

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE EDUCACION

TEORIA DE LOS CAMPOS

(ELEMENTOS)

821700

Magdalena Sofia Rodas, Bethlemita  
Pasto, diciembre 18 de 1.968

4  
530.11  
R685

i

Rodas...

III

Con estas las tres grandes bases de la Física teórica contemporánea, por todos conocidas: Teoría del movimiento de la materia, Teoría de los campos, en su forma más perfecta - la forma relativista - y Teoría de los Cuantos.

Cómo ha ocurrido en épocas anteriores, esas teorías han podido seguir progresando tomando constantemente bridas del arsenal de las matemáticas.

Las teorías físicas que apelan a la acción de continos y que emplean más o menos explícitamente la teoría de campo de magnitudes se desarrollaron sobre todo a fines del siglo XVIII y a comienzos del XIX en la época en que se constituían la ciencia del movimiento de los fluidos y "Hidrodinámica" y la teoría de la elasticidad.

Esta monografía que es la culminación de una etapa de mi vida la dedico a - mi queridísima Hermana Provincial María Soledad Chacón y a mi Profesor Dr. Rosario Fiori.

Ella, cultivó mi juventud en los jardines del Señor; ella comprendió mi afán de saber y abrió las puertas de mi celda a los Claustros Universitarios.

El protegió mi inexperiencia y amplió con la ciencia los caminos que llevan a Dios.

Para todos mis Profesores y demás colaboradores, mi eterna gratitud y por ellos una Plegaria ante el Sagrado.

La idea esencial de Maxwell fue, en efecto, unificar el conjunto de los fenómenos electromagnéticos conocidos dentro de una vasta teoría en la que los campos y su propagación gradual desempeñaron el papel principal. Después de Maxwell, la teoría electromagnética se ha convertido en la más perfecta de las teorías de la Física del Campo. Aún más que la hidrodinámica que la teoría de la elasticidad, ha habituado a los físicos a manejar el Cálculo Vectorial y a familiarizarse con operaciones matemáticas como las de gradiente, divergencia o rotor, que se presentan naturalmente en él. a la Teoría de los Campos y pretende ser una exposición que sirva de iniciación a todos.

La teoría electromagnética ha conducido, así, a considerar problemas cuya solución exige la intervención de ramas avanzadas del Análisis Matemático; la teoría de los potenciales retardados y la de la propagación de las perturbaciones eléctricas a lo largo de los conductores suministran ejemplos de ello. La introducción del concepto de electrón por Lorentz en una forma compatible con la continuidad de la Física del Campo no cambió para nada el aspecto general del electromagnetismo y permitió interpretar con éxito un gran número de fenómenos importantes, tales como el efecto Zeeman normal y los fenómenos del electro y magneto óptico.

Sin embargo, se sabe que después de la realización de la famosa experiencia de Michelson y de otras experiencias análogas, la teoría electromagnética en la forma de Maxwell-Lorentz encontró dificultades en apariencia insuperables y fue necesaria la aparición de la teoría de la Relatividad con sus concepciones tan sorprendente y nuevas para que el físico saliera del estancamiento. No vamos a resumir aquí las pericias de este período tan curioso de la Historia de la Física teórica, ni las soluciones propuestas por la teoría de la Relatividad. Lo que nos interesa es insistir sobre los instrumentos matemáticos, casi desconocidos hasta entonces por los físicos, que Einstein y sus continuadores se vieron conducidos a usar para llegar a buen término sus razonamientos.

En cierto sentido, la teoría de la Relatividad se presenta como el coronamiento de la Física Clásica del Campo, pues trata de representar simultáneamente todo el conjunto de hechos físicos pasados, presentes y futuros dentro del marco de un continuo de cuatro dimensiones, el espacio tiempo, que realiza una especie de fusión del espacio y del tiempo.

