

Formulación simpléctica para teorías gauge

Autor: Franklin Ivan Cuaran Cuaran

Director: Dr. German Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, 3 de junio de 2026



Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904



Tabla de contenido

1 Introducción

- ▶ **Introducción**
- ▶ Marco referencial
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ Conclusiones
- ▶ Bibliografía

Teorías gauge y sistemas singulares

1 Introducción

- Las teorías gauge constituyen un caso particular de sistemas singulares.



Trabajo de grado

Teorías gauge y sistemas singulares

1 Introducción

- Las teorías gauge constituyen un caso particular de sistemas singulares.
- Su tratamiento canónico estándar se realiza mediante el método de Dirac.



Trabajo de grado

Teorías gauge y sistemas singulares

1 Introducción

- Las teorías gauge constituyen un caso particular de sistemas singulares.
- Su tratamiento canónico estándar se realiza mediante el método de Dirac.
- El método de Faddeev-Jackiw utiliza la estructura simpléctica del espacio de fase.



Trabajo de grado

Teorías gauge y sistemas singulares

1 Introducción

- Las teorías gauge constituyen un caso particular de sistemas singulares.
- Su tratamiento canónico estándar se realiza mediante el método de Dirac.
- El método de Faddeev-Jackiw utiliza la estructura simpléctica del espacio de fase.
- Requiere una formulación de primer orden en derivadas temporales.



Trabajo de grado



Planteamiento del problema y objetivo general

1 Introducción

Pregunta de investigación

¿Cómo se describen las teorías gauge bajo la formulación simpléctica de Faddeev-Jackiw?

Objetivo General

Aplicar la formulación de Faddeev-Jackiw al estudio de teorías gauge, con el propósito de comprender su estructura dinámica.



Objetivos específicos

1 Introducción

- Analizar el modelo de Christ-Lee mediante la formulación de Faddeev-Jackiw, con el propósito de caracterizar su estructura de ligaduras y la dinámica del sistema.

Objetivos específicos

1 Introducción

- Analizar el modelo de Christ-Lee mediante la formulación de Faddeev-Jackiw, con el propósito de caracterizar su estructura de ligaduras y la dinámica del sistema.
- Caracterizar la teoría electromagnética de Maxwell a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, identificando sus simetrías gauge y la reducción de grados de libertad.

Objetivos específicos

1 Introducción

- Analizar el modelo de Christ-Lee mediante la formulación de Faddeev-Jackiw, con el propósito de caracterizar su estructura de ligaduras y la dinámica del sistema.
- Caracterizar la teoría electromagnética de Maxwell a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, identificando sus simetrías gauge y la reducción de grados de libertad.
- Describir la teoría de Chern-Simons abeliana pura a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, determinando su estructura simpléctica y sus propiedades topológicas.

Objetivos específicos

1 Introducción

- Analizar el modelo de Christ-Lee mediante la formulación de Faddeev-Jackiw, con el propósito de caracterizar su estructura de ligaduras y la dinámica del sistema.
- Caracterizar la teoría electromagnética de Maxwell a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, identificando sus simetrías gauge y la reducción de grados de libertad.
- Describir la teoría de Chern-Simons abeliana pura a través de la formulación de Faddeev-Jackiw, determinando su estructura simpléctica y sus propiedades topológicas.
- Examinar la teoría de Maxwell-Chern-Simons aplicando la formulación de Faddeev-Jackiw, con el fin de evidenciar el efecto de los términos topológicos en su descripción.

Tabla de contenido

2 Marco referencial

- ▶ Introducción
- ▶ **Marco referencial**
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ Conclusiones
- ▶ Bibliografía

Método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge

2 Marco referencial

Lagrangiano del sistema

$$L = L(q_i, \dot{q}_i). \quad (2.1)$$

Momentos canónicos conjugados

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.2)$$

Lagrangiano canónico

$$L_C(q_i, p_i) \equiv L(q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i=g_i(q,p)} = p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i). \quad (2.3)$$

Lagrangiano de primer orden

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)i} - H^{(0)}(\xi). \quad (2.4)$$

Método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge

2 Marco referencial

Matriz simpléctica

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} - \frac{\partial a_i^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)j}}. \quad (2.5)$$

