

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Masas de Neutrinos en el Modelo Escotogénico

Yesid Sebastián Solarte Rodríguez
Director: Eduardo Rojas.

San Juan de Pasto, Mayo 6 de 2026

Dedicatoria

A mi mamá, Mary, y a mi familia.

Agradecimientos

El agradecimiento es un ejercicio de la memoria que brota desde lo más hondo, y al hacer ese recorrido encuentro en mí a mi familia, a mis maestros y a mis amigos. A los maestros, porque con su entrega y su hacer riguroso no se limitaron a enseñarme a ser un buen estudiante: me enseñaron a formular preguntas, de esas que pueden abrir senderos nuevos tanto en la ciencia como en la comprensión de uno mismo. Hubo momentos en que sus clases parecían habitar en la teoría fría, y ellos mismos la presentaban con cierta distancia; hoy entiendo que ese gesto no era lejanía, sino una invitación silenciosa a que fuéramos nosotros quienes puliéramos el sentido común y el alma, para volvernos sensibles ante el lenguaje secreto de la naturaleza.

Quiero, además, detenerme con especial gratitud —no por cumplir con una formalidad, sino porque es justo— en el profesor Eduardo Rojas. Su disponibilidad constante, su paciencia sin condiciones y su generosidad para que yo pudiera culminar este trabajo de grado fueron un sostén invaluable. También quiero pedir disculpas por mis propios tropiezos, por esas veces que el ritmo se me escapó de las manos. De él no solo valoro su colaboración certera, sino ese humor inevitable, casi cómplice, que hizo más llevadero cada desafío.

Y cómo no agradecer a mis amigos. Hay quienes dicen que la amistad verdadera es una aspiración casi imposible; yo creo, más bien, que sin ella andamos incompletos. Porque ¿de qué serviría habitar el universo en soledad? En el recuerdo, aquellas largas horas en la biblioteca se vuelven ahora imágenes entrañables. Pienso que mis amigos son una extensión de mi memoria, y yo, de la de ellos. En ellos me reconozco; con ellos, el mundo deja de ser un espacio vacío y se convierte en un lugar habitable.

Resumen

En este trabajo se investiga el modelo escotogénico original propuesto por Ernest Ma, el cual ofrece un mecanismo radiativo para la generación de las masas de los neutrinos mediante correcciones cuánticas a un loop. Este modelo extiende el Modelo Estándar introduciendo nuevas partículas y una simetría discreta que impide la aparición de masas de neutrinos a nivel árbol, permitiendo que estas masas se generen de forma natural a través de efectos radiativos.

En particular, se calcula explícitamente la matriz de masa de los neutrinos a un lazo, empleando el método de regularización por corte, y se expresan las masas resultantes en términos de los acoplamientos de Yukawa y de los parámetros del potencial escalar del modelo. Mediante el uso de valores representativos comúnmente adoptados en la literatura, se muestra que el modelo reproduce exitosamente la pequeñez observada de las masas de los neutrinos, al tiempo que proporciona candidatos viables para la materia oscura.

Abstract

In this work, we investigate the original scotogenic model proposed by Ernest Ma, which provides a radiative mechanism for the generation of neutrino masses through one-loop quantum corrections. This model extends the Standard Model by introducing new particles and a discrete symmetry that forbids the appearance of neutrino masses at tree level, allowing them to be generated naturally via radiative effects.

In particular, the neutrino mass matrix is explicitly computed at the one-loop level using the cutoff regularization method, and the resulting masses are expressed in terms of the Yukawa couplings and the parameters of the scalar potential of the model. By adopting representative values commonly used in the literature, we show that the model successfully accounts for the observed smallness of neutrino masses while simultaneously providing viable candidates for dark matter.

Contenido

1. Introducción	15
2. Planteamiento del Problema	17
3. Objetivos	19
3.1. Objetivos generales	19
3.2. Objetivos específicos	19
4. Electrodinámica Cuántica (QED)	21
4.1. Antecedentes de la electrodinámica cuántica	22
4.2. Ecuación de Dirac	24
4.3. Solución a la ecuación de Dirac	27
4.3.1. Solución primer caso ($\vec{p} = 0$)	27
4.3.2. Solución segundo caso ($\vec{p} \neq 0$)	29
4.4. Covarianza bilineal	38
4.5. El fotón	44
4.6. Resumen rápido	51
4.7. Reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica.	53
5. Sistemas de Renormalización	57
5.1. Antecedentes sistemas de renormalización	57
5.2. Conteo de Divergencias Ultravioletas.	57
5.3. Teoría de Perturbaciones Renormalizada	65
5.4. Estructura de la teoría ϕ^4 de un solo Loop	70
5.4.1. Rotación de Wick y eliminación de divergencias	73
5.5. Renormalización y el loop escotogénico	83
6. Masas de Neutrinos y Mecanismo de See-Saw	85
6.1. Naturaleza del Neutrino	85
6.1.1. Masa de Dirac	85
6.1.2. Neutrino de Majorana	88
6.1.3. Masas de Majorana	91
6.2. Mecanismo Seesaw	94

6.2.1. Mecanismo Seesaw I	94
7. Modelo Escotogénico de Ma	103
7.1. Reglas de Feynman para el modelo de Ma	105
7.2. Cálculo de la matriz de masas	106
7.3. Análisis de la matriz de masa	117
8. Resultados	123
8.1. Estimación numérica de las masas de los neutrinos	123
9. Conclusiones	129
10. Apéndices	131

Índice de figuras

4.1. Diagrama de autoenergía del electrón	21
4.2.	53
4.3.	53
4.4.	53
4.5. Factores de vértice	54
4.6. Propagador para el electrón y positrón.	54
4.7. Propagador para el fotón.	54
5.1. Diagramas de la QED con divergencias ultravioletas.	57
5.2. Múltiples diagramas.	58
5.3. Ej.1. Grado superficial de divergencia	60
5.4. Ej.2. Grado superficial de divergencia	60
5.5. Ej.3. Grado superficial de divergencia	60
5.6. Ej.4. Grado superficial de divergencia	60
5.7. Ej.5. Grado superficial de divergencia	60
5.8.	61
5.9.	61
5.10.	61
5.11.	61
5.12.	62
5.13.	62
5.14.	62
5.15.	67
5.16.	67
5.17.	67
5.18.	68
5.19.	68
5.20.	69
5.21.	69
5.22.	69
5.23.	69
5.24.	70
5.25.	70

5.26.	70
5.27. Rotación de Wick	74
7.1. Mecanismo que genera masas de neutrinos según lo considerado por Ernest Ma.	105
7.2. Representación del mecanismo de generación de masas con la inclusión de la parte real e imaginaria del campo escalar η^0	105
8.1. Relación entre las masas de los neutrinos ligeros m_k y las masas de Majorana M_k en el marco del mecanismo escotogénico.	126

Capítulo 1

Introducción

El origen de las masas de los neutrinos y su extremadamente pequeño valor constituye uno de los problemas abiertos más relevantes de la física de partículas contemporánea. Aunque los experimentos de oscilaciones de neutrinos han establecido de manera concluyente que los neutrinos poseen masa, el Modelo Estándar de la física de partículas no ofrece un mecanismo natural para explicarlas. Esto ha motivado la exploración de marcos teóricos que extienden el Modelo Estándar y permiten la generación de masas de neutrinos mediante nueva dinámica.

Entre estas propuestas, el modelo escotogénico introducido por Ernest Ma se destaca como una extensión elegante y mínima, en la cual las masas de los neutrinos se generan radiativamente a un loop. El modelo introduce nuevos campos fermiónicos y escalares, junto con una simetría discreta que prohíbe los términos de masa de los neutrinos a nivel árbol, garantizando que la pequeñez de sus masas surja de manera natural a partir de correcciones cuánticas. Un aspecto adicional atractivo de este marco es la conexión intrínseca que establece entre la generación de masa de los neutrinos y la existencia de candidatos viables para la materia oscura.

En este trabajo se estudia el modelo escotogénico original y se calcula explícitamente la matriz de masa de los neutrinos a un lazo, empleando un esquema de regularización por corte. Las masas de los neutrinos resultantes se expresan en términos de los acoplamientos de Yukawa y de los parámetros del potencial escalar. Mediante el uso de valores representativos comúnmente adoptados en la literatura, se demuestra que el modelo reproduce exitosamente la pequeñez observada de las masas de los neutrinos, al tiempo que proporciona candidatos viables para la materia oscura.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

Los modelos escotogénicos han ganado un interés significativo en el campo de la física de altas energías, debido a su capacidad para abordar de manera innovadora algunos de los desafíos fundamentales de la física. Uno de los aspectos más notables de estos modelos es su habilidad para explicar la pequeñez de las masas de los neutrinos, un problema que ha desconcertado a la comunidad científica durante décadas. En particular, los modelos escotogénicos logran suprimir los términos a nivel árbol en la lagrangiana, lo que permite una generación natural de las masas de los neutrinos a través de correcciones a un loop. Además, estos modelos ofrecen una intrigante conexión entre la física de neutrinos y la materia oscura, sugiriendo que ambas podrían estar relacionadas a través de un marco teórico unificado. Esta posibilidad ha impulsado el estudio de los modelos escotogénicos durante muchos años, y sigue siendo un tema de intensa investigación en la literatura científica contemporánea. El propósito de nuestro trabajo de grado es derivar la expresión analítica para la matriz de masa de los neutrinos dentro del contexto del modelo original propuesto por Ernest Ma en 2006 [11]. Este modelo introduce un mecanismo que no solo explica la pequeñez de las masas de los neutrinos como una consecuencia de que la matriz de masa es generada por correcciones a un loop, sino que también propone un candidato viable para la materia oscura. En el presente trabajo de grado nos proponemos calcular de forma analítica la matriz de masa en este modelo. Este trabajo contribuirá al entendimiento más profundo de las interacciones subyacentes. La importancia de este tema de investigación se debe a que esta clase de modelos proporcionan pistas valiosas para la búsqueda experimental de nueva física más allá del Modelo Estándar.

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivos generales

- Calcular la matriz de masa de los neutrinos en el marco del modelo escotogénico propuesto por Ernest Ma [11].

3.2. Objetivos específicos

- Aplicar los métodos de regularización, como el corte en los momentos y la regularización dimensional, en cálculos a un loop.
- Usar los conceptos básicos de renormalización en el cálculo de las masas de los neutrinos.
- Comprender la motivación física de los modelos escotogénicos y su relevancia en la explicación de la pequeñez de la masa de los neutrinos.

Capítulo 4

Electrodinámica Cuántica (QED)

La Electrodinámica Cuántica estudia la interacción entre la luz y la materia. Su origen se remonta al artículo [5] de P.A.M. Dirac publicado en 1928 y titulado The Quantum Theory of the Electrón, donde se preguntaba, en principio, porque el electrón en lugar de ser nada más que una carga puntual, debía de tener propiedades como, por ejemplo, el momento magnético de un magnetón de Bohr y el momento angular de espín igual a medio cuanto de energía. La falta de argumentos teóricos llevó a Dirac a pensar que se debía a su desacuerdo con la teoría de la relatividad y las transformaciones de Lorentz, y este fue el punto clave para desarrollar una ecuación de onda relativista y lineal. En el mismo artículo, Dirac estudió un caso clásico de lo que llegaría a hacer parte fundamental de la electrodinámica cuántica, el valor del factor g del momento magnético como igual a 2.

Haciendo uso de la Ecuación de Dirac, se continuó con la cuantización de la teoría electromagnética, que también se denominó: Teoría Cuántica de Campos, en esta teoría la relatividad y la mecánica cuántica parecían armonizarse, pero cuando se profundizó aparecieron divergencias en los cálculos. Un ejemplo de ello se da cuando se calcula la autoenergía del electrón, que es el fenómeno donde el electrón puede emitir y absorber el mismo fotón. El cálculo del diagrama para esta interacción con términos perturbativos resulta en una integral divergente. Este problema se solucionó con el método de renormalización propuesto de forma paralela e independiente por Richard Feynman [6], Julian Schwinger [14] y Shin'ichiro Tomonaga [15].

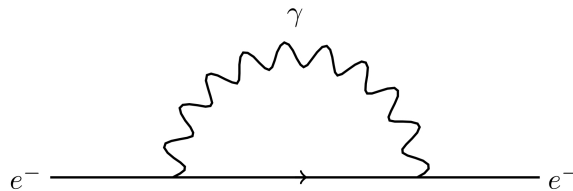


Figura 4.1: Diagrama de autoenergía del electrón

4.1. Antecedentes de la electrodinámica cuántica

En la mecánica cuántica no relativista, las partículas se describen mediante la ecuación de Schrödinger; en la mecánica cuántica relativista, las partículas de espín 0 se describen mediante la ecuación de Klein-Gordon, las partículas de espín $\frac{1}{2}$ mediante la ecuación de Dirac y las partículas de espín 1 mediante la ecuación de Proca. Sin embargo, una vez que se han establecido las reglas de Feynman, la ecuación de campo subyacente pasa a un segundo plano. Pero para el espín $\frac{1}{2}$, la propia notación de las reglas de Feynman presupone cierta familiaridad con la ecuación de Dirac.

Una forma de 'derivar' la ecuación de Schrödinger es comenzar con la relación clásica energía-momento:

$$\frac{|\vec{p}|^2}{2m} + V(\vec{x}) = E, \quad (4.1)$$

donde sus operadores diferenciales son de la forma:

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla \quad ; \quad E = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.2)$$

de manera que:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{x}) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.3)$$

y dejando actuar sobre una función de onda ψ , queda:

$$\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(\vec{x})\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi, \quad (4.4)$$

que es la ecuación de Schrödinger no relativista. Históricamente, Schrödinger fue el primero en buscar una ecuación de onda relativista, pero debido a las dificultades que presentaba prefirió dejar ese camino y concentrarse en la ecuación de onda (4.4), que además cuenta con la ventaja de que es una ecuación diferencial con derivada temporal de primer orden. Poco después en 1926, Klein, Fock y Gordon presentaron sus artículos por separado con una misma conclusión: la ecuación de onda relativista para partículas de espín cero. Yendo por la misma dirección y usando la relación de dispersión o relación relativista de energía-momento:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2|\vec{p}|^2, \quad (4.5)$$

la cual usando el vector de cuadrimomento:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \quad ; \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right), \quad (4.6)$$

y su producto:

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \left(\frac{E}{c}, -\vec{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p} \cdot \vec{p}, \quad (4.7)$$

así, de la ecuación (4.5) y (4.7) se puede obtener la relación:

$$p_\mu p^\mu = m^2c^2. \quad (4.8)$$

Ahora bien, proponemos la regla de cuantización:

$$\vec{p} = -i\hbar\nabla \rightarrow \vec{p} = -i\hbar\partial_\mu, \quad (4.9)$$

donde:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu},$$

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (4.10)$$

de modo que también:

$$p^\mu = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau}, -i\hbar\partial_i \right), \quad (4.11)$$

$$p_\mu = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial \tau}, i\hbar\partial_i \right), \quad (4.12)$$

ahora usamos la ecuación (4.8) para derivar la ecuación de Klein-Gordon:

$$p_\mu p^\mu = m^2 c^2 \quad (4.13)$$

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = 0, \quad (4.14)$$

$$(i\hbar\partial_\mu)(-i\hbar\partial^\mu) - m^2 c^2 = 0, \quad (4.15)$$

simplificando tenemos:

$$\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu - m^2 c^2 = 0, \quad (4.16)$$

se define el D'Alembertiano $\partial_\mu \partial^\mu = \square$:

$$\hbar^2 \square - m^2 c^2 = 0, \quad (4.17)$$

dejando que la relación actúe sobre una función de onda ψ obtenemos:

$$\left(\square - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi = 0, \quad (4.18)$$

la anterior relación se conoce como la ecuación de Klein Gordon. Es posible encontrarla de la forma:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi, \quad (4.19)$$

Schrödinger descubrió esta ecuación incluso antes que la no relativista que lleva su nombre; la abandonó cuando no logró reproducir los niveles de energía de Bohr para el hidrógeno. El problema es que el electrón tiene espín $\frac{1}{2}$ y la ecuación de Klein-Gordon se aplica a partículas con espín 0. La ecuación de Klein-Gordon se aplica a partículas con espín 0, además, esta es incompatible con la interpretación estadística de Bohr, que dice que $|\psi|^2$ da la probabilidad de encontrar la partícula en el punto r . La fuente de esta dificultad se remonta al hecho de que la ecuación de Klein-Gordon es de segundo orden en t . Así que Dirac se propuso encontrar una ecuación consistente con la fórmula relativista de energía-momento, y sin embargo

de primer orden en el tiempo. Irónicamente, en 1934, Pauli y Weisskopf demostraron que la interpretación estadística en sí misma debe ser reformulada en la teoría cuántica relativista, y restauraron la ecuación de Klein-Gordon a su lugar correcto, mientras que conservaron la ecuación de Dirac para partículas de espín $\frac{1}{2}$

4.2. Ecuación de Dirac

El primero de febrero de 1928 se publicó el artículo de Paul Dirac en el cual proponía la ecuación de onda que más tarde sería conocida como la Ecuación de Dirac. Hasta la actualidad, esta ecuación puede ser aplicada a partículas con espín $\frac{1}{2}$, tal como el electrón, que fue la partícula en la que se centró el estudio. Y, no siendo suficiente con ser una ecuación de onda relativista lineal, tiene dos características fundamentales: es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y predice la antimateria.

La estrategia de Dirac fue “factorizar” la relación energía-momento (4.13), esto se facilita si consideramos una partícula con velocidad cero ($\vec{p} = 0$) de modo que:

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = 0, \quad (4.20)$$

$$p_0^2 - \underbrace{|\vec{p}|^2}_0 - m^2 c^2 = 0, \quad (4.21)$$

$$p_0^2 - m^2 c^2 = (p_0 + mc)(p_0 - mc) = 0, \quad (4.22)$$

obtenemos dos ecuaciones de primer orden

$$(p_0 - mc) = 0, \quad (4.23)$$

$$(p_0 + mc) = 0, \quad (4.24)$$

pero es un asunto diferente cuando se incluyen los componentes espaciales ($\vec{p} \neq 0$); en este caso buscamos que $p_\mu p^\mu$ sean iguales a unos factores $B^k p_k$ y $\gamma^\lambda p_\lambda$ de la siguiente forma:

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = (B^k p_k + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0, \quad (4.25)$$

distribuimos:

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = B^k p_k \gamma^\lambda p_\lambda + mc \gamma^\lambda p_\lambda - mc B^k p_k - m^2 c^2, \quad (4.26)$$

simplificamos:

$$p_\mu p^\mu = B^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda + mc \gamma^\lambda p_\lambda - mc B^k p_k, \quad (4.27)$$

analizando términos lineales y no lineales:

$$\underbrace{p_\mu p^\mu}_{\text{Términos No lineales}} = \underbrace{B^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda}_{\text{Términos NO lineales}} + \underbrace{mc \gamma^\lambda p_\lambda}_{\text{Términos lineales}} - \underbrace{mc B^k p_k}_{\text{Términos lineales}}, \quad (4.28)$$

un término no lineal debe ser igual a otro no lineal:

$$p_\mu p^\mu = B^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda, \quad (4.29)$$

de manera que necesariamente los términos lineales deben ser iguales a cero, por lo tanto:

$$mc\gamma^\lambda p_\lambda - mcB^k p_k = 0, \quad (4.30)$$

$$mc(\gamma^\lambda p_\lambda - B^k p_k) = 0, \quad (4.31)$$

no queremos ningún término lineal en p_k , para esto es necesario elegir:

$$\gamma^k = B^k, \quad (4.32)$$

consideramos (4.32) para los términos no lineales (4.29):

$$p_\mu p^\mu = B^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda = \gamma^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda, \quad (4.33)$$

reescribimos:

$$p_\mu p^\mu = \frac{1}{2} \gamma^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda + \frac{1}{2} \underbrace{\gamma^\lambda \gamma^k}_{\substack{\lambda \rightarrow k \\ y \\ k \rightarrow \lambda}} p_\lambda p_k, \quad (4.34)$$

puesto que son índices mudos, se puede renombrar los índices así: $\lambda \rightarrow k$ y $k \rightarrow \lambda$, por lo tanto:

$$p_\mu p^\mu = \frac{1}{2} \gamma^k \gamma^\lambda p_k p_\lambda + \frac{1}{2} \gamma^\lambda \gamma^k p_\lambda p_k, \quad (4.35)$$

$$p_\mu p^\mu = \frac{1}{2} [\gamma^k \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^k] p_\lambda p_k, \quad (4.36)$$

usamos la métrica para reescribir los momentos del lado izquierdo de la ecuación:

$$p_\mu p^\mu = p_\lambda p^\lambda = p_\lambda p_k g^{\lambda k}, \quad (4.37)$$

por lo tanto:

$$p_\lambda p_k g^{\lambda k} = \frac{1}{2} [\gamma^k \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^k] p_\lambda p_k, \quad (4.38)$$

$$p_\lambda p_k \left(g^{\lambda k} - \frac{1}{2} [\gamma^k \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^k] \right) = 0, \quad (4.39)$$

dado que los momentos ($p_\lambda p_k$) se han escogido de tal manera que sean diferentes de cero, la única posibilidad es que:

$$2g^{\lambda k} = \gamma^k \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^k, \quad (4.40)$$

aplicando álgebra de anticonmutadores queda:

$$\{\gamma^k, \gamma^\lambda\} = 2g^{\lambda k}, \quad (4.41)$$

si las γ^k son matrices, entonces hay soluciones no triviales a esta ecuación. Aquí es importante dar a conocer que los cálculos posteriores se van a hacer en la base de masas y no en la base

quiral, entonces se tiene un conjunto de matrices que satisfacen esta relación de conmutación, estas son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 1_{2 \times 2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.42)$$

donde σ^i con $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli, que se representan como:

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Volvamos a la ecuación (4.25) pero ahora consideramos $B^k = \gamma^k$:

$$p_\mu p^\mu - m^2 c^2 = (\gamma^k p_k + mc) (\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0, \quad (4.44)$$

y para que se satisfaga la ecuación es costumbre escoger:

$$(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0, \quad (4.45)$$

Al hacer la sustitución $p_\lambda \rightarrow i\hbar\partial_\lambda$

$$\begin{aligned} (\gamma^\lambda (i\hbar\partial_\lambda) - mc) &= 0, \\ (i\hbar\gamma^\lambda\partial_\lambda - mc) &= 0, \end{aligned} \quad (4.46)$$

dejando que la relación actúe sobre una función de onda ψ obtenemos:

$$(i\hbar\gamma^\lambda\partial_\lambda - mc) \psi = 0 \rightarrow \text{Ecuación de Dirac.} \quad (4.47)$$

Ahora, ψ es una matriz de columnas de cuatro elementos:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

lo llamamos "Bi-spinor" ó "Spinor de Dirac". (Aunque tiene cuatro componentes, este objeto no es un cuatrivector)

4.3. Solución a la ecuación de Dirac

4.3.1. Solución primer caso ($\vec{p} = 0$)

Inicialmente resolvamos el caso más simple, este sería para cuando el momento lineal es igual a cero:

$$\begin{aligned}
 (i\hbar\gamma^\lambda\partial_\lambda - mc) &= 0, \\
 \left(\gamma^0 p_0 - \gamma^i \underbrace{\vec{p}}_0 - mc \right) \psi &= 0, \\
 (i\hbar\gamma^0\partial_0 - mc) \psi &= 0, \\
 \left(\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial}{\partial t} - mc \right) \psi &= 0, \\
 \frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

En lo que sigue consideramos un campo de Dirac de masa definida m . Para las matrices γ^μ se adopta la representación estándar de Dirac, también llamada representación de Dirac-Pauli. Con la convención métrica $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$, dichas matrices satisfacen el álgebra de Clifford

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}.$$

En esta representación, las matrices de Dirac están dadas por:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & -I_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \tag{4.50}$$

donde σ^i son las matrices de Pauli. De modo que:

$$\frac{i\hbar}{c}\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0, \tag{4.51}$$

$$\frac{i\hbar}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} - mc \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = 0, \tag{4.52}$$

reducimos de la forma:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{4.53}$$

así reescribimos:

$$\begin{aligned}
 \frac{i\hbar}{c} \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & -1_{2\times 2} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} - mc \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} &= 0, \\
 \frac{i\hbar}{c} \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0_{2\times 2} \\ 0_{2\times 2} & -1_{2\times 2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} - mc \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

esto nos arroja dos ecuaciones diferenciales:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_A}{\partial t} - mc^2 \psi_A = 0, \quad (4.55)$$

$$-i\hbar \frac{\partial \psi_B}{\partial t} - mc^2 \psi_B = 0, \quad (4.56)$$

para encontrar la solución a esta ecuación diferencial es necesario proponer la siguiente solución:

$$\psi_A = \psi_A(0) e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t}, \quad (4.57)$$

$$\psi_B = \psi_B(0) e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t}, \quad (4.58)$$

probemos que es una solución, para esto reemplacemos las soluciones en la ecuación diferencial, así:

$$\begin{aligned} i\hbar \left(-i \frac{mc^2}{\hbar} \psi_A(0) e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \right) - mc^2 \psi_A(0) e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} &= 0, \\ mc^2 \psi_A(0) e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} - mc^2 \psi_A(0) e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} &= 0, \\ (mc^2 - mc^2) \psi_A(0) e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} &= 0, \end{aligned} \quad (4.59)$$

de la misma manera:

$$\begin{aligned} -i\hbar \left(i \frac{mc^2}{\hbar} \psi_B(0) e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \right) - mc^2 \psi_B(0) e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} &= 0, \\ mc^2 \psi_B(0) e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} - mc^2 \psi_B(0) e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} &= 0, \\ (mc^2 - mc^2) \psi_B(0) e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} &= 0, \end{aligned} \quad (4.60)$$

se comprueba que efectivamente son soluciones de la ecuación diferencial. Por lo tanto, la ecuación de Dirac con $\vec{p} = 0$ admite cuatro soluciones independientes, donde las soluciones $e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t}$ representan estados de energía negativa $E \rightarrow -mc^2$.

El valor de la normalización N se encuentra en el apéndice B (10):

$$\underbrace{\psi^{(1)} = N e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spín up}(\uparrow)} \quad ; \quad \underbrace{\psi^{(2)} = N e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spín up}(\uparrow)}, \quad (4.61)$$

$$\underbrace{\psi^{(3)} = N e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spín down}(\downarrow)} \quad ; \quad \underbrace{\psi^{(4)} = N e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spín down}(\downarrow)}, \quad (4.62)$$

a las soluciones $\psi^{(2)}$ y $\psi^{(3)}$, con energía negativa, se las interpreta como antipartículas con energía positiva y las otras, $\psi^{(1)}$ y $\psi^{(4)}$, son para las partículas, pero ambas, partículas y antipartículas, con espín $\frac{1}{2}$. Es de resaltar que la ecuación de Dirac no describe nada más una sola partícula sino que describe a dos. De acuerdo con [13] la interpretación fenomenológica que mejor se adecúa es la de entender al espinor como un campo y al cuadrado de su norma como la medida del número de partículas a encontrar en un determinado punto.

4.3.2. Solución segundo caso ($\vec{p} \neq 0$)

Necesitamos obtener soluciones de onda planas que son el caso mas simple. Consideramos la solución:

$$\psi(\mathbf{x}) = N e^{-ik_\mu x^\mu} u^{(s)}(k^0, \vec{k}), \quad (4.63)$$

esperamos encontrar un cuatro vectores \mathbf{k} y un spinor asociado $u(\mathbf{k})$ tal que $\psi_1(\mathbf{x})$ satisfaga la ecuación de Dirac (N es un factor de normalización, irrelevante para nuestro propósito actual pero necesario más adelante para mantener las unidades consistentes). ($\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ es un producto Minkouskiano)

Derivando la ecuación (4.63) tenemos:

$$\partial_\mu \psi(\mathbf{x}) = -i N k_\mu e^{-ik_\mu x^\mu} u^{(s)}(k^0, \vec{k}), \quad (4.64)$$

retomando la ecuación de Dirac

$$i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi = 0, \quad (4.65)$$

sustituyendo (4.63) y (4.64) en (4.65) tenemos:

$$\begin{aligned} i\hbar \gamma^\mu (-ik_\mu N e^{-ik_\mu x^\mu} u(\mathbf{k})) - mc \left(N e^{-ik_\mu x^\mu} u^{(s)}(k^0, \vec{k}) \right) &= 0, \\ (i\hbar \gamma^\mu (-ik_\mu) - mc) N e^{-ik_\mu x^\mu} u^{(s)}(k^0, \vec{k}) &= 0, \\ (\hbar \gamma^\mu k_\mu - mc) N e^{-ik_\mu x^\mu} u^{(s)}(k^0, \vec{k}) &= 0, \end{aligned} \quad (4.66)$$

si se observa la función de Euler se descompone en senos y cosenos, de manera de que esta difícilmente será cero, al igual que el valor de N , este producto es diferente de cero $N e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \neq 0$ de manera que:

$$(\hbar \gamma^\mu k_\mu - mc) u^{(s)}(k^0, \vec{k}) = 0, \quad (4.67)$$

observemos que:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu k_\mu &= \gamma^0 k_0 - \gamma^i k_i, \\ \gamma^\mu k_\mu &= \gamma^0 k_0 - \vec{k} \cdot \vec{\gamma}, \end{aligned} \quad (4.68)$$

matricialmente esto se ve de la forma:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu k_\mu &= k^0 \begin{pmatrix} 1_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -1_{2 \times 2} \end{pmatrix} - \vec{k} \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma^\mu k_\mu &= \begin{pmatrix} k^0 \cdot \mathbf{1} & 0 \\ 0 & -k^0 \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \\
\gamma^\mu k_\mu &= \begin{pmatrix} k^0 \cdot \mathbf{1} & -\vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -k^0 \cdot \mathbf{1} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.69}$$

de esta manera la ecuación de Dirac se puede representar matricialmente:

$$\begin{aligned}
(\hbar \gamma^\mu k_\mu - mc) u^{(s)}(k^0, \vec{k}) &= 0, \\
\begin{bmatrix} (\hbar k^0 \cdot \mathbf{1} - mc) & -\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma} \\ \hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma} & -(\hbar k^0 \cdot \mathbf{1} + mc) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_A \\ u_B \end{bmatrix} &= 0,
\end{aligned} \tag{4.70}$$

del resultado anterior se obtienen las ecuaciones:

$$(\hbar k^0 - mc) u_A - \hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma} u_B = 0, \tag{4.71}$$

$$\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma} u_A - (\hbar k^0 + mc) u_B = 0, \tag{4.72}$$

despejando u_A y u_B tenemos:

$$u_A = \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{(\hbar k^0 - mc)} u_B, \tag{4.73}$$

$$u_B = \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{(\hbar k^0 + mc)} u_A, \tag{4.74}$$

sustituyendo u_A en u_B tenemos:

$$\begin{aligned}
u_A &= \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{(\hbar k^0 - mc)} \left(\frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{(\hbar k^0 + mc)} u_A \right), \\
1 &= \frac{(\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2}{\hbar^2 (k^0)^2 - m^2 c^2}, \\
1 &= \frac{\hbar^2 (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2}{\hbar^2 \left((k^0)^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right)}, \\
1 &= \frac{(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2}{(k^0)^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}},
\end{aligned} \tag{4.75}$$

analizando el numerador:

$$\begin{aligned}\vec{k} \cdot \vec{\sigma} &= k_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + k_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \vec{k} \cdot \vec{\sigma} &= \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_z \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{4.76}$$

y su cuadrado:

$$\begin{aligned}(\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_z \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix}^2, \\ (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \begin{pmatrix} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 & k_z(k_x - ik_z) - k_z(k_x - ik_z) \\ (k_x - ik_y)k_z - k_z(k_x - ik_y) & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{pmatrix}, \\ (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 &= \begin{pmatrix} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 & 0 \\ 0 & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{pmatrix}, \\ (\vec{k} \cdot \vec{\sigma})^2 &= (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |\vec{k}|^2 \cdot \mathbf{1} = |\vec{k}|^2,\end{aligned}\tag{4.77}$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}1 &= \frac{|\vec{k}|^2}{(k^0)^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}}, \\ |\vec{k}|^2 &= (k^0)^2 - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}, \\ \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 &= (k^0)^2 - |\vec{k}|^2 = k_\mu k^\mu,\end{aligned}\tag{4.78}$$

entonces, $\hbar k^\mu$ debe ser un cuatrivector asociado con la partícula cuyo 'cuadrado' es $m^2 c^2$. Por supuesto, conocemos esa cantidad: el cuatrivector de energía-momento. Evidentemente es:

$$k^\mu = \pm \frac{p^\mu}{\hbar},\tag{4.79}$$

el signo positivo (dependencia del tiempo $e^{-\frac{iE}{\hbar}}$) se asocia con estados de partículas, y el signo negativo (dependencia del tiempo $e^{\frac{iE}{\hbar}}$) con estados de antipartículas.

