3.137)$$

El primer conjunto de variables simplécticas del proceso de iteración es

$$\xi_k^{(1)} = (A_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, \lambda) \quad (3.138)$$

debido a que la variable A_0 a desaparecido de $\mathcal{H}^{(1)}$. Por tanto, se determina que

$$\begin{aligned} K_{A_1}^{(1)} &\rightarrow \Pi^1, \quad K_{\Pi^1}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_\phi^{(1)} \rightarrow \Pi_\phi, \quad K_{\Pi_\phi}^{(1)} \rightarrow 0, \\ K_\lambda^{(1)} &\rightarrow \partial_1 \Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1 \phi) + e^2 A_1, \end{aligned} \quad (3.139)$$

con los siguientes elementos de matriz simpléctica diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
 M_{\Lambda_1, \Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Lambda_1, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = e^2 \frac{\delta \Lambda_1(\mathbf{y})}{\delta \Lambda_1(\mathbf{x})} = e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, \Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \partial_1^y \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -\partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\phi, \Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\phi, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = e \partial_1^y \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \phi(\mathbf{x})} = e \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -e \partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi_\phi, \phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi_\phi, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = e \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} = e \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Lambda_1}^{(1)}(\mathbf{y})} = -e^2 \frac{\delta \Lambda_1(\mathbf{x})}{\delta \Lambda_1(\mathbf{y})} = -e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi^1}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\partial_1^x \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 \\
 M_{\lambda, \phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = -e \partial_1^x \frac{\delta \phi(\mathbf{x})}{\delta \phi(\mathbf{y})} = -e \partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(\mathbf{y})} = -e \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})} = -e \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primera iterada dos forma simpléctica tendrá la siguiente representación matricial:

$$M_{AB}^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & e^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -e\partial_1^x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ -e^2 & -\partial_1^x & -e\partial_1^x & -e & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (3.140)$$

Se sabe que esta matriz es singular, lo cual puede inferirse a partir de la estructura de vínculos derivada de la formulación de Dirac. Por lo tanto, deberá corresponderle un autovector nulo que cumpla la condición

$$\int d^3x \tilde{v}^{A(0)}(x) M_{AB}^{(1)}(x, y) = 0. \quad (3.141)$$

Asumiendo que

$$\tilde{v}^{A(1)}(x) = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)}(x) & \tilde{v}_2^{(1)}(x) & \tilde{v}_3^{(1)}(x) & \tilde{v}_4^{(1)}(x) & \tilde{v}_5^{(1)}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.142)$$

tendremos que

$$\begin{aligned} \int d^3x \tilde{v}^{A(1)}(x) M_{AB}^{(1)}(x, y) &= \int d^3x \begin{pmatrix} \tilde{v}_1^{(1)}(x) & \tilde{v}_2^{(1)}(x) & \tilde{v}_3^{(1)}(x) & \tilde{v}_4^{(1)}(x) & \tilde{v}_5^{(1)}(x) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & e^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -e\partial_1^x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ -e^2 & -\partial_1^x & -e\partial_1^x & -e & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y) \\ &= \int d^3x \begin{pmatrix} \tilde{v}_2^{(1)}(x) - e^2\tilde{v}_5^{(1)}(x) & -\tilde{v}_1^{(1)}(x) - \tilde{v}_5^{(1)}(x) \partial_1^x & \tilde{v}_4^{(1)}(x) - e\tilde{v}_5^{(1)}(x) \partial_1^x \\ -\tilde{v}_3^{(1)}(x) - e\tilde{v}_5^{(1)}(x) & e^2\tilde{v}_1^{(1)}(x) - \tilde{v}_2^{(1)}(x) \partial_1^x - e\tilde{v}_3^{(1)}(x) \partial_1^x + e\tilde{v}_4^{(1)}(x) \end{pmatrix} \delta^3(x - y) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{v}_2^{(1)}(y) - e^2\tilde{v}_5^{(1)}(y) & -\tilde{v}_1^{(1)}(y) + \partial_1^y \tilde{v}_5^{(1)}(y) & \tilde{v}_4^{(1)}(y) + e\partial_1^y \tilde{v}_5^{(1)}(y) \\ -\tilde{v}_3^{(1)}(y) - e\tilde{v}_5^{(1)}(y) & e^2\tilde{v}_1^{(1)}(y) + \partial_1^y \tilde{v}_2^{(1)}(y) + e\partial_1^y \tilde{v}_3^{(1)}(y) + e\tilde{v}_4^{(1)}(y) \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo anterior implica que se debe cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \tilde{v}_2^{(1)} - e^2\tilde{v}_5^{(1)} &= 0 \\ -\tilde{v}_1^{(1)} + \partial_1 \tilde{v}_5^{(1)} &= 0 \\ \tilde{v}_4^{(1)} + e\partial_1 \tilde{v}_5^{(1)} &= 0 \\ -\tilde{v}_3^{(1)} - e\tilde{v}_5^{(1)} &= 0 \\ e^2\tilde{v}_1^{(1)} + \partial_1 \tilde{v}_2^{(1)} + e\partial_1 \tilde{v}_3^{(1)} + e\tilde{v}_4^{(1)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.143)$$

tal que se debe cumplir

$$\begin{aligned}
 \tilde{v}_1^{(1)} &= \partial_1 \tilde{v}_5^{(1)} \\
 \tilde{v}_2^{(1)} &= e^2 \tilde{v}_5^{(1)} \\
 \tilde{v}_3^{(1)} &= -e \tilde{v}_5^{(1)} \\
 \tilde{v}_4^{(1)} &= -e \partial_1 \tilde{v}_5^{(1)},
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

con $\tilde{v}_5^{(1)}$ arbitrario. Así, el vector nulo se puede expresar como

$$\tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) = \left(\partial_1^x \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \quad e^2 \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \quad -e \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \quad -e \partial_1^x \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \right), \tag{3.145}$$

donde $\tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x})$ es una función completamente arbitraria. Con esta relación, podemos derivar un segundo vínculo a partir de la expresión que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} &= \int d^3x \tilde{v}^{1(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\xi_k^{(1)}) \\
 &= \int d^3x d^3y \left[\tilde{v}^{1(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_1(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{2(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_2(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{3(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_3(\mathbf{x})} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{v}^{4(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_4(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{5(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_5(\mathbf{x})} \right] \\
 &= \int d^3x d^3y \left[\tilde{v}^{1(1)} \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_{\mathcal{A}_1}(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{2(1)} \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_{\Pi^1}(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{3(1)} \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_{\phi}(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{4(1)} \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_{\Pi_{\phi}}(\mathbf{x})} \right. \\
 &\quad \left. + \tilde{v}^{5(1)} \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \xi_{\lambda}(\mathbf{x})} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3x d^3y \left[\tilde{v}^{1(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \mathcal{A}_1(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{2(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{3(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \phi(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{4(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta \mathcal{H}^{(1)}}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} \right] \\
 &= \int d^3x d^3y \left\{ \tilde{v}^{1(1)}(\mathbf{x}) \left[e(\Pi_\phi(\mathbf{y}) + \partial_1^y \phi(\mathbf{y})) + 2e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \frac{\delta \mathcal{A}_1(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{A}_1(\mathbf{x})} \right. \\
 &\quad + \tilde{v}^{2(1)}(\mathbf{x}) \Pi^1(\mathbf{y}) \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} + \tilde{v}^{3(1)}(\mathbf{x}) \left[\partial_1^y \phi(\mathbf{y}) \partial_1^y + e \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \partial_1^y \right] \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \phi(\mathbf{x})} \\
 &\quad \left. + \tilde{v}^{4(1)}(\mathbf{x}) \left[\Pi_\phi(\mathbf{y}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \frac{\delta \Pi_\phi(\mathbf{y})}{\delta \Pi_\phi(\mathbf{x})} \right\} \\
 &= \int d^3x d^3y \left\{ \tilde{v}^{1(1)}(\mathbf{x}) \left[e(\Pi_\phi(\mathbf{y}) + \partial_1^y \phi(\mathbf{y})) + 2e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\
 &\quad + \tilde{v}^{2(1)}(\mathbf{x}) \Pi^1(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \tilde{v}^{3(1)}(\mathbf{x}) \left[\partial_1^y \phi(\mathbf{y}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &\quad \left. + \tilde{v}^{4(1)}(\mathbf{x}) \left[\Pi_\phi(\mathbf{y}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\
 &= \int d^3x \left\{ \tilde{v}^{1(1)}(\mathbf{x}) \left[e(\Pi_\phi(\mathbf{x}) + \partial_1^x \phi(\mathbf{x})) + 2e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] + \tilde{v}^{2(1)}(\mathbf{x}) \Pi^1(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. - \tilde{v}^{3(1)}(\mathbf{x}) \partial_1^x \left[\partial_1^x \phi(\mathbf{x}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] + \tilde{v}^{4(1)}(\mathbf{x}) \left[\Pi_\phi(\mathbf{x}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] \right\} \\
 &= \int d^3x \left\{ \partial_1^x \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \left[e(\Pi_\phi(\mathbf{x}) + \partial_1^x \phi(\mathbf{x})) + 2e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] + e^2 \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \Pi^1(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. + e \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_1^x \left[\partial_1^x \phi(\mathbf{x}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] - e \partial_1^x \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \left[\Pi_\phi(\mathbf{x}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Integrando por partes para aislar $\tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x})$, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} &= \int d^3x \left\{ -\tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_1^x \left[e(\Pi_\phi(\mathbf{x}) + \partial_1^x \phi(\mathbf{x})) + 2e^2 \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] + e^2 \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \Pi^1(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. + e \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_1^x \left[\partial_1^x \phi(\mathbf{x}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] + e \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_1^x \left[\Pi_\phi(\mathbf{x}) + e \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right] \right\} \\
 &= \int d^3x \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \left\{ -e \partial_1^x \Pi_\phi(\mathbf{x}) - e \partial_1^x \partial_1^x \phi(\mathbf{x}) - 2e^2 \partial_1^x \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) + e^2 \Pi^1(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. + e \partial_1^x \partial_1^x \phi(\mathbf{x}) + e^2 \partial_1^x \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) + e \partial_1^x \Pi_\phi(\mathbf{x}) + e^2 \partial_1^x \mathcal{A}_1(\mathbf{x}) \right\} \\
 &= e^2 \int d^3x \tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x}) \Pi^1(\mathbf{x}) \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.146}$$

Teniendo en cuenta que $\tilde{v}_5^{(1)}(\mathbf{x})$ es una función completamente arbitraria, se determina que existe otro vínculo que denotaremos por

$$\Omega^{(1)} = \Pi^1. \tag{3.147}$$

Este resultado contrasta con el caso $\alpha > 1$, en el cual existía solo un vínculo. Ahora, se escribe el segundo Lagrangiano iterado de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \Pi^1 \dot{\Lambda}_1 + \Pi_\phi \dot{\phi} + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} + \Omega^{(1)} \dot{\beta} - \mathcal{H}^{(2)}, \tag{3.148}$$

donde

$$\mathcal{H}^{(2)} \equiv \mathcal{H}_{\Omega^{(1)}=0}^{(1)} = \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi)A_1 + e^2A_1^2. \quad (3.149)$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\Omega^{(0)} \equiv \partial_1\Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + (a-1)e^2A_0 + e^2A_1 = e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + e^2A_1 = 0,$$

se determina que

$$\mathcal{H}^{(2)} \equiv \mathcal{H}_{\Omega^{(1)}=0}^{(1)} = \frac{1}{2}\Pi_\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_1\phi\partial_1\phi. \quad (3.150)$$

Dado que el segundo conjunto de variables simplécticas del proceso de iteración es

$$\xi_k^{(2)} = (A_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, \lambda, \beta), \quad (3.151)$$

por tanto, se deduce que

$$\begin{aligned} K_{A_1}^{(2)} &\rightarrow \Pi^1, & K_{\Pi^1}^{(2)} &\rightarrow 0, & K_\phi^{(2)} &\rightarrow \Pi_\phi, & K_{\Pi_\phi}^{(2)} &\rightarrow 0, \\ K_\lambda^{(2)} &\rightarrow \partial_1\Pi^1 + e(\Pi_\phi + \partial_1\phi) + e^2A_1, & K_\beta^{(2)} &\rightarrow \Pi^1 \end{aligned} \quad (3.152)$$

con lo cual,

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(2)}(y)}{\delta \xi_A^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_A^{(2)}(x)}{\delta \xi_B^{(2)}(y)}. \quad (3.153)$$

Los elementos de matriz diferentes de cero son:

$$\begin{aligned}
 M_{A_1, \Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_1}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_1}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{A_1, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_1}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_1}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = e^2 \frac{\delta A_1(\mathbf{y})}{\delta A_1(\mathbf{x})} = e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, A_1}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_1}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_1}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \partial_1^y \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -\partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^1, \beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{y})}{\delta \Pi^1(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\phi, \Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\phi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\phi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\phi, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\phi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\phi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = e \partial_1^y \frac{\delta \phi(\mathbf{y})}{\delta \phi(\mathbf{x})} = e \partial_1^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -e \partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi_{\phi}, \phi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\phi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\phi}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{y})}{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 \\
 M_{\Pi_{\phi}, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = e \frac{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{y})}{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{x})} = e \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, A_1}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_1}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_1}^{(2)}(\mathbf{y})} = -e^2 \frac{\delta A_1(\mathbf{x})}{\delta A_1(\mathbf{y})} = -e^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\partial_1^x \frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \phi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\phi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\phi}^{(2)}(\mathbf{y})} = -e \partial_1^x \frac{\delta \phi(\mathbf{x})}{\delta \phi(\mathbf{y})} = -e \partial_1^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi_{\phi}}^{(2)}(\mathbf{y})} = -e \frac{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{x})}{\delta \Pi_{\phi}(\mathbf{y})} = -e \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\beta, \Pi^1}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^1}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^1(\mathbf{x})}{\delta \Pi^1(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Lo anterior permite determinar la segunda matriz simpléctica iterada

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -e\partial_1^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e & 0 \\ -e^2 & -\partial_1^x & -e\partial_1^x & -e & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (3.154)$$

Además, se determina que esta matriz es no singular. Por ende, es necesario el cálculo de su inversa, la cual se obtiene a través de la siguiente ecuación funcional:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(x, z) [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \delta_\Lambda^B \delta^3(x - y), \quad (3.155)$$

donde se considerara que $[M^{CB(1)}]^{-1}$ tiene las siguientes componentes

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) & \alpha_2(x, y) & \alpha_3(x, y) & \alpha_4(x, y) & \alpha_5(x, y) & \alpha_6(x, y) \\ \beta_1(x, y) & \beta_2(x, y) & \beta_3(x, y) & \beta_4(x, y) & \beta_5(x, y) & \beta_6(x, y) \\ \gamma_1(x, y) & \gamma_2(x, y) & \gamma_3(x, y) & \gamma_4(x, y) & \gamma_5(x, y) & \gamma_6(x, y) \\ \theta_1(x, y) & \theta_2(x, y) & \theta_3(x, y) & \theta_4(x, y) & \theta_5(x, y) & \theta_6(x, y) \\ \eta_1(x, y) & \eta_2(x, y) & \eta_3(x, y) & \eta_4(x, y) & \eta_5(x, y) & \eta_6(x, y) \\ \kappa_1(x, y) & \kappa_2(x, y) & \kappa_3(x, y) & \kappa_4(x, y) & \kappa_5(x, y) & \kappa_6(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.156)$$

De esta manera se tendrá que

$$\int d^3z M_{AC}^{(1)}(x, z) [M^{CB(1)}]^{-1}(z, y) = \quad (3.157)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & e^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -e\partial_1^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e & 0 \\ -e^2 & -\partial_1^x & -e\partial_1^x & -e & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) & \alpha_2(x, y) & \alpha_3(x, y) \\ \beta_1(x, y) & \beta_2(x, y) & \beta_3(x, y) \\ \gamma_1(x, y) & \gamma_2(x, y) & \gamma_3(x, y) \\ \theta_1(x, y) & \theta_2(x, y) & \theta_3(x, y) \\ \eta_1(x, y) & \eta_2(x, y) & \eta_3(x, y) \\ \kappa_1(x, y) & \kappa_2(x, y) & \kappa_3(x, y) \end{pmatrix} = \delta^3(x - y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Igualmente, determinamos que la igualdad se cumple si

$$\begin{aligned}
 -\beta_1(x, y) + e^2\eta_1(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -\beta_2(x, y) + e^2\eta_2(x, y) &= 0 \\
 -\beta_3(x, y) + e^2\eta_3(x, y) &= 0 \\
 -\beta_4(x, y) + e^2\eta_4(x, y) &= 0 \\
 -\beta_5(x, y) + e^2\eta_5(x, y) &= 0 \\
 -\beta_6(x, y) + e^2\eta_6(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.158}$$

De la misma manera, también se tiene que

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(x, y) - \partial_1^x \eta_1(x, y) + \kappa_1(x, y) &= 0 \\
 \alpha_2(x, y) - \partial_1^x \eta_2(x, y) + \kappa_2(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 \alpha_3(x, y) - \partial_1^x \eta_3(x, y) + \kappa_3(x, y) &= 0 \\
 \alpha_4(x, y) - \partial_1^x \eta_4(x, y) + \kappa_4(x, y) &= 0 \\
 \alpha_5(x, y) - \partial_1^x \eta_5(x, y) + \kappa_5(x, y) &= 0 \\
 \alpha_6(x, y) - \partial_1^x \eta_6(x, y) + \kappa_6(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.159}$$

Ahora

$$\begin{aligned}
 -\theta_1(x, y) - e\partial_1^x \eta_1(x, y) &= 0 \\
 -\theta_2(x, y) - e\partial_1^x \eta_2(x, y) &= 0 \\
 -\theta_3(x, y) - e\partial_1^x \eta_3(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -\theta_4(x, y) - e\partial_1^x \eta_4(x, y) &= 0 \\
 -\theta_5(x, y) - e\partial_1^x \eta_5(x, y) &= 0 \\
 -\theta_6(x, y) - e\partial_1^x \eta_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.160}$$

e igualmente

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(x, y) + e\eta_1(x, y) &= 0 \\
 \gamma_2(x, y) + e\eta_2(x, y) &= 0 \\
 \gamma_3(x, y) + e\eta_3(x, y) &= 0 \\
 \gamma_4(x, y) + e\eta_4(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 \gamma_5(x, y) + e\eta_5(x, y) &= 0 \\
 \gamma_6(x, y) + e\eta_6(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.161}$$

De la misma forma, se tiene que

$$\begin{aligned}
 -e^2\alpha_1(x, y) - \partial_1^x \beta_1(x, y) - e\partial_1^x \gamma_1(x, y) - e\theta_1(x, y) &= 0 \\
 -e^2\alpha_2(x, y) - \partial_1^x \beta_2(x, y) - e\partial_1^x \gamma_2(x, y) - e\theta_2(x, y) &= 0 \\
 -e^2\alpha_3(x, y) - \partial_1^x \beta_3(x, y) - e\partial_1^x \gamma_3(x, y) - e\theta_3(x, y) &= 0 \\
 -e^2\alpha_4(x, y) - \partial_1^x \beta_4(x, y) - e\partial_1^x \gamma_4(x, y) - e\theta_4(x, y) &= 0 \\
 -e^2\alpha_5(x, y) - \partial_1^x \beta_5(x, y) - e\partial_1^x \gamma_5(x, y) - e\theta_5(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -e^2\alpha_6(x, y) - \partial_1^x \beta_6(x, y) - e\partial_1^x \gamma_6(x, y) - e\theta_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.162}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
 -\beta_1(x, y) &= 0 \\
 -\beta_2(x, y) &= 0 \\
 -\beta_3(x, y) &= 0 \\
 -\beta_4(x, y) &= 0 \\
 -\beta_5(x, y) &= 0 \\
 -\beta_6(x, y) &= \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{3.163}$$

De las relaciones anteriores, determinamos que para β

$$\beta_6(x, y) = -\delta^3(x - y) \quad , \quad \beta_i(x, y) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3.164}$$

Ahora, para η se tiene que

$$\begin{aligned}
 \eta_1(x, y) &= \frac{1}{e^2} \delta^3(x - y) \quad , \quad \eta_6(x, y) = -\frac{1}{e^2} \delta^3(x - y), \\
 \eta_i(x, y) &= 0 \quad , \quad i = 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned} \tag{3.165}$$

A su vez para γ

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(x, y) &= -\frac{1}{e} \delta^3(x - y) \quad , \quad \gamma_4(x, y) = \delta^3(x - y) \\
 \gamma_6(x, y) &= \frac{1}{e} \delta^3(x - y) \quad , \quad \gamma_i(x, y) = 0 \quad , \quad i = 2, 3, 5.
 \end{aligned} \tag{3.166}$$

De igual forma para θ

$$\begin{aligned}
 \theta_1(x, y) &= -\frac{1}{e} \partial_1^x \delta^3(x - y) \quad , \quad \theta_3(x, y) = -\delta^3(x - y), \\
 \theta_6(x, y) &= \frac{1}{e} \partial_1^x \delta^3(x - y) \quad , \quad \theta_i(x, y) = 0 \quad , \quad i = 2, 4, 5.
 \end{aligned} \tag{3.167}$$

Para α

$$\begin{aligned}
 \alpha_2(x, y) &= 0 \quad , \quad \alpha_1(x, y) = \frac{2}{e^2} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 \alpha_3(x, y) &= \frac{1}{e} \delta^3(x - y) \quad , \quad \alpha_4(x, y) = -\frac{1}{e} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 \alpha_5(x, y) &= -\frac{1}{e^2} \delta^3(x - y) \quad , \quad \alpha_6(x, y) = -\frac{1}{e^2} \partial_1^x \delta^3(x - y),
 \end{aligned} \tag{3.168}$$

y por último, para κ se tiene que

$$\begin{aligned}
 \kappa_1(x, y) &= -\frac{1}{e^2} \partial_1^x \delta^3(x - y) \quad , \quad \kappa_2(x, y) = \delta^3(x - y), \\
 \kappa_3(x, y) &= -\frac{1}{e} \delta^3(x - y) \quad , \quad \kappa_4(x, y) = \frac{1}{e} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 \kappa_5(x, y) &= \frac{1}{e^2} \delta^3(x - y) \quad , \quad \kappa_6(x, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.169}$$

Con lo que se determina la inversa de la matriz simpléctica:

$$\left[M^{\text{CB}(2)} \right]^{-1} (x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{e^2} \partial_1^x & 0 & \frac{1}{e} & -\frac{1}{e} \partial_1^x & -\frac{1}{e^2} & -\frac{1}{e^2} \partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{e} & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{e} \\ -\frac{1}{e} \partial_1^x & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{e} \partial_1^x \\ \frac{1}{e^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{e^2} \\ -\frac{1}{e^2} \partial_1^x & 1 & -\frac{1}{e} & \frac{1}{e} \partial_1^x & \frac{1}{e^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (3.170)$$

Finalmente, de esta matriz conseguimos los corchetes generalizados para el caso $\alpha = 1$ del conjunto de variables $\xi_k^{(1)} = (A_1, \Pi^1, \phi, \Pi_\phi, A_0, \lambda)$, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \left\{ \xi_{A_1}^{(1)}(x), \xi_{A_1}^{(1)}(y) \right\} &= \{A_1(x), A_1(y)\} = \frac{2}{e^2} \partial_1^x \delta^3(x - y) \\ \left\{ \xi_{A_1}^{(1)}(x), \xi_\phi^{(1)}(y) \right\} &= \{A_1(x), \phi(y)\} = \frac{1}{e} \delta^3(x - y) \\ \left\{ \xi_{A_1}^{(1)}(x), \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(y) \right\} &= \{A_1(x), \Pi_\phi(y)\} = -\frac{1}{e} \partial_1^x \delta^3(x - y) \\ \left\{ \xi_\phi^{(1)}(x), \xi_{\Pi_\phi}^{(1)}(y) \right\} &= \{\phi(x), \Pi_\phi(y)\} = \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (3.171)$$

3.5. Campo Electromagnético en las Coordenadas de Instante Forma

Consideremos ahora el formalismo aplicado a una teoría gauge abeliana, aun cuando el método también puede extenderse a una teoría no abeliana. Para este propósito, tomaremos el problema de la teoría electromagnética, la cual es descrita por la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \quad (3.172)$$

que, con la ayuda del momento canónico

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0} \quad \Rightarrow \quad \Pi^k = F^{k0} = F_{0k} = \partial_0 A_k - \partial_k A_0, \quad (3.173)$$

se puede expresar en la forma

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{1}{2} F^{k0} F^{k0} - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} = \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \quad (3.174)$$

Si introducimos el siguiente cero en la relación anterior

$$\dot{A}_k \Pi^k - \dot{A}_k \Pi^k = \dot{A}_k \Pi^k - \partial_0 A_k \Pi^k = \dot{A}_k \Pi^k - (\Pi^k + \partial_k A_0) \Pi^k \quad (3.175)$$

$$= \dot{A}_k \Pi^k - \Pi^k \Pi^k - \Pi^k \partial_k A_0, \quad (3.176)$$

se obtendrá que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(0)} &= \dot{A}_k \Pi^k - \Pi^k \Pi^k - \Pi^k \partial_k \mathcal{A}_0 + \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \\
 &= \dot{A}_k \Pi^k - \Pi^k \partial_k \mathcal{A}_0 - \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \\
 &= \dot{A}_k \Pi^k - \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \mathcal{A}_0 \partial_k \Pi^k - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \\
 &= \dot{A}_k \Pi^k - \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \mathcal{A}_0 \partial_k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right].
 \end{aligned} \tag{3.177}$$

De esta manera, el primer Lagrangiano en el proceso de iteración es:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^k \dot{A}_k - \mathcal{H}^{(0)}, \tag{3.178}$$

donde se ha definido el potencial simpléctico en la forma

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \mathcal{A}_0 \partial_k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \tag{3.179}$$

El conjunto inicial de variables simpléctica es $\xi_k^{(0)} = (A_i, \Pi^i, \mathcal{A}_0)$, con lo que podremos identificar las siguientes cantidades

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{\mathcal{A}_0}^{(0)} \rightarrow 0, \tag{3.180}$$

a partir del cual podemos definir, a su vez, la siguiente matriz:

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_A^{(0)}(x)} - \frac{\delta K_A^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)}, \tag{3.181}$$

la cual posee las componentes

$$\begin{aligned}
 M_{A_i, \Pi^j}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(x)}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(y)} = -\frac{\delta \Pi^i(x)}{\delta \Pi^j(y)} = -\eta_j^i \delta^3(x-y), \\
 M_{A_i, \mathcal{A}_0}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\mathcal{A}_0}^{(0)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(x)}{\delta \xi_{\mathcal{A}_0}^{(0)}(y)} = 0, \\
 M_{\Pi^i, \mathcal{A}_0}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\mathcal{A}_0}^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(x)}{\delta \xi_{\mathcal{A}_0}^{(0)}(y)} = 0.
 \end{aligned} \tag{3.182}$$

De esta manera, la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(x, y)$ adquiere la siguiente forma:

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \eta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_j^i \delta^3(x-y), \tag{3.183}$$

la cual es singular con un autovalor cero al que le corresponde el autovector

$$\tilde{v}^{A(0)}(x) = (0 \ 0 \ v^{\mathcal{A}_0}(x)), \tag{3.184}$$

donde $v^{\Lambda_0}(\mathbf{x})$ es una función completamente arbitraria. En cuanto al vínculo asociado a este autovector, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{\Lambda_0} \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda_0}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}) \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}) \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_0}(\mathbf{x}) \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) = 0.
 \end{aligned}$$

Ahora, debido a que la función $v^{\Lambda_0}(\mathbf{x})$ es completamente arbitraria, se puede escoger como vínculo Lagrangiano la relación

$$\Omega^{(0)} = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.185)$$

Nuevamente, el primer Lagrangiano en el proceso de iteración se obtiene adicionando este vínculo a la parte canónica de $\mathcal{L}^{(0)}$, con lo que se obtendrá

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_k \Pi^k + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (3.186)$$

donde

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \quad (3.187)$$

Si introducimos la nueva variable simpléctica $\xi_k^{(1)} = (A_i, \Pi^i, A_0, \lambda)$, podemos identificar las correspondientes componentes de la uno forma canónica. Sin embargo, dado que en $\mathcal{H}^{(1)}$ la variable A_0 ha desaparecido de tal manera que $\mathcal{L}^{(1)}$ ya no dependerá de ella, la variable simpléctica tendrá únicamente las componentes $\xi_k^{(1)} = (A_i, \Pi^i, \lambda)$. Así, obtenemos:

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \Omega^{(0)} = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}), \quad (3.188)$$

con lo cual podremos calcular la matriz

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \quad (3.189)$$

con las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}
 M_{\Lambda_i, \Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Lambda_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Lambda_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^i(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Lambda_i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Lambda_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Lambda_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = 0, \\
 M_{\Pi^i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left(\partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}) \right) \\
 &= \partial_k^y \frac{\delta \Pi^k(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_i^k \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\lambda, \Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\partial_k^x \frac{\delta \Pi^k(\mathbf{x})}{\delta \Pi^i(\mathbf{y})} \\
 &= -\eta_j^k \partial_k^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{3.190}
 \end{aligned}$$

Y con ello podemos determinar las siguientes componentes para los dos forma

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ 0 & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{3.191}$$

En analogía con lo que ocurre en la formulación de Dirac, esta matriz es singular, y su vector nulo se calcula asumiendo que este tiene la forma

$$\tilde{\nu}^{A(1)}(\mathbf{x}) = \left(\alpha(\mathbf{x}) \quad \beta(\mathbf{x}) \quad \gamma(\mathbf{x}) \right) \tag{3.192}$$

y que satisface la relación

$$\begin{aligned}
 \int d^3x \tilde{\nu}^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \int d^3x \left(\alpha(\mathbf{x}) \quad \beta(\mathbf{x}) \quad \gamma(\mathbf{x}) \right) \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ 0 & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \int d^3x \left(\alpha(\mathbf{x}) \quad \beta(\mathbf{x}) \quad \gamma(\mathbf{x}) \right) \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \eta_j^i & 0 & \partial_i^y \\ 0 & \partial_j^y & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \int d^3x \left(\beta(\mathbf{x}) \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. -\eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \alpha(\mathbf{x}) + \gamma(\mathbf{x}) \partial_j^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \beta(\mathbf{x}) \partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\
 &= \left(\eta_j^i \beta(\mathbf{y}) \quad -\eta_j^i \alpha(\mathbf{y}) + \partial_j^y \gamma(\mathbf{y}) \quad \partial_i^y \beta(\mathbf{y}) \right) \\
 &= \left(0 \quad 0 \quad 0 \right). \tag{3.193}
 \end{aligned}$$