Ecuaciones de movimiento en el formalismo de Faddeev-Jackiw

$$f_{ij}^{(0)} \dot{\xi}^{(0)j} = \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}}. \quad (2.6)$$

Ecuación de evolución temporal

$$\dot{\xi}^{(0)i} = \left(f_{ij}^{(0)}\right)^{-1} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)j}}. \quad (2.7)$$

Método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge

2 Marco referencial

Equivalencia de la matriz simpléctica inversa con los corchetes de Poisson

$$\left(f_{ij}^{(0)}\right)^{-1} = \left\{\xi^{(0)i}, \xi^{(0)j}\right\}. \quad (2.8)$$

Modos cero asociados a la matriz simpléctica

$$\nu_{\alpha}^{(0)i} f_{ij}^{(0)} = 0. \quad (2.9)$$

Ligaduras del sistema en Faddeev-Jackiw

$$\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi) = \nu_{\alpha}^{(0)i} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^{(0)i}} = 0. \quad (2.10)$$

Método de Faddeev-Jackiw para teorías gauge

2 Marco referencial

Tras incorporar la ligadura, se genera un nuevo proceso iterativo, para el cual

$$L^{(1)} \left(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0)\alpha} \right) = a_i^{(1)}(\xi) \dot{\xi}^{(1)i} - H^{(1)}(\xi) \quad (2.11)$$

El potencial simpléctico del primer proceso de iteración es

$$H^{(1)}(\xi) = H^{(0)}(\xi) \Big|_{\Omega_{\alpha}^{(0)}(\xi)=0}. \quad (2.12)$$

Para un número finito N de iteraciones

$$\Omega_{\alpha}^{(N)}(\xi) = 0. \quad (2.13)$$

Incorporar condiciones de gauge genera un proceso iterativo $N + 1$

$$\left(f_{ij}^{(N+1)} \right)^{-1} = \left\{ \xi^{(N+1)i}, \xi^{(N+1)j} \right\}. \quad (2.14)$$

Método Faddeev-Jackiw para teoría de campos gauge

2 Marco referencial

Lagrangiano de la teoría

$$L = \int d^3x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi). \quad (2.15)$$

Los momentos canónicos conjugados

$$\Pi^A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi^A)}. \quad (2.16)$$

Se trabaja a nivel de la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L}^{(0)} = K_A^{(0)}(\xi) \dot{\xi}^{(0)A} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi), \quad (2.17)$$

Método Faddeev-Jackiw para teoría de campos gauge

2 Marco referencial

La matriz simpléctica está dada por

$$M_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B(\mathbf{y})}{\delta \xi^A(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A(\mathbf{x})}{\delta \xi^B(\mathbf{y})}. \quad (2.18)$$

Los modos cero vienen dados por la expresión

$$\int d^3x \nu^A(\mathbf{x}) M_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (2.19)$$

Mientras que las ligaduras de la teoría se obtienen a partir de la siguiente expresión

$$\Omega = \int d^3x \nu^A(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi^A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}(\mathbf{y}) = 0. \quad (2.20)$$

Tabla de contenido

3 Modelo de Christ-Lee

- ▶ Introducción
- ▶ Marco referencial
- ▶ **Modelo de Christ-Lee**
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ Conclusiones
- ▶ Bibliografía

Modelo de Christ-Lee

3 Modelo de Christ-Lee

Particularidades:

- Propuesto por Norman H. Christ y Tsung-Dao Lee en 1980.
- Modelo mecánico no relativista.
- Ilustra la aparición de simetrías gauge en sistemas con un número finito de grados de libertad.

