

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904

Formulación simpléctica para teorías gauge

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de:

Físico

Franklin Ivan Cuaran Cuaran

San Juan de Pasto, Colombia
5 de mayo de 2026

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Formulación simpléctica para teorías gauge

Franklin Ivan Cuaran Cuaran

TRABAJO DE GRADO

Director:

Dr. German Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, Colombia
5 de mayo de 2026

©2026 - Franklin Ivan Cuaran Cuaran

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Dr. German Enrique Ramos Zambrano

Director

Dr. Yithsbey Giraldo Úsuga

Jurado

Dr. Eduardo Rojas Peña

Jurado

San Juan de Pasto, 5 de mayo de 2026

Agradecimientos

A la Universidad de Nariño y al Departamento de Física, por el respaldo institucional. Al Dr. German Enrique Ramos Zambrano, por su dirección y acompañamiento académico en el desarrollo de este trabajo de grado.

A mi madre Flor Ismeria Cuaran Bolaños

Resumen

En este trabajo, se estudia la formulación simpléctica de Faddeev-Jackiw para teorías gauge. Inicialmente, se analiza el modelo de Christ-Lee, un sistema con número finito de grados de libertad, permitiendo identificar su estructura de ligaduras, reducir grados de libertad y obtener corchetes generalizados. Posteriormente, la metodología se extiende a la teoría electromagnética de Maxwell, donde la simetría gauge genera una matriz simpléctica singular; su inversión se logra tras introducir la condición de gauge de Coulomb. Asimismo, se examinan las teorías de Chern-Simons abeliana pura y de Maxwell-Chern-Simons, evidenciando cómo los términos topológicos condicionan las ligaduras y los grados de libertad físicos. Los resultados confirman la consistencia y eficacia del formalismo de Faddeev-Jackiw como una alternativa sólida al tratamiento estándar de Dirac para el análisis de sistemas singulares.

Palabras clave: Formalismo de Faddeev-Jackiw, teorías gauge, matriz simpléctica, corchetes generalizados, sistemas singulares.

Abstract

In this paper, the Faddeev-Jackiw symplectic formulation for gauge theories is studied. Initially, the Christ-Lee model is analyzed, a system with a finite number of degrees of freedom, allowing the identification of its constraint structure, the reduction of degrees of freedom, and the derivation of generalized brackets. Subsequently, the methodology is extended to Maxwell's electromagnetic theory, where gauge symmetry generates a singular symplectic matrix; its inversion is achieved after introducing the Coulomb gauge condition. Likewise, the pure abelian Chern-Simons and Maxwell-Chern-Simons theories are examined, evidencing how topological terms condition the constraints and the physical degrees of freedom. The results confirm the consistency and effectiveness of the Faddeev-Jackiw formalism as a solid alternative to Dirac's standard approach for the analysis of singular systems.

Keywords: Faddeev-Jackiw formalism, gauge theories, symplectic matrix, generalized brackets, singular systems.

Contenido

Aceptación	IV
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
Glosario	XI
1. Introducción	1
2. Planteamiento del Problema	3
3. Objetivos	4
4. Método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge	5
4.1. Método Faddeev-Jackiw para teoría de campos gauge	9
5. Modelo de Christ-Lee	11
6. Teoría electromagnética de Maxwell	17
7. Teoría de Chern-Simons abeliana pura	22
8. Teoría de Maxwell-Chern-Simons	27
9. Conclusiones	32
Apéndices	34
A. Modelo de Christ-Lee	34
A.1. Linealización del Lagrangiano	34
A.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$	35
A.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$	36
A.4. Obtención del potencial simpléctico $H^{(1)}$	36
A.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$	37
A.6. Obtención de componentes del vector $\nu_i^{(1)}$	38
A.7. Demostración de la no aparición de ligaduras adicionales	39
A.8. Obtención del potencial simpléctico $H^{(2)}$	40

A.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$	40
B. Teoría electromagnética de Maxwell	42
B.1. Linealización de la densidad Lagrangiana de Maxwell	42
B.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	44
B.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$	45
B.4. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$	46
B.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	47
B.6. Obtención de componentes del vector $\nu^{A(1)}$	48
B.7. Demostración de la no aparición de ligaduras adicionales	49
B.8. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(2)}$	51
B.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	51
B.10. Obtención explícita de la matriz simpléctica inversa	53
C. Teoría de Chern-Simons abeliana pura	58
C.1. Descomposición espacio-temporal y estructura simpléctica de la densidad Lagrangiana de Chern-Simons	58
C.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	59
C.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$	60
C.4. Anulación del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$	61
C.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	61
C.6. Obtención de componentes del vector $\nu^{A(1)}$	62
C.7. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	64
C.8. Obtención explícita de la matriz simpléctica inversa	65
D. Teoría de Maxwell-Chern-Simons	72
D.1. Linealización de la densidad Lagrangiana de MCS	72
D.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	75
D.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$	76
D.4. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$	77
D.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	78
D.6. Obtención de componentes del vector $\nu^{A(1)}$	79
D.7. Demostración de la no aparición de ligaduras adicionales	81
D.8. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(2)}$	83
D.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	84
D.10. Obtención explícita de la matriz simpléctica inversa	86

Glosario

- Campo:** Función definida sobre el espacio-tiempo que asigna a cada punto un valor, el cual puede ser escalar, vectorial o espinorial y que se utiliza para describir magnitudes físicas distribuidas de manera continua.
- Ligaduras:** Relaciones entre las variables dinámicas que reducen los grados de libertad del sistema.
- Sistema singular:** Sistema dinámico en el cual no es posible expresar todas las velocidades en términos de los momentos conjugados, es decir el determinante de la matriz Hessiana del Lagrangiano es cero, lo que conduce a la aparición de ligaduras.
- Densidad Lagrangiana:** Función que describe la dinámica de un campo en cada punto del espacio-tiempo, su integral espacial es el Lagrangiano del sistema.
- Transformaciones gauge locales:** Son transformaciones de simetría que actúan sobre los grados de libertad internos de un sistema cuyos parámetros dependen del espacio-tiempo, estas transformaciones cambian la representación de los campos, pero dejan invariantes las leyes físicas y las cantidades observables.
- Condición de gauge:** Restricción adicional impuesta para eliminar la redundancia asociada a la invariancia gauge.
- Grados de libertad:** Número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias para describir completamente el estado de un sistema físico.
- Formalismo de Faddeev-Jackiw:** Método para el tratamiento de sistemas singulares que aprovecha la estructura geométrica del espacio de fase formulado en términos de un Lagrangiano de primer orden.
- Matriz simpléctica:** Matriz antisimétrica construida a partir de las derivadas de los elementos de la uno forma canónica presentes en el Lagrangiano de primer orden, su inversa se utiliza para definir los corchetes generalizados del sistema.

- Método de Dirac:** Procedimiento estándar para el tratamiento de sistemas singulares que consiste en la identificación y clasificación de ligaduras primarias y secundarias, de primera y segunda clase, y permite garantizar la consistencia temporal de la evolución del sistema.
- Corchetes de Poisson:** Estructura algebraica de la mecánica clásica que describe la evolución temporal de un sistema dinámico en el espacio de fase.
- Corchetes de Dirac:** Generalización de los corchetes de Poisson que permiten describir la evolución temporal de variables dinámicas en sistemas singulares
- Corchetes generalizados:** Extensión de los corchetes de Poisson utilizada en el análisis de sistemas singulares obtenidos a partir de la inversa de la matriz simpléctica en el formalismo de Faddeev-Jackiw. Su estructura es equivalente a la de los corchetes de Dirac.

Capítulo 1

Introducción

Históricamente, el tratamiento canónico de los sistemas singulares ha sido abordado mediante el método de Dirac [1]. En estos sistemas, la transición de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana se caracteriza por una matriz hessiana singular, lo que impide despejar todas las velocidades en términos de los momentos. Esto revela redundancias en la descripción de las variables dinámicas, manifestándose formalmente a través de ligaduras. El algoritmo propuesto por Dirac se fundamenta en la identificación de ligaduras primarias y secundarias, su clasificación en primera y segunda clase, y la posterior construcción de los corchetes de Dirac; un procedimiento que exige una distinción rigurosa entre igualdades débiles y fuertes. Finalmente, este formalismo permite identificar de manera sistemática los grados de libertad físicos de la teoría.

En el marco del método de Dirac, el estudio algorítmico de las teorías gauge ha abarcado tanto sistemas con un número finito de grados de libertad como teorías de campos. En la primera categoría destaca el tratamiento canónico del modelo de Christ-Lee [2, 3]. Por otro lado, en el ámbito de la teoría de campos, son fundamentales los análisis de la teoría electromagnética de Maxwell [4, 5], la teoría de Chern-Simons abeliana pura [6] y la teoría de Maxwell-Chern-Simons [6, 7]. La aplicación sistemática del algoritmo de Dirac en estos trabajos ha permitido establecer una descripción dinámica consistente para dichos sistemas singulares.

Como alternativa geométrica, Faddeev y Jackiw [8] propusieron un formalismo que aprovecha la estructura simpléctica del espacio de fase para establecer una correspondencia directa con los corchetes de Poisson. Este enfoque opera a nivel Lagrangiano y requiere una dependencia lineal en las derivadas temporales de las variables físicas; no obstante, mediante la introducción de momentos conjugados, un Lagrangiano singular de orden superior puede ser llevado a una forma equivalente de primer orden [9]. En general, la aplicación iterativa del método garantiza la construcción de una matriz simpléctica regular a partir de la cual se deducen los corchetes generalizados. Sin embargo, dada la degeneración intrínseca de las teorías gauge, el procedimiento iterativo resulta insuficiente por sí mismo, requiriendo la introducción de condiciones de gauge [10] para eliminar la redundancia y aislar los verdaderos grados de libertad de la teoría.

Los referentes principales para el desarrollo de este trabajo de grado son aquellos que abordan la formulación simpléctica de las teorías de interés. Para el modelo de Christ-Lee, se toma como guía el procedimiento de [11], pero, introduciendo un cambio fundamental, se utiliza una condición de gauge

diferente con el propósito de obtener resultados que puedan ser contrastados de forma directa con los provenientes del método de Dirac. En lo que respecta a las teorías de campos, se impondrá el gauge de Coulomb en todos los casos. Los estudios previos sobre la teoría electromagnética de Maxwell [10] y las teorías topológicas de Chern-Simons abeliana pura y Maxwell-Chern-Simons [12] servirán como base para la aplicación apropiada del método. Además, para las teorías gauge topológicas, el tratamiento alternativo mediante la formulación de Hamilton-Jacobi [13] será fundamental al momento de realizar una verificación adicional para la consistencia de los resultados derivados del formalismo de Faddeev-Jackiw.

Este trabajo de grado se estructura de la siguiente manera: inicialmente, en el capítulo 4 se presenta el desarrollo del método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge, describiendo el procedimiento iterativo que permite identificar las ligaduras del sistema derivadas de la singularidad de la matriz simpléctica. Se analiza cómo, tanto en sistemas con un número finito de grados de libertad como en teorías de campos, la persistencia de dicha singularidad está asociada a simetrías gauge, lo que requiere la imposición de condiciones de gauge para romper dicha simetría, obtener una matriz regular y, con ello, los corchetes generalizados que describen la dinámica de los sistemas.

En el capítulo 5 se analiza el modelo de Christ-Lee mediante la formulación de Faddeev-Jackiw, un sistema con un número finito de grados de libertad y simetría gauge, caracterizando la estructura de ligaduras, identificando las variables físicas y obteniendo sus corchetes generalizados.

A continuación, en el capítulo 6 se extiende la metodología a sistemas con infinitos grados de libertad, abordando la teoría electromagnética de Maxwell. En esta sección se identifican las simetrías gauge inherentes a la teoría y se elige el gauge de Coulomb para lograr la inversión de la matriz simpléctica, permitiendo así la obtención de los corchetes generalizados entre los campos físicos.

Seguidamente, se estudian teorías gauge de naturaleza topológica. En particular, en el capítulo 7 se analiza la teoría de Chern-Simons (CS) abeliana pura, empleando el formalismo simpléctico para caracterizar su estructura dinámica, lo cual incluye la identificación de los campos físicos de la teoría y la obtención de los correspondientes corchetes generalizados.

Posteriormente, en el capítulo 8 se examina la teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS), donde el enfoque se centra en evidenciar el efecto de los términos topológicos en la descripción de la teoría. Para ello, se aplica nuevamente el formalismo simpléctico, analizando cómo la incorporación del término de Chern-Simons modifica la estructura de ligaduras y los corchetes generalizados.

Finalmente, en el capítulo 9 se exponen las conclusiones generales derivadas del desarrollo de este trabajo.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

Las teorías gauge son fundamentales en la física moderna, ya que es posible describir interacciones mediante simetrías locales, su formulación Hamiltoniana conlleva a sistemas con ligaduras de primera clase, por lo que resulta necesario utilizar métodos específicos para establecer una estructura canónica adecuada. La forma tradicional de abordar este tratamiento se realiza mediante el método de Dirac; como alternativa, se plantea un enfoque más compacto a través de una formulación simpléctica. Con el propósito de profundizar en esta área de la física y sistematizar de manera detallada la aplicación del método de Faddeev-Jackiw, este trabajo se centra en su aplicación a la teoría electromagnética de Maxwell, la teoría de Chern-Simons (CS) abeliana pura y la teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS), a fin de comprobar la validez y consistencia de dicho método. En este contexto, el trabajo incorpora apéndices extensos en los que se desarrollan explícitamente los cálculos intermedios del método, facilitando el seguimiento paso a paso del procedimiento y contribuyendo a una presentación clara y ordenada del formalismo. De esta manera, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo se describen las teorías gauge bajo la formulación simpléctica de Faddeev-Jackiw?

Capítulo 3

Objetivos

Objetivo General

Aplicar la formulación de Faddeev-Jackiw al estudio de teorías gauge, con el propósito de comprender su estructura dinámica.

Objetivos Específicos

- Analizar el modelo de Christ-Lee mediante la formulación de Faddeev-Jackiw, con el propósito de caracterizar su estructura de ligaduras y la dinámica del sistema.
- Caracterizar la teoría electromagnética de Maxwell a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, identificando sus simetrías gauge y la reducción de grados de libertad.
- Describir la teoría de Chern-Simons abeliana pura a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, determinando su estructura simpléctica y sus propiedades topológicas.
- Examinar la teoría de Maxwell-Chern-Simons aplicando la formulación de Faddeev-Jackiw, con el fin de evidenciar el efecto de los términos topológicos en su descripción.

Capítulo 4

Método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge

El método desarrollado por Ludvig Faddeev y Roman W. Jackiw en 1988 [8] constituye una alternativa al método de Dirac para el tratamiento de sistemas singulares basado en la estructura simpléctica del espacio de fase. A diferencia del enfoque de Dirac, en el cual las ligaduras se clasifican en distintas categorías, el método de F-J permite obtener la estructura de ligaduras directamente a partir de la degeneración de la forma simpléctica. No obstante, es importante señalar que no siempre es posible obtener todas las ligaduras del sistema, aquellas que surgen de la definición de los momentos canónicos no necesariamente quedan completamente determinadas dentro de este formalismo. El punto de partida del formalismo es un Lagrangiano de primer orden en las derivadas temporales [14], el cual puede escribirse de manera general como

$$L(\xi, \dot{\xi}) = a_i(\xi) \dot{\xi}^i - H(\xi), \quad (4.1)$$

donde ξ^i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) denota el conjunto de variables simplécticas que parametrizan el espacio de fase, $\dot{\xi}$ son sus respectivas derivadas temporales, el término $a_i(\xi)$ son las componentes de lo que se denomina una forma canónica y $H(\xi)$ es el denominado potencial simpléctico o Hamiltoniano.

El Lagrangiano que describe el movimiento en el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) posee la siguiente dependencia

$$L = L(q_i, \dot{q}_i), \quad (4.2)$$

es posible describir la dinámica del sistema mediante una formulación equivalente, la cual se fundamenta en el Hamiltoniano denotado por $H(q_i, p_i)$, el cual depende de las coordenadas generalizadas q_i y de los momentos canónicos conjugados p_i [3]. Estos últimos se obtienen a partir de la siguiente definición

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.3)$$

En el caso en el que el Lagrangiano que describe el sistema es regular, la relación anterior permite expresar todas las velocidades generalizadas \dot{q}_i en términos de las coordenadas generalizadas q_i y los momentos canónicos conjugados p_i , lo cual se puede expresar de la siguiente manera

$$\dot{q}_i = g_i(q, p). \quad (4.4)$$

Esta relación permite establecer una conexión entre el Lagrangiano y el Hamiltoniano mediante una transformación de Legendre, la cual se expresa de la siguiente manera

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i = g_i(q,p)}, \quad (4.5)$$

a partir de la expresión anterior, se identifica que el lado derecho no posee dependencia de las velocidades generalizadas \dot{q}_i . En consecuencia, una forma alternativa de expresar el Lagrangiano será

$$L_C(q_i, p_i) \equiv L(q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i = g_i(q,p)} = p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i). \quad (4.6)$$

Donde $L_C(q_i, p_i)$ se denomina Lagrangiano canónico y tiene como característica fundamental estar definido en el espacio de fase (q_i, p_i) , para el desarrollo de este método tiene un papel fundamental debido a que permite expresar un Lagrangiano de cualquier orden en las velocidades generalizadas en una versión con dependencia lineal en las mismas, lo cual es estrictamente requerido en el método de Faddeev-Jackiw.

Para poder desarrollar el método de F-J, el primer paso es establecer una variable simpléctica denotada por ξ , en la cual se agrupan las $2n$ variables canónicas (q_i, p_i) del espacio de fase. En términos de la mencionada variable simpléctica, el Lagrangiano de primer orden puede reescribirse como se muestra a continuación

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)i} - V^{(0)}(\xi). \quad (4.7)$$

Debido a la naturaleza iterativa que tiene el método F-J, se ha añadido la notación del superíndice (0) con el propósito de ser un indicador del proceso iterativo. En la ecuación anterior, $a_i^{(0)}(\xi)$ se conocen como las componentes de lo que se denomina una forma canónica y $V^{(0)}(\xi)$ se define como potencial simpléctico. Es posible mostrar que el Hamiltoniano corresponde exactamente con el potencial simpléctico [9], con lo cual la ecuación (4.7) adopta la siguiente forma

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)i} - H^{(0)}(\xi). \quad (4.8)$$

En este formalismo, las ecuaciones de movimiento se derivan a partir de lo que se conoce como matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$, definida como [10]

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} - \frac{\partial a_i^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)j}}, \quad (4.9)$$

de modo que la dinámica del sistema queda determinada por

$$f_{ij}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)j} = \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}}. \quad (4.10)$$

La estructura del sistema está completamente codificada en la matriz simpléctica y el potencial $H^{(0)}(\xi)$. En particular, si la matriz simpléctica es regular, es decir, si $\det f_{ij}^{(0)} \neq 0$, entonces existe su inversa $(f_{ij}^{(0)})^{-1}$, lo que permite escribir explícitamente las ecuaciones de movimiento en la forma

$$\dot{\xi}^{(0)i} = (f_{ij}^{(0)})^{-1} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)j}}, \quad (4.11)$$

estableciendo de manera clara la dinámica del sistema. Dado que la variable simpléctica está construida a partir de las variables del espacio de fase (q_i, p_i) , su evolución temporal viene dada por las ecuaciones de Hamilton, las cuales pueden expresarse en términos de los corchetes de Poisson como se muestra a continuación

$$\dot{\xi}^{(0)i} = \left\{ \xi^{(0)i}, H^{(0)}(\xi) \right\} = \left\{ \xi^{(0)i}, \xi^{(0)j} \right\} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)j}}. \quad (4.12)$$

Al realizar una comparativa entre las ecuaciones (4.11) y (4.12), se consigue identificar que

$$\left(f_{ij}^{(0)} \right)^{-1} = \left\{ \xi^{(0)i}, \xi^{(0)j} \right\}, \quad (4.13)$$

es decir, la inversa de la matriz simpléctica define la estructura de corchetes fundamentales de la teoría, dado que sus elementos pueden identificarse con los corchetes de Poisson entre las componentes de la variable simpléctica y en consecuencia, entre las variables del espacio de fase.

El punto clave del método se fundamenta en el análisis de la singularidad de la matriz simpléctica. En lo que respecta al desarrollo de este trabajo, se presta especial interés al caso en el que $\det f_{ij}^{(0)} = 0$; es decir, se trabaja con sistemas singulares o con ligaduras. Este hecho tiene como implicación directa que no es posible determinar todas las derivadas temporales de las componentes de la variable simpléctica, como si se logró hacer en la ecuación (4.11) correspondiente al caso regular.

En consecuencia, existirán modos cero denotados por $\nu_\alpha^{(0)}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$) con $m < 2n$, definidos por [15]

$$\nu_\alpha^{(0)i} f_{ij}^{(0)} = 0. \quad (4.14)$$

Estos vectores permiten construir directamente las ligaduras del sistema denotadas por $\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)$ como indica la siguiente expresión

$$\Omega_\alpha^{(0)}(\xi) = \nu_\alpha^{(0)i} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} = 0. \quad (4.15)$$

Para garantizar la consistencia dinámica, estas ligaduras deben ser invariantes en el tiempo, es decir,

$$\frac{d}{dt} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) = \frac{\partial \Omega_\alpha^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} \dot{\xi}^{(0)i} = 0. \quad (4.16)$$

Esta condición se incorpora al Lagrangiano mediante multiplicadores de Lagrange $\lambda^{(0)\alpha}$ los cuales se deben adicionar al conjunto de variables dinámicas iniciales. De este modo, el Lagrangiano del primer proceso iterativo puede escribirse como

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0)\alpha}) = L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) - \lambda^{(0)\alpha} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi). \quad (4.17)$$

Al reemplazar en la expresión anterior el Lagrangiano de la ecuación (4.8) se obtiene

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0)\alpha}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)i} - \lambda^{(0)\alpha} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi) - H^{(0)}(\xi), \quad (4.18)$$

Esta expresión se puede reescribir de manera que no se modifiquen las ecuaciones de movimiento, tal como se muestra a continuación

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0)\alpha}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)i} + \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \dot{\lambda}^{(0)\alpha} - H^{(0)}(\xi) - \frac{d}{dt} \left(\lambda^{(0)\alpha} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \right). \quad (4.19)$$

En este punto, debido a la incorporación de los multiplicadores de Lagrange al conjunto de variables dinámicas, se define una nueva variable simpléctica que considere dicha modificación, la cual viene dada por $\xi^{(1)i} \equiv (\xi, \lambda^{(0)\alpha})$. La definición de esta nueva variable permite expresar el Lagrangiano del primer proceso de iteración conservando la estructura de primer orden así

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0)\alpha}) = a_i^{(1)}(\xi) \dot{\xi}^{(1)i} - H^{(1)}(\xi), \quad (4.20)$$

donde se ha omitido el último término del lado derecho de la ecuación (4.19) debido a que corresponde a una derivada total respecto al tiempo. La omisión de este término no modifica la dinámica del sistema, ya que las ecuaciones de Euler–Lagrange son invariantes bajo la adición de derivadas totales al Lagrangiano. El Hamiltoniano del primer proceso de iteración se obtiene de la siguiente manera [10]

$$H^{(1)}(\xi) = H^{(0)}(\xi) \Big|_{\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)=0}. \quad (4.21)$$

Para este proceso iterativo, la matriz simpléctica correspondiente se expresa como

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a_j^{(1)}(\xi)}{\partial \xi^{(1)i}} - \frac{\partial a_i^{(1)}(\xi)}{\partial \xi^{(1)j}}. \quad (4.22)$$

Un aspecto relevante es que la matriz $f_{ij}^{(1)}$ contiene a $f_{ij}^{(0)}$ como una submatriz, lo cual evidencia que, en cada paso iterativo, no solo se modifica el número de variables dinámicas, sino también la dimensión de la matriz simpléctica. En este punto, es necesario analizar nuevamente la singularidad de $f_{ij}^{(1)}$; en el caso de teorías gauge, dicha matriz continúa siendo singular, lo que obliga a reiterar el procedimiento iterativo previamente descrito. En general, tras un número arbitrario de iteraciones N , la matriz $f_{ij}^{(N)}$ permanece singular [10]. Adicionalmente, en esta etapa las ligaduras se obtienen a partir de la expresión

$$\Omega_\alpha^{(N)}(\xi) = \nu_\alpha^{(N)i} \frac{\partial H^{(N)}(\xi)}{\partial \xi^{(N)i}} = 0. \quad (4.23)$$

Dado que los modos cero de este proceso iterativo no generan nuevas ligaduras en el sistema, esto indica la presencia de una simetría gauge fundamental. En consecuencia, no es posible efectuar un paso iterativo adicional que conduzca a una matriz simpléctica regular basándose únicamente en la dinámica del sistema. Se hace necesario entonces romper esta simetría incorporando una condición de gauge, la cual se introduce en el Lagrangiano mediante un multiplicador de Lagrange. Esto da lugar a un nuevo proceso iterativo $N + 1$, en el que el Hamiltoniano correspondiente se obtiene como

$$H^{(N+1)}(\xi) = H^{(N)}(\xi) \Big|_{\text{Condición de gauge}}. \quad (4.24)$$

La incorporación de la condición de gauge implica de manera directa que la matriz $f_{ij}^{(N+1)}$ se vuelva regular, es decir, $\det f_{ij}^{(N+1)} \neq 0$. Esto garantiza la existencia de su inversa y, en consecuencia, sus elementos corresponden a los corchetes generalizados de la teoría, los cuales coinciden con los corchetes de Dirac

$$\left(f_{ij}^{(N+1)} \right)^{-1} = \left\{ \xi^{(N+1)i}, \xi^{(N+1)j} \right\}. \quad (4.25)$$

4.1. Método Faddeev-Jackiw para teoría de campos gauge

En teoría de campos, el Lagrangiano no es solo una función de las coordenadas generalizadas y sus velocidades, sino una funcional del campo ϕ y sus derivadas espacio-temporales [16]. Esta dependencia se expresa de la siguiente manera:

$$L = L[\phi, \partial_\mu \phi]. \quad (4.26)$$

Un hecho destacable en este marco es que la descripción de los campos se realiza considerando configuraciones en el espacio-tiempo, es decir $\phi = \phi(x)$ [17].¹ Esto coloca en igualdad de condiciones al tiempo y al espacio, dado que las coordenadas espaciales pierden su papel de índices discretos para convertirse en variables continuas. Así, el Lagrangiano puede escribirse en términos de la densidad Lagrangiana \mathcal{L} , tal como se muestra a continuación

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (4.27)$$

La densidad Lagrangiana va a tomar un papel fundamental en el formalismo de Faddeev-Jackiw de teoría de campos, dado que la formulación de la teoría se realiza a este nivel; como se puede observar en la ecuación (4.27), dicha densidad posee dependencia del campo y sus derivadas espacio-temporales, pudiendo ser de segundo orden o superior en las derivadas temporales. Debido a que el método F-J, en este caso, exige una densidad Lagrangiana de primer orden en la derivada temporal del campo, se introducen los momentos canónicos conjugados

$$\Pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi)}. \quad (4.28)$$

Mediante este paso, es posible reescribir la dinámica en una forma equivalente de primer orden. La densidad Lagrangiana resultante posee ahora la dependencia $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \Pi)$; identificar esta estructura es el primer paso para la formulación simpléctica. Se procede a agrupar las variables dinámicas en un único conjunto de campos $\xi \equiv (\phi, \Pi)$, en términos de esta variable simpléctica, la densidad Lagrangiana se puede reescribir así

$$\mathcal{L}^{(0)} = K_A^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)A} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi), \quad (4.29)$$

donde $K_A^{(0)}(\xi)$ representa las componentes de lo que se denomina una forma canónica, $\dot{\xi}^{(0)A}$ corresponde a la derivada temporal de las componentes de la variable simpléctica y $\mathcal{H}^{(0)}(\xi)$ es el potencial simpléctico inicial de la teoría. La descripción geométrica de la teoría queda dictada por la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}$, definida a través de las derivadas funcionales de las componentes de la una forma tal como se muestra a continuación² [10]

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi^{(0)A}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi^{(0)B}(\mathbf{y})} \quad (4.30)$$

Si esta matriz es singular, no posee inversa, lo que indica a su vez la presencia de ligaduras en la teoría. Esto implica la existencia de modos cero, vectores propios con autovalor nulo, dados por la expresión

$$\int d^3x \nu^{A(0)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (4.31)$$

¹Se utiliza la siguiente notación $x = (x^0, \mathbf{x}) = (t, \mathbf{x})$ para las coordenadas espacio-temporales en unidades relativistas, $c = 1$, y $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ para la derivada respecto a sus componentes.