Lo anterior se garantiza si

$$\begin{aligned}
 \eta_j^i \beta(y) &= 0 \\
 -\eta_j^i \alpha(y) + \partial_j^y \gamma(y) &= 0 \\
 \partial_i^y \beta(y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.194}$$

implicando que

$$\beta(x) = 0 \quad , \quad \alpha_i(x) = \partial_i^x \gamma(x), \tag{3.195}$$

donde γ es arbitrario e indeterminado. Así, el auto-vector con autovalor nulo deberá ser de la forma

$$\tilde{v}^{A(1)}(x) = \left(\partial_i^x \gamma(x) \quad 0 \quad \gamma(x) \right). \tag{3.196}$$

De esta manera, si existe un vínculo adicional, este deberá satisfacer la siguiente identidad:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} &= \int d^3x \tilde{v}^{A(1)} \frac{\delta}{\delta \xi_{A_i}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)} \\
 &= \int d^3x \tilde{v}_{\lambda_i}^{(1)} \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda_i}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)} + \int d^3x \tilde{v}_{\lambda}^{(1)} \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)} \\
 &= \int d^3x \partial_i^x \gamma(x) \frac{\delta}{\delta A_i(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)} + \int d^3x \gamma(x) \frac{\delta}{\delta \lambda(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)} \\
 &= \int d^3x \partial_i^x \gamma(x) \frac{\delta}{\delta A_i(x)} \int d^3y \left[\frac{1}{4} F_{kl}(y) F_{kl}(x) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma(x) \int d^3y F_{kl}(y) \left[\partial_k^y \frac{\delta A_l(y)}{\delta A_i(x)} - \partial_l^y \frac{\delta A_k(y)}{\delta A_i(x)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma(x) \int d^3y F_{kl}(y) \left[\eta_l^i \partial_k^y - \eta_k^i \partial_l^y \right] \delta^3(x-y) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma(x) \int d^3y F_{kl}(y) \left[\eta_l^i \partial_k^x - \eta_k^i \partial_l^x \right] \delta^3(x-y) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma(x) \left[\eta_l^i \partial_k^x - \eta_k^i \partial_l^x \right] F_{kl}(x) \\
 &= -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\partial_l^x \gamma(x) \partial_k^x F_{kl}(x) - \partial_k^x \gamma(x) \partial_l^x F_{kl}(x) \right].
 \end{aligned}$$

Ahora, integrando por partes en la última relación, se obtendrá que:

$$\Omega^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3x \gamma(x) \left[\partial_l^x \partial_k^x F_{kl}(x) - \partial_k^x \partial_l^x F_{kl}(x) \right] = 0. \tag{3.197}$$

Este resultado indica que el modo cero no dará un nuevo vínculo Lagrangiano, lo que implica que la matriz simpléctica continua siendo singular. Esto es característica de la teoría de Maxwell, que se comporta como una teoría gauge. Con el fin de obtener una matriz simpléctica no singular, se deberá adicionar un término de gauge fixing al potencial simpléctico, y para ello se escogerá el gauge de Coulomb $\Theta = \partial_k A_k(x) = 0$. Al aplicar la

condición de consistencia por medio del multiplicador de Lagrange $\eta(x)$, lo cual aumentará la dimensión del espacio de configuración, obtendremos el segundo Lagrangiano iterativo:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \Pi^k \dot{A}_k + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)}, \quad (3.198)$$

con

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \quad (3.199)$$

Considerando que la nueva variable simpléctica es $\xi_k^{(2)} = (A_i, \Pi^i, \lambda, \eta)$, se puede identificar

$$K_{A_i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(2)} \rightarrow 0, \quad K_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \Omega^{(0)} = \partial_k^x \Pi^k(x), \quad K_{\eta}^{(2)} \rightarrow \Theta = \partial_k A_k(x), \quad (3.200)$$

y con ello podremos calcular la matriz

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(2)}(y)}{\delta \xi_A^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_A^{(2)}(x)}{\delta \xi_B^{(2)}(y)} \quad (3.201)$$

con las siguientes componentes:

$$\begin{aligned} M_{A_i, \Pi^j}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(y)} = -\frac{\delta \Pi^i(x)}{\delta \Pi^j(y)} = -\eta_j^i \delta^3(x-y), \\ M_{A_i, \lambda}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(y)} = 0 \\ M_{A_i, \eta}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\eta}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\eta}^{(2)}(y)} = \partial_k^y \frac{\delta A_k(y)}{\delta A_i(x)} = \eta_k^i \partial_k^y \delta^3(x-y) \\ &= -\partial_i^x \delta^3(x-y), \\ M_{\Pi^i, \lambda}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(y)} = \partial_k^y \frac{\delta \Pi^k(y)}{\delta \Pi^i(x)} = \eta_i^k \partial_k^y \delta^3(x-y) \\ &= -\partial_i^x \delta^3(x-y), \\ M_{\Pi^i, \eta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\eta}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\eta}^{(2)}(y)} = 0 \\ M_{\lambda, \Pi^j}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(y)} = -\partial_k^x \frac{\delta \Pi^k(x)}{\delta \Pi^j(y)} = -\eta_j^k \partial_k^x \delta^3(x-y) \\ &= -\partial_j^x \delta^3(x-y), \\ M_{\eta, A_j}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\eta}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\eta}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(y)} = -\partial_k^x \frac{\delta A_k(x)}{\delta A_j(y)} = -\eta_k^j \partial_k^x \delta^3(x-y) \\ &= -\partial_j^x \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Luego de esto, se obtendrá la estructura matricial de

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (3.202)$$

que en forma extensa se debe expresar como:

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\partial_2^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\partial_3^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_3^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x & -\partial_2^x & -\partial_3^x & 0 & 0 \\ -\partial_1^x & -\partial_2^x & -\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (3.203)$$

Dado que esta matriz no es singular, pasamos a calcular su inversa, la cual deberá satisfacer que

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(x, z) [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \delta_A^B \delta^3(x - y), \quad (3.204)$$

con las siguientes componentes:

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 \end{pmatrix}, \quad (3.205)$$

siendo cada uno de estos elementos funciones de las variables (x, y) . De esta manera, se tendrá que:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(x, z) [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\partial_2^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -\partial_3^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_2^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\partial_3^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_1^x & -\partial_2^x & -\partial_3^x & 0 & 0 \\ -\partial_1^x & -\partial_2^x & -\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & B_7 & B_8 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 & C_6 & C_7 & C_8 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 & D_6 & D_7 & D_8 \\ E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 & E_7 & E_8 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & G_5 & G_6 & G_7 & G_8 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & H_6 & H_7 & H_8 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
 \end{aligned}$$

a partir de la cual derivamos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 -D_1 - \partial_1^x H_1 &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 -D_2 - \partial_1^x H_2 &= 0, \\
 -D_3 - \partial_1^x H_3 &= 0, \\
 -D_4 - \partial_1^x H_4 &= 0, \\
 -D_5 - \partial_1^x H_5 &= 0, \\
 -D_6 - \partial_1^x H_6 &= 0, \\
 -D_7 - \partial_1^x H_7 &= 0, \\
 -D_8 - \partial_1^x H_8 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.206}$$

así como

$$\begin{aligned}
 -E_1 - \partial_2^x H_1 &= 0, \\
 -E_2 - \partial_2^x H_2 &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 -E_3 - \partial_2^x H_3 &= 0, \\
 -E_4 - \partial_2^x H_4 &= 0, \\
 -E_5 - \partial_2^x H_5 &= 0, \\
 -E_6 - \partial_2^x H_6 &= 0, \\
 -E_7 - \partial_2^x H_7 &= 0, \\
 -E_8 - \partial_2^x H_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.207}$$

De igual manera, encontramos:

$$\begin{aligned}
 -F_1 - \partial_3^x H_1 &= 0, \\
 -F_2 - \partial_3^x H_2 &= 0, \\
 -F_3 - \partial_3^x H_3 &= \delta^3 (x - y), \\
 -F_4 - \partial_3^x H_4 &= 0, \\
 -F_5 - \partial_3^x H_5 &= 0, \\
 -F_6 - \partial_3^x H_6 &= 0, \\
 -F_7 - \partial_3^x H_7 &= 0, \\
 -F_8 - \partial_3^x H_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.208}$$

Además, las ecuaciones para A son:

$$\begin{aligned}
 A_1 - \partial_1^x G_1 &= 0, \\
 A_2 - \partial_1^x G_2 &= 0, \\
 A_3 - \partial_1^x G_3 &= 0, \\
 A_4 - \partial_1^x G_4 &= \delta^3 (x - y), \\
 A_5 - \partial_1^x G_5 &= 0, \\
 A_6 - \partial_1^x G_6 &= 0, \\
 A_7 - \partial_1^x G_7 &= 0, \\
 A_8 - \partial_1^x G_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.209}$$

Asimismo, para las componentes B :

$$\begin{aligned}
 B_1 - \partial_2^x G_1 &= 0, \\
 B_2 - \partial_2^x G_2 &= 0, \\
 B_3 - \partial_2^x G_3 &= 0, \\
 B_4 - \partial_2^x G_4 &= 0, \\
 B_5 - \partial_2^x G_5 &= \delta^3 (x - y), \\
 B_6 - \partial_2^x G_6 &= 0, \\
 B_7 - \partial_2^x G_7 &= 0, \\
 B_8 - \partial_2^x G_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.210}$$

Al igual que para C:

$$\begin{aligned}
 C_1 - \partial_3^x G_1 &= 0, \\
 C_2 - \partial_3^x G_2 &= 0, \\
 C_3 - \partial_3^x G_3 &= 0, \\
 C_4 - \partial_3^x G_4 &= 0, \\
 C_5 - \partial_3^x G_5 &= 0, \\
 C_6 - \partial_3^x G_6 &= \delta^3(x-y), \\
 C_7 - \partial_3^x G_7 &= 0, \\
 C_8 - \partial_3^x G_8 &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.211}$$

Finalmente tenemos:

$$\begin{aligned}
 -\partial_1^x D_1 - \partial_2^x E_1 - \partial_3^x F_1 &= 0, \\
 -\partial_1^x D_2 - \partial_2^x E_2 - \partial_3^x F_2 &= 0, \\
 -\partial_1^x D_3 - \partial_2^x E_3 - \partial_3^x F_3 &= 0, \\
 -\partial_1^x D_4 - \partial_2^x E_4 - \partial_3^x F_4 &= 0, \\
 -\partial_1^x D_5 - \partial_2^x E_5 - \partial_3^x F_5 &= 0, \\
 -\partial_1^x D_6 - \partial_2^x E_6 - \partial_3^x F_6 &= 0, \\
 -\partial_1^x D_7 - \partial_2^x E_7 - \partial_3^x F_7 &= \delta^3(x-y), \\
 -\partial_1^x D_8 - \partial_2^x E_8 - \partial_3^x F_8 &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.212}$$

Y, de la misma manera:

$$\begin{aligned}
 -\partial_1^x A_1 - \partial_2^x B_1 - \partial_3^x C_1 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_2 - \partial_2^x B_2 - \partial_3^x C_2 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_3 - \partial_2^x B_3 - \partial_3^x C_3 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_4 - \partial_2^x B_4 - \partial_3^x C_4 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_5 - \partial_2^x B_5 - \partial_3^x C_5 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_6 - \partial_2^x B_6 - \partial_3^x C_6 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_7 - \partial_2^x B_7 - \partial_3^x C_7 &= 0, \\
 -\partial_1^x A_8 - \partial_2^x B_8 - \partial_3^x C_8 &= \delta^3(x-y).
 \end{aligned} \tag{3.213}$$

Resolviendo el anterior sistema de ecuaciones, se determina finalmente que la inversa de la

forma de primer orden, lo que permite identificar directamente la estructura simpléctica del sistema.

Uno de los resultados más relevantes es que los vínculos surgen de forma natural a partir de la degeneración de la matriz simpléctica, sin necesidad de introducir una clasificación jerárquica entre vínculos primarios, secundarios, de primera o de segunda clase. Esta característica simplifica considerablemente el análisis, especialmente en teorías de campos donde el número de vínculos puede ser elevado.

El capítulo también evidenció que el formalismo de Faddeev-Jackiw proporciona una interpretación clara de los multiplicadores de Lagrange como variables simplécticas adicionales, lo que permite una descripción unificada de la dinámica sobre la variedad de vínculos. Además, se destacó la relación directa entre la inversa de la matriz simpléctica y los corchetes generalizados del sistema.

En conjunto, se concluye que el método de Faddeev-Jackiw constituye una herramienta poderosa, eficiente y conceptualmente transparente para el estudio de sistemas con vínculos, siendo particularmente adecuado para su aplicación en teorías de gauge formuladas en coordenadas no convencionales

Bibliografía

- [1] L. Faddeev and R. Jackiw, “Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems”, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 60, no. 17, pp. 1692-1694, 1988.
- [2] P. J. Oliver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. New York, NY, USA: Springer-Verlag, 1996.
- [3] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*. New York, NY, USA: Yeshiva Univ., 1964.
- [4] K. Sundermeyer, “Constrained Dynamics: with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model”, *Lect. Notes Phys.*, vol. 169, Berlin, Heidelberg New York: Springer, 1982.
- [5] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*. Roma: Acc. Naz. dei Lincei, 1976.
- [6] H. Goldstein, *Classical Mechanics*, 2nd ed. Reading, MA, USA: Addison-Wesley, 1980.
- [7] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, “Symplectic Quantization of Constrained Systems”, *Mod. Phys. Lett.A*, vol. 7, no. 19, pp. 1737-1747, 1992.
- [8] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, “Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints”, *Mod. Phys. Lett.A*, vol. 7, no. 20, pp. 4981-5003, 1992.
- [9] H. Montani and C. Wotzasek, “Faddeev-Jackiw quantization of nonabelian systems”, *Mod. Phys. Lett.A*, 8, pp. 3387-3396, 1993.
- [10] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron and O. S. Zandron, “Nonlinear Sigma Model in the Faddeev-Jackiw Quantization Formalism”, *Int. J. Mod. Phys.*, vol. 36, no. 12, pp. 2923–2935, 1997.
- [11] M. B. Halpern, “Equivalent-boson method and free currents in two-dimensional gauge theories”, *Phys. Rev. D*, vol. 13, pp. 337–342, 1976.

Capítulo 4

Campos Clásicos en las Coordenadas de Plano Nulo

4.1. Campo Electromagnético

Iniciemos nuestro estudio con el campo electromagnético libre. La densidad Lagrangiana asociada a esta teoría, expresada en coordenadas de plano nulo, se presenta como:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(0)} &= -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4}F_{+\beta}F^{+\beta} - \frac{1}{4}F_{-\beta}F^{-\beta} - \frac{1}{4}F_{k\beta}F^{k\beta} \\ &= -\frac{1}{4}F_{+-}F^{+-} - \frac{1}{4}F_{+k}F^{+k} - \frac{1}{4}F_{-+}F^{-+} - \frac{1}{4}F_{-k}F^{-k} \\ &\quad - \frac{1}{4}F_{k+}F^{k+} - \frac{1}{4}F_{k-}F^{k-} - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} \\ &= \frac{1}{4}F_{+-}F_{+-} + \frac{1}{4}F_{+k}F_{-k} + \frac{1}{4}F_{+-}F_{+-} + \frac{1}{4}F_{-k}F_{+k} \\ &\quad + \frac{1}{4}F_{k+}F_{k-} + \frac{1}{4}F_{k-}F_{k+} - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} \\ &= \frac{1}{2}F_{+-}F_{+-} + F_{+k}F_{-k} - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl}.\end{aligned}$$

A partir de la siguiente relación

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\left[F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right] = -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} \\ &= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\left[\frac{\partial(\partial_{\alpha}A_{\beta})}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})} - \frac{\partial(\partial_{\beta}A_{\alpha})}{\partial(\partial_{\mu}A_{\nu})}\right] = -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}\left(\delta_{\alpha}^{\mu}\delta_{\beta}^{\nu} - \delta_{\beta}^{\mu}\delta_{\alpha}^{\nu}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left[F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}\right] = F^{\nu\mu},\end{aligned}$$

es posible deducir el momento canónico conjugado al campo electromagnético como:

$$\Pi^{\nu} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_{+}A_{\nu})} = F^{\nu+}.$$

A partir de esta expresión, se deducen las siguientes componentes:

$$\begin{aligned}\Pi^+ &= 0, \\ \Pi^- &= F^{-+} = F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+, \\ \Pi^k &= F^{k+} = F_{-k} = \partial_- A_k - \partial_k A_-.\end{aligned}$$

Por su lado, el Hamiltoniano en las coordenadas de plano nulo se expresa como:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(0)} &= \Pi^\mu \partial_+ A_\mu - \mathcal{L}^{(0)} \\ &= \Pi^+ \partial_+ A_+ + \Pi^- \partial_+ A_- + \Pi^k \partial_+ A_k - \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- - \Pi^k \partial_+ A_k \\ &\quad + \Pi^k \partial_k A_+ + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \\ &= \Pi^- (\Pi^- + \partial_- A_+) - \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- + \Pi^k \partial_k A_+ + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \\ &= \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- + \Pi^- \partial_- A_+ + (\partial_- A_k - \partial_k A_-) \partial_k A_+ + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano puede expresarse como:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^- \partial_+ A_- + (\partial_- A_k - \partial_k A_-) \partial_+ A_k - \mathcal{H}^{(0)},\quad (4.2)$$

donde se ha identificado el potencial ético $\mathcal{H}^{(0)}$ mediante la relación (4.1). Tanto de la relación anterior como del Hamiltoniano canónico se establece que el conjunto inicial de variables simplécticas es: $\xi_k^{(0)} = (A_+, A_-, A_i, \Pi^-)$. Así, es posible identificar, inicialmente, las siguientes cantidades:

$$K_{A_+}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_-}^{(0)} \rightarrow \Pi^-, \quad K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i = \partial_- A_i - \partial_i A_-, \quad K_{\Pi^-}^{(0)} \rightarrow 0.\quad (4.3)$$

Con las cuales podemos definir la matriz

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}.$$

De la relación anterior es posible establecer los siguientes elementos diferentes de cero

$$\begin{aligned}M_{A_+, B}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_+}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_+}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})} = 0, \\ M_{A_-, \Pi^-}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_-}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_-}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^-(\mathbf{x})}{\delta \Pi^-(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{A_- A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_-}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_-}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \partial_j^y A_-(\mathbf{y})}{\delta A_-(\mathbf{x})} = -\partial_j^y \frac{\delta A_-(\mathbf{y})}{\delta A_-(\mathbf{x})} \\ &= -\partial_j^y \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\Lambda_i \Lambda_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Lambda_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Lambda_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Lambda_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Lambda_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \partial_-^y \Lambda_j(\mathbf{y})}{\delta \Lambda_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \partial_-^x \Lambda_i(\mathbf{x})}{\delta \Lambda_j(\mathbf{y})} \\
 &= \partial_-^y \frac{\delta \Lambda_j(\mathbf{y})}{\delta \Lambda_i(\mathbf{x})} - \partial_-^x \frac{\delta \Lambda_i(\mathbf{x})}{\delta \Lambda_j(\mathbf{y})}, = \delta_j^i \partial_-^y \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \delta_i^j \partial_-^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -2\delta_j^i \partial_-^x \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}), \\
 M_{\Lambda_i \Lambda_-}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Lambda_-}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Lambda_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Lambda_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Lambda_-}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta(\partial_i^x \Lambda_-(\mathbf{x}))}{\delta \Lambda_-(\mathbf{y})} = \partial_i^x \frac{\delta \Lambda_-(\mathbf{x})}{\delta \Lambda_-(\mathbf{y})} \\
 &= \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\Pi^-, \Lambda_-}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Lambda_-}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Lambda_-}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^-(\mathbf{y})}{\delta \Pi^-(\mathbf{x})} = \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
 \end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top),$$

y

$$d^3x \equiv dx^- d^2x^\top.$$

De esta manera, la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ posee la representación matricial que se expresa a continuación:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_+(\mathbf{y}) & A_-(\mathbf{y}) & A_j(\mathbf{y}) & \Pi^-(\mathbf{y}) \\ A_+(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_-(\mathbf{x}) & 0 & 0 & \partial_j^x & -1 \\ A_i(\mathbf{x}) & 0 & \partial_i^x & -2\delta_j^i \partial_-^x & 0 \\ \Pi^-(\mathbf{x}) & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Fácilmente es posible verificar que es singular y que a su autovalor cero le corresponde el siguiente autovector:

$$\tilde{v}^{A(0)}(\mathbf{x}) = (v^{A_+}(\mathbf{x}) \ 0 \ 0 \ 0 \ 0),$$

donde $v^{A_0}(\mathbf{x})$ es una función completamente arbitraria. El vínculo asociado a este autovector se deduce se como:

$$\Omega^{(0)} = \int d^3x \tilde{v}^{A(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x v^{A_+}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda_+}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3x v^{\Lambda_+}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_+(\mathbf{x})} \int d^3y \left[\frac{1}{2} \Pi^-(\mathbf{y}) \Pi^-(\mathbf{y}) + \Pi^-(\mathbf{y}) \partial_-^y A_+(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. + \Pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^y A_+(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right] \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda_+}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^-(\mathbf{y}) \partial_-^y \frac{\delta A_+(\mathbf{y})}{\delta A_+(\mathbf{x})} + \Pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^y \frac{\delta A_+(\mathbf{y})}{\delta A_+(\mathbf{x})} \right] \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda_+}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^-(\mathbf{y}) \underbrace{\partial_-^y}_{-\partial_-^x} \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}) + \Pi^k(\mathbf{y}) \underbrace{\partial_k^y}_{-\partial_k^x} \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \right] \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_+}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^-(\mathbf{y}) \partial_-^x + \Pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^x \right] \delta^3(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda_+}(\mathbf{x}) \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) + \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de la función $v^{\Lambda_+}(\mathbf{x})$, se puede escoger la siguiente expresión como vínculo Lagrangiano:

$$\Omega^{(0)} = \partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) + \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) = \partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) + \partial_k^x (\partial_-^x A_k(\mathbf{x}) - \partial_k^x A_-(\mathbf{x})) = 0, \quad (4.4)$$

el cual deberá adicionarse al sector canónico del Lagrangiano. Además, el primer Lagrangiano en el proceso de iteración se obtiene adicionando este vínculo a la parte canónica de $\mathcal{L}^{(0)}$, resultando en

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^- \partial_+ A_- + (\partial_-^x A_k(\mathbf{x}) - \partial_k^x A_-(\mathbf{x})) \partial_+ A_k + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (4.5)$$

donde se ha definido que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (4.6)$$

El potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(0)}$, a menos de un término de frontera, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- - A_+ \left[\partial_-^x \Pi^- + \partial_k^x \Pi^k \right] + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl},$$

de manera que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \quad (4.7)$$

Ahora, vamos a introducir el nuevo conjunto de variables simplécticas $\xi_k^{(1)}$. Teniendo en cuenta que en $\mathcal{H}^{(1)}$ la variable A_+ ha desaparecido, de tal manera que $\mathcal{L}^{(1)}$ ya no dependerá de ella, la variable simpléctica tendrá únicamente las componentes $\xi_k^{(1)} = (A_-, A_i, \Pi^-, \lambda)$, con lo que a su vez identificamos las componentes de la uno forma canónica:

$$\begin{aligned}
 K_{A_-}^{(1)} &\rightarrow \Pi^- \quad , \quad K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i = \partial_- A_i - \partial_i A_- \quad , \quad K_{\Pi^-}^{(1)} \rightarrow 0, \\
 K_{\lambda}^{(1)} &\rightarrow \Omega^{(0)} = \partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) + \partial_k^x (\partial_-^x A_k(\mathbf{x}) - \partial_k^x A_-(\mathbf{x})).
 \end{aligned}$$

Así, se puede introducir la siguiente matriz:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}, \quad (4.8)$$

con las componentes diferentes de cero dadas por:

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_-, \Pi^-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_-}^{(0)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda_-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(y)} = -\frac{\delta \Pi^-(x)}{\delta \Pi^-(y)} = -\delta^3(x-y) \\
 M_{\lambda_- \lambda_j}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_j}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_-}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda_-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda_j}^{(1)}(y)} = -\frac{\delta \partial_j^y A_-(y)}{\delta A_-(x)} = -\partial_j^y \frac{\delta A_-(y)}{\delta A_-(x)} \\
 &= -\partial_j^y \delta^3(y-x) = \partial_j^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda_- \lambda}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_-}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda_-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(y)} = -\frac{\delta(\partial_k^y \partial_k^y A_-(y))}{\delta A_-(x)} = -\partial_k^y \partial_k^y \frac{\delta A_-(y)}{\delta A_-(x)} \\
 &= -\partial_k^y \partial_k^y \delta^3(y-x) = -\partial_k^x \partial_k^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda_i \lambda_j}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_j}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_i}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda_i}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda_j}^{(1)}(y)} = \frac{\delta \partial_j^y A_j(y)}{\delta A_i(x)} - \frac{\delta \partial_i^x A_i(x)}{\delta A_j(y)} \\
 &= \partial_j^y \frac{\delta A_j(y)}{\delta A_i(x)} - \partial_i^x \frac{\delta A_i(x)}{\delta A_j(y)} = \delta_j^i \partial_j^y \delta^3(y-x) - \delta_i^j \partial_i^x \delta^3(x-y) \\
 &= -2\delta_j^i \partial_i^x \delta^3(y-x), \\
 M_{\lambda_i \lambda_-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_i}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda_i}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda_-}^{(1)}(y)} = \frac{\delta(\partial_i^x A_-(x))}{\delta A_-(y)} = \partial_i^x \frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} \\
 &= \partial_i^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda_i \lambda}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_i}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda_i}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(y)} = \frac{\delta(\partial_k^y \partial_k^y A_k(y))}{\delta A_i(x)} = \partial_k^y \partial_k^y \frac{\delta A_k(y)}{\delta A_i(x)} \\
 &= \delta_k^i \partial_k^y \partial_k^y \delta^3(y-x) = \partial_i^x \partial_i^x \delta^3(y-x), \\
 M_{\Pi^-, \lambda_-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda_-}^{(1)}(y)} = \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \Pi^-(x)} = \delta^3(y-x) = \delta^3(x-y), \\
 M_{\Pi^- \lambda}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(y)} = \frac{\delta(\partial_j^y \Pi^-(y))}{\delta \Pi^-(x)} = \partial_j^y \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \Pi^-(x)} \\
 &= \partial_j^y \delta^3(y-x) = -\partial_j^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda \lambda_-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda_-}^{(1)}(y)} = \frac{\delta(\partial_k^x \partial_k^x A_-(x))}{\delta A_-(y)} = \partial_k^x \partial_k^x \frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} \\
 &= \partial_k^x \partial_k^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda \lambda_j}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_j}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\lambda_j}^{(1)}(y)} = -\frac{\delta(\partial_k^x \partial_k^x A_k(x))}{\delta A_j(y)} = -\partial_k^x \partial_k^x \frac{\delta A_k(x)}{\delta A_j(y)} \\
 &= -\delta_k^j \partial_k^x \partial_k^x \delta^3(x-y) = -\partial_j^x \partial_j^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda \Pi^-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(1)}(y)} = -\frac{\delta(\partial_j^x \Pi^-(x))}{\delta \Pi^-(y)} = -\partial_j^x \frac{\delta \Pi^-(x)}{\delta \Pi^-(y)} \\
 &= -\partial_j^x \delta^3(x-y).
 \end{aligned}$$

Entonces, se determina que $M_{AB}^{(1)}(x, y)$ se representa por la matriz:

$$M_{AB}^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix} A_-(y) & A_j(y) & \Pi^-(y) & \lambda(y) \\ A_-(x) & 0 & \partial_j^x & -1 & -\partial_k^x \partial_k^x \\ A_i(x) & \partial_i^x & -2\delta_j^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x \\ \Pi^-(x) & 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x \\ \lambda(x) & \partial_k^x \partial_k^x & -\partial_j^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.9)$$

Ahora mostraremos que, al igual con lo que ocurre en la formulación de Dirac, esta matriz es singular. Para ello, se propone que (4.9) posee un autovalor nulo y que el autovector correspondiente se calcula asumiendo que tiene la siguiente forma:

$$\tilde{v}^{\Lambda(1)}(x) = \begin{pmatrix} A_-(x) & A_j(x) & \Pi^-(x) & \lambda(x) \\ \alpha_1(x) & \alpha_{2_i}(x) & \alpha_3(x) & \alpha_4(x) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde $\alpha_i(x)$ corresponde a las funciones arbitrarias y desconocidas. Dado que la expresión (4.10) debe satisfacer que

$$\int d^3x \tilde{v}^{\Lambda(1)}(x) M_{AB}^{(1)}(x, y) = 0, \quad (4.11)$$

entonces,

$$\begin{aligned} & \int d^3x \tilde{v}^{\Lambda(1)}(x) M_{AB}^{(1)}(x, y) \\ &= \int d^3x \begin{pmatrix} \alpha_1(x) & \alpha_{2_i}(x) & \alpha_3(x) & \alpha_4(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \partial_j^x & -1 & -\partial_k^x \partial_k^x \\ \partial_i^x & -2\delta_j^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x \\ 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x \\ \partial_k^x \partial_k^x & -\partial_j^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) \\ &= \int d^3x \begin{pmatrix} \alpha_{2_i}(x) \partial_i^x + \alpha_4(x) \partial_k^x \partial_k^x & \alpha_1(x) \partial_j^x - 2\delta_j^i \alpha_{2_i}(x) \partial_-^x - \alpha_4(x) \partial_j^x \partial_-^x \\ -\alpha_1(x) - \alpha_4(x) \partial_-^x & -\alpha_1(x) \partial_k^x \partial_k^x + \alpha_{2_i}(x) \partial_i^x \partial_-^x - \alpha_3(x) \partial_-^x \end{pmatrix} \delta^3(x-y) \\ &= \int d^3x \begin{pmatrix} -\alpha_{2_i}(x) \partial_i^y + \alpha_4(x) \partial_k^y \partial_k^y & -\alpha_1(x) \partial_j^y + 2\alpha_{2_j}(x) \partial_-^y - \alpha_4(x) \partial_j^y \partial_-^y \\ -\alpha_1(x) + \alpha_4(x) \partial_-^y & -\alpha_1(x) \partial_k^y \partial_k^y + \alpha_{2_i}(x) \partial_i^y \partial_-^y + \alpha_3(x) \partial_-^y \end{pmatrix} \delta^3(x-y) \\ &= \begin{pmatrix} -\partial_i^y \alpha_{2_i}(y) + \partial_k^y \partial_k^y \alpha_4(y) & -\partial_j^y \alpha_1(y) + 2\partial_-^y \alpha_{2_j}(y) - \partial_j^y \partial_-^y \alpha_4(y) \\ -\alpha_1(y) + \partial_-^y \alpha_4(y) & -\partial_k^y \partial_k^y \alpha_1(y) + \partial_i^y \partial_-^y \alpha_{2_i}(y) + \partial_-^y \alpha_3(y) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Lo anterior se garantiza si se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} -\partial_k^y \alpha_{2_k}(y) + \partial_k^y \partial_k^y \alpha_4(y) &= 0, \\ -\partial_j^y \alpha_1(y) + 2\partial_-^y \alpha_{2_j}(y) - \partial_j^y \partial_-^y \alpha_4(y) &= 0, \\ -\alpha_1(y) + \partial_-^y \alpha_4(y) &= 0, \\ -\partial_k^y \partial_k^y \alpha_1(y) + \partial_k^y \partial_-^y \alpha_{2_k}(y) + \partial_-^y \alpha_3(y) &= 0. \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, se tiene que

$$\begin{aligned}\alpha_1(\mathbf{x}) &= \partial_-^x \alpha_4(\mathbf{x}) \quad , \quad \alpha_{2_k}(\mathbf{x}) = \partial_k^x \alpha_4(\mathbf{x}) \quad , \quad \alpha_3(\mathbf{x}) = 0, \\ \alpha_4(\mathbf{x}) &= \text{indeterminado},\end{aligned}$$

de manera que el autovector $\tilde{v}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x})$ se debe expresar como:

$$\tilde{v}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} A_-(\mathbf{x}) & A_j(\mathbf{x}) & \Pi^-(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) \\ \partial_-^x \alpha_4(\mathbf{x}) & \partial_j^x \alpha_4(\mathbf{x}) & 0 & \alpha_4(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Entonces, si existe un vínculo adicional, este deberá derivarse de la forma