Lagrangiano del sistema

$$L = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - z(x\dot{y} - y\dot{x}) + \frac{1}{2} z^2 (x^2 + y^2) - V(x^2 + y^2). \quad (3.1)$$

Linealización del Lagrangiano

3 Modelo de Christ-Lee

Momentos canónicos

$$p_x = \dot{x} + zy, \quad p_y = \dot{y} - zx, \quad p_z = 0. \quad (3.2)$$

Lagrangiano equivalente de primer orden

$$L^{(0)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + z (p_y x - p_x y) + V(x^2 + y^2) \right]}_{H^{(0)}}. \quad (3.3)$$

Componentes de la variable simpléctica

$$\xi_x^{(0)} \rightarrow x, \quad \xi_{p_x}^{(0)} \rightarrow p_x, \quad \xi_y^{(0)} \rightarrow y, \quad \xi_{p_y}^{(0)} \rightarrow p_y, \quad \xi_z^{(0)} \rightarrow z. \quad (3.4)$$

Matriz simpléctica inicial

3 Modelo de Christ-Lee

Elementos de la uno forma canónica

$$a_x^{(0)} \rightarrow p_x, \quad a_{p_x}^{(0)} \rightarrow 0, \quad a_y^{(0)} \rightarrow p_y, \quad a_{p_y}^{(0)} \rightarrow 0, \quad a_z^{(0)} \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Matriz simpléctica del proceso inicial

$$f_{ij}^{(0)} = \left(\begin{array}{c|ccccc} & x & p_x & y & p_y & z \\ \hline x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ p_x & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_y & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (3.6)$$

Ligadura del sistema

3 Modelo de Christ-Lee

Modo cero del proceso inicial

$$\nu_i^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_z^{(0)} \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Ligadura del sistema

$$\Omega^{(0)} = p_y x - p_x y = 0. \quad (3.8)$$

Lagrangiano del primer proceso de iteración

$$L^{(1)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + (p_y x - p_x y) \dot{\lambda} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right]}_{H^{(1)} = H^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)} = 0}}. \quad (3.9)$$

Primer proceso de iteración

3 Modelo de Christ-Lee

Matriz simpléctica del primer proceso de iteración

$$f_{ij}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccccc} & x & p_x & y & p_y & \lambda \\ \hline x & 0 & -1 & 0 & 0 & p_y \\ p_x & 1 & 0 & 0 & 0 & -y \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x \\ p_y & 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ \lambda & -p_y & y & p_x & -x & 0 \end{array} \right). \quad (3.10)$$

Modo cero correspondiente

$$\nu_i^{(1)} = \nu_\lambda^{(1)} (y \quad p_y \quad -x \quad -p_x \quad 1). \quad (3.11)$$

Invariancia gauge del sistema

3 Modelo de Christ-Lee

Aún cuando existe un modo cero, no surgen nuevas ligaduras

$$\Omega^{(1)} = 0. \quad (3.12)$$

Condición de gauge

$$b - c \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = 0. \quad (3.13)$$

Lagrangiano del segundo proceso de iteración

$$L^{(2)} = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + (p_y x - p_x y) \dot{\lambda} + \left[b - c \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \right] \dot{\rho} - \underbrace{\left[\frac{1}{2} p_x^2 + \frac{1}{2} p_y^2 + V(x^2 + y^2) \right]}_{H^{(2)} = H^{(1)}|_{\text{gauge}}}. \quad (3.14)$$

Matriz simpléctica regular

3 Modelo de Christ-Lee

Tras la incorporación de la condición de gauge, la matriz simpléctica se vuelve regular

$$f_{ij}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccccc} & x & p_x & y & p_y & \lambda & \rho \\ \hline x & 0 & -1 & 0 & 0 & p_y & \frac{cy}{x^2+y^2} \\ p_x & 1 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & -1 & -p_x & -\frac{cx}{x^2+y^2} \\ p_y & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 0 \\ \lambda & -p_y & y & p_x & -x & 0 & 0 \\ \rho & -\frac{cy}{x^2+y^2} & 0 & \frac{cx}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (3.15)$$



Matriz simpléctica inversa

3 Modelo de Christ-Lee

Inversa de la matriz simpléctica final

$$\left(f_{ij}^{(2)} \right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccccc} \{, \} & x & p_x & y & p_y & \lambda & \rho \\ \hline x & 0 & \frac{x^2}{x^2+y^2} & 0 & \frac{xy}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{y}{c} \\ p_x & -\frac{x^2}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{xy}{x^2+y^2} & \frac{xp_y - yp_x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} & -\frac{p_y}{c} \\ y & 0 & \frac{xy}{x^2+y^2} & 0 & \frac{y^2}{x^2+y^2} & 0 & \frac{x}{c} \\ p_y & -\frac{xy}{x^2+y^2} & -\frac{xp_y - yp_x}{x^2+y^2} & -\frac{y^2}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{x}{x^2+y^2} & \frac{p_x}{c} \\ \lambda & 0 & -\frac{y}{x^2+y^2} & 0 & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 & -\frac{1}{c} \\ \rho & \frac{y}{c} & \frac{p_y}{c} & -\frac{x}{c} & -\frac{p_x}{c} & \frac{1}{c} & 0 \end{array} \right). \quad (3.16)$$