²En esta formulación, la dinámica se evalúa a tiempos iguales ($x^0 = y^0$). Por esta razón, las variables y las derivadas funcionales se expresan en función de coordenadas espaciales (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

Tras conocer la forma de los modos cero es posible realizar el cálculo de las ligaduras de la teoría de la siguiente forma

$$\Omega^{(0)} = \int d^3x \nu^{A(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}) = 0. \quad (4.32)$$

Estas ligaduras deben incorporarse a la dinámica del sistema. En el formalismo de Faddeev-Jackiw, esto se realiza directamente a nivel de la densidad Lagrangiana introduciendo multiplicadores de Lagrange λ . Con el fin de preservar la estructura de primer orden, resulta conveniente añadir las ligaduras mediante la derivada temporal de dichos multiplicadores, obteniéndose así la densidad Lagrangiana del primer proceso iterativo

$$\mathcal{L}^{(1)} = K_A^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)A} + \Omega^{(0)}(\xi) \dot{\lambda}^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi). \quad (4.33)$$

La incorporación de estas nuevas variables dinámicas conduce a la ampliación de la variable simpléctica, $\xi^{(1)A} = (\xi^{(0)A}, \lambda^{(0)})$, mediante la cual se puede compactar nuevamente la densidad Lagrangiana tal como se muestra en la siguiente expresión

$$\mathcal{L}^{(1)} = K_A^{(1)}(\xi) \dot{\xi}^{(1)A} - \mathcal{H}^{(1)}(\xi), \quad (4.34)$$

donde el nuevo potencial simpléctico se obtiene de la siguiente manera

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0}. \quad (4.35)$$

En consecuencia, se procede con la construcción de una nueva matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}$. Este procedimiento iterativo se repite de manera sistemática, en cada paso se analiza la regularidad de la matriz simpléctica y en caso de persistir la singularidad y existir nuevos modos cero, se generan nuevas ligaduras.

En teorías de campos gauge, tras un número finito de iteraciones N , la matriz simpléctica $M_{AB}^{(N)}$ continúa siendo singular pero ya no se generan nuevas ligaduras en la teoría. Esto es un indicativo directo de que la naturaleza gauge de la teoría aún está presente. Como consecuencia, se deriva la imposibilidad de realizar la inversión de la matriz simpléctica, por lo cual es necesario incorporar condiciones de gauge mediante multiplicadores de Lagrange adicionales en la densidad Lagrangiana, dando lugar a un nuevo proceso iterativo $N + 1$, en el que la variable simpléctica se amplía una vez más. Para este paso, el potencial simpléctico se obtiene a partir de la siguiente expresión

$$\mathcal{H}^{(N+1)} = \mathcal{H}^{(N)} \Big|_{\text{Condición de gauge}}. \quad (4.36)$$

Una vez implementada la condición de gauge, la matriz simpléctica resultante, $M_{AB}^{(N+1)}$ se vuelve regular, es decir, admite una inversa bien definida, la cual se calcula considerando la siguiente ecuación funcional

$$\int d^3z M_{AC}^{(N+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left[M^{CB(N+1)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.37)$$

Finalmente, los elementos de la matriz simpléctica inversa permiten definir los corchetes generalizados de la teoría

$$\left[M^{AB(N+1)} \right]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \xi_A^{(N+1)}(\mathbf{x}), \xi_B^{(N+1)}(\mathbf{y}) \right\}, \quad (4.38)$$

los cuales contienen toda la información dinámica la teoría y coinciden con los corchetes de Dirac en el tratamiento canónico de sistemas con ligaduras.

Capítulo 5

Modelo de Christ-Lee

En 1980, Norman H. Christ y Tsung-Dao Lee propusieron un modelo mecánico no relativista, el cual ilustra en un contexto simple la aparición de simetrías gauge en sistemas con un número finito de grados de libertad [18]. El modelo describe el movimiento de una partícula puntual sometida a un potencial central acoplada a una variable auxiliar que mediante un término que completa el cuadrado en el Lagrangiano, garantiza la invariancia gauge y su estructura es formalmente similar a la de una partícula cargada bajo la influencia de un campo magnético externo.

Este capítulo se dedica a la aplicación del formalismo de Faddeev-Jackiw en el análisis de este sistema singular, con el objetivo de caracterizar su estructura de ligaduras y su dinámica. Para ello se toma como punto de partida el Lagrangiano que describe la dinámica del modelo de Christ-Lee en el sistema de coordenadas cartesianas [11], el cual se expresa de la siguiente manera

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - z (x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2} z^2 (x^2 + y^2) - V(x^2 + y^2), \quad (5.1)$$

donde x e y representan las variables dinámicas del sistema,¹ \dot{x} y \dot{y} corresponden a sus respectivas velocidades, mientras que z es una variable auxiliar sin dinámica propia.

El punto de partida del formalismo de Faddeev-Jackiw consiste en expresar el Lagrangiano de la ecuación (5.1) de manera que dependa linealmente de las velocidades, lo que se consigue mediante el Lagrangiano canónico el cual es²

$$L_C = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{1}{2} p_x^2 - \frac{1}{2} p_y^2 - z (p_y x - p_x y) - V(x^2 + y^2). \quad (5.2)$$

A partir de este Lagrangiano canónico, con el propósito de definir el Lagrangiano de primer orden, se define el potencial simpléctico del sistema como

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + z (p_y x - p_x y) + V(x^2 + y^2), \quad (5.3)$$

dicho lo anterior, el Lagrangiano de primer orden adopta la siguiente forma

$$L^{(0)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - H^{(0)}. \quad (5.4)$$

¹Las variables dinámicas dependen explícitamente del tiempo, es decir, $x = x(t)$, $y = y(t)$.

²Los cálculos de la linealización del Lagrangiano se encuentran en el apéndice A.1.

En este punto, se introduce la variable simpléctica, la cual permite definir el espacio de fase asociado al sistema, dicha variable está compuesta por las siguientes componentes

$$\xi^{(0)} = (x, p_x, y, p_y, z). \quad (5.5)$$

Una vez definida la variable simpléctica, se procede a construir la matriz simpléctica mediante la expresión

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial \xi_j^{(0)}}. \quad (5.6)$$

Con el objetivo de conseguir identificar $a_j^{(0)}$, el Lagrangiano de primer orden de la ecuación (5.4) se expresa en la forma general

$$L^{(0)} = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - H^{(0)}(\xi). \quad (5.7)$$

Mediante la definición dada en la ecuación (5.5) se consigue identificar lo siguiente

$$\xi_x^{(0)} \rightarrow x, \quad \xi_{p_x}^{(0)} \rightarrow p_x, \quad \xi_y^{(0)} \rightarrow y, \quad \xi_{p_y}^{(0)} \rightarrow p_y, \quad \xi_z^{(0)} \rightarrow z, \quad (5.8)$$

ahora, al realizar la comparativa entre las ecuaciones (5.7) y (5.4) se deduce

$$a_x^{(0)} \rightarrow p_x, \quad a_{p_x}^{(0)} \rightarrow 0, \quad a_y^{(0)} \rightarrow p_y, \quad a_{p_y}^{(0)} \rightarrow 0, \quad a_z^{(0)} \rightarrow 0. \quad (5.9)$$

Tras haber realizado las correspondientes identificaciones tanto de las componentes de la variable simpléctica como de los elementos de la uno forma canónica, utilizando las ecuaciones (5.8) y (5.9) en la definición dada en (5.6), se calculan los elementos de la matriz simpléctica considerando que es una cantidad antisimétrica, la anterior particularidad permite concluir que los elementos sobre la diagonal principal son cero, mientras que los que se encuentran por fuera de ésta, deberán satisfacer que $f_{ij}^{(0)} = -f_{ji}^{(0)}$, de manera que la matriz simpléctica resulta ser³

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} & x & p_x & y & p_y & z \\ x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_y & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

De manera inmediata se observa que la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$ de la ecuación (5.10) es singular, en consecuencia, existe al menos un modo cero, el cual en su forma más general se puede escribir como

$$\nu_i^{(0)} \equiv \left(\nu_x^{(0)} \quad \nu_{p_x}^{(0)} \quad \nu_y^{(0)} \quad \nu_{p_y}^{(0)} \quad \nu_z^{(0)} \right), \quad (5.11)$$

para el caso particular de la matriz simpléctica de la ecuación (5.10), el modo cero correspondiente es

$$\nu_i^{(0)} = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \nu_z^{(0)} \right), \quad (5.12)$$

³El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$ se encuentra en el apéndice A.2.

donde el elemento $\nu_z^{(0)}$ es una constante arbitraria; la existencia del modo cero de la ecuación (5.12) en el sistema, dentro del formalismo simpléctico conduce directamente a la aparición de una ligadura en el sistema, la cual está dada⁴

$$\Omega^{(0)} = p_y x - p_x y = 0. \quad (5.13)$$

Al surgir esta ligadura, resulta necesario incorporarla en el sector canónico del Lagrangiano. Para ello, existen dos posibilidades formales, añadir un término del tipo $\lambda \dot{\Omega}^{(0)}$ o bien $\dot{\lambda} \Omega^{(0)}$, donde λ actúa como multiplicador de Lagrange, cabe destacar que, dentro del formalismo de Faddeev-Jackiw, es más conveniente introducir la ligadura mediante la segunda opción, ya que permite preservar la estructura simpléctica del sistema. De este modo, se obtiene el Lagrangiano correspondiente al primer proceso de iteración, el cual se expresa como

$$L^{(1)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + (p_y x - p_x y) \dot{\lambda} - H^{(1)}, \quad (5.14)$$

donde el potencial simpléctico asociado al primer proceso de iteración de la ecuación (5.14) es⁵

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2). \quad (5.15)$$

La inclusión explícita de la ligadura en el Lagrangiano modifica la estructura del espacio de fase del sistema y en consecuencia se hace necesaria la definición de una nueva variable simpléctica cuyas componentes reflejen esta modificación, en este sentido, la variable simpléctica del primer proceso de iteración queda definida como

$$\xi^{(1)} = (x, p_x, y, p_y, \lambda). \quad (5.16)$$

Teniendo las nuevas componentes definidas en la variable simpléctica de la ecuación (5.16), ahora, la matriz simpléctica del primer proceso de iteración del formalismo se construye a partir de la siguiente expresión

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial \xi_i^{(1)}} - \frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial \xi_j^{(1)}}, \quad (5.17)$$

una vez más, con el objetivo de conseguir identificar $a_j^{(1)}$, el nuevo Lagrangiano de la ecuación (5.14) se debe expresar de la siguiente forma

$$L^{(1)} = a_i^{(1)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(1)} - H^{(1)}(\xi). \quad (5.18)$$

A partir de la definición dada en la ecuación (5.16) se logra identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_x^{(1)} \rightarrow x, \quad \xi_{p_x}^{(1)} \rightarrow p_x, \quad \xi_y^{(1)} \rightarrow y, \quad \xi_{p_y}^{(1)} \rightarrow p_y, \quad \xi_\lambda^{(1)} \rightarrow \lambda, \quad (5.19)$$

seguidamente, mediante la comparación entre las ecuaciones (5.18) y (5.14), se obtienen de manera directa las componentes de la uno forma canónica asociada al primer proceso de iteración, las cuales están dadas por

$$a_x^{(1)} \rightarrow p_x, \quad a_{p_x}^{(1)} \rightarrow 0, \quad a_y^{(1)} \rightarrow p_y, \quad a_{p_y}^{(1)} \rightarrow 0, \quad a_\lambda^{(1)} \rightarrow (p_y x - p_x y). \quad (5.20)$$

⁴El cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$ se encuentra en el apéndice A.3.

⁵La obtención del potencial simpléctico $H^{(1)}$ se muestra en el apéndice A.4.

Una vez realizadas las identificaciones tanto de las componentes de la variable simpléctica como de los elementos de la uno forma del primer proceso de iteración del método, utilizando las ecuaciones (5.19) y (5.20) en la definición dada para el cálculo de la matriz simpléctica, ecuación (5.17), se calculan sus correspondientes elementos sin omitir que esta es una cantidad antisimétrica, de esta manera, resulta⁶

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} & x & p_x & y & p_y & \lambda \\ x & 0 & -1 & 0 & 0 & p_y \\ p_x & 1 & 0 & 0 & 0 & -y \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x \\ p_y & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ \lambda & -p_y & y & p_x & -x & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.21)$$

Una vez calculada la matriz simpléctica, se debe verificar si existe un modo cero no trivial asociado a esta matriz, para lo cual se propone el siguiente vector de componentes arbitrarias

$$\nu_i^{(1)} \equiv \left(\nu_x^{(1)} \quad \nu_{p_x}^{(1)} \quad \nu_y^{(1)} \quad \nu_{p_y}^{(1)} \quad \nu_\lambda^{(1)} \right), \quad (5.22)$$

el cual para el caso de la matriz simpléctica de la ecuación (5.21) toma la siguiente forma⁷

$$\nu_i^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)} \left(y \quad p_y \quad -x \quad -p_x \quad 1 \right), \quad (5.23)$$

donde $\nu_\lambda^{(1)}$ es una constante arbitraria. La existencia de este vector no nulo indica que la matriz simpléctica es singular; en consecuencia, resulta necesario analizar si dicho modo cero da lugar a ligaduras adicionales en la teoría. Sin embargo, es posible mostrar que no resultan nuevas ligaduras,⁸ este hecho constituye un indicio directo, proporcionado por el método de Faddeev-Jackiw, de que el modelo de Christ-Lee presenta invariancia gauge.

Una vez identificada la invariancia gauge del modelo objeto de estudio, la ausencia de nuevas ligaduras impide la regularización de la matriz simpléctica al mismo tiempo que no permite la obtención de los corchetes entre las variables dinámicas. Para resolver este inconveniente, resulta necesaria la incorporación de una condición de gauge, la cual rompe la simetría gauge de la teoría y elimina las variables no físicas del sistema, la condición a utilizar es la siguiente [2]

$$b - c \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0, \quad (5.24)$$

donde b y c son constantes diferentes de cero. La condición de gauge introducida en (5.24) en el marco del formalismo de Faddeev-Jackiw debe incorporarse mediante un multiplicador de Lagrange ρ al Lagrangiano del primer proceso de iteración, ecuación (5.14), con lo cual se consigue el Lagrangiano del segundo proceso iterativo del método, dicho esto la expresión resultante es

$$L^{(2)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + (p_y x - p_x y) \dot{\lambda} + \left[b - c \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] \dot{\rho} - H^{(2)}, \quad (5.25)$$

⁶El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$ se encuentra en el apéndice A.5.

⁷La obtención de las componentes del vector $\nu_i^{(1)}$ se encuentra en el apéndice A.6.

⁸La demostración de la no obtención de una nueva ligadura en la teoría se encuentra en el apéndice A.7.

donde el nuevo potencial simpléctico correspondiente al segundo proceso de iteración se obtiene a partir de evaluar la condición de gauge en el potencial simpléctico del proceso iterativo inmediatamente anterior, es decir en la ecuación (5.15),⁹ resultando

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x^2 + y^2). \quad (5.26)$$

Al haber considerado la condición de gauge dentro del Lagrangiano del sistema, la variable simpléctica debe incluir la modificación hecha sobre el espacio de fase, de ahí que se proceda a definir una nueva variable la cual posee las siguientes componentes

$$\xi^{(2)} = (x, p_x, y, p_y, \lambda, \rho), \quad (5.27)$$

seguidamente, la matriz simpléctica teniendo en cuenta la definición de nueva variable simpléctica, ahora se construye de la siguiente manera

$$f_{ij}^{(2)} = \frac{\partial a_j^{(2)}}{\partial \xi_i^{(2)}} - \frac{\partial a_i^{(2)}}{\partial \xi_j^{(2)}}, \quad (5.28)$$

ahora, con el objetivo de conseguir identificar $a_j^{(2)}$ el Lagrangiano del segundo proceso de iteración de la ecuación (5.25) se debe expresar de la forma

$$L^{(2)} = a_i^{(2)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(2)} - H^{(2)}(\xi). \quad (5.29)$$

De la definición hecha en la ecuación (5.27) de manera sencilla se identifica las siguientes equivalencias

$$\xi_x^{(2)} \rightarrow x, \quad \xi_{p_x}^{(2)} \rightarrow p_x, \quad \xi_y^{(2)} \rightarrow y, \quad \xi_{p_y}^{(2)} \rightarrow p_y, \quad \xi_\lambda^{(2)} \rightarrow \lambda, \quad \xi_\rho^{(2)} \rightarrow \rho, \quad (5.30)$$

además, mediante la comparativa entre las ecuaciones (5.29) y (5.25) se consigue reconocer

$$\begin{aligned} a_x^{(2)} \rightarrow p_x, \quad a_{p_x}^{(2)} \rightarrow 0, \quad a_y^{(2)} \rightarrow p_y, \quad a_{p_y}^{(2)} \rightarrow 0, \quad a_\lambda^{(2)} \rightarrow (p_y x - p_x y), \\ a_\rho^{(2)} \rightarrow \left[b - c \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right]. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Tras haber identificado las componentes de la variable simpléctica así como también de los elementos de la uno forma canónica del segundo proceso de iteración del formalismo, haciendo uso de las ecuaciones (5.30) y (5.31) en la definición dada en la ecuación (5.28) se calcula las componentes de la matriz simpléctica, de forma que¹⁰

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} & x & p_x & y & p_y & \lambda & \rho \\ x & 0 & -1 & 0 & 0 & p_y & \frac{cy}{x^2+y^2} \\ p_x & 1 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x & -\frac{cx}{x^2+y^2} \\ p_y & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 0 \\ \lambda & -p_y & y & p_x & -x & 0 & 0 \\ \rho & -\frac{cy}{x^2+y^2} & 0 & \frac{cx}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

⁹La obtención del potencial simpléctico $H^{(2)}$ se muestra en el apéndice A.8.

¹⁰El calculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$ se encuentra en el apéndice A.9.

Finalmente, una vez construida la matriz simpléctica, el formalismo de Faddeev-Jackiw aplicado a teorías gauge establece que, al resultar dicha matriz regular, los corchetes generalizados entre las variables dinámicas se obtienen directamente a partir de los elementos de su matriz inversa. Al llevar a cabo este procedimiento, se obtiene que la matriz inversa correspondiente es

$$\left(f_{ij}^{(2)} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccccc} \{, \} & x & p_x & y & p_y & \lambda & \rho \\ \hline x & 0 & \frac{x^2}{x^2+y^2} & 0 & \frac{xy}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{y}{c} \\ p_x & -\frac{x^2}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{xy}{x^2+y^2} & \frac{xp_y-yp_x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{p_y}{c} \\ y & 0 & \frac{xy}{x^2+y^2} & 0 & \frac{y^2}{x^2+y^2} & 0 & \frac{x}{c} \\ p_y & -\frac{xy}{x^2+y^2} & -\frac{xp_y-yp_x}{x^2+y^2} & -\frac{y^2}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{x}{x^2+y^2} & \frac{p_x}{c} \\ \lambda & 0 & -\frac{y}{x^2+y^2} & 0 & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{1}{c} \\ \rho & \frac{y}{c} & \frac{p_y}{c} & -\frac{x}{c} & -\frac{p_x}{c} & \frac{1}{c} & 0 \end{array} \right), \quad (5.33)$$

directamente a partir de la matriz presentada en la ecuación (5.33) se logra identificar los corchetes generalizados de interés los cuales son

$$\left\{ \xi_x^{(2)}, \xi_{p_x}^{(2)} \right\} = \{x, p_x\} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad (5.34)$$

$$\left\{ \xi_x^{(2)}, \xi_{p_y}^{(2)} \right\} = \{x, p_y\} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (5.35)$$

$$\left\{ \xi_{p_x}^{(2)}, \xi_y^{(2)} \right\} = \{p_x, y\} = -\frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (5.36)$$

$$\left\{ \xi_{p_x}^{(2)}, \xi_{p_y}^{(2)} \right\} = \{p_x, p_y\} = \frac{xp_y - yp_x}{x^2 + y^2} = 0, \quad (5.37)$$

$$\left\{ \xi_y^{(2)}, \xi_{p_y}^{(2)} \right\} = \{y, p_y\} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}. \quad (5.38)$$

Estos resultados se encuentran en concordancia con los provenientes del tratamiento estándar de Dirac [2, 3].

Capítulo 6

Teoría electromagnética de Maxwell

La teoría electromagnética desarrollada por James Clerk Maxwell en el siglo XIX unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en un conjunto de ecuaciones diferenciales, las cuales describen tanto la dinámica como la propagación de estas interacciones. En la formulación original, la teoría se expresa en términos de los campos eléctrico y magnético, además de sus relaciones con las fuentes de carga y corriente. En el marco relativista, esta se interpreta como una teoría gauge abeliana en la cual la formulación Lagrangiana introduce el vector potencial A_μ , a partir del cual se define el tensor de intensidad del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$. Una característica importante de la teoría es su invariancia gauge, la cual restringe los grados de libertad físicos del sistema y permite interpretar, en el contexto cuántico, al campo electromagnético como la descripción de partículas sin masa y de espín uno, los fotones, que actúan como mediadores de la interacción electromagnética [19].

Este capítulo se centra en el estudio de la teoría electromagnética de Maxwell mediante la formulación simpléctica de Faddeev-Jackiw, con el propósito de caracterizar su estructura dinámica, identificar las simetrías gauge presentes en la teoría y los campos físicos. En el contexto de la teoría de campos, la presencia de un número infinito de grados de libertad conduce de manera natural a la introducción de una densidad Lagrangiana, que en el caso del electromagnetismo clásico, la dinámica del campo está descrita por una densidad Lagrangiana singular que depende del potencial electromagnético y de sus derivadas espacio-temporales, y cuya estructura refleja el carácter gauge de la teoría.