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \int d^3x \tilde{v}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3x \tilde{v}_{A_-}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_-}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \tilde{v}_{A_j}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_j}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\lambda}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3x \partial_-^x \alpha_5(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_-(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^3x \alpha_5(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{4} \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{x})} \int d^3y F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \int d^3y F_{kl}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{x})} F_{kl}(\mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \int d^3y F_{kl}(\mathbf{y}) \left[\partial_k^y \frac{\delta A_l(\mathbf{y})}{\delta A_j(\mathbf{x})} - \partial_l^y \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_j(\mathbf{x})} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \int d^3y F_{kl}(\mathbf{y}) \left[\delta_l^j \partial_k^y - \delta_k^j \partial_l^y \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \int d^3y [F_{kj}(\mathbf{y}) \partial_k^x - F_{jl}(\mathbf{y}) \partial_l^x] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) [\partial_k^x F_{kj}(\mathbf{x}) - \partial_l^x F_{jl}(\mathbf{x})] \\ &= -\frac{1}{2} \int d^3x [\partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \partial_k^x F_{kj}(\mathbf{x}) - \partial_j^x \alpha_5(\mathbf{x}) \partial_l^x F_{jl}(\mathbf{x})].\end{aligned}$$

Al integrar por partes en la ultima relación, se obtendrá que

$$\Omega^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3x \alpha_5(\mathbf{x}) [\partial_j^x \partial_k^x F_{kj}(\mathbf{x}) - \partial_j^x \partial_l^x F_{jl}(\mathbf{x})] = 0. \quad (4.13)$$

Este resultado indica que el modo cero no dará origen a un nuevo vínculo Lagrangiano. Por lo tanto, la matriz simpléctica continúa siendo singular, lo que caracteriza a la teoría de Maxwell como una teoría gauge. Con el fin de obtener una matriz simpléctica no singular se deberá adicionar un término de gauge fixing al potencial simpléctico. Para ello, se escogerá

el gauge de Plano Nulo $\Theta = A_- (x) = 0$. Al introducir el multiplicador de Lagrange $\eta (x)$, lo cual incrementará la dimensión del espacio de configuración, obtendremos un segundo Lagrangiano iterativo representado por:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \Pi^- \partial_+ A_- + (\partial_- A_k - \partial_k A_-) \partial_+ A_k + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)}, \quad (4.14)$$

donde el nuevo potencial simpléctico se expresa como se muestra a continuación:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_{\Theta=0}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}. \quad (4.15)$$

Considerando que la nueva variable simpléctica es definida por las componentes $\xi_k^{(2)} = (A_-, A_i, \Pi^-, \lambda, \eta)$, es posible identificar

$$\begin{aligned} K_{A_-}^{(2)} &\rightarrow \Pi^- \quad , \quad K_{A_i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i = \partial_- A_i - \partial_i A_- \quad , \quad K_{\Pi^-}^{(2)} \rightarrow 0, \\ K_{\lambda}^{(2)} &\rightarrow \Omega^{(0)} = \partial_-^x \Pi^- (x) + \partial_k^x (\partial_-^x A_k (x) - \partial_k^x A_- (x)) \quad , \quad K_{\eta}^{(2)} \rightarrow \Theta = A_-. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Así, se calcula la matriz

$$M_{AB}^{(2)} (x, y) = \frac{\delta K_B^{(2)} (y)}{\delta \xi_A^{(2)} (x)} - \frac{\delta K_A^{(2)} (x)}{\delta \xi_B^{(2)} (y)}, \quad (4.17)$$

donde las componentes diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} M_{A_-, \Pi^-}^{(2)} (x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(2)} (y)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)} (x)} - \frac{\delta K_{A_-}^{(2)} (x)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(2)} (y)} = -\frac{\delta \Pi^- (x)}{\delta \Pi^- (y)} = -\delta^3 (x - y), \\ M_{A_-, \eta}^{(2)} (x, y) &= \frac{\delta K_{\eta}^{(2)} (y)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)} (x)} - \frac{\delta K_{A_-}^{(2)} (x)}{\delta \xi_{\eta}^{(2)} (y)} = \frac{\delta A_- (y)}{\delta A_- (x)} = \delta^3 (x - y), \\ M_{A_- A_j}^{(2)} (x, y) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)} (y)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)} (x)} - \frac{\delta K_{A_-}^{(2)} (x)}{\delta \xi_{A_j}^{(2)} (y)} = -\frac{\delta \partial_j^y A_- (y)}{\delta A_- (x)} = -\partial_j^y \frac{\delta A_- (y)}{\delta A_- (x)} \\ &= -\partial_j^y \delta^3 (y - x) = \partial_j^x \delta^3 (x - y), \\ M_{A_- \lambda}^{(2)} (x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)} (y)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)} (x)} - \frac{\delta K_{A_-}^{(2)} (x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)} (y)} = -\frac{\delta (\partial_k^y \partial_k^y A_- (y))}{\delta A_- (x)} = -\partial_k^y \partial_k^y \frac{\delta A_- (y)}{\delta A_- (x)} \\ &= -\partial_k^y \partial_k^y \delta^3 (y - x) = -\partial_k^x \partial_k^x \delta^3 (x - y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{A_i A_j}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(y)} = \frac{\delta \partial_-^y A_j(y)}{\delta A_i(x)} - \frac{\delta \partial_-^x A_i(x)}{\delta A_j(y)} \\
 &= \partial_-^y \frac{\delta A_j(y)}{\delta A_i(x)} - \partial_-^x \frac{\delta A_i(x)}{\delta A_j(y)} = \delta_j^i \partial_-^y \delta^3(y-x) - \delta_i^j \partial_-^x \delta^3(x-y) \\
 &= -2\delta_j^i \partial_-^x \delta^3(y-x), \\
 M_{A_i A_-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(y)} = \frac{\delta(\partial_i^x A_-(x))}{\delta A_-(y)} = \partial_i^x \frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} \\
 &= \partial_i^x \delta^3(x-y), \\
 M_{A_i \lambda}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(y)} = \frac{\delta(\partial_k^y \partial_-^y A_k(y))}{\delta A_i(x)} = \partial_k^y \partial_-^y \frac{\delta A_k(y)}{\delta A_i(x)} \\
 &= \delta_k^i \partial_k^y \partial_-^y \delta^3(y-x) = \partial_i^x \partial_-^x \delta^3(y-x), \\
 M_{\Pi^- A_-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(y)} = \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \Pi^-(x)} = \delta^3(y-x) = \delta^3(x-y) \\
 M_{\Pi^- \lambda}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(y)} = \frac{\delta(\partial_-^y \Pi^-(y))}{\delta \Pi^-(x)} = \partial_-^y \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \Pi^-(x)} \\
 &= \partial_-^y \delta^3(y-x) = -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda A_-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(y)} = \frac{\delta(\partial_k^x \partial_k^x A_-(x))}{\delta A_-(y)} \\
 &= \partial_k^x \partial_k^x \frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} = \partial_k^x \partial_k^x \delta^3(x-y) \\
 M_{\lambda A_j}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(y)} = -\frac{\delta(\partial_k^x \partial_-^x A_k(x))}{\delta A_j(y)} = -\partial_k^x \partial_-^x \frac{\delta A_k(x)}{\delta A_j(y)} \\
 &= -\delta_k^j \partial_k^x \partial_-^x \delta^3(x-y) = -\partial_j^x \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 M_{\lambda \Pi^-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(2)}(y)} = -\frac{\delta(\partial_-^x \Pi^-(x))}{\delta \Pi^-(y)} = -\partial_-^x \frac{\delta \Pi^-(x)}{\delta \Pi^-(y)} \\
 &= -\partial_-^x \delta^3(x-y) \\
 M_{\eta A_-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\eta}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\eta}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(y)} = -\frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} = -\delta^3(x-y).
 \end{aligned}$$

Por tanto, la representación matricial de $M_{AB}^{(2)}(x, y)$ es:

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix} & A_-(y) & A_j(y) & \Pi^-(y) & \lambda(y) & \eta(y) \\ A_-(x) & 0 & \partial_j^x & -1 & -\partial_k^x \partial_k^x & 1 \\ A_i(x) & \partial_i^x & -2\delta_j^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x & 0 \\ \Pi^-(x) & 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ \lambda(x) & \partial_k^x \partial_k^x & -\partial_j^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 & 0 \\ \eta(x) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.18)$$

Ahora, esta matriz no es singular y por lo tanto su inversa $[M^{CB(2)}]^{-1}(x, y)$ se deberá calcular a partir de la siguiente relación:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(x, z) [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \delta_\lambda^B \delta^3(x - y). \quad (4.19)$$

Además, se asumirá que la matriz simpléctica $[M^{CB(2)}]^{-1}(x, y)$ se puede expresar como:

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \begin{pmatrix} A_-(y) & A_k(y) & \Pi^-(y) & \lambda(y) & \eta(y) \\ A_-(z) & \alpha_1(z, y) & \alpha_{2k}(z, y) & \alpha_3(z, y) & \alpha_4(z, y) & \alpha_5(z, y) \\ A_j(z) & \beta_{1j}(z, y) & \beta_{2jk}(z, y) & \beta_{3j}(z, y) & \beta_{4j}(z, y) & \beta_{5j}(z, y) \\ \Pi^-(z) & \gamma_1(z, y) & \gamma_{2k}(z, y) & \gamma_3(z, y) & \gamma_4(z, y) & \gamma_5(z, y) \\ \lambda(z) & \lambda_1(z, y) & \lambda_{2k}(z, y) & \lambda_3(z, y) & \lambda_4(z, y) & \lambda_5(z, y) \\ \eta(z) & \zeta_1(z, y) & \zeta_{2k}(z, y) & \zeta_3(z, y) & \zeta_4(z, y) & \zeta_5(z, y) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

siendo que sus componentes, al ser funciones desconocidas, deberán ser determinadas. Así, se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} & \int d^3z M_{AC}^{(2)}(x, z) [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \\ & = \int d^3z \begin{pmatrix} A_-(z) & A_k(z) & \Pi^-(z) & \lambda(z) & \eta(z) \\ A_-(x) & 0 & \partial_k^x & -1 & -\partial_m^x \partial_m^x & 1 \\ A_i(x) & \partial_i^x & -2\delta_k^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x & 0 \\ \Pi^-(x) & 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ \lambda(x) & \partial_m^x \partial_m^x & -\partial_k^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 & 0 \\ \eta(x) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - z) \\ & \begin{pmatrix} A_-(y) & A_j(y) & \Pi^-(y) & \lambda(y) & \eta(y) \\ A_-(z) & \alpha_1(z, y) & \alpha_{2j}(z, y) & \alpha_3(z, y) & \alpha_4(z, y) & \alpha_5(z, y) \\ A_k(z) & \beta_{1k}(z, y) & \beta_{2kj}(z, y) & \beta_{3k}(z, y) & \beta_{4k}(z, y) & \beta_{5k}(z, y) \\ \Pi^-(z) & \gamma_1(z, y) & \gamma_{2j}(z, y) & \gamma_3(z, y) & \gamma_4(z, y) & \gamma_5(z, y) \\ \lambda(z) & \lambda_1(z, y) & \lambda_{2j}(z, y) & \lambda_3(z, y) & \lambda_4(z, y) & \lambda_5(z, y) \\ \eta(z) & \zeta_1(z, y) & \zeta_{2j}(z, y) & \zeta_3(z, y) & \zeta_4(z, y) & \zeta_5(z, y) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} & A_-(\mathbf{x}) & A_k(\mathbf{x}) & \Pi^-(\mathbf{x}) & \lambda(\mathbf{x}) & \eta(\mathbf{x}) \\ A_-(\mathbf{x}) & 0 & \partial_k^x & -1 & -\partial_m^x \partial_m^x & 1 \\ A_i(\mathbf{x}) & \partial_i^x & -2\delta_k^i \partial_-^x & 0 & \partial_i^x \partial_-^x & 0 \\ \Pi^-(\mathbf{x}) & 1 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ \lambda(\mathbf{x}) & \partial_m^x \partial_m^x & -\partial_k^x \partial_-^x & -\partial_-^x & 0 & 0 \\ \eta(\mathbf{x}) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & A_-(\mathbf{y}) \\ A_-(\mathbf{x}) & \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ A_k(\mathbf{x}) & \beta_{1_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Pi^-(\mathbf{x}) & \gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \lambda(\mathbf{x}) & \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \eta(\mathbf{x}) & \zeta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\
 &\quad \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{y}) & \Pi^-(\mathbf{y}) & \lambda(\mathbf{y}) & \eta(\mathbf{y}) \\ \alpha_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_{2_{k_j}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{3_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{4_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{5_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \lambda_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \lambda_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \lambda_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \lambda_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \zeta_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\
 &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} & A_- & A_j & \Pi^- & \lambda & \eta \\ A_- & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_i & 0 & \delta_k^i & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^- & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Con el fin de garantizar la identidad anterior, se deberá satisfacer el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \partial_k^x \beta_{1_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_m^x \partial_m^x \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 \partial_k^x \beta_{2_{k_j}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_m^x \partial_m^x \lambda_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \partial_k^x \beta_{3_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_m^x \partial_m^x \lambda_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \partial_k^x \beta_{4_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_m^x \partial_m^x \lambda_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \partial_k^x \beta_{5_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_m^x \partial_m^x \lambda_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \zeta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_i^x \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2\delta_k^i \partial_-^x \beta_{1_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_i^x \partial_-^x \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \partial_i^x \alpha_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2\delta_k^i \partial_-^x \beta_{2_{k_j}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_i^x \partial_-^x \gamma_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 \partial_i^x \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2\delta_k^i \partial_-^x \beta_{3_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_i^x \partial_-^x \lambda_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \partial_i^x \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2\delta_k^i \partial_-^x \beta_{4_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_i^x \partial_-^x \lambda_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \partial_i^x \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - 2\delta_k^i \partial_-^x \beta_{5_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_i^x \partial_-^x \lambda_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x \lambda_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
 \alpha_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x \lambda_{2_j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x \lambda_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x \lambda_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\
 \alpha_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x \lambda_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 \partial_m^x \partial_m^x \alpha_1(\mathbf{x}, y) - \partial_k^x \partial_k^x \beta_{1_k}(\mathbf{x}, y) - \partial_x^- \gamma_1(\mathbf{x}, y) &= 0 \\
 \partial_m^x \partial_m^x \alpha_{2_j}(\mathbf{x}, y) - \partial_k^x \partial_k^x \beta_{2_{kj}}(\mathbf{x}, y) - \partial_x^- \gamma_{2_j}(\mathbf{x}, y) &= 0 \\
 \partial_m^x \partial_m^x \alpha_3(\mathbf{x}, y) - \partial_k^x \partial_k^x \beta_{3_k}(\mathbf{x}, y) - \partial_x^- \gamma_3(\mathbf{x}, y) &= 0 \\
 \partial_m^x \partial_m^x \alpha_4(\mathbf{x}, y) - \partial_k^x \partial_k^x \beta_{4_k}(\mathbf{x}, y) - \partial_x^- \gamma_4(\mathbf{x}, y) &= \delta^3(\mathbf{x} - y) \\
 \partial_m^x \partial_m^x \alpha_5(\mathbf{x}, y) - \partial_k^x \partial_k^x \beta_{5_k}(\mathbf{x}, y) - \partial_x^- \gamma_5(\mathbf{x}, y) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned}
 -\alpha_1(\mathbf{x}, y) &= 0, \\
 -\alpha_{2_j}(\mathbf{x}, y) &= 0, \\
 -\alpha_3(\mathbf{x}, y) &= 0, \\
 -\alpha_4(\mathbf{x}, y) &= 0, \\
 -\alpha_5(\mathbf{x}, y) &= \delta^3(\mathbf{x} - y).
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

Al resolver las ecuaciones planteadas anteriormente, se determina (4.25) que

$$\begin{aligned}
 \alpha_5(\mathbf{x}, y) &= -\delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \alpha_1(\mathbf{x}, y) = \alpha_{2_j}(\mathbf{x}, y) = \\
 &= \alpha_3(\mathbf{x}, y) = \alpha_4(\mathbf{x}, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Utilizando (4.26) y (4.23), se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 \lambda_3(\mathbf{x}, y) &= -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \lambda_5(\mathbf{x}, y) = -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y), \\
 \lambda_1(\mathbf{x}, y) &= \lambda_{2_j}(\mathbf{x}, y) = \lambda_4(\mathbf{x}, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.27}$$

A su vez, empleando (4.26) y (4.27) en (4.22) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \beta_{2_{ij}}(\mathbf{x}, y) &= -\frac{\delta_j^i}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \beta_{3_i}(\mathbf{x}, y) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_i^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y), \\
 \beta_{5_i}(\mathbf{x}, y) &= -\frac{\partial_i^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \beta_{1_i}(\mathbf{x}, y) = \beta_{4_i}(\mathbf{x}, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Además, si se emplea (4.26) y (4.27) en (4.24), se tiene que

$$\begin{aligned}
 \gamma_{2_j}(\mathbf{x}, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial_j^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \gamma_3(\mathbf{x}, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial_k^x \partial_k^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y), \\
 \gamma_4(\mathbf{x}, y) &= -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \gamma_1(\mathbf{x}, y) = \gamma_5(\mathbf{x}, y) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Finalmente, de (4.27), (4.28) y (4.29) en (4.21), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1(\mathbf{x}, y) &= \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \zeta_{2_j}(\mathbf{x}, y) = \frac{\partial_j^x}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y), \\
 \zeta_4(\mathbf{x}, y) &= -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(\mathbf{x} - y) \quad , \quad \zeta_3(\mathbf{x}, y) = \zeta_5(\mathbf{x}, y) = 0
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

De manera que la inversa de la matriz simpléctica tiene los siguientes elementos de matriz diferentes de cero

$$\left[M^{\text{CB}(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_-(\mathbf{y}) & A_k(\mathbf{y}) & \Pi^-(\mathbf{y}) & \lambda(\mathbf{y}) & \eta(\mathbf{y}) \\ A_-(\mathbf{z}) & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ A_j(\mathbf{z}) & 0 & \beta_{2jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \beta_{5j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Pi^-(\mathbf{z}) & 0 & \gamma_{2k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 \\ \lambda(\mathbf{z}) & 0 & 0 & \lambda_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \lambda_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \eta(\mathbf{z}) & \zeta_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_{2k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 & \zeta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Con esta matriz se pueden determinar los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simpléctica $\xi_k^{(2)} = (A_-, A_i, \Pi^-, \lambda, \eta)$, obteniendo el siguiente resultado:

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})\} = \beta_{2ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\delta_j^i}{4} \epsilon(\mathbf{x}^- - \mathbf{y}^-) \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top), \quad (4.32)$$

el cual es reportado en la literatura cuando su análisis se realiza utilizando el método de Dirac [1, 2].

4.2. Campo de Dirac

La densidad Lagrangiana que describe el campo de Dirac en 2 dimensiones, utilizando las coordenadas de plano nulo, es dada por

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^+ \partial_+ \varphi - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\varphi} \gamma^+ \varphi + \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi - \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi - m \bar{\varphi} \varphi. \quad (4.33)$$

Los momentos canónicos conjugados a los campos se definen como:

$$\bar{\pi}_a \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_+ \varphi_a)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi}_b (\gamma^+)_{ba}, \quad \pi_a \equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_+ \bar{\varphi}_a)} = -\frac{i}{2} (\gamma^+)_{ab} \varphi_b. \quad (4.34)$$

Dado que los campos fermiónicos son descritos por variables de Grassmann, se han utilizado derivadas izquierdas para definir los momentos canónicos conjugados [3].

En el formalismo de Dirac (FD) para variables fermiónicas, la forma más general de expresar la acción de primer orden en las variables $\dot{\xi}_A$ es [4, 5]:

$$L(\xi, \dot{\xi}) = \xi_A K^A(\xi) - \mathcal{H}(\xi), \quad (4.35)$$

donde $K^A(\xi)$ es una función arbitraria de paridad de Grassmann n_A , en tanto que $\mathcal{H}(\xi)$ se interpreta como el potencial simpléctico de paridad par. Por lo tanto, vamos a expresar la ecuación (4.33) en la forma (4.35), es decir:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(0)} &= \frac{i}{2} \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ \partial_+ \varphi_c - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ \varphi_c + \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi - \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi - m \bar{\varphi} \varphi \\ &= -\frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c - \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi + \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi + m \bar{\varphi} \varphi \right] \\ &= -\frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c - \mathcal{H}^{(0)}, \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde se define el potencial simpléctico como:

$$\mathcal{H}^{(0)} = -\frac{i}{2}\bar{\varphi}\gamma^-\partial_-\varphi + \frac{i}{2}\partial_-\bar{\varphi}\gamma^-\varphi + m\bar{\varphi}\varphi. \quad (4.37)$$

Con el fin de calcular la matriz simpléctica, definiremos las variables simplécticas de la siguiente forma: $\xi_1^{(0)} \equiv \xi_{\varphi_a}^{(0)} = \varphi_a$ y $\xi_2^{(0)} \equiv \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(0)} = \bar{\varphi}_a$. De la expresión (4.36), es posible identificar:

$$K_1^{(0)} \equiv K_{\varphi_b}^{(0)} = -\frac{i}{2}\bar{\varphi}_c\gamma_{cb}^+ \quad , \quad K_2^{(0)} \equiv K_{\bar{\varphi}_b}^{(0)} = -\frac{i}{2}\gamma_{bc}^+\varphi_c. \quad (4.38)$$

Por su parte, las componentes de la matriz simpléctica son definidas por:

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_A^{(0)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_A^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)}. \quad (4.39)$$

Para el problema en consideración, las variables son estrictamente fermiónicas, de manera que $n_A = n_B = 1$, por lo tanto

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_A^{(0)}(x)} + \frac{\delta K_A^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)}. \quad (4.40)$$

A su vez, los elementos de matriz correspondientes son:

$$M_{\varphi_a B}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\varphi_a}^{(0)}(x)} + \frac{\delta K_{\varphi_a}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \varphi_a(x)} + \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2}\bar{\varphi}_c(x)\gamma_{ca}^+ \right]. \quad (4.41)$$

De manera que el único elemento diferente de cero asociado a esta fila es:

$$\begin{aligned} M_{\varphi_a \bar{\varphi}_b}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(y)}{\delta \varphi_a(x)} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2}\bar{\varphi}_c(x)\gamma_{ca}^+ \right] \\ &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(x)} \left[-\frac{i}{2}\gamma_{bc}^+\varphi_c(y) \right] + \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_b(y)} \left[-\frac{i}{2}\bar{\varphi}_c(x)\gamma_{ca}^+ \right] \\ &= -\frac{i}{2}\gamma_{bc}^+ \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_a(x)} - \frac{i}{2}\gamma_{ca}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(x)}{\delta \bar{\varphi}_b(y)} \\ &= -\frac{i}{2}\gamma_{bc}^+ \delta_{ac} \delta^3(y-x) - \frac{i}{2}\gamma_{ca}^+ \delta_{bc} \delta^3(x-y) \\ &= -i\gamma_{ba}^+ \delta^3(x-y) \\ &= -i(\gamma^+)_{ab}^T \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (4.42)$$

En forma similar, se tiene que

$$M_{\bar{\varphi}_a B}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(0)}(x)} + \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_a}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} + \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2}\gamma_{ac}^+\varphi_c(x) \right], \quad (4.43)$$

con lo cual el término diferentes de cero resulta ser:

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \varphi_b}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\varphi_b}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_b}^{(0)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{y}) \gamma_{cb}^+ \right] + \frac{\delta}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{x})}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -i \gamma_{ab}^+ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

De esta manera, la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tendrá la siguiente forma:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -i \begin{pmatrix} & \varphi_b(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \\ \varphi_a(\mathbf{x}) & 0 & (\gamma^+)^T_{ab} \\ \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) & \gamma_{ab}^+ & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{4.45}$$

Dada la naturaleza singular de la matriz γ^+ , se concluye que $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es también singular. Para determinar el modo cero asociado, utilizamos la siguiente representación matricial de las matrices γ^μ en las coordenadas de plano nulo en dos dimensiones [6]:

$$\gamma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.46}$$

con lo cual, la matriz $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se expresa en forma extensa como:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -i \begin{pmatrix} & \varphi_1(\mathbf{y}) & \varphi_2(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_1(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_2(\mathbf{y}) \\ \varphi_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ \varphi_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{4.47}$$

Es posible verificar fácilmente que los autovalores cero de la matriz corresponden a los siguientes autovectores:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{1(0)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) & \varphi_2(\mathbf{x}) & \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \\ 0 & v_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.48}$$

$$\tilde{\mathbf{v}}^{2(0)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}) & \varphi_2(\mathbf{x}) & \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & \bar{v}_1(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.49}$$

donde $v_2(\mathbf{x})$ y $\bar{v}_1(\mathbf{x})$ son funciones completamente arbitrarias. El vínculo asociado al auto-

donde $v_2(x)$ y $\bar{v}_1(x)$ son funciones completamente arbitrarias. El vínculo asociado al autovector $\tilde{v}^{1(0)}(x)$ se deriva a partir de:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{1(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_1(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x v_2(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_2}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(y) \\
 &= \int d^3x v_2(x) \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x)} \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^- \partial_-^y \varphi_c(y) + \frac{i}{2} \partial_-^y \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^- \varphi_c(y) \right. \\
 &\quad \left. + m \bar{\varphi}_b(y) \varphi_b(y) \right] \\
 &= \int d^3x v_2(x) \int d^3y \left\{ \partial_-^y \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_2(x)} \frac{i}{2} \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c - \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_2(x)} \frac{i}{2} \left[\partial_-^y \bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\delta \varphi_b(y)}{\delta \varphi_2(x)} m \bar{\varphi}_b(y) \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \int d^3y \left\{ \delta_{c2} \partial_-^y \delta^3(y-x) \frac{i}{2} \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c - \delta_{c2} \delta^3(y-x) \frac{i}{2} \left[\partial_-^y \bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c \right. \\
 &\quad \left. - \delta_{b2} \delta^3(y-x) m \bar{\varphi}_b(y) \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \left\{ \frac{i}{2} \partial_-^x \int d^3y \delta^3(y-x) \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_2 - \frac{i}{2} \int d^3y \delta^3(y-x) \left[\partial_-^y \bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_2 \right. \\
 &\quad \left. - m \int d^3y \delta^3(y-x) \bar{\varphi}_2(y) \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \left\{ -\frac{i}{2} \partial_-^x \left[\bar{\varphi}(x) \gamma^- \right]_2 - \frac{i}{2} \left[\partial_-^x \bar{\varphi}(x) \gamma^- \right]_2 - m \bar{\varphi}_2(x) \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \left[-i \partial_-^x \bar{\varphi}(x) \gamma^- - m \bar{\varphi}(x) \right]_2.
 \end{aligned}$$

Ahora, debido a que la función $v_2(x)$ es completamente arbitraria, se puede escoger como vínculo Lagrangiano primario la siguiente relación:

$$\Omega_1^{(0)} = \left[\bar{\varphi}(x) \left(i \partial_-^x \gamma^- + m \right) \right]_2 = 0. \quad (4.50)$$

Asimismo, el vínculo asociado al autovector $\tilde{v}^{2(0)}(x)$ es determinado a partir de:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{2(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_2(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x \bar{v}_1(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_1}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(y) \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_1(x)} \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^- \partial_-^y \varphi_c(y) + \frac{i}{2} \partial_-^y \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^- \varphi_c(y) \right. \\
 &\quad \left. + m \bar{\varphi}_b(y) \varphi_b(y) \right] \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(x) \int d^3y \left\{ -\frac{i}{2} \frac{\delta \bar{\varphi}_b(y)}{\delta \bar{\varphi}_1(x)} \left[\gamma^- \partial_-^y \varphi(y) \right]_b + \frac{i}{2} \partial_-^y \frac{\delta \bar{\varphi}_b(y)}{\delta \bar{\varphi}_1(x)} \left[\gamma^- \varphi(y) \right]_b \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{\delta \bar{\varphi}_b(y)}{\delta \bar{\varphi}_1(x)} \varphi_b(y) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \int d^3y \left\{ -\frac{i}{2} \delta_{b1} \delta^3(y-x) \left[\gamma^- \partial_-^y \varphi(y) \right]_b + \frac{i}{2} \delta_{b1} \partial_-^y \delta^3(y-x) \left[\gamma^- \varphi(y) \right]_b \right. \\
&\quad \left. + m \delta_{b1} \delta^3(y-x) \varphi_b(y) \right\} \\
&= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{i}{2} \int d^3y \delta^3(y-x) \left[\gamma^- \partial_-^y \varphi(y) \right]_1 - \frac{i}{2} \partial_-^x \int d^3y \delta^3(y-x) \left[\gamma^- \varphi(y) \right]_1 \right. \\
&\quad \left. + m \int d^3y \delta^3(y-x) \varphi_1(y) \right\} \\
&= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{i}{2} \left[\gamma^- \partial_-^x \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 - \frac{i}{2} \partial_-^x \left[\gamma^- \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 + m \varphi_1(\mathbf{x}) \right\} \\
&= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \left[-i \gamma^- \partial_-^x \varphi(\mathbf{x}) + m \varphi(\mathbf{x}) \right]_1.
\end{aligned}$$