PROLOGO

I. El presente estudio se refiere exclusivamente a la Teoría de los Campos y pretende ser una exposición que sirva de iniciación a todos aquellos amantes de la Física Moderna.	2 - 4
A. Líneas de fuerza del Campo	8 - 9
IV. Representación de magnitudes vectoriales y Operaciones fundamentales.	10 - 16
A. Vectores	10 - 13
B. Producto Escalar	13 - 15
C. Producto Vectorial	15 - 16
V. OPERADORES DE CAMPO	17 - 26
A. Gradiente	17 - 21
B. Divergencia	21 - 24
C. Rotación o Curl	24 - 26
VI. LEMMA DE GREEN, TEOREMA DE GAUSS; TEOREMA DE STOKES	27 - 33
A. Lemma de Green	27 - 29
B. Teorema de Gauss	29 - 30
C. Enunciación de la Continuidad	30 - 32
D. Teorema de Stokes	32 - 33
VII. APLICACIONES	34 - 47
A. Campo Gravitatorio	34 - 38
B. Campo Electroestático de cargas puntuales	38 - 40
C. Campo Electroestático de conductores	40 - 41
D. Campo Magnético de las corrientes	42 - 44
E. Campos Eléctricos de campos magnéticos variables	45 - 47
VIII. BIBLIOGRAFIA	48

Pasto, diciembre 17 de 1.968

## INDICE GENERAL

	Páginas
DEDICATORIA .....	
PROLOGO .....	
I. CONCEPTO INTUITIVO DE CAMPO.....	1 - 2
II. REPRESENTACION ANALITICA DEL CAMPO.....	3 - 4
III. REPRESENTACION GRAFICA DEL CAMPO.....	5 - 9
A. Líneas de fuerza del Campo .....	8 - 9
IV. Representación de magnitudes vectoriales y Operaciones fun damentales.....	10 - 16
A. Vectores .....	10 - 13
B. Producto Escalar.....	13 - 15
C. Producto Vectorial.....	15 - 16
V. OPERADORES DE CAMPO.....	17 - 26
A. Gradiente.....	17 - 21
B. Divergencia .....	21 - 24
C. Rotación o Curl .....	24 - 26
VI. LEMA DE GREEN, TEOREMA DE GAUSS, TEOREMA DE STOKES.....	27 - 33
A. Lema de Green.....	27 - 29
B. Teorema de Gauss.....	29 - 30
C. Ecuación de la Continuidad.....	30 - 32
D. Teorema de Stokes.....	32 - 33
VII. APLICACIONES.....	34 - 47
A. Campo Gravitatorio.....	34 - 38
B. Campo Electroestático de cargas Puntiformes.....	38 - 40
C. Campo Electroestático de Conductores.....	40 - 41
D. Campo Magnético de las Corrientes.....	42 - 44B
E. Campos Eléctricos de campos magnéticos variables.....	45 - 47
VIII. BIBLIOGRAFIA.....	48

## I

de ser una fuerza. CONCEPTO INTUITIVO DE CAMPO: consiste en un "campo de fuerzas".

La palabra "campo" es una palabra muy común; la emplea el campesino cuando habla de "campo de trigo", de "campo de frijoles", etc. También la emplea el profesor universitario cuando habla del "campo de las letras", "campo del arte", "campo de la medicina".

En todas estas expresiones hay algo de particular que justifica la palabra "campo" en la boca del campesino y del profesor; ese algo es lo siguiente: el campo de frijoles, de trigo, indica una parcela, cuya particularidad es: tener frijoles, trigo, etc.

Así el "campo de las letras", de "las artes" indica la zona de la cultura cuya particularidad son las obras poéticas, las novelas, etc.

Podemos decir que la palabra "campo" encierra este concepto: zona real o ideal, más o menos extensa ocupada sólo por algo bien determinado y definido.

Esta palabra así entendida la emplea también el Físico. En la Física la palabra "campo" expresa una zona del espacio o todo el espacio, en cada punto del cual está definida una magnitud física, una fuerza, por ejemplo, una velocidad, una aceleración.