Por lo anterior, el análisis se inicia a partir de la densidad Lagrangiana que describe la teoría de Maxwell en el vacío,¹ la cual, trabajando en unidades naturales, se expresa como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

esta densidad puede reescribirse de manera equivalente en una forma de primer orden, lineal en las derivadas temporales del campo,² condición fundamental para la formulación simpléctica, resultando

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + A_0 (\partial_i \Pi^i) - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}. \quad (6.2)$$

Esta forma permite identificar de manera inmediata la estructura característica del formalismo de Faddeev-Jackiw, en la cual la densidad Lagrangiana se escribe como una combinación de un término

¹A lo largo de este capítulo se emplea la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

²El cálculo explícito de la linealización de la densidad Lagrangiana de Maxwell se encuentra en el apéndice B.1.

cinético de primer orden y un potencial simpléctico, es decir que de manera compacta puede expresarse como

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_i \Pi^i - \mathcal{H}^{(0)}, \quad (6.3)$$

en esta expresión, de manera inmediata se logra identificar al comparar las ecuaciones (6.2) y (6.3) que el potencial simpléctico inicial corresponde a

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - A_0 (\partial_i \Pi^i) + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}. \quad (6.4)$$

Con el propósito de construir la estructura simpléctica del sistema, se introduce la variable simpléctica correspondiente al proceso inicial, la cual posee las siguientes componentes

$$\xi^{(0)} = (A_i, \Pi^i, A_0). \quad (6.5)$$

De esta última expresión se identifican de forma inmediata las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(0)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{A_0}^{(0)} \rightarrow A_0. \quad (6.6)$$

A partir de la expresión de la densidad Lagrangiana de primer orden, ecuación (6.3), es posible identificar directamente los elementos de la uno forma de manera que se obtiene

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (6.7)$$

Estos coeficientes permiten determinar de manera sistemática los elementos de la matriz simpléctica inicial, la cual se define de la siguiente manera

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (6.8)$$

Teniendo en cuenta que la matriz simpléctica satisface, por definición, la propiedad de antisimetría se puede extraer de manera directa información de sus entradas sin necesidad de un cálculo explícito. Una vez determinadas dichas componentes mediante esta propiedad y calculados de forma explícita los elementos restantes, la matriz simpléctica resultante adopta la siguiente forma³

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & A_0 \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.9)$$

De manera inmediata se observa que la matriz simpléctica obtenida es singular, en particular esta presenta un modo cero asociado a un autovalor nulo el cual se escribe así

$$\nu^{A(0)} = (0 \quad 0 \quad \gamma^{(0)}(\mathbf{x})), \quad (6.10)$$

donde $\gamma^{(0)}$ es una función arbitraria. La existencia de este modo cero en la teoría, dentro del marco de análisis del formalismo simpléctico, señala la presencia de una ligadura, la cual viene dada por⁴

$$\Omega^{(0)} = \partial_i \Pi^i = 0. \quad (6.11)$$

³El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice B.2.

⁴La obtención de la ligadura $\Omega^{(0)}$ se encuentra en el apéndice B.3.

Esta ligadura Lagrangiana debe incorporarse a la formulación dinámica con el fin de restringir el espacio de fase a las configuraciones físicas. En el formalismo de Faddeev-Jackiw, la inclusión de las ligaduras se realiza directamente a nivel de la densidad Lagrangiana al adicionarlas en el sector canónico mediante un multiplicador de Lagrange λ , en esta formulación resulta conveniente introducir la ligadura a través de la derivada temporal del multiplicador, es decir $\dot{\lambda}\Omega^{(0)}$, dado que de esta manera se puede preservar la estructura de primer orden de la densidad Lagrangiana. De este modo, la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración del método resulta ser

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \partial_i \Pi^i - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (6.12)$$

donde el potencial simpléctico asociado al primer proceso de iteración presente en la densidad Lagrangiana de la ecuación (6.12) es⁵

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}. \quad (6.13)$$

El hecho de haber incorporado la ligadura en la densidad Lagrangiana tiene como consecuencia directa la modificación del espacio de fase de la teoría, es debido a esto que resulta necesario definir una nueva variable simpléctica en la cual se evidencie este cambio, esta nueva variable es propia del primer proceso de iteración del método, dicho esto se tiene

$$\xi^{(1)} = (A_i, \Pi^i, \lambda). \quad (6.14)$$

Seguidamente, al considerar la expresión anterior, es posible identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(1)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \lambda. \quad (6.15)$$

A partir de la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración presentado en la ecuación (6.12), se logra identificar de forma inmediata los elementos de la uno forma de este proceso iterativo, con lo cual

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \partial_i \Pi^i. \quad (6.16)$$

Las anteriores equivalencias permiten determinar cada uno de los elementos de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración mediante el uso de la siguiente expresión

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}. \quad (6.17)$$

Una vez más, al considerar las implicaciones que tiene la propiedad de antisimetría de esta matriz y tras realizar el cálculo de los elementos restantes, la matriz simpléctica resultante toma la siguiente forma⁶

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & \lambda \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \lambda & 0 & -\partial_j^x & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.18)$$

⁵La obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$ se muestra en el apéndice B.4.

⁶El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice B.5.

En este punto, con el propósito de analizar la existencia de un modo cero no trivial, se propone el siguiente vector de componentes arbitrarias, cuya forma general está dada por

$$\nu^{A(1)} \equiv \left(\alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right). \quad (6.19)$$

El cual, para el caso específico de la matriz presentada en la ecuación (6.18), adopta la siguiente forma⁷

$$\nu^{A(1)} = \left(\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \quad 0 \quad \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right), \quad (6.20)$$

donde $\gamma^{(1)}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria. La presencia de un modo cero no trivial implica que la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sea singular, por lo que resulta necesario analizar la posible aparición de nuevas ligaduras en la teoría. Sin embargo, es posible mostrar que no se obtiene una ligadura adicional,⁸ este resultado constituye una señal característica del método de Faddeev-Jackiw que indica que la teoría electromagnética de Maxwell es una teoría invariante de gauge.

En consecuencia, la matriz simpléctica asociada al primer proceso de iteración permanece singular. La persistencia de la singularidad refleja que la naturaleza gauge de la teoría aún está presente. Para resolver esta dificultad, se hace necesaria la incorporación de una condición de gauge. En este trabajo se adopta el gauge de Coulomb, el cual está dado por [10]

$$\partial_i A_i = 0. \quad (6.21)$$

La condición de gauge en el formalismo simpléctico debe incorporarse mediante un multiplicador de Lagrange φ a la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración del método, mostrada en la ecuación (6.12), lo cual genera la expresión correspondiente al segundo proceso iterativo, la cual es

$$\mathcal{L}^{(2)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \partial_i \Pi^i + \dot{\varphi} \partial_i A_i - \mathcal{H}^{(2)}, \quad (6.22)$$

donde el potencial simpléctico que corresponde al segundo proceso iterativo que se presenta en la ecuación (6.22) tiene la siguiente forma⁹

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}. \quad (6.23)$$

La inclusión del gauge de Coulomb en la densidad Lagrangiana de la teoría implica una modificación en el espacio de fase, es debido a esto que resulta necesaria la definición de una nueva variable simpléctica para el segundo proceso de iteración, en esta variable se evidencia el cambio mencionado anteriormente, por ende

$$\xi^{(2)} = (A_i, \Pi^i, \lambda, \varphi). \quad (6.24)$$

A continuación, teniendo en cuenta la definición previa, se pueden identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(2)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \lambda, \quad \xi_{\varphi}^{(2)} \rightarrow \varphi. \quad (6.25)$$

Ahora, a partir de la densidad Lagrangiana de la ecuación (6.22) se consigue identificar de forma sencilla los elementos de la uno forma, los cuales son

$$K_{A_i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(2)} \rightarrow 0, \quad K_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \partial_i \Pi^i, \quad K_{\varphi}^{(2)} \rightarrow \partial_i A_i. \quad (6.26)$$

⁷La obtención de las componentes del vector $\nu^{A(1)}$ se encuentra en el apéndice B.6.

⁸La demostración de la no obtención de una nueva ligadura en la teoría se presenta en el apéndice B.7.

⁹La obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(2)}$ se muestra en el apéndice B.8.

Estas equivalencias permiten determinar cada uno de los elementos que pertenecen a la matriz simpléctica del segundo proceso iterativo, haciendo uso de la siguiente ecuación

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(2)}(\mathbf{y})}. \quad (6.27)$$

En consecuencia, la matriz simpléctica correspondiente a este proceso iterativo está dada por¹⁰

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ \lambda & 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ \varphi & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.28)$$

Finalmente, una vez que se ha obtenido la matriz simpléctica regular, el formalismo de Faddeev-Jackiw, aplicado a teorías invariantes de gauge, indica que los corchetes generalizados que involucran las variables dinámicas de la teoría se obtienen a partir de los elementos que conforman la inversa de dicha matriz. Tras haber realizado este procedimiento,¹¹ se obtiene el siguiente resultado

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} \{, \} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) & 0 & -\frac{\partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \\ \Pi^i & -\left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) & 0 & -\frac{\partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & 0 \\ \lambda & 0 & -\frac{\partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & 0 & -\frac{1}{\partial_i^x \partial_i^x} \\ \varphi & -\frac{\partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & 0 & \frac{1}{\partial_i^x \partial_i^x} & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.29)$$

De la anterior matriz, se logra identificar los corchetes generalizados de interés [10], los cuales son consistentes con los resultados que se derivan del método de Dirac [4, 5]

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{ A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y}) \} = 0, \quad (6.30)$$

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{ A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y}) \} = \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (6.31)$$

$$\left\{ \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{ \Pi^i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y}) \} = 0. \quad (6.32)$$

¹⁰El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice B.9.

¹¹La obtención explícita de la matriz simpléctica inversa se presenta en el apéndice B.10.

Capítulo 7

Teoría de Chern-Simons abeliana pura

La teoría de Chern-Simons abeliana pura constituye una teoría gauge definida en $(2 + 1)$ dimensiones espacio-temporales, que presenta propiedades distintas a las convencionales en $(3 + 1)$ dimensiones. Su formulación se basa en la construcción de una acción a partir de un término topológico que depende únicamente del vector potencial A_μ y de sus derivadas, sin recurrir al término cinético cuadrático típico de la teoría de Maxwell. Cuando este término constituye la totalidad de la acción del campo, se habla propiamente de teoría de Chern-Simons pura [20]. Una propiedad de gran relevancia que posee esta teoría es que su densidad Lagrangiana depende linealmente de las derivadas espacio-temporales del campo, es decir, posee una estructura de primer orden, a su vez esto implica que la formulación del modelo ya se encuentra, de manera natural, en una forma cercana a la estructura simpléctica.

En este capítulo se aborda la teoría de Chern-Simons abeliana pura mediante la formulación simpléctica de Faddeev-Jackiw, con el propósito de describir el modelo a partir de su estructura simpléctica e identificar las propiedades topológicas que lo caracterizan. Dado que la densidad Lagrangiana es singular y de primer orden en las derivadas temporales, el formalismo simpléctico se presenta como un medio natural para su tratamiento, dado que permite construir la matriz simpléctica del sistema y analizar de manera sistemática las ligaduras y simetrías gauge involucradas.

La formulación simpléctica de esta teoría, inicia a partir de la densidad Lagrangiana de Chern-Simons pura, la cual se expresa de la siguiente manera¹

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho, \quad (7.1)$$

donde κ se conoce como constante de acoplamiento adimensional y $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ es el símbolo de Levi-Civita. Esta densidad Lagrangiana, inicialmente con dependencia lineal en las derivadas espacio-temporales, se puede reescribir de manera equivalente en una forma de primer orden en derivadas temporales,² es decir

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \dot{A}_i A_j + \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0. \quad (7.2)$$

La expresión anterior permite identificar de forma inmediata la estructura particular que posee el formalismo simpléctico, en la cual la densidad Lagrangiana se escribe como una combinación de

¹En todo este capítulo se utilizará la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$.

²La descomposición espacio-temporal y estructura simpléctica de la densidad Lagrangiana de Chern-Simons se presenta en el apéndice C.1.

un termino cinético de primer orden, además de un potencial simpléctico, al tener en cuenta esta consideración, la densidad Lagrangiana de la teoría de Chern-Simons en la forma compacta se expresa así

$$\mathcal{L}^{(0)} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \dot{A}_i - \mathcal{H}^{(0)}. \quad (7.3)$$

Al realizar la comparativa entre las ecuaciones (7.2) y (7.3) es posible identificar de manera inmediata que el potencial simpléctico corresponde a la siguiente expresión

$$\mathcal{H}^{(0)} = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0. \quad (7.4)$$

Seguidamente, y con el propósito de consolidar la estructura simpléctica de la teoría, se introduce la variable simpléctica del proceso inicial, la cual se expresa de la siguiente manera

$$\xi^{(0)} = (A_i, A_0). \quad (7.5)$$

Directamente de la última expresión, es posible obtener las siguientes equivalencias, las cuales identifican de forma explícita las componentes de esta variable simpléctica, es decir

$$\xi_{A_i}^{(0)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{A_0}^{(0)} \rightarrow A_0. \quad (7.6)$$

Ahora, a partir de la densidad Lagrangiana de la ecuación (7.3), se consigue identificar los elementos de la uno forma, los cuales son

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (7.7)$$

A continuación, al hacer uso de las equivalencias previas, se procede con el cálculo de cada uno de los elementos que componen la matriz simpléctica inicial, haciendo uso de la siguiente expresión

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (7.8)$$

Para ello, se realiza el cálculo de los respectivos elementos,³ mediante los cuales se determina que la matriz simpléctica resultante tiene la siguiente forma

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cc} & A_j & A_0 \\ \hline A_i & -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} & 0 \\ A_0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.9)$$

De forma inmediata es posible identificar que la matriz simpléctica resultante es singular además, en particular, esta presenta un modo cero asociado a un autovalor nulo dado por

$$\nu^{A(0)} = (0 \quad \beta^{(0)}(\mathbf{x})), \quad (7.10)$$

donde $\beta^{(0)}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria. La existencia de este modo cero en la teoría es un indicativo de la aparición de una ligadura, la cual tiene la siguiente forma⁴

$$\Omega^{(0)} = \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) = 0. \quad (7.11)$$

³El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice C.2.

⁴La obtención de la ligadura $\Omega^{(0)}$ se encuentra en el apéndice C.3.

Esta ligadura debe incorporarse a la formulación dinámica con el fin de restringir el espacio de fase a las configuraciones físicas. En la formulación simpléctica, la inclusión de las ligaduras se realiza directamente a nivel de la densidad Lagrangiana de la teoría al adicionarlas en el sector canónico mediante un multiplicador de Lagrange λ , con el propósito de mantener la estructura de primer orden en las derivadas temporales, resulta conveniente introducir la ligadura de la siguiente manera $\dot{\lambda}\Omega^{(0)}$. De este modo, la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración del método resulta ser

$$\mathcal{L}^{(1)} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \dot{A}_i + \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) \dot{\lambda}, \quad (7.12)$$

de forma inmediata, es evidente que en la densidad Lagrangiana anterior, no está presente el potencial simpléctico asociado al primer proceso de iteración del método, esto se debe a la naturaleza propia de la teoría de Chern-Simons abeliana pura, es posible mostrar que el potencial simpléctico se anula por completo,⁵ por lo tanto

$$\mathcal{H}^{(1)} = 0. \quad (7.13)$$

Como consecuencia directa de la incorporación de la ligadura en la densidad Lagrangiana, la modificación del espacio de fase de la teoría requiere definir una nueva variable simpléctica en la cual se vea plasmada de forma clara dicha variación. Entonces, la variable simpléctica asociada al primer proceso de iteración del método es

$$\xi^{(1)} = (A_i, \lambda). \quad (7.14)$$

En esta instancia, directamente de la definición previa, es posible identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(1)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \lambda. \quad (7.15)$$

A partir de la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración mostrada en la ecuación (7.12), de forma sencilla se puede reconocer las siguientes equivalencias sobre los elementos de la uno forma de esta iteración, es decir

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j, \quad K_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j). \quad (7.16)$$

Posteriormente, utilizando las definiciones anteriores, se procede a calcular los elementos que conforman la matriz simpléctica del primer proceso iterativo, esto se consigue mediante la siguiente definición

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}. \quad (7.17)$$

Tras calcular los elementos de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración,⁶ resulta la siguiente expresión

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{2\pi} \left(\begin{array}{c|cc} & A_j & \lambda \\ \hline A_i & -\varepsilon^{ij} & \varepsilon^{ik} \partial_k^x \\ \lambda & \varepsilon^{jk} \partial_k^x & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.18)$$

⁵La demostración respecto a la anulación del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$ se muestra en el apéndice C.4.

⁶El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice C.5.

Seguidamente, con el objetivo de determinar la existencia del modo cero no trivial, se propone el siguiente vector en su forma mas general posible

$$\nu^{A(1)} \equiv \left(\alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \right). \quad (7.19)$$

Es posible mostrar que para el caso particular de la matriz presente en la ecuación (7.18), el autovector adopta la siguiente estructura⁷

$$\nu^{A(1)} = \left(\partial_i^x \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \right), \quad (7.20)$$

donde $\beta^{(1)}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria. La existencia del modo cero no trivial permite afirmar que la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es singular. De acuerdo con la formulación simpléctica, esta singularidad sugiere la posible aparición de una ligadura adicional en la teoría, no obstante, se verifica de manera inmediata que dicha ligadura no surge. Esto se debe a que el potencial simpléctico correspondiente al primer proceso de iteración se anula completamente, como se mostró en la ecuación (7.13), en consecuencia, se obtiene directamente que $\Omega^{(1)} = 0$. Este resultado, a su vez, indica también que la teoría de Chern-Simons abeliana pura es una teoría invariante de gauge.

En consecuencia, la matriz simpléctica del primer proceso de iteración mantiene su singularidad, lo cual indica que la naturaleza gauge de la teoría sigue estando presente. Ante este hecho, resulta necesaria la incorporación de una condición de gauge. En este trabajo se elige el gauge de Coulomb, el cual está dado por [12]

$$\partial_i A_i = 0. \quad (7.21)$$

La condición de gauge en el formalismo simpléctico se debe incorporar mediante un multiplicador de Lagrange φ a la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración del método, mostrada en la ecuación (7.12). Esto permite obtener la densidad Lagrangiana del segundo proceso de iteración, la cual se muestra en la siguiente expresión

$$\mathcal{L}^{(2)} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \dot{A}_i + \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) \dot{\lambda} + \frac{\kappa}{2\pi} (\partial_i A_i) \dot{\varphi}. \quad (7.22)$$

Un hecho a destacar es que la condición de gauge de Coulomb se incorpora con el mismo coeficiente $\left(\frac{\kappa}{2\pi}\right)$ que posee la ligadura $\Omega^{(0)}$, a fin de mantener la homogeneidad en la estructura simpléctica. En este punto se evidencia nuevamente la ausencia del potencial simpléctico en la densidad Lagrangiana. Esto se debe a que, al haberse anulado el potencial simpléctico en el paso iterativo anterior, dicha anulación se transmite directamente al presente proceso, dando como resultado que el potencial simpléctico continúe siendo idénticamente nulo.

La inclusión del gauge de Coulomb en la densidad Lagrangiana de la teoría implica una modificación en el espacio de fase, por ende, resulta necesaria la definición de una nueva variable simpléctica para este proceso iterativo que evidencie el cambio mencionado anteriormente, con lo cual

$$\xi^{(2)} = (A_i, \lambda, \varphi). \quad (7.23)$$

Seguidamente, teniendo en cuenta la definición previa, se pueden identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(2)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \lambda, \quad \xi_{\varphi}^{(2)} \rightarrow \varphi. \quad (7.24)$$

⁷La obtención de las componentes del vector $\nu^{A(1)}$ se encuentra en el apéndice C.6.

Ahora, a partir de la densidad Lagrangiana de la ecuación (7.22) se consigue identificar de forma sencilla los elementos de la uno forma, los cuales están dados por

$$K_{A_i}^{(2)} \rightarrow \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j, \quad K_\lambda^{(2)} \rightarrow \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j), \quad K_\varphi^{(2)} \rightarrow \frac{\kappa}{2\pi} (\partial_i A_i). \quad (7.25)$$

Estas equivalencias permiten determinar cada uno de los elementos que pertenecen a la matriz simpléctica del segundo proceso iterativo, haciendo uso de la siguiente ecuación

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(2)}(\mathbf{y})}. \quad (7.26)$$

De manera que tras haber determinado los elementos que componen la respectiva matriz simpléctica,⁸ esta adopta la siguiente forma

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{2\pi} \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & -\varepsilon^{ij} & \varepsilon^{ik} \partial_k^x & -\partial_i^x \\ \lambda & \varepsilon^{jk} \partial_k^x & 0 & 0 \\ \varphi & -\partial_j^x & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.27)$$

Finalmente, una vez que se ha obtenido la matriz simpléctica regular, la formulación simpléctica para teorías invariantes de gauge, indica que los corchetes generalizados que involucran las variables dinámicas de la teoría se obtienen a partir de los elementos que conforman la inversa de dicha matriz. Tras haber realizado este procedimiento,⁹ se obtiene el siguiente resultado

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \left(\begin{array}{c|ccc} \{, \} & A_j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} + \varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) & \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} & -\frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \\ \lambda & \varepsilon^{jk} \frac{\partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} & 0 & -\frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \\ \varphi & -\frac{\partial_j^x}{\partial_l^x \partial_l^x} & \frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.28)$$

De la matriz previa, se logra identificar que el corchete generalizado de interés corresponde a

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})\} = \frac{2\pi}{\kappa} \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} + \varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.29)$$

Este resultado es consistente con lo reportado mediante otros enfoques, como el método de Dirac y la formulación de Hamilton-Jacobi [6, 13].

⁸El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice C.7.

⁹La obtención explícita de la matriz simpléctica inversa se presenta en el apéndice C.8.

Capítulo 8

Teoría de Maxwell-Chern-Simons

La teoría de Maxwell-Chern-Simons corresponde a una teoría gauge definida en $(2 + 1)$ dimensiones espacio-temporales, la construcción de su densidad Lagrangiana se realiza a partir del acoplamiento de las densidades Lagrangianas de Maxwell y Chern-Simons, es esta última la que provee una masa topológica para el campo gauge [12, 20]. Algunas de las propiedades que posee la densidad Lagrangiana de esta teoría son su singularidad y su invariancia gauge. Este capítulo se dedica al análisis de la teoría de Maxwell-Chern-Simons bajo la formulación simpléctica de Faddeev-Jackiw con el fin de evidenciar el efecto de los términos topológicos en su descripción.

Como punto de partida de la formulación simpléctica, se toma la densidad Lagrangiana de la teoría de Maxwell-Chern-Simons, la cual se muestra a continuación¹

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu)A_\rho, \quad (8.1)$$

es posible reescribir esta densidad Lagrangiana en una expresión equivalente, la cual posea dependencia lineal respecto a las derivadas temporales del campo,² la cual es una condición necesaria para llevar a cabo la formulación simpléctica. Dicho esto, la expresión correspondiente es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) A_0 + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j \\ & - \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) \left(\varepsilon^{kl} \partial_k A_l \right). \end{aligned} \quad (8.2)$$

A partir de la densidad Lagrangiana obtenida, se consigue identificar que esta satisface la estructura propia de la formulación simpléctica, la cual es una combinación de un término cinético de primer orden y un potencial simpléctico, debido a eso, la densidad Lagrangiana expresada en una forma compacta será

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_i \Pi^i - \mathcal{H}^{(0)}. \quad (8.3)$$

Mediante la comparación de las ecuaciones (8.2) y (8.3) se concluye que el potencial simpléctico

¹Para este capítulo, se emplea la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$.

²El cálculo explícito de la linealización de la densidad Lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons se encuentra en el apéndice D.I.

correspondiente al proceso inicial del formalismo esta dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} = & \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) A_0 - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j \\ & + \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) \left(\varepsilon^{kl} \partial_k A_l \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Con la finalidad de construir la matriz simpléctica inicial, se procede con la introducción de su correspondiente variable simpléctica, la cual posee las componentes que se muestran a continuación

$$\xi^{(0)} = (A_i, \Pi^i, A_0) \quad (8.5)$$

De manera directa, a partir de la ultima expresión, se consiguen las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(0)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{A_0}^{(0)} \rightarrow A_0. \quad (8.6)$$

Ahora, a partir de la densidad Lagrangiana de la ecuación (8.3) se identifican los elementos de la uno forma, los cuales se expresan de la siguiente manera

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (8.7)$$

A continuación, haciendo uso de las equivalencias anteriores, se procede a realizar el cálculo de los elementos que conforman la matriz simpléctica inicial mediante la siguiente definición

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (8.8)$$

Una vez determinados dichos elementos,³ la matriz simpléctica del proceso inicial adopta la siguiente forma

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & A_0 \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.9)$$

En este punto, se identifica que la matriz simpléctica resultante es singular, además de presentar un modo cero asociado al autovalor nulo el cual corresponde a la siguiente expresión

$$\nu^{A(0)} = (0 \quad 0 \quad \gamma^{(0)}(\mathbf{x})), \quad (8.10)$$

donde $\gamma^{(0)}$ es una función arbitraria. La existencia del modo cero no trivial en la teoría, en el marco de la formulación simpléctica, indica la presencia de una ligadura, la cual está dada por⁴

$$\Omega^{(0)} = \partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j = 0. \quad (8.11)$$

La ligadura previa se debe incorporar a la formulación dinámica con el objetivo de restringir el espacio de fase a las configuraciones netamente físicas. En la formulación simpléctica, las ligaduras se

³El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice D.2.