Retomando la ecuación (4.74),

$$u_B = \frac{\hbar \vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\hbar k^0 + mc} u_A,\tag{4.80}$$

y usando $p^\mu = \hbar k^\mu$, se obtiene

$$u_B = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 + mc} u_A.\tag{4.81}$$

En este punto, u_A no queda determinado de manera única por la ecuación de Dirac. La ecuación anterior solo establece una relación entre las componentes u_A y u_B , de modo que, una

vez elegido u_A , la componente u_B queda fijada. Por esta razón, para construir las soluciones de energía positiva se escoge una base conveniente en el espacio de espín. En particular, se toma la base de autoestados de σ_z :

$$\chi_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Así, al tomar $u_A = \chi_{\uparrow}$, se obtiene

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 - mc} u_A, \\ u_B &= \frac{1}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_B &= \frac{1}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mientras que, al tomar $u_A = \chi_{\downarrow}$, se obtiene

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 - mc} u_A, \\ u_B &= \frac{1}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_B &= \frac{1}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De forma análoga, para construir las soluciones restantes se toma como libre la componente u_B . De la relación

$$u_A = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 - mc} u_B,$$

se obtiene, si $u_B = \chi_{\uparrow}$,

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 - mc} u_B \\ u_A &= \frac{1}{p^0 - mc} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ u_A &= \frac{1}{p^0 - mc} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Mientras que, si $u_B = \chi_{\downarrow}$,

$$\begin{aligned} u_A &= \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 - mc} u_B \\ u_A &= \frac{1}{p^0 - mc} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ u_A &= \frac{1}{p^0 - mc} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En resumen:

- Sí u_A es:

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow u_B = \frac{1}{(p^0 + mc)} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad (4.83)$$

- Sí u_A es:

$$u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow u_B = \frac{1}{(p^0 + mc)} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -P_z \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

- Sí u_B es:

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow u_A = \frac{1}{(p^0 - mc)} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \quad (4.85)$$

- Sí u_B es:

$$u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow u_A = \frac{1}{(p^0 - mc)} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -P_z \end{pmatrix}, \quad (4.86)$$

se ha de tener en cuenta que cuando se definió u_A , se tomo la solución para partículas $k^\mu = p^\mu$ con $p^0 > 0$ y cuando se definió u_B se tomó la solución para antipartículas $k^\mu = -p^\mu$ con $-p^0 < 0$ obligando a tomar el signo menos. Para que esto sea consistente es necesario normalizar los espinores. La ecuación de Dirac determina la forma relativa de las componentes del espinor, pero no fija su escala global. Por esta razón se introduce la constante N , la cual actúa como un factor de normalización. En este trabajo se adopta la convención

$$u^\dagger u = \frac{2E}{c}, \quad (4.87)$$

donde

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \quad y \quad u^\dagger = (\alpha^* \quad \beta^* \quad \gamma^* \quad \delta^*), \quad (4.88)$$

por lo tanto:

$$u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2. \quad (4.89)$$

Para fijar N , consideremos por ejemplo la solución $u^{(1)}$:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \quad (4.90)$$

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (u^{(1)})^\dagger u^{(1)} &= N^2 \left[1 + \frac{c^2 p_z^2}{(E + mc^2)^2} + \frac{c^2 (p_x^2 + p_y^2)}{(E + mc^2)^2} \right] \\ &= N^2 \left[1 + \frac{c^2 |\vec{p}|^2}{(E + mc^2)^2} \right]. \end{aligned}$$

Usando la relación relativista

$$E^2 = c^2 |\vec{p}|^2 + m^2 c^4,$$

se tiene

$$c^2 |\vec{p}|^2 = E^2 - m^2 c^4 = (E - mc^2)(E + mc^2).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (u^{(1)})^\dagger u^{(1)} &= N^2 \left[1 + \frac{E - mc^2}{E + mc^2} \right] \\ &= N^2 \left[\frac{2E}{E + mc^2} \right]. \end{aligned}$$

Al imponer la condición de normalización

$$(u^{(1)})^\dagger u^{(1)} = \frac{2E}{c},$$

se obtiene

$$N^2 \frac{2E}{E + mc^2} = \frac{2E}{c}.$$

De donde resulta

$$N^2 = \frac{E + mc^2}{c},$$

y, tomando N real y positivo,

$$N = \sqrt{\frac{E + mc^2}{c}}.$$

Obteniendo como consecuencia las cuatro soluciones:

$$u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E + mc^2} \end{pmatrix} ; \quad u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix}, \quad (4.91)$$

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E - mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E - mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E - mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.92)$$

es importante ver que las soluciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ son consistentes y que las otras $u^{(3)}$ y $u^{(4)}$ no, porque tienen energías negativas, lo cual requiere una nueva interpretación, lo que llevará a redefinirlas como $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ haciendo las consideraciones físicas que viene ahora. Anteriormente se había dicho que las cantidades $\frac{E}{c}$ y \vec{p} corresponden físicamente a la energía y el momento de una partícula, particularmente los estados del electrón, lo cual es cierto para $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$, pero en el caso de $u^{(3)}$ y $u^{(4)}$ no se puede interpretar de la misma forma, pues no hay energías negativas, por lo que la manera adecuada de tratar este resultado es interpretando el signo menos como una antipartícula, en particular como estados de los positrones. La cuestión de expresar la solución de los positrones se resuelve haciendo un cambio de signos, tal que la función de onda puede escribirse así:

$$\psi(\vec{r}, t) = N e^{i(Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} u(-E, -\vec{p}), \quad (4.93)$$

de acuerdo con la interpretación de Feynman-Stückelberg, la cual sugiere que una solución de energía negativa se puede entender como una partícula de energía negativa que se propaga hacia atrás en el tiempo o, de igual manera, como una antipartícula con energía positiva que se propaga hacia adelante en el tiempo. Se definen los espinores:

$$v^{(1)} = N u^{(4)} u(-E, -\vec{p}), \quad (4.94)$$

$$v^{(2)} = -N u^{(3)} u(-E, -\vec{p}), \quad (4.95)$$

por lo tanto:

$$v^{(1)} = N u^{(4)} u(-E, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E + mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.96)$$

y también:

$$v^{(2)} = -N u^{(3)} u(-E, -\vec{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.97)$$

es decir, los espinores $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$, representan los dos estados de espín de los electrones con energía E y momento \vec{p} y los espinores $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ representan los dos estados de espín de los positrones con energía E y momento \vec{p} .

En resumen tenemos:

■ **Soluciones para partículas:**

$$\underbrace{u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c(p_x - ip_y)}{E + mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E + mc^2} \end{pmatrix}}_{\text{Spín down}(\downarrow)} ; \quad \underbrace{u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{E + mc^2} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix}}_{\text{Spín up}(\uparrow)}, \quad (4.98)$$

■ **Soluciones para antipartículas:**

$$\underbrace{v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{E+mc^2} \\ \frac{c(p_x+ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{Spín up}(\uparrow)} ; \quad \underbrace{v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c(p_x-ip_y)}{E+mc^2} \\ \frac{-cp_z}{E+mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spín down}(\downarrow)}, \quad (4.99)$$

En consecuencia, las funciones de onda plana para los estados de partícula y antipartícula se escriben, respectivamente, como

$$\psi_u^{(s)}(x) = a e^{-\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} u^{(s)}(p) \quad (\text{partículas}) ; \quad \psi_v^{(s)}(x) = a e^{\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} v^{(s)}(p) \quad (\text{antipartículas}), \quad (4.100)$$

donde $p_\mu x^\mu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$. La diferencia entre ambas soluciones está en el signo de la fase: la solución de partícula tiene dependencia temporal $e^{-iEt/\hbar}$, mientras que la solución de antipartícula tiene dependencia temporal $e^{iEt/\hbar}$.

Retomamos ahora la ecuación (4.67),

$$(\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc) u^{(s)}(k^0, \vec{k}) = 0.$$

Para las soluciones de energía positiva se toma

$$k_\mu = \frac{p_\mu}{\hbar}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} (\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc) u^{(s)}(k^0, \vec{k}) &= 0, \\ (\gamma^\mu p_\mu - mc) u^{(s)}(p) &= 0. \end{aligned}$$

Definiendo

$$\not{p} = \gamma^\mu p_\mu,$$

se obtiene

$$(\not{p} - mc) u^{(s)}(p) = 0. \quad (4.101)$$

Por otro lado, la solución de antipartícula puede escribirse como

$$e^{\frac{i}{\hbar} p_\mu x^\mu} = e^{-\frac{i}{\hbar} (-p_\mu) x^\mu}.$$

Esto muestra que, para esta rama, el cuadrivector de onda asociado es

$$k_\mu = -\frac{p_\mu}{\hbar}.$$

Al sustituir esta relación en la ecuación (4.67), se obtiene

$$\begin{aligned} (\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc) u^{(s)}(k^0, \vec{k}) &= 0, \\ (-\gamma^\mu p_\mu - mc) u^{(s)}\left(-\frac{p^0}{\hbar}, -\frac{\vec{p}}{\hbar}\right) &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 , resulta

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc) u^{(s)} \left(-\frac{p^0}{\hbar}, -\frac{\vec{p}}{\hbar} \right) = 0.$$

Para interpretar esta solución como una antipartícula de energía positiva y momento \vec{p} , se redefine el espinor

$$v^{(s)}(p) \equiv u^{(s)} \left(-\frac{p^0}{\hbar}, -\frac{\vec{p}}{\hbar} \right).$$

De esta manera,

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc) v^{(s)}(p) = 0,$$

o, equivalentemente,

$$(\not{p} + mc) v^{(s)}(p) = 0. \tag{4.102}$$

En resumen, los espinores asociados a partículas y antipartículas satisfacen, respectivamente,

$$(\not{p} - mc) u^{(s)}(p) = 0 \quad \textbf{(partículas)}, \tag{4.103}$$

$$(\not{p} + mc) v^{(s)}(p) = 0 \quad \textbf{(antipartículas)}. \tag{4.104}$$

4.4. Covarianza bilineal

A pesar de que los espinores de Dirac tienen la forma de un cuadvivector, sus componentes no transforman como tal cuando se va de un sistema inercial a otro. Sea un sistema que se mueve con velocidad v en la dirección x la regla de transformación es:

$$\psi = S\psi', \quad (4.105)$$

donde S es una matriz de transformación con tamaño 4×4 , cuyas componentes son:

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ \mathbf{1}_{2 \times 2} & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & a_- \\ 0 & a_+ & a_- & 0 \\ 0 & a_- & a_+ & 0 \\ a_- & 0 & 0 & a_+ \end{pmatrix}, \quad (4.106)$$

con:

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)}, \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (4.107)$$

esta matriz no es ortogonal ni unitaria, es decir:

$$SS^\dagger = \gamma \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{2 \times 2} & -\frac{v}{c} \sigma_1 \\ \sigma_1 & -\frac{v}{c} \mathbf{1}_{2 \times 2} \end{pmatrix} \neq 1, \quad (4.108)$$

lo que implica que el producto de los siguientes espinores no es invariante:

$$\psi^\dagger \psi = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*) \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2, \quad (4.109)$$

a partir de la la regla de transformación (4.105) se puede hacer el producto de un espinor de Dirac en un marco de referencia de coordenadas x' por otro en el mismo marco pero traspuesto conjugado, así:

$$\begin{aligned} (\psi')^\dagger \psi' &= (S\psi)^\dagger S\psi, \\ (\psi')^\dagger \psi' &= \psi^\dagger S^\dagger S\psi, \end{aligned} \quad (4.110)$$

por lo tanto el producto de un espinor de Dirac en un marco de referencia de coordenadas x' con otro espinor de Dirac en el mismo marco de referencia, pero traspuesto conjugado, no es invariante debido a (4.108). Una de las propiedades que satisface S es

$$S^\dagger \gamma^0 S = \gamma^0, \quad (4.111)$$

para poder continuar es necesario definir el espinor de Dirac adjunto como:

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \psi_3^* \quad \psi_4^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad -\psi_3^* \quad -\psi_4^*), \quad (4.112)$$

cuyas consecuencias son inmediatas, como se ve a continuación, cuando se hace el producto de un espinor de Dirac y otro espinor, pero adjunto y usando el resultado de la misma definición.

$$\bar{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2, \quad (4.113)$$

siendo el resultado invariante, a esta expresión, donde se suman dos cantidades y se resta la suma de otras dos se le conoce como escalar de Lorentz. Otra de las consecuencias es que si se toma un marco referencia de coordenadas x' y si a esto le sigue la regla de transformación (4.105) en conjunto con la definición (4.111) resulta:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi}\psi)' &= (\bar{\psi})' \psi', \\ (\bar{\psi}\psi)' &= (\psi^\dagger \gamma^0)' \psi', \\ (\bar{\psi}\psi)' &= \psi'^\dagger \gamma^0 \psi', \\ (\bar{\psi}\psi)' &= (S\psi)^\dagger \gamma^0 S\psi, \\ (\bar{\psi}\psi)' &= \psi^\dagger S^\dagger \gamma^0 S\psi, \\ (\bar{\psi}\psi)' &= \psi^\dagger \gamma^0 \psi, \\ (\bar{\psi}\psi)' &= \bar{\psi}\psi, \end{aligned} \quad (4.114)$$

la cual es una cantidad escalar y además invariante relativista.

Por otro lado es importante definir lo que son las **cantidades escalares** y las **cantidades pseudoescalares**. Siendo clasificadas de acuerdo a como transforman bajo paridad. Si ocurre que:

$$P : (x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z), \quad (4.115)$$

entonces se dice que son cantidades pseudoescalares y si no cambian de signo bajo la transformación de paridad, entonces son escalares.

Es necesario estudiar si los espinores de Dirac o cantidades que los involucran transforman o no bajo paridad y como lo hacen, tal sea el caso de $\bar{\psi}\psi$. Aparte de eso se hace necesario exigir la covarianza de Lorentz de la ecuación de Dirac, es decir:

$$\begin{aligned} (i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi &= 0 \quad \rightarrow \quad (i\hbar\gamma^{\mu'} \partial'_{\mu'} - mc)\psi' = 0, \\ i\hbar\gamma^\mu \partial_\mu \psi - mc\psi &= 0 \quad \rightarrow \quad i\hbar\gamma^{\mu'} \partial'_{\mu'} \psi' - mc\psi' = 0, \end{aligned} \quad (4.116)$$

aquí se va a aplicar la regla de transformación (4.105) y además, se debe tener en cuenta que la derivada parcial covariante que implícitamente involucra una transformación de coordenadas:

$$\partial'_{\mu'} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^v}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^v} = \Lambda^{\mathbf{T}v}_{\mu'} \partial_v = \Lambda_{\mu'}^{-1v} \partial_v, \quad (4.117)$$

entonces:

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} dx^{\nu'} \quad \rightarrow \quad dx^\mu = \Lambda^{\mu\nu} dx^{\nu'}, \quad (4.118)$$

de manera que estas transformaciones nos permitirá transformar la ecuación de Dirac; comprobemos esto:

$$i\hbar\gamma^{\mu'}\partial'_{\mu'}\psi' - mc\psi' = 0, \quad (4.119)$$

$$i\hbar\gamma^{\mu'}(\Lambda_{\mu'}^{-1\nu}\partial_\nu)(s\psi) - mc(s\psi) = 0, \quad (4.120)$$

puesto que $SS^{-1} = 1$ entonces:

$$i\hbar(SS^{-1})\gamma^{\mu'}(\Lambda_{\mu'}^{-1\nu}\partial_\nu)(S\psi) - mc(S\psi) = 0, \quad (4.121)$$

$$S \left[i\hbar \underbrace{(S^{-1}\gamma^{\mu'}\Lambda_{\mu'}^{-1\nu}S)}_{\gamma^\nu} \partial_\nu\psi - mc\psi \right] = 0, \quad (4.122)$$

$$i\hbar\gamma^\nu\partial_\nu\psi - mc\psi = 0, \quad (4.123)$$

para que la ecuación de Dirac sea invariante, se ha de exigir que:

$$\gamma^\nu = S^{-1}\gamma^{\mu'}\Lambda_{\mu'}^{-1\nu}S, \quad (4.124)$$

haciendo el renombramiento de índices $\mu' = \mu$ y teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$\Lambda_{\mu}^{-1\nu} = \Lambda^{\nu}_{\mu}, \quad (4.125)$$

resulta la ecuación cuyas cuatro soluciones, debido a que $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3$. garantizan la covarianza de Lorentz de la ecuación de Dirac:

$$S^{-1}\gamma^{\mu'}\Lambda^{\nu}_{\mu}S = \gamma^\nu, \quad (4.126)$$

una vez garantizada la covarianza de la Ecuación de Dirac ya se puede estudiar como transforman bajo paridad los espinores de Dirac. Para ello se parte de las transformaciones impropias de Lorentz, en particular la reflexión espacial:

$$\vec{x}' = -\vec{x} \quad ; \quad t' = -t, \quad (4.127)$$

esta transformación, por covarianza, requiere una solución de la ecuación (4.126), donde es posible llevar a cabo la transformación de paridad si solo se toman los elementos de la diagonal, por tanto la matriz será:

$$\Lambda^{\nu}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.128)$$

reescribiendo la ecuación (4.126):

$$S\gamma^v = \gamma^{\mu'} \Lambda_{\mu'}^v S, \quad (4.129)$$

analicemos cada valor de v , para el caso en que $v = 0$ tenemos:

$$S\gamma^0 = \underbrace{\gamma^0 \Lambda_0^{-10}}_1 S + \underbrace{\gamma^{\mu'} \Lambda_{\mu'}^{-1k} S}_{\text{(Elementos fuera de la diagonal)}}, \quad (4.130)$$

$$S\gamma^0 = \gamma^0 S \rightarrow \text{Conmutan}, \quad (4.131)$$

podemos hacer el mismo análisis y determinar que para los demás elementos de la diagonal principal se cumple:

$$S\gamma^k = -\gamma^k S \rightarrow \text{Anticonmutan}, \quad (4.132)$$

se evidencia que de las anteriores dos ecuaciones la primera conmuta y la segunda anticonmuta. Esto no es una elección arbitraria, puesto que en la ecuación de Dirac, cuando se lleva a cabo la reflexión espacial o aplicación del operador de paridad la coordenada temporal mantiene su signo mientras que la espacial, al tener que conmutar γ^0 con γ^i lo cambia, de modo que el espinor de Dirac para ser invariante, necesariamente debe cumplir la transformación:

$$\psi \rightarrow \psi' = \gamma^0 \psi, \quad (4.133)$$

de manera que:

$$\bar{\psi}' \psi' = (\psi \gamma^0)^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^{0\dagger} \underbrace{(\gamma^0)^2}_1 \psi = \bar{\psi} \psi, \quad (4.134)$$

$$\bar{\psi}' \psi' = \bar{\psi} \psi, \quad (4.135)$$

mostrando lo que se había afirmado antes, que este producto de espinores es invariante bajo transformación de paridad y por tanto es una cantidad escalar. Pero no solo hay de este tipo de cantidades, también las hay cantidades pseudoescalares, axiales, vectoriales y tensoriales, resultado del sándwich de matrices gamma entre el producto de espinores bilineales que son formas bilineales linealmente independientes, tal como:

$$\bar{\psi} \gamma^5 \psi, \quad (4.136)$$

donde:

$$\gamma^5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.137)$$

es necesario comprobar que es invariante de Lorentz.

En cuanto a su comportamiento bajo paridad:

$$(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)' = \bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = (\psi')^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^5 \gamma^0 \psi = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi, \quad (4.138)$$

note que γ^0 se encuentra en el lado izquierdo de la expresión, por lo tanto es necesario tener en cuenta las relaciones de conmutación, observemos

$$\gamma^5 \gamma^0 = (i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) \gamma^0 = (-1)^3 \gamma^0 (i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3) = -\gamma^0 \gamma^5, \quad (4.139)$$

la potencia del factor (-1) depende del número de pasos que le toma a γ^0 llegar hasta su correspondiente γ^0 , de manera que:

$$\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5, \quad (4.140)$$

y por lo tanto:

$$(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)' = \psi^\dagger (-\gamma^0 \gamma^5) \psi = -(\psi^\dagger \gamma^0) \gamma^5 \psi, \quad (4.141)$$

$$(\bar{\psi} \gamma^5 \psi)' = -(\bar{\psi} \gamma^5 \psi), \quad (4.142)$$

de la misma manera, γ^5 conmuta con las demás matrices

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0, \quad (4.143)$$

de manera que sí es un pseudoescalar.

Otra forma bilineal es $\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ la cual se divide en dos casos, uno para $\mu = 0$ y la otra para $\mu \neq 0$, como se ve a continuación cuando transforma:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' &= \bar{\psi}' \gamma^\mu \psi', \\ (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' &= (\psi')^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi', \\ (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' &= (\gamma^0 \psi)^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi, \\ (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0 \psi, \\ (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' &= \psi^\dagger \gamma^\mu \gamma^0 \psi, \end{aligned} \quad (4.144)$$

dado el caso en que $\mu = 0$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \gamma^0 \psi, \quad (4.145)$$

por otro lado, si se tiene el caso en que $\mu = i \neq 0$

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' = \psi^\dagger \gamma^i \gamma^0 \psi = -\bar{\psi} \gamma^i \psi, \quad (4.146)$$

de manera que:

$$(\bar{\psi} \gamma^\mu \psi)' = \begin{cases} \bar{\psi} \gamma^0 \psi & \text{sí } \mu = 0 \\ -\bar{\psi} \gamma^i \psi & \text{sí } \mu \neq 0 \end{cases}, \quad (4.147)$$

que es como transforma un vector, llamándose por tanto cantidad vectorial y tiene cuatro componentes. También está la forma bilineal $\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi$, la cual hace uso de la definición:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu), \quad \text{donde } (\sigma^{\mu\nu})^\dagger = \sigma^{\mu\nu}, \quad (4.148)$$

y para demostrar como transforma procedemos así:

$$\begin{aligned} (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)' &= (\psi')^\dagger \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \psi', \\ (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)' &= (\gamma^0 \psi)^\dagger \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 \psi, \\ (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)' &= \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 \psi, \\ (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)' &= \bar{\psi} [(-1)(\sigma^{\mu\nu})^\dagger] \psi, \\ (\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi)' &= \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi, \end{aligned} \quad (4.149)$$

de esta manera se puede ver que la cantidad transformó como un tensor, por tanto se la conoce como cantidad tensorial. La última de las formas bilineales que se pueden construir es $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$, esta cantidad bajo las transformaciones de Lorentz transforma como vector, y bajo paridad transforma como:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)' &= (\psi')^\dagger \gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\psi', \\(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)' &= (\gamma^0\psi)^\dagger \gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi, \\(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)' &= \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi, \\(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)' &= \psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^5\gamma^0\psi,\end{aligned}\tag{4.150}$$

usamos la resultado antes visto $\gamma^5\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^5$ y analizamos los casos

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi)' = -\psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^0\gamma^5\psi \begin{cases} -\bar{\psi}\gamma^0\gamma^5\psi & \text{sí } \mu = 0 \\ \bar{\psi}\gamma^i\gamma^5\psi & \text{sí } \mu \neq 0 \end{cases},\tag{4.151}$$

a esta cantidad se le conoce como un vector axial.

En total, hay 16 productos de la forma $\psi_i^*\psi_j$ (que toma un componente de ψ^* y uno de ψ), ya que i y j van de 1 a 4. Estos 16 productos se pueden ensamblar en varias combinaciones lineales para construir cantidades con un comportamiento de transformación distinto, como sigue:

- $\bar{\psi}\psi = \mathbf{Escalar}$ (4.152)

- $\bar{\psi}\gamma^5\psi = \mathbf{Pseudoescalar}$ (4.153)

- $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi = \mathbf{Vector}$ (4.154)

- $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi = \mathbf{Pseudovector}$ (4.155)

- $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi = \mathbf{Tensor antisimétrico}$ (4.156)

4.5. El fotón

Las ecuaciones de Maxwell determinan los campos eléctricos y magnéticos que son consecuencia directa de la densidad de la densidad de carga ρ y la densidad de corriente J . En 1873 J.C. Maxwell propuso las cuatro ecuaciones que condensaron la teoría electromagnética, estas son:

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho, \quad (4.157)$$

$$\nabla \cdot B = 0, \quad (4.158)$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \quad (4.159)$$

$$\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi J, \quad (4.160)$$

las componentes de los campos eléctricos y magnéticos, en notación relativista, pueden formar un tensor de segundo rango llamado tensor electromagnético que es antisimétrico y está definido como:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.161)$$

y cumple como se había dicho antes con:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \quad (4.162)$$

además la densidad de corriente y de carga forman parte de un único cuadrivector que se escribe así:

$$J^\mu = (\rho, J). \quad (4.163)$$

Las ecuaciones de Maxwell que son ecuaciones diferenciales pueden formar dos grupos, ((4.158) y (4.159)) y ((4.157) y (4.160)), para clasificarse en homogéneas e in homogéneas respectivamente. Estos dos grupos, cada uno con dos ecuaciones, se reducen a una ecuación por cada grupo en la formulación covariante, tal como se presenta a continuación:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi J^\nu, \quad (4.164)$$

$$\partial_\alpha \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = 0, \quad (4.165)$$

ahora, si a la ecuación (4.164) se le aplica el operador de divergencia se tiene que:

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 4\pi \partial_\nu J^\nu, \\ \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= 4\pi \partial_\nu J^\nu, \end{aligned} \quad (4.166)$$

y en el segundo término de lado izquierdo de la ecuación se hace el cambio en los índices $\mu \rightarrow \nu$, por lo tanto lo anterior queda como:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} &= 4\pi\partial_\nu J^\nu, \\ \frac{1}{8\pi}\partial_\nu\partial_\mu (F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}) &= \partial_\nu J^\nu, \\ \frac{1}{8\pi}\partial_\nu\partial_\mu (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}) &= \partial_\nu J^\nu,\end{aligned}\tag{4.167}$$

de manera que:

$$\partial_\nu J^\nu = 0,\tag{4.168}$$

este resultado dice que la divergencia del cuadvivector de corriente es cero, y también lleva directamente a la ecuación de continuidad la cual implica la conservación local de la carga. De modo que explícitamente:

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0,\tag{4.169}$$

de otro lado, para las ecuaciones homogéneas de Maxwell se puede definir un potencial escalar o vectorial cuyo rotor sea igual al campo magnético, así:

$$B = \nabla \times A,\tag{4.170}$$

lo cual es válido pues se sigue cumpliendo la ecuación (4.158) porque la divergencia del rotor de un potencial vectorial es cero, o mejor:

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0,\tag{4.171}$$

de este modo la ecuación de Faraday-Maxwell o (4.159) puede reescribirse en términos del potencial A .

$$\nabla \times E + \frac{\partial(\nabla \times A)}{\partial t} = \nabla \times E + \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = 0,\tag{4.172}$$

y como consecuencia se tiene que el argumento al cual se aplica el rotacional debe ser el gradiente de algún potencial escalar que se define como V , de forma que:

$$-\nabla V = E + \frac{\partial A}{\partial t},\tag{4.173}$$

$$\nabla V = -E - \frac{\partial A}{\partial t},\tag{4.174}$$

la formulación covariante de las ecuaciones (4.170) y (4.174) deviene en una re escritura de $F^{\mu\nu}$, por lo tanto:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,\tag{4.175}$$

donde el A_μ es un cuadripotencial que contiene tanto un potencial escalar como uno vectorial, así:

$$A^\mu = (V, \vec{A}), \quad (4.176)$$

y esta formulación permite una modificación de la ecuación (4.164), la cual queda en términos del cuadripotencial A_μ , de modo que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\partial^\mu A^v - \partial^v A^\mu) &= 4\pi J^\nu, \\ \partial_\mu \partial^\mu A^v - \partial_\mu \partial^v A^\mu &= 4\pi J^\nu, \end{aligned} \quad (4.177)$$

organizando:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^v - \partial^v (\partial_\mu A^\mu) = 4\pi J^\nu. \quad (4.178)$$

En la teoría electromagnética todo lo que hay son campos eléctricos y magnéticos, es decir, estos hacen parte de la realidad física, pero los potenciales no hacen parte de ella, por lo tanto son herramientas matemáticas. Es posible abstraer a los potenciales escalares y vectoriales en un único cuadvivector A_μ como anteriormente se lo hizo. A estos potenciales puede sumarse el gradiente de una función cualquiera $\lambda = \lambda(x, t)$ sin que esta transformación afecte la invarianza de $F_{\mu\nu}$ que a continuación se va a demostrar. El problema de los potenciales es su valor indeterminado, y un primer paso para intentar darles un valor es hacer lo siguiente:

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (4.179)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu, \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu (A_\nu + \partial_\nu \lambda) - \partial_\nu (A_\mu + \partial_\mu \lambda), \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \lambda, \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \partial_\mu \partial_\nu \lambda - \partial_\nu \partial_\mu \lambda, \\ F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \end{aligned} \quad (4.180)$$

por lo tanto:

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}, \quad (4.181)$$

lo que indica, tal como se había argumentado, que el tensor electromagnético es invariante bajo esta definición de potencial. A esto se le denomina **Invarianza Gauge**

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \quad (4.182)$$

un cambio de potenciales de este tipo, que no tiene efecto sobre los campos, se denomina transformación de norma. Como se mostró anteriormente, el tensor electromagnético es invariante bajo la transformación de gauge

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda. \quad (4.183)$$

Elevando el índice, la transformación anterior puede escribirse como

$$A'^{\mu} = A^{\mu} + \partial^{\mu}\lambda. \quad (4.184)$$

Tomando la divergencia del nuevo potencial, se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}A'^{\mu} &= \partial_{\mu}(A^{\mu} + \partial^{\mu}\lambda) \\ &= \partial_{\mu}A^{\mu} + \partial_{\mu}\partial^{\mu}\lambda. \end{aligned} \quad (4.185)$$

Por tanto, si se escoge una función λ tal que

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}\lambda = -\partial_{\mu}A^{\mu}, \quad (4.186)$$

entonces

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}A'^{\mu} &= \partial_{\mu}A^{\mu} - \partial_{\mu}A^{\mu} \\ \partial_{\mu}A'^{\mu} &= 0. \end{aligned} \quad (4.187)$$

De esta manera, usando la libertad de gauge, siempre podemos elegir una función λ tal que el potencial transformado A'^{μ} satisfaga

$$\partial_{\mu}A'^{\mu} = 0. \quad (4.188)$$

Esta condición se conoce como condición de Lorenz.