Corchetes generalizados

3 Modelo de Christ-Lee

Corchetes generalizados de interés

$$\begin{aligned}\left\{ \xi_x^{(2)}, \xi_{p_x}^{(2)} \right\} &= \{x, p_x\} = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \\ \left\{ \xi_x^{(2)}, \xi_{p_y}^{(2)} \right\} &= \{x, p_y\} = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \\ \left\{ \xi_{p_x}^{(2)}, \xi_y^{(2)} \right\} &= \{p_x, y\} = -\frac{xy}{x^2 + y^2}, \\ \left\{ \xi_{p_x}^{(2)}, \xi_{p_y}^{(2)} \right\} &= \{p_x, p_y\} = \frac{xp_y - yp_x}{x^2 + y^2} = 0, \\ \left\{ \xi_y^{(2)}, \xi_{p_y}^{(2)} \right\} &= \{y, p_y\} = \frac{y^2}{x^2 + y^2}.\end{aligned}$$

Son consistentes con los corchetes de Dirac.

Tabla de contenido

4 Teoría electromagnética de Maxwell

- ▶ Introducción
- ▶ Marco referencial
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ Conclusiones
- ▶ Bibliografía

Teoría electromagnética de Maxwell

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Particularidades:

- Formulación relativista, teoría gauge abeliana.
- Potencial vector A_μ .
- Tensor de intensidad del campo electromagnético $F_{\mu\nu}$.
- Describe partículas sin masa y de espín uno.

Densidad Lagrangiana de Maxwell

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (4.1)$$

Linealización de la densidad Lagrangiana

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Momentos canónicos conjugados

$$\Pi^\nu = F^{\nu 0}. \quad (4.2)$$

La densidad Lagrangiana de Maxwell se reescribe de la siguiente forma

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_i \Pi^i - \underbrace{\left[\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - A_0 (\partial_i \Pi^i) + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right]}_{\mathcal{H}^{(0)}}. \quad (4.3)$$

Componentes de la variable simpléctica inicial

$$\xi_{A_i}^{(0)} \rightarrow A_i, \quad \xi_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad \xi_{A_0}^{(0)} \rightarrow A_0. \quad (4.4)$$

Matriz simpléctica inicial

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Elementos de la uno forma canónica

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (4.5)$$

Matriz simpléctica del proceso inicial

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & A_0 \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.6)$$

Ligadura de la teoría

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Su correspondiente modo cero es

$$\nu^{A(0)} = \left(0 \quad 0 \quad \gamma^{(0)}(\mathbf{x}) \right). \quad (4.7)$$

Ligadura de la teoría

$$\Omega^{(0)} = \partial_i \Pi^i = 0. \quad (4.8)$$

Densidad Lagrangiana del primer proceso de iteración

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \partial_i \Pi^i - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right)}_{\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \big|_{\Omega^{(0)}=0}}. \quad (4.9)$$

Primer proceso de iteración

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Matriz simpléctica del primero proceso de iteración

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & \lambda \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \lambda & 0 & -\partial_j^x & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.10)$$

Modo cero asociado a esta matriz

$$\nu^{A(1)} = \left(\partial_i^x \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \quad 0 \quad \gamma^{(1)}(\mathbf{x}) \right). \quad (4.11)$$

Invariancia gauge de la teoría

4 Teoría electromagnética de Maxwell

A pesar de la existencia del modo cero, no surgen ligaduras adicionales

$$\Omega^{(1)} = 0. \quad (4.12)$$

Para esta teoría se utiliza el gauge de Coulomb

$$\partial_i A_i = 0. \quad (4.13)$$

Densidad Lagrangiana del segundo proceso de iteración

$$\mathcal{L}^{(2)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \partial_i \Pi^i + \dot{\varphi} \partial_i A_i - \underbrace{\left(\frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} \right)}_{\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}^{(1)} \Big|_{\text{gauge}}}. \quad (4.14)$$