Como $\bar{v}_1(\mathbf{x})$ también es arbitraria, se puede seleccionar como el otro vínculo Lagrangiano primario la siguiente expresión:

$$\Omega_2^{(0)} = \left[\left(i \gamma^- \partial_-^x - m \right) \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 = 0. \quad (4.51)$$

Si se utilizan los proyectores [6, 7]

$$\Delta^+ \equiv \frac{1}{2} \gamma^- \gamma^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta^- \equiv \frac{1}{2} \gamma^+ \gamma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.52)$$

es posible expresar en forma compacta los vínculos (4.50) y (4.51) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left(i \partial_-^x \gamma^- + m \right) \Delta^- = 0, \\
\Omega_2^{(0)} &= \Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^x - m \right) \varphi(\mathbf{x}) = 0.
\end{aligned} \quad (4.53)$$

De nuevo, el primer Lagrangiano en el proceso de iteración se obtiene adicionando estos vínculos a la parte canónica de $\mathcal{L}^{(0)}$. El resultado es la expresión:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(1)} &= -\frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c + \Omega_1^{(0)} \dot{\lambda} + \dot{\bar{\lambda}} \Omega_2^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)} \\
&= -\frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c - \dot{\lambda}_b \Omega_{1_b}^{(0)} + \dot{\bar{\lambda}}_b \Omega_{2_b}^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)},
\end{aligned} \quad (4.54)$$

donde $\dot{\lambda}$ y $\dot{\bar{\lambda}}$ son variables de Grassmann de paridad impar que han sido introducidas para garantizar la paridad par de $\mathcal{L}^{(1)}$. Además, se define que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (4.55)$$

A continuación, se introducen las nuevas variables simplécticas $\xi_k^{(1)}$, las cuales se definen como: $\xi_1^{(1)} \equiv \xi_{\varphi_a}^{(1)} = \varphi_a$, $\xi_2^{(1)} \equiv \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(1)} = \bar{\varphi}_a$, $\xi_3^{(1)} \equiv \xi_\lambda^{(1)} = \lambda$ y $\xi_4^{(1)} \equiv \xi_{\bar{\lambda}}^{(1)} = \bar{\lambda}$. Así, a partir de la expresión (4.54) es posible identificar:

$$\begin{aligned}
K_1^{(1)} &\equiv K_{\varphi_b}^{(1)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c \gamma_{cb}^+ & , & & K_2^{(1)} &\equiv K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)} = -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \varphi_c, \\
K_3^{(1)} &\equiv K_{\lambda_b}^{(1)} = \Omega_{1_b}^{(0)} = \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left[\left(i \partial_-^x \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{cb}, \\
K_4^{(1)} &\equiv K_{\bar{\lambda}_b}^{(1)} = \Omega_{2_b}^{(0)} = \left[\Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^x - m \right) \right]_{bc} \varphi_c(\mathbf{x}).
\end{aligned} \quad (4.56)$$

Así, las componentes de la matriz simpléctica son especificadas por:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\lambda^{(1)}(\mathbf{x})} + \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}. \quad (4.57)$$

Los elementos correspondientes a la primera fila se calculan a partir de:

$$M_{\varphi_a B}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi_a}^{(1)}(\mathbf{x})} + \frac{\delta K_{\varphi_a}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \gamma_{ca}^+ \right]. \quad (4.58)$$

resultando en los siguientes elementos diferentes de cero:

$$\begin{aligned} M_{\varphi_a \bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \gamma_{ca}^+ \right] \\ &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{y}) \right] + \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \gamma_{ca}^+ \right] \\ &= -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} - \frac{i}{2} \gamma_{ca}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{x})}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \\ &= -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \gamma_{ca}^+ \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -i \gamma_{ba}^+ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -i (\gamma^+)^T_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} M_{\varphi_a \bar{\lambda}_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\lambda}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\lambda}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \gamma_{ca}^+ \right] \\ &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \left\{ \left[\Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^y - m \right) \right]_{bc} \varphi_c(\mathbf{y}) \right\} \\ &= \left[\Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^y - m \right) \right]_{bc} \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (4.60)$$

$$\begin{aligned} &= \left[\Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^y - m \right) \right]_{bc} \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \left[\Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^y - m \right) \right]_{ba} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= - \left[\Delta^+ \left(i \gamma^- \partial_-^x + m \right) \right]_{ab}^T \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.61)$$

De manera similar,

$$M_{\bar{\varphi}_a B}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(1)}(\mathbf{x})} + \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_a}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right]. \quad (4.62)$$

Ahora, los elementos de la matriz correspondientes a la segunda fila de $M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se deducen

de

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \varphi_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{y}) \gamma_{cb}^+ \right] + \frac{\delta}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{x})}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -i \gamma_{ab}^+ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \lambda_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{y}) \left[\left(i \partial_{\underline{y}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{cb} \right\} \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{y}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{cb} \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{y}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{cb} \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{y}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= - \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- - m \right) \Delta^- \right]_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_a B}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda_a}^{(1)}(\mathbf{x})} + \frac{\delta K_{\lambda_a}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \\
 &= \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \lambda_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ca} \right\},
 \end{aligned} \tag{4.65}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_a \bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \lambda_a(\mathbf{x})} + \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ca} \right\} \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ca} \right\} \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ca} \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{x})}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ca} \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ba} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \left[\left(i \partial_{\underline{x}} \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ab}^T \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned} \tag{4.66}$$

En consecuencia, la forma exacta de la matriz $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & \varphi_1(\mathbf{y}) & \varphi_2(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_1(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_2(\mathbf{y}) & \lambda_2(\mathbf{y}) & \bar{\lambda}_1(\mathbf{y}) \\ \varphi_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & -m \\ \varphi_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}\partial_-^x \\ \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}\partial_-^x & 0 \\ \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ \lambda_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & i\sqrt{2}\partial_-^x & m & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1(\mathbf{x}) & -m & i\sqrt{2}\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.73)$$

Ahora, esta matriz no es singular y por lo tanto posee la inversa $[M^{(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, que deberá ser calculada de:

$$\int d^3z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_\lambda^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.74)$$

Se asumirá que la inversa de la matriz simpléctica se puede expresar como:

$$[M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & \varphi_1(\mathbf{y}) & \varphi_2(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_1(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_2(\mathbf{y}) & \lambda_2(\mathbf{y}) & \bar{\lambda}_1(\mathbf{y}) \\ \varphi_1(\mathbf{x}) & \alpha_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \varphi_2(\mathbf{x}) & \beta_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & \gamma_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & \lambda_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \lambda_2(\mathbf{x}) & \zeta_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \bar{\lambda}_1(\mathbf{x}) & \chi_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}, \quad (4.75)$$

con elementos desconocidos y por determinar. Entonces se debe cumplir que

$$\begin{aligned} & \int d^3z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ & = \int d^3z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}\partial_-^x & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2}\partial_-^x & m & 0 & 0 \\ -m & i\sqrt{2}\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \\ & \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \alpha_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \beta_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \beta_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \gamma_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \gamma_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \lambda_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \lambda_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \zeta_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \zeta_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \chi_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 & -m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}\partial_x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2}\partial_x & 0 \\ -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{2}\partial_x & m & 0 & 0 \\ -m & i\sqrt{2}\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &\begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) & \alpha_2(x, y) & \alpha_3(x, y) & \alpha_4(x, y) & \alpha_5(x, y) & \alpha_6(x, y) \\ \beta_1(x, y) & \beta_2(x, y) & \beta_3(x, y) & \beta_4(x, y) & \beta_5(x, y) & \beta_6(x, y) \\ \gamma_1(x, y) & \gamma_2(x, y) & \gamma_3(x, y) & \gamma_4(x, y) & \gamma_5(x, y) & \gamma_6(x, y) \\ \lambda_1(x, y) & \lambda_2(x, y) & \lambda_3(x, y) & \lambda_4(x, y) & \lambda_5(x, y) & \lambda_6(x, y) \\ \zeta_1(x, y) & \zeta_2(x, y) & \zeta_3(x, y) & \zeta_4(x, y) & \zeta_5(x, y) & \zeta_6(x, y) \\ \chi_1(x, y) & \chi_2(x, y) & \chi_3(x, y) & \chi_4(x, y) & \chi_5(x, y) & \chi_6(x, y) \end{pmatrix} \\
 &= \delta^3(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

La igualdad implica que resulte el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\lambda_1(x, y) - m\chi_1(x, y) &= \delta^3(x-y) \\
 -i\sqrt{2}\lambda_2(x, y) - m\chi_2(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\lambda_3(x, y) - m\chi_3(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\lambda_4(x, y) - m\chi_4(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\lambda_5(x, y) - m\chi_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\lambda_6(x, y) - m\chi_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\partial_x\chi_1(x, y) &= 0, \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\chi_2(x, y) &= \delta^3(x-y) \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\chi_3(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\chi_4(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\chi_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\chi_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\partial_x\zeta_1(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\zeta_2(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\zeta_3(x, y) &= \delta^3(x-y) \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\zeta_4(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\zeta_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x\zeta_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\alpha_1(x, y) + m\zeta_1(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\alpha_2(x, y) + m\zeta_2(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\alpha_3(x, y) + m\zeta_3(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\alpha_4(x, y) + m\zeta_4(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -i\sqrt{2}\alpha_5(x, y) + m\zeta_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\alpha_6(x, y) + m\zeta_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned}
 i\sqrt{2}\partial_-^x \gamma_1(x, y) + m\lambda_1(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x \gamma_2(x, y) + m\lambda_2(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x \gamma_3(x, y) + m\lambda_3(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x \gamma_4(x, y) + m\lambda_4(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x \gamma_5(x, y) + m\lambda_5(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x \gamma_6(x, y) + m\lambda_6(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned}
 -m\alpha_1(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x \beta_1(x, y) &= 0 \\
 -m\alpha_2(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x \beta_2(x, y) &= 0 \\
 -m\alpha_3(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x \beta_3(x, y) &= 0 \\
 -m\alpha_4(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x \beta_4(x, y) &= 0 \\
 -m\alpha_5(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x \beta_5(x, y) &= 0 \\
 -m\alpha_6(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x \beta_6(x, y) &= \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

La solución de estas ecuaciones establece los siguientes valores para las funciones desconocidas de los elementos de matriz de $[M^{(1)}]^{-1}(x, y)$ diferentes de cero:

$$\chi_2(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \tag{4.83}$$

$$\lambda_1(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta^3(x - y) \quad , \quad \lambda_2(x, y) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \tag{4.84}$$

$$\zeta_3(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \tag{4.85}$$

$$\alpha_3(x, y) = \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \quad , \quad \alpha_4(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta^3(x - y), \tag{4.86}$$

$$\begin{aligned}
 \gamma_1(x, y) &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \quad , \quad \gamma_2(x, y) = -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x \partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
 \gamma_5(x, y) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),
 \end{aligned} \tag{4.87}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_3(x, y) &= -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x \partial_x} \delta^3(x-y), \quad \beta_4(x, y) = \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x} \delta^3(x-y), \\
 \beta_6(x, y) &= -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x} \delta^3(x-y).
 \end{aligned} \tag{4.88}$$

De manera que $[M^{(1)}]^{-1}(x, y)$ se puede expresar como:

$$[M^{CB(1)}]^{-1}(z, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \bar{\varphi}_1(y) & \bar{\varphi}_2(y) & \lambda_2(y) & \bar{\lambda}_1(y) \\ \varphi_1(x) & 0 & 0 & \alpha_3(z, y) & \alpha_4(z, y) & 0 \\ \varphi_2(x) & 0 & 0 & \beta_3(z, y) & \beta_4(z, y) & 0 \\ \bar{\varphi}_1(x) & \gamma_1(z, y) & \gamma_2(z, y) & 0 & 0 & \gamma_5(z, y) \\ \bar{\varphi}_2(x) & \lambda_1(z, y) & \lambda_2(z, y) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2(x) & 0 & 0 & \zeta_3(z, y) & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1(x) & 0 & \chi_2(z, y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.89}$$

Completando las filas y columnas faltantes con cero, se obtiene que

$$[M^{CB(1)}]^{-1}(z, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \bar{\varphi}_1(y) & \bar{\varphi}_2(y) & \lambda_1(y) \\ \varphi_1(x) & 0 & 0 & \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \varphi_2(x) & 0 & 0 & -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x \partial_x} & \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x} & 0 \\ \bar{\varphi}_1(x) & -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x} & -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x \partial_x} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_2(x) & \frac{i}{\sqrt{2}} & -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2(x) & 0 & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x} & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_1(x) & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x} & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\lambda}_2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2(y) & \bar{\lambda}_1(y) & \bar{\lambda}_2(y) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x} & 0 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{4.90}$$

A partir de esta matriz pueden determinarse los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simpléctica $\xi_k^{(1)} = (\varphi_a, \bar{\varphi}_a, \lambda_a, \bar{\lambda}_a)$, de donde se obtienen los siguientes

resultados:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \xi_{\varphi_a}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} &= \{ \varphi_a(\mathbf{x}), \bar{\varphi}_b \} = \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) & \frac{i}{\sqrt{2}} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta(x^- - y^-) & \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) & \frac{i}{\sqrt{2}} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} |x^- - y^-| & \frac{m}{2} \frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) & \frac{i\sqrt{2}}{2} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2\sqrt{2}}{8} |x^- - y^-| & \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{im^2}{8} |x^- - y^-| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{im^2}{8} |x^- - y^-| \gamma_{ab}^+ + \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) I_{ab} + \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \gamma_{ab}^-,
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

lo cual es consistente con lo reportado en la literatura. [6].

4.3. QED en 2 Dimensiones

Procedamos ahora a estudiar la electrodinámica cuántica en dos dimensiones, la cual es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(0)} &= -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^\mu \partial_\mu \varphi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\varphi} \gamma^\mu \varphi - m \bar{\varphi} \varphi - g A_\mu \bar{\varphi} \gamma^\mu \varphi \\
 &= -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^+ \partial_+ \varphi - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\varphi} \gamma^+ \varphi + \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi - \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi \\
 &\quad - m \bar{\varphi} \varphi - g A_\mu \bar{\varphi} \gamma^\mu \varphi.
 \end{aligned} \tag{4.92}$$

Clásicamente, esta teoría es descrita por variables fermiónicas $(\bar{\varphi}, \varphi)$ y bosónicas A_μ , de manera que los momentos canónicos conjugados asociados a estos campos son dados por:

$$\begin{aligned}
 \Pi^\nu &\equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_+ A_\nu)} = F^{\nu+}, \\
 \bar{\pi}_a &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_+ \varphi_a)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi}_b (\gamma^+)_{ba}, \\
 \pi_a &\equiv \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta (\partial_+ \bar{\varphi}_a)} = -\frac{i}{2} (\gamma^+)_{ab} \varphi_b,
 \end{aligned} \tag{4.93}$$

de donde es posible observar que

$$\begin{aligned}
 \Pi^+ &= 0, \\
 \Pi^- &= F^{-+} = F_{+-} = \partial_+ A_- - \partial_- A_+.
 \end{aligned} \tag{4.94}$$

Utilizando la siguiente identidad

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} &= \Pi^-\partial_+A_- - \Pi^-\partial_+A_- - \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = \Pi^-\partial_+A_- - \Pi^-\partial_+A_- \\
 &\quad -\frac{1}{4}F_{+-}F^{+-} - \frac{1}{4}F_{-+}F^{-+} \\
 &= \Pi^-\partial_+A_- - \Pi^-(\Pi^- + \partial_-A_+) + \frac{1}{2}F^{-+}F^{-+} \\
 &= \Pi^-\partial_+A_- - \frac{1}{2}\Pi^-\Pi^- - \Pi^-\partial_-A_+, \tag{4.95}
 \end{aligned}$$

se puede determinar que

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^-\partial_+A_- + \frac{i}{2}\bar{\varphi}\gamma^+\partial_+\varphi - \frac{i}{2}\partial_+\bar{\varphi}\gamma^+\varphi - \mathcal{H}^{(0)}, \tag{4.96}$$

con el potencial simpléctico expresado como:

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2}\Pi^-\Pi^- + \Pi^-\partial_-A_+ - \frac{i}{2}\bar{\varphi}\gamma^-\partial_-\varphi + \frac{i}{2}\partial_-\bar{\varphi}\gamma^-\varphi + m\bar{\varphi}\varphi + gA_\mu\bar{\varphi}\gamma^\mu\varphi. \tag{4.97}$$

Continuando, se define el primer conjunto de las variables simplécticas de la siguiente forma: $\xi_1^{(0)} \equiv \xi_{\varphi_a}^{(0)} = \varphi_a$, $\xi_2^{(0)} \equiv \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(0)} = \bar{\varphi}_a$, $\xi_3^{(0)} \equiv \xi_{A_+}^{(0)} = A_+$, $\xi_4^{(0)} \equiv \xi_{A_-}^{(0)} = A_-$ y $\xi_5^{(0)} \equiv \xi_{\Pi^-}^{(0)} = \Pi^-$. De (4.96) se puede identificar:

$$\begin{aligned}
 K_1^{(0)} &\equiv K_{\varphi_b}^{(0)} = -\frac{i}{2}\bar{\varphi}_c\gamma_{cb}^+ & , & & K_2^{(0)} &\equiv K_{\bar{\varphi}_b}^{(0)} = -\frac{i}{2}\gamma_{bc}^+\varphi_c, \\
 K_4^{(0)} &\equiv K_{A_-}^{(0)} = \Pi^- & , & & K_3^{(0)} &\equiv K_{A_+}^{(0)} = 0 & , & & K_5^{(0)} &\equiv K_{\Pi^-}^{(0)} = 0. \tag{4.98}
 \end{aligned}$$

Dadas las características fermiónicas y bosónicas de las variables consideradas, las componentes de la matriz simpléctica se deben calcular a partir de

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_A^{(0)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_A^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)}. \tag{4.99}$$

A su vez, los elementos de matriz asociados a la fila fermiónica φ_a se determinan por

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_a B}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\varphi_a}^{(0)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta K_{\varphi_a}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} \\
 &= \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \varphi_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2}\bar{\varphi}_c(x)\gamma_{ca}^+ \right], \tag{4.100}
 \end{aligned}$$

siendo que los elementos diferentes de cero son

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_a \bar{\varphi}_b}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(y)}{\delta \varphi_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(x) \gamma_{ca}^+ \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(x)} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \varphi_c(y) \right] + \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(x) \gamma_{ca}^+ \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_a(x)} - \frac{i}{2} \gamma_{ca}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(x)}{\delta \bar{\varphi}_b(y)} \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \delta_{ac} \delta^3(y-x) - \frac{i}{2} \gamma_{ca}^+ \delta_{bc} \delta^3(x-y) \\
 &= -i \gamma_{ba}^+ \delta^3(x-y) \\
 &= -i (\gamma^+)^T_{ab} \delta^3(x-y). \tag{4.101}
 \end{aligned}$$

De igual manera, cuando se analiza la fila fermiónica $\bar{\varphi}_a$, se establece que

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a B}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(0)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_a}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} \\
 &= \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(x) \right], \tag{4.102}
 \end{aligned}$$

resultando el siguiente término no nulo:

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \varphi_b}^{(0)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\varphi_b}^{(0)}(y)}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_b}^{(0)}(y)} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(x) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(y) \gamma_{cb}^+ \right] + \frac{\delta}{\delta \varphi_b(y)} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(x) \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(y)}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \frac{\delta \varphi_c(x)}{\delta \varphi_b(y)} \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \delta_{ac} \delta^3(y-x) - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \delta_{bc} \delta^3(x-y) \\
 &= -i \gamma_{ab}^+ \delta^3(x-y). \tag{4.103}
 \end{aligned}$$

De la relación (4.99) se deduce que para la variable bosónica A_+ las componentes son:

$$M_{A_+ B}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{A_+}^{(0)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_{A_+}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{A_+}^{(0)}(x)} - \frac{\delta K_{A_+}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} = 0. \tag{4.104}$$

Igualmente, en el caso de A_- se determina que

$$M_{A_- B}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{A_-}^{(0)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_{A_-}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta A_- (x)} - \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} [\Pi^- (x)], \tag{4.105}$$

de manera que

$$M_{A-\Pi^-}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(0)}(y)}{\delta A_-(x)} - \frac{\delta \Pi^-(x)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(y)} = -\frac{\delta \Pi^-(x)}{\delta \Pi^-(y)} = -\delta^3(x-y). \quad (4.106)$$

Finalmente, cuando se considera la variable Π^- , se puede inferir:

$$M_{\Pi^-B}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(0)}(x)}{\delta \xi_B^{(0)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(x)}, \quad (4.107)$$

con lo cual

$$M_{\Pi^-A_-}^{(0)}(x, y) = \frac{\delta K_{A_-}^{(0)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(x)} = \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(0)}(x)} = \delta^3(y-x) = \delta^3(x-y). \quad (4.108)$$

De este modo, la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(x, y)$ tiene la siguiente forma:

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = -i \begin{pmatrix} & \varphi_b(y) & \bar{\varphi}_b(y) & A_+(y) & A_-(y) & \Pi^-(y) \\ \varphi_a(x) & 0 & (\gamma^+)_{ab}^\top & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_a(x) & \gamma_{ab}^+ & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_+(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_-(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \Pi^-(x) & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.109)$$

Dada la naturaleza singular de γ^+ , la matriz $M^{(0)}(x, y)$ es también singular. Con el fin de determinar el modo cero, utilicemos ahora la representación matricial de γ^+ , resultando en:

$$M_{AB}^{(0)}(x, y) = -i \begin{pmatrix} & \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \bar{\varphi}_1(y) & \bar{\varphi}_2(y) & A_+(y) & A_-(y) & \Pi^-(y) \\ \varphi_1(x) & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{\varphi}_2(x) & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_+(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_-(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \Pi^-(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.110)$$

Los modos cero asociados a esta matriz son:

$$\tilde{v}^{1(0)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \bar{\varphi}_1(x) & \bar{\varphi}_2(x) & A_+(x) & A_-(x) & \Pi^-(x) \\ 0 & v_2(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.111)$$

$$\tilde{v}^{2(0)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \bar{\varphi}_1(x) & \bar{\varphi}_2(x) & A_+(x) & A_-(x) & \Pi^-(x) \\ 0 & 0 & \bar{v}_1(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.112)$$

$$\tilde{v}^{3(0)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \bar{\varphi}_1(x) & \bar{\varphi}_2(x) & A_+(x) & A_-(x) & \Pi^-(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v^{A_+}(x) & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.113)$$

donde $v_2(x)$, $\bar{v}_1(x)$ y $v^{\Lambda+}(x)$ son funciones completamente arbitrarias. El vínculo asociado al auto-vector $\tilde{v}^{1(0)}(x)$ es:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{1(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_1(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x v_2(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_2}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(y) \\
 &= \int d^3x v_2(x) \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x)} \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^- \partial_y^\mu \varphi_c(y) + \frac{i}{2} \partial_y^\mu \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^- \varphi_c(y) \right. \\
 &\quad \left. + m \bar{\varphi}_b(y) \varphi_b(y) + g A_\mu(y) \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^\mu \varphi_c(y) \right] \\
 &= \int d^3x v_2(x) \int d^3y \left\{ \partial_y^\mu \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_2(x)} \frac{i}{2} \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c - \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_2(x)} \frac{i}{2} \left[\partial_y^\mu \bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\delta \varphi_b(y)}{\delta \varphi_2(x)} m \bar{\varphi}_b(y) - g A_\mu(y) \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_2(x)} \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^\mu \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \int d^3y \left\{ \delta_{c2} \partial_y^\mu \delta^3(y-x) \frac{i}{2} \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c - \frac{i \delta_{c2}}{2} \delta^3(y-x) \right. \\
 &\quad \left. \left[\partial_y^\mu \bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_c - \delta_{b2} \delta^3(y-x) m \bar{\varphi}_b(y) - g A_\mu(y) \delta_{c2} \delta^3(y-x) \bar{\varphi}_b(y) \gamma_{bc}^\mu \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \left\{ -\frac{i}{2} \partial_x^\mu \int d^3y \delta^3(y-x) \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_2 - \frac{i}{2} \int d^3y \delta^3(y-x) \right. \\
 &\quad \left. \left[\partial_y^\mu \bar{\varphi}(y) \gamma^- \right]_2 - m \int d^3y \delta^3(y-x) \bar{\varphi}_2(y) - g \int d^3y A_\mu(y) \delta_{c2} \delta^3(y-x) \right. \\
 &\quad \left. \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^\mu \right]_2 \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \left\{ -\frac{i}{2} \partial_x^\mu \left[\bar{\varphi}(x) \gamma^- \right]_2 - \frac{i}{2} \left[\partial_x^\mu \bar{\varphi}(x) \gamma^- \right]_2 - m \bar{\varphi}_2(x) \right. \\
 &\quad \left. - g A_\mu(x) \left[\bar{\varphi}(x) \gamma^\mu \right]_2 \right\} \\
 &= \int d^3x v_2(x) \left[-i \partial_x^\mu \bar{\varphi}(x) \gamma^- - m \bar{\varphi}(x) - g A_\mu(x) \bar{\varphi}(x) \gamma^\mu \right]_2.
 \end{aligned}$$

En cuanto al vínculo Lagrangiano, se escoge para este la siguiente relación:

$$\Omega_1^{(0)} = \left[\bar{\varphi}(x) \left(i \partial_x^\mu \gamma^- + m + g A_\mu(x) \gamma^\mu \right) \right]_2 = 0. \quad (4.114)$$

De manera similar, el vínculo asociado al autovector $\tilde{v}^{2(0)}(\mathbf{x})$ es:

$$\begin{aligned}
 \Omega_2^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{2(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_2(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_1}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}) \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_1(\mathbf{x})} \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{bc}^- \partial_-^y \varphi_c(\mathbf{y}) + \frac{i}{2} \partial_-^y \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{bc}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. + m \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \varphi_b(\mathbf{y}) + g \mathcal{A}_\mu(\mathbf{y}) \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{bc}^\mu \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \int d^3y \left\{ -\frac{i}{2} \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_1(\mathbf{x})} \left[\gamma^- \partial_-^y \varphi(\mathbf{y}) \right]_b + \frac{i}{2} \partial_-^y \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_1(\mathbf{x})} \left[\gamma^- \varphi(\mathbf{y}) \right]_b \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_1(\mathbf{x})} \varphi_b(\mathbf{y}) + g \mathcal{A}_\mu(\mathbf{y}) \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_1(\mathbf{x})} \gamma_{bc}^\mu \varphi_c(\mathbf{y}) \right\} \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \int d^3y \left\{ -\frac{i}{2} \delta_{b1} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \left[\gamma^- \partial_-^y \varphi(\mathbf{y}) \right]_b + \frac{i \delta_{b1}}{2} \partial_-^y \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. \left[\gamma^- \varphi(\mathbf{y}) \right]_b + m \delta_{b1} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_b(\mathbf{y}) + g \mathcal{A}_\mu(\mathbf{y}) \delta_{b1} \right. \\
 &\quad \left. \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \gamma_{bc}^\mu \varphi_c(\mathbf{y}) \right\} \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{i}{2} \int d^3y \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \left[\gamma^- \partial_-^y \varphi(\mathbf{y}) \right]_1 - \frac{i}{2} \partial_-^x \int d^3y \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. \left[\gamma^- \varphi(\mathbf{y}) \right]_1 + m \int d^3y \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \varphi_1(\mathbf{y}) + g \int d^3y \mathcal{A}_\mu(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. \left[\gamma^\mu \varphi(\mathbf{y}) \right]_1 \right\} \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{i}{2} \left[\gamma^- \partial_-^x \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 - \frac{i}{2} \partial_-^x \left[\gamma^- \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 + m \varphi_1(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. + g \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}) \left[\gamma^\mu \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 \right\} \\
 &= \int d^3x \bar{v}_1(\mathbf{x}) \left[-i \gamma^- \partial_-^x \varphi(\mathbf{x}) + m \varphi(\mathbf{x}) + g \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}) \gamma^\mu \varphi(\mathbf{x}) \right]_1.
 \end{aligned}$$

De este modo surge otro vínculo Lagrangiano primario:

$$\Omega_2^{(0)} = \left[\left(i \gamma^- \partial_-^x - m - g \mathcal{A}_\mu(\mathbf{x}) \gamma^\mu \right) \varphi(\mathbf{x}) \right]_1 = 0. \quad (4.115)$$

Finalmente, el vínculo que le corresponde al autovector $\tilde{v}^{2(0)}(\mathbf{x})$ es:

$$\begin{aligned}
 \Omega_3^{(0)} &= \int d^3x \tilde{v}^{\Lambda(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x v^{\Lambda+}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda+}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda+}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_+(\mathbf{x})} \int d^3y \left[\Pi^-(y) \partial_-^y A_+(y) + g A_+(y) \bar{\varphi}(y) \gamma^+ \varphi(y) \right] \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda+}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^-(y) \partial_-^y \frac{\delta A_+(y)}{\delta A_+(\mathbf{x})} + g \frac{\delta A_+(y)}{\delta A_+(\mathbf{x})} \bar{\varphi}(y) \gamma^+ \varphi(y) \right] \\
 &= \int d^3x v^{\Lambda+}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^-(y) \underbrace{\partial_-^y}_{-\partial^x} \delta^3(y-\mathbf{x}) + g \delta^3(y-\mathbf{x}) \bar{\varphi}(y) \gamma^+ \varphi(y) \right] \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda+}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[\Pi^-(y) \partial_-^x - g \bar{\varphi}(y) \gamma^+ \varphi(y) \right] \delta^3(y-\mathbf{x}) \\
 &= - \int d^3x v^{\Lambda+}(\mathbf{x}) \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^+ \varphi(\mathbf{x}) \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de $v^{\Lambda+}(\mathbf{x})$, permite identificar un nuevo vínculo Lagrangiano:

$$\Omega_3^{(0)} = \partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^+ \varphi(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.116)$$