Una vez escogido este gauge, podemos renombrar el potencial transformado A'^{μ} simplemente como A^{μ} . Por tanto, en lo que sigue impondremos

$$\partial_{\mu}A^{\mu} = 0. \quad (4.189)$$

Con esta condición, las ecuaciones de Maxwell se simplifican. En efecto, partiendo de

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c}J^{\nu}, \quad (4.190)$$

y usando

$$F^{\mu\nu} = \partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}, \quad (4.191)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}F^{\mu} &= \partial_{\mu}(\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}A^{\mu}) = \frac{4\pi}{c}J^{\mu}, \\ \partial_{\mu}F^{\mu} &= \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial_{\mu}\partial^{\nu}A^{\mu} = \frac{4\pi}{c}J^{\mu}, \\ \partial_{\mu}F^{\mu} &= \partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} - \partial^{\nu}(\underbrace{\partial_{\mu}A^{\mu}}_0) = \frac{4\pi}{c}J^{\mu}, \end{aligned} \quad (4.192)$$

Por lo tanto:

$$\partial_{\mu}\partial^{\mu}A^{\nu} = \frac{4\pi}{c}J^{\nu}, \quad (4.193)$$

siendo mejor expresar esta ecuación con el operador de D'Alembert de la siguiente forma:

$$\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu, \quad (4.194)$$

donde:

$$\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (4.195)$$

ahora, en el espacio vacío donde se cumple $J^\mu = 0$ elegimos:

$$A^0 = 0, \quad (4.196)$$

la condición de Lorentz entonces se lee:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0, \quad (4.197)$$

esta elección (el gauge de Coulomb) es atractivamente simple, pero al seleccionar un componente (A^0) para un tratamiento especial, nos ata a un sistema inercial particular (o más bien, nos obliga a realizar una transformación de gauge junto con cada transformación de Lorentz, para restaurar la condición de gauge de Coulomb). En la práctica esto rara vez supone un problema, pero resulta estéticamente desagradable.

En la electrodinámica cuántica, A^μ se convierte en la función de onda del fotón. El fotón libre satisface la ecuación $\square A^\nu = \frac{4\pi}{c} J^\nu$ con $J^\mu = 0$

$$\square A^\mu = 0, \quad (4.198)$$

que en este contexto reconocemos como la ecuación de Klein-Gordon para una partícula sin masa. Como en el caso de la ecuación de Dirac, buscamos soluciones de ondas planas con cuatro momentos $p = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$

$$A^\mu(x^\rho) = a e^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon_{(s)}^\mu(p), \quad (4.199)$$

donde $x^\rho = (ct, \vec{x})$, $p^\nu = (E/c, \vec{p})$, $p_\nu x^\nu = Et - \vec{p} \cdot \vec{x}$, a es un factor de normalización y ϵ^μ es el vector de polarización que lleva la información de la estructura del espacio de momentos y de los ejes en que va a oscilar el campo del fotón con los estados de polarización $s = 1, 2$; estos estados son ortogonales entre sí, es decir, $\epsilon_{(1)}^\mu \cdot \epsilon_{(2)}^\mu = 0$, y además están normalizados $\epsilon_\mu \cdot \epsilon^\mu = -1$.

Dado que $\square = \partial_\mu \partial^\mu$ verifiquemos que (4.199) es solución:

$$\begin{aligned} \square A^\mu &= \partial_\mu \partial^\mu \left[a e^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon^\mu(p) \right] = 0, \\ \square A^\mu &= a \partial_\mu \left[\left(-\frac{ip^\mu}{\hbar} \right) e^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon^\mu(p) \right] = 0, \\ \square A^\mu &= a \left(-\frac{ip_\mu}{\hbar} \right) \left(-\frac{ip^\mu}{\hbar} \right) e^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon^\mu(p) = 0, \\ \square A^\mu &= -a \frac{p_\mu p^\mu}{\hbar} e^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon^\mu(p) = 0, \end{aligned} \quad (4.200)$$

de donde se tiene que para los fotones reales su masa en reposo es cero, y como consecuencia de este hecho:

$$p_\mu p^\mu = 0 \quad \rightarrow \quad m_\gamma^2 = 0, \quad (4.201)$$

de manera que su energía está en función de su momentum:

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - |\vec{p}|^2 = 0, \quad (4.202)$$

lo que implica:

$$E = \pm |\vec{p}|c, \quad (4.203)$$

mientras tanto, ϵ^μ tiene cuatro componentes, pero no todos son independientes. La condición de Lorentz (4.189):

$$\begin{aligned} \partial_\mu A^\mu &= 0, \\ \partial_\mu \left(a e^{-i \frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon^\mu(p) \right) &= 0, \\ \left(-\frac{i p_\mu}{\hbar} \right) a e^{-i \frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon^\mu(p) &= 0, \\ (p_\mu \epsilon^\mu(p)) a e^{-i \frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} &= 0, \end{aligned} \quad (4.204)$$

lo que se cumple sí y solo sí:

$$p_\mu \epsilon^\mu(p) = p^\mu \epsilon^\mu = 0, \quad (4.205)$$

por último, al aplicar la condición Gauge de Coulomb:

$$\epsilon^0 = 0 \quad ; \quad \epsilon^i p_i = \vec{\epsilon} \cdot \vec{p} = 0, \quad (4.206)$$

es decir que el vector de polarización trifásico (ϵ) es perpendicular a la dirección de propagación; decimos que un fotón libre está transversalmente polarizado. Estos vectores de polarización satisfacen la relación de completitud:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_i^{(s)} \epsilon_j^{(s)*} = \delta_{ij}, \quad (4.207)$$

por ejemplo, si se toma la componente $i = j = 1$ y también la componente $i = j = 2$, entonces:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_1^{(s)} \epsilon_1^{(s)*} = \delta_{11} = 1, \quad (4.208)$$

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_2^{(s)} \epsilon_2^{(s)*} = \delta_{22} = 1, \quad (4.209)$$

y si por ejemplo el momento es:

$$\vec{p} = (0, 0, 1), \quad (4.210)$$

lo que nos dice que apunta en la dirección z , entonces el espacio de posibles ϵ es:

$$\epsilon^1 = (1, 0, 0) \quad ; \quad \epsilon^2 = (0, 1, 0), \quad (4.211)$$

de manera que:

$$\epsilon^1 \cdot \vec{p} = 0 \quad ; \quad \epsilon^2 \cdot \vec{p} = 0, \quad (4.212)$$

en este ejercicio se ve como de cuatro soluciones independientes quedan nada mas dos. Una partícula sin masa admite solo dos soluciones independientes.

4.6. Resumen rápido

Hagamos una comparativa entre el electrón, positrón y fotón.

Electrón

Positrón

$$A^\mu(x^\rho) = ae^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} u^{(s)}(p), \quad (4.213)$$

$$A^\mu(x^\rho) = ae^{i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} v^{(s)}(p), \quad (4.214)$$

donde $s = 1, 2$ para los dos estados de espín. Los espinores $v^{(s)}$ y $u^{(s)}$ satisfacen las ecuaciones de Dirac del espacio de momento

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0, \quad (4.215) \qquad (\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0, \quad (4.216)$$

sus adjuntos $\bar{u} = u^\dagger \gamma^0$ y $\bar{v} = v^\dagger \gamma^0$ satisfacen:

$$\bar{u}(\gamma^\mu p_\mu - mc) = 0, \quad (4.217) \qquad \bar{v}(\gamma^\mu p_\mu + mc) = 0, \quad (4.218)$$

son ortogonales:

$$\bar{u}^{(1)}u^{(2)} = 0, \quad (4.219) \qquad \bar{v}^{(1)}v^{(2)} = 0, \quad (4.220)$$

Normalizado:

$$\bar{u}u = 2m, \quad (4.221) \qquad \bar{v}v = -2m, \quad (4.222)$$

Relación de completitud:

$$\sum_{s=1,2} u^{(s)}\bar{u}^{(\bar{s})} = (\gamma^\mu p_\mu + mc), \quad (4.223) \qquad \sum_{s=1,2} v^{(s)}\bar{v}^{(\bar{s})} = (\gamma^\mu p_\mu - mc), \quad (4.224)$$

Fotón

$$A_\mu(x^\rho) = ae^{-i\frac{p_\nu x^\nu}{\hbar}} \epsilon_\mu^{(s)}, \quad (4.225)$$

donde $s = 1, 2$ para los dos estados de espín (polarizaciones). Los vectores de polarización $\epsilon_\mu^{(s)}$ satisfacen la condición de Lorentz del espacio de momento:

$$p^\mu p_\mu = 0, \quad (4.226)$$

son ortogonales, en el sentido de que:

$$\epsilon_\mu^{(1)*} \epsilon^{(2)\mu} = 0, \quad (4.227)$$

normalizado:

$$\epsilon_\mu^* \epsilon^\mu = -1, \quad (4.228)$$

de la condición de Gauge:

$$\epsilon^0 = 0 \quad ; \quad \epsilon \cdot \mathbf{p} = 0, \quad (4.229)$$

y los tres vectores de polarización obedecen a la ecuación de completitud:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_i^{(s)*} \epsilon_j^{(s)} = \delta_{ij} - p_i p_j. \quad (4.230)$$

4.7. Reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica.

Las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica se toman siguiendo al libro **Introduction to Elementary Particles (Second, Revised Edition)**.

Para calcular la amplitud \mathcal{M} asociada a algún diagrama de Feynman en particular se procede de acuerdo con las siguientes reglas:

- 1 Notación: para cada línea externa se asocia un momento p_1, p_2, \dots, p_n y se dibuja una flecha en la dirección positiva del tiempo. A cada línea interna se asocia un momento q_1, q_2, \dots, q_n y se dibuja una flecha al lado de la línea que indique la dirección positiva asignada arbitrariamente.
- 2 Líneas externas: las líneas externas aportan factores de la siguiente manera:

$$\text{Electrones: } \begin{cases} \text{Entrantes} & : \text{---} \rightarrow \bullet : u \\ \text{Salientes} & : \bullet \text{---} \rightarrow : \bar{u} \end{cases}$$

Figura 4.2:

$$\text{Positrones: } \begin{cases} \text{Entrantes} & : \text{---} \leftarrow \bullet : \bar{v} \\ \text{Salientes} & : \bullet \text{---} \leftarrow : v \end{cases}$$

Figura 4.3:

$$\text{Fotones: } \begin{cases} \text{Entrantes} & : \text{~~~~} \bullet : \epsilon_\mu(k) \\ \text{Salientes} & : \bullet \text{~~~~} : \epsilon_\mu^*(k) \end{cases}$$

Figura 4.4:

- 3 Factores de vértice: cada vértice contribuye con un factor:

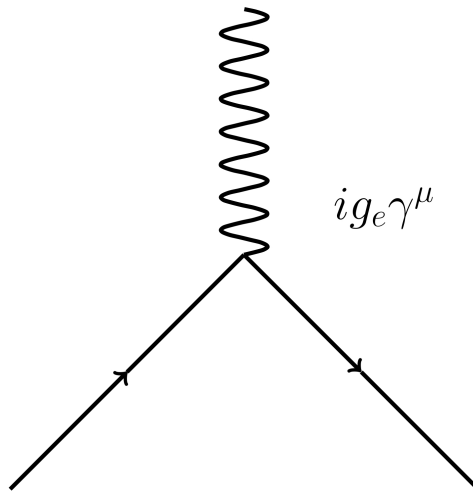


Figura 4.5: Factores de vértice

donde la constante de acoplamiento adimensional g_e está relacionada con la carga del electrón así

$$g_e = e \sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}} = \sqrt{4\pi\alpha}. \quad (4.226)$$

4 Propagadores: cada línea interna contribuye con un factor de la forma:

- Electrones y positrones:

$$\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2}$$

Figura 4.6: Propagador para el electrón y positrón.

- Fotones:

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2}$$

Figura 4.7: Propagador para el fotón.

- 5 Conservación de energía y momento: para cada vértice se escribe una función delta de la forma:

$$(2\pi)^4 \delta(k_1 + k_2 + k_3), \quad (4.227)$$

donde las k son tres cuadrimomentos que llegan al vértice (si una flecha apunta hacia afuera, entonces el cuadrimomento k lleva un signo menos).

- 6 Integrar sobre los momentos internos: por cada momento interno se escribe el factor:

$$\frac{d^4 q}{(2\pi)^4}, \quad (4.228)$$

y se integra

- 7 Cancelar la función delta: el resultado incluirá el factor δ global:

$$(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + \dots + p_n), \quad (4.229)$$

correspondiente a la conservación total de energía-momento. Al cancelar este factor y multiplicar por i lo que queda es \mathcal{M}

- 8 Antisimetrización: incluir un signo menos en los diagramas que difieren solo por un intercambio de dos electrones o positrones entrando o saliendo o de un electrón entrante con un positrón saliente o al contrario, un positrón entrante y un electrón saliente.

Capítulo 5

Sistemas de Renormalización

5.1. Antecedentes sistemas de renormalización

Podemos encontrar tres diagramas de la QED con divergencias ultravioletas:

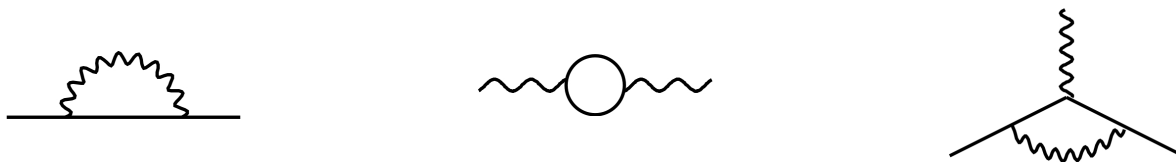


Figura 5.1: Diagramas de la QED con divergencias ultravioletas.

Estas divergencias pueden ser reguladas y canceladas, produciendo expresiones finitas para cantidades medibles, además ocurren comúnmente y, de hecho, de manera natural en los cálculos de teoría cuántica de campos. Esbozamos una interpretación física de estas divergencias. Comenzamos desarrollando una clasificación de las divergencias ultravioletas que pueden aparecer en una teoría cuántica de campos. En lugar de tropezar con estas divergencias una por una y repararlas caso por caso, ahora nos proponemos determinar de una vez por todas qué diagramas son divergentes y en qué teorías estas divergencias pueden ser eliminadas sistemáticamente. Como ejemplos, consideraremos tanto la QED como las teorías de campos escalares.

5.2. Conteo de Divergencias Ultravioletas.

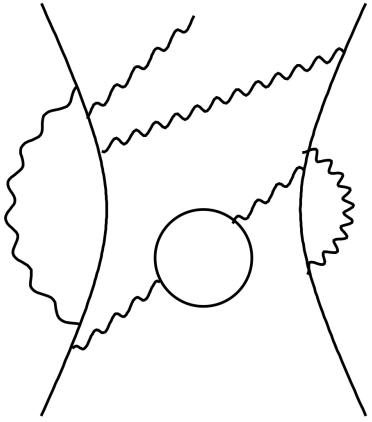
En esta sección utilizaremos argumentos elementales para determinar, tentativamente, cuándo un diagrama de Feynman contiene una divergencia ultravioleta. Comenzamos analizando la electrodinámica cuántica. Primero introducimos la siguiente notación, para caracterizar un

diagrama típico en QED:

$$\begin{aligned}
 N_e &= \text{Número de líneas externas del electrón.} \\
 N_\gamma &= \text{Número de líneas externas del fotón.} \\
 P_e &= \text{Número de propagadores del electrón.} \\
 P_\gamma &= \text{Número de propagadores del fotón.} \\
 V &= \text{Numero de vértices.} \\
 L &= \text{Número de loops.}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

(Este análisis se aplica a funciones de correlación así como a amplitudes de dispersión. En el primer caso, los propagadores que están conectados a puntos externos deben contarse como líneas externas, no como propagadores.)

La expresión correspondiente a un diagrama típico se ve así:



El diagrama muestra un electrón (línea recta) que entra desde la izquierda, se divide en un bucle de fotón (línea ondulada) y un bucle de electrón (línea recta). El bucle de fotón se conecta a un electrón que sale hacia la derecha. El bucle de electrón se conecta a un fotón que sale hacia la derecha. Hay un tercer electrón que entra desde la izquierda y se conecta a un bucle de fotón que se conecta a un electrón que sale hacia la derecha.

$$\int \frac{d^4 k_1 d^4 k_2 \cdots d^4 k_L}{(k_i - m) \cdots k_j^2 \cdots k_n^2}, \tag{5.2}$$

Figura 5.2: Múltiples diagramas.

el diagrama diverge a menos que haya más potencias de momento en el denominador que en el numerador. Definamos por lo tanto el **grado superficial de divergencia** D , como la diferencia:

$$\begin{aligned}
 D &= (\text{Potencia de } k \text{ en el numerador}) - (\text{Potencia de } k \text{ en el denominador}), \\
 D &= 4L - P_e - 2P_\gamma,
 \end{aligned}
 \tag{5.3}$$

donde se espera que un diagrama tenga una divergencia proporcional a Λ^D , donde Λ es un corte de momento, cuando $D > 0$. Esperamos una divergencia de la forma $\log(\Lambda)$ cuando $D = 0$, y ninguna divergencia cuando $D < 0$.

Esta expectativa a menudo es incorrecta, por una de tres razones. Cuando un diagrama contiene un subdiagrama divergente, su divergencia real puede ser peor que la indicada por D . Cuando las simetrías (como la identidad de Ward) hacen que ciertos términos se cancelen, la divergencia de un diagrama puede ser reducida o incluso eliminada. Finalmente, un diagrama trivial sin propagadores y sin lazos tiene $D = 0$ pero sin divergencia. A pesar de todas estas

complicaciones, D sigue siendo una cantidad útil.

Para ver por qué, reescribamos D en términos del número de líneas externas (N_e, N_γ) y vértices (V). Note que el número de integraciones de loop (L) en un diagrama es:

$$L = P_e + P_\gamma - V + 1, \quad (5.4)$$

ya que en las reglas originales de Feynman cada propagador tiene una integral de momento, cada vértice tiene una función delta, y una función delta simplemente impone la conservación del momento total. Además, el número de vértices (V) es:

$$V = 2P_\gamma + N_\gamma = \frac{1}{2}(2P_e + N_e), \quad (5.5)$$

ya que cada vértice involucra exactamente una línea de fotón y dos líneas de electrones. Reemplazando la ecuación (5.4) en la ecuación (5.3) tenemos:

$$\begin{aligned} D &= 4L - p_e - 2P_\gamma, \\ D &= 4(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma, \\ D &= 4P_e + 4P_\gamma - 4V + 4 - P_e - 2P_\gamma, \\ D &= 3P_e + 2P_\gamma - 4V + 4 \end{aligned} \quad (5.6)$$

reemplazamos el valor de V , de manera que:

$$\begin{aligned} D &= 3P_e + 2P_\gamma - 4V + 4, \\ D &= 3P_e + 2P_\gamma - 4 \left[\frac{1}{2}(2P_e + N_e) \right] + 4, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} D &= 3P_e + 2P_\gamma - 4P_e - 2N_e + 4, \\ D &= 2P_\gamma - P_e - 2N_e + 4, \end{aligned} \quad (5.8)$$

de la ecuación (5.5) se puede extraer la siguiente relación:

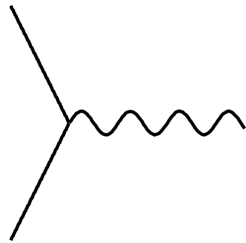
$$P_e = 2P_\gamma + N_\gamma - \frac{N_e}{2}, \quad (5.9)$$

reemplazando (5.9) en (5.8) tenemos:

$$\begin{aligned} D &= 2P_\gamma - P_e - 2N_e + 4, \\ D &= 2P_\gamma - \left(2P_\gamma + N_\gamma - \frac{N_e}{2} \right) - 2N_e + 4, \end{aligned} \quad (5.10)$$

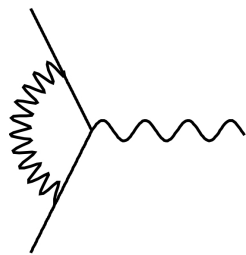
$$\begin{aligned} D &= 2P_\gamma - 2P_\gamma - N_\gamma + \frac{N_e}{2} - 2N_e + 4, \\ D &= 4 - N_\gamma - \frac{3}{2}N_e. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Veamos algunos diagramas simples de QED que ilustran el grado superficial de divergencia:



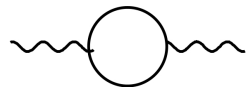
$$D = 0 \quad \rightarrow \text{finito}$$

Figura 5.3: Ej.1. Grado superficial de divergencia



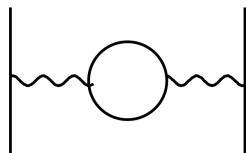
$$D = 0 \quad \rightarrow \log \Lambda$$

Figura 5.4: Ej.2. Grado superficial de divergencia



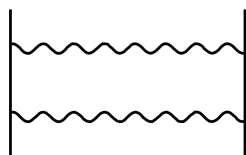
$$D = 2 \quad \rightarrow \log \Lambda$$

Figura 5.5: Ej.3. Grado superficial de divergencia



$$D = -2 \quad \rightarrow \log \Lambda$$

Figura 5.6: Ej.4. Grado superficial de divergencia



$$D = -2 \quad \rightarrow \text{finito}$$

Figura 5.7: Ej.5. Grado superficial de divergencia

El primer diagrama es finito, a pesar de que $D = 0$. El tercer diagrama tiene $D = 2$ pero solo una divergencia logarítmica, debido a la identidad de Ward. El cuarto diagrama diverge, a pesar de que $D < 0$, ya que contiene un subdiagrama divergente. Solo en el segundo y quinto diagramas el grado superficial de divergencia coincide con el grado real de divergencia, independiente del número de vértices. El grado superficial de divergencia de un diagrama de QED depende solo del número de patas externas de cada tipo. Según el resultado (5.11), solo los diagramas con un pequeño número de patas externas tienen $D \geq 0$; esos siete tipos de diagramas se muestran en la siguiente figura:



Figura 5.8:



Figura 5.9:



Figura 5.10:

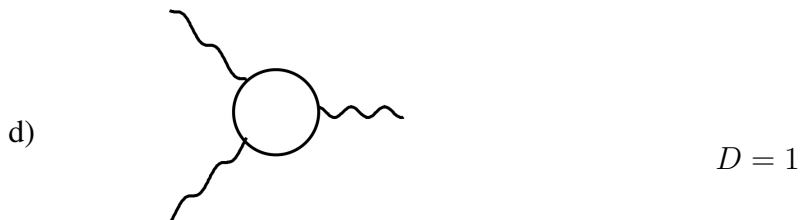


Figura 5.11:

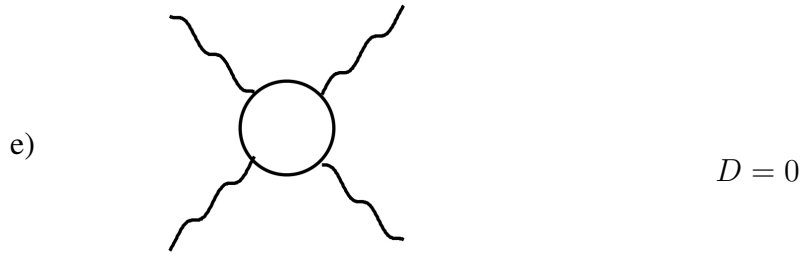


Figura 5.12:

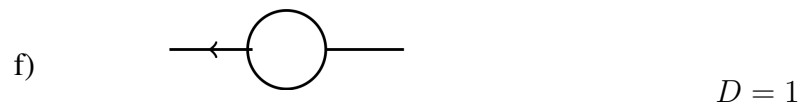


Figura 5.13:

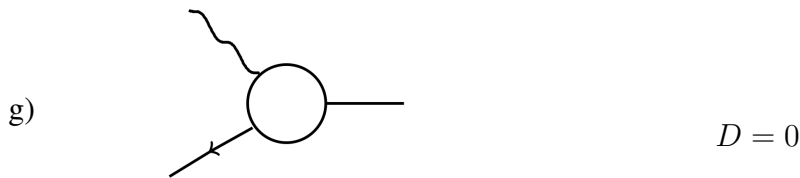


Figura 5.14:

Dado que las patas externas no entran en la integral potencialmente divergente, podemos restringir nuestra atención a diagramas amputados. También podemos restringir nuestra atención a diagramas irreducibles de una partícula, ya que los diagramas reducibles son productos simples de las integrales correspondientes a sus partes irreducibles. Así, la tarea de enumerar todos los diagramas divergentes de QED se reduce a la de analizar los siete tipos de amplitudes amputadas e irreducibles de una partícula que se muestran en la figura anterior. Otros diagramas pueden divergir, pero solo cuando contienen uno de estos siete como subdiagrama.

Para el resto de esta sección, intentemos entender el grado superficial de divergencia desde un punto de vista más general. La teoría de QED en cuatro dimensiones del espacio-tiempo es bastante especial, así que primero generalicemos a QED en d -dimensiones. En este caso, D está dado por:

$$D \equiv dL - P_e - 2P_\gamma, \quad (5.12)$$

ya que cada loop contribuye con una integral de momento en d -dimensiones. Las relaciones (5.4) y (5.5) aún se mantienen, por lo que podemos nuevamente reescribir D en términos de

V , N_e y N_γ , de manera que, si sustituimos (5.4) en (5.12):

$$\begin{aligned}
 D &= d - P_e - 2P_\gamma, \\
 D &= d(P_e + P_\gamma - V + 1) - P_e - 2P_\gamma, \\
 D &= dP_e + dP_\gamma - dV + d - P_e - 2P_\gamma, \\
 D &= (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d,
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ahora sustituimos (5.9):

$$\begin{aligned}
 D &= (d-1)P_e + (d-2)P_\gamma - dV + d, \\
 D &= (d-1) \left(2P_\gamma + N_\gamma - \frac{N_e}{2} \right) + (d-2)P_\gamma - dV + d, \\
 D &= 2(d-1)P_\gamma + (d-1)N_\gamma - \frac{(d-1)}{2}N_e + (d-2)P_\gamma - dV + d, \\
 D &= (3d-4)P_\gamma + (d-1)N_\gamma - \frac{(d-1)}{2}N_e - dV + d,
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

de (5.5) despejamos P_γ y reemplazamos

$$\begin{aligned}
 D &= (3d-4)P_\gamma + (d-1)N_\gamma - \frac{(d-1)}{2}N_e - dV + d, \\
 D &= (3d-4) \left(\frac{V - N_\gamma}{2} \right) + (d-1)N_\gamma - \frac{(d-1)}{2}N_e - dV + d, \\
 D &= (3d-4) \frac{V}{2} - (3d-4) \frac{N_\gamma}{2} + (d-1)N_\gamma - \frac{(d-1)}{2}N_e - dV + d, \\
 D &= \left(\frac{(3d-4)}{2} - d \right) V - \left(\frac{(3d-4)}{2} - (d-1) \right) N_\gamma - \frac{(d-1)}{2}N_e + d,
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

de manera que:

$$D = d + \left(\frac{d-4}{2} \right) V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N_\gamma - \frac{(d-1)}{2} N_e, \tag{5.16}$$

La cancelación de V en esta expresión es especial para el caso $d = 4$. Para $d < 4$, los diagramas con más vértices tienen un menor grado de divergencia, por lo que el número total de diagramas divergentes es finito. Para $d > 4$, los diagramas con más vértices tienen un mayor grado de divergencia, por lo que cada amplitud se vuelve superficialmente divergente en un orden suficientemente alto en la teoría de perturbaciones.

Estos tres tipos posibles de comportamiento ultravioleta también ocurrirán en otras teorías cuánticas de campos. Nos referiremos a ellos de la siguiente manera:

■ **Teoría Super-Renormalizable:**

Solo un número finito de diagramas de Feynman diverge superficialmente.

■ **Teoría Renormalizable:**

Solo un número finito de amplitudes diverge superficialmente; sin embargo, en la teoría de perturbaciones se producen divergencias ocurren en todos los órdenes.

■ **Teoría No Renormalizable:**

Todas las amplitudes son divergentes en un orden suficientemente alto en la teoría de perturbaciones.

Usando esta nomenclatura, diríamos que la QED es renormalizable en cuatro dimensiones, super-renormalizable en menos de cuatro dimensiones y no renormalizable en más de cuatro dimensiones. Estos criterios superficiales dan una imagen correcta de la verdadera estructura de divergencia de la teoría para la mayoría de los casos que se han estudiado en detalle. Se conocen ejemplos en los que el verdadero comportamiento es mejor de lo que sugiere esta imagen, cuando simetrías poderosas anulan algunas o todas las amplitudes superficialmente divergentes.

Por otro lado, es cierto que las divergencias de las teorías superficialmente renormalizables pueden ser absorbidas en un número finito de parámetros lagrangianos. Para teorías que contienen campos de espín 1 y superiores, los diagramas de loop pueden producir problemas adicionales, incluida la violación de la unitariedad.

Como otro ejemplo del conteo de divergencias ultravioletas, consideremos una teoría de campo escalar pura, en d -dimensiones, con un término de interacción ϕ^n

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{n!} \phi^n, \quad (5.17)$$

sea N el número de líneas externas en un diagrama, P el número de propagadores y V el número de vértices. El número de loops en un diagrama es $L = P - V + 1$. Hay n líneas que se encuentran en cada vértice, por lo que $nV = N + 2P$. Combinando estas relaciones, encontramos que el grado superficial de divergencia de un diagrama es:

$$D = dL - 2P, \quad (5.18)$$

$$D = d + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N,$$

En cuatro dimensiones un acoplamiento ϕ^4 es renormalizable, mientras que potencias superiores de 0 son no-renormalizables. En tres dimensiones un acoplamiento ϕ^6 se vuelve renormalizable, mientras que ϕ^4 es super-renormalizable. En dos dimensiones del espacio-tiempo, cualquier acoplamiento de la forma ϕ^n es super-renormalizable.

La expresión (18) también se puede derivar de una manera algo diferente, a partir del análisis dimensional. En cualquier teoría cuántica de campos, la acción:

$$\int d^d x \mathcal{L}, \quad (5.19)$$

debe ser adimensional, ya que trabajamos en unidades donde $\hbar = 1$. En este sistema de unidades, la integral $d^d x$ tiene unidades (masa) ^{d} , y por lo tanto el Lagrangiano tiene unidades

(masa)^d. Dado que todas las unidades se pueden expresar como potencias de masa, no es ambiguo decir simplemente que el Lagrangiano tiene "dimensión d ". Usando este resultado, podemos inferir de la forma explícita de (5.17) las dimensiones del campo ϕ y la constante de acoplamiento λ . A partir del término cinético en \mathcal{L} vemos que ϕ tiene dimensión $\frac{(d-2)}{2}$. Note que el parámetro m consistentemente tiene dimensiones de masa. A partir del término de interacción y la dimensión de ϕ , inferimos que la λ tiene dimensión $d - n\frac{(d-2)}{2}$.