Vamos a dar unos ejemplos comunes:

En un punto cualquiera de la tierra una bola está suspendida de un hilo; cortamos el hilo, la bola se cae. Por qué? Por efecto de la atracción terrestre, que actúa en aquel punto de la tierra o en otro cualquiera, expresada por la Ley de Newton:

$$F = K \frac{mm_1}{r^2}$$

Entonces en todo punto del espacio actúa una fuerza con la propiedad

## II

de ser una fuerza atractiva. Todo el espacio constituye un "campo de fuerzas".

Así, si sobre una corriente de agua colocamos un corcho, el agua se lo lleva por efecto de la velocidad de ésta. Entonces encontramos aquí también un campo y en concreto un campo de velocidades.

Si tenemos una aguja magnética y la dejamos girar libremente alrededor de un eje vertical la aguja se alineará aproximadamente en la dirección Norte. Decimos entonces que existe en esta región fuerzas que tienden a alinearla. Llamamos a este espacio en que se ejerce la acción de la aguja "Campo Magnético".

Cuando nuestro oído percibe un sonido, nos consta que el manantial del mismo no actúa directamente y en el momento, desde lejos, sobre nuestro tímpano, sino que las oscilaciones del sonido son transmitidas por el aire; sólo influyen sobre nuestro tímpano las oscilaciones de las partículas de aire situadas directamente en contacto con aquél, o las oscilaciones que son transmitidas a través del aire a una velocidad finita. En la onda sonora avanzan la energía cinética y el impulso de las partículas de aire desde el manantial sonoro hasta nuestro oído. Se dice que dicho manantial crea en sus alrededores un "campo sonoro" campo que sólo puede establecerse cuando en los alrededores existe un medio material capaz de experimentar modificaciones bajo el influjo del manantial del sonido.

Estos ejemplos nos aclaran así el concepto de "campo".

La (3) entonces es la representación analítica del campo gravitatorio en coordenadas rectangulares. A la  $F$  de la (3) se la llama con un nombre más genérico, fuerza posicional. Es decir fuerza cuyo valor depende de la posición del punto donde se cree estar aplicada. Pero podemos pensar que tal fuerza, por efecto de particulares condiciones físicas del espacio donde está definida, sufra variación con respecto al

Rodas ...

## II

tiempo, y con respecto a la velocidad instantánea con el cual el cuerpo de masa  $1$  pasa en aquel instante por aquel punto.

REPRESENTACION ANALITICA DEL CAMPO

Vamos a ver cómo podemos expresar este concepto por medio de una fórmula analítica.

Hemos visto que intuitivamente el concepto de campo tiene esta característica: En cada punto del espacio o dominio, al cual se refiere la palabra, está definida una magnitud física bien determinada, por consiguiente será la misma magnitud o la expresión analítica de la misma la que representará analíticamente el campo y sus características analíticas.

Así sabemos, por ejemplo, que en el campo gravitatorio actúa la fuerza

$$F = K \frac{m m_1}{r^2} \quad (1)$$

entonces el campo gravitatorio analíticamente estará representado por la misma o en forma vectorial, tomando la fuerza con la unidad de masa, por

$$\underline{F} = \underline{F} (P) \quad (2)$$

siendo  $\underline{F}$  una función del punto. Claro está que la (2) relacionada con un sistema de ejes cartesianos, siendo  $x, y, z$  las coordenadas del punto  $y, X, Y, Z$  las componentes de  $\underline{F}$  se transforman en:

$$\begin{aligned} X &= X(x, y, z) \\ Y &= Y(x, y, z) \\ Z &= Z(x, y, z) \end{aligned} \quad (3)$$

La (3) entonces es la representación analítica del campo gravitatorio en coordenadas rectangulares. A la  $\underline{F}$  de la (3) se la llama con un nombre más genérico, fuerza posicional. Es decir fuerza cuyo valor depende de la posición del punto donde se cree estar aplicada. Pero podemos pensar que tal fuerza, por efecto de particulares condiciones físicas del espacio donde está definida, sufra variación con respecto al

tiempo, y con respecto a la velocidad instantánea con el cual el cuerpo de masa 1 pasa en aquel instante por aquel punto.