Utilizando los proyectores (4.52), se puede expresar en forma compacta los vínculos (4.114) y (4.115) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(0)} &= \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left[\gamma^- \left(i \partial_-^x + g A_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- = 0 \\
 \Omega_2^{(0)} &= \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i \partial_-^x - g A_-(\mathbf{x}) \right) - m \right] \varphi(\mathbf{x}) = 0.
 \end{aligned} \quad (4.117)$$

Ahora, el primer Lagrangiano en el proceso de iteración tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{(1)} &= \Pi^- \partial_+ A_- - \frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c - \dot{\lambda}_b \Omega_{1_b}^{(0)} \\
 &\quad + \dot{\bar{\lambda}}_b \Omega_{2_b}^{(0)} + \Omega_3^{(0)} \dot{\beta} - \mathcal{H}^{(1)},
 \end{aligned} \quad (4.118)$$

con

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega_i^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (4.119)$$

El potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(0)}$, a menos de un término de frontera, se puede expresar como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^{(0)} &= \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- - A_+ (\partial_- \Pi^- - g \bar{\varphi} \gamma^+ \varphi) - \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi + \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi \\
 &\quad + m \bar{\varphi} \varphi + g A_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi,
 \end{aligned} \quad (4.120)$$

de manera que

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- - \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi + \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi + m \bar{\varphi} \varphi + g A_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi. \quad (4.121)$$

El nuevo conjunto de variables simpléctica $\xi_k^{(1)}$ se interpreta como: $\xi_1^{(1)} \equiv \xi_{\varphi_a}^{(1)} = \varphi_a$, $\xi_2^{(1)} \equiv \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(1)} = \bar{\varphi}_a$, $\xi_3^{(1)} \equiv \xi_{A_-}^{(1)} = A_-$, $\xi_4^{(1)} \equiv \xi_{\Pi^-}^{(1)} = \Pi^-$, $\xi_5^{(1)} \equiv \xi_{\lambda}^{(1)} = \lambda$, $\xi_6^{(1)} \equiv \xi_{\bar{\lambda}}^{(1)} = \bar{\lambda}$ y $\xi_7^{(1)} \equiv \xi_{\beta}^{(1)} = \beta$. De la expresión (4.54) se reconoce:

$$\begin{aligned}
 K_1^{(1)} &\equiv K_{\varphi_b}^{(1)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c \gamma_{cb}^+ & , & & K_2^{(1)} &\equiv K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)} = -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \varphi_c, \\
 K_3^{(1)} &\equiv K_{A_-}^{(1)} = \Pi^- & , & & K_4^{(1)} &\equiv K_{\Pi^-}^{(1)} = 0, \\
 K_5^{(1)} &\equiv K_{\lambda_b}^{(1)} = \Omega_{1_b}^{(0)} = \bar{\varphi}_c(x) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{cb}, \\
 K_6^{(1)} &\equiv K_{\bar{\lambda}_b}^{(1)} = \Omega_{2_b}^{(0)} = \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{bc} \varphi_c(x), \\
 K_6^{(1)} &\equiv K_{\beta}^{(1)} = \Omega_3^{(0)} = \partial_-^x \Pi^- (x) - g\bar{\varphi}(x) \gamma^+ \varphi(x).
 \end{aligned} \tag{4.122}$$

De este modo, el cálculo de las componentes de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(x, y)$ se obtiene a partir de la relación:

$$M_{AB}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_A^{(1)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_A^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)}. \tag{4.123}$$

Comenzando por la fila fermiónica φ_a , resultan los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_a B}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\varphi_a}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta K_{\varphi_a}^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} \\
 &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \varphi_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(x) \gamma_{ca}^+ \right],
 \end{aligned} \tag{4.124}$$

con los únicos términos diferentes

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_a \bar{\varphi}_b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(y)}{\delta \varphi_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(y)} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(x) \gamma_{ca}^+ \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(x)} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \varphi_c(y) \right] + \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_b(y)} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(x) \gamma_{ca}^+ \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \frac{\delta \varphi_c(y)}{\delta \varphi_a(x)} - \frac{i}{2} \gamma_{ca}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(x)}{\delta \bar{\varphi}_b(y)} \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \delta_{ac} \delta^3(y-x) - \frac{i}{2} \gamma_{ca}^+ \delta_{bc} \delta^3(x-y) \\
 &= -i \gamma_{ba}^+ \delta^3(x-y) = -i (\gamma^+)^T_{ab} \delta^3(x-y),
 \end{aligned} \tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_a \bar{\lambda}_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\lambda}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\lambda}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \gamma_{ca}^+ \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \left\{ \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i \partial_-^y - g A_-(\mathbf{y}) \right) - m \right] \right\}_{bc} \varphi_c(\mathbf{y}) \right\} \\
 &= \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i \partial_-^y - g A_-(\mathbf{y}) \right) - m \right] \right\}_{bc} \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \\
 &= \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i \partial_-^y - g A_-(\mathbf{y}) \right) - m \right] \right\}_{bc} \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i \partial_-^y - g A_-(\mathbf{y}) \right) - m \right] \right\}_{ba} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= - \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i \partial_-^x + g A_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \right\}_{ab}^T \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.126}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\varphi_a \beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\beta}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \gamma_{ca}^+ \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \left[\partial_-^y \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 &= g \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \left[\bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{bc}^+ \right] = g \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^+ \right]_a. \tag{4.127}
 \end{aligned}$$

De manera similar, al considerar la fila $\bar{\varphi}_a$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a B}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(1)}(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_a}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \\
 &= \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right]. \tag{4.128}
 \end{aligned}$$

Siendo los términos diferentes de cero los que se muestran a continuación:

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \varphi_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\varphi_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \left[-\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c(\mathbf{y}) \gamma_{cb}^+ \right] + \frac{\delta}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{x})}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \\
 &= -\frac{i}{2} \gamma_{cb}^+ \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -i \gamma_{ab}^+ \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.129}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \lambda_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{y}) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^y + gA_-(\mathbf{y}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{cb} \right\} \\
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^y + gA_-(\mathbf{y}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{cb} \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \quad (4.130)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^y + gA_-(\mathbf{y}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{cb} \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^y + gA_-(\mathbf{y}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= - \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(\mathbf{x}) \right) - m \right] \Delta^- \right\}_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.131)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\varphi}_a \beta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\beta}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[-\frac{i}{2} \gamma_{ac}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \left[\partial_-^y \Pi^-(\mathbf{y}) - g\bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 &= -g\delta_{ab} \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) [\gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{y})] = -g\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\gamma^+ \varphi(\mathbf{x}) \right]_a. \quad (4.132)
 \end{aligned}$$

De igual modo, si $A = \lambda_a$, se obtiene:

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_a B}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda_a}^{(1)}(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta K_{\lambda_a}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \quad (4.133) \\
 &= \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \lambda_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left[\left(i\partial_-^x \gamma^- + m \right) \Delta^- \right]_{ca} \right\},
 \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_a \bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \lambda_a(\mathbf{x})} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ca} \right\} \\
 &= \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \left\{ \bar{\varphi}_c(\mathbf{x}) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ca} \right\} \\
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ca} \frac{\delta \bar{\varphi}_c(\mathbf{x})}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \\
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ca} \delta_{bc} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ba} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(\mathbf{x}) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ab}^T \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.134)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_a A_-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(1)}(y)}{\delta \lambda_a(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda_a}^{(1)}(y)} \left\{ \bar{\varphi}_c(x) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ca} \right\} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta A_-(y)} \left\{ \bar{\varphi}_c(x) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{ca} \right\} \\
 &= -g \frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} [\bar{\varphi}_c(x) (\gamma^- \Delta^-)_{ca}] = -g \delta^3(x-y) [\bar{\varphi}(x) \gamma^- \Delta^-]_a. \quad (4.135)
 \end{aligned}$$

Ahora, para el caso en el que la fila a analizar es $\bar{\lambda}_a$:

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\lambda}_a B}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\bar{\lambda}_a}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta K_{\bar{\lambda}_a}^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} \quad (4.136) \\
 &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\bar{\lambda}_a}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} \left[\left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \varphi_c(x) \right],
 \end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_a \varphi_b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\varphi_b}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\lambda_a}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_b}^{(1)}(y)} \left[\left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \varphi_c(x) \right] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \varphi_b(y)} \left[\left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \varphi_c(x) \right] \\
 &= \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \frac{\delta \varphi_c(x)}{\delta \varphi_b(y)} \\
 &= \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \delta_{bc} \delta^3(x-y) \\
 &= \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ab} \delta^3(x-y) \quad (4.137)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\bar{\lambda}_a A_-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\bar{\lambda}_a}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_B} \frac{\delta}{\delta \xi_{A_-}^{(1)}(y)} \left[\left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \varphi_c(x) \right] \\
 &= -\frac{\delta}{\delta A_-(y)} \left[\left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \right\}_{ac} \varphi_c(x) \right] \\
 &= g \frac{\delta A_-(x)}{\delta A_-(y)} [\Delta^+ \gamma^- \varphi(x)]_a = g \delta^3(x-y) [\Delta^+ \gamma^- \varphi(x)]_a. \quad (4.138)
 \end{aligned}$$

De manera similar, se analizarán las filas asociadas a variables bosónicas. Se considerará la primera $A = A_-$, resultando:

$$M_{A_- B}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{A_-}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_{A_-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta A_-(x)} - \frac{\delta}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} [\Pi^-(x)], \quad (4.139)$$

con los siguientes elementos diferentes de cero:

$$M_{A_- \Pi^-}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(y)}{\delta A_-(x)} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(1)}(y)} [\Pi^-(x)] = -\frac{\delta \Pi^-(x)}{\delta \Pi^-(y)} = -\delta^3(x-y), \quad (4.140)$$

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{A}-\lambda_b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\lambda_b}^{(1)}(y)}{\delta \mathcal{A}_-(x)} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\lambda_b}^{(1)}(y)} [\Pi^-(x)] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_-(x)} \left[\bar{\varphi}_c(y) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^y + g\mathcal{A}_-(y) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{cb} \right] \\
 &= g \frac{\delta \mathcal{A}_-(y)}{\delta \mathcal{A}_-(x)} \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \Delta^- \right]_b = g\delta^3(x-y) \left[\bar{\varphi}(y) \gamma^- \Delta^- \right]_b \\
 &= g\delta^3(x-y) \left[\bar{\varphi}(x) \gamma^- \Delta^- \right]_b, \tag{4.141}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\mathcal{A}-\bar{\lambda}_b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\bar{\lambda}_b}^{(1)}(y)}{\delta \mathcal{A}_-(x)} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\lambda}_b}^{(1)}(y)} [\Pi^-(x)] \\
 &= \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_-(x)} \left[\left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^y - g\mathcal{A}_-(y) \right) - m \right] \right\}_{bc} \varphi_c(y) \right] \\
 &= -g \frac{\delta \mathcal{A}_-(y)}{\delta \mathcal{A}_-(x)} \left[\Delta^+ \gamma^- \varphi(y) \right]_b = -g\delta^3(x-y) \left[\Delta^+ \gamma^- \varphi(y) \right]_b \\
 &= -g\delta^3(x-y) \left[\Delta^+ \gamma^- \varphi(x) \right]_b. \tag{4.142}
 \end{aligned}$$

Para el caso en que $\mathcal{A} = \Pi^-$, se obtiene que

$$M_{\Pi^-B}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \Pi^-(x)}, \tag{4.143}$$

con lo cual

$$M_{\Pi^-A_-}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_{A_-}^{(1)}(y)}{\delta \Pi^-(x)} = \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \Pi^-(x)} = \delta^3(x-y), \tag{4.144}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\Pi^-B}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \Pi^-(x)} = \frac{\delta}{\delta \Pi^-(x)} \left[\partial_-^y \Pi^-(y) - g\bar{\varphi}(y) \gamma^+ \varphi(y) \right] \\
 &= \partial_-^y \frac{\delta \Pi^-(y)}{\delta \Pi^-(x)} = \partial_-^y \delta^3(x-y) = -\partial_-^x \delta^3(x-y). \tag{4.145}
 \end{aligned}$$

Finalmente, cuando la fila corresponde a $\mathcal{A} = \beta$, resulta en:

$$\begin{aligned}
 M_{\beta B}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_{\beta}^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)} \\
 &= \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(x)} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(y)} \left[\partial_-^x \Pi^-(x) - g\bar{\varphi}_b(x) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(x) \right], \tag{4.146}
 \end{aligned}$$

donde los elementos diferentes de cero son:

$$\begin{aligned}
 M_{\beta\Pi^-}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^-}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\Pi^-}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\frac{\delta}{\delta \Pi^-(\mathbf{y})} \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\partial_-^x \frac{\delta \Pi^-(\mathbf{x})}{\delta \Pi^-(\mathbf{y})} = -\partial_-^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \tag{4.147}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\beta\varphi_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\varphi_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\frac{\delta}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \tag{4.148} \\
 &= -g \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{x})}{\delta \varphi_b(\mathbf{y})} \left[\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^+ \right]_c = -g \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^+ \right]_b.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\beta\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(1)}(\mathbf{y})} \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= -\frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \left[\partial_-^x \Pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{bc}^+ \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \tag{4.149} \\
 &= g \frac{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})}{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})} \left[\gamma^+ \varphi(\mathbf{x}) \right]_a = g \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\gamma^+ \varphi(\mathbf{x}) \right]_b.
 \end{aligned}$$

Entonces, se concluye que la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tendrá la siguiente representación:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix}
 \varphi_a(\mathbf{x}) & \varphi_b(\mathbf{y}) & \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \\
 \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) & 0 & -i(\gamma^+)^T_{ab} \\
 \Lambda_-(\mathbf{x}) & -i\gamma^+_{ab} & 0 \\
 \Pi^-(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\
 \lambda_a(\mathbf{x}) & 0 & 0 \\
 \bar{\lambda}_a(\mathbf{x}) & \{\Delta^+ [\gamma^- (i\partial^x - g\Lambda_-(\mathbf{x})) - m]\}_{ab} & \{[\gamma^- (i\partial^x + g\Lambda_-(\mathbf{x})) + m] \Delta^-\}_{ab}^T \\
 \beta(\mathbf{x}) & -g[\bar{\varphi}(\mathbf{x})\gamma^+]_b & g[\gamma^+\varphi(\mathbf{x})]_b \\
 \Lambda_-(\mathbf{y}) & \Pi^-(\mathbf{y}) & \lambda_b(\mathbf{y}) \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\{[\gamma^- (i\partial^x - g\Lambda_-(\mathbf{x})) - m] \Delta^-\}_{ab} \\
 0 & -1 & g[\bar{\varphi}(\mathbf{x})\gamma^-\Delta^-]_b \\
 1 & 0 & 0 \\
 -g[\bar{\varphi}(\mathbf{x})\gamma^-\Delta^-]_a & 0 & 0 \\
 g[\Delta^+\gamma^-\varphi(\mathbf{x})]_a & 0 & 0 \\
 0 & -\partial^x & 0 \\
 \bar{\lambda}_b(\mathbf{y}) & \beta(\mathbf{y}) \\
 -\{\Delta^+ [\gamma^- (i\partial^x + g\Lambda_-(\mathbf{x})) + m]\}_{ab}^T & g[\bar{\varphi}(\mathbf{x})\gamma^+]_a \\
 0 & -g[\gamma^+\varphi(\mathbf{x})]_a \\
 -g[\Delta^+\gamma^-\varphi(\mathbf{x})]_b & 0 \\
 0 & -\partial^x \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0
 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.150)$$

Sin embargo, del álgebra de las matrices γ se determina que:

$$\begin{aligned}
 \gamma^-\Delta^- &= \frac{1}{2}\gamma^-\gamma^+\gamma^- = \frac{1}{2}\gamma^-(2 - \gamma^-\gamma^+) = \gamma^-, \\
 \Delta^+\gamma^- &= \frac{1}{2}\gamma^-\gamma^+\gamma^- = \frac{1}{2}\gamma^-(2 - \gamma^-\gamma^+) = \gamma^-,
 \end{aligned} \quad (4.151)$$

de manera que la matriz $M_{AB}^{(1)}(x, y)$ se puede expresar en la forma:

$$M_{AB}^{(1)}(x, y) = \begin{pmatrix}
 & \varphi_b(y) & \bar{\varphi}_b(y) \\
 \varphi_a(x) & 0 & -i(\gamma^+)_{ab}^T \\
 \bar{\varphi}_a(x) & -i\gamma_{ab}^+ & 0 \\
 A_-(x) & 0 & 0 \\
 \Pi^-(x) & 0 & 0 \\
 \lambda_a(x) & 0 & \{[i\gamma^-(\partial^x - igA_-(x)) + m] \Delta^-\}_{ab}^T \\
 \bar{\lambda}_a(x) & \{\Delta^+ [i\gamma^-(\partial^x + igA_-(x)) - m]\}_{ab} & 0 \\
 \beta(x) & -g[\bar{\varphi}(x)\gamma^+]_b & g[\gamma^+\varphi(x)]_b \\
 \\
 A_-(y) & \Pi^-(y) & \lambda_b(y) \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\{[i\gamma^-(\partial^x + igA_-(x)) - m] \Delta^-\}_{ab} \\
 0 & -1 & g[\bar{\varphi}(x)\gamma^-]_b \\
 1 & 0 & 0 \\
 -g[\bar{\varphi}(x)\gamma^-]_a & 0 & 0 \\
 g[\gamma^-\varphi(x)]_a & 0 & 0 \\
 0 & -\partial^x & 0 \\
 \\
 \bar{\lambda}_b(y) & \beta(y) \\
 -\{\Delta^+ [i\gamma^-(\partial^x - igA_-(x)) + m]\}_{ab}^T & g[\bar{\varphi}(x)\gamma^+]_a \\
 0 & -g[\gamma^+\varphi(x)]_a \\
 -g[\gamma^-\varphi(x)]_b & 0 \\
 0 & -\partial^x \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0
 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{4.152}$$

Con el fin de mostrar que la matriz anterior es singular, es necesario utilizar la representación matricial de las matrices γ en dos dimensiones en las coordenadas de plano nulo. Así,

$$= \begin{pmatrix}
 \varphi_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{2} & 0 \\
 \varphi_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 A_-(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \Pi^-(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \lambda_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & i\sqrt{2}(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x})) & m & -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) \\
 \bar{\lambda}_1(\mathbf{x}) & -m & i\sqrt{2}(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x})) & 0 & 0 & g\sqrt{2}\varphi_2(\mathbf{x}) \\
 \beta(\mathbf{x}) & -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & 0 & 0 & g\sqrt{2}\varphi_1(\mathbf{x}) & 0 \\
 \Pi^-(\mathbf{y}) & \lambda_2(\mathbf{y}) & \bar{\lambda}_1(\mathbf{y}) & \beta(\mathbf{y}) & & \\
 0 & 0 & -m & g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & & \\
 0 & 0 & -i\sqrt{2}(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x})) & 0 & & \\
 0 & -i\sqrt{2}(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x})) & 0 & 0 & & \\
 0 & m & 0 & -g\sqrt{2}\varphi_1(\mathbf{x}) & & \\
 -1 & g\sqrt{2}\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & -g\sqrt{2}\varphi_2(\mathbf{x}) & 0 & & \\
 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 0 & 0 & 0 & 0 & & \\
 -\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & &
 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.154)$$

Ahora, se procede a demostrar que la matriz anterior es aún singular, lo que refleja la simetría gauge de la teoría que se está estudiando. Entonces, se procede a mostrar que esta matriz posee un vector nulo en la forma que se expresará de la siguiente forma:

$$\tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix}
 \varphi_1(\mathbf{x}) & \varphi_2(\mathbf{x}) & \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & A_-(\mathbf{x}) & \Pi^-(\mathbf{x}) & \lambda_2(\mathbf{x}) & \bar{\lambda}_1(\mathbf{x}) & \beta(\mathbf{x}) \\
 \alpha_1(\mathbf{x}) & \alpha_2(\mathbf{x}) & \alpha_3(\mathbf{x}) & \alpha_4(\mathbf{x}) & \alpha_5(\mathbf{x}) & \alpha_6(\mathbf{x}) & \alpha_7(\mathbf{x}) & \alpha_8(\mathbf{x}) & \alpha_9(\mathbf{x})
 \end{pmatrix}, \quad (4.155)$$

la cual posee elementos desconocidos que se desean determinar. Este vector deberá satisfacer la siguiente relación:

$$\int d^3x \tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3x \left(\begin{array}{ccccccccc} \alpha_1(\mathbf{x}) & \alpha_2(\mathbf{x}) & \alpha_3(\mathbf{x}) & \alpha_4(\mathbf{x}) & \alpha_5(\mathbf{x}) & \alpha_6(\mathbf{x}) & \alpha_7(\mathbf{x}) & \alpha_8(\mathbf{x}) & \alpha_9(\mathbf{x}) \end{array} \right) \\
 &\left(\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 0 & & 0 & & -i\sqrt{2} & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ -i\sqrt{2} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 1 \\ 0 & & 0 & & i\sqrt{2}(\partial^x - igA_-(\mathbf{x})) & & m & & -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) \\ -m & & i\sqrt{2}(\partial^x + igA_-(\mathbf{x})) & & 0 & & 0 & & g\sqrt{2}\varphi_2(\mathbf{x}) \\ -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & & 0 & & 0 & & g\sqrt{2}\varphi_1(\mathbf{x}) & & 0 \\ 0 & & 0 & & -m & & g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & & \\ 0 & & 0 & & -i\sqrt{2}(\partial^x - igA_-(\mathbf{x})) & & 0 & & \\ 0 & & -i\sqrt{2}(\partial^x + igA_-(\mathbf{x})) & & 0 & & 0 & & \\ 0 & & m & & 0 & & -g\sqrt{2}\varphi_1(\mathbf{x}) & & \\ -1 & & g\sqrt{2}\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & & -g\sqrt{2}\varphi_2(\mathbf{x}) & & 0 & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & -\partial^x & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ -\partial^x & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0). \tag{4.156}
 \end{aligned}$$

El producto matricial y la evaluación de la integral da como resultado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\alpha_4(\mathbf{y}) - m\alpha_8(\mathbf{y}) - g\sqrt{2}\alpha_9(\mathbf{y})\bar{\varphi}_2(\mathbf{y}) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\left(-\partial^y + igA_-(\mathbf{y})\right)\alpha_8(\mathbf{y}) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\left(-\partial^y - igA_-(\mathbf{y})\right)\alpha_7(\mathbf{y}) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\alpha_1(\mathbf{y}) + m\alpha_7(\mathbf{y}) + g\sqrt{2}\alpha_9(\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y}) &= 0 \\
 \alpha_6(\mathbf{y}) - g\sqrt{2}\alpha_7(\mathbf{y})\bar{\varphi}_1(\mathbf{y}) + g\sqrt{2}\alpha_8(\mathbf{y})\varphi_2(\mathbf{y}) &= 0 \\
 -\alpha_5(\mathbf{y}) + \partial^y\alpha_9(\mathbf{y}) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\left(-\partial^y + igA_-(\mathbf{y})\right)\alpha_3(\mathbf{y}) + m\alpha_4(\mathbf{y}) + g\sqrt{2}\alpha_5(\mathbf{y})\bar{\varphi}_1(\mathbf{y}) &= 0 \\
 -m\alpha_1(\mathbf{y}) - i\sqrt{2}\left(-\partial^y - igA_-(\mathbf{y})\right)\alpha_2(\mathbf{y}) - g\sqrt{2}\alpha_5(\mathbf{y})\varphi_2(\mathbf{y}) &= 0 \\
 g\sqrt{2}\alpha_1(\mathbf{y})\bar{\varphi}_2(\mathbf{y}) - g\sqrt{2}\alpha_4(\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y}) + \partial^y\alpha_6(\mathbf{y}) &= 0, \tag{4.157}
 \end{aligned}$$

siendo que su solución establece las siguientes relaciones para las componentes del vector

nulo:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(y) &= -ig\alpha_9(y) \varphi_1(y), \\
 \alpha_2(y) &= -\frac{1}{i\sqrt{2}(\partial_-^y + igA_-(y))} \left(igm\alpha_9(y) \varphi_1(y) - g\sqrt{2}\partial_-^y \alpha_9(y) \varphi_2(y) \right), \\
 \alpha_3(y) &= -\frac{1}{i\sqrt{2}(\partial_-^y - igA_-(y))} \left(igm\alpha_9(y) \bar{\varphi}_2(y) + g\sqrt{2}\partial_-^y \alpha_9(y) \bar{\varphi}_1(y) \right), \\
 \alpha_4(y) &= ig\alpha_9(y) \bar{\varphi}_2(y), \\
 \alpha_5(y) &= \partial_-^y \alpha_9(y), \\
 \alpha_6(y) &= 0, \\
 \alpha_7(y) &= 0, \\
 \alpha_8(y) &= 0,, \tag{4.158}
 \end{aligned}$$

donde α_9 esta indeterminado. Por tanto, $\tilde{v}^{A(1)}(x)$ se expresa como:

$$\tilde{v}^{A(1)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \bar{\varphi}_1(x) & \bar{\varphi}_2(x) & A_-(x) & \Pi^-(x) & \lambda_2(x) & \bar{\lambda}_1(x) & \beta(x) \\ \alpha_1(x) & \alpha_2(x) & \alpha_3(x) & \alpha_4(x) & \alpha_5(x) & 0 & 0 & 0 & \alpha_9(x) \end{pmatrix}.$$

Ahora, si existe un vínculo adicional, este deberá resultar de

$$\begin{aligned}
 \Omega_4^{(1)} &= \int d^3x \tilde{v}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Lambda}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &= \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_1}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_1}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_2}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\varphi_2}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\bar{\varphi}_1}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_1}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\bar{\varphi}_2}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\bar{\varphi}_2}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{A_-}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_-}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\beta}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\beta}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &= \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_1}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \varphi_1(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_2}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \varphi_2(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\bar{\varphi}_1}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_1(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\bar{\varphi}_2}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_2(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{A_-}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta A_-(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\beta}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \beta(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &= \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \varphi_a(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) + \int d^3x \tilde{v}_{\bar{\varphi}_a}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\varphi}_a(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y) \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{A_-}^{A(1)}(x) \frac{\delta}{\delta A_-(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \partial_{\underline{y}}^y \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}c}^- + \frac{i}{2} \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \partial_{\underline{y}}^y \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}c}^- \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{\delta \varphi_b(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) + g A_{\underline{y}}(\mathbf{y}) \frac{\delta \varphi_c(\mathbf{y})}{\delta \varphi_a(\mathbf{x})} \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}c}^- \right] \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \gamma_{\underline{b}c}^- \partial_{\underline{y}}^y \varphi_c(\mathbf{y}) + \frac{i}{2} \partial_{\underline{y}}^y \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \gamma_{\underline{b}c}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. + m \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \varphi_b(\mathbf{y}) + g A_{\underline{y}}(\mathbf{y}) \frac{\delta \bar{\varphi}_b(\mathbf{y})}{\delta \bar{\varphi}_a(\mathbf{x})} \gamma_{\underline{b}c}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\Lambda_{\underline{a}}}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[g \frac{\delta A_{\underline{y}}(\mathbf{y})}{\delta A_{\underline{a}}(\mathbf{x})} \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}c}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 \\
 &= - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \underbrace{\partial_{\underline{y}}^y}_{-\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}a}^- + \frac{i}{2} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \partial_{\underline{y}}^y \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}a}^- \right. \\
 &\quad \left. + m \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \bar{\varphi}_a(\mathbf{y}) + g A_{\underline{y}}(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}a}^- \right] \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[-\frac{i}{2} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \gamma_{\underline{a}c}^- \partial_{\underline{y}}^y \varphi_c(\mathbf{y}) + \frac{i}{2} \underbrace{\partial_{\underline{y}}^y}_{-\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \gamma_{\underline{a}c}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right. \\
 &\quad \left. + m \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \varphi_a(\mathbf{y}) + g A_{\underline{y}}(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \gamma_{\underline{a}c}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\Lambda_{\underline{a}}}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[g \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \gamma_{\underline{b}c}^- \varphi_c(\mathbf{y}) \right] \\
 \\
 &= - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[i \partial_{\underline{x}}^x \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{\underline{b}a}^- + m \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) + g A_{\underline{x}}(\mathbf{x}) \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{\underline{b}a}^- \right] \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[-i \gamma_{\underline{a}c}^- \partial_{\underline{x}}^x \varphi_c(\mathbf{x}) + m \varphi_a(\mathbf{x}) \right. \\
 &\quad \left. + g A_{\underline{x}}(\mathbf{x}) \gamma_{\underline{a}c}^- \varphi_c(\mathbf{x}) \right] + \int d^3x \tilde{v}_{\Lambda_{\underline{a}}}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{\underline{b}c}^- \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 &= - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[\bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) i \left(\partial_{\underline{x}}^x - i g A_{\underline{x}}(\mathbf{x}) \right) \gamma_{\underline{b}a}^- + m \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) \right] \\
 &\quad - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[i \gamma_{\underline{a}c}^- \left(\partial_{\underline{x}}^x + i g A_{\underline{x}}(\mathbf{x}) \right) \varphi_c(\mathbf{x}) - m \varphi_a(\mathbf{x}) \right] \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\Lambda_{\underline{a}}}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[g \bar{\varphi}_b(\mathbf{x}) \gamma_{\underline{b}c}^- \varphi_c(\mathbf{x}) \right] \\
 \\
 &= - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left[i \left(\partial_{\underline{x}}^x - i g A_{\underline{x}}(\mathbf{x}) \right) \gamma^- + m \right] \right\}_a \\
 &\quad - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_a}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \left[i \gamma^- \left(\partial_{\underline{x}}^x + i g A_{\underline{x}}(\mathbf{x}) \right) - m \right] \varphi(\mathbf{x}) \right\}_a \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\Lambda_{\underline{a}}}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[g \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^- \varphi(\mathbf{x}) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_1}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left[i \left(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}) \right) \gamma^- + m \right] \right\}_1 \\
 &\quad - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_2}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left[i \left(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}) \right) \gamma^- + m \right] \right\}_2 \\
 &\quad - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_1}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \left[i\gamma^- \left(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}) \right) - m \right] \varphi(\mathbf{x}) \right\}_1 \\
 &\quad - \int d^3x \tilde{v}_{\varphi_2}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \left[i\gamma^- \left(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}) \right) - m \right] \varphi(\mathbf{x}) \right\}_2 \\
 &\quad + \int d^3x \tilde{v}_{\Lambda_-}^{\Lambda(1)}(\mathbf{x}) \left[g\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^- \varphi(\mathbf{x}) \right].
 \end{aligned}$$