Ahora consideremos un diagrama arbitrario con N líneas externas. Una forma en que podría surgir tal diagrama es a partir de un término de interacción $\eta\phi^N$ en el Lagrangiano. La dimensión de η sería entonces $d - N\frac{(d-2)}{2}$, y por lo tanto concluimos que cualquier diagrama (amputado) con N líneas externas tiene dimensión $d - N\frac{(d-2)}{2}$. En nuestra teoría con solo el vértice $\lambda\phi^n$, si el diagrama tiene V vértices, su parte divergente es proporcional a $\lambda^V \Lambda^D$, donde Λ es un corte de alta energía y D es el grado superficial de divergencia. (Este es el caso "genérico"; todas las excepciones mencionadas anteriormente también se aplican aquí.) Aplicando el análisis dimensional, encontramos:

$$\begin{aligned} D &= d + \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - \left(\frac{d-2}{2} \right) N, \\ N \left(\frac{d-2}{2} \right) - d &= \left[n \left(\frac{d-2}{2} \right) - d \right] V - D, \\ d - \left(\frac{d-2}{2} \right) N &= V \left[d - n \left(\frac{d-2}{2} \right) \right] + D, \end{aligned} \quad (5.20)$$

en acuerdo con (5.19). Note que la cantidad que multiplica V en esta expresión es solo la dimensión de la constante de acoplamiento λ . Este análisis se puede llevar a cabo para QED y otras teorías de campos, con el mismo resultado. Así, podemos caracterizar los tres grados de renormalizabilidad de una segunda manera:

- **Teoría Super-Renormalizable:**
La constante de acoplamiento tiene dimensión de masa positiva.
- **Teoría Renormalizable:**
La constante de acoplamiento es adimensional.
- **Teoría No Renormalizable:**
La constante de acoplamiento tiene dimensión de masa negativa.

En QED, la constante de acoplamiento e es adimensional; por lo tanto, QED es (al menos superficialmente) renormalizable.

5.3. Teoría de Perturbaciones Renormalizada

En la teoría cuántica de campos renormalizable existe un pequeño número de amplitudes superficialmente divergentes. En QED, por ejemplo, hay tres tales amplitudes, que contienen cuatro constantes infinitas. De hecho, es generalmente cierto que las divergencias en una

teoría cuántica de campos renormalizable nunca aparecen en cantidades observables.

Para obtener un resultado finito para una amplitud que involucra diagramas divergentes, usaremos el siguiente procedimiento: Calcular los diagramas usando un regulador, para obtener una expresión que dependa de la masa desnuda (m_0), la constante de acoplamiento desnuda (e_0) y algún corte ultravioleta (Λ). Luego calcular la masa física (m) y la constante de acoplamiento física (e), hasta el orden que sea consistente con el resto del cálculo; estas cantidades también dependerán de m_0 , e_0 y Λ . Para calcular un elemento de matriz S (en lugar de una función de correlación), también se deben calcular las renormalizaciones de la intensidad del campo Z . Combinando todas estas expresiones, eliminar m_0 y e_0 a favor de m y e ; este paso es la renormalización". La expresión resultante para la amplitud debería ser finita en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$. El procedimiento anterior siempre funciona en una teoría cuántica de campos renormalizable. Sin embargo, a menudo puede ser engorroso, especialmente en órdenes más altos en la teoría de perturbaciones. En esta sección desarrollaremos un procedimiento alternativo que funciona de manera más automática. Haremos esto primero para la teoría ϕ^4 .

La Lagrangiana de la teoría ϕ^4 es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4, \quad (5.21)$$

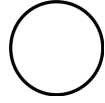
Ahora escribimos m_0 y λ_0 , para enfatizar que estos son los valores desnudos de la masa y la constante de acoplamiento, no los valores medidos en experimentos. El grado superficial de divergencia de un diagrama con N patas externas es, de acuerdo con (5.18)

$$D = 4 - N, \quad (5.22)$$

dado que la teoría es invariante bajo $\phi \rightarrow -\phi$:

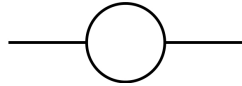
$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu (-\phi))^2 - \frac{1}{2} m_0^2 (-\phi)^2 - \frac{\lambda_0}{4!} (-\phi)^4, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4, \end{aligned} \quad (5.23)$$

todas las amplitudes con un número impar de patas externas se anulan. Por lo tanto, las únicas amplitudes divergentes son:



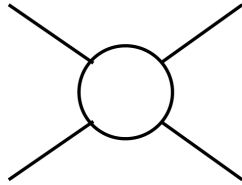
→ Cambio de energía del vacío no observable.

Figura 5.15:



→ $\Lambda^2 + p^2 \log \Lambda + (\text{términos finitos})$

Figura 5.16:



→ $\log \Lambda + (\text{términos finitos})$

Figura 5.17:

Ignorando el diagrama de vacío, estas amplitudes contienen tres constantes infinitas. Nuestro objetivo es absorber estas constantes en los tres parámetros no observables de la teoría: la masa desnuda, la constante de acoplamiento desnuda y la intensidad del campo. Para lograr este objetivo, es conveniente reformular la expansión de perturbación de modo que estas cantidades no observables no aparezcan explícitamente en las reglas de Feynman.

Primero eliminaremos el cambio en la intensidad del campo. La función exacta de dos puntos tiene la forma:

$$\int d^4x \langle \Omega | T \phi(x) \phi(0) | \Omega \rangle e^{ip \cdot x} = \frac{iZ}{p^2 - m^2} + (\text{términos regulares en } p^2 = m^2), \quad (5.24)$$

donde m es la masa física. Podemos eliminar el incómodo residuo Z de esta ecuación reescalando el campo:

$$\phi = Z^{\frac{1}{2}} \phi_r, \quad (5.25)$$

Esta transformación cambia los valores de las funciones de correlación por un factor de $Z^{\frac{1}{2}}$ para cada campo. Así, al calcular los elementos de la matriz S , ya no necesitamos los factores de Z ; una amplitud de dispersión es simplemente la suma de todos los diagramas conectados y amputados.

Aplicando (5.25) a (5.23) obtenemos la Lagrangiana reescalado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \left(Z^{\frac{1}{2}} \phi_r \right) \right)^2 - \frac{1}{2} m_0^2 \left(Z^{\frac{1}{2}} \phi_r \right)^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \left(Z^{\frac{1}{2}} \phi_r \right)^4, \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}Z (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4, \quad (5.27)$$

la masa desnuda y la constante de acoplamiento aún aparecen en \mathcal{L} , pero pueden ser eliminadas de la siguiente manera. Definimos:

$$\delta_Z = Z - 1, \quad \delta_m = m_0^2 Z - m^2, \quad \delta_\lambda = \lambda_0 Z^2 - \lambda \quad (5.28)$$

donde m y λ son la masa y la constante de acoplamiento medidas físicamente. Entonces la Lagrangiana se convierte en:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}Z (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 Z \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} Z^2 \phi_r^4, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\delta_Z + 1) (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}m_0^2 \left(\frac{\delta_m + m^2}{m_0^2} \right) \phi_r^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \left(\sqrt{\frac{\delta_\lambda + \lambda}{\lambda_0}} \right)^2 \phi_r^4, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\delta_Z (\partial_\mu \phi_r)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2} (\delta_m + m^2) \phi_r^2 - \frac{1}{4!} (\delta_\lambda + \lambda) \phi_r^4, \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\delta_Z (\partial_\mu \phi_r)^2 + \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_r^2 - \frac{1}{2}\delta_m \phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi_r^4 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4, \end{aligned} \quad (5.29)$$

organizando un poco mejor:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}m^2 \phi_r^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi_r^4 \\ &\quad + \frac{1}{2}\delta_Z (\partial_\mu \phi_r)^2 - \frac{1}{2}\delta_m \phi_r^2 - \frac{\delta_\lambda}{4!} \phi_r^4. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Veamos las reglas de Feynman para la teoría ϕ^4 en la teoría de perturbaciones renormalizada.

$$\text{---} \longleftarrow \quad \rightarrow \quad \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

Figura 5.18:

$$\text{X} \quad \rightarrow \quad -i\lambda$$

Figura 5.19:

$$\text{---} \bigotimes \text{---} \quad \rightarrow \quad i(p^2 \delta_Z - \delta_m)$$

Figura 5.20:

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \bigotimes \\ \diagdown \end{array} \quad \rightarrow \quad i\delta_\lambda$$

Figura 5.21:

La primera línea ahora parece la teoría de la familia ϕ^4 Lagrangiana, pero está escrita en términos de la masa física y el acoplamiento. Los términos en la segunda línea, conocidos como contratérminos, han absorbido los desplazamientos infinitos pero no observables entre los parámetros simples y los parámetros físicos. Es tentador decir que hemos "agregado" estos contratérminos a la Lagrangiana, pero de hecho solo hemos dividido cada término en (5.27) en dos partes.

Las definiciones en (5.28) no son útiles a menos que demos definiciones precisas de la masa física y la constante de acoplamiento. La ecuación (5.24) define m^2 como la ubicación del polo en el propagador. No hay una definición claramente mejor de λ , pero una definición perfectamente buena se obtendría al establecer λ igual a la magnitud de la amplitud de dispersión en momento cero. Así tenemos las dos relaciones definitorias,

$$\text{---} \bigcirc \text{---} \quad \rightarrow \quad \frac{i}{p^2 - m^2} + \text{(Términos regulares en } p^2 = m^2\text{)},$$

Figura 5.22:

$$\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \bigcirc \\ \diagdown \end{array} \right)_{\text{amputated}} \quad \rightarrow \quad \text{en } s = 4m^2, \quad t = u = 0,$$

Figura 5.23:

Estas ecuaciones se llaman condiciones de renormalización. (La primera ecuación en realidad contiene dos condiciones, especificando tanto la ubicación del polo como su residuo.) Nuestra nueva Lagrangiana, Eq.(30), da un nuevo conjunto de reglas de Feynman Eq. (31), (32), (33) y (34), El propagador y el primer vértice provienen de la primera línea de (30), y son idénticos a las reglas antiguas excepto por la aparición de la masa física y el acoplamiento en lugar de los valores simples. Los contratérminos en la segunda línea de (30) dan dos nuevos vértices (también llamados contratérminos).

5.4. Estructura de la teoría ϕ^4 de un solo Loop

Para que el procedimiento de renormalización tenga más sentido, lo llevaremos a cabo explícitamente en el nivel de un bucle.

Primero, consideremos la amplitud básica de dispersión de dos partículas,

$$i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = \text{Diagrama con un círculo central y líneas que entran y salen etiquetadas con } p_1, p_2, p_3, p_4.$$

Figura 5.24:

$$i\mathcal{M}(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = \text{Diagrama de cruce} + \text{Diagrama de bucle} + \text{Diagrama de bucle con cruce} + \text{Diagrama de cruce con bucle} + \dots$$

Figura 5.25:

Si definimos $p = p_1 + p_2$, entonces el segundo diagrama es:

$$\begin{aligned} \text{Diagrama de bucle} &= \frac{(-i\lambda)^2}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \\ &\equiv (-i\lambda)^2 \cdot iV(p^2). \end{aligned} \tag{5.31}$$

Figura 5.26:

Note que p^2 es igual a la variable de Mandelstam s . Los siguientes dos diagramas son idénticos, excepto que s será reemplazado por t y u . La amplitud total es, por lo tanto:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda. \tag{5.32}$$

De acuerdo con la condición de renormalización, esta amplitud debe ser igual $-i\lambda$ en $s = 4m^2$ y $t = u = 0$ por lo tanto, debemos establecer:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda = -i\lambda - i\lambda^2 [V(2m^2) + V(0) + V(0)] - i\delta_\lambda, \\ i\delta_\lambda &= -i\lambda^2 [V(2m^2) + V(0) + V(0)], \\ \delta_\lambda &= -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)]. \end{aligned} \quad (5.33)$$

(En ordenes superiores, λ recibirá contribuciones adicionales.)

Podemos calcular $V(p_2)$ explícitamente usando regularización dimensional.

El procedimiento ahora es reescribir la ecuación (5.31):

$$\begin{aligned} iV(p^2) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2}, \\ iV(p^2) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2}, \end{aligned} \quad (5.34)$$

nos será útil combinar denominadores, esto se logra mediante la fórmula de Feynmann, de la siguiente manera. Supongamos que nos gustaría escribir $\frac{1}{AB}$ como un solo factor, entonces observamos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x(A-B) + B)^2}, \\ \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= -\frac{1}{A-B} \frac{1}{x(A-B) + B} \Big|_0^1, \\ \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= \frac{1}{B-A} \left[\frac{B-A}{AB} \right], \\ \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= \frac{1}{AB}. \end{aligned} \quad (5.35)$$

La generalización de esto para incluir más denominadores es sencilla y tiene la forma:

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \frac{\delta(1 - x_1 - \dots - x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{A_i}, \quad (5.36)$$

identificando:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow k^2 - m^2, \\ B &\rightarrow (k+p)^2 - m^2, \end{aligned}$$

aplicando la relación (5.35):

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k+p)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x(k^2 - m^2) + (1-x)((k+p)^2 - m^2))^2}. \quad (5.37)$$

Reescribamos el denominador:

$$\begin{aligned}
&= (x(k^2 - m^2) + (1 - x)((k + p)^2 - m^2))^2, \\
&= (xk^2 - xm^2 + (1 - x)(k^2 + 2k \cdot p + p^2 - m^2))^2, \\
&= (xk^2 - xm^2 + k^2 + 2k \cdot p + p^2 - m^2 - xk^2 - 2xk \cdot p - xp^2 + xm^2)^2, \\
&= (k^2 + 2k \cdot p(1 - x) + p^2(1 - x) - m^2)^2,
\end{aligned} \tag{5.38}$$

Así, la ecuación (5.37) toma la forma:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + 2k \cdot p(1 - x) + p^2(1 - x) - m^2)^2}. \tag{5.39}$$

Realizamos el cambio de variable $1 - x = \tilde{x} \rightarrow dx = -d\tilde{x}$; los límites de integración se reescriben también, siendo el límite inferior 1 y el superior 0 de manera que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} &= \int_1^0 \frac{-d\tilde{x}}{(k^2 + 2k \cdot p\tilde{x} + p^2\tilde{x} - m^2)^2}, \\
\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} &= \int_0^1 \frac{d\tilde{x}}{(k^2 + 2k \cdot p\tilde{x} + p^2\tilde{x} - m^2)^2},
\end{aligned} \tag{5.40}$$

llamamos x a \tilde{x} por simple comodidad ($x \rightarrow \tilde{x}$)

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + 2k \cdot px + p^2x - m^2)^2}, \tag{5.41}$$

reescribimos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + 2k \cdot px + (xp)^2 - (xp)^2 + p^2x - m^2)^2}, \\
\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{((k - xp)^2 - (xp)^2 + xp^2 - m^2)^2}, \\
\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{((k - xp)^2 - ((xp)^2 - xp^2 + m^2))^2}.
\end{aligned} \tag{5.42}$$

Hagamos las siguientes definiciones:

$$\Delta = (xp)^2 - xp^2 + m^2 \tag{5.43}$$

de manera que:

$$\frac{1}{k^2 - m^2} \frac{1}{(k + p)^2 - m^2} = \int_0^1 \frac{dx}{((k - xp)^2 - \Delta)^2}. \tag{5.44}$$

Retomamos la ecuación (5.34) y consideramos el cambio $l = k - xp \rightarrow dk = dl$. Reemplazamos además el resultado de la ecuación (5.44):

$$iV(p^2) = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\int_0^1 \frac{dx}{(l^2 - \Delta)^2} \right],$$

$$iV(p^2) = -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2} \right]. \quad (5.45)$$

A partir de ahora nos centraremos en la integral entre corchetes:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2} \quad (5.46)$$

5.4.1. Rotación de Wick y eliminación de divergencias

La **Rotación de Wick** Es una técnica matemática utilizada en muchos campos, especialmente en teoría cuántica de campos, esta permite transformar un problema definido en el espacio-tiempo de Minkowski (con una métrica Lorentziana) a un problema en el espacio euclidiano (con una métrica definida positiva). Esta transformación simplifica muchos cálculos, ya que las integrales en el espacio euclidiano suelen ser más manejables que en el espacio de Minkowski.

Retomamos la ecuación (5.46) e introducimos la prescripción de Feynman $i\epsilon$ en el denominador de la segunda integral, este término se introduce para evitar singularidades al integrar en el plano complejo. $i\epsilon$ desplaza ligeramente los polos fuera del eje real, permitiendo una interpretación física consistente de los propagadores y asegurando la convergencia de las integrales en el plano complejo. Veamos:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{dx}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^2}, \quad (5.47)$$

donde l es un cuadrivector cuyo cuadrado se puede expresar como el cuadrado de la componente temporal menos el cuadrado de la componente espacial, así que:

$$l^2 = (l^0)^2 - |\vec{l}|^2, \quad (5.48)$$

es aquí donde se estudian los polos; especialmente los que serán útiles para definir la rotación de Wick. Entonces, son de importancia los l^0 donde:

$$(l^0)^2 - |\vec{l}|^2 + \Delta + i\epsilon = 0, \quad (5.49)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} (l^0)^2 - |\vec{l}|^2 + \Delta + i\epsilon &= 0, \\ (l^0)^2 &= |\vec{l}|^2 - \Delta - i\epsilon, \\ l^0 &= \pm \sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta - i\epsilon}, \end{aligned}$$

factorizamos el término $|\vec{l}|^2 - \Delta$:

$$l^0 = \pm \sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} \sqrt{1 - \left(\frac{i\epsilon}{|\vec{l}|^2 - \Delta} \right)}, \quad (5.50)$$

usando la expansión en serie de Taylor:

$$\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16} + \dots,$$

aproximando hasta el segundo término tenemos:

$$\begin{aligned} l^0 &= \pm \sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} \left[1 - \left(\frac{i}{2} \frac{\epsilon}{|\vec{l}|^2 - \Delta} \right) + \dots \right], \\ l^0 &\approx \pm \sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} \left[1 - \left(\frac{i}{2} \frac{\epsilon}{|\vec{l}|^2 - \Delta} \right) \right], \\ l^0 &\approx \pm \sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} \left(1 - \frac{i}{2} \frac{\epsilon}{|\vec{l}|^2 - \Delta} \right), \end{aligned} \quad (5.51)$$

definimos:

$$\epsilon' = \frac{\epsilon}{2(|\vec{l}|^2 - \Delta)},$$

por lo tanto:

$$l^0 \approx \pm \sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} (1 - i\epsilon'), \quad (5.52)$$

y redefiniendo $\epsilon' = \epsilon$, la cual tiene como soluciones:

$$l^0 = +\sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} (1 - i\epsilon), \quad (5.53)$$

$$l^0 = -\sqrt{|\vec{l}|^2 - \Delta} (1 - i\epsilon), \quad (5.54)$$

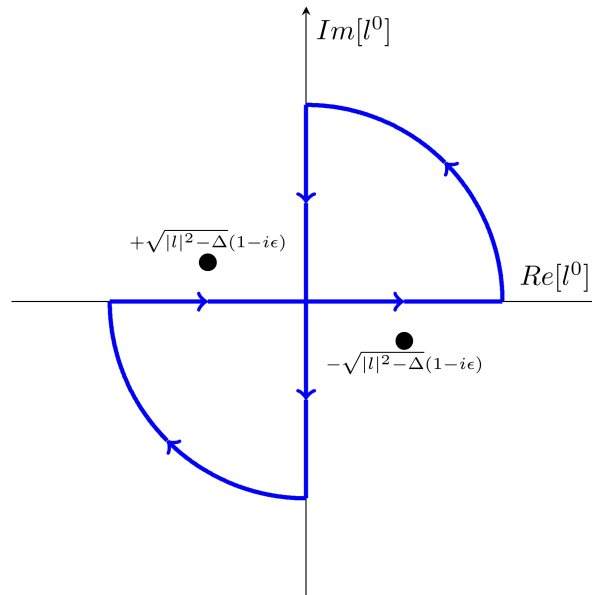


Figura 5.27: Rotación de Wick

definiremos las integrales sobre los contornos C_1 y C_2 , y de acuerdo al teorema de Cauchy:

$$\int_0^\infty dl^0 f(l^0) + \int_{C_1} dl^0 f(l^0) + \int_{i\infty}^0 dl^0 f(l^0) = 0, \quad (5.55)$$

$$\int_{-\infty}^0 dl^0 f(l^0) + \int_{C_2} dl^0 f(l^0) + \int_0^{-i\infty} dl^0 f(l^0) = 0, \quad (5.56)$$

teniendo en cuenta que no hay ningún polo dentro del contorno y que los polos se encuentran en los cuadrantes inferior derecho y superior izquierdo del plano complejo l^0 , la integral sobre el contorno de la figura (5.4.1) da cero, de ahí que las integrales sobre los ejes reales e imaginario son iguales y opuestas. Así al sumar (5.55) y (5.56), obtenemos:

$$\int_{-\infty}^\infty dl^0 f(l^0) + \int_{i\infty}^{-i\infty} dl^0 f(l^0) = 0, \quad (5.57)$$

como $l^0 = l_R^0 + il_I^0$ donde el eje horizontal $l_R^0 = 0$, resultando $l^0 = il_I^0$, siendo este el cambio de variable que haremos, de manera que:

$$dl^0 = d(l^0) = d(il_I^0) = idl_I^0, \quad (5.58)$$

y también:

$$\begin{aligned} \text{Sí } l^0 = i\infty &\quad \rightarrow \quad l^0 = il_I^0, \\ &\quad i\infty = il_I^0, \\ &\quad k_I^0 = -i^2\infty, \\ &\quad l_I^0 = \infty, \end{aligned} \quad (5.59)$$

$$\begin{aligned} \text{Sí } l^0 = -i\infty &\quad \rightarrow \quad l^0 = -il_I^0, \\ &\quad -i\infty = il_I^0, \\ &\quad l_I^0 = i^2\infty, \\ &\quad l_I^0 = -\infty, \end{aligned} \quad (5.60)$$

así la integral se transforma:

$$\int_{i\infty}^{-i\infty} dl^0 f(l^0) = \int_\infty^{-\infty} idl_I^0 f(il_I^0), \quad (5.61)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^\infty dl^0 f(l^0) + \int_\infty^{-\infty} idl_I^0 f(il_I^0) &= 0, \\ \int_{-\infty}^\infty dl^0 f(l^0) &= - \int_\infty^{-\infty} idl_I^0 f(il_I^0), \end{aligned}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dl^0 f(l^0) = \int_{-\infty}^{\infty} i dl_I^0 f(i l_I^0), \quad (5.62)$$

a esto se le conoce como **Rotación de Wick**, la cual permite transformar cantidades del espacio de Minkowski al Espacio Euclídeo, debido a esto renombramos $l^0 \rightarrow l_E^0$ y queda bien definido:

$$l^0 = i l_E^0, \quad (5.63)$$

$$\vec{l} = \vec{l}_E. \quad (5.64)$$

Introduciendo estos resultados y coordenadas polares de cuatro dimensiones a la ecuación (5.46), obtenemos:

$$\int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 - \Delta)^2} = \int \frac{d^3 l dl^0}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2}, \quad (5.65)$$

aquí la prescripción de Feynman $i\epsilon$ ya no es necesaria, además, como se definió $l^0 = i l_E^0 \rightarrow dl^0 = i dl_E^0$, y también $(l)^2 = (i l_E^0)^2 - (\vec{l})^2 = -(l_E^0)^2 - (\vec{l}_E)^2 = -l_E^2$ por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 - \Delta)^2} &= \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^4} \frac{i dl_E^0}{(-l_E^2 - \Delta)^2}, \\ \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 - \Delta)^2} &= \int \frac{d^3 l}{(2\pi)^4} \frac{i dl_E^0}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \\ \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 - \Delta)^2} &= i \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

donde $d^4 l_E = l_E^3 d\Omega dl_E$, siendo $d\Omega$ el ángulo sólido. Reescribiendo la expresión anterior tenemos:

$$\int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 - \Delta)^2} = i \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} l_E^3 \frac{dl_E}{(l_E^2 + \Delta)^2} \right], \quad (5.67)$$

una forma de calcular la integral en $d\Omega$ es generalizando esta a d -dimensiones, de manera que la integral en cuestión sería:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} d\Omega_d \int_0^{\infty} l_E^{d-1} \frac{dl_E}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \quad (5.68)$$

la integral del ángulo sólido se resuelve partiendo de la siguiente expresión:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} dx e^{-x^2}, \quad (5.69)$$

haciendo esto d veces tenemos:

$$\pi^{\frac{d}{2}} = \left(\int_0^{\infty} dx e^{-x^2} \right)^d,$$

$$\begin{aligned}\pi^{\frac{d}{2}} &= \int_0^\infty dx_1 e^{-x_1^2} \int_0^\infty dx_2 e^{-x_2^2} \int_0^\infty dx_3 e^{-x_3^2} \cdots \int_0^\infty dx_d e^{-x_d^2}, \\ \pi^{\frac{d}{2}} &= \int_0^\infty d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2},\end{aligned}\quad (5.70)$$

esta es una integral gaussiana en d -dimensiones. Para resolverla en coordenadas esféricas procedemos de la siguiente manera:

$$x_i = r \hat{x}_i, \quad (5.71)$$

$$\sum_{i=1}^d x_i^2 = r^2, \quad (5.72)$$

y el volumen diferencial en d -dimensiones es:

$$d^d x = r^{d-1} dr d\Omega_d, \quad (5.73)$$

donde $d\Omega_d$ es el diferencial del ángulo sólido en d -dimensiones. Sustituyendo las coordenadas esféricas, la integral se convierte en:

$$\int_0^\infty d^d x e^{-\sum_{i=1}^d x_i^2} = \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} \int d\Omega_d, \quad (5.74)$$

de manera que:

$$\pi^{\frac{d}{2}} = \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} \int d\Omega_d, \quad (5.75)$$

es fácil resolver la integral en dr , para esto hacemos el cambio $u = r^2 \rightarrow dr = \frac{du}{2r} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, de manera que:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} &= \int_0^\infty dr (r^2)^{\frac{d-1}{2}} e^{-r^2}, \\ \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} &= \int_0^\infty \left(\frac{du}{2\sqrt{u}} \right) u^{\frac{d}{2}-\frac{1}{2}} e^{-u}, \\ \int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} &= \frac{1}{2} \int_0^\infty du u^{\frac{d}{2}-1} e^{-u},\end{aligned}\quad (5.76)$$

observe que esta es integral es la función Gamma de $\frac{d}{2}$, de manera que:

$$\int_0^\infty dr r^{d-1} e^{-r^2} = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right),$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned}\pi^{\frac{d}{2}} &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \int d\Omega_d, \\ \int d\Omega_d &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},\end{aligned}\quad (5.77)$$

así la ecuación (5.68) se reduce a lo siguiente:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} d\Omega_d \int_0^{\infty} l_E^{d-1} \frac{dl_E}{(l_E^2 + \Delta)^2},$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \int_0^{\infty} l_E^{d-1} \frac{dl_E}{(l_E^2 + \Delta)^2}. \quad (5.78)$$

Ahora resolvamos la integral en dl_E para d -dimensiones:

$$\int_0^{\infty} dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2}, \quad (5.79)$$

si bien la integral está generalizada a d -dimensiones, una vez resulta, debemos recordar que nuestra dimensión de interés es $d = 4$

Ahora bien, realizamos el siguiente cambio de variable $u = l_E^2 \rightarrow dl_E = \frac{du}{2l_E} = \frac{du}{2\sqrt{u}}$, (los límites de integración siguen siendo los mismos) entonces:

$$\int_0^{\infty} dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \int_0^{\infty} \left(\frac{du}{2\sqrt{u}} \right) \frac{u^{\frac{d-1}{2}}}{(u + \Delta)^2},$$

$$\int_0^{\infty} dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} du \frac{u^{\frac{d}{2}-1}}{(u + \Delta)^2}. \quad (5.80)$$

Es necesario realizar un nuevo cambio de variable, este será:

$$z = \frac{\Delta}{u + \Delta},$$

por lo tanto su diferencial:

$$dz = -\frac{\Delta}{(u + \Delta)^2} du,$$

$$dz = -\frac{\Delta}{\left(\frac{\Delta}{z}\right)^2} du,$$

$$dz = -\frac{z^2}{\Delta} du,$$

$$du = -\frac{\Delta}{z^2} dz,$$

además:

$$u = \Delta \left(\frac{1-z}{z} \right),$$

mientras que los límites de integración pasan a ser

$$\text{Sí} \rightarrow u = \infty \rightarrow z = 0,$$

$$\text{Sí} \rightarrow u = 0 \rightarrow z = 1,$$

entonces la ecuación (5.80) se reescribe de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int_1^0 du \frac{u^{\frac{d}{2}-1}}{(u + \Delta)^2}, \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{2} \int_1^0 \left(-\frac{\Delta}{z^2} dz \right) \frac{1}{\left(\frac{\Delta}{z}\right)^2} \left[\Delta \left(\frac{1-z}{z} \right) \right]^{\frac{d}{2}-1}, \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= -\frac{1}{2} \int_1^0 dz \Delta^{\frac{d}{2}-2} \left(\frac{1-z}{z} \right)^{\frac{d}{2}-1}, \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= -\frac{\Delta^{\frac{d}{2}-2}}{2} \int_1^0 z^{1-\frac{d}{2}} (1-z)^{\frac{d}{2}-1} dz, \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-2}}{2} \int_0^1 z^{1-\frac{d}{2}} (1-z)^{\frac{d}{2}-1} dz. \end{aligned} \quad (5.81)$$

La integral se convierte en la función Beta, esta se define cómo:

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^1 z^{\alpha-1} (1-z)^{\beta-1} dz, \quad (5.82)$$

de la ecuación (5.81) y (5.82) se puede identificar: $\alpha - 1 = 1 - \frac{d}{2}$ y $\beta - 1 = \frac{d}{2} - 1$, de manera que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-2}}{2} \left[\frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2} + \frac{d}{2}\right)} \right], \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-2}}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{1!}, \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\Delta^{\frac{d}{2}-2}}{2} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \\ \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{d-1}}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\Delta^{\frac{d-4}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right), \end{aligned} \quad (5.83)$$

sustituimos este resultado en la ecuación (5.78):

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \left[\frac{\Delta^{\frac{d-4}{2}}}{2} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \right], \\ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{(2\pi)^d} \Delta^{\frac{d-4}{2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \Delta^{\frac{d-4}{2}} \Gamma\left(\frac{4-d}{2}\right), \quad (5.84)$$

observe que para el caso en que $d = 4$ se presenta una divergencia, puesto que $\Gamma(0)$ es infinito complejo, para evitar este problema definimos $\epsilon = 4 - d$, de manera que:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{\frac{4-\epsilon}{2}} \Delta^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \\ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{2-\frac{\epsilon}{2}} \Delta^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right), \\ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\Delta}{4\pi}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right). \end{aligned} \quad (5.85)$$

Para valores pequeños de ϵ se puede considerar la relación:

$$\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \Theta(\epsilon), \quad (5.86)$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni. $\Theta(\epsilon)$ indica que hay términos proporcionales a ϵ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{\Delta}{4\pi}\right)^{-\frac{\epsilon}{2}} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \Theta(\epsilon)\right], \\ \int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \underbrace{\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \Theta(\epsilon)\right]}_{\mathcal{A}}, \end{aligned} \quad (5.87)$$

observe que la divergencia aún persiste, puesto que para $d = 4 \rightarrow \epsilon = 0$, por lo tanto es necesario reescribir el término \mathcal{A}

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)^{\frac{\epsilon}{2}} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \Theta(\epsilon)\right], \\ \mathcal{A} &= e^{\frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \Theta(\epsilon)\right], \\ \mathcal{A} &= \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right) + \left(\frac{\epsilon}{2} \ln\left(\frac{4\pi}{\Delta}\right)\right)^2 + \dots\right) \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \Theta(\epsilon)\right], \\ \mathcal{A} &= \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(\Delta) + \dots + \Theta(\epsilon), \end{aligned} \quad (5.88)$$

reemplazando este resultado en la ecuación (5.87) tenemos:

$$\int \frac{d^d l_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(\Delta) + \dots + \Theta(\epsilon)\right). \quad (5.89)$$

Así, la ecuación (5.45) toma la forma:

$$\begin{aligned}
iV(p^2) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^2} \right], \quad (l^2 = l_E^2), \\
iV(p^2) &= -\frac{1}{2} \int_0^1 dx \left[i \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l_E^2 + \Delta)^2} \right], \\
iV(p^2) &= -\frac{i}{2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(\Delta) + \dots + \Theta(\epsilon) \right) \right], \\
iV(p^2) &= -\frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(\Delta) + \dots + \Theta(\epsilon) \right).
\end{aligned} \tag{5.90}$$

Este resultado es válido para el caso en que $d = 4 \rightarrow \epsilon = 0$.