Matriz simpléctica regular

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Mediante la incorporación del gauge de Coulomb, se consigue la regularización de la matriz simpléctica

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & 0 & -\partial_i^x \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ \lambda & 0 & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ \varphi & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.15)$$



Matriz simpléctica inversa

4 Teoría electromagnética de Maxwell

La inversa de la matriz simpléctica anterior se expresa de la siguiente manera

$$[M^{CB(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccccc} \{, \} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) & 0 & -\frac{\partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \Pi^i & -\left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) & 0 & -\frac{\partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 \\ \lambda & 0 & -\frac{\partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 & -\frac{1}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \varphi & -\frac{\partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 & \frac{1}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.16)$$

Corchetes generalizados

4 Teoría electromagnética de Maxwell

Corchetes generalizados de interés para esta teoría

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})\} = 0,$$

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\left\{ \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{\Pi^i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = 0.$$

Son consistentes con los resultados provenientes del método de Dirac.



Tabla de contenido

5 Teoría de Chern-Simons abeliana pura

- ▶ Introducción
- ▶ Marco referencial
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ Conclusiones
- ▶ Bibliografía

Teoría de Chern-Simons abeliana pura

5 Teoría de Chern-Simons abeliana pura

Particularidades:

- Teoría definida en $(2 + 1)$ dimensiones espacio-temporales.
- Su construcción depende solo del potencial vector A_μ y sus derivadas espacio-temporales.
- La densidad Lagrangiana es lineal en las derivadas espacio-temporales del potencial vector.

Densidad Lagrangiana de Chern-Simons pura

$$\mathcal{L} = \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{\mu\nu\rho} (\partial_\mu A_\nu) A_\rho. \quad (5.1)$$

Aspectos destacables

5 Teoría de Chern-Simons abeliana pura

Ligadura de la teoría

$$\Omega^{(0)} = \frac{\kappa}{2\pi} \varepsilon^{ij} (\partial_i A_j) = 0. \quad (5.2)$$

Anulación del potencial simpléctico

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0} = 0. \quad (5.3)$$

Para esta teoría se utiliza el gauge de Coulomb

$$\partial_i A_i = 0. \quad (5.4)$$

Matriz simpléctica regular

5 Teoría de Chern-Simons abeliana pura

Tras incorporar el gauge de Coulomb, se consigue una matriz simpléctica regular dada por

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\kappa}{2\pi} \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & -\varepsilon^{ij} & \varepsilon^{ik} \partial_k^x & -\partial_i^x \\ \lambda & \varepsilon^{jk} \partial_k^x & 0 & 0 \\ \varphi & -\partial_j^x & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.5)$$



Matriz simpléctica inversa y corchete generalizado

5 Teoría de Chern-Simons abeliana pura

La inversa de la matriz previa posee la siguiente estructura

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{2\pi}{\kappa} \left(\begin{array}{c|ccc} \{, \} & A_j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} + \varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) & \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & -\frac{\partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \lambda & \varepsilon^{jk} \frac{\partial_k^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 & -\frac{1}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \varphi & -\frac{\partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & \frac{1}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 \end{array} \right) \delta^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.6)$$

El corchete generalizado de interés viene dado por

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)} (\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(2)} (\mathbf{y}) \right\} = \{ A_i (\mathbf{x}), A_j (\mathbf{y}) \} = \frac{2\pi}{\kappa} \left(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} + \varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) \delta^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.7)$$

Tabla de contenido

6 Teoría de Maxwell-Chern-Simons

- ▶ Introducción
- ▶ Marco referencial
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ **Teoría de Maxwell-Chern-Simons**
- ▶ Conclusiones
- ▶ Bibliografía

Teoría de Maxwell-Chern-Simons

6 Teoría de Maxwell-Chern-Simons

Particularidades:

- Teoría definida en $(2 + 1)$ dimensiones espacio-temporales.
- Acoplamiento entre la teoría de Maxwell y el término topológico de Chern-Simons.