Tenemos entonces un concepto más general de fuerza posicional, representado por la siguiente fórmula:

$$\underline{F} = \underline{F} ( P, \dot{P}/t ) \quad (4)$$

Eso es:

$$\begin{aligned} X &= X ( x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} / t ) \\ Y &= Y ( x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} / t ) \\ Z &= Z ( x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z} / t ) \end{aligned} \quad (5)$$

La fuerza posicional del campo gravitatorio es un caso particular de lo anterior.

Aberá bien, supongamos que en la figura (1) el pequeño círculo representa el Sol; entonces el círculo es la traza de una esfera; el dibujo se debe pensar en el espacio.

Si en una parte cercana alrededor del Sol se encuentra un cuerpo cualquiera, ese sufrirá una atracción de acuerdo con la (6); si se encuentra en A será atraído según la A S, si en B, según la B S y así las líneas de la figura (1) indican la dirección según la cual en el espacio vacío de nuestra esfera, el cuerpo que se encuentra en un punto cercano del Sol, se desplazará hacia el Sol.

Observando bien la figura (1) podemos notar lo siguiente:

1. Las líneas de fuerza son perpendiculares a la esfera porque divergen del centro de la misma.
2. Las líneas de fuerza son más densas en las partes cercanas a la esfera y menos densas en las partes lejanas.

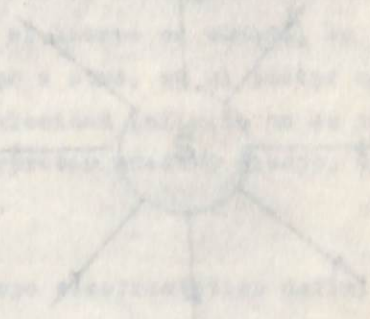


fig. (1)

III

REPRESENTACION GRAFICA DEL CAMPO

3. Por un... se puede demostrar, que si la distancia desde la esfera aumenta del doble o del triplo, la densidad... Además de una representación analítica, el concepto de campo tiene una representación gráfica que es muy expresiva.

Por consiguiente, podemos decir que la fig (1) representa bien... Vamos a ver, por ejemplo, cómo se puede representar gráficamente el campo gravitatorio que como sabemos analíticamente se representa por la ecuación 
$$F = K \frac{Mm}{r^2} \quad (6)$$
 en este dibujo, como podría hacerse mediante las palabras o por medio del lenguaje... conducho de una fórmula matemática".

En la fórmula (6) si M representa el Sol y m un planeta cualquiera, nos dice que el planeta está atraído por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. En fin, según la Ley de Newton la fuerza de atracción entre dos cuerpos... Ahora bien, supongamos que en la figura (1) el pequeño círculo representa el Sol; entonces el círculo es la atracción de una esfera; el dibujo se debe pensar en el espacio.

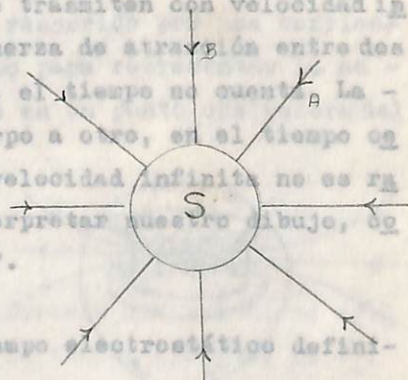


fig. (1)

Si en una parte cercana del Sol se encuentra un cuerpo cualquiera, ese sufrirá una atracción de acuerdo con la (6); si se encuentra en A será atraído según la A S, si en B, según la B S y así las líneas de la figura (1) indican la dirección según la cual en el espacio vacío de materia, el cuerpo que se encuentra en un punto cercano del Sol, se desplazará hacia el Sol.