Recordamos como se definió $\Delta = (xp)^2 - xp^2 + m^2$, entonces:

$$\begin{aligned}
iV(p^2) &= -\frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln((xp)^2 - xp^2 + m^2) \right), \\
iV(p^2) &= -\frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)p^2) \right).
\end{aligned} \tag{5.91}$$

De acuerdo con la ecuación (5.32), la amplitud total termina siendo:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda, \tag{5.92}$$

el desplazamiento de la constante de acoplamiento (δ_λ) es:

$$\delta_\lambda = -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)], \tag{5.93}$$

por lo tanto:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda - \lambda^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] + i\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)], \tag{5.94}$$

Mediante la ecuación (5.91) podemos encontrar lo términos que requiere (5.94), estos son: $V(s)$, $V(t)$, $V(u)$, $V(4m^2)$ y $V(0)$, de manera que:

$$V(s) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)s) \right), \tag{5.95}$$

$$V(t) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)t) \right), \tag{5.96}$$

$$V(u) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)u) \right), \tag{5.97}$$

$$V(4m^2) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - 4x(1-x)m^2) \right), \quad (5.98)$$

$$V(0) = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2) \right). \quad (5.99)$$

Usando estos resultados encontremos la constante de acoplamiento (δ_λ):

$$\begin{aligned} \delta_\lambda &= -\lambda^2 [V(4m^2) + 2V(0)], \\ \delta_\lambda &= \lambda^2 \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - 4x(1-x)m^2) \right) \\ &\quad + \lambda^2 \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{4}{\epsilon} - 2\gamma + 2\ln(4\pi) - 2\ln(m^2) \right), \end{aligned} \quad (5.100)$$

por lo tanto:

$$\delta_\lambda = \lambda^2 \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma + 3\ln(4\pi) - \ln(m^2 - 4x(1-x)m^2) - 2\ln(m^2) \right). \quad (5.101)$$

La ecuación (5.101) es solo un término de la amplitud, ahora la calcularemos por completo, esta se vería de la forma:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= -i\lambda + (-i\lambda)^2 [iV(s) + iV(t) + iV(u)] - i\delta_\lambda, \\ i\mathcal{M} &= -i\lambda + \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)s) \right) \\ &\quad + \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)t) \right) \\ &\quad + \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(m^2 - x(1-x)u) \right) \\ &\quad - \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left(\frac{6}{\epsilon} - 3\gamma + 3\ln(4\pi) - \ln(m^2 - 4x(1-x)m^2) - 2\ln(m^2) \right), \\ i\mathcal{M} &= -i\lambda + \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx (-\ln(m^2 - x(1-x)s)) \\ &\quad + \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx (-\ln(m^2 - x(1-x)t)) \\ &\quad + \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx (-\ln(m^2 - x(1-x)u)) \\ &\quad - \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx (-\ln(m^2 - 4x(1-x)m^2) - 2\ln(m^2)), \end{aligned} \quad (5.102)$$

observe que los términos con denominador ϵ se cancelaron, al igual que γ y $\ln(4\pi)$, esto nos permite simplificar aún más la expresión para la amplitud:

$$i\mathcal{M} = -i\lambda - \lambda^2 \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - 4x(1-x)m^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2} \right) \right], \quad (5.103)$$

y por lo tanto:

$$\mathcal{M} = -\lambda - \frac{\lambda^2}{32\pi^2} \int_0^1 dx \left[\ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)s}{m^2 - 4x(1-x)m^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)t}{m^2} \right) + \ln \left(\frac{m^2 - x(1-x)u}{m^2} \right) \right]. \quad (5.104)$$

Las expresiones (5.95), (5.96), (5.97), (5.98) y (5.99) son divergentes cuando $d \rightarrow 4$ ($\epsilon \rightarrow 0$). En el momento en el que se las combinó (5.102), los términos divergentes se cancelan, esto nos permite obtener un resultado finito (5.104), aunque bastante complicado.

5.5. Renormalización y el loop escotogénico

En el modelo escotogénico de Ma, la generación de la masa de los neutrinos ocurre a nivel de un diagrama de autoenergía a un loop en el que participan los fermiones de Majorana N_k y las componentes escalares neutras η_R y η_I . La estructura de la integral que aparece en este cálculo es análoga a las integrales de autoenergía discutidas anteriormente en el contexto de teorías cuánticas de campos.

Cada una de las contribuciones asociadas a η_R y η_I presenta individualmente un comportamiento que podría conducir a divergencias ultravioletas. Sin embargo, en el modelo escotogénico la masa del neutrino surge de la diferencia entre ambas contribuciones, lo que conduce a una cancelación de las partes divergentes. En consecuencia, la combinación $I(m_R) - I(m_I)$ que aparece en la expresión final para la autoenergía resulta finita.

Este mecanismo de cancelación refleja la estructura del modelo y asegura que la predicción física para la masa radiativa del neutrino sea independiente del procedimiento de regularización empleado, en concordancia con los principios generales de renormalización en teorías cuánticas de campos.

Capítulo 6

Masas de Neutrinos y Mecanismo de See-Saw

6.1. Naturaleza del Neutrino

6.1.1. Masa de Dirac

En el caso de que los neutrinos sean partículas Dirac, su masa se generaría mediante el mecanismo Higgs, el mismo que da masa a los quarks y leptones cargados en el modelo estándar. Sin embargo, la ausencia de evidencia experimental de la existencia de neutrinos derechos hace que a simple vista esto no sea posible. En otras palabras, la única extensión del Modelo Estándar que se necesita para generar masa a los neutrinos mediante el mecanismo de Higgs es la introducción de neutrinos derechos ν_R .

Los campos de los neutrinos derechos se expresan mediante singletes esto los hace invariantes ante las simetrías del modelo estándar, debido a que no participan en las interacciones débiles, fuertes y electromagnéticas, los neutrinos derechos son llamados también neutrinos *estériles*. Análogamente, los neutrinos izquierdos habituales que participan en las interacciones débiles son llamados neutrinos *activos*. [9]

En el Modelo estándar mínimamente extendido con tres campos de neutrinos derechos, el Lagrangiano Yukawa Higgs-leptón es:

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha,\beta}^{\ell} \bar{L}'_{\alpha,L} \Phi \ell'_{\beta,R} - \sum_{\alpha,\beta=e,\mu,\tau} Y_{\alpha,\beta}^{\nu} \bar{L}'_{\alpha,L} \tilde{\Phi} \nu'_{\beta,R} + H.c. \quad (6.1)$$

Donde los índices $\alpha, \beta = e, \mu, \tau$ son índices de sabor leptónico y recorren las tres familias de leptones. El campo $L'_{\alpha,L}$ representa el doblete leptónico izquierdo de $SU(2)_L$ asociado al sabor α , $\ell'_{\beta,R}$ representa el singlete derecho del leptón cargado de sabor β , y $\nu'_{\beta,R}$ representa el neutrino derecho de sabor β . El primado indica que los campos se encuentran escritos en la base de interacción; después de la diagonalización de las matrices de Yukawa se introducirán los campos sin primar en la base de masa. Además, $Y_{\alpha,\beta}^{\ell}$ y $Y_{\alpha,\beta}^{\nu}$ son matrices de acoplamiento de Yukawa para los leptones cargados y para los neutrinos, respectivamente [9].

Además, se trabaja en el gauge unitario, que corresponde a una elección de calibre en la cual los grados de libertad no físicos asociados a los bosones de Goldstone son eliminados mediante una transformación de gauge. De esta manera, después de la ruptura espontánea de la simetría electrodébil, el doblete de Higgs queda escrito únicamente en términos del valor esperado en el vacío v y del campo físico de Higgs H . En este gauge, el doblete de Higgs toma la forma:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+H}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \rightarrow \tilde{\Phi} = i\sigma_2\Phi^* = \begin{pmatrix} \frac{v+H}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

el doblete de leptones izquierdos se escribe de la forma:

$$L'_{\alpha,L} = \begin{pmatrix} \nu'_{\alpha,L} \\ \ell'_{\alpha,L} \end{pmatrix} \rightarrow \bar{L}'_{\alpha,L} = \left(\bar{\nu}'_{\alpha,L} \quad \bar{\ell}'_{\alpha,L} \right), \quad (6.3)$$

Con las expresiones (6.2) y (6.3), puedo reescribir la ecuación (6.1), de manera que:

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\bar{\ell}'_L Y'^{\ell} \ell'_R + \bar{\nu}'_L Y'^{\nu} \nu'_R \right] + H.c. \quad (6.4)$$

donde a su vez se tiene que:

$$\ell'_L = \begin{pmatrix} e'_L \\ \mu'_L \\ \tau'_L \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

$$\ell'_R = \begin{pmatrix} e'_R \\ \mu'_R \\ \tau'_R \end{pmatrix}, \quad (6.6)$$

$$\nu'_L = \begin{pmatrix} \nu'_{eL} \\ \nu'_{\mu L} \\ \nu'_{\tau L} \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

$$\nu'_R = \begin{pmatrix} \nu'_{eR} \\ \nu'_{\mu R} \\ \nu'_{\tau R} \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

siendo ℓ'_R y ℓ'_L leptones cargados, mientras que ν'_R y ν'_L son los neutrinos, ambos en la base de interacción.

La matriz de acoplamiento de Yukawa Y'^{ℓ} puede ser diagonalizada de la siguiente manera:

$$V_L^{\ell\dagger} Y'^{\ell} V_R^{\ell} = Y^{\ell}, \quad (6.9)$$

donde la matriz diagonalizada se expresa como:

$$Y_{\alpha,\beta}^{\ell} = y_{\alpha}^{\ell} \delta_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = e, \mu, \tau). \quad (6.10)$$

Aquí y_{α}^{ℓ} representa el acoplamiento de Yukawa diagonal asociado al leptón cargado de sabor α . En esta ecuación no se está aplicando una suma sobre α ; la expresión define las componentes de la matriz diagonal Y^{ℓ} , es decir,

$$Y^{\ell} = \text{diag} (y_e^{\ell}, y_{\mu}^{\ell}, y_{\tau}^{\ell}). \quad (6.11)$$

De la misma manera se diagonaliza la matriz de acoplamiento Yukawa Y'' :

$$V_L^{\nu\dagger} Y'' V_R^\nu = Y^\nu, \quad (6.12)$$

donde

$$Y_{kj}^\nu = y_k^\nu \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, 3). \quad (6.13)$$

Aquí y_k^ν representa el acoplamiento de Yukawa diagonal asociado al neutrino de masa k . Tampoco se está aplicando una suma sobre k en la definición anterior; se tiene

$$Y^\nu = \text{diag}(y_1^\nu, y_2^\nu, y_3^\nu), \quad (6.14)$$

con y_k^ν y y_α^ℓ positivos y reales.

Las matrices de transformación V_R^ℓ , V_L^ℓ , V_R^ν y V_L^ν son unitarias y de orden 3×3 . Por lo tanto:

$$V_R^{\ell\dagger} = (V_R^\ell)^{-1}, \quad V_L^{\ell\dagger} = (V_L^\ell)^{-1}, \quad (6.15)$$

$$V_R^{\nu\dagger} = (V_R^\nu)^{-1}, \quad V_L^{\nu\dagger} = (V_L^\nu)^{-1}. \quad (6.16)$$

Se definen los leptones cargados quirales masivos

$$\ell_L = V_L^{\ell\dagger} \ell'_L = \begin{pmatrix} e_L \\ \mu_L \\ \tau_L \end{pmatrix} \quad (6.17)$$

$$\ell_R = V_R^{\ell\dagger} \ell'_R = \begin{pmatrix} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{pmatrix} \quad (6.18)$$

Se definen los neutrinos quirales masivos

$$n_L = V_L^{\nu\dagger} \nu'_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \\ \nu_{3L} \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

$$n_R = V_R^{\nu\dagger} \nu'_R = \begin{pmatrix} \nu_{1R} \\ \nu_{2R} \\ \nu_{3R} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

En consecuencia, el lagrangiano de Yukawa (6.4) se escribe como:

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) [\bar{\ell}_L Y^\ell \ell_R + \bar{n}_L Y^\nu n_R] + H.c. \quad (6.21)$$

Para obtener la forma explícita en componentes, usamos que Y^ℓ y Y^ν son matrices diagonales. Entonces:

$$\begin{aligned} \bar{\ell}_L Y^\ell \ell_R &= \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \bar{\ell}_{\alpha L} Y_{\alpha\beta}^\ell \ell_{\beta R} \\ &= \sum_{\alpha, \beta=e, \mu, \tau} \bar{\ell}_{\alpha L} y_\alpha^\ell \delta_{\alpha\beta} \ell_{\beta R} \\ &= \sum_{\alpha=e, \mu, \tau} y_\alpha^\ell \bar{\ell}_{\alpha L} \ell_{\alpha R}, \end{aligned} \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned}
\bar{n}_L Y^\nu n_R &= \sum_{k,j=1}^3 \bar{n}_{kL} Y_{kj}^\nu n_{jR} \\
&= \sum_{k,j=1}^3 \bar{n}_{kL} y_k^\nu \delta_{kj} n_{jR} \\
&= \sum_{k=1}^3 y_k^\nu \bar{n}_{kL} n_{kR}.
\end{aligned} \tag{6.23}$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}_{H,L} = - \left(\frac{v+H}{\sqrt{2}} \right) \left[\sum_{\alpha=e,\mu,\tau} y_\alpha^\ell \bar{\ell}_{\alpha L} \ell_{\alpha R} + \sum_{k=1}^3 y_k^\nu \bar{n}_{kL} n_{kR} \right] + H.c. \tag{6.24}$$

expresando los campos Dirac de leptones cargados y neutrinos en sus componentes quirales:

$$\ell_\alpha \equiv \ell_{\alpha L} + \ell_{\alpha R} \quad (\alpha = e, \mu, \tau), \tag{6.25}$$

$$\nu_k \equiv n_{kL} + n_{kR} \quad (k = 1, 2, 3), \tag{6.26}$$

el término proporcional al valor esperado en el vacío v genera los términos de masa, mientras que el término proporcional al campo H describe la interacción de Yukawa con el bosón de Higgs. Separando explícitamente la parte proporcional a v , se obtiene

$$\mathcal{L}_{masa} = - \sum_{\alpha=e,\mu,\tau} \frac{y_\alpha^\ell v}{\sqrt{2}} \bar{\ell}_{\alpha L} \ell_{\alpha R} - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{n}_{kL} n_{kR} + H.c. \tag{6.27}$$

Si nos concentramos únicamente en el término de masa de los neutrinos, finalmente obtenemos:

$$\mathcal{L}_{masa}^\nu = - \sum_{k=1}^3 \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \bar{n}_{kL} n_{kR} + H.c., \tag{6.28}$$

por lo tanto, la masa de los neutrinos estará dada por la expresión:

$$m_k = \frac{y_k^\nu v}{\sqrt{2}} \quad (k = 1, 2, 3). \tag{6.29}$$

Las masas de los neutrinos que hemos obtenido con este mecanismo son proporcionales al valor esperado en el vacío del Higgs (VEV) v . Sin embargo, es conocido que las masas de los neutrinos son mucho más pequeñas que las masas de los quarks y leptones cargados.

6.1.2. Neutrino de Majorana

En el modelo estándar de la física de partículas, los quarks y leptones cargados son partículas de Dirac. Es decir, estas partículas se rigen bajo la ecuación de Dirac y se describen mediante espinores con cuatro componentes complejos. Si los neutrinos no tuvieran masa serían

descritos por espinores con dos componentes complejos llamados espinores de Weyl. Como bien se conoce ahora, los neutrinos son masivos, por lo que es tentador pensar que estos son como los otros fermiones (quarks y leptones cargados) y debería por lo tanto ser espinores de Dirac.

Sin embargo, existe una importante diferencia entre los neutrinos y el resto de fermiones fundamentales, y esta es que estos no poseen carga eléctrica. Esto nos lleva a considerar la posibilidad de que los neutrinos sean también espinores de Majorana.

Partiendo de la Ecuación de Dirac

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (6.30)$$

donde ψ se puede expresar en sus componentes quirales

$$\psi = \psi_R + \psi_L \quad (6.31)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) (\psi_R + \psi_L) &= 0, \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_R + (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi_L &= 0, \end{aligned} \quad (6.32)$$

ahora aplicamos el operador paridad P_L y P_R

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_L \psi_R + (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_L \psi_L = 0, \quad (6.33)$$

y

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_R \psi_R + (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_R \psi_L = 0, \quad (6.34)$$

de donde se sabe que $P_R \psi_L = P_L \psi_R = 0$, por lo tanto:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_L \psi_L = 0, \quad \mathbf{y} \quad (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_R \psi_R = 0,$$

sumando estas expresiones tenemos:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_L \psi_L + (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) P_R \psi_R = 0, \quad (6.35)$$

el operador paridad puede ser expresado de la siguiente manera:

$$P_{L,R} = \frac{(1 \mp \gamma^5)}{2} \quad (6.36)$$

donde se sabe

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (6.37)$$

usando la relación (6.36) y (6.37) es posible obtener:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R \quad (6.38)$$

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L \quad (6.39)$$

Notamos que los campos quirales ψ_L y ψ_R se relacionan entre si mediante la masa m . Esto nos dice que un fermión sin masa puede ser descrito por un solo campo quiral. Cuando $m = 0$, las ecuaciones (6.38) y (6.39) se conocen como *ecuaciones de Weyl*.

Para $m \neq 0$, las ecuaciones (6.38) y (6.39) representan dos formas distintas de escribir la misma ecuación. Para escribir (6.38) a partir de (6.39), tomamos el hermítico conjugado de (6.39) y lo multiplicamos por γ^0 por la derecha.

$$\begin{aligned} (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_R)^\dagger &= (m\psi_L)^\dagger, \\ -i\partial_\mu \psi_R^\dagger \gamma^{\mu\dagger} &= m\psi_L^\dagger, \\ -i\partial_\mu \psi_R^\dagger \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= m\psi_L^\dagger \gamma^0, \\ -i\partial_\mu \psi_R^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 &= m\psi_L^\dagger \gamma^0, \end{aligned} \quad (6.40)$$

se sabe que $\gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 = \gamma^\mu$ y se define $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, por lo tanto

$$-i\partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu = m\bar{\psi}_L, \quad (6.41)$$

ahora tomamos la transpuesta de (6.41) y multiplicamos por la izquierda por la matriz de conjugación de carga C

$$\begin{aligned} (-i\partial_\mu \bar{\psi}_R \gamma^\mu)^T &= (m\bar{\psi}_L)^T, \\ -i\gamma^{\mu T} \partial_\mu \bar{\psi}_R^T &= m\bar{\psi}_L^T, \\ -iC\gamma^{\mu T} \partial_\mu \bar{\psi}_R^T &= mC\bar{\psi}_L^T, \\ -iC\gamma^{\mu T} C^{-1} C \partial_\mu \bar{\psi}_R^T &= mC\bar{\psi}_L^T, \end{aligned} \quad (6.42)$$

donde se sabe que $C\gamma^{\mu T} C^{-1} = \gamma^\mu$, por lo tanto

$$-i\gamma^\mu C \partial_\mu \bar{\psi}_R^T = mC\bar{\psi}_L^T, \quad (6.43)$$

Comparando la ecuación (6.41) con la ecuación (6.43), podemos establecer que:

$$\psi_R = \varphi C \bar{\psi}_L^T, \quad (6.44)$$

$$\psi_L = \varphi C \bar{\psi}_R^T. \quad (6.45)$$

Esta es la relación de Majorana entre ψ_R y ψ_L . Donde φ es un factor de fase arbitrario. Las ecuaciones (6.44) y (6.45) nos permiten expresar (6.31) como:

$$\psi = C \bar{\psi}^T. \quad (6.46)$$

Esta expresión es igual a la transformación de un espinor bajo una conjugación de carga

$$\psi \rightarrow \psi^C = C \bar{\psi}^T, \quad (6.47)$$

por lo tanto, comparando (6.46) y (6.47), tenemos:

$$\psi = \psi^C. \quad (6.48)$$

Podemos expresar la ecuación de Majorana para el campo ψ como:

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi = m\psi^C. \quad (6.49)$$

Esto implica que la partícula es igual a su antipartícula. Por lo tanto, solo fermiones neutros pueden ser descritos por campos de Majorana.

La teoría de Majorana es más simple que la teoría de Dirac, Por lo que los neutrinos masivos de Majorana son más asequibles que los neutrinos masivos de Dirac. En el caso de neutrinos sin masa, ambas teorías, Dirac y Majorana, son equivalentes. Por lo que podemos diferenciar la naturaleza del neutrino, Dirac o Majorana, mediante la detección de efectos debido a la masa de los neutrinos. Debemos tener en cuenta que los efectos cinemáticos de la masa del neutrino, tanto Dirac como Majorana, son iguales. El mejor modo para detectar si la naturaleza de un neutrino es de Majorana, es mediante el el doble decaimiento beta sin neutrinos.

6.1.3. Masas de Majorana

Considerando la representación quiral del campo (6.31) y el término de masa Dirac para los neutrinos (6.28), tenemos:

$$\mathcal{L}_{masa}^D = -m\bar{\nu}\nu = -m(\bar{\nu}_L\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L + \bar{\nu}_R\nu_R), \quad (6.50)$$

usando las propiedades del operador paridad $P_R P_L = P_L P_R = 0$

$$\bar{\nu}_L\nu_L = \bar{\nu}P_R P_L\nu = 0 \quad (6.51)$$

$$\bar{\nu}_R\nu_R = \bar{\nu}P_L P_R\nu = 0 \quad (6.52)$$

por lo tanto:

$$\mathcal{L}_{masa}^D = -m\bar{\nu}\nu = -m(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L) = -m\bar{\nu}_R\nu_L + H.c. \quad (6.53)$$

Además del término de masa de Dirac $\bar{\nu}\nu$ podemos construir otros términos de masa que sean invariantes de Lorentz. Entre estos términos tenemos:

$$\bar{\nu}^C\nu^C \quad \bar{\nu}\nu^C \quad \bar{\nu}^C\nu, \quad (6.54)$$

además, como los campos ν^C y $\bar{\nu}^C$ transforman como ν_L y $\bar{\nu}_L$ respectivamente (ver Apéndice C), podemos introducir ν_L^C en lugar de ν_R en el Lagrangiano (6.53), llevándonos al término de masa de Majorana.

$$\mathcal{L}_{masa}^M = -\frac{1}{2}m(\bar{\nu}_L^C\nu_L + \bar{\nu}_L\nu_L^C) = -\frac{1}{2}m\bar{\nu}_L^C\nu_L + H.c., \quad (6.55)$$

expresamos $\bar{\nu}_L^C$ en función de $\bar{\nu}_L$

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}_L^C &= (C\bar{\nu}_L^T)^\dagger \gamma^0, \\
&= (\bar{\nu}_L^T)^\dagger C^\dagger \gamma^0, \\
&= \left[(\nu_L^\dagger \gamma^0)^T \right]^\dagger C^\dagger \gamma^0, \\
&= (\gamma^0 \nu_L^*)^\dagger C^\dagger \gamma^0, \\
&= \nu_L^T (\gamma^0)^T C^\dagger \gamma^0,
\end{aligned} \tag{6.56}$$

usando la propiedad $(\gamma^0)^T C^\dagger \gamma^0 = -C^\dagger$ tenemos

$$\bar{\nu}_L^C = -\nu_L^T C^\dagger, \tag{6.57}$$

Considerando esta igualdad (6.57), el Lagrangiano de Majorana se puede expresar como:

$$\mathcal{L}_{masa}^M = -\frac{m}{2} (-\nu_L^T C^\dagger \nu_L + \bar{\nu}_L C \bar{\nu}_L^T). \tag{6.58}$$

De la adimensionalidad de la acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(x) \tag{6.59}$$

entonces

$$\mathcal{L} \rightarrow [E]^4, \tag{6.60}$$

en el Lagrangiano de Dirac podemos observar que los campos fermiónicos y bosónicos tienen dimensión

$$\psi \rightarrow [E]^{\frac{3}{2}} \tag{6.61}$$

$$\Phi \rightarrow [E]^1 \tag{6.62}$$

El término con menor dimensión que podría generar una masa de Majorana respetando las simetrías del modelo estándar (se viola el número leptónico) es:

$$\mathcal{L}_5 = g\mathcal{K} (L_L^T \sigma_2 \Phi) C^\dagger (\Phi^T \sigma_2 L_L) + H.c. \tag{6.63}$$

Donde \mathcal{K} es una constante cuya dimensionalidad se discutirá más adelante, g es una constante de acoplamiento adimensional y σ_α representa a las matrices de Pauli.

$$L_L = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} \tag{6.64}$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

A simple vista, el Lagrangiano \mathcal{L}_5 no es aceptado en el modelo estándar debido a que el producto de los campos posee dimensión $[E]^5$, lo que lo hace no renormalizable. Sin embargo,

esto nos lleva a interpretar el modelo estándar como una teoría efectiva a bajas energías producto de la ruptura de simetría de una teoría unificada a altas energías. También podemos identificar \mathcal{L}_5 como un término efectivo a bajas energías que cumple con las simetrías del modelo estándar.[9] Como producto de la ruptura de la simetría, tenemos:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix}, \quad (6.66)$$

por lo que (6.63) genera el término de masa de Majorana para el campo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{masa}^M &= \frac{1}{2} g \mathcal{K} \begin{pmatrix} \nu_L^T & l_L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H \end{pmatrix} C^\dagger \begin{pmatrix} 0 & v + H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} + H.c., \\ \mathcal{L}_{masa}^M &= \frac{1}{2} g \mathcal{K} \begin{pmatrix} \nu_L^T & l_L^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i(v + H) \\ 0 \end{pmatrix} C^\dagger \begin{pmatrix} i(v + H) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ l_L \end{pmatrix} + H.c., \\ \mathcal{L}_{masa}^M &= \frac{1}{2} g \mathcal{K} [-i \nu_L^T (v + H)] C^\dagger [i(v + H) \nu_L] + H.c., \\ \mathcal{L}_{masa}^M &= \frac{1}{2} g v^2 \mathcal{K} \nu_L^T C^\dagger \nu_L + H.c., \end{aligned} \quad (6.67)$$

comparando (6.58) y (6.67), tenemos

$$m = g v^2 \mathcal{K}. \quad (6.68)$$

En (6.60) señalamos que el Lagrangiano debe tener dimensión de energía a la cuarta potencia, es decir, $[\mathcal{L}] = [E]^4$ en unidades naturales. Si se introduce un operador \mathcal{O}_d con dimensión $d > 4$, su coeficiente debe tener dimensión $[E]^{4-d}$ para que el término completo del Lagrangiano conserve dimensión cuatro [9]. Por lo tanto, dicho coeficiente debe tener la forma:

$$M^{4-d}, \quad (6.69)$$

para el caso de un operador con dimensión $d = 5$, tenemos

$$M^{-1}, \quad (6.70)$$

por lo tanto, la constante introducida en (6.63) adquiere dimensionalidad $[E]^{-1}$

$$\mathcal{K} = M^{-1} = \frac{1}{M}, \quad (6.71)$$

M se puede interpretar como una masa característica de una ruptura de simetría a altas energías en escala GUT.

Redefiniendo (6.67) y (6.68), tenemos:

$$\mathcal{L}_{masa}^M = \frac{1}{2} \frac{g v^2}{M} \nu_L^T C^\dagger \nu_L + H.c., \quad (6.72)$$

$$m = \frac{gv^2}{M}. \quad (6.73)$$

El operador efectivo a bajas energías con la menor dimensionalidad que guarda compatibilidad con las simetrías del modelo estándar es \mathcal{L}_5 y es proporcional a M^{-1} (6.63).

Observamos que la masa de Majorana en (6.67) es proporcional a $\frac{v^2}{M}$. Debido a que v está en la escala de la ruptura de simetría electrodébil (escala de la masa de los fermiones de Dirac generados por el mecanismo de Higgs), podemos escribir:

$$m \propto \frac{m_D^2}{M} \quad (6.74)$$

La ecuación (6.74) nos adelanta un tema que se analizará más adelante, este es el mecanismo seesaw o balancín. Se le denomina así debido a que la masa de Dirac m_D está en el orden de la masa de los leptones cargados o quarks y se encuentra dividida por una masa mucho más grande M proporcionando así a un neutrino con una masa muy pequeña m .

Lo analizado hasta el momento solo es para una generación de neutrinos, podemos generalizar para el caso de tres neutrinos [9]:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{M} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} (L'_{\alpha L} \sigma_2 \Phi) C^\dagger (\Phi^T \sigma_2 L'_{\beta L}) + H.c. \quad (6.75)$$

Donde g es una matriz simétrica de constantes de acoplamiento de orden 3×3 . Como consecuencia de la ruptura de simetría electrodébil, obtenemos:

$$\mathcal{L}_5 = \frac{1}{2} \frac{v^2}{M} \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} \nu'_{\alpha L} C^\dagger \nu'_{\beta L} + H.c., \quad (6.76)$$

donde la matriz de masa de Majorana es:

$$M_{\alpha\beta}^L = \frac{v^2}{M} g_{\alpha\beta}. \quad (6.77)$$

6.2. Mecanismo Seesaw

Los mecanismos Seesaw proporcionan una explicación natural e interesante a la pequeñez de las masas de los neutrinos en comparación con las masas de los fermiones cargados. El mecanismo desarrollado consiste en la expansión del sector fermiónico, es decir, se impone la existencia de singletes de neutrinos pesados (estériles), cuya masa es mucho mayor a la escala de energía electrodébil, a este mecanismo se le conoce como seesaw tipo I. A continuación se detallará el mecanismo.