De los vínculos $(\Omega_1^{(0)}, \Omega_2^{(0)})$ se puede determinar que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) &= -\frac{m}{\sqrt{2}i(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}))} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}), \\
 \varphi_2(\mathbf{x}) &= \frac{m}{\sqrt{2}i(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}))} \varphi_1(\mathbf{x}).
 \end{aligned} \tag{4.159}$$

Ahora, al utilizar los resultados anteriores, es posible mostrar en forma matricial,

$$\begin{aligned}
 \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left[i \left(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}) \right) \gamma^- + m \right] &= \begin{pmatrix} m\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) & \sqrt{2}i(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}))\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) + m\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{m^2}{\sqrt{2}i(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}))} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix}, \\
 \left[i \left(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}) \right) \gamma^- - m \right] \varphi(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} -m\varphi_1(\mathbf{x}) + \sqrt{2}i(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}))\varphi_2(\mathbf{x}) \\ -m\varphi_2(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{m^2}{\sqrt{2}i(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}))} \varphi_1(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.160}$$

Siendo

$$\begin{aligned}
 \alpha_1(\mathbf{y}) &= -ig\alpha_9(\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y}), \\
 \alpha_4(\mathbf{y}) &= ig\alpha_9(\mathbf{y})\bar{\varphi}_2(\mathbf{y}), \\
 \alpha_5(\mathbf{y}) &= \partial_-^y \alpha_9(\mathbf{y}),
 \end{aligned} \tag{4.161}$$

el vínculo $\Omega^{(1)}$ se reduce a

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} &= - \int d^3x \alpha_1(\mathbf{x}) \left\{ \bar{\varphi}(\mathbf{x}) \left[i \left(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}) \right) \gamma^- + m \right] \right\}_1 - \int d^3x \alpha_4(\mathbf{x}) \\
 &\quad \left\{ \left[i\gamma^- \left(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}) \right) - m \right] \varphi(\mathbf{x}) \right\}_2 + \int d^3x \alpha_5(\mathbf{x}) \left[g\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \gamma^- \varphi(\mathbf{x}) \right] \\
 &= - \int d^3x [-ig\alpha_9(\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y})] \left[-\frac{m^2}{\sqrt{2}i(\partial_-^x - igA_-(\mathbf{x}))} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \right] - \int d^3x [ig\alpha_9(\mathbf{y})\bar{\varphi}_2(\mathbf{y})] \\
 &\quad \left[-\frac{m^2}{\sqrt{2}i(\partial_-^x + igA_-(\mathbf{x}))} \varphi_1(\mathbf{x}) \right] + \int d^3x \partial_-^y \alpha_9(\mathbf{y}) \left[g\sqrt{2}\bar{\varphi}_1(\mathbf{x})\varphi_2(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \text{img} \int d^3x \alpha_9(\mathbf{y})\varphi_1(\mathbf{y})\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) + \text{img} \int d^3x \alpha_9(\mathbf{y})\bar{\varphi}_2(\mathbf{y})\varphi_2(\mathbf{x}) \\
 &\quad + g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^y \alpha_9(\mathbf{y})\bar{\varphi}_1(\mathbf{x})\varphi_2(\mathbf{x}).
 \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que las relaciones (4.159) se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} -\sqrt{2}i \left(\partial_-^x - igA_- \right) \bar{\varphi}_1(x) &= m\bar{\varphi}_2(x) \\ \sqrt{2}i \left(\partial_-^x + igA_- \right) \varphi_2(x) &= m\varphi_1(x), \end{aligned} \quad (4.162)$$

se determina

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= ig \int d^3x \alpha_\varphi(y) \left[\sqrt{2}i \left(\partial_-^x + igA_- \right) \varphi_2(x) \right] \bar{\varphi}_1(x) + ig \int d^3x \alpha_\varphi(y) \\ &\quad \left[-\sqrt{2}i \left(\partial_-^x - igA_- \right) \bar{\varphi}_1(x) \right] \varphi_2(x) + g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^y \alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \\ &= \sqrt{2}g \int d^3x \alpha_\varphi(y) \left[-(\partial_-^x \varphi_2(x)) \bar{\varphi}_1(x) - igA_-(x) \varphi_2(x) \bar{\varphi}_1(x) + (\partial_-^x \bar{\varphi}_1(x)) \varphi_2(x) \right. \\ &\quad \left. - igA_-(x) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \right] + g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^y \alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \\ &= \sqrt{2}g \int d^3x \alpha_\varphi(y) \left[\bar{\varphi}_1(x) (\partial_-^x \varphi_2(x)) + igA_-(x) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) + (\partial_-^x \bar{\varphi}_1(x)) \varphi_2(x) \right. \\ &\quad \left. - igA_-(x) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \right] + g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^y \alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \\ &= \sqrt{2}g \int d^3x \alpha_\varphi(y) \partial_-^x \left[\bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \right] + g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^y \alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \\ &= \sqrt{2}g \int d^3x \partial_-^x \left[\alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \right] - g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^x \alpha_\varphi(y) \left[\bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \right] \\ &\quad + g\sqrt{2} \int d^3x \partial_-^y \alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \\ &= \sqrt{2}g \int d^3x \partial_-^x \left[\alpha_\varphi(y) \bar{\varphi}_1(x) \varphi_2(x) \right], \\ &= 0, \end{aligned}$$

debido a las condiciones de frontera.

Este resultado indica que el modo cero no dará origen a un nuevo vínculo Lagrangiano, lo que implica que la matriz simpléctica continúa siendo singular. Esto confirma que la electrodinámica cuántica en las coordenadas de plano nulo sigue siendo una teoría gauge. Para obtener una matriz simpléctica regular, se deberá adicionar un término de gauge fixing, para lo cual se escogerá como tal el gauge de Plano Nulo $\Theta = A_-(x) = 0$. Al utilizar el multiplicador de Lagrange $\eta(x)$, se aumentará la dimensión del espacio de configuración y se podrá incorporar la condición de gauge al Lagrangiano, de manera que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} &= \Pi^- \partial_+ A_- - \frac{i}{2} (\partial_+ \varphi_c) \bar{\varphi}_b \gamma_{bc}^+ - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\varphi}_b) \gamma_{bc}^+ \varphi_c + \Omega_1^{(0)} \dot{\lambda} + \dot{\bar{\lambda}} \Omega_2^{(0)} \\ &\quad + \Omega_3^{(0)} \dot{\beta} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)}, \end{aligned} \quad (4.163)$$

donde

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_{\Omega_i^{(0)}, \Omega^{(1)}, \Theta=0}^{(1)} \quad (4.164)$$

es el potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$, el cual se puede expresar en la forma:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \Pi^- \Pi^- - \frac{i}{2} \bar{\varphi} \gamma^- \partial_- \varphi + \frac{i}{2} \partial_- \bar{\varphi} \gamma^- \varphi + m \bar{\varphi} \varphi. \quad (4.165)$$

Ahora, se introduce las nuevas variables simplécticas $\xi_k^{(2)}$, las cuales se definen como: $\xi_1^{(2)} \equiv \xi_{\varphi_a}^{(2)} = \varphi_a$, $\xi_2^{(2)} \equiv \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(2)} = \bar{\varphi}_a$, $\xi_3^{(2)} \equiv \xi_{\lambda_-}^{(2)} = \lambda_-$, $\xi_4^{(2)} \equiv \xi_{\Pi^-}^{(2)} = \Pi^-$, $\xi_5^{(2)} \equiv \xi_{\lambda}^{(2)} = \lambda$, $\xi_6^{(2)} \equiv \xi_{\bar{\lambda}}^{(2)} = \bar{\lambda}$, $\xi_7^{(2)} \equiv \xi_{\beta}^{(2)} = \beta$ y $\xi_8^{(2)} \equiv \xi_{\eta}^{(2)} = \eta$.

De la expresión (4.163) se puede determinar:

$$\begin{aligned}
 K_1^{(2)} &\equiv K_{\varphi_b}^{(2)} = -\frac{i}{2} \bar{\varphi}_c \gamma_{cb}^+ & , & & K_2^{(2)} &\equiv K_{\bar{\varphi}_b}^{(2)} = -\frac{i}{2} \gamma_{bc}^+ \varphi_c, \\
 K_3^{(2)} &\equiv K_{\lambda_-}^{(2)} = \Pi^- & , & & K_4^{(2)} &\equiv K_{\Pi^-}^{(2)} = 0, \\
 K_5^{(2)} &\equiv K_{\lambda_b}^{(2)} = \Omega_{1_b}^{(0)} = \bar{\varphi}_c(x) \left\{ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x + g\lambda_-(x) \right) + m \right] \Delta^- \right\}_{cb}, \\
 K_6^{(2)} &\equiv K_{\bar{\lambda}_b}^{(2)} = \Omega_{2_b}^{(0)} = \left\{ \Delta^+ \left[\gamma^- \left(i\partial_-^x - g\lambda_-(x) \right) - m \right] \right\}_{bc} \varphi_c(x), \\
 K_7^{(2)} &\equiv K_{\beta}^{(2)} = \Omega_3^{(0)} = \partial_-^x \Pi^-(x) - g\bar{\varphi}(x) \gamma^+ \varphi(x) \\
 K_8^{(2)} &\equiv K_{\eta}^{(2)} = \Theta = \lambda_-(x).
 \end{aligned} \tag{4.166}$$

A su vez, las componentes de la nueva matriz simpléctica son determinadas por:

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(2)}(y)}{\delta \xi_A^{(2)}(x)} - (-1)^{n_A n_B} \frac{\delta K_A^{(2)}(x)}{\delta \xi_B^{(2)}(y)}, \tag{4.167}$$

de donde se determina que la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(x, y)$ tiene la forma:

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \begin{pmatrix}
 & \varphi_b(y) & \bar{\varphi}_b(y) & \lambda_-(y) & \Pi^-(y) \\
 \varphi_a(x) & 0 & -i(\gamma^+)_{ab}^T & 0 & 0 \\
 \bar{\varphi}_a(x) & -i\gamma_{ab}^+ & 0 & 0 & 0 \\
 \lambda_-(x) & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 \Pi^-(x) & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \lambda_a(x) & 0 & [(i\gamma^- \partial_-^x + m) \Delta^-]_{ab}^T & 0 & 0 \\
 \bar{\lambda}_a(x) & [\Delta^+ (i\gamma^- \partial_-^x - m)]_{ab} & 0 & 0 & 0 \\
 \beta(x) & -g[\bar{\varphi}(x) \gamma^+]_b & g[\gamma^+ \varphi(x)]_b & 0 & -\partial_-^x \\
 \eta(x) & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 & \lambda_b(y) & \bar{\lambda}_b(y) & \beta(y) & \eta(y) \\
 & 0 & -[\Delta^+ (i\gamma^- \partial_-^x + m)]_{ab}^T & g[\bar{\varphi}(x) \gamma^+]_a & 0 \\
 & -[(i\gamma^- \partial_-^x - m) \Delta^-]_{ab} & 0 & -g[\gamma^+ \varphi(x)]_a & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{4.168}$$

Esta matriz no es singular y por ello se deberá calcular su inversa $[M^{CB(2)}]^{-1}(x, y)$, la cual debe satisfacer la ecuación:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(x, z) [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \delta_{\Lambda}^B \delta^3(x - y). \quad (4.171)$$

Se propondrá que la matriz $[M^{CB(2)}]^{-1}(x, y)$ se expresa como:

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_1(y) & \varphi_2(y) & \bar{\varphi}_1(y) & \bar{\varphi}_2(y) & A_-(y) & \Pi^-(y) & \lambda_2(y) \\ \varphi_1(z) & A_1(z, y) & A_2(z, y) & A_3(z, y) & A_4(z, y) & A_5(z, y) & A_6(z, y) & A_7(z, y) \\ \varphi_2(z) & B_1(z, y) & B_2(z, y) & B_3(z, y) & B_4(z, y) & B_5(z, y) & B_6(z, y) & B_7(z, y) \\ \bar{\varphi}_1(z) & C_1(z, y) & C_2(z, y) & C_3(z, y) & C_4(z, y) & C_5(z, y) & C_6(z, y) & C_7(z, y) \\ \bar{\varphi}_2(z) & D_1(z, y) & D_2(z, y) & D_3(z, y) & D_4(z, y) & D_5(z, y) & D_6(z, y) & D_7(z, y) \\ A_-(z) & E_1(z, y) & E_2(z, y) & E_3(z, y) & E_4(z, y) & E_5(z, y) & E_6(z, y) & E_7(z, y) \\ \Pi^-(z) & F_1(z, y) & F_2(z, y) & F_3(z, y) & F_4(z, y) & F_5(z, y) & F_6(z, y) & F_7(z, y) \\ \lambda_2(z) & G_1(z, y) & G_2(z, y) & G_3(z, y) & G_4(z, y) & G_5(z, y) & G_6(z, y) & G_7(z, y) \\ \bar{\lambda}_1(z) & H_1(z, y) & H_2(z, y) & H_3(z, y) & H_4(z, y) & H_5(z, y) & H_6(z, y) & H_7(z, y) \\ \beta(z) & J_1(z, y) & J_2(z, y) & J_3(z, y) & J_4(z, y) & J_5(z, y) & J_6(z, y) & J_7(z, y) \\ \eta(z) & K_1(z, y) & K_2(z, y) & K_3(z, y) & K_4(z, y) & K_5(z, y) & K_6(z, y) & K_7(z, y) \\ \bar{\lambda}_1(y) & \beta(y) & \eta(y) & & & & & \\ A_8(z, y) & A_9(z, y) & A_{10}(z, y) & & & & & \\ B_8(z, y) & B_9(z, y) & B_{10}(z, y) & & & & & \\ C_8(z, y) & C_9(z, y) & C_{10}(z, y) & & & & & \\ D_8(z, y) & D_9(z, y) & D_{10}(z, y) & & & & & \\ E_8(z, y) & E_9(z, y) & E_{10}(z, y) & & & & & \\ F_8(z, y) & F_9(z, y) & F_{10}(z, y) & & & & & \\ G_8(z, y) & G_9(z, y) & G_{10}(z, y) & & & & & \\ H_8(z, y) & H_9(z, y) & H_{10}(z, y) & & & & & \\ J_8(z, y) & J_9(z, y) & J_{10}(z, y) & & & & & \\ K_8(z, y) & K_9(z, y) & K_{10}(z, y) & & & & & \end{pmatrix}, \quad (4.172)$$

siendo que sus componentes son funciones que se deben determinar. Substituyendo la expresión anterior en (4.171) permite deducir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -i\sqrt{2}D_1(x, y) - mH_1(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_1(x, y) &= \delta^3(x - y) \\ -i\sqrt{2}D_2(x, y) - mH_2(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_2(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_3(x, y) - mH_3(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_3(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_4(x, y) - mH_4(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_4(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_5(x, y) - mH_5(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_5(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_6(x, y) - mH_6(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_6(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_7(x, y) - mH_7(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_7(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_8(x, y) - mH_8(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_8(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_9(x, y) - mH_9(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_9(x, y) &= 0 \\ -i\sqrt{2}D_{10}(x, y) - mH_{10}(x, y) + g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) J_{10}(x, y) &= 0, \end{aligned} \quad (4.173)$$

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_1(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_2(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_3(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_4(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_6(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_7(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_8(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_9(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- H_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.174}$$

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_1(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_2(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_3(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_4(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_6(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_7(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_8(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_9(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}\partial_x^- G_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.175}$$

$$\begin{aligned}
 -i\sqrt{2}A_1(x, y) + mG_1(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_1(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_2(x, y) + mG_2(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_2(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_3(x, y) + mG_3(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_3(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_4(x, y) + mG_4(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_4(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -i\sqrt{2}A_5(x, y) + mG_5(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_5(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_6(x, y) + mG_6(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_6(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_7(x, y) + mG_7(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_7(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_8(x, y) + mG_8(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_8(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_9(x, y) + mG_9(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_9(x, y) &= 0 \\
 -i\sqrt{2}A_{10}(x, y) + mG_{10}(x, y) - g\sqrt{2}\varphi_1(x) J_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.176}$$

$$\begin{aligned}
 -F_1(x, y) + K_1(x, y) &= 0 \\
 -F_2(x, y) + K_2(x, y) &= 0 \\
 -F_3(x, y) + K_3(x, y) &= 0 \\
 -F_4(x, y) + K_4(x, y) &= 0 \\
 -F_5(x, y) + K_5(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -F_6(x, y) + K_6(x, y) &= 0 \\
 -F_7(x, y) + K_7(x, y) &= 0 \\
 -F_8(x, y) + K_8(x, y) &= 0 \\
 -F_9(x, y) + K_9(x, y) &= 0 \\
 -F_{10}(x, y) + K_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.177}$$

$$\begin{aligned}
 E_1(x, y) - \partial_-^x J_1(x, y) &= 0 \\
 E_2(x, y) - \partial_-^x J_2(x, y) &= 0 \\
 E_3(x, y) - \partial_-^x J_3(x, y) &= 0 \\
 E_4(x, y) - \partial_-^x J_4(x, y) &= 0 \\
 E_5(x, y) - \partial_-^x J_5(x, y) &= 0 \\
 E_6(x, y) - \partial_-^x J_6(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 E_7(x, y) - \partial_-^x J_7(x, y) &= 0 \\
 E_8(x, y) - \partial_-^x J_8(x, y) &= 0 \\
 E_9(x, y) - \partial_-^x J_9(x, y) &= 0 \\
 E_{10}(x, y) - \partial_-^x J_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.178}$$

$$\begin{aligned}
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_1(x, y) + mD_1(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_2(x, y) + mD_2(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_3(x, y) + mD_3(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_4(x, y) + mD_4(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_5(x, y) + mD_5(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_6(x, y) + mD_6(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_7(x, y) + mD_7(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_8(x, y) + mD_8(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_9(x, y) + mD_9(x, y) &= 0 \\
 i\sqrt{2}\partial_-^x C_{10}(x, y) + mD_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.179}$$

$$\begin{aligned}
 -mA_1(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_1(x, y) &= 0 \\
 -mA_2(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_2(x, y) &= 0 \\
 -mA_3(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_3(x, y) &= 0 \\
 -mA_4(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_4(x, y) &= 0 \\
 -mA_5(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_5(x, y) &= 0 \\
 -mA_6(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_6(x, y) &= 0 \\
 -mA_7(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_7(x, y) &= 0 \\
 -mA_8(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_8(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -mA_9(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_9(x, y) &= 0 \\
 -mA_{10}(x, y) + i\sqrt{2}\partial_-^x B_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.180}$$

$$\begin{aligned}
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_1(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_1(x, y) - \partial_-^x F_1(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_2(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_2(x, y) - \partial_-^x F_2(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_3(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_3(x, y) - \partial_-^x F_3(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_4(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_4(x, y) - \partial_-^x F_4(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_5(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_5(x, y) - \partial_-^x F_5(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_6(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_6(x, y) - \partial_-^x F_6(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_7(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_7(x, y) - \partial_-^x F_7(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_8(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_8(x, y) - \partial_-^x F_8(x, y) &= 0 \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_9(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_9(x, y) - \partial_-^x F_9(x, y) &= \delta^3(x - y) \\
 -g\sqrt{2}\bar{\varphi}_2(x) A_{10}(x, y) + g\sqrt{2}\varphi_1(x) D_{10}(x, y) - \partial_-^x F_{10}(x, y) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.181}$$

$$\begin{aligned}
 -E_1(x, y) &= 0 \\
 -E_2(x, y) &= 0 \\
 -E_3(x, y) &= 0 \\
 -E_4(x, y) &= 0 \\
 -E_5(x, y) &= 0 \\
 -E_6(x, y) &= 0 \\
 -E_7(x, y) &= 0 \\
 -E_8(x, y) &= 0 \\
 -E_9(x, y) &= 0 \\
 -E_{10}(x, y) &= \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{4.182}$$

La solución del sistema de ecuaciones anteriores permite establecer que las componentes no nulas de $[M^{\text{CB}(2)}]^{-1}(x, y)$ son:

$$H_2(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \tag{4.183}$$

$$G_3(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad (4.184)$$

$$E_{10}(x, y) = -\delta^3(x - y), \quad E_i(x, y) = 0, \quad (4.185)$$

$$J_6(x, y) = -\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad J_{10}(x, y) = -\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad (4.186)$$

$$D_1(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta^3(x - y), \quad D_2(x, y) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad (4.187)$$

$$D_6(x, y) = ig\bar{\varphi}_2(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad D_{10}(x, y) = ig\bar{\varphi}_2(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$A_3(x, y) = \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad A_4(x, y) = \frac{i}{\sqrt{2}} \delta^3(x - y), \quad (4.188)$$

$$A_6(x, y) = -ig\varphi_1(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad A_{10}(x, y) = -ig\varphi_1(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$\begin{aligned} C_1(x, y) &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad C_2(x, y) = -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x \partial_-^x} \delta^3(x - y), \\ C_6(x, y) &= -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \quad C_7(x, y) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \\ C_{10}(x, y) &= -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \end{aligned} \quad (4.189)$$

$$\begin{aligned} B_3(x, y) &= -i \frac{m^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x \partial_-^x} \delta^3(x - y), \quad B_4(x, y) = \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\ B_6(x, y) &= -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\varphi_1(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \quad B_8(x, y) = -\frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\ B_{10}(x, y) &= -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\varphi_1(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \end{aligned} \quad (4.190)$$

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= ig \frac{1}{\partial_-^x} \left[\varphi_1(x) \delta^3(x - y) \right], \quad F_2(x, y) = -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\varphi_1(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\ F_3(x, y) &= -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \quad F_4(x, y) = -ig \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(x) \delta^3(x - y) \right], \\ F_9(x, y) &= -\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \end{aligned} \quad (4.191)$$

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= ig \frac{1}{\partial_-^x} \left[\varphi_1(x) \delta^3(x - y) \right], \quad K_2(x, y) = -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\varphi_1(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\ K_3(x, y) &= -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \quad K_4(x, y) = -ig \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(x) \delta^3(x - y) \right], \\ K_5(x, y) &= \delta^3(x - y), \quad K_9(x, y) = -\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (4.192)$$

de la variable simpléctica $\xi_k^{(2)}$, obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \xi_{\varphi_a}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{\bar{\varphi}_b}^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} &= \{ \varphi_a(\mathbf{x}), \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \} = \begin{pmatrix} A_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & A_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & B_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) & \frac{i}{\sqrt{2}} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x^- - y^-) & \frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{m}{2} \frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) & \frac{i}{\sqrt{2}} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2}{2\sqrt{2}} \frac{1}{2} |x^- - y^-| & \frac{m}{2} \frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) & \frac{i\sqrt{2}}{2} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{im^2\sqrt{2}}{8} |x^- - y^-| & \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{im^2}{8} |x^- - y^-| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} + \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\{ \varphi_a(\mathbf{x}), \bar{\varphi}_b(\mathbf{y}) \} = -\frac{im^2}{8} |x^- - y^-| \gamma_{ab}^+ + \frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) I_{ab} + \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \gamma_{ab}^-, \quad (4.195)$$

donde I es la matriz identidad. De forma similar:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \xi_{\varphi_a}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^-}^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} &= \{ \varphi_a(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \} = \begin{pmatrix} A_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ B_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -ig\varphi_1(\mathbf{x}) \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) \\ -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \frac{1}{\partial_x^-} \delta(x^- - y^-) \right] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{ig}{2} \varphi_1(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) \\ -\frac{mg}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\varphi_1(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) \right] \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{ig}{2} \varphi_1(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) \\ -\frac{mg}{4\sqrt{2}} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \varphi_1(\mathbf{v}) \epsilon(v^- - y^-) \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

con lo cual

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi_1(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} &= -\frac{ig}{2} \varphi_1(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) \\
 \left\{ \varphi_2(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} &= -\frac{mg}{4\sqrt{2}} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \varphi_1(\mathbf{v}) \epsilon(v^- - y^-). \quad (4.196)
 \end{aligned}$$

Ahora, con el fin de garantizar la validez de nuestros resultados, se van a comparar con aquellos derivados por el método de Dirac. De la definición del momento Π^- , se dedujo el siguiente vínculo:

$$\Pi^- = \partial_+ A_- - \partial_- A_+ = -\partial_- A_+. \quad (4.197)$$

De la referencia [6] se deduce que:

$$\{\varphi_a(x), A_+(y)\}_{D2} = \frac{g}{2} \left[i\varphi_a(x) |x-y| - \frac{i}{2} \int dv [\Delta^- \varphi(v)]_a \epsilon(x-v) \epsilon(v-y) \right], \quad (4.198)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \{\varphi_a(x), \Pi^-(y)\}_{D2} &= -\partial_-^y \{\varphi_a(x), A_+(y)\}_{D2} \\ &= -\frac{g}{2} \partial_-^y \left[i\varphi_a(x) |x-y| - \frac{i}{2} \int dv [\Delta^- \varphi(v)]_a \epsilon(x-v) \epsilon(v-y) \right] \\ &= -\frac{g}{2} \left[i\varphi_a(x) \partial_-^y |x-y| - \frac{i}{2} \int dv [\Delta^- \varphi(v)]_a \epsilon(x-v) \partial_-^y \epsilon(v-y) \right] \\ &= \frac{g}{2} \left[i\varphi_a(x) \epsilon(x^- - y^-) - i \int dv [\Delta^- \varphi(v)]_a \epsilon(x-v) \delta(v-y) \right] \\ &= \frac{g}{2} \left[i\varphi_a(x) \epsilon(x^- - y^-) - i [\Delta^- \varphi(y)]_a \epsilon(x-y) \right] \\ &= \frac{g}{2} \left[i \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \epsilon(x^- - y^-) - i \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix} \epsilon(x-y) \right]_a \\ &= i \frac{g}{2} \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ 0 \end{pmatrix}_a \epsilon(x^- - y^-), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\{\varphi_1(x), \Pi^-(y)\}_{D2} = i \frac{g}{2} \varphi_1(x) \epsilon(x^- - y^-). \quad (4.199)$$

En el gauge de plano nulo, la expresión (4.159) se deja como:

$$\varphi_1(x) = \frac{\sqrt{2}i}{m} \partial_-^x \varphi_2(x), \quad (4.200)$$

resultando en

$$\varphi_2(x) = -\frac{im}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \varphi_1(x) = -\frac{im}{2\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi_1(v), \quad (4.201)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \{\varphi_2(x), \Pi^-(y)\}_{D2} &= -\frac{im}{2\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \{\varphi_1(v), \pi^-(y)\}_{D2} \\ &= \frac{mg}{4\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi_1(v) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (4.202)$$

Finalmente, se calculan los corchetes generalizados asociados a $\bar{\varphi}$,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \xi_{\bar{\varphi}_a}^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^-}^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} = \begin{pmatrix} C_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ D_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{mg}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \frac{1}{\partial_-^x} \delta(x^- - y^-) \right] \\ ig \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \frac{1}{\partial_-^x} \delta(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{mg}{4\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\varphi}_2(v) \frac{1}{2} \epsilon(v^- - y^-) \\ \frac{ig}{2} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -\frac{mg}{2\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\varphi}_2(v) \frac{1}{2} \epsilon(v^- - y^-) \\ \frac{ig}{2} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.203}$$

Igualmente, al utilizar la referencia [6], de la expresión

$$\left\{ \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}), \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D2} = -\frac{g}{2} \left[i \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) |x - y| - \frac{i}{2} \int dv \epsilon(x - v) \epsilon(v - y) \left[\bar{\varphi}(v) \Delta^+ \right]_a \right], \tag{4.204}$$

se deduce que

$$\begin{aligned}
 \left\{ \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} &= -\partial_-^y \left\{ \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}), \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D2} \\
 &= \frac{g}{2} \left[i \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) \partial_-^y |x - y| - \frac{i}{2} \int dv \epsilon(x - v) \partial_-^y \epsilon(v - y) \left[\bar{\varphi}(v) \Delta^+ \right]_a \right] \\
 &= -\frac{g}{2} \left[i \bar{\varphi}_a(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-) - i \int dv \epsilon(x - v) \delta(v^- - y^-) \left[\bar{\varphi}(v) \Delta^+ \right]_a \right] \\
 &= -\frac{ig}{2} \left[\bar{\varphi}(x) - \bar{\varphi}(y) \Delta^+ \right]_a \epsilon(x^- - y^-) \\
 &= -\frac{ig}{2} \left[\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1(x) & \bar{\varphi}_2(x) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1(x) & 0 \end{pmatrix} \right]_a \epsilon(x^- - y^-) \\
 &= -\frac{ig}{2} \begin{pmatrix} 0 & \bar{\varphi}_2(x) \end{pmatrix}_a \epsilon(x^- - y^-),
 \end{aligned} \tag{4.205}$$

de donde se obtiene

$$\left\{ \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} = -\frac{ig}{2} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) \epsilon(x^- - y^-). \tag{4.206}$$

Ahora, a partir de la expresión (4.159)

$$-\sqrt{2} i \partial_-^x \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) = m \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}), \tag{4.207}$$

con lo cual

$$\bar{\varphi}_1(\mathbf{x}) = \frac{im}{\sqrt{2}} \frac{1}{\partial_-^x} \bar{\varphi}_2(\mathbf{x}) = \frac{im}{2\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\varphi}_2(v), \tag{4.208}$$

se determina que

$$\begin{aligned}
 \left\{ \bar{\varphi}_1(\mathbf{x}), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} &= \frac{im}{2\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \left\{ \bar{\varphi}_2(v), \Pi^-(\mathbf{y}) \right\} \\
 &= \frac{mg}{4\sqrt{2}} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\varphi}_2(v) \epsilon(v^- - y^-).
 \end{aligned} \tag{4.209}$$

Así, los resultados derivados con la formulación de Faddeev-Jackiw son consistentes con aquellos obtenidos por el método de Dirac para la electrodinámica cuántica en dos dimensiones en las coordenadas de plano nulo.

En este capítulo se aplicaron los formalismos desarrollados previamente al estudio explícito de diversos campos clásicos en coordenadas de plano nulo. Se analizaron en detalle el campo electromagnético, el campo de Dirac y la electrodinámica cuántica en dos dimensiones, poniendo especial énfasis en la identificación de los vínculos y de los grados de libertad físicos.

Para cada uno de los modelos considerados, se mostró cómo la formulación en el plano nulo modifica la estructura canónica usual, dando lugar a vínculos característicos asociados a las componentes no dinámicas de los campos. A pesar de estas diferencias formales, se demostró que las ecuaciones de movimiento y los resultados físicos obtenidos son consistentes con los derivados en formulaciones convencionales.