⁴La obtención de la ligadura $\Omega^{(0)}$ se encuentra en el apéndice D.3.

introducen en el sector canónico de la densidad Lagrangiana mediante un multiplicador de Lagrange λ , en esta formulación resulta conveniente introducir la ligadura a través de la derivada temporal del multiplicador, es decir $\dot{\lambda}\Omega^{(0)}$, esto se justifica dado que preserva la estructura de primer orden en las derivadas temporales. De este modo, la densidad Lagrangiana resultante del primer proceso de iteración corresponde a

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (8.12)$$

donde el potencial simpléctico del primer proceso de iteración presente en la ecuación anterior está dado por⁵

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j + \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l). \quad (8.13)$$

Como consecuencia de la incorporación de la ligadura en la densidad Lagrangiana se tiene la modificación del espacio de fase de la teoría, por ende, se requiere definir una nueva variable simpléctica en la cual se evidencie este cambio. Dicho esto, la variable se expresa así

$$\xi^{(1)} = (A_i, \Pi^i, \lambda). \quad (8.14)$$

A partir de la definición previa, es posible identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(1)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \lambda. \quad (8.15)$$

Mientras que a partir de la densidad Lagrangiana de la ecuación (8.12) se consiguen reconocer los elementos de la uno forma, los cuales se presentan bajo las siguientes equivalencias

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\lambda}^{(1)} \rightarrow \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right). \quad (8.16)$$

Haciendo uso de las equivalencias previas es posible determinar cada uno de los elementos de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración mediante la siguiente expresión

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})}. \quad (8.17)$$

Una vez determinados en su totalidad los elementos que conforman la respectiva matriz simpléctica,⁶ se tiene como resultado lo que se muestra a continuación

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & \lambda \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \lambda & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x & -\partial_j^x & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.18)$$

⁵La obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$ se muestra en el apéndice D.4.

⁶El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice D.5.

El siguiente paso en la formulación simpléctica es determinar la existencia de un modo cero no trivial asociado a la matriz anterior. Para ello, se propone el siguiente vector de componentes arbitrarias, el cual está dado por

$$\nu^{A(1)} \equiv \left(\alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right). \quad (8.19)$$

Para el caso particular de la matriz simpléctica de la ecuación (8.18), es posible mostrar que el modo cero adopta la siguiente forma⁷

$$\nu^{A(1)} = \left(\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right), \quad (8.20)$$

donde $\gamma^{(1)}(\mathbf{x})$ es una función arbitraria. La existencia de un modo cero no trivial implica que la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sea singular, por lo que resulta necesario analizar la posible aparición de una nueva ligadura en la teoría. No obstante, puede demostrarse que no emerge ninguna ligadura adicional.⁸ Este resultado constituye un indicio claro, dentro de la formulación simpléctica, de que la teoría de Maxwell-Chern-Simons es invariante de gauge.

El hecho de que la matriz simpléctica en el primer proceso iterativo permanezca singular indica que la naturaleza de gauge de la teoría aún está presente. Por esta razón, es necesario incorporar una condición de gauge. En este caso, se ha elegido el gauge de Coulomb, el cual se expresa de la siguiente manera [12]

$$\partial_i A_i = 0. \quad (8.21)$$

La condición de gauge anterior se incorpora a la densidad Lagrangiana del primer proceso iterativo de la formulación mediante un multiplicador de Lagrange φ . Este procedimiento da lugar a la densidad Lagrangiana correspondiente al segundo proceso iterativo, la cual se presenta a continuación

$$\mathcal{L}^{(2)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) + \dot{\varphi} \partial_i A^i - \mathcal{H}^{(2)}, \quad (8.22)$$

donde el potencial simpléctico presente en la ecuación anterior correspondiente al segundo proceso iterativo tiene la siguiente forma⁹

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j + \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l). \quad (8.23)$$

La incorporación del gauge de Coulomb en la densidad Lagrangiana genera modificaciones en el espacio de fase de la teoría, por lo tanto se requiere una nueva variable simpléctica para el segundo proceso de iteración, en la cual se vean reflejados dichos cambios, es decir

$$\xi^{(2)} = (A_i, \Pi^i, \lambda, \varphi). \quad (8.24)$$

A continuación, teniendo en cuenta la definición anterior, es posible identificar las siguientes equivalencias

$$\xi_{A_i}^{(2)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{\lambda}^{(2)} \rightarrow \lambda, \quad \xi_{\varphi}^{(2)} \rightarrow \varphi. \quad (8.25)$$

⁷La obtención de las componentes del vector $\nu^{A(1)}$ se encuentra en el apéndice D.6.

⁸La demostración de la no obtención de una nueva ligadura en la teoría se presenta en el apéndice D.7.

⁹La obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(2)}$ se muestra en el apéndice D.8.

Mientras que de la densidad Lagrangiana de la ecuación (8.22) se consigue identificar los elementos de la uno forma, los cuales vienen dados por

$$K_{A_i}^{(2)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(2)} \rightarrow 0, \quad K_\lambda^{(2)} \rightarrow \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right), \quad K_\varphi^{(2)} \rightarrow \partial_i A_i. \quad (8.26)$$

Son las equivalencias previas las que permiten determinar cada uno de los elementos que componen la matriz simpléctica del segundo proceso iterativo haciendo uso de la siguiente ecuación

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(2)}(\mathbf{y})}. \quad (8.27)$$

Tras haber determinado cada una de las entradas,¹⁰ la matriz simpléctica resultante se expresa de la siguiente manera

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x & -\partial_i^x \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ \lambda & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ \varphi & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.28)$$

Finalmente, una vez obtenida la matriz simpléctica regular, los corchetes generalizados entre las variables dinámicas de la teoría se obtienen directamente a partir de los elementos de su inversa. Una vez realizado el proceso de inversión de dicha matriz,¹¹ resulta

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} \{, \} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) & 0 & -\frac{\partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \\ \Pi^i & -\left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) & \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) & -\frac{\partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \\ \lambda & 0 & -\frac{\partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & 0 & -\frac{1}{\partial_i^x \partial_i^x} \\ \varphi & -\frac{\partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \frac{\partial_k^x}{\partial_i^x \partial_i^x} & \frac{1}{\partial_i^x \partial_i^x} & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.29)$$

De esta matriz se extraen los corchetes generalizados fundamentales para esta teoría [12], los cuales son consistentes con lo obtenido a partir de enfoques como el método de Dirac y la formulación de Hamilton-Jacobi [6, 7, 13]

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})\} = 0, \quad (8.30)$$

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (8.31)$$

$$\left\{ \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{\Pi^i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.32)$$

¹⁰El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el apéndice D.9.

¹¹La obtención explícita de la matriz simpléctica inversa se presenta en el apéndice D.10.

Capítulo 9

Conclusiones

Este trabajo ha desarrollado, de manera sistemática, la formulación simpléctica para teorías gauge. Para ello, se realizó el análisis detallado de un sistema con un número finito de grados de libertad y de tres teorías de campos. En cada una de las teorías mencionadas, se obtuvieron sus respectivos corchetes generalizados, los cuales permiten describir la evolución temporal de las variables dinámicas en este tipo de sistemas singulares.

La aplicación del método de Faddeev-Jackiw se realizó inicialmente en el modelo de Christ-Lee, ya que, al tratarse de un sistema con un número finito de grados de libertad y con simetría gauge, constituyó un punto de partida idóneo para caracterizar la estructura de ligaduras, identificar las variables físicas y obtener sus corchetes generalizados. En el estudio de las teorías de campos, destaca la obtención de la ligadura correspondiente a la teoría electromagnética de Maxwell, la cual corresponde a la ley de Gauss en ausencia de fuentes. Asimismo, fue posible reconocer la simetría gauge presente en cada una de estas teorías; en consecuencia, se impuso la condición de gauge de Coulomb con el fin de eliminar dicha arbitrariedad y garantizar la regularidad de la matriz simpléctica. También se determinaron los campos físicos de cada teoría; no obstante, cabe señalar que, si se desea establecer cuáles componentes de dichos campos son realmente independientes, es necesario recurrir al método de Dirac.

Seguidamente, la consistencia de los resultados obtenidos en este trabajo se verificó mediante la comparación de la estructura de los corchetes generalizados derivados en la formulación simpléctica con aquellos provenientes del tratamiento estándar de Dirac para las cuatro teorías analizadas, lo cual constituye una confirmación de la viabilidad del método de Faddeev-Jackiw como un procedimiento alternativo, confiable y consistente para la descripción de estas teorías gauge. En el caso particular de las teorías de Chern-Simons pura y Maxwell-Chern-Simons, se realizó además una comprobación adicional al contrastar dichos resultados con los obtenidos a partir de la formulación de Hamilton-Jacobi, encontrándose nuevamente una concordancia completa. Para estas dos últimas teorías, también fue posible evidenciar sus rasgos característicos; en la teoría de Chern-Simons pura se manifestó su naturaleza estrictamente topológica mediante la anulación del potencial simpléctico, mientras que en la teoría de Maxwell-Chern-Simons se observó el efecto introducido por el acoplamiento con términos de esta naturaleza.

A partir del desarrollo de este trabajo, fue posible identificar las ventajas y limitaciones del método de

Faddeev-Jackiw frente al tratamiento estándar de Dirac en la descripción dinámica de sistemas singulares. Entre las principales ventajas destaca la eliminación conceptual de la igualdad débil ya que en el formalismo simpléctico las ligaduras se imponen directamente como igualdades fuertes. Asimismo, el método optimiza el cálculo algebraico al permitir la obtención directa de los corchetes generalizados a partir de la inversa de la matriz simpléctica, sin necesidad de calcularlos uno a uno mediante corchetes de Poisson elementales.

Por el contrario, se identificaron ciertas limitaciones. En primer lugar, no fue posible obtener todas las ligaduras del sistema; específicamente, aquellas que provienen de los momentos canónicos no se lograron determinar. Además, dado que la formulación requiere expresar el sistema mediante un Lagrangiano de primer orden con un espacio de variables ampliado, aparecieron variables que carecen de significado físico. Lo cual, si bien no impide la identificación de las verdaderas variables físicas, sí imposibilita, junto con la limitación anterior, determinar de manera inmediata qué variables o componentes de los campos físicos son verdaderamente independientes.

Como trabajo para investigaciones posteriores, se recomienda realizar el análisis de las teorías de Maxwell, CS pura y MCS bajo distintas condiciones de gauge. Asimismo, resulta de interés extender la formulación simpléctica a otras teorías gauge, con el propósito de explorar el alcance y las posibles limitaciones del método de Faddeev-Jackiw en contextos más generales.

Apéndice A

Modelo de Christ-Lee

A.1. Linealización del Lagrangiano

Considerando que, como condición primordial para la aplicación del formalismo de Faddeev-Jackiw se requiere un Lagrangiano de primer orden en las velocidades, lo cual se consigue expresando el Lagrangiano en su forma canónica, para ello, primero se determinan los momentos canónicos de la siguiente manera

$$p_x \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x} + zy, \quad (\text{A.1})$$

$$p_y \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \dot{y} - zx, \quad (\text{A.2})$$

$$p_z \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Posteriormente, haciendo uso de la transformada de Legendre, se obtiene el Hamiltoniano del sistema, el cual se expresa de forma general en términos de coordenadas generalizadas y momentos canónicos conjugados así

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i = f_i(q,p)},$$

al hacer uso de la anterior definición, resulta

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + z(xy - yx) - \frac{1}{2}z^2(x^2 + y^2) + V(x^2 + y^2) \Big|_{\dot{x}, \dot{y}},$$

donde se ha considerado la ecuación (A.3) para identificar que el tercer término del Hamiltoniano es cero. Ahora, al evaluar la expresión resultante haciendo uso de las ecuaciones (A.1) y (A.2), reemplazando \dot{x} y \dot{y} , se obtiene

$$H = p_x(p_x - zy) + p_y(p_y + zx) - \frac{1}{2}(p_x - zy)^2 - \frac{1}{2}(p_y + zx)^2 + zx(p_y + zx) - zy(p_x - zy) - \frac{1}{2}z^2(x^2 + y^2) + V(x^2 + y^2),$$

expandiendo los productos y desarrollando los términos cuadráticos, el Hamiltoniano puede reescribirse como

$$H = p_x^2 - p_x z y + p_y^2 + p_y z x - \frac{1}{2} p_x^2 + p_x z y - \frac{1}{2} (z y)^2 - \frac{1}{2} p_y^2 - p_y z x - \frac{1}{2} (z x)^2 + p_y z x + (z x)^2 - p_x z y + (z y)^2 - \frac{1}{2} (z x)^2 - \frac{1}{2} (z y)^2 + V(x^2 + y^2).$$

Al operar los términos semejantes, el Hamiltoniano toma la siguiente forma

$$H = \frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 - z(p_x y - p_y x) + V(x^2 + y^2), \quad (\text{A.4})$$

así, haciendo uso de la ecuación (A.4), se encuentra el Lagrangiano canónico presente en la ecuación (5.2)

$$L_C = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{1}{2} p_x^2 - \frac{1}{2} p_y^2 - z(p_y x - p_x y) - V(x^2 + y^2).$$

A.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$

Tomando en cuenta las propiedades de la matriz simpléctica que permite reducir la cantidad de elementos por calcular, las componentes independientes mediante la definición de la ecuación (5.6) son

$$\begin{aligned} f_{x,p_x}^{(0)} &= \frac{\cancel{\partial a_x^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_x^{(0)}}} - \frac{\partial a_x^{(0)}}{\partial \xi_{p_x}^{(0)}} = -\frac{\cancel{\partial p_x}}{\partial p_x} = -1, \\ f_{x,y}^{(0)} &= \frac{\partial a_y^{(0)}}{\partial \xi_x^{(0)}} - \frac{\partial a_x^{(0)}}{\partial \xi_y^{(0)}} = \frac{\cancel{\partial p_y}}{\cancel{\partial x}} - \frac{\cancel{\partial p_x}}{\cancel{\partial y}} = 0, \\ f_{x,p_y}^{(0)} &= \frac{\cancel{\partial a_y^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_x^{(0)}}} - \frac{\partial a_x^{(0)}}{\partial \xi_{p_y}^{(0)}} = -\frac{\cancel{\partial p_x}}{\cancel{\partial p_y}} = 0, \\ f_{x,z}^{(0)} &= \frac{\cancel{\partial a_z^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_x^{(0)}}} - \frac{\partial a_x^{(0)}}{\partial \xi_z^{(0)}} = -\frac{\cancel{\partial p_x}}{\cancel{\partial z}} = 0, \\ f_{p_x,y}^{(0)} &= \frac{\partial a_y^{(0)}}{\partial \xi_{p_x}^{(0)}} - \frac{\cancel{\partial a_y^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_y^{(0)}}} = \frac{\cancel{\partial p_y}}{\cancel{\partial p_x}} = 0, \\ f_{p_x,p_y}^{(0)} &= \frac{\cancel{\partial a_y^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_{p_x}^{(0)}}} - \frac{\cancel{\partial a_y^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_{p_y}^{(0)}}} = 0, \\ f_{p_x,z}^{(0)} &= \frac{\cancel{\partial a_z^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_{p_x}^{(0)}}} - \frac{\cancel{\partial a_z^{(0)}}}{\cancel{\partial \xi_z^{(0)}}} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{y,p_y}^{(0)} &= \frac{\partial a_{p_y}^{(0)}}{\partial \xi_y^{(0)}} - \frac{\partial a_y^{(0)}}{\partial \xi_{p_y}^{(0)}} = -\frac{\partial p_y}{\partial p_y} = -1, \\
f_{y,z}^{(0)} &= \frac{\partial a_z^{(0)}}{\partial \xi_y^{(0)}} - \frac{\partial a_y^{(0)}}{\partial \xi_z^{(0)}} = -\frac{\partial p_y}{\partial z} = 0, \\
f_{p_y,z}^{(0)} &= \frac{\partial a_z^{(0)}}{\partial \xi_{p_y}^{(0)}} - \frac{\partial a_{p_y}^{(0)}}{\partial \xi_z^{(0)}} = 0.
\end{aligned}$$

Estos elementos se organizan dentro de la estructura matricial de la ecuación (5.10).

A.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$

Para llevar a cabo el cálculo de las ligaduras generadas por la singularidad de la matriz simpléctica, la cual implica la existencia de modos cero, se recurre a la siguiente definición

$$\Omega^{(0)} = \nu_i^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}} = 0, \quad (\text{A.5})$$

colocando de forma explícita los términos de la sumatoria sobre el índice i e identificando a partir de la ecuación (5.12) los valores de las componentes del autovector, resulta

$$\Omega^{(0)} = \cancel{\nu_x^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_x^{(0)}}} + \cancel{\nu_{p_x}^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_{p_x}^{(0)}}} + \cancel{\nu_y^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_y^{(0)}}} + \cancel{\nu_{p_y}^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_{p_y}^{(0)}}} + \nu_z^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_z^{(0)}}.$$

Ahora, reemplazando el valor del potencial simpléctico a partir de la ecuación (5.3) además de identificar la componente de la variable simpléctica usando la ecuación (5.8), se obtiene

$$\Omega^{(0)} = \nu_z^{(0)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + z (p_y x - p_x y) + V(x^2 + y^2) \right],$$

al realizar la derivada parcial, la expresión de la ligadura toma la siguiente forma

$$\Omega^{(0)} = \nu_z^{(0)} (p_y x - p_x y).$$

En este punto considerando la definición dada en la ecuación (A.5), se evidencia la igualdad a cero, por lo tanto, considerando que el elemento $\nu_z^{(0)}$ es una constante arbitraria y que además la igualdad se debe satisfacer en cualquier caso, se concluye la expresión para la ligadura de la ecuación (5.13)

$$\Omega^{(0)} = p_y x - p_x y = 0.$$

A.4. Obtención del potencial simpléctico $H^{(1)}$

La obtención del potencial simpléctico del primer proceso de iteración del formalismo de Faddeev-Jackiw resulta a partir de la siguiente definición

$$H^{(1)} = H^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0},$$

es decir, es necesario evaluar la ligadura de ecuación (5.13) en el Hamiltoniano de la ecuación (5.3), esto es

$$H^{(1)} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + z(p_yx - p_xy) + V(x^2 + y^2) \Big|_{(p_yx - p_xy)=0},$$

con lo cual, finalmente se obtiene el resultado presentado en la ecuación (5.15)

$$H^{(1)} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x^2 + y^2).$$

A.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$

Considerando las propiedades de la matriz simpléctica que permite reducir la cantidad de elementos que son necesario calcular, las componentes independientes mediante la definición de la ecuación (5.17) son

$$\begin{aligned} f_{x,p_x}^{(1)} &= \frac{\cancel{\partial a_{p_x}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_x^{(1)}}} - \frac{\partial a_x^{(1)}}{\partial \xi_{p_x}^{(1)}} = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = -1, \\ f_{x,y}^{(1)} &= \frac{\partial a_y^{(1)}}{\partial \xi_x^{(1)}} - \frac{\partial a_x^{(1)}}{\partial \xi_y^{(1)}} = \frac{\cancel{\partial p_y}}{\cancel{\partial x}} - \frac{\cancel{\partial p_x}}{\cancel{\partial y}} = 0, \\ f_{x,p_y}^{(1)} &= \frac{\cancel{\partial a_{p_y}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_x^{(1)}}} - \frac{\partial a_x^{(1)}}{\partial \xi_{p_y}^{(1)}} = -\frac{\cancel{\partial p_x}}{\cancel{\partial p_y}} = 0, \\ f_{x,\lambda}^{(1)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(1)}}{\partial \xi_x^{(1)}} - \frac{\partial a_x^{(1)}}{\partial \xi_\lambda^{(1)}} = \frac{\partial}{\partial x}(p_yx - p_xy) - \frac{\cancel{\partial p_x}}{\cancel{\partial \lambda}} = p_y, \\ f_{p_x,y}^{(1)} &= \frac{\partial a_y^{(1)}}{\partial \xi_{p_x}^{(1)}} - \frac{\cancel{\partial a_{p_x}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_y^{(1)}}} = \frac{\cancel{\partial p_y}}{\cancel{\partial p_x}} = 0, \\ f_{p_x,p_y}^{(1)} &= \frac{\cancel{\partial a_{p_y}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_{p_x}^{(1)}}} - \frac{\cancel{\partial a_{p_x}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_{p_y}^{(1)}}} = 0, \\ f_{p_x,\lambda}^{(1)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(1)}}{\partial \xi_{p_x}^{(1)}} - \frac{\cancel{\partial a_{p_x}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_\lambda^{(1)}}} = \frac{\partial}{\partial p_x}(p_yx - p_xy) = -y, \\ f_{y,p_y}^{(1)} &= \frac{\cancel{\partial a_{p_y}^{(1)}}}{\cancel{\partial \xi_y^{(1)}}} - \frac{\partial a_y^{(1)}}{\partial \xi_{p_y}^{(1)}} = -\frac{\partial p_y}{\partial p_y} = -1, \\ f_{y,\lambda}^{(1)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(1)}}{\partial \xi_y^{(1)}} - \frac{\partial a_y^{(1)}}{\partial \xi_\lambda^{(1)}} = \frac{\partial}{\partial y}(p_yx - p_xy) - \frac{\cancel{\partial p_y}}{\cancel{\partial \lambda}} = -p_x, \end{aligned}$$

$$f_{p_y, \lambda}^{(1)} = \frac{\partial a_\lambda^{(1)}}{\partial \xi_{p_y}^{(1)}} - \frac{\partial a_{p_y}^{(1)}}{\cancel{\partial \xi_\lambda^{(1)}}} \overset{0}{=} \frac{\partial}{\partial p_y} (p_y x - p_x y) = x.$$

Los elementos calculados se organizan dentro de la estructura matricial de la ecuación (5.21).

A.6. Obtención de componentes del vector $\nu_i^{(1)}$

Para conocer las componentes del vector arbitrario planteado en la ecuación (5.22) y que efectivamente sea autovector de la matriz simpléctica presentada en la ecuación (5.21) con autovalor cero, se debe satisfacer la siguiente definición

$$\nu_i^{(1)} f_{ij}^{(1)}(\xi) = 0,$$

reemplazando la expresión en su forma matricial resulta

$$\left(\begin{array}{ccccc} \nu_x^{(1)} & \nu_{p_x}^{(1)} & \nu_y^{(1)} & \nu_{p_y}^{(1)} & \nu_\lambda^{(1)} \end{array} \right) \left(\begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 0 & 0 & p_y \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ -p_y & y & p_x & -x & 0 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Al realizar el producto del vector fila con la matriz presentes en el lado izquierdo de la anterior ecuación se obtiene

$$\left(C_1 \ C_2 \ C_3 \ C_4 \ C_5 \right) = \left(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right), \quad (\text{A.6})$$

donde las componentes del vector resultante denotadas por C_1, C_2, C_3, C_4 y C_5 son

$$\begin{aligned} C_1 &= \nu_{p_x}^{(1)} - p_y \nu_\lambda^{(1)}, \\ C_2 &= -\nu_x^{(1)} + y \nu_\lambda^{(1)}, \\ C_3 &= \nu_{p_y}^{(1)} + p_x \nu_\lambda^{(1)}, \\ C_4 &= -\nu_y^{(1)} - x \nu_\lambda^{(1)}, \\ C_5 &= p_y \nu_x^{(1)} - y \nu_{p_x}^{(1)} - p_x \nu_y^{(1)} + x \nu_{p_y}^{(1)}. \end{aligned}$$

Mediante la comparación componente a componente para que se cumpla la igualdad de la ecuación (A.6) implica las siguientes relaciones

$$\nu_x^{(1)} = y \nu_\lambda^{(1)}, \quad \nu_{p_x}^{(1)} = p_y \nu_\lambda^{(1)}, \quad \nu_y^{(1)} = -x \nu_\lambda^{(1)}, \quad \nu_{p_y}^{(1)} = -p_x \nu_\lambda^{(1)}, \quad \nu_\lambda^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)},$$

con las cuales, se obtiene el autovector mostrado en la ecuación (5.23)

$$\nu_i^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)} \left(y \quad p_y \quad -x \quad -p_x \quad 1 \right).$$

A.7. Demostración de la no aparición de ligaduras adicionales

En el primer proceso de iteración del método de Faddeev-Jackiw, el cálculo de las ligaduras generadas por la singularidad de la matriz simpléctica de la ecuación (5.21) se consigue haciendo uso de la siguiente definición

$$\Omega^{(1)} = \nu_i^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(1)}} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Expandiendo los términos de la sumatoria sobre el índice i , resulta

$$\Omega^{(1)} = \nu_x^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_x^{(1)}} + \nu_{p_x}^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_{p_x}^{(1)}} + \nu_y^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_y^{(1)}} + \nu_{p_y}^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_{p_y}^{(1)}} + \nu_\lambda^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_\lambda^{(1)}},$$

y al reemplazar a partir de la ecuación (5.23) los valores de las componentes del autovector y factorizar de cada término la constante arbitraria $\nu_\lambda^{(1)}$ se obtiene

$$\Omega^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)} \left[y \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_x^{(1)}} + p_y \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_{p_x}^{(1)}} - x \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_y^{(1)}} - p_x \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_{p_y}^{(1)}} + 1 \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_\lambda^{(1)}} \right].$$

Ahora, al reemplazar el valor del potencial simpléctico del primer proceso de iteración a partir de la ecuación (5.15), además de identificar las componentes de la variable simpléctica usando la ecuación (5.19), conduce a

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)} \left\{ y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right] + p_y \frac{\partial}{\partial p_x} \left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right] \right. \\ \left. - x \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right] - p_x \frac{\partial}{\partial p_y} \left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Para evaluar las derivadas parciales de la expresión anterior, es importante señalar que las derivadas con respecto a los momentos canónicos se calculan de manera directa. Sin embargo, en el caso de las derivadas que involucran a las coordenadas, resulta necesario aplicar la regla de la cadena, dado que la dependencia funcional se presenta a través de combinaciones cuadráticas de dichas coordenadas, con lo cual

$$\Omega^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)} \left[y \frac{dV}{d(x^2 + y^2)}(2x) + p_y p_x - x \frac{dV}{d(x^2 + y^2)}(2y) - p_x p_y \right],$$

al simplificar los términos semejantes de la expresión anterior, se observa que todas las contribuciones se cancelan entre sí, lo que da lugar a

$$\Omega^{(1)} = 0.$$

Es importante destacar que el cero obtenido no corresponde al cero impuesto por la definición (A.7). En este caso, la anulación de $\Omega^{(1)}$ es consecuencia directa de la cancelación exacta de los términos que componen la expresión, lo que indica que el modo cero no genera una nueva ligadura en la teoría.