Densidad Lagrangiana de Maxwell-Chern-Simons

$$\mathcal{L} = \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}_{\mathcal{L}_M} + \underbrace{\frac{\kappa}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}(\partial_\mu A_\nu)A_\rho}_{\mathcal{L}_{CS}}. \quad (6.1)$$

Puntos clave

6 Teoría de Maxwell-Chern-Simons

Ligadura de la teoría

$$\Omega^{(0)} = \partial_i \Pi^i + \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ij} \partial_i A_j = 0. \quad (6.2)$$

Para esta teoría se utiliza el gauge de Coulomb

$$\partial_i A_i = 0. \quad (6.3)$$

Tras la incorporación del gauge de Coulomb, se logra regularizar la matriz simpléctica

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} & A_j & \Pi^j & \lambda & \varphi \\ \hline A_i & 0 & -\eta_j^i & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \partial_k^x & -\partial_i^x \\ \Pi^i & \eta_j^i & 0 & -\partial_i^x & 0 \\ \lambda & \frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \partial_k^x & -\partial_j^x & 0 & 0 \\ \varphi & -\partial_j^x & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.4)$$



Matriz simpléctica inversa

6 Teoría de Maxwell-Chern-Simons

La inversa de la matriz simpléctica anterior viene dada por

$$\left[M^{CB(2)} \right]^{-1} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccccc} \{, \} & & & & & \\ \hline A_i & 0 & & \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) & 0 & -\frac{\partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \Pi^i & -\left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) & \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \right) & -\frac{\partial_i^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{ik} \frac{\partial_k^x}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \lambda & 0 & -\frac{\partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 & -\frac{1}{\partial_1^x \partial_1^x} \\ \varphi & -\frac{\partial_j^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & -\frac{\kappa}{4\pi} \varepsilon^{jk} \frac{\partial_k^x}{\partial_1^x \partial_1^x} & \frac{1}{\partial_1^x \partial_1^x} & 0 \end{array} \right) \delta^2 (\mathbf{x} - \mathbf{y}). \tag{6.5}$$



Corchetes generalizados

6 Teoría de Maxwell-Chern-Simons

Corchetes generalizados de interés para esta teoría

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{A_j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), A_j(\mathbf{y})\} = 0,$$

$$\left\{ \xi_{A_i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \left(\eta_j^i - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\left\{ \xi_{\Pi^i}^{(2)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(2)}(\mathbf{y}) \right\} = \{\Pi^i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \frac{\kappa}{4\pi} \left(\varepsilon_{ki} \frac{\partial_k^x \partial_j^x}{\partial_l^x \partial_l^x} - \varepsilon_{kj} \frac{\partial_k^x \partial_i^x}{\partial_l^x \partial_l^x} \right) \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Tabla de contenido

7 Conclusiones

- ▶ Introducción
- ▶ Marco referencial
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ **Conclusiones**
- ▶ Bibliografía

Conclusiones

7 Conclusiones

Se desarrolló de manera sistemática la formulación simpléctica de un sistema con un número finito de grados de libertad y tres teorías de campos gauge.

Además, se obtuvieron las ligaduras de cada una de las teorías estudiadas, así como se identificó su simetría gauge y sus variables o campos físicos.

Posteriormente, se verificó la consistencia de los corchetes generalizados con los corchetes de Dirac para las cuatro teorías estudiadas; se realizó una comprobación adicional para las teorías de Chern-Simons pura y Maxwell-Chern-Simons con los resultados de la formulación de Hamilton-Jacobi.

Dentro de este formalismo, no es necesario el concepto de igualdad débil de Dirac, porque las ligaduras se incorporan directamente en la estructura simpléctica del sistema.

Conclusiones

7 Conclusiones

Mediante la matriz simpléctica inversa, se obtienen de manera directa e inmediata todos los corchetes generalizados para las variables físicas.

Sin embargo, no fue posible obtener de manera explícita todas las ligaduras de las teorías; de manera particular, aquellas que surgen de los momentos canónicos no se lograron determinar.

Finalmente, se recomienda extender la formulación simpléctica a otras teorías gauge y analizar distintas condiciones de gauge en las teorías de Maxwell, CS pura y MCS para estudiar el alcance y las limitaciones del método de Faddeev-Jackiw.