Un aspecto destacable es que el uso del formalismo de Faddeev-Jackiw permitió una identificación más directa de las variables independientes, evitando procedimientos de reducción excesivamente complejos. En el caso de la QED en dos dimensiones, el análisis confirmó la equivalencia entre los resultados obtenidos mediante los métodos de Dirac y de Faddeev-Jackiw, reforzando la consistencia del enfoque.

Este capítulo concluye que la formulación en el plano nulo, combinada con el formalismo simpléctico, constituye un marco eficaz y coherente para el estudio de campos clásicos, proporcionando una descripción clara de la dinámica y de la estructura de los vínculos.

Bibliografía

- [1] R. A. Neville and F. Rohrlich, "Quantum field theory off null planes," *Nuovo Cim. A*, vol. 1, pp. 625-644, 1971.
- [2] F. Rohrlich, "Null plane field theory," *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, vol. 8, pp. 277-322, 1971.
- [3] R. Casalbuoni, "The classical mechanics for Bose-Fermi systems", *Nuo. CimentoA*, vol. 33, no. 3, pp. 389-481, 1976.
- [4] J. Govaerts, "Hamiltonian Reduction of First-Order Actions", *Int. J. Mod. Phys.A*, vol. 5, no. 18, pp. 3625-3640, 1990.
- [5] E. C. Manavella, "Faddeev–Jackiw Formalim for Constrained Systems With Grassmann Dynamical Field Variables", *Int. J. Mod. Phys.A*, vol. 27, no. 24, 1250145, 2012.
- [6] R. Casana , B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, "The Schwinger model on the null-plane", *Int. J. Mod. Phys.E*, vol. 16, no. 9, pp. 2993-2997, 2007.
- [7] O.A. Acevedo , K.P. Gallo, B.M. Pimentel1 and G.E.R. Zambrano, "Campos clássicos no plano nulo", *Rev. Bras. Ens. Fis.* , vol. 43, pp. e20210200, 2021.

Capítulo 5

Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo

En este capítulo se procederá a realizar un estudio de la teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo. Inicialmente se realizará un análisis canónico de la teoría utilizando la formulación de Dirac, con el fin de deducir la estructura de vínculos de la teoría y compararla con los resultados, derivados en un trabajo anterior, con aquellos que resultan del análisis de la teoría en las coordenadas de instante forma. Dada la libertad de gauge de la teoría, se pretende deducir los corchetes de Dirac para los grados de libertad, utilizando la condición de gauge de plano nulo.

Posteriormente se procederá a realizar un estudio de la teoría utilizando la formulación de Faddeev-Jackiw. El objetivo será deducir todos los vínculos de Lagrangianos y demostrar que la libertad de gauge también se manifiesta en este formalismo. Para obtener los corchetes generalizados, nuevamente se impondrá la condición de gauge de plano nulo. De este modo, se pretende demostrar la equivalencia de los dos resultados.

5.1. Formulación de Dirac

La teoría electromagnética masiva es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana [1]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 \left[A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \right]^2, \quad (5.1)$$

a partir de la cual es posible deducir las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -F^{\nu\mu}, \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\theta)} = \frac{M^2}{e} \left[A^\nu + \frac{1}{e}\partial^\nu\theta \right]. \quad (5.2)$$

De la última expresión se determina que los momentos canónicos (π^μ, p_θ) conjugados a los campos (A_μ, θ) son:

$$\begin{aligned}\pi^\mu &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = -F^{+\mu} = F^{\mu+}, \\ p_\theta &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \theta)} = \frac{M^2}{e} \left[A^+ + \frac{1}{e} \partial^+ \theta \right] = \frac{M^2}{e} \left[A_- + \frac{1}{e} \partial_- \theta \right],\end{aligned}\quad (5.3)$$

con lo cual es posible deducir el siguiente conjunto de vínculos primarios [2]:

$$\begin{aligned}\Omega_1 &\equiv \pi^+ \approx 0, \\ \Omega_{2_a} &\equiv \pi^a - \partial_- A_a + \partial_a A_- \approx 0, \quad a = 1, 2 \\ \Omega_3 &\equiv p_\theta - \frac{M^2}{e} \left[A_- + \frac{1}{e} \partial_- \theta \right] \approx 0.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Con el fin de establecer la consistencia de los vínculos primarios, es necesario introducir, inicialmente, la densidad Hamiltoniana canónica, la cual es definida en la forma:

$$\mathcal{H}_C = \pi^\mu \partial_+ A_\mu + p_\theta \partial_+ \theta - \mathcal{L}. \quad (5.5)$$

Ahora, expresando la densidad Hamiltoniana \mathcal{L} en las coordenadas de plano nulo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 \left[A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^a \partial_+ A_a - \pi^a \partial_a A_+ - \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} + e A_+ p_\theta + p_\theta \partial_+ \theta \\ &\quad - \frac{1}{2} M^2 \left[A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right],\end{aligned}\quad (5.6)$$

se deduce que

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_C &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^- \partial_- A_+ + \pi^a \partial_a A_+ + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - e A_+ p_\theta \\ &\quad + \frac{1}{2} M^2 \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right).\end{aligned}\quad (5.7)$$

Así, el Hamiltoniano canónico tendrá la forma:

$$\begin{aligned}H_C &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^- \partial_- A_+ + \pi^a \partial_a A_+ + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - e A_+ p_\theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} M^2 \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \right].\end{aligned}\quad (5.8)$$

Sin embargo, para una teoría que posee vínculos, la dinámica de la misma es gobernada por el Hamiltoniano primario, que para nuestro caso será definido como:

$$H_P \equiv H_C + \int d^3y \left[u^1(y) \Omega_1(y) + u^{2_a}(y) \Omega_{2_a}(y) + u^3(y) \Omega_3(y) \right], \quad (5.9)$$

donde u^1 , u^{2a} y u^3 son multiplicadores de Lagrange a ser determinados. De este modo, la evolución temporal de cualquier variable dinámica $F(x)$ definida en el espacio fase $(A_\mu, \theta, \pi^\mu, p_\theta)$ es dada por:

$$\partial_+ F = \left\{ F(x), H_P \right\}. \quad (5.10)$$

En este espacio fase, los corchetes fundamentales de Poisson no nulos entre las coordenadas fundamentales $(A_\mu, \theta, \pi^\mu, p_\theta)$ se definen como:

$$\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \theta(x), p_\theta(y) \right\} = \delta^3(x-y). \quad (5.11)$$

Utilizando las relaciones obtenidas, tenemos:

$$\left\{ A_\mu(x), H_C \right\} = \delta_\mu^- \pi^-(x) + \delta_\mu^- \partial_-^x A_+(x) + \delta_\mu^a \partial_a^x A_+(x), \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \pi^\nu(x), H_C \right\} &= \delta_+^\nu \left[\partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \right] \\ &\quad - \delta_a^\nu \left[\partial_b^x F_{ab}(x) + M^2 \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right], \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\left\{ \theta(x), H_C \right\} = -e A_+(x), \quad (5.14)$$

$$\left\{ p_\theta(x), H_C \right\} = \frac{M^2}{e} \partial_a^x \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right), \quad (5.15)$$

las cuales se deducen a partir de (5.9) y (5.11). Igualmente, es posible demostrar que los únicos corchetes de Poisson no nulos entre los vínculos primarios son:

$$\left\{ \Omega_{2a}(x), \Omega_{2b}(y) \right\} = -2\delta_{ab} \partial_-^x \delta^3(x-y), \quad (5.16)$$

$$\left\{ \Omega_3(x), \Omega_3(y) \right\} = -\frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x \delta^3(x-y).$$

Así, la consistencia de los vínculos primarios determina que:

$$\begin{aligned} \partial_+^x \Omega_1(x) &= \left\{ \Omega_1(x), H_P \right\} = \left\{ \pi^+(x), H_C \right\} \\ &= \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \approx 0, \end{aligned}$$

lo que resulta en la existencia de un vínculo secundario que se denotara por:

$$\Omega_4(x) \equiv \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \approx 0. \quad (5.17)$$

De forma similar, al estudiar la consistencia de los vínculos Ω_{2a} y Ω_3 se obtiene que:

$$\begin{aligned} \partial_+^x \Omega_{2a}(x) &= - \left[\partial_b^x F_{ab}(x) + M^2 \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right] + \partial_a^x \pi^-(x) \\ &\quad - 2\partial_-^x u^{2a}(x) \approx 0, \end{aligned} \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}\partial_+^x \Omega_3(x) &= \frac{M^2}{e} \partial_a^x \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) - \frac{M^2}{e} \pi^-(x) \\ &\quad - \frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x u^3(x) \approx 0,\end{aligned}\tag{5.19}$$

lo que establece relaciones sobre los multiplicadores de Lagrange u^{2a} y u^3 implicando que no mas vínculos son generados a partir de Ω_{2a} y Ω_3 . Ahora, dada la presencia del vínculo secundario Ω_4 , es necesario analizar su consistencia, para lo cual se utilizarán las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}\left\{ \Omega_4(x), \Omega_1(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Omega_4(x), \Omega_{2b}(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Omega_4(x), \Omega_3(y) \right\} &= 0,\end{aligned}\tag{5.20}$$

de manera que resulta:

$$\partial_+^x \Omega_4(x) = \left\{ \Omega_4(x), H_P \right\} = 0.\tag{5.21}$$

Por lo tanto, no se generan más vínculos en la teoría, con lo cual se identifica a $(\Omega_1, \Omega_{2a}, \Omega_3, \Omega_4)$ como el conjunto máximo de vínculos del campo de Maxwell masivo en las coordenadas de plano nulo. De las relaciones (5.16) y (5.20), es posible concluir que (Ω_1, Ω_4) constituye un conjunto de vínculos de primera clase, en tanto que (Ω_{2a}, Ω_3) se identifican como vínculos de segunda clase.

Dada la libertad de gauge como consecuencia de la presencia de los vínculos de primeras clase, se debe considerar la correcta evolución temporal de los campos, la cual será mediada por el Hamiltoniano extendido que se define por:

$$\begin{aligned}H_E &\equiv H_C + \int d^3y \left[u^1(y) \Omega_1(y) + u^{2b}(y) \Omega_{2b}(y) \right. \\ &\quad \left. + u^3(y) \Omega_3(y) + u^4(y) \Omega_4(y) \right],\end{aligned}\tag{5.22}$$

a partir del cual es posible determinar que:

$$\begin{aligned}\partial_+ A_\mu(x) &= \delta_\mu^+ u^1(x) + \delta_\mu^- \left[\pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) - \partial_-^x u^4(x) \right] \\ &\quad + \delta_\mu^a \left[\partial_a^x A_+(x) + u^{2a}(x) - \partial_a^x u^4(x) \right],\end{aligned}\tag{5.23}$$

$$\begin{aligned}\partial_+ \pi^\nu(x) &= \delta_+^\nu \left[\partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \right] \\ &\quad + \delta_-^\nu \left[\partial_b^x u^{2b}(x) + \frac{M^2}{e} u^3(x) \right] \\ &\quad - \delta_a^\nu \left[\partial_b^x F_{ab}(x) + M^2 \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) + \partial_-^x u^{2a}(x) \right],\end{aligned}\tag{5.24}$$

$$\partial_+ \theta(x) = -eA_+(x) + u^3(x) + eu^4(x), \quad (5.25)$$

$$\partial_+ p_\theta(x) = \frac{M^2}{e} \partial_a^x \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) - \frac{M^2}{e^2} \partial_-^x u^3(x). \quad (5.26)$$

De las expresiones (5.23) y (5.24) se determina que:

$$u^3 = e \left(A_+ + \frac{1}{e} \partial_+ \theta \right) - eu^4, \quad (5.27)$$

$$u^{2a} = F^{a-} + \partial_a u^4, \quad (5.28)$$

de manera que

$$\begin{aligned} \partial_+ \pi^\nu &= \partial_+ F^{\nu+} = \delta_+^\nu \left[\partial_- \pi^- + \partial_a \pi^a + ep_\theta \right] \\ &+ \delta_-^\nu \left[\partial_b u^{2b} + \frac{M^2}{e} u^3 \right] \\ &- \delta_a^\nu \left[\partial_b F_{ab} + M^2 \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) + \partial_- u^{2a} \right]. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Esta relación permite deducir que:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + M^2 A^\mu = -\frac{M^2}{e} \partial^\mu \theta + \delta_-^\mu \left(-\partial_a \partial_a u^4 + M^2 u^4 \right) + \delta_a^\mu \left(\partial_- \partial_a u^4 \right). \quad (5.30)$$

En forma similar, combinando las ecuaciones (5.25) y (5.26), se puede determinar que:

$$\partial_\mu \left(A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \right) = \partial_-^x u^4(x). \quad (5.31)$$

Entonces, con el fin de garantizar la consistencia de las ecuaciones compatibles con la libertad de gauge de la teoría y aquellas derivadas en la formulación Lagrangiana, se deberá considerar $u^4 = 0$.

Ahora, con el fin de eliminar la libertad de gauge que tiene la teoría a consecuencia de los vínculos de primera clase,

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \partial_- \pi^- + \partial_a \pi^a + ep_\theta \approx 0, \quad (5.32)$$

será necesario introducir dos condiciones de gauge. Inicialmente, se considerarán las condiciones de gauge de plano nulo, las cuales son definidas por:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_-^x A_+ \approx 0. \quad (5.33)$$

Así, se introducirá la siguiente notación con el objetivo de incluir todos los vínculos junto

con las condiciones de gauge que caracterizan la teoría:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1(x) &\equiv \pi^+(x) \approx 0, \\
 \Theta_{2_b}(x) &\equiv \pi^b(x) - \partial_-^x A_b(x) + \partial_b^x A_-(x) \approx 0, \quad a = 1, 2 \\
 \Theta_3(x) &\equiv p_\theta(x) - \frac{M^2}{e} \left[A_-(x) + \frac{1}{e} \partial_-^x \theta(x) \right] \approx 0, \\
 \Theta_4(x) &\equiv \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \approx 0 \\
 \Theta_5(x) &\equiv A_-(x) \approx 0 \\
 \Theta_6(x) &\equiv \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.34}$$

A partir de los siguientes corchetes de Poisson no nulos,

$$\begin{aligned}
 \{ \Theta_{2_a}(x), \Theta_{2_b}(y) \} &= -2\delta_{ab} \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_3(x), \Theta_3(y) \} &= -\frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_1(x), \Theta_6(y) \} &= \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_6(x), \Theta_1(y) \} &= \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_{2_a}(x), \Theta_6(y) \} &= \partial_a^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_6(x), \Theta_{2_a}(y) \} &= \partial_a^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_3(x), \Theta_6(y) \} &= -\frac{M^2}{e} \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_6(x), \Theta_3(y) \} &= \frac{M^2}{e} \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_4(x), \Theta_5(y) \} &= -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_5(x), \Theta_4(y) \} &= -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_5(x), \Theta_6(y) \} &= \delta^3(x-y), \\
 \{ \Theta_6(x), \Theta_5(y) \} &= -\delta^3(x-y),
 \end{aligned} \tag{5.35}$$

es posible construir la matriz de vínculos de segunda clase $C(x, y)$ donde sus elementos son definidos en la forma:

$$C_{ij}(x, y) \equiv \{ \Theta_i(x), \Theta_j(y) \}. \tag{5.36}$$

En forma explícita, la matriz $C(x, y)$ se expresa como:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & -2\delta_{ab} \partial_-^x & 0 & 0 & 0 & \partial_a^x \\ 0 & 0 & -\frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x & 0 & 0 & -\frac{M^2}{e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & \partial_b^x & \frac{M^2}{e} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{5.37}$$

El método de Dirac requiere calcular la inversa de la matriz (5.37), para lo cual se propondrá que ésta sea de la forma:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} A_1(x, y) & A_{2_b}(x, y) & A_3(x, y) & A_4(x, y) & A_5(x, y) & A_6(x, y) \\ B_{1_a}(x, y) & B_{2_{ab}}(x, y) & B_{3_a}(x, y) & B_{4_a}(x, y) & B_{5_a}(x, y) & B_{6_a}(x, y) \\ D_1(x, y) & D_{2_b}(x, y) & D(x, y) & D_4(x, y) & D_5(x, y) & D_6(x, y) \\ E_1(x, y) & E_{2_b}(x, y) & E_3(x, y) & E_4(x, y) & E_5(x, y) & E_6(x, y) \\ F_1(x, y) & F_{2_b}(x, y) & F_3(x, y) & F_4(x, y) & F_5(x, y) & F_6(x, y) \\ G_1(x, y) & G_{2_b}(x, y) & G_3(x, y) & G_4(x, y) & G_5(x, y) & G_6(x, y) \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Las matrices (5.37) y (5.38) deberán satisfacer la siguiente identidad:

$$\int d^3z C(x, z) C^{-1}(z, y) = I \delta^3(x - y). \quad (5.39)$$

Al solucionar la ecuación (5.39) con el fin de determina las componentes de la matriz $C^{-1}(x, y)$ admite que esta tenga la siguiente forma:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} A_1(x, y) & A_{2_b}(x, y) & A_3(x, y) & A_4(x, y) & 0 & A_6(x, y) \\ B_{1_c}(x, y) & B_{2_{cb}}(x, y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1(x, y) & 0 & D_3(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ E_1(x, y) & 0 & 0 & 0 & E_5(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_4(x, y) & 0 & 0 \\ G_1(x, y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.40)$$

donde

$$\begin{aligned} A_1(x, y) &= -\frac{1}{2} \left(\partial_b^x \partial_b^x - M^2 \right) \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x - y), \\ A_{2_b}(x, y) &= \frac{1}{2} \frac{\partial_b^x}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x - y), \\ A_3(x, y) &= \frac{e}{2} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x - y), \\ A_4(x, y) &= -\frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x - y), \\ A_6(x, y) &= \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y), \end{aligned} \quad (5.41)$$

$$B_{1_a}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial_a^x}{\partial_x^-} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad B_{2_{ab}}(x, y) = -\frac{\delta_{ab}}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad (5.42)$$

$$D_1(x, y) = -\frac{e}{2} \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad D_3(x, y) = -\frac{e^2}{2M^2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad (5.43)$$

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\partial_x^- \partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad E_5(x, y) = -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad (5.44)$$

$$F_4(x, y) = -\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y), \quad (5.45)$$

$$G_1(x, y) = \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y). \quad (5.46)$$

A partir de (5.40) es posible construir los corchetes de Dirac (DB) entre dos variables dinámicas $A(x)$ y $B(y)$ en la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left\{ A(x), B(y) \right\}_D &= \left\{ A(x), B(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A(x), \Theta_k(u) \right\} \\ &\quad C_{kl}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_l(u), B(y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Bajo la definición (5.47), se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \pi^+(x) &= 0, \\ \pi^b(x) - \partial_{\underline{x}}^x A_b(x) &= 0, \quad a = 1, 2 \\ p_\theta(x) - \frac{M^2}{e^2} \partial_{\underline{x}}^x \theta(x) &= 0, \\ \partial_{\underline{x}}^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) &= 0, \\ A_-(x) &= 0, \\ \pi^-(x) + \partial_{\underline{x}}^x A_+(x) &= 0. \end{aligned} \quad (5.48)$$

De esta manera, se pueden considerar como variables independientes los campos (A_+, A_a, θ) , con lo cual se procede a calcular los DB entre ellos, utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), \Theta_1(u) \right\} &= \delta^3(x - u), \\ \left\{ A_a(x), \Theta_{2c}(u) \right\} &= \delta_{ac} \delta^3(x - u), \\ \left\{ A_a(x), \Theta_4(u) \right\} &= -\partial_a^x \delta^3(x - u), \\ \left\{ \theta(x), \Theta_3(u) \right\} &= \delta^3(x - u), \\ \left\{ \theta(x), \Theta_4(u) \right\} &= e \delta^3(x - u). \end{aligned} \quad (5.49)$$

De las expresiones (5.47) y (5.49), se determina que los DB no nulos entre los campos (A_+, A_a, θ) son:

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), A_b(y) \right\}_D &= -\frac{1}{2} \frac{\partial_b^x}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \\ \left\{ A_+(x), \theta(y) \right\}_D &= -\frac{e}{2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \\ \left\{ A_a(x), A_b(y) \right\}_D &= -\frac{\delta_{ab}}{2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \\ \left\{ \theta(x), \theta(y) \right\}_D &= -\frac{e^2}{2M^2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (5.50)$$

5.2. Formulación de Faddeev-Jackiw

Con el objetivo de realizar un estudio de la teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo utilizando la formulación de Faddeev-Jackiw, se expresará la ecuación (5.4) en la forma:

$$\begin{aligned} \pi^+ &= 0, \\ \pi^a - \partial_- \mathcal{A}_a + \partial_a \mathcal{A}_- &= 0, \quad a = 1, 2 \\ p_\theta - \frac{M^2}{e} \left[\mathcal{A}_- + \frac{1}{e} \partial_- \theta \right] &= 0, \end{aligned} \quad (5.51)$$

de manera que la relación (5.6) puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^a \partial_+ \mathcal{A}_a - \pi^a \partial_a \mathcal{A}_+ - \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} + e \mathcal{A}_+ p_\theta + p_\theta \partial_+ \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} M^2 \left[\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[\mathcal{A}^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right] \\ &= \pi^- \partial_+ \mathcal{A}_- + \pi^a \partial_+ \mathcal{A}_a + p_\theta \partial_+ \theta + \frac{1}{2} \pi^- \pi^- - \pi^- \partial_+ \mathcal{A}_- - \pi^a \partial_a \mathcal{A}_+ \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} + e \mathcal{A}_+ p_\theta + \frac{1}{2} M^2 \left[\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[\mathcal{A}^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right]. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Dado que

$$\partial_+ \mathcal{A}_- = \pi^- + \partial_- \mathcal{A}_+, \quad (5.53)$$

la densidad Lagrangiana puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \pi^- \partial_+ \mathcal{A}_- + \pi^a \partial_+ \mathcal{A}_a + p_\theta \partial_+ \theta - \left\{ \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^- \partial_- \mathcal{A}_+ + \pi^a \partial_a \mathcal{A}_+ \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - e \mathcal{A}_+ p_\theta - \frac{1}{2} M^2 \left[\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[\mathcal{A}^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

De este modo, es posible identificar el primer Lagrangiano iterativo de la teoría como:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^- \partial_+ \mathcal{A}_- + \pi^a \partial_+ \mathcal{A}_a + p_\theta \partial_+ \theta - \mathcal{H}^{(0)}, \quad (5.55)$$

donde se define el potencial simpléctico en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^- \partial_- \mathcal{A}_+ + \pi^a \partial_a \mathcal{A}_+ + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - e \mathcal{A}_+ p_\theta \\ &\quad - \frac{1}{2} M^2 \left(\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left(\mathcal{A}^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right). \end{aligned} \quad (5.56)$$

Así, el primer conjunto de variable simplécticas es identificado como $\xi_k^{(0)} = (\mathcal{A}_-, \pi^-, \mathcal{A}_a, \pi^a, \theta, p_\theta, \mathcal{A}_+)$.

De manera que de la relación es posible reconocer:

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{A}_-}^{(0)} &\rightarrow \pi^- \quad , \quad K_{\mathcal{A}_a}^{(0)} \rightarrow \pi^a \quad , \quad K_{\theta}^{(0)} \rightarrow p_\theta \\ K_{\pi^-}^{(0)} &\rightarrow 0 \quad , \quad K_{\pi^a}^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{p_\theta}^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{\mathcal{A}_+}^{(0)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Los elementos de matriz simpléctica se calculan a partir de la siguiente expresión:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (5.58)$$

En este contexto, utilizando las expresiones (5.57), se puede deducir que los únicos elementos de matriz simpléctica diferentes de cero son:

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{A}_- \pi^-}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\pi^-}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{A}_-(\mathbf{x})} - \frac{\delta \pi^-(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\pi^-}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{\mathcal{A}_a \pi^b}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\pi^b}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \mathcal{A}_a(\mathbf{x})} - \frac{\delta \pi^a(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\pi^b}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{\theta p_\theta}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{p_\theta}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \theta(\mathbf{x})} - \frac{\delta p_\theta(\mathbf{x})}{\delta \xi_{p_\theta}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{\pi^- \mathcal{A}_-}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\mathcal{A}_-}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\pi^-}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\pi^-}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_-}^{(0)}(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{\pi^a \mathcal{A}_b}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\mathcal{A}_b}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\pi^a}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\pi^a}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_b}^{(0)}(\mathbf{y})} = \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{p_\theta \theta}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_\theta^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{p_\theta}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{p_\theta}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\theta^{(0)}(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ M_{\mathcal{A}_+ B}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\mathcal{A}_+}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\mathcal{A}_+}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})} = 0, \quad \text{for all } B. \end{aligned}$$

Así, la matriz $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tendrá la siguiente representación:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.59)$$

Es evidente que la ecuación (5.59) es singular, con el siguiente autovector con autovalor nulo:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{1(0)}(\mathbf{x}) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v(\mathbf{x})), \quad (5.60)$$

donde $v(x)$ es una función arbitraria. El vínculo asociado al autovector $\tilde{v}^{1(0)}(x)$ es:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(0)} &= \int d^3x v(x) \frac{\delta}{\delta \xi_{\mathcal{A}_+}(x)} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(y) \\
 &= \int d^3x v(x) \frac{\delta}{\delta \mathcal{A}_+(x)} \int d^3y \left[\pi^-(y) \partial_-^y \mathcal{A}_+(y) + \pi^a(y) \partial_a^y \mathcal{A}_+(y) \right. \\
 &\quad \left. - e \mathcal{A}_+(y) p_\theta(y) \right] \\
 &= - \int d^3x v(x) \int d^3y \left[\pi^-(y) \partial_-^x + \pi^a(y) \partial_a^x + e p_\theta(y) \right] \delta^3(y-x) \\
 &= - \int d^3x v(x) \left[\partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \right].
 \end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de la función $v(x)$, podemos seleccionar el primer vínculo Lagrangiano en la siguiente relación:

$$\Omega_1^{(0)} = \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) = 0. \quad (5.61)$$

Ahora, el primer Lagrangiano en el proceso de iteración se obtiene adicionando este vínculo a la parte canónica de $\mathcal{L}^{(0)}$, de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \pi^- \partial_+ \mathcal{A}_- + \pi^a \partial_+ \mathcal{A}_a + p_\theta \partial_+ \theta + \Omega_1^{(0)} \dot{\beta} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (5.62)$$

donde se ha identificado $\mathcal{A}_+ \rightarrow \beta$ y:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega_1^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (5.63)$$

El potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(0)}$, a menos de un término de frontera, se puede expresar como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}^{(0)} &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- - \mathcal{A}_+ \left[\partial_- \pi^- + \partial_a \pi^a + e p_\theta \right] + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} \\
 &\quad - \frac{1}{2} M^2 \left(\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left(\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right).
 \end{aligned} \quad (5.64)$$

De manera que la relación (5.63) toma la forma:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - \frac{1}{2} M^2 \left(\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left(\mathcal{A}_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right). \quad (5.65)$$

En este momento es necesario introducir un segundo conjunto de variables simplécticas $\xi_k^{(1)}$, las cuales se identifican como: $\xi_1^{(1)} \equiv \xi_{\mathcal{A}_-}^{(1)} = \mathcal{A}_-$, $\xi_2^{(1)} \equiv \xi_{\mathcal{A}_a}^{(1)} = \mathcal{A}_a$, $\xi_3^{(1)} \equiv \xi_\theta^{(1)} = \theta$, $\xi_4^{(1)} \equiv \xi_{\pi^-}^{(1)} = \pi^-$, $\xi_5^{(1)} \equiv \xi_{\pi^a}^{(1)} = \pi^a$, $\xi_6^{(1)} \equiv \xi_{p_\theta}^{(1)} = p_\theta$ y $\xi_7^{(1)} \equiv \xi_\beta^{(1)} = \beta$. De la expresión (5.62), podemos establecer que:

$$\begin{aligned}
 K_1^{(1)} &\equiv K_{\mathcal{A}_-}^{(1)} = \pi^-, & K_2^{(1)} &\equiv K_{\mathcal{A}_a}^{(1)} = \pi^a, & K_3^{(1)} &\equiv K_\theta^{(1)} = p_\theta, \\
 K_4^{(1)} &\equiv K_{\pi^-}^{(1)} = 0, & K_5^{(1)} &\equiv K_{\pi^a}^{(1)} = 0, & K_6^{(1)} &\equiv K_{p_\theta}^{(1)} = 0, \\
 K_7^{(1)} &\equiv K_\beta^{(1)} = \Omega_1^{(0)} = \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x).
 \end{aligned} \quad (5.66)$$

Así, las componentes de la segunda $M_{AB}^{(1)}(x, y)$ matriz simpléctica son determinadas por:

$$M_{AB}^{(1)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(1)}(y)}{\delta \xi_A^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_A^{(1)}(x)}{\delta \xi_B^{(1)}(y)}. \quad (5.67)$$

De modo que se puede deducir que las únicas componentes no nulas son:

$$\begin{aligned} M_{A-\pi^-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\pi^-}^{(1)}(y)}{\delta A_-(x)} - \frac{\delta \pi^-(x)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(1)}(y)} = -\delta^3(x-y), \\ M_{A_a \pi^b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\pi^b}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{A_a}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{A_a}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\pi^b}^{(1)}(y)} = -\frac{\delta \pi^a(x)}{\delta \xi_{\pi^b}^{(1)}(y)} = -\delta_b^a \delta^3(x-y), \\ M_{\theta p_\theta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{p_\theta}^{(1)}(y)}{\delta \xi_\theta^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_\theta^{(1)}(x)}{\delta \xi_{p_\theta}^{(1)}(y)} = -\delta^3(x-y), \\ M_{\pi^- A_-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{A_-}^{(1)}(y)} = \delta^3(x-y), \\ M_{\pi^- \beta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_\beta^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^-}^{(1)}(x)}{\delta \xi_\beta^{(1)}(y)} = -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\ M_{\pi^a A_b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_b}^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\pi^a}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^a}^{(1)}(x)}{\delta \xi_{A_b}^{(1)}(y)} = \delta_b^a \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\pi^a \beta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_\beta^{(1)}(y)}{\delta \xi_{\pi^a}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^a}^{(1)}(x)}{\delta \xi_\beta^{(1)}(y)} = -\partial_a^x \delta^3(x-y), \\ M_{p_\theta \theta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_\theta^{(1)}(y)}{\delta \xi_{p_\theta}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{p_\theta}^{(1)}(x)}{\delta \xi_\theta^{(1)}(y)} = \delta^3(x-y), \\ M_{p_\theta \beta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_\beta^{(1)}(y)}{\delta \xi_{p_\theta}^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_{p_\theta}^{(1)}(x)}{\delta \xi_\beta^{(1)}(y)} = e \delta^3(x-y), \\ M_{\beta \pi^-}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\pi^-}^{(1)}(y)}{\delta \xi_\beta^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_\beta^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(1)}(y)} = -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\ M_{\beta \pi^b}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\pi^b}^{(1)}(y)}{\delta \xi_\beta^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_\beta^{(1)}(x)}{\delta \xi_{\pi^b}^{(1)}(y)} = -\partial_b^x \delta^3(x-y), \\ M_{\beta p_\theta}^{(1)}(x, y) &= \frac{\delta K_{p_\theta}^{(1)}(y)}{\delta \xi_\beta^{(1)}(x)} - \frac{\delta K_\beta^{(1)}(x)}{\delta \xi_{p_\theta}^{(1)}(y)} = -e \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Con lo cual la matriz $M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se expresa como:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x \\ 0 & \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_a^x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & -\partial_b^x & -e & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.68)$$