6.2.1. Mecanismo Seesaw I

En la naturaleza existe el neutrino izquierdo, representado por el campo quirral ν_L , este se encuentra presente en el modelo estándar y se manifiesta mediante la interacción débil. Hasta

el momento, se desconoce la existencia de un neutrino derecho ν_R a pesar de que este no está prohibido por las simetrías del modelo estándar. Debido a que no existe manifestación alguna de los neutrinos derechos en las interacciones débiles, se asume que de existir estos serían estériles. Considerando la naturaleza de Majorana, el Lagrangiano de masa para los campos izquierdos ν_L según la ecuaciones (6.55) y (6.58) es:

$$\mathcal{L}_{masa}^L = -\frac{1}{2}m_L\bar{\nu}_L^C\nu_L + H.c. = \frac{1}{2}m_L\nu_L^T C^\dagger\nu_L + H.c., \quad (6.78)$$

de la misma manera, se asume la existencia del neutrino derecho ν_R , por lo tanto, el Lagrangiano de masa es:

$$\mathcal{L}_{masa}^R = -\frac{1}{2}m_R\bar{\nu}_R^C\nu_R + H.c. = \frac{1}{2}m_R\nu_R^T C^\dagger\nu_R + H.c., \quad (6.79)$$

esto nos permite construir un término de masa Dirac (6.53)

$$\mathcal{L}_{masa}^D = -m_D\bar{\nu}_R\nu_L + H.c., \quad (6.80)$$

finalmente, basándonos en (6.78), (6.79) y (6.80) construimos un término de masa Dirac-Majorana.

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = \mathcal{L}_{masa}^D + \mathcal{L}_{masa}^L + \mathcal{L}_{masa}^R, \quad (6.81)$$

de manera que:

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = -m_D\bar{\nu}_R\nu_L + \frac{1}{2}m_L\nu_L^T C^\dagger\nu_L + \frac{1}{2}m_R\nu_R^T C^\dagger\nu_R + H.c., \quad (6.82)$$

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = -m_D\bar{\nu}_R\nu_L - \frac{1}{2}m_L\bar{\nu}_L^C\nu_L - \frac{1}{2}m_R\bar{\nu}_R^C\nu_R + H.c., \quad (6.83)$$

el término $m_D\bar{\nu}_R\nu_L$ es equivalente a $m_D\bar{\nu}_L^C\nu_R^C$. Reescribimos la ecuación (6.83) en forma matricial

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = -\frac{1}{2}(\bar{\nu}_L^C \quad \bar{\nu}_R) \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} + H.c., \quad (6.84)$$

definimos:

$$\mathbf{M}^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad (6.85)$$

$$\mathbf{N}_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix}, \quad (6.86)$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{masa}^{D+M} &= -\frac{1}{2}\bar{\mathbf{N}}_L^C \mathbf{M}^{D+M} \mathbf{N}_L + H.c., \\ &= \frac{1}{2}\mathbf{N}_L^T C^\dagger \mathbf{M}^{D+M} \mathbf{N}_L + H.c., \end{aligned} \quad (6.87)$$

Debido a que la matriz de masa M^{D+M} no es diagonal, los campos ν_L y ν_R no tienen masa definida. Para diagonalizar la matriz de masa (6.85) empleamos la siguiente transformación unitaria de los campos quirales:

$$\mathbf{N}_L = U \mathbf{n}_L, \quad (6.88)$$

donde

$$\mathbf{n}_L = \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}, \quad (6.89)$$

empleando (6.88) en (6.87), obtenemos.

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = \frac{1}{2} \mathbf{n}_L^T C^\dagger U^T \mathbf{M}^{D+M} U \mathbf{n}_L + H.c., \quad (6.90)$$

La forma de la matriz unitaria U debe ser tal que:

$$\mathbf{M} = U^T M^{D+M} U = \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad (6.91)$$

usando (6.89) y (6.91) en (6.90) tenemos

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = \frac{1}{2} (\nu_{1L}^T C^\dagger \quad \nu_{2L}^T C^\dagger) \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix} + H.c., \quad (6.92)$$

simplificando:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{masa}^{D+M} &= \frac{1}{2} m_1 \nu_{1L}^T C^\dagger \nu_{1L} + \frac{1}{2} m_2 \nu_{2L}^T C^\dagger \nu_{2L} + H.c., \\ \mathcal{L}_{masa}^{D+M} &= \sum_{k=1,2} \frac{1}{2} m_k \nu_{kL}^T C^\dagger \nu_{kL} + H.c., \end{aligned} \quad (6.93)$$

ahora definimos:

$$\nu_k = \nu_{kL} + \nu_{kL}^C \quad (6.94)$$

$$\bar{\nu}_k = \nu_{kL} + C \bar{\nu}_{kL}^T \quad (6.95)$$

considerando (6.95) en (6.93) tenemos

$$\mathcal{L}_{masa}^{D+M} = - \sum_{k=1,2} \frac{1}{2} m_k \bar{\nu}_k \nu_k. \quad (6.96)$$

Diagonalizando la matriz de masa (6.85). De (6.91) tenemos

$$U = \mathcal{U} \zeta \quad (6.97)$$

donde \mathcal{U} es una matriz ortogonal, esta se elige de manera que diagonalice (6.85)

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6.98)$$

de manera que

$$\mathcal{U}^T \mathbf{M}^{D+M} \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2 \end{pmatrix}. \quad (6.99)$$

También se introduce una matriz diagonal de fase ζ cuya utilidad se explicará más adelante.

$$\zeta = \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix} \quad (6.100)$$

Obteniendo los autovalores de (6.85)

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{M}^{D+M} - \lambda \mathbf{I}] &= 0, \\ \det \left[\begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right] &= 0, \\ \det \left[\begin{pmatrix} m_L - \lambda & m_D \\ m_D & m_R - \lambda \end{pmatrix} \right] &= 0, \\ (m_L - \lambda)(m_R - \lambda) - m_D^2 &= 0, \\ \lambda^2 - (m_L + m_R)\lambda - (m_D^2 - m_L m_R) &= 0, \end{aligned} \quad (6.101)$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) \pm \sqrt{(m_L + m_R)^2 - 4(m_L m_R - m_D^2)} \right], \\ \lambda &= \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) \pm \sqrt{m_L^2 + m_R^2 - 2m_L m_R + 4m_D^2} \right], \end{aligned} \quad (6.102)$$

finalmente, los valores propios son:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) - \sqrt{m_L^2 + m_R^2 - 2m_L m_R + 4m_D^2} \right], \quad (6.103)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) + \sqrt{m_L^2 + m_R^2 - 2m_L m_R + 4m_D^2} \right]. \quad (6.104)$$

Además

$$\tan(2\theta) = \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \quad (6.105)$$

En este punto debemos resaltar que si $m_L m_R$ es menor que m_D^2 , el valor de λ_1 es negativo. Es aquí donde se resalta la necesidad de que la matriz ζ (6.100), debido a que se introduce con la finalidad de cambiar el signo del autovalor λ_1 cuando este sea menor a cero.

De las ecuaciones (6.91) y (6.97), tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= U^T M^{D+M} U, \\ \mathbf{M} &= (\mathcal{U} \zeta)^T M^{D+M} (\mathcal{U} \zeta), \\ \mathbf{M} &= \zeta^T \mathcal{U}^T M^{D+M} \mathcal{U} \zeta, \end{aligned} \quad (6.106)$$

reemplazando (6.99) y (6.100) en (6.106)

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \zeta^T \mathcal{U}^T M^{D+M} (\mathcal{U} \zeta), \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \zeta_1^2 \lambda_1 & 0 \\ 0 & \zeta_2^2 \lambda_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.107)$$

entonces de (6.91) y (6.107) tenemos

$$m_k = \zeta_k^2 \lambda_k, \quad k = 1, 2. \quad (6.108)$$

En (6.104) observamos que λ_2 siempre será positivo, en consecuencia $\zeta_2^2 = 1$, por lo tanto de (6.108) tenemos:

$$m_2 = \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) + \sqrt{m_L^2 + m_R^2 - 2m_L m_R + 4m_D^2} \right]. \quad (6.109)$$

Para (6.103) se debe analizar los siguientes casos:

Autovalor positivo $\lambda_1 \geq 0$

Si consideramos $m_R m_L \geq m_D^2$ en (6.103), obtenemos $\lambda_1 \geq 0$, por lo tanto $\zeta_1^2 = 1$. En la ecuación (6.108) tenemos:

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[(m_L + m_R) - \sqrt{m_L^2 + m_R^2 - 2m_L m_R + 4m_D^2} \right], \quad (6.110)$$

según las ecuaciones (6.97), (6.98) y (6.100), en este caso ($\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 1$), la matriz de mezcla obtiene la siguiente forma:

$$U = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (6.111)$$

Autovalor negativo $\lambda_1 < 0$

Si consideramos $m_R m_L < m_D^2$ en (6.103), obtenemos $\lambda_1 < 0$, por lo tanto se debe tomar $\zeta_1^2 = -1$. En la ecuación (6.108) tenemos:

$$m_1 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{m_L^2 + m_R^2 - 2m_L m_R + 4m_D^2} - (m_L + m_R) \right], \quad (6.112)$$

Construimos la matriz de fase (6.100) con los valores $\zeta_1 = i$ y $\zeta_2 = 1$.

Mediante las ecuaciones (6.97) y (6.98) obtenemos la siguiente matriz de mezcla:

$$U = \begin{pmatrix} i \cos \theta & \sin \theta \\ -i \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (6.113)$$

el caso más importante y de nuestro interés es cuando:

$$m_L \approx 0, \quad (6.114)$$

de manera que

$$m_D \ll m_R. \quad (6.115)$$

Asumir que $m_L \approx 0$ es muy conveniente ya que el término de masa de Majorana (6.78) para el campo quiral izquierdo ν_L no está permitido por las simetrías del modelo estándar.

De (6.103), obtenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[m_R - \sqrt{m_R^2 \left(1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)} \right], \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2} \left[m_R - m_R \sqrt{\left(1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)} \right], \\ \lambda_1 &= \frac{m_R}{2} \left[1 - \sqrt{\left(1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)} \right], \end{aligned} \quad (6.116)$$

expandiendo la raíz

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{m_R}{2} \left[1 - \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)^2 + \dots \right) \right], \\ \lambda_1 &= \frac{m_R}{2} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right) + \frac{1}{8} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)^2 + \dots \right], \end{aligned} \quad (6.117)$$

es posible truncar la serie en el término de primer orden puesto que $m_D \ll m_R$ (6.115),

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx \frac{m_R}{2} \left[-\frac{2m_D^2}{m_R^2} \right], \\ \lambda_1 &\approx -\frac{m_D^2}{m_R}, \end{aligned} \quad (6.118)$$

donde

$$\zeta_1^2 = -1. \quad (6.119)$$

Por otro lado, de la ecuación (6.104) tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left[m_R + \sqrt{m_R^2 + 4m_D^2} \right], \\ \lambda_2 &= \frac{m_R}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4m_D^2}{m_R^2}} \right]. \end{aligned} \quad (6.120)$$

expandiendo la raíz

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{m_R}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)^2 + \dots \right) \right], \\ \lambda_2 &= \frac{m_R}{2} \left[2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right) - \frac{1}{8} \left(\frac{4m_D^2}{m_R^2} \right)^2 + \dots \right],\end{aligned}\tag{6.121}$$

es posible truncar la serie en el término de segundo orden puesto que $m_D \ll m_R$ (6.115),

$$\begin{aligned}\lambda_2 &\approx \frac{m_R}{2} \left[2 + \frac{2m_D^2}{m_R^2} \right], \\ \lambda_2 &\approx m_R + \frac{m_D^2}{m_R}.\end{aligned}\tag{6.122}$$

en vista de que $m_D \ll m_R$ (6.115), podemos decir que el término que contribuye en mayor medida es el primero, de manera que podemos despreciar el segundo término, por lo tanto:

$$\lambda_2 \approx m_R,\tag{6.123}$$

lo que implica que

$$\zeta_2^2 = 1.\tag{6.124}$$

Mediante estos resultados y la ecuación (6.108) obtenemos:

$$m_1 = \frac{m_D^2}{m_R},\tag{6.125}$$

$$m_2 = m_R.\tag{6.126}$$

reemplazando (6.114) y (6.115) en (6.105) tenemos:

$$\begin{aligned}\tan(2\theta) &= \frac{2m_D}{m_R - m_L}, \\ \tan(2\theta) &= \frac{2m_D}{m_R}, \\ \theta &\approx \frac{m_D}{m_R},\end{aligned}\tag{6.127}$$

lo que implica que

$$\theta \ll 1.\tag{6.128}$$

Considerando (6.128) podemos aproximar $\cos(\theta) \approx 1$ y $\sin(\theta) \approx \theta$. Según la matriz de mezcla (6.113) y (6.88)

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^C \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} i & \theta \\ -i\theta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_{1L} \\ \nu_{2L} \end{pmatrix}.\tag{6.129}$$

Como $\theta \approx m_D/m_R \ll 1$, al orden dominante se tiene:

$$\nu_L \approx i\nu_{1L}, \quad (6.130)$$

$$\nu_R^C \approx \nu_{2L}. \quad (6.131)$$

Los resultados en (6.125) y (6.126) nos muestran una masa muy pequeña para ν_1 debido a que el valor de la misma es suprimido por la masa m_R para ν_2 . En las ecuaciones (6.130) y (6.131) observamos que los estados de masa ν_1 y ν_2 son principalmente neutrinos activos ν_L y estériles ν_R^C respectivamente. Este es el denominado mecanismo seesaw, donde la pequeñez de la masa m_1 es consecuencia de la supresión producida por la escala pesada m_2 .

Capítulo 7

Modelo Escotogénico de Ma

El modelo estándar mínimo (SM) de interacciones de partículas es muy exitoso, pero no logra abordar tres de las preguntas más importantes que enfrentan la física de partículas y la cosmología hoy en día: (1) ¿Cómo se genera la masa de un neutrino? (2) ¿Cuál es la naturaleza de la materia oscura fría? (3) ¿Por qué hay más materia que antimateria en el universo actual? Cada pregunta tiene varias respuestas válidas, pero generalmente no están relacionadas. En esta nota, combinando una idea establecida y dos recientes, abordaremos por primera vez la posibilidad de que dos de estas pueden tener un origen común simple, derivado de las interacciones de un solo término, con consecuencias verificables experimentalmente.

Se sabe desde hace mucho tiempo que la masa de los neutrinos y la bariogénesis pueden estar relacionadas a través del mecanismo de Seesaw [17, 8, 12] y la leptogénesis [7]. La idea es muy simple. El SM se complementa con tres fermiones singlete neutros pesados N_j (a menudo denominados neutrinos derechos) con grandes masas de Majorana M_j . En el modelo escotogénico, además, se introduce un doblete escalar adicional $\eta = (\eta^+, \eta^0)$, el cual juega un papel fundamental en la generación radiativa de las masas de los neutrinos y en la fenomenología de materia oscura que se estudiará en este trabajo. Mediante los acoplamientos de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = h_{ij} (\nu_i \phi^0 - l_i \phi^+) N_j + h.c., \quad (7.1)$$

donde (ν_i, l_i) , $i = e, \mu, \tau$ son los tres dobletes leptónicos zurdos, y (ϕ^+, ϕ^0) es el doblete escalar de Higgs del SM, el único operador de dimensión cinco para la masa del neutrino de Majorana [16]

$$\mathcal{L}_\Lambda = \frac{f_{ij}}{2\Lambda} (\nu_i \eta^0 - l_i \eta^+) (\nu_j \eta^0 - l_j \eta^+) + h.c.,$$

Se realiza con $\frac{f_{ij}}{2\Lambda} = \sum_k \frac{h_{ik} h_{jk}}{M_k}$. A medida que ϕ^0 adquiere un valor esperado de vacío distinto de cero $\langle \phi^0 \rangle = v$, se genera una matriz de masa de neutrinos $(\mathcal{M}_\nu)_{ij} = \frac{f_{ij} v^2}{\Lambda}$ [17, 8, 12]. Al mismo tiempo, los fermiones pesados de Majorana, N_j , pueden decaer en $\nu \phi^0$ y $l^- \phi^+$ o en sus antipartículas en el Universo temprano, y establecer una asimetría leptónica [7], que se convierte en la asimetría bariónica observada actualmente en el Universo a través de esfalerones en la transición de fase electrodébil [10]. Por lo tanto, las interacciones de la ecuación (7.1), junto con M_k , son responsables tanto de la masa de neutrinos como de la

bariogénesis. Lo que falta es simplemente materia oscura.

Para incluir la materia oscura, se ha reconocido recientemente [11] que un cambio muy simple de la ecuación (7.1) es todo lo que se necesita, es decir,

$$\mathcal{L}_Y = h_{ij} (\nu_i \eta^0 - l_i \eta^+) N_j + h.c.,$$

donde (η^0, η^+) es un segundo doblete escalar, y se ha asumido una simetría Z_2 exactamente conservada, bajo la cual (η^0, η^+) y N_j son impares, y todas las demás partículas son pares. Esto significa que $\langle \eta^0 \rangle = 0$ y N_j no son las parejas de masa de Dirac de ν_i , como en el modelo de seesaw canónico.

Podemos reescribir el anterior lagrangiano en notación de Dirac (4-componentes), para esto usamos:

$$\nu_i \rightarrow P_L \nu_i, \quad N_j \rightarrow P_R N_j,$$

donde $P_L = \frac{1-\gamma^5}{2}$ y $P_R = \frac{1+\gamma^5}{2}$ son los proyectores de quiralidad. el producto de espinores se reescribe usando el adjunto de Dirac ($\bar{N}_j = N_j^\dagger \gamma^0$):

$$\nu_i N_j \rightarrow \bar{N}_j P_L \nu_i, \quad l_i N_j \rightarrow \bar{N}_j P_L l_i,$$

el orden se invierte debido a la estructura de los espinores de Dirac y por lo tanto:

$$\mathcal{L}_Y = h_{ij} (\bar{N}_j P_L \nu_i \eta^0 - \bar{N}_j P_L l_i \eta^+) + h.c., \quad (7.2)$$

donde se supone que los acoplamientos de Yukawa son reales. Además, existe un término de Majorana para la masa de los neutrinos añadidos

$$\frac{1}{2} M_j \bar{N}_j^c N_j + h.c.,$$

el potencial de Higgs renormalizable más general de este modelo se puede escribir como:

$$\begin{aligned} V = & m_1^2 \Phi^\dagger \Phi + m_2^2 \eta^\dagger \eta + \frac{1}{2} \lambda_1 (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_3 (\Phi^\dagger \Phi) (\eta^\dagger \eta) \\ & + \lambda_4 (\Phi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \Phi) + \frac{1}{2} \lambda_5 [(\Phi^\dagger \eta)^2 + h.c.], \end{aligned} \quad (7.3)$$

la masa del neutrino proviene de una corrección cuántica de primer orden al propagador de neutrinos. En la base de masas después de EWSB, el mecanismo que se muestra en la figura 7.1 se representa de manera más fiel en la figura 7.2. La masa resultante se calcula exactamente considerando el mecanismo después de EWSM y dividiéndolo en dos diagramas. Esta división es una consecuencia de representar el nuevo doblete escalar como:

$$\eta^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_R + i \eta_I), \quad (7.4)$$

donde separamos la parte real e imaginaria de los componentes neutros del escalar.

El lagrangiano de Yukawa que consideraremos entonces se verá de la siguiente forma:

$$\mathcal{L}_Y = h_{ik} \left(\bar{N}_k P_L \nu_i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\eta_R^0 + i\eta_I^0) \right) - \bar{N}_k P_L l_i \eta^+ \right) + h.c.,$$

$$\mathcal{L}_Y = \frac{1}{\sqrt{2}} h_{ik} \bar{N}_k P_L \nu_i \eta_R^0 + \frac{i}{\sqrt{2}} h_{ik} \bar{N}_k P_L \nu_i \eta_I^0 - h_{ik} \bar{N}_k P_L l_i \eta^+ + h.c., \quad (7.5)$$

donde se cambió $j \rightarrow k$ por comodidad.

El diagrama de Feynman asociado a estas interacciones es el siguiente:

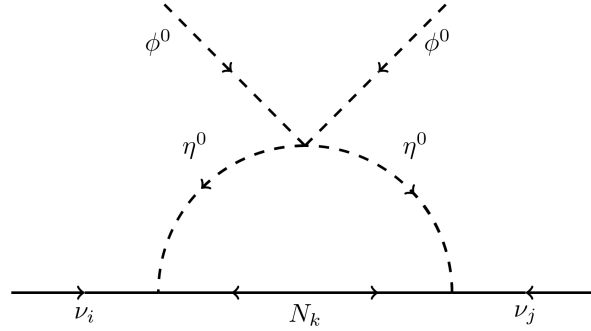


Figura 7.1: Mecanismo que genera masas de neutrinos según lo considerado por Ernest Ma.

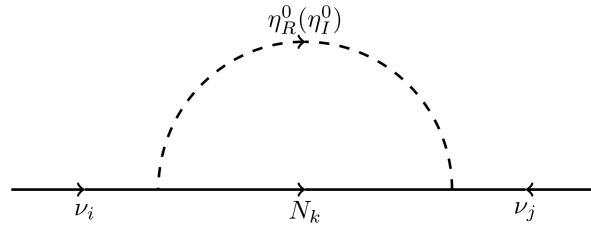


Figura 7.2: Representación del mecanismo de generación de masas con la inclusión de la parte real e imaginaria del campo escalar η^0

7.1. Reglas de Feynman para el modelo de Ma

Del Lagrangiano de Yukawa (7.5), identificamos las interacciones relevantes:

- Interacción con η_R^0

$$\frac{1}{\sqrt{2}} h_{ik} \bar{N}_k P_L \nu_i \eta_R,$$

- Interacción con η_I^0

$$\frac{i}{\sqrt{2}} h_{ik} \bar{N}_k P_L \nu_i \eta_I,$$

a partir de las interacciones anteriores de \mathcal{L}_Y , podemos extraer las reglas de Feynman para cada vértice y propagador.

1 Para vértices:

- Para η_R

$$i \left(\frac{1}{\sqrt{2}} h_{ik} \right) P_L = \frac{i}{\sqrt{2}} h_{ik} P_L$$

donde h_{ik} es el factor de acoplamiento de Yukawa y P_L es el proyector de chiralidad izquierda

- Para η_I

$$i \left(\frac{i}{\sqrt{2}} h_{ik} \right) P_L = -\frac{1}{\sqrt{2}} h_{ik} P_L,$$

donde aparece un factor i adicional debido a la naturaleza imaginaria de η_I

2 Para propagadores:

- Para los neutrinos derechos de Majorana N_k .

$$\frac{i}{k - M_k} = \frac{i(k + M_k)}{k^2 - M_k^2},$$

donde k es el momento interno del neutrino en el bucle y M_k es la masa de Majorana del neutrino derecho N_k .

- Para los escalares η_I y η_R : Ambos tienen propagadores escalares estándar:

$$\frac{i}{(p - k)^2 - m_R^2},$$

$$\frac{i}{(p - k)^2 - m_I^2},$$

donde p Es el momento externo, k Es el momento interno en el bucle, m_R es la masa del escalar η_R y m_I es la masa del escalar η_I

7.2. Cálculo de la matriz de masas

Recopilando la información anterior podemos escribir la **auto energía** ($-i\Sigma_{ij}^\nu$), esta describe la corrección al propagador del neutrino debido a las interacciones en el Lagrangiano. Debido a la parte real e imaginaria del campo escalar se tiene:

$$-i\Sigma_{ij}^\nu = \Sigma_{ij}^{\eta_R} + \Sigma_{ij}^{\eta_I},$$

así, la parte real nos queda:

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}^{\eta_R} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} h_{ik} P_L \right) \frac{i(\not{k} + M_k)}{k^2 - M_k^2} \left(\frac{i}{\sqrt{2}} h_{jk} P_L \right) \frac{i}{(p-k)^2 - m_R^2}, \\ \Sigma_{ij}^{\eta_R} &= \frac{1}{2} h_{ik} h_{jk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{P_L(\not{k} + M_k)P_L}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_R^2},\end{aligned}$$

mientras que la parte imaginaria

$$\begin{aligned}\Sigma_{ij}^{\eta_I} &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} h_{ik} P_L \right) \frac{i(\not{k} + M_k)}{k^2 - M_k^2} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} h_{jk} P_L \right) \frac{i}{(p-k)^2 - m_I^2}, \\ \Sigma_{ij}^{\eta_I} &= -\frac{1}{2} h_{ik} h_{jk} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{P_L(\not{k} + M_k)P_L}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_I^2},\end{aligned}$$

de manera que:

$$-i\Sigma_{ij}^{\nu} = \frac{1}{2} h_{ik} h_{jk} \left[\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{P_L(\not{k} + M_k)P_L}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_R^2} - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{P_L(\not{k} + M_k)P_L}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{(p-k)^2 - m_I^2} \right],$$

Consideremos dos observaciones:

- El resultado debe ser válido para cualquiera que sea el momento de los neutrinos, por lo tanto podemos establecer el momento en cero ($p \rightarrow 0$) sin pérdida de generalidad.
- La parte del numerador proporcional a \not{k} no contribuye debido a la estructura quiral de los vértices. En efecto, cada vértice contiene el proyector quiral P_L , por lo que en la integral aparece la combinación

$$P_L(\not{k} + M_k)P_L.$$

Utilizando las propiedades de los proyectores quirales

$$P_L^2 = P_L, \quad P_L \gamma^\mu P_L = 0,$$

se obtiene

$$P_L(\not{k} + M_k)P_L = P_L \not{k} P_L + M_k P_L^2 = M_k P_L.$$

Por lo tanto, el término proporcional a \not{k} se anula idénticamente y únicamente la parte proporcional a la masa de Majorana M_k contribuye a la autoenergía.

Además, el proyector quiral P_L puede factorizarse fuera de la integral, ya que no depende del momento del bucle. En consecuencia, la autoenergía posee una estructura quiral izquierda, de modo que la parte restante de la expresión corresponde únicamente a una función escalar

proveniente de la integral del bucle. Por simplicidad, en lo que sigue omitiremos escribir explícitamente el factor P_L , entendiendo que la autoenergía conserva esta estructura quiral. Por lo tanto:

$$-i\Sigma_{ij}^\nu = \frac{1}{2}h_{ik}h_{jk}M_k \left[\underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{k^2 - m_R^2}}_{I_R} - \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{k^2 - m_I^2}}_{I_I} \right], \quad (7.6)$$

definimos:

$$I_k = I_R - I_I, \quad (7.7)$$

y por tanto:

$$-i\Sigma_{ij}^\nu = \frac{1}{2}h_{ik}h_{jk}M_k I_k, \quad (7.8)$$

así, el paso siguiente es resolver las integrales, observe que son idénticas salvo que tienen masas distintas (m_R, m_I), de manera que bastará con resolver una sola de estas, la otra será equivalente.

Así, la integral del escalar real es:

$$I_R = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{k^2 - m_R^2},$$

nos será útil combinar denominadores, esto se logra mediante la fórmula de Feynman, de la siguiente manera. Supongamos que nos gustaría escribir $\frac{1}{AB}$ como un solo factor, entonces observamos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= \int_0^1 \frac{dx}{(x(A-B) + B)^2}, \\ \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= -\frac{1}{A-B} \frac{1}{x(A-B) + B} \Big|_0^1, \\ \int_0^1 \frac{dx}{(xA + (1-x)B)^2} &= \frac{1}{AB}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

la generalización de esto para incluir más denominadores es sencilla y tiene la forma:

$$\int_0^1 \prod_{i=1}^n dx_i \frac{\delta(1 - x_1 - \dots - x_n)}{(\sum_{i=1}^n x_i A_i)^n} = \prod_{i=1}^n \frac{1}{A_i},$$

identificando:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow k^2 - m_R^2, \\ B &\rightarrow k^2 - M_k^2, \end{aligned}$$

de manera que:

$$\frac{1}{k^2 - m_R^2} \frac{1}{k^2 - M_k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(x(k^2 - m_R^2) + (1-x)(k^2 - M_k^2))^2}, \quad (7.10)$$

reescribamos el denominador:

$$\begin{aligned} &= (x(k^2 - m_R^2) + (1-x)(k^2 - M_k^2))^2, \\ &= (xk^2 - xm_R^2 + k^2 - M_k^2 - xk^2 + xM_k^2)^2, \\ &= (k^2 + x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2)^2, \end{aligned} \quad (7.11)$$

de manera que:

$$\frac{1}{k^2 - m_R^2} \frac{1}{k^2 - M_k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 + x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2)^2}, \quad (7.12)$$

entonces, si definimos:

$$\Delta_R = -x(M_k^2 - m_R^2) + M_k^2, \quad (7.13)$$

tenemos:

$$\frac{1}{k^2 - m_R^2} \frac{1}{k^2 - M_k^2} = \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 - \Delta_R)^2}, \quad (7.14)$$

en resumen tenemos:

$$\begin{aligned} I_R &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{k^2 - m_R^2}, \\ I_R &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \int_0^1 \frac{dx}{(k^2 - \Delta_R)^2}, \\ I_R &= \int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2}, \end{aligned} \quad (7.15)$$

donde k es un cuadvivector cuyo cuadrado se puede expresar como el cuadrado de la componente temporal menos el cuadrado de la componente espacial, así que:

$$k^2 = (k^0)^2 - |\vec{k}|^2. \quad (7.16)$$

El siguiente paso es aplicar una transformación que nos permita transformar el espacio-tiempo Minkowskiano en el espacio euclidiano, la técnica que nos permite hacer esta transformación se le conoce como **Rotación de Wick**, el procedimiento requiere considerar el factor de Feynman $i\epsilon$ en el denominador de la integral del momento y hacer un análisis en los polos, sin embargo, esto ya se hizo en la sección (5.4.1), de manera que nos limitaremos a tomar los siguientes resultados:

$$k^0 = ik_E^0, \quad (7.17)$$

$$\vec{k} = \vec{k}_E, \quad (7.18)$$

(la nueva notación hace referencia a que se pasó y por ende se trabaja en el espacio euclidiano).

Ahora introducimos los resultados (7.17) y (7.18) en la ecuación (7.15), además es necesario considerar coordenadas polares de cuatro dimensiones, de manera que:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k dk^0}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2}, \quad (7.19)$$

como se había definido: $k^0 = ik_E^0 \rightarrow dk^0 = idk_E^0$, y también:

$$k^2 = (ik_E^0)^2 - |\vec{k}_E|^2 = -(k_E^0)^2 - |\vec{k}_E|^2 = -\underbrace{((k_E^0)^2 + |\vec{k}_E|^2)}_{k_E^2},$$

$$k^2 = -k_E^2, \quad (7.20)$$

por lo tanto la expresión (7.19) se reescribe de la forma:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2} = \int_0^1 dx \int \frac{d^3 k_E}{(2\pi)^4} \frac{idk_E^0}{(-k_E^2 - \Delta_R)^2},$$

donde se tuvo en cuenta el cambio al espacio Euclídeo en el diferencial $d^4 k = idk_E^0 d^3 k_E = id^4 k_E$, de manera que

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2} = i \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2}. \quad (7.21)$$

En este punto es crucial que Δ_R sea estrictamente positivo, pues después de la rotación de Wick el denominador queda en la forma $(k_E^2 + \Delta_R)^2$. Si Δ_R fuese negativo, el término $k_E^2 + \Delta_R$ podría anularse para algún valor de $k_E^2 \geq 0$, lo cual introduciría singularidades en el integrando euclidiano.