Observando bien la figura (1) podemos notar lo siguiente:

1. Las líneas de fuerza son perpendiculares a la esfera porque divergen del centro de la misma.
2. Las líneas de fuerza son más densas en las partes cercanas a la esfera y menos densas en las partes lejanas.

3. Por un teorema de Geometría elemental, se puede demostrar, que si la distancia desde la esfera aumenta del doble o del triple, la densidad de las líneas es cuatro y respectivamente nueve veces menor.

Por consiguiente, podemos decir que la fig (1) representa bien gráficamente los datos de la ecuación (6), eso es, los elementos del campo gravitatorio, o como dice EINSTEIN: "La ley de la Gravitación puede verse tan clara en este dibujo, como podría hacerse mediante las palabras o por medio del lenguaje preciso y económico de una fórmula matemática".

Para que se pueda entender bien todo esto veamos el siguiente pensamiento de EINSTEIN: "Todo esto es lícito, pero induce a pensar que la acción a lo largo de las líneas de fuerza se transmiten con velocidad finita. En fin, según la Ley de Newton la fuerza de atracción entre dos cuerpos, depende únicamente de la distancia; el tiempo no cuenta. La fuerza tendría entonces qué pasar de un cuerpo a otro, en el tiempo cero. Pero como un movimiento cualquiera con velocidad infinita no es racionalmente concebible, el tentativo de interpretar nuestro dibujo, como algo más de un modelo, no conduce a nada".

Una representación parecida tiene el campo electrostático definido por la relación de Coulomb:

$$\underline{F} = + \frac{K q q_1}{r^2} \quad (7)$$

Pero aquí debemos considerar varios casos:

1. El campo representado por una sola carga (+) o (-)

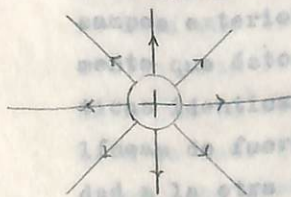


Fig.2

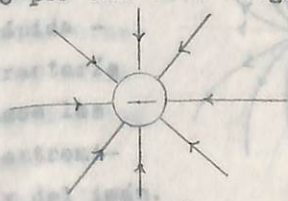


Fig. 3

2. El campo creado por cargas (+) (-) según se representa en la

y en general un campo vectorial está representado gráficamente por un conjunto de líneas abiertas o cerradas; líneas que representan el campo producido por un punto que sufre la acción de la fuerza definida en el campo.

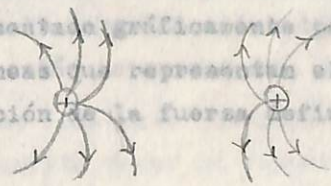


fig.4 Campo cerrado

Fig.5 Campo abierto.

el espectro electrostático.

Otra representación parecida se tiene para los campos magnéticos engendrados por corrientes continuas y en general para el campo magnético, sea el caso, por ejemplo, de un solenoide y de un imán.

Como se sabe hay siempre una fuerza que actúa encima de un polo magnético situado en la proximidad del hilo recorrido por una corriente. Entonces recurriremos al dibujo del campo para representar la acción de la fuerza magnética de una corriente en un punto cualquiera del espacio.

La fig. 6 nos muestra el campo magnético de una corriente circular en un solenoide.

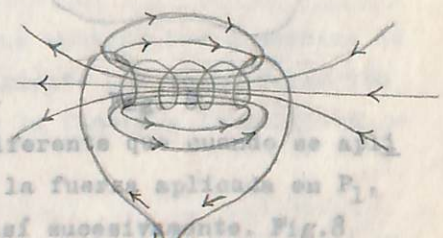


fig. 6

La figura 7 representa el campo de un imán.