Tabla de contenido

8 Bibliografía

- ▶ Introducción
- ▶ Marco referencial
- ▶ Modelo de Christ-Lee
- ▶ Teoría electromagnética de Maxwell
- ▶ Teoría de Chern-Simons abeliana pura
- ▶ Teoría de Maxwell-Chern-Simons
- ▶ Conclusiones
- ▶ **Bibliografía**

Bibliografía

8 Bibliografía

- [1] P. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, ser. Belfer Graduate School of Science. Monographs series. Belfer Graduate School of Science, Yeshiva University, 1964. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=oQNRAAAAMAAJ>
- [2] M. E. V. Costa and H. O. Girotti, "Quantization of gauge-invariant theories through the dirac-bracket formalism," *Physical Review D*, vol. 24, pp. 3323–3325, 12 1981.
- [3] M. Ortega, "Método de dirac aplicado a sistemas singulares," Informe final de Trabajo de Grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2011. [Online]. Available: <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/4625>
- [4] A. Hanson, T. Regge, and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*. Accademia Nazionale dei Lincei, 1974.
- [5] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, 1st ed. Springer-Verlag, 10 1982, vol. 169. [Online]. Available: <http://link.springer.com/10.1007/BFb0036225>
- [6] K. Luna, "Teoría de maxwell-chern-simons libre y en interacción con campo fermiónico," Informe final de Trabajo de Grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2015. [Online]. Available: <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/7660>
- [7] J. M. Martínez-Fernández and C. Wotzasek, "Constrained quantization of a topologically massive gauge theory in (2+1)-dimensions," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 43, pp. 305–312, 6 1989.
- [8] L. Faddeev and R. Jackiw, "Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems," *Physical Review Letters*, vol. 60, pp. 1692–1694, 4 1988.

Bibliografía

8 Bibliografía

- [9] R. Jackiw, "(Constrained) quantization without tears," in *2nd Workshop on Constraint Theory and Quantization Methods*, 5 1993, pp. 367–381.
- [10] J. Barcelos-Neto and C. Wotzatek, "Faddeev-jackiw quantization and constraints," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 07, pp. 4981–5003, 8 1992.
- [11] S. Anjali and S. Gupta, "Faddeev–jackiw quantization of christ–lee model," *Modern Physics Letters A*, vol. 35, p. 13, 3 2020.
- [12] J. Barcelos-Neto and S. M. Souza, "Geometric quantization of topological gauge theories," *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, vol. 66, pp. 315–319, 3 1995.
- [13] C. Martínez, "Formulación de hamilton-jacobi para teorías gauge topológicas," Informe final de Trabajo de Grado, Universidad de Nariño, Pasto, Colombia, 2023. [Online]. Available: <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/14923>
- [14] A. Fernandez, "Cuantización faddeev-jackiw: formalismo para cuantizar lagrangianos de primer orden," Trabajo fin de grado, grado en física, Universidad del País Vasco, Bilbao, España, 2021. [Online]. Available: <http://hdl.handle.net/10810/54322>
- [15] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, "Symplectic quantization of constrained systems," *Modern Physics Letters A*, vol. 07, pp. 1737–1747, 6 1992.
- [16] W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*. Springer Berlin Heidelberg, 1996.
- [17] J. Schwichtenberg, *No-Nonsense Quantum Field Theory: A Student-Friendly Introduction*. No-Nonsense Books, 2020. [Online]. Available: <https://books.google.com.co/books?id=4AjbDwAAQBAJ>

Bibliografía

8 Bibliografía

- [18] N. H. Christ and T. D. Lee, "Operator ordering and feynman rules in gauge theories," *Physical Review D*, vol. 22, pp. 939–958, 8 1980.
- [19] A. Das, *Lectures on Quantum Field Theory*. World Scientific, 9 2008. [Online]. Available: <https://www.worldscientific.com/worldscibooks/10.1142/6938>
- [20] Q. gui Lin and G. jiong Ni, "Dirac quantization of chern-simons theories in (2+1) dimensions," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 7, pp. 1261–1270, 7 1990.



Universidad de **Nariño**
FUNDADA EN 1904

Gracias