A.8. Obtención del potencial simpléctico $H^{(2)}$

Para obtener el potencial simpléctico del segundo proceso de iteración en el formalismo de Faddeev-Jackiw dentro del estudio de teorías gauge, se hace uso de la siguiente definición

$$H^{(2)} = H^{(1)} \Big|_{\text{gauge}},$$

para este caso, se ha elegido como condición de gauge la expresión presentada en la ecuación (5.24), entonces será esta la que debe ser evaluada en la ecuación (5.15), esto es

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x^2 + y^2) \Big|_{b-c \arctan(\frac{y}{x})=0}.$$

Debido a que el potencial simpléctico del primer proceso de iteración no depende ni de c , ni de b , ni de $\arctan(\frac{y}{x})$ el potencial resultante no se ve modificado funcionalmente, de ahí que se obtenga lo presentado en la ecuación (5.26)

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}p_x^2 + \frac{1}{2}p_y^2 + V(x^2 + y^2).$$

Cabe destacar que este resultado es específico del caso considerado, en general, la imposición de una condición de fijación de gauge puede causar modificaciones funcionales en el potencial simpléctico, lo cual ocurre cuando se tiene una dependencia explícita de la condición de gauge elegida para la aplicación del método.

A.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$

Al tener en cuenta la propiedad de antisimetría que presenta la matriz simpléctica, se reduce el numero de componentes independientes que es necesario calcular; haciendo uso de la definición dada en la ecuación (5.28) se tiene

$$\begin{aligned} f_{x,p_x}^{(2)} &= \frac{\cancel{\partial a_x^{(2)}}^0}{\cancel{\partial \xi_x^{(2)}}} - \frac{\partial a_x^{(2)}}{\partial \xi_{p_x}^{(2)}} = -\frac{\partial p_x}{\partial p_x} = -1, \\ f_{x,y}^{(2)} &= \frac{\partial a_y^{(2)}}{\partial \xi_x^{(2)}} - \frac{\partial a_x^{(2)}}{\partial \xi_y^{(2)}} = \frac{\cancel{\partial p_y}^0}{\cancel{\partial x}} - \frac{\cancel{\partial p_x}^0}{\cancel{\partial y}} = 0, \\ f_{x,p_y}^{(2)} &= \frac{\cancel{\partial a_y^{(2)}}^0}{\cancel{\partial \xi_x^{(2)}}} - \frac{\partial a_x^{(2)}}{\partial \xi_{p_y}^{(2)}} = -\frac{\cancel{\partial p_x}^0}{\cancel{\partial p_y}} = 0, \\ f_{x,\lambda}^{(2)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(2)}}{\partial \xi_x^{(2)}} - \frac{\partial a_x^{(2)}}{\partial \xi_\lambda^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial x} (p_y x - p_x y) - \frac{\cancel{\partial p_x}^0}{\cancel{\partial \lambda}} = p_y, \\ f_{x,\rho}^{(2)} &= \frac{\partial a_\rho^{(2)}}{\partial \xi_x^{(2)}} - \frac{\partial a_x^{(2)}}{\partial \xi_\rho^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial x} \left[b - c \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] - \frac{\cancel{\partial p_x}^0}{\cancel{\partial \rho}} \\ &= -\frac{c}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left[-\frac{y}{x^2} \right] = \frac{cy}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{p_x, y}^{(2)} &= \frac{\partial a_y^{(2)}}{\partial \xi_{p_x}^{(2)}} - \frac{\partial a_{p_x}^{(2)}}{\partial \xi_y^{(2)}} = \frac{\partial p_y}{\partial p_x} = 0, \\
f_{p_x, p_y}^{(2)} &= \frac{\partial a_{p_y}^{(2)}}{\partial \xi_{p_x}^{(2)}} - \frac{\partial a_{p_x}^{(2)}}{\partial \xi_{p_y}^{(2)}} = 0, \\
f_{p_x, \lambda}^{(2)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(2)}}{\partial \xi_{p_x}^{(2)}} - \frac{\partial a_{p_x}^{(2)}}{\partial \xi_\lambda^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial p_x} (p_y x - p_x y) = -y, \\
f_{p_x, \rho}^{(2)} &= \frac{\partial a_\rho^{(2)}}{\partial \xi_{p_x}^{(2)}} - \frac{\partial a_{p_x}^{(2)}}{\partial \xi_\rho^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial p_x} \left[b - c \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] = 0, \\
f_{y, p_y}^{(2)} &= \frac{\partial a_{p_y}^{(2)}}{\partial \xi_y^{(2)}} - \frac{\partial a_y^{(2)}}{\partial \xi_{p_y}^{(2)}} = -\frac{\partial p_y}{\partial p_y} = -1, \\
f_{y, \lambda}^{(2)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(2)}}{\partial \xi_y^{(2)}} - \frac{\partial a_y^{(2)}}{\partial \xi_\lambda^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial y} (p_y x - p_x y) - \frac{\partial p_y}{\partial \lambda} = -p_x, \\
f_{y, \rho}^{(2)} &= \frac{\partial a_\rho^{(2)}}{\partial \xi_y^{(2)}} - \frac{\partial a_y^{(2)}}{\partial \xi_\rho^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[b - c \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] - \frac{\partial p_y}{\partial \rho} \\
&= -\frac{c}{1 + \left(\frac{y}{x} \right)^2} \left[\frac{1}{x} \right] = -\frac{cx}{x^2 + y^2}, \\
f_{p_y, \lambda}^{(2)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(2)}}{\partial \xi_{p_y}^{(2)}} - \frac{\partial a_{p_y}^{(2)}}{\partial \xi_\lambda^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial p_y} (p_y x - p_x y) = x, \\
f_{p_y, \rho}^{(2)} &= \frac{\partial a_\rho^{(2)}}{\partial \xi_{p_y}^{(2)}} - \frac{\partial a_{p_y}^{(2)}}{\partial \xi_\rho^{(2)}} = \frac{\partial}{\partial p_y} \left[b - c \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] = 0, \\
f_{\lambda, \rho}^{(2)} &= \frac{\partial a_\rho^{(2)}}{\partial \xi_\lambda^{(2)}} - \frac{\partial a_\lambda^{(2)}}{\partial \xi_\rho^{(2)}} \\
&= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[b - c \arctan \left(\frac{y}{x} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \rho} (p_y x - p_x y) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Estos elementos que han sido calculados son organizados dentro de la estructura matricial de la ecuación (5.32).

Apéndice B

Teoría electromagnética de Maxwell

B.1. Linealización de la densidad Lagrangiana de Maxwell

De manera análoga al modelo de partículas analizado en la sección anterior, la aplicación del método de Faddeev-Jackiw a teorías de campos exige reescribir la densidad Lagrangiana de la ecuación (6.1) de modo que dependa únicamente de derivadas temporales de primer orden del campo. Inicialmente, se define el tensor de campo electromagnético de la siguiente forma

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Para conseguir la linealización de la densidad Lagrangiana, es necesario realizar el siguiente calculo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}] \\ &= -\frac{1}{4} \left\{ \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\alpha\beta}] F^{\alpha\beta} + F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F^{\alpha\beta}] \right\}. \end{aligned}$$

Se observa que en el segundo término del lado derecho el tensor electromagnético con índices contravariantes puede expresarse en términos de sus componentes covariantes mediante el uso explícito de la métrica de Minkowski, de modo que la expresión anterior puede reescribirse como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \left\{ F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\alpha\beta}] + F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [\eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\rho} F_{\lambda\rho}] \right\}.$$

Dado que las componentes de la métrica son constantes, estas pueden extraerse de la derivada, lo que conduce a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \left\{ F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\alpha\beta}] + \eta^{\alpha\lambda} \eta^{\beta\rho} F_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\lambda\rho}] \right\}.$$

Subiendo ahora los índices del tensor electromagnético externo a la derivada en el segundo término mediante la métrica, se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{4} \left\{ F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\alpha\beta}] + F^{\lambda\rho} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} [F_{\lambda\rho}] \right\}.$$

En este punto, se reconoce que, tras renombrar los índices mudos en el segundo término, específicamente $\lambda \rightarrow \alpha$ y $\rho \rightarrow \beta$, ambos términos resultan idénticos; en consecuencia, la expresión puede simplificarse a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)}.$$

Ahora, se escribe el tensor electromagnético en términos de las derivadas del potencial, con lo cual

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial (\partial_\alpha A_\beta)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial (\partial_\beta A_\alpha)}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] \\ &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \left[\eta_\alpha^\mu \eta_\beta^\nu - \eta_\beta^\mu \eta_\alpha^\nu \right] \\ &= -\frac{1}{2} [F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}] \\ &= F^{\nu\mu}. \end{aligned}$$

Seguidamente, se procede con la definición del momento canónico, el cual se obtiene directamente a partir de la derivada de la densidad Lagrangiana con respecto a la derivada temporal del campo así

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0}.$$

Con el fin de reescribir la densidad Lagrangiana en una forma adecuada para el análisis simpléctico, se procede ahora a separar explícitamente las contribuciones temporales y espaciales del tensor electromagnético para lo cual se expande la densidad Lagrangiana como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{0\nu} F^{0\nu} - \frac{1}{4} F_{i\nu} F^{i\nu},$$

lo que, al desarrollar la contracción de índices conduce a

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{00} F^{00} - \frac{1}{4} F_{0j} F^{0j} - \frac{1}{4} F_{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}.$$

Dado que el tensor electromagnético es antisimétrico, el término F_{00} se anula de inmediato mientras que los términos mixtos pueden reagruparse de manera que

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij}.$$

Al elevar los índices espaciales y teniendo en cuenta la convención métrica adoptada, esta expresión puede reescribirse como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}.$$

Identificando ahora el momento canónico previamente definido, se obtiene finalmente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}.$$

Con el objetivo de llevar la densidad Lagrangiana a una forma de primer orden en derivadas temporales se introduce la siguiente identidad nula

$$\dot{A}_i \Pi^i - \dot{A}_i \Pi^i = \dot{A}_i \Pi^i - (\partial_0 A_i) \Pi^i,$$

cuya suma no altera la dinámica del sistema, de este modo, la densidad Lagrangiana puede escribirse como

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i - (\partial_0 A_i) \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}.$$

Ahora bien, a partir de la definición del momento canónico espacial

$$\begin{aligned} \Pi^i &= F^{i0} \\ &= F_{0i} \\ &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0, \end{aligned}$$

se sigue inmediatamente que

$$\partial_0 A_i = \Pi^i + \partial_i A_0.$$

Sustituyendo esta relación en la expresión anterior de la densidad Lagrangiana, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - (\Pi^i + \partial_i A_0) \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \\ &= \dot{A}_i \Pi^i - \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \\ &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \Pi^i (\partial_i A_0) - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}. \end{aligned}$$

Finalmente, al integrar por partes el tercer término y despreciar la contribución del término de superficie en la frontera, la densidad Lagrangiana adopta la forma presentada en la ecuación (6.2)

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + A_0 (\partial_i \Pi^i) - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}.$$

B.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Para realizar el cálculo de los elementos de la matriz simpléctica correspondiente al proceso inicial se hace uso de la definición dada en la ecuación (6.8) teniendo en cuenta los elementos presentados en las ecuaciones (6.6) y (6.7). Ahora bien, aunque la matriz simpléctica es antisimétrica por construcción, una consecuencia inmediata de esta propiedad es la anulación de las componentes situadas sobre la diagonal principal, sin embargo, al trabajar con una notación indicial compacta algunas de estas componentes corresponden en realidad a bloques matriciales asociados a índices espaciales internos. Con esto en mente, la antisimetría únicamente garantiza que dichos bloques sean matrices antisimétricas, mas no que se anulen idénticamente. Por esta razón, resulta necesario calcular explícitamente los bloques correspondientes a A_i y Π^i , como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} M_{A_i, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\cancel{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}^0}{\cancel{\delta A_i(\mathbf{x})}^0} - \frac{\cancel{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}^0}{\cancel{\delta A_j(\mathbf{y})}^0} = 0, \\ M_{\Pi^i, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\cancel{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}^0}{\cancel{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}^0} - \frac{\cancel{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}^0}{\cancel{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}^0} = 0. \end{aligned}$$

En el caso de la componente situada sobre la diagonal principal que involucra a A_0 no es necesario realizar su cálculo de forma explícita puesto que no corresponde a un bloque matricial sino a una

única componente y sobre ella actúa de manera inmediata la propiedad de antisimetría de la matriz simpléctica, lo que garantiza su anulación. Dicho lo anterior, se procede a calcular los elementos por fuera de la diagonal de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
M_{A_i, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
M_{A_i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = 0, \\
M_{\Pi^i, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_i^j \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\
&= \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
M_{\Pi^i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0, \\
M_{A_0, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} = 0, \\
M_{A_0, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0.
\end{aligned}$$

Estos resultados se organizan en la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ presentada en la ecuación (6.9).

B.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$

Con el fin de calcular la ligadura que emerge como consecuencia de la existencia de un modo cero no trivial, se toma como punto de partida la siguiente expresión

$$\Omega^{(0)} = \int d^3x \nu^{A(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{B.1})$$

De acuerdo con la forma explícita del modo cero presentada en la ecuación (6.10), se evidencia que a la anterior definición únicamente contribuye la componente asociada a A_0 , con lo cual la expresión toma la siguiente forma

$$\Omega^{(0)} = \int d^3x \nu^{A_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}).$$

Sustituyendo de forma explícita tanto la componente del modo cero como la de la variable simpléctica, al mismo tiempo, reemplazando a partir de la ecuación (6.4) el potencial simpléctico, se obtiene

$$\Omega^{(0)} = \int d^3x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \int d^3y \left[\frac{1}{2} \Pi^i(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) - A_0(\mathbf{y}) \partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{ij}(\mathbf{y}) F_{ij}(\mathbf{y}) \right].$$

En este punto, la derivada funcional con respecto a la componente A_0 del campo, puede intercambiarse con la integral espacial en \mathbf{y} , dado que ambas operaciones actúan sobre variables independientes

$$\Omega^{(0)} = \int d^3x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \left[\frac{1}{2} \Pi^i(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) - A_0(\mathbf{y}) \partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{ij}(\mathbf{y}) F_{ij}(\mathbf{y}) \right].$$

Se observa que únicamente el segundo término del integrando depende explícitamente de A_0 . Por lo tanto, la derivada funcional actúa de la forma

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)} &= - \int d^3x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^3y [\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y})] \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\ &= - \int d^3x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^3y [\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y})] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Ahora, en la expresión resultante, la delta de Dirac selecciona el valor del integrando en el punto $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, permitiendo la integración directa sobre la variable \mathbf{y} , dando lugar a la siguiente expresión

$$\Omega^{(0)} = - \int d^3x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) [\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x})].$$

Recordando que, de acuerdo con la definición establecida en la ecuación (B.1), se impone la condición $\Omega^{(0)} = 0$, se observa que dicha igualdad debe cumplirse independientemente de la forma específica que adopte la función $\gamma^{(0)}$ la cual es completamente arbitraria. Por lo tanto, la única manera de satisfacer esta condición de manera general es exigir que el integrando se anule, lo que conduce directamente a la ligadura presentada en la ecuación (6.11)

$$\Omega^{(0)} = \partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) = 0.$$

B.4. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$

Para conseguir obtener el potencial simpléctico correspondiente al primer proceso de iteración del formalismo de Faddeev-Jackiw se hace uso de la siguiente definición

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0},$$

lo que indica que resulta necesario evaluar el potencial simpléctico inicial presentado en la ecuación (6.4) en la ligadura obtenida en la sección inmediatamente anterior, es decir

$$\mathcal{H}^{(1)} = \left[\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - A_0 (\partial_i \Pi^i) + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right] \Big|_{\partial_i \Pi^i=0}.$$

Se observa que al imponer la anterior condición el término proporcional a A_0 se anula de manera inmediata y en consecuencia, el potencial simpléctico de primer orden toma la forma

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij},$$

obteniendo la expresión presentada en la ecuación (6.13).

B.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica del primer proceso iterativo del formalismo simpléctico se realiza en base a la definición dada en la ecuación (6.17) y las equivalencias dadas en las ecuaciones (6.15) y (6.16). Considerando las explicaciones dadas en el apéndice B.2 respecto a la necesidad del cálculo explícito de las componentes diagonales de la matriz se tiene

$$M_{A_i, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = 0.$$

En lo que respecta a los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz simpléctica, estos se calculan de la siguiente manera

$$M_{A_i, \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} [\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y})] - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})} = \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_i^j \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\Pi^i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} [\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y})] = \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \partial_j^y \eta_i^j \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\lambda, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} [\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x})] = \partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\lambda, \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} [\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x})] = -\partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\partial_i^x \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Estos resultados se organizan en la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ presentada en la ecuación (6.18).

B.6. Obtención de componentes del vector $\nu^{A(1)}$

Con el fin de determinar la estructura del autovector asociado al autovalor nulo de la matriz simpléctica correspondiente al primer proceso de iteración, se propone el vector con componentes arbitrarias mostrado en la ecuación (6.19), el cual debe satisfacer la siguiente condición de modo cero

$$\int d^3x \nu^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Al sustituir explícitamente el vector general y la matriz simpléctica en la condición de modo cero, se obtiene

$$\int d^3x \begin{pmatrix} \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) & \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) & \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ 0 & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

realizando el producto matricial resulta

$$\begin{aligned} \int d^3x \begin{pmatrix} \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \eta_j^i & -\alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \eta_j^i - \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_j^x & -\beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_i^x \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \int d^3x \begin{pmatrix} \beta_j^{(1)}(\mathbf{x}) & -\alpha_j^{(1)}(\mathbf{x}) - \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_j^x & -\beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_i^x \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Evaluando las integrales término a término y considerando que en los términos que involucran operadores diferenciales se emplea la propiedad de simetría de las funciones que dependen exclusivamente de la diferencia entre dos vectores

$$\partial_i^x f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^y f(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{B.2})$$

con lo anterior, el lado izquierdo de la ecuación toma la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \beta_j^{(1)}(\mathbf{y}) & -\alpha_j^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_j^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & \int d^3x \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

En este punto, se identifica que en los términos con operadores diferenciales, se puede intercambiar el orden entre los operadores diferenciales y la integración, puesto que dichos operadores actúan sobre variables independientes del dominio de integración

$$\begin{pmatrix} \beta_j^{(1)}(\mathbf{y}) & -\alpha_j^{(1)}(\mathbf{y}) + \partial_j^y \gamma^{(1)}(\mathbf{y}) & \partial_i^y \beta_i^{(1)}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de esta igualdad se obtienen las siguientes relaciones

$$\beta_j^{(1)}(\mathbf{y}) = 0, \quad \alpha_j^{(1)}(\mathbf{y}) = \partial_j^y \gamma^{(1)}(\mathbf{y}), \quad \partial_i^y \beta_i^{(1)}(\mathbf{y}) = 0.$$

Por lo tanto, el autovector asociado al autovalor nulo adopta finalmente la forma presentada en la ecuación (6.20)

$$\nu^{A(1)} = \begin{pmatrix} \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) & 0 & \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

B.7. Demostración de la no aparición de ligaduras adicionales

El cálculo de la ligadura correspondiente al primer proceso de iteración del formalismo simpléctico se fundamenta en la siguiente definición

$$\Omega^{(1)} = \int d^3x \nu^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{B.3})$$

Considerando la forma explícita del modo cero presentado en la ecuación (6.20), se identifica que a la anterior definición contribuyen únicamente las componentes asociadas a A_i y el multiplicador de Lagrange λ , con lo que la expresión toma la siguiente forma

$$\Omega^{(1)} = \int d^3x \nu^{A_i}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_i}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \nu^\lambda(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_\lambda(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}).$$

Al reemplazar de forma explícita las componentes del modo cero, las de la variable simpléctica y a partir de la ecuación (6.13) el potencial simpléctico del primer proceso de iteración, se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} = & \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \int d^3y \left[\frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{y}) \Pi^k(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right] \\ & + \int d^3x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \int d^3y \left[\frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{y}) \Pi^k(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right]. \end{aligned}$$

En este punto, se puede intercambiar el orden de aplicación entre las derivadas funcionales y las integrales, dado que dichas derivadas actúan sobre variables independientes del dominio de integración, con esto resulta

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} = & \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{y}) \Pi^k(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right] \\ & + \int d^3x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \left[\frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{y}) \Pi^k(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right]. \end{aligned}$$

Dado que el Hamiltoniano $\mathcal{H}^{(1)}$ no depende del multiplicador de Lagrange λ , el segundo término se anula de manera inmediata, quedando

$$\Omega^{(1)} = \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{y}) \Pi^k(\mathbf{y}) + \frac{1}{4} F_{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right].$$

Se observa que únicamente el segundo término del integrando depende del potencial vectorial, con lo cual

$$\Omega^{(1)} = \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{1}{4} F^{kl}(\mathbf{y}) F_{kl}(\mathbf{y}) \right].$$

Al expresar el tensor electromagnético en función del potencial vectorial y teniendo en cuenta que la derivada funcional distribuida sobre el producto $F^{kl} F_{kl}$ produce contribuciones iguales, la ecuación puede reescribirse en la forma

$$\Omega^{(1)} = \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y F^{kl}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} [\partial_k^y A_l(\mathbf{y}) - \partial_l^y A_k(\mathbf{y})].$$

Seguidamente, se intercambia el orden de aplicación entre las derivadas parciales espaciales y la derivada funcional, dado que actúan sobre variables independientes, de este modo, la expresión resultante es

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y F^{kl}(\mathbf{y}) \left[\partial_k^y \frac{\delta A_l(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \partial_l^y \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y F^{kl}(\mathbf{y}) \left[\partial_k^y \eta_l^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_l^y \eta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[F^{ki}(\mathbf{y}) \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - F^{il}(\mathbf{y}) \partial_l^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right].\end{aligned}$$

Reescribiendo los índices y utilizando la antisimetría del tensor F^{kl}

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \frac{1}{2} \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[F^{ki}(\mathbf{y}) \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + F^{ki}(\mathbf{y}) \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\ &= \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[F^{ki}(\mathbf{y}) \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right].\end{aligned}$$

Haciendo uso de la identidad presentada en la ecuación (B.2) y una vez trasladada la derivada parcial para que actúe sobre la variable \mathbf{x} y conmutando posteriormente el operador diferencial con la integración en \mathbf{y} resulta

$$\Omega^{(1)} = - \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_k^x \int d^3y \left[F^{ki}(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right].$$

Evaluando la integral en \mathbf{y} , la expresión adopta la siguiente forma

$$\Omega^{(1)} = - \int d^3x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_k^x F^{ki}(\mathbf{x}).$$

Realizando una integración por partes y despreciando la contribución del término de superficie en la frontera, la expresión se torna en

$$\Omega^{(1)} = \int d^3x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_i^x \partial_k^x F^{ki}(\mathbf{x}).$$

Finalmente, se observa que debido a la simetría de las derivadas parciales y a la antisimetría del tensor electromagnético

$$\partial_k^x \partial_i^x F^{ki}(\mathbf{x}) = 0,$$

por lo tanto

$$\Omega^{(1)} = 0.$$

Es importante resaltar que el resultado nulo obtenido no se debe al cero impuesto por la definición (B.3). Es decir, la anulación de $\Omega^{(1)}$ surge directamente de la cancelación del integrando, lo cual implica que el modo cero considerado no da lugar a la aparición de una nueva ligadura en la teoría.