En efecto, usando la definición

$$\Delta_R = -x(M_k^2 - m_R^2) + M_k^2,$$

podemos reescribirla como

$$\Delta_R = M_k^2 - x(M_k^2 - m_R^2) = (1-x)M_k^2 + x m_R^2,$$

que es una combinación convexa de M_k^2 y m_R^2 para $x \in [0, 1]$. Dado que $M_k^2 > 0$ y $m_R^2 > 0$, se concluye que

$$\Delta_R > 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Por tanto, el denominador $(k_E^2 + \Delta_R)^2$ no se anula en el dominio euclidiano de integración y la integral está bien definida.

Se sabe que $d^4k_E = k_E^3 d\Omega dk_E$, siendo $d\Omega$ el ángulo sólido. Reescribimos la expresión (7.21) en términos del ángulo sólido:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2} = i \int_0^1 dx \left[\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{\Omega} d\Omega \int_0^{\infty} k_E^3 \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} \right], \quad (7.22)$$

una forma de calcular la integral en $d\Omega$ es generalizando esta a d -dimensiones, de manera que la integral en cuestión sería:

$$\int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} d\Omega_d \int_0^{\infty} k_E^{d-1} \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2}, \quad (7.23)$$

la integral del ángulo sólido se realizó en la sección (5.4.1), específicamente la ecuación (5.77), esta ecuación nos dice que el ángulo sólido en d -dimensiones es:

$$\int d\Omega_d = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)},$$

tomando este resultado reescribimos la ecuación (7.23), esta se reduce a lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\Omega} d\Omega_d \int_0^{\infty} k_E^{d-1} \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2}, \\ \int \frac{d^d k_E}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int_0^{\infty} k_E^{d-1} \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2}, \end{aligned} \quad (7.24)$$

La generalización de la ecuación (7.22) a d -dimensiones se hizo con el fin de calcular el ángulo sólido, debido a esto ya no es necesario esta reescritura, por lo tanto, regresamos a la dimensión inicial ($d = 4$). Entonces:

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{2\pi^{\frac{4}{2}}}{\Gamma\left(\frac{4}{2}\right)} \int_0^{\infty} k_E^3 \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2}, \quad (7.25)$$

simplicamos y tenemos en cuenta que $\Gamma(2) = 1! = 1$, por lo tanto:

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} = \frac{1}{8\pi^2} \left[\int_0^{\infty} k_E^3 \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} \right].$$

Ahora bien, para realizar la integral en dk_E es necesario aplicar el **método de regularización por corte**, este consiste en introducir el parámetro Λ , el cuál se le denomina **Cutoff**; este cutoff se introduce para evitar singularidades (como divergencias en el infinito o en puntos críticos) al truncar el dominio de integración. De esta manera, el límite superior de la integral pasará a ser el nuevo cutoff:

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} = \frac{1}{8\pi^2} \left[\int_0^{\Lambda} k_E^3 \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} \right],$$

para que el método sea consistente se deberá estudiar el comportamiento donde $\Lambda \rightarrow \infty$, por esta razón es necesario introducir este límite:

$$\int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} = \frac{1}{8\pi^2} \left[\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda k_E^3 \frac{dk_E}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} \right]. \quad (7.26)$$

Ahora si resolvemos la integral, para esto realizamos un cambio de variable, este será:

$$z = k_E^2 + \Delta_R,$$

por lo tanto su diferencial:

$$\begin{aligned} dz &= 2k_E dk_E, \\ dk_E &= \frac{dz}{2\sqrt{z - \Delta_R}}, \end{aligned}$$

mientras que los límites de integración pasan a ser

$$\text{Sí} \rightarrow k_E = \Lambda \rightarrow z = \Lambda^2 + \Delta_R,$$

$$\text{Sí} \rightarrow k_E = 0 \rightarrow z = \Delta_R,$$

entonces la integral entre corchetes de la ecuación (7.26) se reescribe y resuelve de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \frac{1}{2} \int_{\Delta_R}^{\Lambda^2 + \Delta_R} \frac{(z - \Delta_R)}{z^2} dz, \\ \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \frac{1}{2} \int_{\Delta_R}^{\Lambda^2 + \Delta_R} \left(\frac{1}{z} - \frac{\Delta_R}{z^2} \right) dz, \\ \int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \frac{1}{2} \left(\ln(z) + \frac{\Delta_R}{z} \right)_{\Delta_R}^{\Lambda^2 + \Delta_R}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

regresamos a las variables iniciales:

$$\int_0^\Lambda dk_E \frac{k_E^3}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) \right]_0^\Lambda, \quad (7.28)$$

de esta manera la ecuación (7.26) toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{2} \left[\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) \right) \right]_0^\Lambda \\ \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k_E^2 + \Delta_R)^2} &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) \right]_0^\Lambda, \end{aligned} \quad (7.29)$$

y por lo tanto la ecuación (7.22) nos queda:

$$\int_0^1 dx \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \Delta_R)^2} = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) \right]_0^\Lambda, \quad (7.30)$$

por comodidad no evaluaremos los límites de integración aún. Así concluimos con la primera solución para la integral I_R

$$I_R = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) \right]_0^\Lambda, \quad (7.31)$$

la integral I_I en (7.6) es equivalente puesto que se trata de la misma integral I_R con la diferencia de que la masa en cuestión ahora es m_I y por lo tanto $\Delta_I = -x(M_k^2 - m_I^2) + M_k^2$, de manera que:

$$I_I = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Delta_I}{k_E^2 + \Delta_I} + \ln(k_E^2 + \Delta_I) \right]_0^\Lambda. \quad (7.32)$$

Ahora bien, una vez calculado el valor de I_R e I_I retomamos la ecuación (7.7):

$$I_k = I_R - I_I,$$

$$I_k = \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{k^2 - m_R^2}}_{I_R} - \underbrace{\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - M_k^2} \frac{1}{k^2 - m_I^2}}_{I_I},$$

sustituimos el resultado de las integrales (7.31) y (7.32), y por lo tanto:

$$I_k = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) \right]_0^\Lambda - \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Delta_I}{k_E^2 + \Delta_I} + \ln(k_E^2 + \Delta_I) \right]_0^\Lambda, \quad (7.33)$$

se observa que la integral I_I tiene un signo relativo a I_R , esto implica que la divergencia se cancelará debido a la contribución del componente imaginario de η^0 . Observemos detenidamente esto.

Agrupando términos

$$I_k = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Delta_R}{k_E^2 + \Delta_R} - \frac{\Delta_I}{k_E^2 + \Delta_I} + \ln(k_E^2 + \Delta_R) - \ln(k_E^2 + \Delta_I) \right]_0^\Lambda, \quad (7.34)$$

$$I_k = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{k_E^2(\Delta_R - \Delta_I)}{(k_E^2 + \Delta_R)(k_E^2 + \Delta_I)} + \ln \left(\frac{k_E^2 + \Delta_R}{k_E^2 + \Delta_I} \right) \right]_0^\Lambda,$$

evaluamos en los límites de integración

$$I_k = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{\Lambda^2(\Delta_R - \Delta_I)}{(\Lambda^2 + \Delta_R)(\Lambda^2 + \Delta_I)} + \ln \left(\frac{\Lambda^2 + \Delta_R}{\Lambda^2 + \Delta_I} \right) - \ln \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_I} \right) \right],$$

el parámetro Λ me permite estudiar el comportamiento de esta ecuación en la medida que esta tiende al infinito, por lo tanto, aplicamos este límite, pero antes reescribimos la ecuación

$$I_k = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\frac{1}{\Lambda^2} \frac{(\Delta_R - \Delta_I)}{\left(1 + \frac{\Delta_R}{\Lambda^2}\right) \left(1 + \frac{\Delta_I}{\Lambda^2}\right)} + \ln \left(\frac{1 + \frac{\Delta_R}{\Lambda^2}}{1 + \frac{\Delta_I}{\Lambda^2}} \right) - \ln \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_I} \right) \right],$$

y por tanto:

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \frac{1}{\Lambda^2} \frac{(\Delta_R - \Delta_I)}{\left(1 + \frac{\Delta_R}{\Lambda^2}\right) \left(1 + \frac{\Delta_I}{\Lambda^2}\right)} + \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1 + \frac{\Delta_R}{\Lambda^2}}{1 + \frac{\Delta_I}{\Lambda^2}} \right) - \ln \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_I} \right) \right], \\ I_k &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[\underbrace{\frac{1}{\infty} \frac{(\Delta_R - \Delta_I)}{\left(1 + \frac{\Delta_R}{\infty}\right) \left(1 + \frac{\Delta_I}{\infty}\right)}}_0 + \underbrace{\ln \left(\frac{1+0}{1+0} \right)}_0 - \ln \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_I} \right) \right], \\ I_k &= \frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \left[-\ln \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_I} \right) \right], \end{aligned} \tag{7.35}$$

y entonces:

$$I_k = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{\Delta_R}{\Delta_I} \right). \tag{7.36}$$

El método de regularización por corte introducido en el cálculo permite controlar de manera explícita las divergencias ultravioletas al restringir el dominio de integración mediante un parámetro Λ , conocido como cutoff. Esta técnica facilita la evaluación de integrales y permite identificar cancelaciones físicas significativas, como en el caso anterior, donde la divergencia individual de las integrales I_R e I_I se elimina al combinarlas.

Es importante señalar que, en teorías con simetrías gauge, suele preferirse la regularización dimensional debido a que preserva dichas simetrías de manera más directa. No obstante, en el presente cálculo la cantidad físicamente relevante resulta finita: la combinación $I_R - I_I$ es independiente de Λ en el límite $\Lambda \rightarrow \infty$. Por lo tanto, el resultado final no depende del regulador empleado y confirma la consistencia del procedimiento, evidenciando que la predicción física relevante proviene de un término finito que depende de una razón logarítmica entre parámetros físicos.

Recordamos el valor de Delta:

$$\Delta_R = -x(M_k^2 - m_R^2) + M_k^2, \tag{7.37}$$

y también:

$$\Delta_I = -x(M_k^2 - m_I^2) + M_k^2, \tag{7.38}$$

sustituyendo (7.37) y (7.38) en (7.36) tenemos:

$$I_k = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{-x(M_k^2 - m_R^2) + M_k^2}{-x(M_k^2 - m_I^2) + M_k^2} \right),$$

$$I_k = -\frac{i}{16\pi^2} \int_0^1 dx \ln \left[\frac{x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2}{x(M_k^2 - m_I^2) - M_k^2} \right], \quad (7.39)$$

ahora solucionamos la integral

$$I_k = -\frac{i}{16\pi^2} \left[\int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) - \int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_I^2) - M_k^2) \right], \quad (7.40)$$

solucionemos la primera integral, la segunda es equivalente.

Necesitamos realizar el siguiente cambio de variable:

$$u = x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2 \quad \rightarrow \quad dx = \frac{du}{(M_k^2 - m_R^2)},$$

y los límites de integración:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \rightarrow \quad u = -M_k^2 \\ x = 1 & \quad \rightarrow \quad u = (M_k^2 - m_R^2) - M_k^2 = -m_R^2, \end{aligned}$$

así tenemos:

$$\int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) = \int_{-m_R^2}^{-M_k^2} \ln(u) \left(\frac{du}{(M_k^2 - m_R^2)} \right),$$

$$\int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) = \frac{1}{(M_k^2 - m_R^2)} \int_{-M_k^2}^{-m_R^2} \ln(u) du, \quad (7.41)$$

la integral en du se resuelve usando integración por partes, para simplificar cálculos tomamos el resultado:

$$\int \ln(u) du = u \ln(u) - u, \quad (7.42)$$

aplicando (7.42) a (7.41) tenemos:

$$\int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) = \frac{1}{(M_k^2 - m_R^2)} [u \ln(u) - u]_{-M_k^2}^{-m_R^2},$$

$$\int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) = \frac{1}{(M_k^2 - m_R^2)} \left[-m_R^2 \ln \left(\frac{m_R^2}{M_k^2} \right) - (M_k^2 - m_R^2) + (M_k^2 - m_R^2) \ln(-M_k^2) \right],$$

$$\int_0^1 dx \ln (x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) = \frac{-m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln \left(\frac{m_R^2}{M_k^2} \right) + \ln(-M_k^2) - 1, \quad (7.43)$$

por lo tanto la segunda integral de la ecuación (7.40) tomará la forma:

$$\int_0^1 dx \ln(x(M_k^2 - m_I^2) - M_k^2) = \frac{-m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) + \ln(-M_k^2) - 1, \quad (7.44)$$

reemplazamos los resultados (7.43) y (7.44) en la ecuación (7.40):

$$\begin{aligned} I_k &= -\frac{i}{16\pi^2} \left[\int_0^1 dx \ln(x(M_k^2 - m_R^2) - M_k^2) - \int_0^1 dx \ln(x(M_k^2 - m_I^2) - M_k^2) \right], \\ I_k &= -\frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{-m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) - \frac{-m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) + \ln(-M_k^2) - \ln(-M_k^2) - 1 + 1 \right], \\ I_k &= -\frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{-m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) - \frac{-m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) \right], \end{aligned}$$

por lo tanto:

$$I_k = -\frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) - \frac{m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) \right]. \quad (7.45)$$

La ecuación (7.45) es el resultado de resolver las integrales en el momento de loop de las interacciones con el escalar real η_R e imaginario η_I , que juntos forman el escalar η^0 . Una vez hecho esto retomamos la ecuación (7.8) y sustituimos (7.45):

$$\begin{aligned} -i\Sigma_{ij}^\nu &= \frac{1}{2} h_{ik} h_{jk} M_k I_k, \\ -i\Sigma_{ij}^\nu &= \frac{1}{2} h_{ik} h_{jk} M_k \left(-\frac{i}{16\pi^2} \left[\frac{m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) - \frac{m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) \right] \right), \\ \Sigma_{ij}^\nu &= \sum_k \frac{h_{ik} h_{jk} M_k}{32\pi^2} \left[\frac{m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) - \frac{m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) \right]. \quad (7.46) \end{aligned}$$

Las correcciones cuánticas que describen la interacción del neutrino nos llevó a hacer el cálculo de la auto-energía (Σ_{ij}^ν), sin embargo, por simplicidad del cálculo se consideró $|\vec{p}| = 0$, Esto significa que, en el límite cuando $|\vec{p}| \rightarrow 0$, los efectos dinámicos relacionados con el movimiento (como el momento \vec{p}) desaparecen, y la energía de la partícula se relaciona únicamente con su masa en reposo. Por tanto, la matriz de masa $(\mathcal{M})_{ij}$ describe la masa efectiva de los neutrinos, que es independiente del momento.

$$\Sigma_{ij}^\nu(p \rightarrow 0) = (\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik} h_{jk} M_k}{32\pi^2} \left[\frac{m_I^2}{(M_k^2 - m_I^2)} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) - \frac{m_R^2}{(M_k^2 - m_R^2)} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) \right], \quad (7.47)$$

y para estar en concordancia con el artículo de Ma, factorizamos un menos en los denominadores $(M_k^2 - m_R^2)$ y $(M_k^2 - m_I^2)$, lo que nos lleva a concluir con la expresión:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik} h_{jk} M_k}{32\pi^2} \left[\frac{m_R^2}{m_R^2 - M_k^2} \ln\left(\frac{m_R^2}{M_k^2}\right) - \frac{m_I^2}{m_I^2 - M_k^2} \ln\left(\frac{m_I^2}{M_k^2}\right) \right]. \quad (7.48)$$

7.3. Análisis de la matriz de masa

En la sección anterior se determinó la matriz de masas producto de un cálculo de la autoenergía, ahora analizaremos esta matriz de masas con el fin de obtener resultados relevantes para la física de neutrinos.

Dada la matriz de masas:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[\frac{m_R^2}{m_R^2 - M_k^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{M_k^2} \right) - \frac{m_I^2}{m_I^2 - M_k^2} \ln \left(\frac{m_I^2}{M_k^2} \right) \right]. \quad (7.49)$$

Mediante el potencial escalar de Higgs renormalizable (7.3) es posible determinar los valores de las masas m_R , y m_I :

$$m^2(\eta_R^0) = m_R^2 = m_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)v^2, \quad (7.50)$$

$$m^2(\eta_I^0) = m_I^2 = m_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5)v^2. \quad (7.51)$$

donde los términos m_2^2 representan la masa intrínseca del doblete inerte η ; mientras que las constantes de acoplamiento λ_3 , λ_4 y λ_5 , son producto del rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil (cuando Φ adquiere un valor esperado en el vacío ($\Phi = \frac{v}{\sqrt{2}}$)) (Éste cálculo se hace con más detalle en el **apéndice A** (10)).

Algo a tener muy en cuenta es que el acoplamiento λ_5 rompe la degeneración entre η_R^0 y η_I^0 . Esa pequeña diferencia de masas es esencial, puesto que, suponiendo que no haya diferencia, como por ejemplo cuando $\lambda_5 = 0 \rightarrow m_R^2 = m_I^2$, se termina obteniendo:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[\frac{m_I^2}{m_I^2 - M_k^2} \ln \left(\frac{m_I^2}{M_k^2} \right) - \frac{m_I^2}{m_I^2 - M_k^2} \ln \left(\frac{m_I^2}{M_k^2} \right) \right] = 0.$$

Mostrando que sin esta pequeña diferencia de masas, el mecanismo de generación de masas sería imposible.

Ahora bien, usando estos valores de m_R^2 y m_I^2 , es posible reemplazarlos en la matriz de masas (7.49), sin embargo, por simplicidad en los cálculos, se simplifica un poco esta expresión:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[\frac{m_R^2}{-M_k^2} \ln \left(\frac{m_R^2}{M_k^2} \right) - \frac{m_I^2}{-M_k^2} \ln \left(\frac{m_I^2}{M_k^2} \right) \right], \\ (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_h \frac{h_{ik}h_{jk}}{32\pi^2 M_k} \left[m_I^2 \ln \left(\frac{m_I^2}{M_k^2} \right) - m_R^2 \ln \left(\frac{m_R^2}{M_k^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.52)$$

donde se consideró a M_k mucho más grande que m_R y m_I .

La expresión anterior es mucho más sencilla de manejar, lo que nos permite reemplazar los valores de m_R^2 y m_I^2 , pero antes, redefinamos algunos términos:

$$z = \frac{m_R^2 + m_I^2}{2}, \quad \text{y} \quad \epsilon = m_I^2 - m_R^2 = -\lambda_5 v^2, \quad (7.53)$$

donde z vendría siendo el promedio del cuadrado de las masas y ϵ es la diferencia. Usando estas relaciones reescribimos el cuadrado de las masas de los escalares:

$$m_I^2 = z + \frac{\epsilon}{2}, \quad (7.54)$$

$$m_R^2 = z - \frac{\epsilon}{2}. \quad (7.55)$$

Reemplazamos estos resultados en la matriz de masas:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}}{32\pi^2 M_k} \left[\left(z + \frac{\epsilon}{2} \right) \ln \left(\frac{z + \frac{\epsilon}{2}}{M_k^2} \right) - \left(z - \frac{\epsilon}{2} \right) \ln \left(\frac{z - \frac{\epsilon}{2}}{M_k^2} \right) \right], \quad (7.56)$$

Para poder realizar una serie de Taylor es necesario reescribir la matriz de masas y tener en cuenta algunos aspectos. Reescribiendo:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[\left(\frac{z}{M_k^2} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{M_k^2} \right) \ln \left(\frac{z}{M_k^2} + \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{M_k^2} \right) - \left(\frac{z}{M_k^2} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{M_k^2} \right) \ln \left(\frac{z}{M_k^2} - \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{M_k^2} \right) \right] \quad (7.57)$$

definiendo $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{M_k^2}$ y $\tilde{z} = \frac{z}{M_k^2}$, de manera que:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[\left(\tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \ln \left(\tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) - \left(\tilde{z} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \ln \left(\tilde{z} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \right]. \quad (7.58)$$

Se aprecia que tanto $\tilde{\epsilon}$ como \tilde{z} son cantidades adimensionales y además, muy pequeñas, esto dado que las masas de Majorana M_k son muy grandes a comparación con las masas de m_R y m_I , quienes definen a ϵ y z . En este orden de ideas, haremos una expansión en serie de Taylor, resaltando la idea de que $\tilde{\epsilon}$ es muy pequeño, lo que me permitirá truncar la serie, de esta manera tenemos que:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} [f(\tilde{\epsilon})], \\ (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[f(0) + f'(0)\tilde{\epsilon} + f''(0)\frac{\tilde{\epsilon}^2}{2} + \Theta(\tilde{\epsilon}^3) \right], \end{aligned} \quad (7.59)$$

donde:

$$f(\tilde{\epsilon}) = \left[\left(\tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \ln \left(\tilde{z} + \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) - \left(\tilde{z} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \ln \left(\tilde{z} - \frac{1}{2}\tilde{\epsilon} \right) \right] \quad (7.60)$$

de manera que:

$$f(0) = (z) \ln \left(\frac{z}{M_k^2} \right) - (z) \ln \left(\frac{z}{M_k^2} \right) = 0 \quad (7.61)$$

por otro lado:

$$f'(0) = \ln(\tilde{z}) + 1, \quad (7.62)$$

en general:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[(\ln(\tilde{z}) + 1) \tilde{\epsilon} - \frac{\tilde{\epsilon}^3}{24\tilde{z}^2} - \frac{\tilde{\epsilon}^5}{320\tilde{z}^4} + \dots \right]. \quad (7.63)$$

truncando la serie en el segundo término tenemos:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} [(\ln(\tilde{z}) + 1) \tilde{\epsilon}]. \quad (7.64)$$

reescribiendo a las variables anteriores $\tilde{\epsilon} = \frac{\epsilon}{M_k^2}$ y $\tilde{z} = \frac{z}{M_k^2}$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}M_k}{32\pi^2} \left[\left(\ln\left(\frac{z}{M_k^2}\right) + 1 \right) \frac{\epsilon}{M_k^2} \right]. \\ (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}}{32\pi^2} \frac{\epsilon}{M_k} \left[\ln\left(\frac{z}{M_k^2}\right) + 1 \right]. \end{aligned} \quad (7.65)$$

y reescribiendo en las variables originales: $z = \frac{m_R^2 + m_I^2}{2}$, $\epsilon = -\lambda_5 v^2$, se tiene:

$$\begin{aligned} (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}}{32\pi^2} \frac{(-\lambda_5 v^2)}{M_k} \left[\ln\left(\frac{m_R^2 + m_I^2}{2M_k^2}\right) + 1 \right] \\ (\mathcal{M})_{ij} &= \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_k} \left[-\ln\left(\frac{m_R^2 + m_I^2}{2M_k^2}\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (7.66)$$

por propiedades de logaritmos:

$$(\mathcal{M})_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik}h_{jk}\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_k} \left[\ln\left(\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2}\right) - 1 \right], \quad (7.67)$$

introduciendo la delta de Kronecker δ_{kl} , la expresión anterior puede reescribirse como

$$(\mathcal{M})_{ij} \approx \sum_{k,l} h_{ik} \left(\frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_l} \left[\ln\left(\frac{2M_l^2}{m_R^2 + m_I^2}\right) - 1 \right] \delta_{kl} \right) h_{jl}. \quad (7.68)$$

Usando la relación de transposición

$$(h^T)_{lj} = h_{jl}, \quad (7.69)$$

definimos la matriz diagonal D_{kl} como

$$D_{kl} = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_l} \left[\ln\left(\frac{2M_l^2}{m_R^2 + m_I^2}\right) - 1 \right] \delta_{kl}, \quad (7.70)$$

de esta manera, la matriz de masa de neutrinos puede escribirse como

$$(\mathcal{M})_{ij} \approx \sum_{k,l} h_{ik} D_{kl} (h^T)_{lj}, \quad (7.71)$$

equivalentemente, en notación matricial,

$$\mathcal{M} \approx h D h^T, \quad (7.72)$$

observemos que para despejar la matriz diagonal D no es suficiente multiplicar únicamente por la matriz transpuesta, ya que en general

$$h^T h \neq I, \quad (7.73)$$

por esta razón, es necesario asumir que la matriz de Yukawas h es invertible, es decir,

$$\det(h) \neq 0, \quad (7.74)$$

de modo que exista una matriz inversa h^{-1} tal que

$$h^{-1} h = h h^{-1} = I. \quad (7.75)$$

Multiplicando la ecuación matricial anterior por h^{-1} desde la izquierda y por $(h^T)^{-1}$ desde la derecha, obtenemos

$$h^{-1} \mathcal{M} (h^T)^{-1} \approx h^{-1} h D h^T (h^T)^{-1}. \quad (7.76)$$

Utilizando las propiedades de la matriz inversa,

$$h^{-1} h = I, \quad h^T (h^T)^{-1} = I, \quad (7.77)$$

se obtiene finalmente

$$h^{-1} \mathcal{M} (h^T)^{-1} \approx D, \quad (7.78)$$

en notación de índices, la expresión anterior puede escribirse como

$$\sum_{i,j} h_{ki}^{-1} (\mathcal{M})_{ij} (h^T)_{jl}^{-1} \approx D_{kl}. \quad (7.79)$$

Así es posible expresar la matriz D_{kl} de forma matricial en términos de M_1 , M_2 y M_3 , donde se evidencia una matriz 3×3 diagonal:

$$D_{kl} = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{M_1} \left[\ln \left(\frac{2M_1^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \left[\ln \left(\frac{2M_2^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M_3} \left[\ln \left(\frac{2M_3^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right] \end{pmatrix},$$

y por la relación (7.79):

$$\sum_{i,j} h_{ki}^{-1} (\mathcal{M})_{ij} (h^T)_{jl}^{-1} = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{M_1} \left[\ln \left(\frac{2M_1^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right] & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{M_2} \left[\ln \left(\frac{2M_2^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{M_3} \left[\ln \left(\frac{2M_3^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right] \end{pmatrix}.$$

de manera que los autovalores de esta matriz terminarán siendo los valores de las masas de los neutrinos. Por lo tanto:

$$m_1 = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_1} \left[\ln \left(\frac{2M_1^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right], \quad (7.80)$$

$$m_2 = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_2} \left[\ln \left(\frac{2M_2^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right], \quad (7.81)$$

$$m_3 = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_3} \left[\ln \left(\frac{2M_3^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right], \quad (7.82)$$

donde $m_1 = m_e$, $m_2 = m_\mu$ y $m_3 = m_\tau$ son los autovalores y las masas de los neutrinos.

Ahora corresponde hacer un análisis de las ecuaciones anteriores. Si se observa, cada una de las masas dependen parámetros libres, estos serían λ_5 , m_R , m_I y M_k . Podemos analizar detalladamente cuán relevante e influyente pueden llegar a ser cada uno de estos parámetros y sacar una debida conclusión.

Para simplificar cálculos reescribiremos las tres ecuaciones anteriores ((7.80), (7.81), (7.82)) en una sola:

$$m_k = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_k} \left[\ln \left(\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right], \quad (7.83)$$

donde $k = 1, 2, 3$.

Es así como se hace un análisis detallado de esta expresión (7.83), destacando las siguientes características:

Dependencia con M_k

La expresión para m_k es:

$$m_k = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_k} \left[\ln \left(\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right]. \quad (7.84)$$

Comportamiento para M_k grande:

- El argumento del logaritmo $\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2}$ crece cuadráticamente con M_k , pero el logaritmo suaviza esta dependencia.
- El término dominante es $\frac{\ln(M_k^2)}{M_k} = \frac{2\ln(M_k)}{M_k}$, que **decrece** cuando M_k aumenta, porque el denominador M_k crece más rápido que el numerador $\ln(M_k)$.

Comportamiento para M_k pequeño (pero $M_k \gg m_R, m_I$):

- El argumento del logaritmo es grande, pero $\frac{1}{M_k}$ domina, haciendo que m_k **aumente** cuando M_k disminuye.
- Si M_k se acerca a $\sqrt{m_R^2 + m_I^2}$, el logaritmo tiende a $\ln(2)$, pero el término $\frac{1}{M_k}$ sigue siendo significativo.

Dependencia con m_R y m_I

El término relevante es el argumento del logaritmo:

$$\ln \left(\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2} \right). \quad (7.85)$$

Comportamiento para m_R o m_I grandes:

- Si m_R o m_I aumentan, el denominador $m_R^2 + m_I^2$ crece, y el argumento del logaritmo $\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2}$ disminuye.
- El logaritmo se vuelve más negativo, pero su contribución está atenuada por la naturaleza logarítmica.

Comportamiento para m_R o m_I pequeños:

- Si m_R y m_I son pequeños comparados con M_k , el argumento del logaritmo es grande, y $\ln \left(\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2} \right)$ es positivo y significativo.
- Sin embargo, como el logaritmo crece muy lentamente, m_k no es extremadamente sensible a cambios en m_R o m_I .

Conclusión:

De los análisis anteriores podemos concluir los siguientes aspectos

- m_k **disminuye** cuando m_R o m_I aumentan, pero la dependencia es **débil** (logarítmica).
- La masa m_k es mucho más sensible a cambios en M_k que a cambios en m_R o m_I .
- m_k **disminuye** cuando M_k aumenta (debido a la dominancia de $\frac{1}{M_k}$).
- La dependencia no es lineal ni inversamente proporcional pura, porque el logaritmo modula suavemente la relación.

Capítulo 8

Resultados

8.1. Estimación numérica de las masas de los neutrinos

A manera de ejemplo, se busca obtener una estimación numérica de las masas de los neutrinos en el marco del modelo escotogénico; para esto, se consideran los siguientes valores típicos para los parámetros del modelo:

Variable	Valor típico	Unidades	Origen
δm_{21}^2	7.39×10^{-5}	eV ²	Resultado del experimento KamLAND [1].
δm_{31}^2	2.528×10^{-3}	eV ²	Datos combinados de los experimentos Daya Bay, RENO y Double Chooz [2].
v	246	GeV	Valor esperado del Higgs en el vacío (VEV).
λ_5	1×10^{-6}	Adimensional	Acoplamiento del término $\lambda_5(\Phi^\dagger\eta)^2$ en el potencial escalar.
m_R	≈ 400	GeV	Valor hipotético utilizado para la estimación numérica.
m_I	≈ 400	GeV	Valor hipotético utilizado para la estimación numérica.

Las masas m_R y m_I no están fijadas directamente por observaciones experimentales. Sin embargo, límites indirectos provenientes de búsquedas en colisionadores sugieren que, si estos estados escalares existen en la escala electrodébil, sus masas deberían ser mayores que aproximadamente 200 GeV.

Aunque para la estimación numérica se toma $m_R \approx m_I \approx 400$ GeV, estrictamente ambas masas no son exactamente degeneradas. Su diferencia está gobernada por

$$m_R^2 - m_I^2 = \lambda_5 v^2, \quad (8.1)$$

de modo que, dado que λ_5 es pequeño, la separación entre ambas masas es muy débil. En el modelo escotogénico, la masa de los neutrinos ligeros se genera a nivel de un loop y puede escribirse aproximadamente como

$$m_1 = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_1} \left[\ln \left(\frac{2M_1^2}{3.2 \times 10^5 \text{GeV}^2} \right) - 1 \right], \quad (8.2)$$

$$m_2 = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_2} \left[\ln \left(\frac{2M_2^2}{3.2 \times 10^5 \text{GeV}^2} \right) - 1 \right], \quad (8.3)$$

$$m_3 = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_3} \left[\ln \left(\frac{2M_3^2}{3.2 \times 10^5 \text{GeV}^2} \right) - 1 \right]. \quad (8.4)$$

Bajo las simplificaciones adoptadas en este trabajo, estas expresiones dependen únicamente de las masas de Majorana M_k .