Prescindiendo de las fuentes, es decir tanto del solenoide como del imán observemos solamente los campos exteriores. Notamos rápidamente que éstos presentan características idénticas; en ambos casos las líneas de fuerza van de una extremidad a la otra del solenoide y del imán.

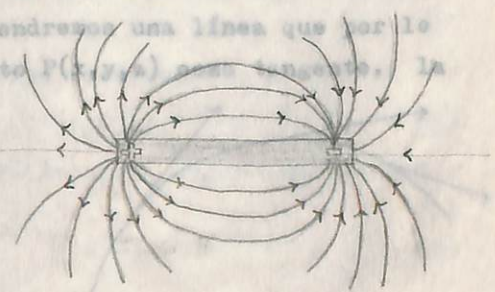


fig.7

Fig. 9

de fuerza. Fig. (9)

Líneas de fuerza de Campo.— Hemos visto que un campo de fuerzas y en general un campo vectorial está representado gráficamente por un conjunto de líneas abiertas o cerradas; líneas que representan el recorrido del cuerpo de masa 1 que sufre la acción de la fuerza definida en el campo.

Estas líneas se pueden observar bien en el espectro magnético y en el espectro electrostático.

que expresa la condición analítica de paralelismo.

Vamos a ver cómo se encuentran prácticamente estas líneas de fuerza; considérese una porción A del campo de fuerza, donde

$$\underline{F} \neq 0 \text{ siempre.}$$

Partiendo del punto genérico  $P_0$ , sobre la línea de acción de la fuerza, aplicada en  $P_0$ , elegimos un punto  $P_1$  muy cercano a  $P_0$ , según el sentido de la misma fuerza. Pensemos ahora que la fuerza está aplicada en  $P_1$ . En general, la fuerza aplicada en  $P_1$  tendrá dirección diferente que cuando se aplica en  $P_0$ . Ahora sobre la recta de acción de la fuerza aplicada en  $P_1$ , escogemos otro punto  $P_2$  muy cercano a  $P_1$  y así sucesivamente. Fig. 8

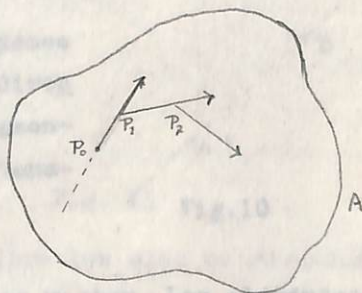


Fig. 8

Tendremos una poligonal  $P_0P_1P_2 \dots$ . Si hacemos acercar los puntos  $P_0P_1P_2 \dots$  infinitamente, al límite, obtendremos una línea que por lo general es curva, que tendrá en cada punto  $P(x,y,z)$  como tangente, la fuerza  $\underline{F}(X,Y,Z)$  en aquel punto. Claro está que la manera como se ha construido esta línea, determina el sentido según la cual actúa la fuerza y también se saca que por cada punto del campo debe pasar una y sólo una línea de fuerza. Fig. (9)

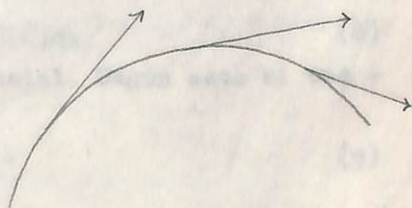


Fig. 9

IV

Analíticamente las líneas de fuerza son caracterizadas por la condición que el desplazamiento elemental  $dP$  a lo largo de ellas debe tener la misma dirección y el mismo sentido, están representadas por las curvas integrales del sistema.

Para desarrollar bien una teoría de Campo se necesita tener un conocimiento claro sobre los  $\frac{dx}{X}$ ,  $\frac{dy}{Y}$ ,  $\frac{dz}{Z}$  a continuación vamos a dar conceptos básicos sobre los vectores y operaciones más comunes.

que expresa la condición analítica de paralelismo.