B.8. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(2)}$

Con el objetivo de obtener el potencial simpléctico perteneciente al segundo proceso de iteración de la formulación simpléctica dentro del estudio específico de esta teoría invariante de gauge, se toma como punto de partida la siguiente definición

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \Big|_{\text{gauge}}.$$

Como se ha mencionado en el capítulo, la condición de gauge elegida para la teoría electromagnética de Maxwell es el gauge de Coulomb, mostrado en la ecuación (6.21), de manera que deberá ser esta condición la que debe ser evaluada en el potencial simpléctico de la ecuación (6.13), es decir

$$\mathcal{H}^{(2)} = \left[\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right] \Big|_{\partial_i A_i = 0}.$$

Debido a que el potencial simpléctico del primer proceso de iteración no tiene una dependencia explícita de la restricción que impone el gauge de Coulomb, entonces, no se modifica la estructura funcional del potencial simpléctico, obteniéndose finalmente la expresión presentada en (6.23)

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}.$$

Cabe resaltar que este resultado es particular, el hecho de que el potencial simpléctico no se vea modificado funcionalmente por el gauge de Coulomb es propio de esta teoría, en general el potencial simpléctico puede sufrir cambios en su estructura debido a la restricción impuesta por la condición de gauge.

B.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Para los elementos de la matriz simpléctica del segundo proceso iterativo del formalismo simpléctico se parte de la definición dada en la ecuación (6.27) junto a las equivalencias dadas en las ecuaciones (6.25) y (6.26). Considerando las explicaciones dadas en el apéndice B.2 respecto a la necesidad del cálculo explícito de las componentes diagonales de la matriz se tiene

$$M_{A_i, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = 0.$$

Continuando con los elementos por fuera de la diagonal principal de la matriz

$$M_{A_i, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_\lambda^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\lambda^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})} = \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} = 0,$$

$$M_{A_i, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_\varphi^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\varphi^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})} = \partial_j^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} = \partial_j^y \eta_j^i \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\Pi^i, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_j^i \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\Pi^i, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_\lambda^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\lambda^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) \right] = \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \partial_j^y \eta_j^i \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\Pi^i, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_\varphi^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\varphi^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] = \partial_j^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = 0,$$

$$M_{\lambda, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\lambda^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\lambda^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) \right] = \partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\lambda, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\lambda^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\lambda^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) \right] = -\partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\partial_i^x \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\lambda, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_\varphi^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\lambda^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\lambda^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_\varphi^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{y})} \left[\partial_j^x \Pi^j(\mathbf{x}) \right] = \partial_j^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \partial_j^x \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\varphi, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\varphi^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\varphi^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x A_i(\mathbf{x}) \right] = -\partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = -\partial_i^x \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\varphi, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_\varphi^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\varphi^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x A_i(\mathbf{x}) \right] = -\partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$\begin{aligned}
M_{\varphi,\lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} [\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y})] - \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{y})} [\partial_i^x A_i(\mathbf{x})] \\
&= \cancel{\partial_i^y \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})}} \overset{0}{\rightarrow} - \cancel{\partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})}} \overset{0}{\rightarrow} = 0.
\end{aligned}$$

Los resultados mostrados anteriormente, se organizan dentro de la estructura matricial generando lo que se presenta en la ecuación (6.28).

B.10. Obtención explícita de la matriz simpléctica inversa

Como último paso, buscando la obtención de los corchetes generalizados entre las variables dinámicas de la teoría electromagnética de Maxwell, resulta necesario encontrar la inversa de la matriz simpléctica presentada en la ecuación (6.28), como punto de partida para realizarlo, se toma la siguiente ecuación funcional

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{B.4})$$

Dado que la estructura explícita de la matriz inversa no es conocida hasta este punto, se propone el siguiente ansatz general para sus componentes

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_k & \Pi^k & \lambda & \varphi \\ A_j & \tau_{1jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{2jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Pi^j & \chi_{1jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{2jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \lambda & \psi_{1k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_{2k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \varphi & \omega_{1k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_{2k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Una vez definida la forma más general posible de la matriz inversa, y considerando la estructura matricial de la ecuación (6.28), el lado derecho de la definición (B.4) se expresa como

$$\begin{pmatrix} \eta_k^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_k^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{B.5})$$

donde se manifiesta de forma explícita la identidad tanto en el espacio de índices discretos como en el espacio continuo de coordenadas. Ahora, al escribir de forma explícita el producto matricial que se presenta en el integrando del lado izquierdo de la definición (B.4), resulta

$$\begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \begin{pmatrix} \tau_{1jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{2jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \chi_{1jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{2jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \psi_{1k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_{2k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \omega_{1k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_{2k}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Tras realizar el producto matricial, y posteriormente hacer uso de la delta de Dirac para evaluar las integrales término a término, la matriz resultante se compara componente a componente con la matriz

presentada en la ecuación (B.5), de ahí surgen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
-\chi_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\chi_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\tau_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\tau_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \chi_{1jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \chi_{2jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \chi_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\partial_j^x \chi_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{1jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{2jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones obtenido, se procede a agrupar aquellas relaciones que involucran las mismas funciones desconocidas. En este sentido, el primer subconjunto a analizar está dado por

$$\begin{aligned}
-\chi_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\partial_j^x \chi_{1jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

Con el fin de desacoplar este sistema, se aplica el operador diferencial ∂_i^x a la primera ecuación del conjunto anterior, lo que conduce a

$$-\partial_i^x \chi_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta_k^i \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

En este punto se observa que el primer término del lado izquierdo coincide exactamente con la segunda ecuación del sistema, la cual se anula completamente y en consecuencia, la expresión anterior se reduce a

$$-\partial_i^x \partial_i^x \omega_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_k^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De esta ecuación se deduce que la función $\omega_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface una ecuación de Poisson en el espacio tridimensional. En consecuencia, su solución puede expresarse formalmente en términos del operador inverso del Laplaciano, entendido como la función de Green asociada al operador $\partial_l^x \partial_l^x$, de manera que se obtiene

$$\omega_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Reemplazando esta expresión en la primera ecuación del subconjunto se obtiene

$$-\chi_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \eta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

relación de la cual se concluye directamente que

$$\chi_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = - \left(\eta_k^i - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Seguidamente, se identifica un subconjunto adicional que posee la misma estructura funcional del inmediatamente anterior, lo que indica que siguiendo el mismo procedimiento presentado, se puede obtener las funciones desconocidas, el subconjunto en cuestión es

$$\begin{aligned} \tau_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ -\partial_j^x \tau_{2jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Este subconjunto conlleva de manera directa a los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \psi_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= - \frac{\partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \tau_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left(\eta_k^i - \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Continuando con el análisis del siguiente subconjunto de ecuaciones relacionadas, se tiene

$$\begin{aligned} -\chi_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \chi_{2jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Al aplicar el operador diferencial ∂_i^x a la primera ecuación del conjunto anterior se obtiene

$$-\partial_i^x \chi_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Se observa que el primer término del lado izquierdo, corresponde de manera exacta con la segunda ecuación de este subconjunto, la cual se anula de forma inmediata lo que conlleva a que la expresión adopte la siguiente forma

$$-\partial_i^x \partial_i^x \omega_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

dado que las funciones que aparecen como elementos de la matriz simpléctica inversa deben satisfacer condiciones físicas de frontera, se concluye que la solución compatible con la ecuación anterior es trivial, lo que se expresa como

$$\omega_{2k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Finalmente, al reemplazar este resultado en la primera ecuación de este subconjunto, se concluye que

$$\chi_{2ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

En este punto, se identifican los siguientes subconjuntos, los cuales tienen la misma estructura funcional que el inmediatamente anterior y por lo tanto, la obtención de las funciones desconocidas se consigue siguiendo el mismo procedimiento, es decir

$$\begin{aligned} -\chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \chi_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \tau_{1jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Conllevan a los siguientes resultados

$$\begin{aligned}\omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \psi_{1k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \tau_{1ik}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Ahora, continuando con el siguiente subconjunto de ecuaciones relacionadas, se tiene

$$\begin{aligned}-\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \chi_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}$$

La primera ecuación de este subconjunto se puede reescribir de manera sencilla así

$$\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

la cual ajustando el correspondiente índice para ser reemplazada en la segunda ecuación del subconjunto, lleva a la siguiente expresión

$$\partial_j^x \partial_j^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De esta ecuación, se deduce que la función $\omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, puede expresarse en términos del operador inverso del Laplaciano, de manera que resulta

$$\omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Este resultado es reemplazado en la primera ecuación del subconjunto, a partir de la cual se concluye que

$$\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Se identifica otro subconjunto de ecuaciones relacionadas, el cual posee la misma estructura funcional del inmediatamente anterior, es decir que la obtención de las funciones desconocidas se realiza siguiendo el mismo procedimiento presentado, el cual es

$$\begin{aligned}\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \tau_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Este subconjunto conlleva a los siguientes resultados

$$\psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$
$$\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Los resultados obtenidos para las dieciséis funciones desconocidas, son organizados en la estructura de la matriz simpléctica inversa presentada en la ecuación (6.29), ajustando los respectivos índices.

Apéndice C

Teoría de Chern-Simons abeliana pura

C.1. Descomposición espacio-temporal y estructura simpléctica de la densidad Lagrangiana de Chern-Simons

Con el propósito de reescribir la densidad Lagrangiana de Chern-Simons en una forma de primer orden en derivadas temporales, para ello inicialmente se debe considerar la siguiente definición para el símbolo de Levi-Civita en $(2 + 1)$ dimensiones espacio-temporales

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho} = \begin{cases} +1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho) \text{ es una permutación par de } (0, 1, 2) \\ -1 & \text{si } (\mu, \nu, \rho) \text{ es una permutación impar de } (0, 1, 2) \\ 0 & \text{si hay índices repetidos} \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

Además, se define la proyección de $\varepsilon^{\mu\nu\rho}$ en el subespacio de los índices espaciales de la siguiente manera

$$\varepsilon^{ij} = \varepsilon^{0ij}. \quad (\text{C.2})$$

Al desarrollar explícitamente la contracción de índices de la densidad Lagrangiana de la ecuación (7.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\kappa}{4\pi} [\varepsilon^{0\nu\rho} (\partial_0 A_\nu) A_\rho + \varepsilon^{i\nu\rho} (\partial_i A_\nu) A_\rho] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \left[\cancel{\varepsilon^{00\rho}}^0 (\partial_0 A_0) A_\rho + \varepsilon^{0i\rho} (\partial_0 A_i) A_\rho + \varepsilon^{i0\rho} (\partial_i A_0) A_\rho + \varepsilon^{ij\rho} (\partial_i A_j) A_\rho \right] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \left[\cancel{\varepsilon^{0i0}}^0 (\partial_0 A_i) A_0 + \varepsilon^{0ij} (\partial_0 A_i) A_j + \cancel{\varepsilon^{i00}}^0 (\partial_i A_0) A_0 + \varepsilon^{i0j} (\partial_i A_0) A_j \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^{ij0} (\partial_i A_j) A_0 + \cancel{\varepsilon^{ijk}}^0 (\partial_i A_j) A_k \right]. \end{aligned}$$

En donde se ha hecho uso de la definición del símbolo de Levi-Civita dada en la ecuación (C.1) para anular algunos términos del desarrollo, en la mayoría de ellos se observa de forma inmediata la presencia de índices repetidos. La única excepción aparente corresponde al último término de la línea final, donde no se observa explícitamente la repetición de índices, sin embargo, al recordar que se está trabajando en $(2 + 1)$ dimensiones espacio-temporales, los índices espaciales i, j, k solo pueden tomar valores en el conjunto $\{1, 2\}$, es decir, cualquier combinación de tres índices espaciales necesariamente implica la repetición de al menos uno de ellos, lo que conduce nuevamente a la anulación

del símbolo de Levi-Civita.

Hasta este punto, la densidad Lagrangiana ha adoptado la siguiente forma

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \left[\varepsilon^{0ij} (\partial_0 A_i) A_j + \varepsilon^{i0j} (\partial_i A_0) A_j + \varepsilon^{ij0} (\partial_i A_j) A_0 \right],$$

en donde, al hacer uso de la definición dada en la ecuación (C.2) para la proyección del símbolo de Levi-Civita en el subespacio de índices espaciales, resulta

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \left[\varepsilon^{ij} \dot{A}_i A_j - \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j + \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0 \right].$$

Seguidamente, se procede a realizar una integración por partes sobre el segundo termino de la última expresión y tras despreciar la contribución del término de superficie en la frontera, la densidad Lagrangiana se torna en

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \left[\dot{A}_i A_j + (\partial_i A_j) A_0 + (\partial_i A_j) A_0 \right] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \left[\dot{A}_i A_j + 2 (\partial_i A_j) A_0 \right]. \end{aligned}$$

La expresión resultante, de forma sencilla, es posible reescribirla de tal manera que coincide con la presentada en la ecuación (7.2), es decir

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \dot{A}_i A_j + \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0.$$

C.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Con el propósito de obtener los elementos de la matriz simpléctica correspondiente al proceso inicial, se hace uso de la definición dada en la ecuación (7.8), además se consideran los elementos presentados en las ecuaciones (7.6) y (7.7). Sin embargo, pese a que la matriz simpléctica es antisimétrica por construcción, lo cual implica la anulación de las componentes situadas sobre la diagonal principal, en este caso, al trabajar en notación indicial compacta algunas de estas componentes corresponden en realidad a bloques matriciales asociados a índices espaciales internos. Con esto en mente, la antisimetría únicamente garantiza que dichos bloques sean matrices antisimétricas, mas no que se anulen idénticamente. Debido a lo anterior, resulta necesario calcular explícitamente el bloque asociado a A_i , como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} M_{A_i, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} A_k(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} A_k(\mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\delta A_k(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon^{jk} \eta_k^i - \varepsilon^{ik} \eta_k^j \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon^{ji} - \varepsilon^{ij} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \left(-\varepsilon^{ij} - \varepsilon^{ij} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

El elemento situado sobre la diagonal principal de la matriz que involucra a A_0 no es necesario realizar el cálculo de manera explícita, dado que al no corresponder a un bloque matricial sino a una única

componente, la propiedad de antisimetría garantiza su anulación. Debido a lo anterior, se procede con el cálculo de los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 M_{A_i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\cancel{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}}{\cancel{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{x}) \right] = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \frac{\delta A_j(\mathbf{x})}{\cancel{\delta A_0(\mathbf{y})}} \\
 &= 0, \\
 M_{A_0, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\cancel{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})}}{\cancel{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}} = \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} A_i(\mathbf{y}) \right] = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} \frac{\delta A_i(\mathbf{y})}{\cancel{\delta A_0(\mathbf{x})}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Los resultados de este cálculo se organizan en la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ presentada en la ecuación (7.9).

C.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$

Con el propósito de obtener la ligadura que surge como consecuencia de la existencia de un modo cero no trivial en la teoría, se toma como punto de partida la siguiente expresión

$$\Omega^{(0)} = \int d^2 x \nu^{A(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^2 y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{C.3})$$

Teniendo en cuenta la forma explícita del modo cero mostrado en la ecuación (7.10), se puede concluir que a la anterior definición, únicamente contribuye la componente asociada a A_0 , de manera que la expresión se torna en

$$\Omega^{(0)} = \int d^2 x \nu^{A_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}(\mathbf{x})} \int d^2 y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}).$$

Al sustituir tanto la componente del modo cero como la de la variable simpléctica y al mismo tiempo se reemplaza a partir de la ecuación (7.4), el potencial simpléctico, generando la siguiente expresión

$$\Omega^{(0)} = \int d^2 x \beta^{(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \int d^2 y \left\{ -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} [\partial_i^y A_j(\mathbf{y})] A_0(\mathbf{y}) \right\}.$$

En este punto, al considerar que la derivada funcional respecto a la componente A_0 y la integral espacial en \mathbf{y} actúan sobre variables independientes, esto permite intercambiar el orden de aplicación de dichas operaciones, con lo cual resulta

$$\Omega^{(0)} = \int d^2 x \beta^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^2 y \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \left\{ -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} [\partial_i^y A_j(\mathbf{y})] A_0(\mathbf{y}) \right\}.$$

Se procede con la aplicación de la derivada funcional, la cual actúa de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \Omega^{(0)} &= - \int d^2 x \beta^{(0)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \int d^2 y [\partial_i^y A_j(\mathbf{y})] \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\
 &= - \int d^2 x \beta^{(0)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \int d^2 y [\partial_i^y A_j(\mathbf{y})] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

En la expresión resultante, la delta de Dirac permite realizar la integral en \mathbf{y} de forma inmediata, seleccionando el valor del integrando en el punto $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, con lo cual

$$\Omega^{(0)} = - \int d^2x \beta^{(0)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} [\partial_i^x A_j(\mathbf{x})].$$

Recordando la definición dada en la ecuación (C.3), se impuso la condición $\Omega^{(0)} = 0$, se observa que dicha igualdad debe satisfacerse independientemente del valor que pueda tomar la función $\beta^{(0)}$, dado que es completamente arbitraria. Para ello, la única forma de satisfacer la condición impuesta es estableciendo que el integrando se anule, lo cual lleva a la ecuación (7.11)

$$\Omega^{(0)} = \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} [\partial_i^x A_j(\mathbf{x})] = 0.$$

C.4. Anulación del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$

Para mostrar que el potencial simpléctico correspondiente al primer proceso de iteración del formalismo de Faddeev-Jackiw se anula, se hace uso de la siguiente definición

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0},$$

es decir, resulta necesario evaluar el potencial simpléctico inicial presente en la ecuación (7.4) en la ligadura obtenida en la sección previa, de manera explícita la expresión se torna en

$$\mathcal{H}^{(1)} = \left[-\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0 \right] \Big|_{\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) = 0}.$$

Se observa que al imponer dicha condición, el potencial simpléctico del primer proceso de iteración se anula en su totalidad, es decir

$$\mathcal{H}^{(1)} = 0.$$

De esta manera, se ha obtenido la expresión presentada en la ecuación (7.13). Es por esta razón que en la densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración el respectivo potencial simpléctico no se muestra de forma explícita.

C.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración de la formulación simpléctica se realiza al considerar la definición dada en la ecuación (7.17) al igual que las equivalencias dadas en las ecuaciones (7.15) y (7.16). Además, se tiene en cuenta las explicaciones dadas en el apéndice C.2 referente a la necesidad de realizar de forma explícita el cálculo de los elementos de la diagonal principal, dicho esto se tiene

$$\begin{aligned} M_{A_i, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} A_k(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} A_k(\mathbf{x}) \right] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\delta A_k(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon^{jk} \eta_k^i - \varepsilon^{ik} \eta_k^j \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} (\varepsilon^{ji} - \varepsilon^{ij}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} (-\varepsilon^{ij} - \varepsilon^{ij}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz se calculan como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
M_{A_i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{x}) \right] \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \frac{\delta A_j(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})} \overset{0}{=} \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
M_{\lambda, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} A_i(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\
&= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} \frac{\delta A_i(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \overset{0}{=} -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \eta_i^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Los elementos resultantes son organizados en la estructura matricial de $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ generando la expresión mostrada en la ecuación (7.18).

C.6. Obtención de componentes del vector $\nu^{A(1)}$

Con el propósito de determinar la estructura del autovector asociado al autovalor nulo de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración, se propone el vector con componentes arbitrarias mostrada en la ecuación (7.19), el cual debe satisfacer la siguiente condición de modo cero

$$\int d^2x \nu^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Al reemplazar tanto el vector general como la matriz simpléctica en la condición del modo cero, resulta

$$\int d^2x \begin{pmatrix} \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) & \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \frac{\kappa}{2\pi} \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ij} & \varepsilon^{ik} \partial_k^x \\ \varepsilon^{jk} \partial_k^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tras realizar el producto matricial, la expresión adopta la siguiente forma

$$\int d^2x \frac{\kappa}{2\pi} \begin{pmatrix} -\alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \varepsilon^{ij} + \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \varepsilon^{jk} \partial_k^x & \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \varepsilon^{ik} \partial_k^x \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Evaluando las integrales término a término y al considerar en los elementos que involucran operadores diferenciales, se utiliza la siguiente propiedad referente a la simetría de funciones que dependen de la diferencia de dos vectores dada por

$$\partial_i^x f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^y f(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

el lado izquierdo de expresión se torna en

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left(-\alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ij} - \int d^2x \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \varepsilon^{jk} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^2x \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \varepsilon^{ik} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right).$$

En este punto, al considerar que los operadores diferenciales y las integrales espaciales en \mathbf{x} actúan sobre variables independientes, esto permite intercambiar el orden de aplicación de dichas operaciones, con lo cual resulta la siguiente expresión

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left(-\alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ij} - \partial_k^y \beta^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{jk} - \partial_k^y \alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ik} \right) = (0 \ 0),$$

con el fin de garantizar que la igualdad se satisfaga, deben cumplirse las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ij} &= -\partial_k^y \beta^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{jk}, \\ \partial_k^y \alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ik} &= 0. \end{aligned}$$

Resulta necesario, en este apartado, considerar la siguiente identidad referente al símbolo de Levi-Civita, la cual está dada por

$$\varepsilon_{\alpha\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \eta_\mu^\beta \eta_\nu^\gamma - \eta_\mu^\gamma \eta_\nu^\beta,$$

una versión equivalente de esta identidad, la cual se expresa bajo la definición de la proyección del símbolo de Levi-Civita en el subespacio de los índices espaciales dada en la ecuación (C.2), tiene la siguiente forma

$$\varepsilon_{ij} \varepsilon^{kl} = \eta_i^k \eta_j^l - \eta_i^l \eta_j^k. \quad (\text{C.4})$$

Sobre la primera ecuación del conjunto de relaciones obtenidas al imponer la condición del modo cero se realiza el producto de la cantidad ε_{jl} , resultando

$$\alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon_{jl} \varepsilon^{ij} = -\partial_k^y \beta^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon_{jl} \varepsilon^{jk},$$

usando la identidad de la ecuación (C.4), esta expresión adopta la siguiente estructura

$$\begin{aligned} -\alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \eta_l^i &= -\partial_k^y \beta^{(1)}(\mathbf{y}) \eta_l^k \\ \alpha_l^{(1)}(\mathbf{y}) &= \partial_l^y \beta^{(1)}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

La relación obtenida debe satisfacer la segunda relación del conjunto encontrado. Para verificar esto, se procede a realizar el siguiente reemplazo

$$\begin{aligned} \partial_k^y \alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ik} &= 0 \\ \partial_k^y \partial_i^y \beta^{(1)}(\mathbf{y}) \varepsilon^{ik} &= 0. \end{aligned}$$

Se consigue identificar que la expresión resultante se anula de inmediato, dado que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, las cuales son las derivadas parciales y el símbolo de Levi-Civita respectivamente. Por ende, si bien la relación se satisface, la segunda ecuación no brinda una condición adicional para las componentes del vector, con lo cual finalmente se obtiene el autovector presentado en la ecuación (7.20)

$$\nu^{A(1)} = \left(\partial_i^x \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \beta^{(1)}(\mathbf{x}) \right).$$

C.7. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Para el cálculo de los elementos de la matriz simpléctica del segundo proceso de iteración, se hace uso de la definición dada en la ecuación (7.26), al igual que las equivalencias dadas en las ecuaciones (7.24) y (7.25). Al igual que el proceso iterativo anterior, se vuelve a considerar las explicaciones dadas en el apéndice C.2 respecto a la necesidad de cálculo explícito de las componentes diagonales de la matriz, de forma que

$$\begin{aligned}
M_{A_i, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} A_k(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} A_k(\mathbf{x}) \right] \\
&= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\delta A_k(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon^{jk} \eta_k^i - \varepsilon^{ik} \eta_k^j \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \frac{\kappa}{4\pi} (\varepsilon^{ji} - \varepsilon^{ij}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} (-\varepsilon^{ij} - \varepsilon^{ij}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz son calculados tal como se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
M_{A_i, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{x}) \right] \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \frac{\partial^y \delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \frac{\delta A_j(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})} \overset{0}{=} \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{A_i, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{x}) \right] \\
&= \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\partial^y \delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \frac{\delta A_j(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})} \overset{0}{=} \frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^y \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{2\pi} \partial_i^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\lambda, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} A_i(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\
&= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} \frac{\delta A_i(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} \overset{0}{=} -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \eta_i^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda,\varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^x A_j(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi} \cancel{\partial_j^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})}}^0 - \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^x \cancel{\frac{\delta A_j(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})}}^0 = 0, \\
 M_{\varphi, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ji} A_i(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \partial_i^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\kappa}{4\pi} \cancel{\varepsilon^{ji} \frac{\delta A_i(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})}}^0 - \frac{\kappa}{2\pi} \partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_i^x \eta_i^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 M_{\varphi, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{y})} \left[\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x A_j(\mathbf{x}) \right] \\
 &= \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^y \cancel{\frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})}}^0 - \frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \cancel{\frac{\delta A_j(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})}}^0 = 0.
 \end{aligned}$$

Los resultados obtenidos previamente se organizan en una estructura matricial, dando lugar a la ecuación (7.27).