Mostremos ahora que la matriz (5.68) aún se mantiene singular. Para ello vamos a proponer que la naturaleza singular de la matriz se debe a la existencia de un vector nulo, el cual se considerará de la siguiente forma:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{A(1)}(\mathbf{x}) = (\alpha_1(\mathbf{x}) \quad \alpha_{2_a}(\mathbf{x}) \quad \alpha_3(\mathbf{x}) \quad \alpha_4(\mathbf{x}) \quad \alpha_{5_a}(\mathbf{x}) \quad \alpha_6(\mathbf{x}) \quad \alpha_7(\mathbf{x})), \quad (5.69)$$

donde las cantidades $\alpha_i(\mathbf{x})$ son funciones desconocidas que deben determinarse. Si (5.69) es un autovector de (5.68), se debe satisfacer la siguiente relación:

$$\int d^3x \tilde{\mathbf{v}}^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (5.70)$$

Al substituir (5.68) y (5.69) en (5.70), puede deducirse que el conjunto de funciones $\alpha_i(\mathbf{x})$ satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_4(\mathbf{y}) &= 0, \\ \alpha_{5_b}(\mathbf{y}) &= 0, \\ \alpha_6(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_1(\mathbf{y}) + \partial_-^y \alpha_7(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_{2_b}(\mathbf{y}) + \partial_b^y \alpha_7(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_3(\mathbf{y}) - e\alpha_7(\mathbf{y}) &= 0, \\ \partial_-^y \alpha_4(\mathbf{y}) + \partial_a^y \alpha_{5_a}(\mathbf{y}) + e\alpha_6(\mathbf{y}) &= 0. \end{aligned} \quad (5.71)$$

Al resolverlo, permite establecer que:

$$\begin{aligned} \alpha_4(\mathbf{y}) &= 0, & \alpha_{5_b}(\mathbf{y}) &= 0, & \alpha_6(\mathbf{y}) &= 0, \\ \alpha_1(\mathbf{y}) &= \partial_-^y \alpha_7(\mathbf{y}), & \alpha_{2_b}(\mathbf{y}) &= \partial_b^y \alpha_7(\mathbf{y}), & \alpha_3(\mathbf{y}) &= -e\alpha_7(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.72)$$

De manera que el auto-vector $\tilde{\mathbf{v}}^{A(1)}(\mathbf{x})$ tendrá la forma:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{A(1)}(\mathbf{x}) = (\partial_-^x \alpha_7(\mathbf{x}) \quad \partial_a^x \alpha_7(\mathbf{x}) \quad -e\alpha_7(\mathbf{x}) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_7(\mathbf{x})), \quad (5.73)$$

donde $\alpha_7(\mathbf{x})$ es una función indeterminada. Entonces, si existe un vínculo adicional, este deberá ser consecuencia de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \int d^3x \tilde{\mathbf{v}}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A-}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3x \tilde{\mathbf{v}}_{A-}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_{-}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \tilde{\mathbf{v}}_{A_a}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_a(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^3x \tilde{\mathbf{v}}_{\theta}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \theta(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \tilde{\mathbf{v}}_{\beta}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \beta(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3x \tilde{v}_{\lambda_a}^{A(1)}(x) \int d^3y \left[\frac{1}{2} F_{bc}(y) \left(\delta_c^a \partial_b^y - \delta_b^a \partial_c^y \right) - M^2 \left(A_a(y) + \frac{1}{e} \partial_a^y \theta(y) \right) \right] \\
 &\quad \delta^3(x-y) + \int d^3x \tilde{v}_\theta^{A(1)}(x) \int d^3y \left[-\frac{M^2}{e} \left(A_a(y) + \frac{1}{e} \partial_a^y \theta(y) \right) \partial_a^y \delta^3(x-y) \right] \\
 &= \int d^3x \partial_a^x \alpha_7(x) \left[-\frac{1}{2} \left(\partial_b^x F_{ba}(x) - \partial_c^x F_{ac}(x) \right) - M^2 \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right] \\
 &\quad - M^2 \int d^3x \alpha_7(x) \partial_a^x \left[A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right].
 \end{aligned}$$

Integrando por partes, se deduce que:

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(1)} &= - \int d^3x \alpha_7(x) \partial_a^x \left[\partial_b^x F_{ab}(x) - M^2 \left(A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right] \\
 &\quad - M^2 \int d^3x \alpha_7(x) \partial_a^x \left[A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right] \\
 &= - \int d^3x \alpha_7(x) \left[\partial_a^x \partial_b^x F_{ab}(x) - M^2 \partial_a^x \left[A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right] \right] \\
 &\quad + M^2 \partial_a^x \left[A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right] \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.74}$$

Este resultado indica que el modo cero no dará un nuevo vínculo Lagrangiano, y como consecuencia la matriz simpléctica continúa siendo singular, lo que caracteriza a la teoría de Maxwell como una teoría gauge [3]. Con el fin de obtener una matriz simpléctica no singular, se deberá adicionar un término de gauge fixing al potencial simpléctico, y para ello se escogerá el gauge de plano nulo $\Theta = A_-(x) = 0$. Si utilizamos la condición de consistencia por medio del multiplicador de Lagrange $\eta(x)$, lo cual aumentará la dimensión del espacio de configuración, obtendremos el segundo Lagrangiano iterativo:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \pi^- \partial_+ A_- + \pi^a \partial_+ A_a + p_\theta \partial_+ \theta + \Omega_3^{(0)} \dot{\beta} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)}, \tag{5.75}$$

donde

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_{\Omega_i^{(0)}, \Theta=0}^{(1)}. \tag{5.76}$$

El potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$ se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - \frac{1}{2} M^2 \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left(A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right). \tag{5.77}$$

Ahora, vamos a introducir las nuevas variables simplécticas $\xi_k^{(2)}$, las cuales se definen como: $\xi_1^{(2)} \equiv \xi_{A_-}^{(2)} = A_-$, $\xi_2^{(2)} \equiv \xi_{A_a}^{(2)} = A_a$, $\xi_3^{(2)} \equiv \xi_\theta^{(2)} = \theta$, $\xi_4^{(2)} \equiv \xi_{\pi^-}^{(2)} = \pi^-$, $\xi_5^{(2)} \equiv \xi_{\pi^a}^{(2)} = \pi^a$, $\xi_6^{(2)} \equiv \xi_{p_\theta}^{(2)} = p_\theta$, $\xi_7^{(2)} \equiv \xi_\beta^{(2)} = \beta$ y $\xi_8^{(1)} \equiv \xi_\eta^{(1)} = \eta$. De la expresión (5.75), es posible

identificar que

$$\begin{aligned}
 K_1^{(2)} &\equiv K_{A_-}^{(2)} = \pi^-, & K_2^{(2)} &\equiv K_{A_a}^{(2)} = \pi^a, & K_3^{(2)} &\equiv K_{\theta}^{(2)} = p_\theta, \\
 K_4^{(2)} &\equiv K_{\pi^-}^{(2)} = 0, & K_5^{(2)} &\equiv K_{\pi^a}^{(2)} = 0, & K_6^{(2)} &\equiv K_{p_\theta}^{(2)} = 0, \\
 K_7^{(2)} &\equiv K_{\beta}^{(2)} = \Omega_1^{(0)} = \partial_-^x \pi^- (x) + \partial_a^x \pi^a (x) + \epsilon p_\theta (x) \\
 K_8^{(2)} &\equiv K_{\eta}^{(2)} = \Theta (x) = A_- (x).
 \end{aligned} \tag{5.78}$$

Continuando con las componentes de la matriz simpléctica $M^{(2)}(x, y)$, estas se calculan a partir de:

$$M_{AB}^{(2)}(x, y) = \frac{\delta K_B^{(2)}(y)}{\delta \xi_A^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_A^{(2)}(x)}{\delta \xi_B^{(2)}(y)}. \tag{5.79}$$

Ahora, de la relación (5.79) se deduce que los elementos de matriz no nulos son:

$$\begin{aligned}
 M_{A_- \pi^-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\pi^-}^{(2)}(y)}{\delta A_- (x)} - \frac{\delta \pi^- (x)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(2)}(y)} = -\delta^3(x - y), \\
 M_{A_- \eta}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\eta}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(x)} = \frac{\delta A_- (y)}{\delta A_- (x)} = \delta^3(x - y), \\
 M_{A_a \pi^b}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\pi^b}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{A_a}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{A_a}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\pi^b}^{(2)}(y)} = -\delta_b^a \delta^3(x - y), \\
 M_{\theta p_\theta}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{p_\theta}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\theta}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\theta}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{p_\theta}^{(2)}(y)} = -\delta^3(x - y), \\
 M_{\pi^- A_-}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_-}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^-}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(y)} = \delta^3(x - y), \\
 M_{\pi^- \beta}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\pi^-}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^-}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(y)} = -\partial_-^x \delta^3(x - y), \\
 M_{\pi^a A_b}^{(2)}(x, y) &= \frac{\delta K_{A_b}^{(2)}(y)}{\delta \xi_{\pi^a}^{(2)}(x)} - \frac{\delta K_{\pi^a}^{(2)}(x)}{\delta \xi_{A_b}^{(2)}(y)} = \delta_b^a \delta^3(x - y),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\pi^a\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\pi^a}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\pi^a}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\partial_a^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{p_\theta\theta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\theta}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{p_\theta}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{p_\theta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\theta}^{(2)}(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{p_\theta\beta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{p_\theta}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{p_\theta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{y})} = e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\beta\pi^-}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\pi^-}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\pi^-}(\mathbf{y})} = -\partial_-^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\beta\pi^b}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\pi^b}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\pi^b}(\mathbf{y})} = -\partial_b^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\beta p_\theta}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{p_\theta}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\beta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{p_\theta}(\mathbf{y})} = -e\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\eta A_-}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\delta K_{\eta}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_-}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta A_-(\mathbf{x})}{\delta A_-(\mathbf{y})} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

De manera que la matriz $M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ tendrá la siguiente estructura:

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_a^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & -\partial_b^x & -e & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.80)$$

Esta matriz no es singular y, por ende, su inversa deberá calcularse con el fin de determinar los corchetes generalizados. Además, la inversa de la matriz $M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es consecuencia de la siguiente identidad:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(2)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.81)$$

donde se propondrá que $[M^{AB(2)}]^{-1}(x, y)$ se puede expresar en la forma:

$$\begin{aligned}
 [M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = & \begin{pmatrix} A_1(z, y) & A_{2_b}(z, y) & A_3(z, y) & A_4(z, y) & A_{5_b}(z, y) \\ B_{1_c}(z, y) & B_{2_{cb}}(z, y) & B_{3_c}(z, y) & B_{4_c}(z, y) & B_{5_{cb}}(z, y) \\ C_1(z, y) & C_{2_b}(z, y) & C_3(z, y) & C_4(z, y) & C_{5_b}(z, y) \\ D_1(z, y) & D_{2_b}(z, y) & D_3(z, y) & D_4(z, y) & D_{5_b}(z, y) \\ E_{1_c}(z, y) & E_{2_{cb}}(z, y) & E_{3_c}(z, y) & E_{4_c}(z, y) & E_{5_{cb}}(z, y) \\ F_1(z, y) & F_{2_b}(z, y) & F_3(z, y) & F_4(z, y) & F_{5_b}(z, y) \\ G_1(z, y) & G_{2_b}(z, y) & G_3(z, y) & G_4(z, y) & G_{5_b}(z, y) \\ H_1(z, y) & H_{2_b}(z, y) & H_3(z, y) & H_4(z, y) & H_{5_b}(z, y) \\ A_6(z, y) & A_7(z, y) & A_8(z, y) \\ B_{6_c}(z, y) & B_{7_c}(z, y) & B_{8_c}(z, y) \\ C_6(z, y) & C_7(z, y) & C_8(z, y) \\ D_6(z, y) & D_7(z, y) & D_8(z, y) \\ E_{6_c}(z, y) & E_{7_c}(z, y) & E_{8_c}(z, y) \\ F_6(z, y) & F_7(z, y) & F_8(z, y) \\ G_6(z, y) & G_7(z, y) & G_8(z, y) \\ H_6(z, y) & H_7(z, y) & H_8(z, y) \end{pmatrix} \cdot \quad (5.82)
 \end{aligned}$$

Al substituir (5.80) y (5.82) en (5.81), se deduce el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 -D_1(x, y) + H_1(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
 -D_{2_b}(x, y) + H_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 -D_3(x, y) + H_3(x, y) &= 0, \\
 -D_4(x, y) + H_4(x, y) &= 0, \\
 -D_{5_b}(x, y) + H_{5_b}(x, y) &= 0, \\
 -D_6(x, y) + H_6(x, y) &= 0, \\
 -D_7(x, y) + H_7(x, y) &= 0, \\
 -D_8(x, y) + H_8(x, y) &= 0. \quad (5.83)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\delta_c^a E_{1_c}(x, y) &= 0, \\
 -\delta_c^a E_{2_{cb}}(x, y) &= \delta_b^a \delta^3(x - y), \\
 -\delta_c^a E_{3_c}(x, y) &= 0, \\
 -\delta_c^a E_{4_c}(x, y) &= 0, \\
 -\delta_c^a E_{5_{cb}}(x, y) &= 0, \\
 -\delta_c^a E_{6_c}(x, y) &= 0, \\
 -\delta_c^a E_{7_c}(x, y) &= 0, \\
 -\delta_c^a E_{8_c}(x, y) &= 0. \quad (5.84)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -F_1(x, y) &= 0, \\
 -F_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 -F_3(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
 -F_4(x, y) &= 0, \\
 -F_{5_b}(x, y) &= 0, \\
 -F_6(x, y) &= 0, \\
 -F_7(x, y) &= 0, \\
 -F_8(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.85}$$

$$\begin{aligned}
 A_1(x, y) - \partial_x^- G_1(x, y) &= 0, \\
 A_{2_b}(x, y) - \partial_x^- G_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 A_3(x, y) - \partial_x^- G_3(x, y) &= 0, \\
 A_4(x, y) - \partial_x^- G_4(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
 A_{5_b}(x, y) - \partial_x^- G_{5_b}(x, y) &= 0, \\
 A_6(x, y) - \partial_x^- G_6(x, y) &= 0, \\
 A_7(x, y) - \partial_x^- G_7(x, y) &= 0, \\
 A_8(x, y) - \partial_x^- G_8(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

$$\begin{aligned}
 \delta_c^a B_{1_c}(x, y) - \partial_a^x G_1(x, y) &= 0, \\
 \delta_c^a B_{2_{cb}}(x, y) - \partial_a^x G_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 \delta_c^a B_{3_c}(x, y) - \partial_a^x G_3(x, y) &= 0, \\
 \delta_c^a B_{4_c}(x, y) - \partial_a^x G_4(x, y) &= 0, \\
 \delta_c^a B_{5_{cb}}(x, y) - \partial_a^x G_{5_b}(x, y) &= \delta_b^a \delta^3(x - y), \\
 \delta_c^a B_{6_c}(x, y) - \partial_a^x G_6(x, y) &= 0, \\
 \delta_c^a B_{7_c}(x, y) - \partial_a^x G_7(x, y) &= 0, \\
 \delta_c^a B_{8_c}(x, y) - \partial_a^x G_8(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

$$\begin{aligned}
 C_1(x, y) + eG_1(x, y) &= 0, \\
 C_{2_b}(x, y) + eG_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 C_3(x, y) + eG_3(x, y) &= 0, \\
 C_4(x, y) + eG_4(x, y) &= 0, \\
 C_{5_b}(x, y) + eG_{5_b}(x, y) &= 0, \\
 C_6(x, y) + eG_6(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
 C_7(x, y) + eG_7(x, y) &= 0, \\
 C_8(x, y) + eG_8(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

$$\begin{aligned}
 -\partial_{\underline{x}}^x D_1(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{1_c}(x, y) - eF_1(x, y) &= 0, \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_{2_b}(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{2_{cb}}(x, y) - eF_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_3(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{3_c}(x, y) - eF_3(x, y) &= 0, \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_4(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{4_c}(x, y) - eF_4(x, y) &= 0, \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_{5_b}(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{5_{cb}}(x, y) - eF_{5_b}(x, y) &= 0, \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_6(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{6_c}(x, y) - eF_6(x, y) &= 0, \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_7(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{7_c}(x, y) - eF_7(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
 -\partial_{\underline{x}}^x D_8(x, y) - \partial_{\underline{c}}^x E_{8_c}(x, y) - eF_8(x, y) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

$$\begin{aligned}
 -A_1(x, y) &= 0, \\
 -A_{2_b}(x, y) &= 0, \\
 -A_3(x, y) &= 0, \\
 -A_4(x, y) &= 0, \\
 -A_{5_b}(x, y) &= 0, \\
 -A_6(x, y) &= 0, \\
 -A_7(x, y) &= 0, \\
 -A_8(x, y) &= \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

La solución de este sistema determina que las únicas componentes diferentes de cero son:

$$A_8(x, y) = -\delta^3(x - y), \tag{5.91}$$

$$G_4(x, y) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \quad G_8(x, y) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \tag{5.92}$$

$$\begin{aligned}
 C_4(x, y) &= \frac{e}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \quad C_6(x, y) = \delta^3(x - y), \\
 C_8(x, y) &= \frac{e}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y),
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

$$\begin{aligned}
 B_{4_a}(x, y) &= -\frac{\partial_{\underline{a}}^x}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \quad B_{5_{ab}}(x, y) = \delta_{\underline{b}}^a \delta^3(x - y), \\
 B_{8_a}(x, y) &= -\frac{\partial_{\underline{a}}^x}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y),
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

$$F_3(x, y) = -\delta^3(x - y), \tag{5.95}$$

$$E_{2_{ab}}(x, y) = -\delta_{\underline{b}}^a \delta^3(x - y), \tag{5.96}$$

$$\begin{aligned}
 D_{2_a}(x, y) &= \frac{\partial_{\underline{a}}^x}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \quad D_3(x, y) = \frac{e}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y), \\
 D_7(x, y) &= -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}^x} \delta^3(x - y),
 \end{aligned} \tag{5.97}$$

$$\begin{aligned}
 H_1(x, y) &= \delta^3(x - y), & H_{2_a}(x, y) &= \frac{\partial_a^x}{\partial x_-} \delta^3(x - y), \\
 H_3(x, y) &= \frac{e}{\partial x_-} \delta^3(x - y), & H_7(x, y) &= -\frac{1}{\partial x_-} \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{5.98}$$

Así, la matriz $[M^{(2)}]^{-1}(x, y)$ se puede expresar como:

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(z, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{4_a}(z, y) & B_{5_{ab}}(z, y) \\ 0 & 0 & 0 & C_4(z, y) & 0 \\ 0 & D_{2_b}(z, y) & D_3(z, y) & 0 & 0 \\ 0 & E_{2_{ab}}(z, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(z, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4(z, y) & 0 \\ H_1(z, y) & H_{2_b}(z, y) & H_3(z, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_8(z, y) \\ 0 & 0 & B_{8_a}(z, y) \\ C_6(z, y) & 0 & C_8(z, y) \\ 0 & D_7(z, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_8(z, y) \\ 0 & H_7(z, y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.99}$$

Finalmente, de la expresión (5.99) se deduce el siguiente conjunto de corchetes generalizados:

$$\begin{aligned}
 \{A_a(x), \pi^-(y)\} &= B_{4_a}(z, y) = -\frac{\partial_a^x}{\partial x_-} \delta^3(x - y), \\
 \{A_a(x), \pi^b(y)\} &= B_{5_{ab}}(z, y) = \delta_b^a \delta^3(x - y), \\
 \{\theta(x), \pi^-(y)\} &= C_4(z, y) = \frac{e}{\partial x_-} \delta^3(x - y), \\
 \{\theta(x), p_\theta(y)\} &= C_6(z, y) = \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{5.100}$$

La cuantización canónica de la teoría se logra abstrayendo los conmutadores a tiempo igual a partir de los paréntesis de Dirac correspondientes. La teoría cuántica se obtiene asumiendo que las relaciones de conmutación corresponden a estas nuevas relaciones de paréntesis. Por lo tanto, los paréntesis de Dirac se sustituyen por conmutadores y se añade un factor multiplicativo de i al resultado obtenido en el lado derecho.

En este capítulo se llevó a cabo un estudio exhaustivo de la teoría de fotones masivos en coordenadas de plano nulo, abordando el problema tanto desde la formulación de Dirac como desde el formalismo de Faddeev-Jackiw. Se analizó en detalle la teoría de Proca en

su versión invariante de gauge, destacando la importancia de los campos auxiliares para restaurar dicha invariancia.

En este capítulo se estudió la invariancia de gauge de la electrodinámica de Proca desde la formulación simpléctica de la teoría, la cual es un método alternativo al método ortodoxo de Dirac para describir sistemas dinámicos con vínculos. Al mismo tiempo, se pudo demostrar que la aproximación simpléctica resulta más natural e intuitiva en el sentido de que los vínculos son relacionados con momentos canónicos generalizados. No obstante, los multiplicadores de Lagrange estarán conectados a variables simplécticas en la estructura simpléctica ampliada de la variedad de vínculos.

En el caso de la electrodinámica de Proca invariante de gauge, pudo demostrarse que el número de vínculos es menor que aquel obtenido a partir de la formulación de Dirac. Igualmente, se observó que el análisis de la estructura de estos vínculos resultó ser más simple, ya que no fue necesario realizar una clasificación en vínculos primarios o secundarios, ni en vínculos de primera y de segunda clase.

La naturaleza gauge de la teoría se vio reflejada en la singularidad de la dos forma $M_{AB}^{(1)}(x, y)$, lo que dio lugar a un nuevo modo cero $\Omega^{(1)}$, que resultó ser idénticamente nulo. Con el fin de tornar esta matriz simpléctica en una regular, se introdujo la condición de gauge de plano nulo $A_-(x) = 0$ al potencial simpléctico. Esta condición de gauge se dedujo naturalmente a partir de las ecuaciones de campos. Al utilizar la condición de consistencia para el multiplicador de Lagrange $\eta(x)$, que incrementa la dimensión del espacio de configuración, se obtuvo el segundo Lagrangiano iterativo $\mathcal{L}^{(2)}$, a partir del cual se puede derivar la correspondiente dos-forma simpléctica en el segundo orden del proceso de iteración $[M^{AB(2)}]$. Por su parte, los corchetes de Dirac deducidos en la sección anterior se pueden obtener directamente al analizar las componentes de la matriz $[M^{AB(2)}]^{-1}$.

Finalmente, se pudo observar que el potencial simpléctico obtenido al final del proceso de iteración es exactamente el mismo Hamiltoniano que se resulta a través de varios pasos en el método ortodoxo de Dirac.

La cuantización canónica de la teoría se logra abstrayendo los conmutadores a tiempo igual a partir de los paréntesis de Dirac o los paréntesis generalizados correspondientes. La teoría cuántica se obtiene sustituyendo los paréntesis por conmutadores y se añade un factor multiplicativo de i al resultado obtenido en el lado derecho.

Bibliografía

- [1] J. M. Cornwall, "Spontaneous Symmetry Breaking Without Scalar Mesons. 2", *Phys. Rev.D*, vol. 10, no. 2, pp. 500- 548, 1974.
- [2] K. Sundermeyer, "Constrained Dynamics: with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model", *Lect. Notes Phys.*, vol. 169. Berlin, Heidelberg New York: Springer, 1982.
- [3] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, "Faddeev-Jackiw Quantization and Constraints", *Mod. Phys. Lett.A*, vol. 7, no. 20, pp. 4981-5003, 1992.

Capítulo 6

Conclusiones Generales

En el presente trabajo se realizó un estudio sistemático de teorías de campos con vínculos, con énfasis particular en teorías de gauge y en la teoría de fotones masivos, formuladas en coordenadas de plano nulo. A lo largo de los distintos capítulos se combinaron consideraciones conceptuales, desarrollos formales y aplicaciones explícitas, con el objetivo de analizar de manera coherente la estructura dinámica y de vínculos de estos sistemas desde un punto de vista hamiltoniano y simpléctico.

Uno de los ejes centrales del trabajo fue el reconocimiento de que las teorías de gauge constituyen sistemas lagrangianos singulares, para los cuales los procedimientos canónicos estándar resultan insuficientes si no se incorporan métodos adecuados para el tratamiento de los vínculos. En este contexto, se puso de manifiesto que la correcta identificación de los grados de libertad físicos y la preservación de la invariancia de gauge dependen de manera crucial del formalismo empleado.

La adopción de la formulación en el plano nulo se mostró particularmente relevante. A partir del análisis de las distintas formas de la dinámica relativista introducidas por Dirac, se evidenció que la elección de la hipersuperficie inicial no es un aspecto meramente formal, sino que determina la estructura de los generadores del grupo de Poincaré, la separación entre variables cinemáticas y dinámicas, y la naturaleza de los vínculos del sistema. En este sentido, el plano nulo emerge como un marco privilegiado, caracterizado por un subgrupo de estabilidad de mayor dimensión y por propiedades estructurales que simplifican ciertos aspectos de la dinámica relativista.

Desde el punto de vista metodológico, el trabajo permitió contrastar de manera detallada el método hamiltoniano de Dirac con el formalismo simpléctico de Faddeev-Jackiw. Si bien ambos enfoques conducen a descripciones físicamente equivalentes, se demostró que el método de Faddeev-Jackiw ofrece una alternativa más directa y conceptualmente transparente para el análisis de sistemas con vínculos. En particular, la ausencia de una clasificación jerárquica de los vínculos y la identificación de estos a través de la degeneración de la matriz

simpléctica simplifican notablemente el tratamiento de teorías de campos con simetrías de gauge.

La aplicación explícita de estos formalismos al estudio de campos clásicos en coordenadas de plano nulo permitió confirmar la consistencia interna del enfoque adoptado. En los casos del campo electromagnético, el campo de Dirac y la electrodinámica cuántica en dos dimensiones, se mostró que, pese a las diferencias formales introducidas por la elección del plano nulo, los resultados físicos son equivalentes a los obtenidos en formulaciones convencionales. Al mismo tiempo, se evidenció que el formalismo simpléctico facilita la identificación de las variables independientes y de los grados de libertad físicos.

El análisis de la teoría de fotones masivos constituyó uno de los resultados más relevantes del trabajo. Se demostró que la formulación invariante de gauge de la teoría de Proca, estudiada en coordenadas de plano nulo, presenta una estructura de vínculos que refleja de manera clara su naturaleza gauge. En este contexto, la singularidad de la matriz simpléctica y la aparición de modos cero se interpretaron como manifestaciones directas de dicha simetría, haciendo explícita la necesidad de imponer condiciones de gauge para obtener una descripción dinámica completa.

El estudio comparativo entre los métodos de Dirac y de Faddeev-Jackiw reveló que el formalismo simpléctico conduce a un número menor de vínculos y a un análisis más sencillo de los mismos, sin pérdida de información física. Ambos métodos, no obstante, conducen a los mismos corchetes generalizados y, por ende, a una descripción equivalente de los grados de libertad del sistema, lo que confirma la robustez de los resultados obtenidos.

En conjunto, este trabajo pone de manifiesto que la combinación de la formulación en el plano nulo con el formalismo de Faddeev-Jackiw constituye una herramienta poderosa y eficaz para el estudio de teorías de campos con vínculos, en particular teorías de gauge y teorías gauge masivas. Los resultados obtenidos no solo confirman la consistencia de este enfoque, sino que también resaltan sus ventajas conceptuales y técnicas frente a métodos más tradicionales.

Finalmente, el análisis desarrollado abre diversas perspectivas para trabajos futuros, entre las que se incluyen la extensión del formalismo a teorías gauge no abelianas, el estudio de modelos interactuantes en el plano nulo y la aplicación de estos métodos en el contexto de la cuantización. En este sentido, los resultados presentados contribuyen a una comprensión más profunda de la estructura dinámica de las teorías de campos relativistas y de los métodos formales necesarios para su tratamiento consistente

Índice de figuras

2.1. En la primera figura el punto y es influenciado causalmente por puntos que están en Σ . En la segunda figura, y influencia causalmente aquellos puntos que están dentro de su cono de luz en Σ	26
2.2. Contorno de integración usado en la derivación de (2.27).	27

èditorial

Universidad de **Nariño**

Año de publicación: 2026

San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Una manera alternativa de generar masa a los campos gauge consiste en romper simetría a través de mecanismo de Higgs. En Electrodinámica cuántica es posible atribuir una masa al fotón y aun mantener una teoría renormalizable y unitaria. Tal posibilidad no ocurre en teorías de gauge no abelianas, sin embargo, existe un mecanismo de rompimiento dinámico de simetría donde los campos de la teoría se reorganizan generando el equivalente del bosón de Higgs y campos de gauge masivos. Un ejemplo clásico de este tipo de teorías es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio y el mecanismo es denominado rompimiento dinámico de simetría. En este proyecto se estudiará la estructura canónica de la densidad Lagrangiana propuesta por Cornwall que le da masa al campo electromagnético y aun garantiza la invariante de gauge de la teoría. Para cumplir este propósito, se utilizará la formulación de Dirac y de Faddeev-Jackiw que permite deducir en forma natural la estructura simpléctica del espacio de fase y los paréntesis generalizados de la teoría.



Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904

ai

Universidad de **Nariño**

ACREDITADA EN ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 000022 - ENERO 11 DE 2023

editorial
Universidad de **Nariño**