En el modelo escotogénico completo, la matriz de masas de los neutrinos también depende de los acoplamientos de Yukawa h_{ik} , los cuales conectan los leptones del Modelo Estándar con los fermiones de Majorana pesados. De manera general, esta matriz puede escribirse como

$$(m_\nu)_{ij} = \sum_k \frac{h_{ik} h_{jk} M_k}{16\pi^2} F(M_k, m_R, m_I),$$

donde $F(M_k, m_R, m_I)$ es la función de loop que depende de las masas de los escalares neutros del doblete inerte.

No obstante, con el fin de obtener una estimación de orden de magnitud para las masas involucradas, en este trabajo se utiliza una aproximación efectiva en la que los factores $h_{ik} h_{jk}$ se consideran absorbidos en un coeficiente global. De esta manera, la dependencia principal de las masas de los neutrinos queda determinada por las masas de Majorana M_k y por los parámetros del potencial escalar, lo que conduce a las expresiones aproximadas utilizadas en las ecuaciones (8.2), (8.3) y (8.4).

Para reproducir las diferencias de masa observadas experimentalmente se fija primero el valor del neutrino más ligero:

$$\boxed{m_1 = 1 \times 10^{-3} \text{eV} = 1 \times 10^{-12} \text{GeV}} \quad (8.5)$$

tomado como referencia de [4]. Este establece una jerarquía normal

$$m_1 < m_2 < m_3.$$

A partir de las diferencias de masa medidas experimentalmente se obtienen

$$\begin{aligned}\delta m_{21}^2 &= m_2^2 - m_1^2 = 7.39 \times 10^{-5} \text{eV}^2, \\ m_2 &= \sqrt{7.39 \times 10^{-5} + (10^{-3})^2} \text{eV}, \\ \boxed{m_2 \approx 8.65 \times 10^{-3} \text{eV} = 8.65 \times 10^{-12} \text{GeV}}.\end{aligned}\tag{8.6}$$

$$\begin{aligned}\delta m_{31}^2 &= m_3^2 - m_1^2 = 2.528 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \\ m_3 &= \sqrt{2.528 \times 10^{-3} + (10^{-3})^2} \text{eV}, \\ \boxed{m_3 \approx 5.03 \times 10^{-2} \text{eV} = 5.03 \times 10^{-11} \text{GeV}}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

Se verifica entonces la jerarquía

$$1 \times 10^{-12} \text{GeV} < 8.65 \times 10^{-12} \text{GeV} < 5.03 \times 10^{-11} \text{GeV}.$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (8.2), (8.3) y (8.4) se obtiene el sistema

$$1 \times 10^{-12} \text{GeV} = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_1} \left[\ln \left(\frac{2M_1^2}{3.2 \times 10^5 \text{GeV}^2} \right) - 1 \right],\tag{8.8}$$

$$8.65 \times 10^{-12} \text{GeV} = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_2} \left[\ln \left(\frac{2M_2^2}{3.2 \times 10^5 \text{GeV}^2} \right) - 1 \right],\tag{8.9}$$

$$5.03 \times 10^{-11} \text{GeV} = \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_3} \left[\ln \left(\frac{2M_3^2}{3.2 \times 10^5 \text{GeV}^2} \right) - 1 \right].\tag{8.10}$$

Estas ecuaciones no admiten una solución analítica simple, por lo que se resolvieron numéricamente utilizando el software **Wolfram Mathematica**. Los valores obtenidos para las masas de Majorana son

$$\boxed{M_1 \approx 6.15 \times 10^9 \text{ GeV}}\tag{8.11}$$

$$\boxed{M_2 \approx 6.08 \times 10^8 \text{ GeV}}\tag{8.12}$$

$$\boxed{M_3 \approx 9.01 \times 10^7 \text{ GeV}}\tag{8.13}$$

Estos valores corresponden aproximadamente a

$$M_1 \sim 10^9 \text{ GeV}, \quad M_2 \sim 10^8 \text{ GeV}, \quad M_3 \sim 10^7 \text{ GeV}.$$

Equivalentemente,

$$M_1 \sim 10^6 \text{ TeV}, \quad M_2 \sim 10^5 \text{ TeV}, \quad M_3 \sim 10^4 \text{ TeV}.$$

Las masas de los neutrinos ligeros (m_1, m_2, m_3) están fuertemente determinadas por las masas de los fermiones pesados de Majorana (M_1, M_2, M_3), como se evidencia en las ecuaciones (8.11), (8.12) y (8.13). Los resultados numéricos obtenidos muestran que:

1. **Dependencia inversa y logarítmica:** Las masas de los neutrinos m_k presentan una dependencia inversa respecto a las masas de Majorana M_k , modulada por un término logarítmico que suaviza esta relación. En la práctica, esto implica que neutrinos más ligeros se asocian con escalas de Majorana más elevadas, mientras que al disminuir M_k , las masas efectivas m_k crecen de manera no lineal. Para ilustrar este comportamiento, en la Figura 8.1 se representa la variación de las masas de los neutrinos ligeros en función de las masas de Majorana, junto con los valores de referencia utilizados en este trabajo.

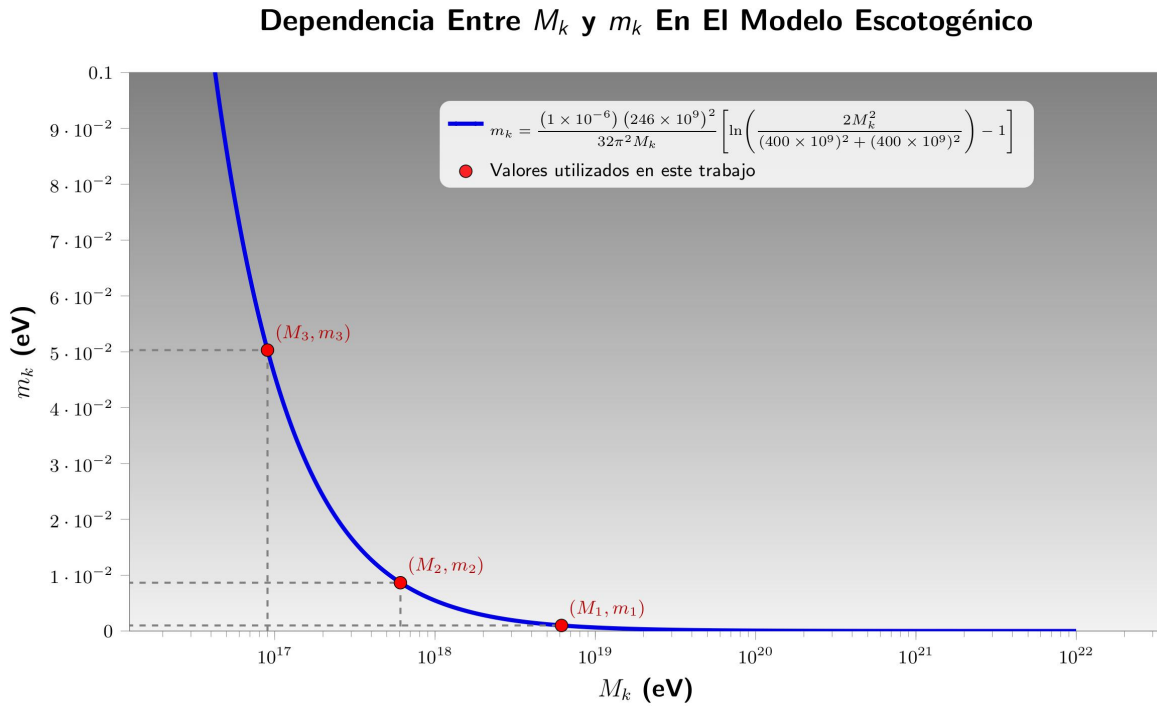


Figura 8.1: Relación entre las masas de los neutrinos ligeros m_k y las masas de Majorana M_k en el marco del mecanismo escotogénico.

La curva muestra el carácter decreciente de la función, con una dependencia modulada por un término logarítmico que desvía el comportamiento puramente hiperbólico. Los puntos marcados en rojo corresponden a los valores de ejemplo discutidos en el texto, evidenciando cómo masas de neutrinos del orden de 10^{-3} a 10^{-2} eV se asocian con escalas de Majorana comprendidas aproximadamente entre 10^7 y 10^9 GeV.

2. **Jerarquía de masas:** La jerarquía $M_1 > M_2 > M_3$ (con M_1 siendo la más pesada) está directamente relacionada con la jerarquía observada en los neutrinos ligeros ($m_1 < m_2 < m_3$). Esto sugiere que la estructura de masas de los neutrinos en el sector ligero refleja la jerarquía presente en el sector pesado de Majorana.

3. **Escala de M_k y el mecanismo de seesaw:** Los valores obtenidos para M_k se encuentran aproximadamente en el rango

$$M_3 \sim 10^7 \text{ GeV}, \quad M_2 \sim 10^8 \text{ GeV}, \quad M_1 \sim 10^9 \text{ GeV},$$

lo que equivale aproximadamente a escalas entre 10^4 y 10^6 TeV. Estas masas extremadamente grandes son necesarias para explicar la pequeñez de las masas de los neutrinos ligeros a través del mecanismo de seesaw radiativo. En este modelo, la escala electrodébil ($v = 246$ GeV) y el acoplamiento λ_5 (supuesto aquí como 1×10^{-6}) no son suficientes para generar masas de neutrinos en el rango observado sin la presencia de fermiones pesados. Las masas de Majorana actúan como un divisor en las ecuaciones (8.8), (8.9) y (8.10), suprimiendo las masas de los neutrinos ligeros.

4. Implicaciones físicas:

- **Origen de la masa de los neutrinos:** La necesidad de valores grandes de M_k respalda la idea de que los neutrinos ligeros adquieren su masa a través de un mecanismo de seesaw radiativo, donde su pequeñez se explica por la presencia de una escala alta de nueva física asociada a fermiones de Majorana.
- **Escala de nueva física:** Los valores de M_k obtenidos están muy por encima de la escala accesible en colisionadores actuales como el LHC (que alcanza aproximadamente 10^4 GeV), lo que implica que estos fermiones de Majorana no serían detectables directamente en experimentos actuales. Sin embargo, su existencia podría inferirse indirectamente a través de observables relacionados con la fenomenología de neutrinos o procesos de violación de número leptónico.
- **Jerarquía y parámetros del modelo:** La diferencia entre M_1 , M_2 y M_3 sugiere que el sector de Majorana podría estar gobernado por mecanismos adicionales (por ejemplo, simetrías o estructuras específicas en los acoplamientos) que expliquen dicha jerarquía de masas.

5. Limitaciones y consideraciones:

- Los valores numéricos aquí calculados dependen críticamente de supuestos como $\lambda_5 = 1 \times 10^{-6}$ y $m_R = m_I \approx 400$ GeV. Cambios en estos parámetros podrían modificar significativamente los valores obtenidos para M_k .
- La ausencia de una solución analítica simple para M_k resalta la complejidad del modelo y la necesidad de métodos numéricos para explorar su espacio de parámetros.

En resumen, los resultados obtenidos refuerzan la conexión entre las masas de los neutrinos ligeros y las masas de Majorana, destacando el papel crucial de la alta escala de M_k para generar masas de neutrinos compatibles con los datos experimentales. Esto respalda el mecanismo de seesaw radiativo como una explicación natural para la pequeñez de las masas de los neutrinos y orienta futuras investigaciones hacia la búsqueda de señales indirectas de nueva física más allá del Modelo Estándar.

Capítulo 9

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo de grado permitió adquirir un conocimiento profundo sobre diversas áreas de la física de partículas, abarcando desde conceptos fundamentales de la electrodinámica cuántica hasta la teoría de generación de masas de neutrinos en modelos más allá del Modelo Estándar. Inicialmente, fue necesario familiarizarse con el formalismo de diagramas de Feynman para el cálculo de correcciones radiativas a un loop, así como con técnicas de regularización, entre las que se destacó la regularización por corte, utilizada para manejar posibles divergencias en integrales de momento. Esta base metodológica fue esencial para abordar los cálculos que condujeron a la obtención de la matriz de masas de neutrinos en el contexto del modelo escotogénico propuesto por Ernest Ma [11].

La investigación permitió comprender la naturaleza especial de los neutrinos y la necesidad de mecanismos que justifiquen la pequeñez extrema de sus masas en comparación con otras partículas fermiónicas. Se revisó el mecanismo seesaw tradicional, el cual explica dicha pequeñez mediante la introducción de fermiones de Majorana extremadamente pesados que suprimen las masas de los neutrinos ligeros. En el modelo escotogénico, esta idea se complementa con un carácter radiativo: la masa de los neutrinos no se genera a nivel árbol, sino únicamente mediante correcciones a un loop, como se expresa en la ecuación general (7.48), la cual describe cómo las interacciones con el nuevo doblete escalar inerte η producen la matriz de masas $(\mathcal{M})_{ij}$.

Mediante un análisis detallado, se logró reescribir esta matriz en la forma aproximada de la ecuación (??), que resalta la dependencia explícita de parámetros fundamentales como el acoplamiento escalar λ_5 , el valor esperado en el vacío del Higgs v , y las masas pesadas de Majorana M_k . Esta expresión también incluye un término logarítmico que regula la relación entre las escalas de masa involucradas:

$$m_k \propto \frac{\lambda_5 v^2}{32\pi^2 M_k} \left[\ln \left(\frac{2M_k^2}{m_R^2 + m_I^2} \right) - 1 \right]. \quad (9.1)$$

La presencia de este término logarítmico constituye un rasgo esencial del modelo, ya que introduce una dependencia no lineal que suaviza la relación inversa directa entre las masas de neutrinos ligeros m_k y las masas pesadas M_k . De esta manera, la pequeñez de m_k se entiende

como resultado de un balance entre una gran escala de supresión (las M_k) y un efecto de corrección radiativa, sin necesidad de ajustes extremos de los parámetros de acoplamiento.

Los cálculos realizados permitieron establecer valores explícitos para las masas de los neutrinos ligeros, consistentes con observaciones experimentales:

$$m_1 = 1.0 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad m_2 \approx 8.65 \times 10^{-3} \text{ eV}, \quad m_3 \approx 5.03 \times 10^{-2} \text{ eV}.$$

Para reproducir estas magnitudes fue necesario asumir masas de Majorana significativamente grandes:

$$M_1 \approx 6.15 \times 10^9 \text{ GeV}, \quad M_2 \approx 6.08 \times 10^8 \text{ GeV}, \quad M_3 \approx 9.01 \times 10^7 \text{ GeV}.$$

Estos valores establecen una jerarquía $M_1 > M_2 > M_3$, la cual se refleja de manera inversa en la jerarquía observada en los neutrinos ligeros ($m_1 < m_2 < m_3$). Esta relación confirma la coherencia interna del mecanismo seesaw radiativo y demuestra que la estructura de masas en el sector pesado determina directamente las propiedades del sector ligero.

El acoplamiento λ_5 resultó ser un parámetro crucial, ya que controla la interacción entre el doblete escalar inerte y el Higgs del Modelo Estándar. En este trabajo, se adoptó un valor de $\lambda_5 = 1 \times 10^{-6}$, coherente con el rango 10^{-2} a 10^{-10} mencionado en la literatura. Dicho valor permitió obtener masas de neutrinos en el orden correcto (10^{-3} a 10^{-2} eV) al combinarse con la escala electrodébil $v = 246$ GeV y con las masas pesadas de Majorana. Se observa que la pequeñez de las masas de los neutrinos no se debe únicamente a M_k , sino también al valor de λ_5 y al efecto logarítmico que modula la supresión.

Un resultado adicional de gran relevancia es que la matriz de masas obtenida concuerda con la estructura propuesta originalmente en la ecuación (4) de [11], demostrando que el modelo escotogénico ofrece una descripción autoconcoherente de las masas de neutrinos y su jerarquía. Además, la formulación analítica derivada constituye un punto de partida para explorar implicaciones más amplias, como la conexión del modelo con la materia oscura, ya que el doblete escalar inerte y los fermiones pesados introducidos en el modelo pueden ofrecer candidatos viables para partículas de materia oscura estable.

En conclusión, este trabajo ha mostrado que la pequeñez de las masas de los neutrinos puede entenderse como consecuencia natural de un mecanismo seesaw radiativo dentro del modelo escotogénico de Ernest Ma. La introducción de un nuevo doblete escalar, la existencia de fermiones de Majorana con masas en el rango aproximado 10^7 – 10^9 GeV, y la presencia de correcciones logarítmicas son elementos esenciales que, en conjunto, permiten reproducir los valores observados de las masas de neutrinos ligeros. Este estudio no solo valida la robustez teórica del modelo, sino que también abre la posibilidad de relacionarlo con fenómenos de frontera en física de partículas y cosmología, incluyendo la búsqueda experimental de señales asociadas a la materia oscura y la leptogénesis.

Capítulo 10

Apéndices

Apéndice A

Masas de los escalares η_R y η_I

La siguiente cuestión a considerar son las consecuencias experimentales de este modelo. En la escala electro-débil, su contenido de partículas es idéntico al de la Ref.[3], excepto que los neutrinos tienen masa aquí según la ecuación (7.49). El sector escalar consta de dos dobletes: (ϕ^+, ϕ^0) como en el SM, y el nuevo importantísimo (η^+, η^0) . Sus interacciones escalares están dadas por.

$$V = m_1^2 \Phi^\dagger \Phi + m_2^2 \eta^\dagger \eta + \frac{1}{2} \lambda_1 (\Phi^\dagger \Phi)^2 + \frac{1}{2} \lambda_2 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_3 (\Phi^\dagger \Phi) (\eta^\dagger \eta) + \lambda_4 (\Phi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \Phi) + \frac{1}{2} \lambda_5 [(\Phi^\dagger \eta)^2 + h.c.], \quad (10.1)$$

donde:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{v+h+iA}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^+ \\ \frac{\eta_R+i\eta_I}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Analizaremos solo η , esto nos permite analizar su estabilidad y su espectro de masas sin interferencia de los modos del Higgs, de manera que es posible evaluar V en $\phi^+ = \eta^+ = h = 0$, para simplificar términos del potencial.

Así, reemplazando (10.2) y (10.3) bajo las consideraciones dichas anteriormente, se tiene:

$$V|_{\phi^+=\eta^+=h=0} = m_1^2 \frac{v^2}{2} + m_2^2 \frac{(\eta_R^2 + \eta_I^2)}{2} + \lambda_1 \frac{v^4}{8} + \lambda_2 \frac{(\eta_R^4 + 2\eta_R^2 \eta_I^2 + \eta_I^4)}{8} + \lambda_3 v^2 \frac{(\eta_R^2 + \eta_I^2)}{4} + \lambda_4 v^2 \frac{(\eta_R^2 + \eta_I^2)}{4} + \lambda_5 v^2 \frac{(\eta_R^2 - \eta_I^2)}{8} \quad (10.4)$$

Agrupando términos tenemos:

$$V = m_1^2 \frac{v^2}{2} + \lambda_1 \frac{v^4}{8} + \frac{1}{2} \left[m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 \right] \eta_R^2 + \frac{1}{2} \left[m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 - \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 \right] \eta_I^2 + \lambda_2 \frac{(\eta_R^4 + 2\eta_R^2 \eta_I^2 + \eta_I^4)}{4}. \quad (10.5)$$

Matriz Hessiana de η_R y η_I .

La matriz hessiana es una matriz cuadrada de segundas derivadas parciales de una función escalar de varias variables. Para nuestro caso, la función escalar sería el potencial (ecuación (10.5)), y las variables vendrían siendo los campos escalares (η_R, η_I). Así, nuestra matriz hessiana se define de la forma:

$$H(V) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_R^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_R \partial \eta_I} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_I \partial \eta_R} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_I^2} \end{bmatrix}, \quad (10.6)$$

si el objetivo es encontrar las masas de los escalares (η_R, η_I), solo es necesario considerar la parte cuadrática del potencial, ya que la matriz Hessiana se construye derivando el potencial dos veces con respecto a los campos.

Los términos de orden 4 en el potencial no contribuyen a la matriz Hessiana, ya que sus segundas derivadas con respecto a los campos dan términos proporcionales a los propios campos, los cuales se anulan en el vacío ($\eta_R = \eta_I = 0$). Además, es factible despreciar los dos primeros términos puesto que a la hora de derivar serán solo dos constantes.

Por lo tanto, la ecuación (10.5) se reduce a lo siguiente:

$$V|_{\phi^+ = \eta^+ = h=0} = \frac{1}{2} \left[m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 \right] \eta_R^2 + \frac{1}{2} \left[m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 - \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 \right] \eta_I^2. \quad (10.7)$$

Usando la ecuación (10.6) y (10.7) formamos la matriz hessiana:

$$H(V) = \begin{bmatrix} m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 - \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 \end{bmatrix}. \quad (10.8)$$

Ahora obtenemos los autovalores de esta matriz, para esto resolvemos la ecuación:

$$\det(H(V) - \lambda I) = 0, \quad (10.9)$$

el determinante de una matriz diagonal es simplemente el producto de sus elementos diagonales, por lo que la ecuación característica es:

$$\left(m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 - \lambda \right) \left(m_2^2 + \frac{1}{2} \lambda_3 v^2 + \frac{1}{2} \lambda_4 v^2 - \frac{1}{2} \lambda_5 v^2 - \lambda \right) = 0, \quad (10.10)$$

esto nos da los autovalores:

$$\lambda^{(1)} = m_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) v^2, \quad (10.11)$$

dado que los autovalores de la matriz Hessiana representan las masas al cuadrado de los campos escalares, identificamos:

$$m^2 (\eta_R^0) = m_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) v^2, \quad (10.12)$$

$$m^2 (\eta_I^0) = m_2^2 + \frac{1}{2} (\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5) v^2. \quad (10.13)$$

Masas de η_R y h .

h es la componente real del campo escalar Φ , para calcular su masa se debe tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Solo las partes reales de los campos Φ y η contribuyen al VEV (Valor esperado en el vacío).
- η no adquiere un valor esperado en el vacío VEV ($\langle \eta \rangle = 0$).
- Se ignoran las componentes cargadas de ambos campos por simplicidad ($\phi^+ = \eta^+ = h = 0$).

Por lo tanto:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+h}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (10.14)$$

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta_R}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (10.15)$$

sustituimos esto en el potencial (10.1) y simplificamos.

$$V = \frac{1}{2}m_1^2(v+h)^2 + \frac{1}{2}m_2^2\eta_R^2 + \frac{\lambda_1}{8}(v+h)^4 + \frac{\lambda_2}{8}\eta_R^4 + \frac{\lambda_3}{4}\eta_R^2(v+h)^2 + \frac{\lambda_4}{4}\eta_R^2(v+h)^2 + \frac{\lambda_5}{4}\eta_R^2(v+h)^2. \quad (10.16)$$

Mecanismo de Higgs.

Para encontrar el valor esperado en el vacío (VEV) de Φ , derivamos el potencial respecto a ϕ_R y lo igualamos a cero:

$$m_1^2(v+h) + \frac{\lambda_1}{2}(v+h)^3 + \frac{\lambda_3}{2}\eta_R^2(v+h) + \frac{\lambda_4}{2}\eta_R^2(v+h) + \frac{\lambda_5}{2}\eta_R^2(v+h) = 0, \quad (10.17)$$

Ahora evaluamos en $\eta_R = 0$ y $h = 0$

$$m_1^2v + \frac{\lambda_1}{2}v^3 = 0,$$

$$m_1^2 = -\frac{\lambda_1}{2}v^3. \quad (10.18)$$

Se aprecia que $m_1^2 < 0$, esto significa que el campo de Higgs adquiere un VEV v , lo que rompe espontáneamente la simetría. Si hubiésemos obtenido $m_1^2 > 0$, la simetría no se rompe y por lo tanto no se tendría un valor esperado del Higgs en el vacío.

Si η adquiriera un valor esperado, tendríamos que resolver la ecuación de minimización para v_η , lo que llevaría a un sistema de ecuaciones acopladas para v y v_η , cambiando la estructura

de la ruptura de simetría.

Consideramos entonces el resultado (10.18) en la ecuación (10.16):

$$V = -\frac{\lambda_1}{4}v^2(v+h)^2 + \frac{1}{2}m_2^2\eta_R^2 + \frac{\lambda_1}{8}(v+h)^4 + \frac{\lambda_2}{8}\eta_R^4 + \frac{\lambda_3}{4}\eta_R^2(v+h)^2 + \frac{\lambda_4}{4}\eta_R^2(v+h)^2 + \frac{\lambda_5}{4}\eta_R^2(v+h)^2, \quad (10.19)$$

Matriz Hessiana de η_R y h .

Para encontrar la matriz hessiana del potencial escalar (10.19) se debe tener en cuenta las variables que vendrían siendo los campos escalares (h, η_R) . Así, nuestra matriz hessiana se define de la forma:

$$H(V) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V}{\partial h^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial h \partial \eta_R} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_R \partial h} & \frac{\partial^2 V}{\partial \eta_R^2} \end{array} \right]_{\eta_R=h=0}, \quad (10.20)$$

de manera que:

$$H(V) = \left[\begin{array}{cc} \lambda_1 v^2 & 0 \\ 0 & m_2^2 + \frac{\lambda_3}{2}v^2 + \frac{\lambda_4}{2}v^2 + \frac{\lambda_5}{2}v^2 \end{array} \right]. \quad (10.21)$$

Ahora obtenemos los autovalores de esta matriz, para esto resolvemos la ecuación:

$$\det(H(V) - \lambda I) = 0. \quad (10.22)$$

El determinante de una matriz diagonal es simplemente el producto de sus elementos diagonales, por lo tanto:

$$\begin{aligned} \det(H(V)) &= \det \left(\left[\begin{array}{cc} \lambda_1 v^2 - \lambda & 0 \\ 0 & m_2^2 + \frac{\lambda_3}{2}v^2 + \frac{\lambda_4}{2}v^2 + \frac{\lambda_5}{2}v^2 - \lambda \end{array} \right] \right) \\ &= (\lambda_1 v^2 - \lambda) \left(m_2^2 + \frac{\lambda_3}{2}v^2 + \frac{\lambda_4}{2}v^2 + \frac{\lambda_5}{2}v^2 - \lambda \right) = 0 \end{aligned} \quad (10.23)$$

dado que los autovalores de la matriz Hessiana representan las masas al cuadrado de los campos escalares, identificamos:

$$\begin{aligned} m^2(\phi_R^0) &= \lambda_1 v^2 \\ m^2(\eta_R^0) &= m_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)v^2 \end{aligned} \quad (10.24)$$

Recopilación

De las secciones anteriores es posible recopilar la siguiente información:

$$\boxed{m^2(\phi_R^0) = \lambda_1 v^2} \quad (10.25)$$

$$\boxed{m^2(\eta_R^0) = m_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)v^2,} \quad (10.26)$$

$$\boxed{m^2(\eta_I^0) = m_2^2 + \frac{1}{2}(\lambda_3 + \lambda_4 - \lambda_5)v^2.} \quad (10.27)$$

Apéndice B

Apéndice B: Cálculo de la constante de normalización para $\vec{p} = 0$

Para determinar el valor de la constante de normalización N , consideremos primero las soluciones de la ecuación de Dirac en reposo, es decir, para $\vec{p} = 0$. En este caso, la energía de la partícula está dada por

$$E = mc^2. \quad (10.28)$$

De acuerdo con la convención de normalización empleada para los espinores de Dirac,

$$u^\dagger u = \frac{2E}{c}, \quad (10.29)$$

se tiene, para una partícula en reposo,

$$u^\dagger u = \frac{2mc^2}{c} = 2mc. \quad (10.30)$$

Tomemos, por ejemplo, la primera solución de energía positiva:

$$\psi^{(1)} = N e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (10.31)$$

Su conjugado hermítico es

$$(\psi^{(1)})^\dagger = N^* e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} (1 \ 0 \ 0 \ 0). \quad (10.32)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
(\psi^{(1)})^\dagger \psi^{(1)} &= N^* N e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= |N|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= |N|^2.
\end{aligned} \tag{10.33}$$

Imponiendo la condición de normalización,

$$(\psi^{(1)})^\dagger \psi^{(1)} = \frac{2E}{c}, \tag{10.34}$$

se obtiene

$$|N|^2 = \frac{2E}{c}. \tag{10.35}$$

Como en reposo $E = mc^2$, entonces

$$|N|^2 = \frac{2mc^2}{c} = 2mc. \tag{10.36}$$

Tomando N real y positivo,

$$N = \sqrt{2mc}. \tag{10.37}$$

El mismo resultado se obtiene para las demás soluciones, pues los factores de fase satisfacen

$$e^{i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} e^{-i\left(\frac{mc^2}{\hbar}\right)t} = 1, \tag{10.38}$$

y los vectores columna que acompañan a cada solución tienen norma igual a uno. Por tanto, para las cuatro soluciones independientes de la ecuación de Dirac en reposo se puede tomar

$$N = \sqrt{2mc}. \tag{10.39}$$

Referencias

S. Abe, T. Ebihara, S. Enomoto, K. Furuno, Y. Gando, K. Ichimura, et al. Precision measurement of neutrino oscillation parameters with kamland. *Physical Review Letters*, 100(22):221803, 2008.

F. P. An et al. The Detector System of The Daya Bay Reactor Neutrino Experiment. *Nucl. Instrum. Meth. A*, 811:133–161, 2016.

Riccardo Barbieri, Lawrence J. Hall, and Vyacheslav S. Rychkov. Improved naturalness with a heavy Higgs boson: An alternative road to LHC physics. 2006.

Richard H. Benavides, Yithsbey Giraldo, Luis Muñoz, William A. Ponce, and Eduardo Rojas. Five Texture Zeros for Dirac Neutrino Mass Matrices. *J. Phys. G*, 47(11):115002, 2020.

Paul A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proceedings of the Royal Society of London A*, 117:610–624, 1928.

R. P. Feynman. Relativistic cutoff for quantum electrodynamics. *Physical Review*, 74:1430–1438, 1948.

M. Fukugita and T. Yanagida. Baryogenesis without grand unification. *Physics Letters B*, 174:45, 1986.

Murray Gell-Mann, Pierre Ramond, and Richard Slansky. Complex spinors and unified theories. In P. van Nieuwenhuizen and D. Z. Freedman, editors, *Supergravity*, page 315. North-Holland, Amsterdam, 1979.

Carlo Giunti and Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, Oxford, UK, 2007. 1st Edition.

V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, and M. E. Shaposhnikov. On anomalous electroweak baryon-number nonconservation in the early universe. *Physics Letters B*, 155B:36, 1985.

Ernest Ma. Verifiable radiative seesaw mechanism of neutrino mass and dark matter. *Physical Review D*, 73:077301, 2006.

R. N. Mohapatra and G. Senjanovic. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation. *Physical Review Letters*, 44:912, 1980.

Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 2nd edition, 1996.

Julian S. Schwinger. On quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Physical Review*, 73:416–417, 1948.

Sin-Itiro Tomonaga and J. Robert Oppenheimer. On infinite field reactions in quantum field theory. *Physical Review*, 74:224–225, 1948.

Steven Weinberg. Baryon and lepton nonconserving processes. *Physical Review Letters*, 43:1566, 1979.

Tsutomu Yanagida. Horizontal symmetry and masses of neutrinos. In O. Sawada and A. Sugamoto, editors, *Proceedings of the Workshop on the Unified Theory and the Baryon Number in the Universe*, KEK Report No. 79-18, page 95, Tsukuba, Japan, 1979. KEK.