C.8. Obtención explícita de la matriz simpléctica inversa

Finalmente, para obtener los corchetes generalizados de la teoría de Chern-Simons abeliana pura, resulta necesario encontrar la inversa de la matriz simpléctica presentada en la ecuación (7.27), como punto de partida para realizarlo, se toma la siguiente ecuación funcional

$$\int d^2 z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{C.5})$$

Dado que la estructura explícita de la matriz inversa no es conocida hasta este punto, se propone el siguiente ansatz para dicha matriz

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_m & \lambda & \varphi \\ A_j & \tau_{1jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{2j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \lambda & \chi_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \varphi & \psi_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Una vez definida la forma más general posible de la matriz inversa, y considerando la estructura matricial de la ecuación (7.27), el lado derecho de la definición (C.5) se expresa como

$$\begin{pmatrix} \eta_m^i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{C.6})$$

donde expresa explícitamente la identidad tanto en el espacio de índices discretos como en el espacio continuo de coordenadas. Se escribe de forma explícita el producto matricial que se presenta en el

integrando del lado izquierdo de la definición (C.5), es decir

$$\frac{\kappa}{2\pi} \begin{pmatrix} -\varepsilon^{ij} & \varepsilon^{ik} \partial_k^x & -\partial_i^x \\ \varepsilon^{jk} \partial_k^x & 0 & 0 \\ -\partial_j^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \begin{pmatrix} \tau_{1jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{2j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \chi_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \psi_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}.$$

Tras realizar el producto matricial para posteriormente evaluar las integrales resultantes término a término mediante la delta de Dirac, se compara cada componente de la matriz resultante con la estructura matricial presentada en la ecuación (C.6), de ello surgen las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0, \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0, \\ \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

En este punto, con el propósito de conocer la forma de las funciones desconocidas, se procede a agrupar aquellas ecuaciones que contengan dichas funciones, es decir, un primer subconjunto está dado por

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Con el propósito de desacoplar este sistema, se aplica el operador diferencial ∂_i^x sobre la primera ecuación

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \partial_i^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] = \eta_m^i \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

se logra identificar que el segundo término del lado izquierdo es cero dado que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica por una antisimétrica, con lo cual

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[\varepsilon^{ji} \partial_i^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] = \partial_m^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

El primer término corresponde a la segunda ecuación del subconjunto, con lo cual se anula completamente, lo que conlleva a

$$-\frac{\kappa}{2\pi} \partial_i^x \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_m^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De esta ecuación se deduce que la función $\psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ satisface una ecuación de Poisson. En consecuencia, su solución puede expresarse formalmente en términos del operador inverso del Laplaciano, entendido como la función de Green asociada al operador $\partial_l^x \partial_l^x$, de forma que

$$\psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2\pi}{\kappa} \frac{\partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Al reemplazar este resultado en la primera ecuación del subconjunto, esta toma la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2\pi}{\kappa} \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

La expresión resultante se multiplica por la cantidad ε_{if} , es decir

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon_{if} \varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon_{if} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \varepsilon_{if} \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \eta_m^i \varepsilon_{if} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

haciendo uso de la identidad presentada en la ecuación (C.4), la expresión se torna en

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\eta_f^j \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta_f^k \partial_k^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \varepsilon_{if} \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \varepsilon_{mf} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\tau_{1fm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_f^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \varepsilon_{if} \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \varepsilon_{mf} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Se aplica el operador diferencial ∂_f^x sobre la expresión resultante

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\partial_f^x \tau_{1fm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_f^x \partial_f^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] + \varepsilon_{if} \partial_f^x \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \varepsilon_{mf} \partial_f^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Identificando que el primer término del lado izquierdo corresponde a la tercer ecuación del subconjunto, el término se anula por completo, además el tercer término del lado izquierdo también se anula debido a la simetría de las derivadas parciales y la antisimetría del símbolo de Levi-Civita, de manera que

$$\frac{\kappa}{2\pi} \partial_l^x \partial_l^x \chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varepsilon_{mf} \partial_f^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Expresando la función $\chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en términos del operador inverso del Laplaciano resulta

$$\chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon^{mf} \frac{\partial_f^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Los resultados obtenidos para $\psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\chi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ son reemplazados en la primera ecuación del subconjunto, lo cual genera la siguiente expresión

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon^{mf} \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x \partial_f^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2\pi}{\kappa} \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ -\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{mf} \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x \partial_f^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Multiplicando la expresión resultante por la cantidad ε_{in} se obtiene

$$-\frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon_{in}\varepsilon^{ij}\tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon_{in}\varepsilon^{mf}\varepsilon^{ik}\frac{\partial_k^x\partial_f^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \varepsilon_{in}\frac{\partial_i^x\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \eta_m^i\varepsilon_{in}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

haciendo uso de la identidad presente en la ecuación (C.4), la expresión adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{2\pi}\eta_m^j\tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta_m^k\varepsilon^{mf}\frac{\partial_k^x\partial_f^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \varepsilon_{in}\frac{\partial_i^x\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \varepsilon_{mn}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ -\frac{\kappa}{2\pi}\tau_{1nm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{mf}\frac{\partial_n^x\partial_f^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \varepsilon_{in}\frac{\partial_i^x\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \varepsilon_{mn}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Expresión a partir de la cual se encuentra que la función $\tau_{1nm}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ corresponde a

$$\tau_{1nm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \left(\varepsilon_{nm} - \varepsilon_{fm}\frac{\partial_f^x\partial_n^x}{\partial_l^x\partial_l^x} + \varepsilon_{in}\frac{\partial_i^x\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Se procede con el análisis del siguiente subconjunto de ecuaciones, el cual es

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij}\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik}\partial_k^x\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0, \\ \frac{\kappa}{2\pi}\varepsilon^{jk}\partial_k^x\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ -\frac{\kappa}{2\pi}\partial_j^x\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Al aplicar el operador diferencial ∂_i^x sobre la primera ecuación, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij}\partial_i^x\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik}\partial_i^x\partial_k^x\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x\partial_i^x\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0 \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[\varepsilon^{ji}\partial_i^x\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik}\partial_i^x\partial_k^x\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x\partial_i^x\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0. \end{aligned}$$

En el lado izquierdo de la expresión resultante, se identifica que el segundo término se anula dado que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, además se reescribe el primer término mediante la segunda ecuación, es decir

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[\frac{2\pi}{\kappa}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x\partial_i^x\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] = 0.$$

De esta expresión se puede deducir que la función $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ expresada en términos del operador inverso del Laplaciano es

$$\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \frac{1}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Reemplazando la función $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en la primera ecuación de este subconjunto

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij}\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik}\partial_k^x\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{2\pi}{\kappa} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0,$$

por lo tanto

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij}\tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik}\partial_k^x\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] = \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Seguidamente, se procede a multiplicar la ecuación resultante por la cantidad ε_{im} , con lo cual

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon_{im} \varepsilon^{ij} \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon_{im} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] = \varepsilon_{im} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

utilizando la propiedad mostrada en la ecuación (C.4), la expresión adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\eta_m^j \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta_m^k \partial_k^x \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= \varepsilon_{im} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[-\tau_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_m^x \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= \varepsilon_{im} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Al aplicar el operador diferencial ∂_m^x sobre la última ecuación, se obtiene

$$\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\partial_m^x \tau_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_m^x \partial_m^x \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] = \varepsilon_{im} \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

donde se logra identificar que el primer término del lado izquierdo corresponde a la tercera ecuación del subconjunto, con lo cual se anula; además, el lado derecho también resulta ser nulo al tratarse de una contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, en consecuencia

$$\partial_m^x \partial_m^x \chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Dado que las funciones que aparecen como elementos de la matriz simpléctica inversa deben satisfacer condiciones físicas de frontera, se concluye que la solución compatible con la ecuación anterior es trivial, lo que se expresa como

$$\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Con los resultados obtenidos para las funciones $\psi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la primera ecuación de este subconjunto adopta la siguiente forma

$$-\frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

la cual al multiplicarse por la cantidad ε_{im} resulta en

$$-\varepsilon_{im} \varepsilon^{ij} \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon_{im} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Una vez más, haciendo uso de la identidad (C.4), la ecuación se expresa de la siguiente manera

$$-\eta_m^j \tau_{2j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon^{im} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Con lo cual, finalmente se obtiene que la función $\tau_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es

$$\tau_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \varepsilon^{mi} \frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Por último, el subconjunto restante de ecuaciones pendiente por analizar es el siguiente

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0, \\ \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\frac{\kappa}{2\pi} \partial_j^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}$$

Al aplicar el operador diferencial ∂_i^x sobre la primera ecuación de este subconjunto se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{2\pi} \left[-\varepsilon^{ij} \partial_i^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0 \\ \frac{\kappa}{2\pi} \left[\varepsilon^{ji} \partial_i^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \right] &= 0.\end{aligned}$$

El primer termino del lado izquierdo en la expresión resultante se anula debido a que corresponde a la segunda ecuación del subconjunto, además, el segundo término también resulta ser nulo dado que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica por una antisimétrica, con lo anterior

$$\partial_i^x \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Mediante el mismo argumento utilizado para la función $\chi_2(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se concluye que

$$\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Teniendo en cuenta este resultado, la primera ecuación del subconjunto ahora se expresa así

$$-\varepsilon^{ij} \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Al multiplicar la expresión previa por la cantidad ε_{im} , resulta

$$-\varepsilon_{im} \varepsilon^{ij} \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \varepsilon_{im} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

la cual al hacer uso de la identidad (C.4) se reescribe de la siguiente manera

$$\begin{aligned}-\eta_m^j \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \eta_m^k \partial_k^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \\ -\tau_{3m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \partial_m^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\tau_{3m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_m^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Aplicando el operador diferencial ∂_m^x sobre la expresión inmediatamente anterior, esta adopta la siguiente forma

$$\partial_m^x \tau_{3m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_m^x \partial_m^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

a continuación, se identifica que el lado izquierdo se puede reescribir mediante la tercera ecuación del subconjunto, es decir

$$-\frac{2\pi}{\kappa} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \partial_m^x \partial_m^x \chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

De la expresión resultante, se deduce que en términos del operador inverso del Laplaciano, la función $\chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es

$$\chi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2\pi}{\kappa} \frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Finalmente, a partir de este resultado, de forma sencilla se concluye que

$$\tau_{3m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2\pi}{\kappa} \frac{\partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Los resultados obtenidos para las nueve funciones desconocidas en un inicio, se organizan, ajustando los respectivos índices, en la matriz simpléctica inversa, generando la ecuación (7.28).

Apéndice D

Teoría de Maxwell-Chern-Simons

D.1. Linealización de la densidad Lagrangiana de MCS

Al considerar que, para aplicar el método de Faddeev-Jackiw en teorías de campos, resulta necesario expresar la densidad Lagrangiana de manera que su dependencia sea lineal respecto a las derivadas temporales del campo, el proceso de linealización de la densidad Lagrangiana de MCS presentada en la ecuación (8.1) inicia al identificar los términos provenientes de las teorías de Maxwell y CS

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_M} + \underbrace{\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu)A_\rho}_{\mathcal{L}_{CS}}.$$

A continuación, se realiza el siguiente cálculo, a partir del cual resulta directa la obtención del momento canónico

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} + \frac{\partial\mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)},$$

donde se identifica que el primer término de este cálculo fue realizado en el proceso de linealización de la densidad Lagrangiana de la teoría de Maxwell, el cual se expresa como

$$\frac{\partial\mathcal{L}_M}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\nu\mu}.$$

En consecuencia, el termino que involucra la densidad Lagrangiana de la teoría de CS se calcula de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}_{CS}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\rho}A_\rho \left[\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\rho}A_\rho\eta_\alpha^\mu\eta_\beta^\nu \\ &= \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho.\end{aligned}$$

Uniendo los resultados, la expresión adopta la siguiente forma

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\nu\mu} + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho,$$

es en este punto donde se procede a realizar la definición del momento canónico, el cual resulta de tomar la derivada de la densidad Lagrangiana respecto a la derivada temporal del campo, es decir,

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{0\nu\rho} A_\rho.$$

Seguidamente, se debe realizar el desarrollo explícito de la contracción de índices de cada término de la densidad Lagrangiana de MCS, sin embargo, estos procedimientos ya fueron realizados en secciones previas, a partir de las cuales resultaron las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_M &= \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}, \\ \mathcal{L}_{CS} &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_0 A_i) A_j - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0. \end{aligned}$$

En este punto, se retoma la densidad Lagrangiana de MCS, al unir los resultados obtenidos, lo que se expresa así

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_0 A_i) A_j - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0.$$

En la densidad Lagrangiana anterior, se introduce la siguiente identidad nula, la cual no altera la dinámica del sistema

$$\dot{A}_i \Pi^i - \dot{A}_i \Pi^i = \dot{A}_i \Pi^i - (\partial_0 A_i) \Pi^i,$$

de este modo, la densidad Lagrangiana se escribe como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - (\partial_0 A_i) \Pi^i + \frac{1}{2} F^{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_0 A_i) A_j - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j \\ &\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0. \end{aligned}$$

A partir de la expresión correspondiente al momento canónico espacial, resulta

$$\begin{aligned} \Pi^i &= F^{i0} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{0i\rho} A_\rho \\ &= -F^{0i} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{0i\rho} A_\rho + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{0ij} A_j. \end{aligned}$$

Expresando el símbolo de Levi-Civita en términos de su proyección sobre el subespacio de los índices espaciales, se obtiene

$$\begin{aligned} \Pi^i &= -F^{0i} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \\ &= -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \\ &= \partial_0 A_i - \partial_i A_0 + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j. \end{aligned}$$

Sustituyendo la equivalencia obtenida de la expresión inmediatamente anterior en la densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \left(\Pi^i + \partial_i A_0 - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \right) \Pi^i + \frac{1}{2} \left(\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j - \Pi^i \right) \left(\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} A_k - \Pi^i \right) - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \\ &\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \left(\Pi^i + \partial_i A_0 - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} A_k \right) A_j - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0, \end{aligned}$$

al realizar de forma explícita los respectivos productos presentes en la expresión previa

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} \varepsilon^{ij} A_j \varepsilon^{ik} A_k - \frac{\kappa}{8\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i \\ &\quad - \frac{\kappa}{8\pi} \underbrace{\varepsilon^{ik} A_k}_{k \rightarrow j} \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \varepsilon^{ij} A_j \varepsilon^{ik} A_k - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_0) A_j + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0.\end{aligned}$$

Operando términos semejantes la expresión resultante es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} \varepsilon^{ij} A_j \varepsilon^{ik} A_k - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i \\ &\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0 \\ &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} \varepsilon_{ij} \varepsilon^{ik} A_j A_k - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i \\ &\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0,\end{aligned}$$

haciendo uso de la identidad correspondiente al producto de dos símbolos de Levi-Civita, la expresión resulta en

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} \eta_j^k A_j A_k - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \\ &\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0 \\ &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \\ &\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0.\end{aligned}$$

Finalmente, se realizan los siguientes cálculos con el propósito de reescribir en una forma equivalente el término $\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij}$, para lo cual se parte de

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} &= \frac{1}{4} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= \frac{1}{4} \left[(\partial_i A_j) (\partial_i A_j) - (\partial_i A_j) (\partial_j A_i) - (\partial_j A_i) (\partial_i A_j) + \underbrace{(\partial_j A_i) (\partial_j A_i)}_{i \leftrightarrow j} \right] \\ &= \frac{1}{2} [(\partial_i A_j) (\partial_i A_j) - (\partial_i A_j) (\partial_j A_i)] \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i A_j) (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_i A_j) F_{ij},\end{aligned}$$

por otra parte, se analiza la equivalencia de la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l) &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ij} \varepsilon^{kl} (\partial_i A_j) (\partial_k A_l) \\
&= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon^{kl} (\partial_i A_j) (\partial_k A_l) \\
&= \frac{1}{2} (\eta_i^k \eta_j^l - \eta_i^l \eta_j^k) (\partial_i A_j) (\partial_k A_l) \\
&= \frac{1}{2} [(\partial_i A_j) (\partial_i A_j) - (\partial_i A_j) (\partial_j A_i)] \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i A_j) (\partial_i A_j - \partial_j A_i) \\
&= \frac{1}{2} (\partial_i A_j) F_{ij}.
\end{aligned}$$

Al comparar los resultados provenientes de cada desarrollo se puede concluir que

$$\frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} = \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l),$$

con lo cual, tras sustituir la equivalencia previa en la densidad Lagrangiana, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j - \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l) \\
&\quad + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) A_0.
\end{aligned}$$

Se procede a realizar una integración por partes sobre el tercer termino de la expresión anterior y tras despreciar la contribución del termino de superficie en la frontera, la densidad Lagrangiana adopta la forma presentada en la ecuación (8.2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) A_0 + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i - \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j \\
&\quad - \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l).
\end{aligned}$$

D.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica correspondiente al proceso inicial se realiza a partir de la definición dada en la ecuación (8.8) teniendo en cuenta los elementos presentados en las ecuaciones (8.6) y (8.7). Si bien la matriz simpléctica es antisimétrica, una consecuencia inmediata de esta propiedad es la anulación de las componentes situadas sobre la diagonal principal, sin embargo, al trabajar con en notación indicial algunas de estas componentes corresponden en realidad a bloques matriciales asociados a índices espaciales internos. Por lo tanto, la antisimetría únicamente garantiza que dichos bloques sean matrices antisimétricas, mas no que se anulen por completo, es por esta razón, que resulta necesario calcular explícitamente los bloques correspondientes a A_i y Π^i , como se muestra a continuación

$$M_{A_i, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0.$$

En lo que respecta a la componente sobre la diagonal principal que involucra a A_0 , no es necesario realizar su cálculo de forma explícita puesto que no corresponde a un bloque matricial sino a una única componente por ende su anulación proviene directamente de la antisimetría de la matriz simpléctica. Por lo tanto, se procede a calcular los elementos por fuera de la diagonal de la siguiente manera

$$M_{A_i, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_{\Pi^i, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_i^j \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \\ &= \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$M_{\Pi^i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{A_0, A_j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(0)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} = 0,$$

$$M_{A_0, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0.$$

Estos resultados generan la matriz simpléctica $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ presentada en la ecuación (8.9).

D.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$

Con el objetivo de obtener la ligadura que surge como consecuencia de la existencia de un modo cero no trivial, se parte de la siguiente definición

$$\Omega^{(0)} = \int d^2 x \nu^{A(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^2 y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{D.1})$$

De acuerdo con las componentes del modo cero presentado en la ecuación (8.10), se consigue identificar que a la definición solo contribuye la componente asociada a A_0 , con lo cual la expresión se escribe así

$$\Omega^{(0)} = \int d^2 x \nu^{A_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}(\mathbf{x})} \int d^2 y \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}).$$

Al expresar de forma explícita tanto la componente de modo cero como la de la variable simpléctica a la vez que se realiza el reemplazo del potencial simpléctico de la ecuación (8.4), se obtiene

$$\Omega^{(0)} = \int d^2x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \int d^2y \left\{ \frac{1}{2} \Pi^i(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) - \left[\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] A_0(\mathbf{y}) \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j(\mathbf{y}) A_j(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \left[\varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] \left[\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y}) \right] \right\}.$$

A continuación, teniendo en cuenta que la integración espacial en \mathbf{y} y la derivada funcional respecto a la componente A_0 del campo actúan sobre variables independientes es posible intercambiar su orden de aplicación, es decir

$$\Omega^{(0)} = \int d^2x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^2y \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \left\{ \frac{1}{2} \Pi^i(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) - \left[\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] A_0(\mathbf{y}) \right. \\ \left. - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j(\mathbf{y}) A_j(\mathbf{y}) + \frac{1}{2} \left[\varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] \left[\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y}) \right] \right\}.$$

En este punto, se observa que únicamente el segundo término del integrando posee dependencia explícita en A_0 , dicho esto, la derivada funcional actúa de la siguiente manera

$$\Omega^{(0)} = - \int d^2x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^2y \left[\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\ = - \int d^2x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \int d^2y \left[\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y}) \right] \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Ahora, se procede con la integración en la variable \mathbf{y} mediante la delta de Dirac, la cual elige el valor del integrando en el punto $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, lo cual se expresa así

$$\Omega^{(0)} = - \int d^2x \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^x A_j(\mathbf{x}) \right].$$

Recordando que, de acuerdo con la definición establecida en la ecuación (D.1), se impone la condición $\Omega^{(0)} = 0$, dicha igualdad debe satisfacerse independientemente de la forma específica que adopte la función $\gamma^{(0)}$ la cual es completamente arbitraria. Por lo tanto, la única manera de cumplir con esta condición de manera general es exigir que el integrando se anule, lo que conduce directamente a la ligadura presentada en la ecuación (8.11)

$$\Omega^{(0)} = \partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i^x A_j(\mathbf{x}) = 0.$$

D.4. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$

Para obtener el potencial simpléctico correspondiente al primer proceso de iteración del formalismo de Faddeev-Jackiw, el punto de partida es la siguiente definición

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0},$$

la cual indica que se debe evaluar el potencial simpléctico del proceso inicial de la ecuación (8.4) en la ligadura obtenida en el apéndice previo, de forma explícita esto se expresa así

$$\mathcal{H}^{(1)} = \left[\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \left(\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) A_0 - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j + \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) \left(\varepsilon^{kl} \partial_k A_l \right) \right] \Big|_{\partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j = 0}.$$

Tras hacer efectiva la condición que impone la ligadura, el término que involucra a A_0 se anula por completo, en consecuencia el potencial simpléctico adopta la siguiente forma

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j + \frac{1}{2} \left(\varepsilon^{ij} \partial_i A_j \right) \left(\varepsilon^{kl} \partial_k A_l \right),$$

la cual corresponde a lo que se muestra en la ecuación (8.13).

D.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración, se realiza utilizando la definición dada en la ecuación (8.17) junto a las equivalencias dadas en las ecuaciones (8.15) y (8.16). Considerando además las explicaciones dadas en el apéndice D.2 sobre la necesidad del cálculo explícito de las componentes diagonales de la matriz resulta

$$M_{A_i, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = 0.$$

Los elementos fuera de la diagonal principal de la matriz simpléctica se calculan de la siguiente forma

$$M_{A_i, \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})}$$

$$= \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \eta_j^i \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

$$= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\Pi^i, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_i^j \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\begin{aligned}
M_{\Pi^i, \lambda}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y A_j(\mathbf{y}) \right] \\
&= \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \partial_j^y \eta_i^j \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_i^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
M_{\lambda, A_j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\
&= -\partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \eta_i^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
M_{\lambda, \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\
&= -\partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\partial_i^x \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= -\partial_j^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Los resultados anteriores se organizan en la matriz simpléctica $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dando origen a lo presentado en la ecuación (8.18).

D.6. Obtención de componentes del vector $\nu^{A(1)}$

Para encontrar las componentes del autovector asociado al autovalor nulo de la matriz simpléctica del primer proceso de iteración, se propone el vector arbitrario mostrado en la ecuación (8.19), el cual debe satisfacer la siguiente condición de modo cero

$$\int d^2x \nu^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Al expresar el lado izquierdo de la definición previa en su representación matricial, se obtiene la siguiente ecuación

$$\int d^2x \begin{pmatrix} \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) & \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) & \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x & -\partial_j^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Desarrollando el producto matricial anterior y trabajando de forma independiente sobre cada una de las componentes del vector resultante, se obtienen las siguientes expresiones

$$\int d^2x \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^2x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\begin{aligned}
& - \int d^2 x \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^2 x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_j^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
& \int d^2 x \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^2 x \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Considerando que en los términos que involucran operadores diferenciales se emplea la propiedad de simetría de las funciones que dependen exclusivamente de la diferencia entre dos vectores

$$\partial_i^x f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^y f(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{D.2})$$

las componentes mostradas con anterioridad se reescriben de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
& \int d^2 x \beta_j^{(1)}(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^2 x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
& - \int d^2 x \alpha_j^{(1)}(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^2 x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_j^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
& - \int d^2 x \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^2 x \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_i^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

En este punto, se identifica que en los términos que involucran operadores diferenciales, se intercambia el orden de aplicación de dichos operadores con la integración, puesto que actúan sobre variables independientes. Además, se evalúan las integrales en los términos que no poseen operadores diferenciales, es decir

$$\begin{aligned}
& \beta_j^{(1)}(\mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^y \int d^2 x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
& - \alpha_j^{(1)}(\mathbf{y}) + \partial_j^y \int d^2 x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
& - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^y \int d^2 x \alpha_i^{(1)}(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \partial_i^y \int d^2 x \beta_i^{(1)}(\mathbf{x}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Las integrales restantes son evaluadas directamente mediante las deltas de Dirac, de esta manera, el lado izquierdo de la definición inicial resulta ser

$$\left(\beta_j^{(1)}(\mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^y \gamma^{(1)}(\mathbf{y}) \quad -\alpha_j^{(1)}(\mathbf{y}) + \partial_j^y \gamma^{(1)}(\mathbf{y}) \quad -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^y \alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) + \partial_i^y \beta_i^{(1)}(\mathbf{y}) \right).$$

Comparando cada uno de los términos del vector anterior con el lado derecho de la definición inicial expresado en representación matricial, se obtienen las siguientes relaciones

$$\beta_j^{(1)}(\mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^y \gamma^{(1)}(\mathbf{y}), \quad \alpha_j^{(1)}(\mathbf{y}) = \partial_j^y \gamma^{(1)}(\mathbf{y}), \quad \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^y \alpha_i^{(1)}(\mathbf{y}) = \partial_i^y \beta_i^{(1)}(\mathbf{y}).$$

Por lo tanto, el autovector asociado al autovalor nulo adopta finalmente la forma presentada en la ecuación (8.20)

$$\nu^{A(1)} = \left(\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right).$$

D.7. Demostración de la no aparición de ligaduras adicionales

Esta demostración parte de la definición para el calculo de la ligadura correspondiente al primer proceso de iteración, la cual se expresa así

$$\Omega^{(1)} = \int d^2x \nu^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{D.3})$$

Al considerar el modo cero de la ecuación (8.20), se identifica que para esta caso, contribuyen al calculo inicialmente las tres componentes de mismo, es decir

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \int d^2x \nu^{A_i} \frac{\delta}{\delta \xi_{A_i}(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^2x \nu^{\Pi^i} \frac{\delta}{\delta \xi_{\Pi^i}(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &+ \int d^2x \nu^\lambda \frac{\delta}{\delta \xi_\lambda(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Expresando de forma explícita tanto las componentes del modo cero como también las de la variable simpléctica, se obtiene

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &+ \int d^2x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \int d^2y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Se intercambia el orden de aplicación de las integraciones en \mathbf{y} con las respectivas derivadas funcionales debido a que actúan sobre variables independientes, con lo cual resulta

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &+ \int d^2x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}). \end{aligned}$$

Directamente de la ecuación (8.13), se recuerda la forma que tiene el potencial simpléctico de este proceso iterativo

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \frac{1}{2} \Pi^i(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j(\mathbf{y}) \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j(\mathbf{y}) A_j(\mathbf{y}) \\ &+ \frac{1}{2} [\varepsilon^{ij} \partial_i^y A_j(\mathbf{y})] [\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y})]. \end{aligned}$$

En este punto, se identifica que el tercer termino de $\Omega^{(1)}$ se anula de manera inmediata debido a que el potencial simpléctico no posee dependencia en el multiplicador de Lagrange λ , además manteniendo unicamente en los términos restantes aquellos que poseen dependencia directa la expresión adopta la siguiente forma

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kl} A_l(\mathbf{y}) \Pi^k(\mathbf{y}) + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_k(\mathbf{y}) A_k(\mathbf{y}) \right. \\ &+ \left. \frac{1}{2} [\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y})] [\varepsilon^{nm} \partial_n^y A_m(\mathbf{y})] \right\} + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \\ &\left\{ \frac{1}{2} \Pi^l(\mathbf{y}) \Pi^l(\mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{lm} A_m(\mathbf{y}) \Pi^l(\mathbf{y}) \right\}. \end{aligned}$$

Llevando a cabo las derivadas funcionales sobre cada uno de los términos, la expresión se torna en

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kl} \Pi^k(\mathbf{y}) \frac{\delta A_l(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} A_k(\mathbf{y}) \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} \right. \\
&\quad \left. + \left[\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y}) \right] \left[\varepsilon^{nm} \partial_n^y \frac{\delta A_m(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} \right] \right\} + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \\
&\quad \left\{ \Pi^l(\mathbf{y}) \frac{\delta \Pi^l(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{lm} A_m(\mathbf{y}) \frac{\delta \Pi^l(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \right\} \\
&= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kl} \Pi^k(\mathbf{y}) \eta_l^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} A_k(\mathbf{y}) \eta_k^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\
&\quad \left. + \left[\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y}) \right] \left[\varepsilon^{nm} \partial_n^y \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\} + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \\
&\quad \left\{ \Pi^l(\mathbf{y}) \eta_l^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{lm} A_m(\mathbf{y}) \eta_l^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\
&= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \Pi^k(\mathbf{y}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} A_i(\mathbf{y}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right. \\
&\quad \left. + \left[\varepsilon^{kl} \partial_k^y A_l(\mathbf{y}) \right] \left[\varepsilon^{ni} \partial_n^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\} + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \int d^2y \\
&\quad \left\{ \Pi^i(\mathbf{y}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{im} A_m(\mathbf{y}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\}.
\end{aligned}$$

En los términos que no poseen operadores diferenciales, se evalúan directamente las integrales en \mathbf{y} mediante las deltas de Dirac; en aquellos que poseen operadores diferenciales, se hace uso de la identidad presentada en la ecuación (D.2) para cambiar la variable de dichos operadores, lo que permite intercambiar el orden de aplicación con las integrales, es decir,

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \Pi^k(\mathbf{x}) + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} A_i(\mathbf{x}) - \partial_n^x \int d^2y \varepsilon^{kl} \varepsilon^{ni} \partial_k^y A_l(\mathbf{y}) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\
&\quad + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \Pi^i(\mathbf{x}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{im} A_m(\mathbf{x}) \right\} \\
&= \int d^2x \partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \Pi^k(\mathbf{x}) + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} A_i(\mathbf{x}) - \varepsilon^{kl} \varepsilon^{ni} \partial_n^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) \right\} \\
&\quad + \int d^2x \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \left\{ \Pi^i(\mathbf{x}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{im} A_m(\mathbf{x}) \right\}.
\end{aligned}$$

Uniendo los integrandos de cada término en uno solo, se obtiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= \int d^2x \left\{ -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \left[\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \Pi^k(\mathbf{x}) + \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \left[\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] A_i(\mathbf{x}) \right. \\
&\quad \left. - \varepsilon_{kl} \varepsilon^{ni} \left[\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \partial_n^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) + \underbrace{\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \left[\partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \Pi^i(\mathbf{x})}_{i \leftrightarrow k} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \varepsilon_{ik} \varepsilon^{im} \left[\partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] A_m(\mathbf{x}) \right\}.
\end{aligned}$$

Con el cambio de índices en el cuarto término del integrando, se pueden operar términos iguales de signo opuesto. Por otra parte, haciendo uso de la identidad correspondiente al producto de dos

símbolos de Levi-Civita, la expresión se reescribe así

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \int d^2x \left\{ \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \left[\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] A_i(\mathbf{x}) - (\eta_k^n \eta_l^i - \eta_k^i \eta_l^n) \left[\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \partial_n^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \eta_k^m \left[\partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] A_m(\mathbf{x}) \right\} \\ &= \int d^2x \left\{ \frac{\kappa^2}{16\pi^2} \left[\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] A_i(\mathbf{x}) - \left[\partial_l^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \partial_k^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) \right. \\ &\quad \left. + \left[\partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \partial_l^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) - \underbrace{\frac{\kappa^2}{16\pi^2} \left[\partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] A_k(\mathbf{x})}_{k \rightarrow i} \right\}.\end{aligned}$$

Una vez mas con el cambio de índices en el último término del integrando, resultan términos iguales de igual signo los cuales se anulan, tras esta simplificación, la expresión resultante es

$$\Omega^{(1)} = \int d^2x \left\{ \left[\partial_k^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \partial_l^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) - \left[\partial_l^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \partial_k^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) \right\}.$$

Como último paso, se realiza una integración por partes y, tras despreciar la contribución de los términos de superficie en la frontera, resulta lo que se muestra a continuación

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \int d^2x \left\{ -\gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_k^x \partial_l^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) + \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \partial_l^x \partial_k^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) \right\} \\ &= \int d^2x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \left\{ -\partial_l^x \partial_k^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) + \partial_l^x \partial_k^x \partial_k^x A_l(\mathbf{x}) \right\},\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\Omega^{(1)} = 0.$$

Es importante resaltar que el resultado nulo obtenido no se debe al cero impuesto por la definición (D.3). Es decir, el resultado $\Omega^{(1)} = 0$ proviene directamente de la anulación total de su integrando y en consecuencia el modo cero considerado para este cálculo no genera una nueva ligadura en la teoría.

D.8. Obtención del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(2)}$

Con el propósito de obtener el potencial simpléctico del segundo proceso iterativo de la formulación de esta teoría invariante de gauge, como punto de partida se toma la siguiente definición

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \Big|_{\text{gauge}}.$$

Para el desarrollo de esta formulación se ha optado por el gauge de Coulomb, el cual se muestra en la ecuación (8.21), con ello, se debe evaluar dicha condición en el potencial simpléctico de la ecuación (8.13), esto se expresa de la siguiente manera

$$\mathcal{H}^{(2)} = \left[\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} A_j \Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2} A_j A_j + \frac{1}{2} (\varepsilon^{ij} \partial_i A_j) (\varepsilon^{kl} \partial_k A_l) \right] \Big|_{\partial_i A_i = 0}.$$

Dado que el potencial simpléctico del primer proceso de iteración no posee dependencia de la restricción que impone la condición del gauge, no se ve modificada su estructura funcional, lo que conlleva que el potencial simpléctico resultante sea

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i - \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j\Pi^i + \frac{\kappa^2}{32\pi^2}A_jA_j + \frac{1}{2}(\varepsilon^{ij}\partial_iA_j)\left(\varepsilon^{kl}\partial_kA_l\right),$$

la cual corresponde a la expresión presentada en la ecuación (8.23). Es importante destacar que la no modificación funcional del potencial simpléctico es un resultado particular para la teoría de MCS trabajada en el gauge de Coulomb, en general pueden presentarse modificaciones funcionales al imponer la condición de gauge.

D.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Para realizar el cálculo de los elementos de la matriz simpléctica del segundo proceso iterativo de la formulación simpléctica de la teoría de MCS se hace uso de la definición dada en la ecuación (8.27) junto a las equivalencias dadas en las ecuaciones (8.25) y (8.26). Considerando las explicaciones dadas en el apéndice D.2 respecto a la necesidad del cálculo explícito de las componentes diagonales de la matriz se tiene

$$M_{A_i, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = 0.$$

Seguidamente, los elementos situados fuera de la diagonal principal de la matriz se calculan de la siguiente manera

$$M_{A_i, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})}$$

$$= \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \eta_j^i \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

$$= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})} = \partial_j^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})}$$

$$= \partial_j^y \eta_j^i \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_i^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{\Pi^i, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \eta_i^j \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\begin{aligned} M_{\Pi^i, \lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y A_j(\mathbf{y}) \right] \\ &= \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = \partial_j^y \eta_i^j \delta^2(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \partial_i^y \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$M_{\Pi^i, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left[\partial_j^y A_j(\mathbf{y}) \right] = \partial_j^y \frac{\delta A_j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} = 0,$$

$$\begin{aligned} M_{\lambda, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\ &= -\partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \eta_i^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{kj} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\lambda, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\ &= -\partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\partial_i^x \eta_j^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\partial_j^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\lambda, \varphi}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} [\partial_i^y A_i(\mathbf{y})] \\ &\quad - \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{y})} \left[\partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x A_i(\mathbf{x}) \right] \\ &= \partial_i^y \frac{\delta A_i(\mathbf{y})}{\delta \lambda(\mathbf{x})} - \partial_i^x \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})} - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \varphi(\mathbf{y})} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{\varphi, A_j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})} - \frac{\delta}{\delta A_j(\mathbf{y})} [\partial_i^x A_i(\mathbf{x})] = -\partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta A_j(\mathbf{y})} \\ &= -\partial_i^x \eta_i^j \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_j^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$M_{\varphi, \Pi^j}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} [\partial_i^x A_i(\mathbf{x})] = -\partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$\begin{aligned}
M_{\varphi,\lambda}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\varphi}^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\lambda}^{(2)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta \varphi(\mathbf{x})} \left[\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \partial_k^y A_i(\mathbf{y}) \right] \\
&\quad - \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{y})} [\partial_i^x A_i(\mathbf{x})] \\
&= \cancel{\partial_i^y \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})}} + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ki} \cancel{\partial_k^y \frac{\delta A_i(\mathbf{y})}{\delta \varphi(\mathbf{x})}} - \cancel{\partial_i^x \frac{\delta A_i(\mathbf{x})}{\delta \lambda(\mathbf{y})}} = 0.
\end{aligned}$$

Estos elementos, se organizan en la estructura matricial del segundo proceso de iteración, dando origen a lo que se muestra en la ecuación (8.28).

D.10. Obtención explícita de la matriz simpléctica inversa

El paso final para obtener los corchetes generalizados entre las variables dinámicas de la teoría de Maxwell-Chern-Simons, es necesario encontrar la inversa de la matriz simpléctica presentada en la ecuación (8.28), como punto de partida para realizar este cálculo, se toma la siguiente ecuación funcional

$$\int d^2 z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{D.4})$$

Debido a que la estructura explícita de la matriz inversa no es conocida hasta este punto, se propone la siguiente matriz cuyas entradas son funciones arbitrarias

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} & A_m & \Pi^m & \lambda & \varphi \\ \hline A_j & \tau_{1jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{2jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Pi^j & \chi_{1jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{2jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \lambda & \psi_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_{2m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \varphi & \omega_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_{2m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{array} \right).$$

Tras haber definido la forma más general posible de la matriz inversa, y considerando la estructura matricial de la ecuación (8.28), el lado derecho de la definición (D.4) en representación matricial se expresa como

$$\left(\begin{array}{cccc} \eta_m^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_m^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{D.5})$$

donde se expresa de forma explícita las identidades en índices discretos y el espacio continuo de coordenadas. A continuación, se procede a escribir en su forma matricial el producto presente en el integrando del lado izquierdo de la definición (D.4), es decir

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & -\eta_j^i & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x & -\partial_i^x \\ \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \left(\begin{array}{cccc} \tau_{1jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{2jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \tau_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \chi_{1jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{2jm}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{3j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \chi_{4j}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \psi_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_{2m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \psi_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \omega_{1m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_{2m}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \omega_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{array} \right).$$

Tras llevar a cabo el producto matricial anterior para posteriormente hacer uso de la delta de Dirac para evaluar las integrales en cada término, la matriz resultante se compara componente a componente

con la matriz presentada en la ecuación (D.5), de ahí se obtienen las siguientes equivalencias

$$\begin{aligned}
-\chi_{1im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\tau_{1im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{2jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{2jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{2jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

Con el propósito de conocer la forma de las funciones desconocidas que componen la matriz simpléctica inversa, se procede a agrupar aquellas ecuaciones que involucren las mismas funciones. En este sentido, el primer subconjunto por analizar es

$$\begin{aligned}
-\chi_{1im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\tau_{1im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_j^x \tau_{1jm}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

Se procede a aplicar el operador diferencial ∂_i^x sobre la primera ecuación de este subconjunto, lo cual conduce a

$$-\partial_i^x \chi_{1im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \psi_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \eta_m^i \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Identificando que el segundo término de la expresión previa se anula debido a que corresponde a una contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, resulta

$$-\partial_i^x \chi_{1im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{1m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \partial_m^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Mediante las ecuaciones dos y tres del subconjunto, se encuentra la siguiente relación para el primer término de la ecuación sobre la cual se está trabajando

$$\begin{aligned}\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ik}\partial_k^x\tau_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \partial_i^x\chi_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ik}\partial_k^x\partial_i^x\psi_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \partial_i^x\chi_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) \\ 0 &= \partial_i^x\chi_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}),\end{aligned}$$

con lo cual la expresión se torna en

$$-\partial_i^x\partial_i^x\omega_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \partial_m^x\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

De esta ecuación se puede expresar la función $\omega_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ en términos del operador inverso del Laplaciano, con lo cual

$$\omega_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

Seguidamente, se procede a aplicar el operador diferencial ∂_i^x sobre la segunda ecuación del subconjunto, lo que se expresa así

$$\partial_i^x\tau_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \partial_i^x\partial_i^x\psi_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.$$

Al identificar que el primer término del lado izquierdo de la ecuación previa corresponde a la cuarta ecuación del subconjunto, este se anula por completo; en consecuencia

$$\partial_i^x\partial_i^x\psi_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0,$$

considerando que las funciones que aparecen en las entradas de la matriz simpléctica inversa deben satisfacer condiciones físicas de frontera, se concluye que la solución compatible es la trivial, es decir

$$\psi_{1m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.$$

En consecuencia, al reemplazar este resultado en la segunda ecuación de este subconjunto, se determina de forma inmediata que

$$\tau_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0.$$

Con los resultados obtenidos hasta el momento, se determina la forma de la función $\chi_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y})$ al reemplazarlos en la primera ecuación del subconjunto

$$-\chi_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \frac{\partial_i^x\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = \eta_m^i\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}),$$

por lo tanto

$$\chi_{1im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\left(\eta_m^i - \frac{\partial_i^x\partial_m^x}{\partial_l^x\partial_l^x}\right)\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}).$$

A continuación, el siguiente subconjunto de ecuaciones por analizar corresponde a

$$\begin{aligned}-\chi_{2im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{ik}\partial_k^x\psi_{2m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \partial_i^x\omega_{2m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0, \\ \tau_{2im}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \partial_i^x\psi_{2m}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \eta_m^i\delta^2(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \\ \frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{jk}\partial_k^x\tau_{2jm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) - \partial_j^x\chi_{2jm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x\tau_{2jm}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= 0.\end{aligned}$$

Aplicando el operador diferencial ∂_i^x sobre la primera ecuación de este subconjunto, se obtiene la siguiente expresión

$$-\partial_i^x \chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

se consigue identificar que el segundo término del lado izquierdo de la ecuación previa se anula debido a que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, resultando

$$-\partial_i^x \chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Mediante las ecuaciones dos y tres se puede reescribir el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial_i^x \chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x [\eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \partial_i^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{mk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \partial_i^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{mk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado la expresión adopta la siguiente forma

$$-\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{mk} \partial_k^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

a partir de la cual, la función $\omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ expresada en términos del operador inverso del Laplaciano es

$$\omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{mk} \frac{\partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

A continuación se aplica el operador diferencial ∂_i^x sobre la segunda ecuación del subconjunto, lo cual se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \partial_i^x \tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \eta_m^i \partial_i^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \partial_i^x \tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \partial_m^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Identificando que el primer término del lado izquierdo de la ecuación anterior se anula debido a que corresponde a la cuarta ecuación del subconjunto, la expresión se simplifica a

$$\partial_i^x \partial_i^x \psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\partial_m^x \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

y al expresar la función $\psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en términos del operador inverso del Laplaciano, se obtiene como resultado

$$\psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Con este resultado, retomando la ecuación dos de este subconjunto se reescribe de la siguiente manera

$$\tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \eta_m^i \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Por lo tanto, la función $\tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ adopta la siguiente forma

$$\tau_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\eta_m^i - \frac{\partial_i^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Para determinar la función $\chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se reemplazan los resultados obtenidos para las funciones $\psi_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\omega_{2m}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en la primera ecuación del subconjunto, es decir

$$-\chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{mk} \frac{\partial_i^x \partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0,$$

expresión a partir de la cual se concluye que

$$\chi_{2im}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_m^x}{\partial_l^x \partial_l^x} - \varepsilon_{km} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

El siguiente subconjunto de ecuaciones por analizar viene dado por

$$\begin{aligned} -\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ -\partial_j^x \tau_{3j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

Al aplicar el operador diferencial ∂_i^x sobre la primera ecuación del subconjunto, se obtiene la siguiente expresión

$$-\partial_i^x \chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Se identifica que el segundo término del lado izquierdo se anula por completo debido a que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, por ende

$$-\partial_i^x \chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Con el propósito de reescribir el primer término del lado izquierdo de la expresión anterior, a partir de las ecuaciones dos y tres se obtiene la siguiente equivalencia

$$\begin{aligned} \partial_i^x \chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= -\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación que se viene trabajando se obtiene

$$\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Por lo tanto, la función $\omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ escrita en términos del operador inverso del Laplaciano es

$$\omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

A continuación, se aplica el operador diferencial ∂_i^x sobre la segunda ecuación del subconjunto, lo que se expresa de la siguiente manera

$$\partial_i^x \tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Se identifica que el primer término del lado izquierdo de la expresión anterior corresponde a la cuarta ecuación del subconjunto, lo cual termina anulándolo, de forma que

$$\partial_i^x \partial_i^x \psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

al considerar que las funciones que aparecen como elementos de la matriz simpléctica inversa deben satisfacer condiciones físicas de frontera, se concluye que la solución compatible es la trivial, lo que se expresa como

$$\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Este resultado, al ser reemplazado en la segunda ecuación del subconjunto conlleva de manera directa al siguiente resultado

$$\tau_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Por último, para determinar el valor de la función $\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se reemplazan en la primera ecuación de este subconjunto los resultados obtenidos para las funciones $\psi_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, es decir

$$-\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{\partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0.$$

Expresión a partir de la cual, expresando en términos del operador inverso del Laplaciano, la función $\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ toma la siguiente forma

$$\chi_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial_i^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Finalmente, el último subconjunto que queda por analizar está dado por

$$\begin{aligned} -\chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x \tau_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_j^x \chi_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_j^x \tau_{4j}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Se procede a aplicar el operador diferencial ∂_i^x a la segunda ecuación del subconjunto, lo cual se expresa de la siguiente manera

$$\partial_i^x \tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

El primer término del lado izquierdo de la expresión resultante se sustituye la equivalencia mostrada en la ecuación cuatro del subconjunto, es decir

$$-\delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

lo que permite obtener el valor de la función $\psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ en términos del operador inverso del Laplaciano

$$\psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De forma inmediata, al sustituir este resultado en la segunda ecuación del subconjunto, se obtiene el valor de la función $\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, el cual es

$$\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Para determinar el valor de las funciones restantes, se aplica el operador diferencial ∂_i^x sobre la primer ecuación del subconjunto, lo cual se expresa así

$$-\partial_i^x \chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \psi_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Se identifica que el segundo término del lado izquierdo se anula por completo debido a que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica. Además, se reescribe el primer término del lado izquierdo haciendo uso de la tercera ecuación del subconjunto, es decir

$$-\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x \tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

reemplazando el resultado obtenido para la función $\tau_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, la expresión adopta la siguiente forma

$$\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_i^x \partial_k^x \frac{1}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

El primer término del lado izquierdo termina anulándose debido a que corresponde a la contracción de una cantidad simétrica con una antisimétrica, lo que conlleva a

$$\partial_i^x \partial_i^x \omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Una vez más, al considerar que las funciones que aparecen como elementos de la matriz simpléctica inversa satisfacen condiciones físicas de frontera, se concluye que la solución compatible es la trivial y por lo tanto

$$\omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Por último, en la primera ecuación de este subconjunto se reemplazan los resultados obtenidos hasta el momento, lo que lleva de forma directa al valor que tiene la función $\chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, el cual es

$$\chi_{4i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Ajustando los respectivos índices, los resultados obtenidos para las dieciséis funciones desconocidas dan origen a la matriz simpléctica inversa presentada en la ecuación (8.29).

Bibliografía

- [1] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, ser. Belfer Graduate School of Science. Monographs series. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=oQNRAAAAMAAJ>
- [2] M. E. V. Costa and H. O. Girotti, “Quantization of gauge-invariant theories through the dirac-bracket formalism,” *Physical Review D*, vol. 24, pp. 3323–3325, 12 1981.
- [3] M. Ortega, “Método de dirac aplicado a sistemas singulares,” Informe final de Trabajo de Grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2011. [Online]. Available: <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/4625>
- [4] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.
- [5] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, 1st ed. Springer-Verlag, 10 1982, vol. 169. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/BFb0036225>
- [6] K. Luna, “Teoría de maxwell-chern-simons libre y en interacción con campo fermiónico,” Informe final de Trabajo de Grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2015. [Online]. Available: <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/7660>
- [7] J. M. Martínez-Fernández and C. Wotzasek, “Constrained quantization of a topologically massive gauge theory in (2+1)-dimensions,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 43, pp. 305–312, 6 1989.
- [8] L. Faddeev and R. Jackiw, “Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems,” *Physical Review Letters*, vol. 60, pp. 1692–1694, 4 1988.
- [9] R. Jackiw, “(Constrained) quantization without tears,” in *2nd Workshop on Constraint Theory and Quantization Methods*, 5 1993, pp. 367–381.
- [10] J. Barcelos-Neto and C. Wotzatek, “Faddeev-jackiw quantization and constraints,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 07, pp. 4981–5003, 8 1992.
- [11] S. Anjali and S. Gupta, “Faddeev–jackiw quantization of christ–lee model,” *Modern Physics Letters A*, vol. 35, p. 13, 3 2020.
- [12] J. Barcelos-Neto and S. M. Souza, “Geometric quantization of topological gauge theories,” *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 66, pp. 315–319, 3 1995.

- [13] C. Martínez, “Formulación de hamilton-jacobi para teorías gauge topológicas,” Informe final de Trabajo de Grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2023. [Online]. Available: <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/14923>
- [14] A. Fernandez, “Cuantización faddeev-jackiw: formalismo para cuantizar lagrangianos de primer orden,” Trabajo fin de grado, grado en física, Universidad del Pais Vasco, Bilbao, España, 2021. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10810/54322>
- [15] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, “Symplectic quantization of constrained systems,” *Modern Physics Letters A*, vol. 07, pp. 1737–1747, 6 1992.
- [16] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [17] J. Schwichtenberg, *No-Nonsense Quantum Field Theory: A Student-Friendly Introduction*. No-Nonsense Books, 2020. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=4AjbDwAAQBAJ>
- [18] N. H. Christ and T. D. Lee, “Operator ordering and feynman rules in gauge theories,” *Physical Review D*, vol. 22, pp. 939–958, 8 1980.
- [19] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 9 2008. [Online]. Available: <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/6938>
- [20] Q. gui Lin and G. jiong Ni, “Dirac quantization of chern-simons theories in (2+1) dimensions,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 7, pp. 1261–1270, 7 1990.