Para representar las magnitudes vectoriales se han ideado los vectores de donde aquellas derivan su nombre.

Una recta es un conjunto de puntos. Podemos orientar los puntos de una recta según una dirección. Partimos de A hacia B y tenemos un segmento orientado AB. Si contamos de B hacia A tenemos BA. Fig. 10

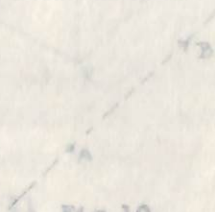


Fig. 10

A este segmento orientado lo denominamos vector. Los elementos de un segmento orientado son: dirección del segmento que es la dirección de la recta; el sentido, que se expresa por la flecha y la longitud del segmento.

Los vectores los representamos así  $\underline{Y}$  (letra pequeña subrayada). El módulo del vector o su longitud con la siguiente notación  $|Y|$ . También podemos escribir mod  $\underline{Y}$ .

Tenemos otra manera de representar los vectores que se debe a

$$\underline{Y} = B - A \quad (8)$$

donde B es el punto terminal y A el punto inicial. Según esto el vector será:

$$O = A - A \quad (9)$$

$$A = B + \underline{Y} \quad (10)$$

## IV

Esto es, un punto se representa por medio de un punto y un vector.

### REPRESENTACION DE LAS MAGNITUDES VECTORIALES Y OPERACIONES ELEMENTALES

De lo expuesto anteriormente se saca de inmediato que para poder desarrollar bien una teoría de Campo se necesita tener un conocimiento claro sobre los vectores, de aquí, que a continuación vamos a dar conceptos básicos sobre los vectores y operaciones más comunes.

Para representar las magnitudes vectoriales se han ideado los vectores de donde aquellas derivan su nombre.

Una recta es un conjunto de puntos. Podemos orientar los puntos de una recta según una dirección. Partimos de A hacia B y tenemos un segmento orientado AB. Si contamos de B hacia A tenemos BA. Fig. 10

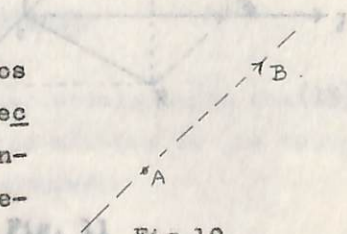


Fig. 10

A este segmento orientado lo denominamos vector. Los elementos de un segmento orientado son: dirección del segmento que es la dirección de la recta; el sentido, que se expresa por la flecha y la longitud del segmento.

Los vectores los representamos así  $\underline{V}$  (letra pequeña subrayada). El módulo del vector o su longitud con la siguiente notación  $|\underline{V}|$ . También podemos escribir  $mod \underline{V}$ .

Tenemos otra manera de representar los vectores que se debe a Grassman:  $\underline{V} = B - A$  y cuando:

donde B es el punto terminal y A el punto inicial. Según esto el vector cero será:

$$0 = A - A \quad (9)$$

De (8) se saca que:

$$A = B + \underline{V} \quad (10)$$

Rodas....  
Rodas...

Esto es, un punto se representa por medio de un punto y un vector.

Considerando el triángulo  $OPR$  de la figura 11 se tiene:  
Según MAXWELL podemos representar los vectores de la siguiente manera.

Sea el plano cartesiano  $x, y, z$ . Ponemos en el plano cartesiano la o rientación antihoraria alrededor del eje  $Z$ .

Reemplazando estos valores en la (14):  
Representamos el vector  $OP$  en el espacio cartesiano. Este vector tiene sus componentes  $OP_1$ ,  $OP_2$  y  $OP_3$ .

Expresamos el vector:

$$OP = \underline{V} = V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}$$

$$OP_1 = V_x$$

$$OP_2 = V_y$$

$$OP_3 = V_z = |\underline{V}|^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

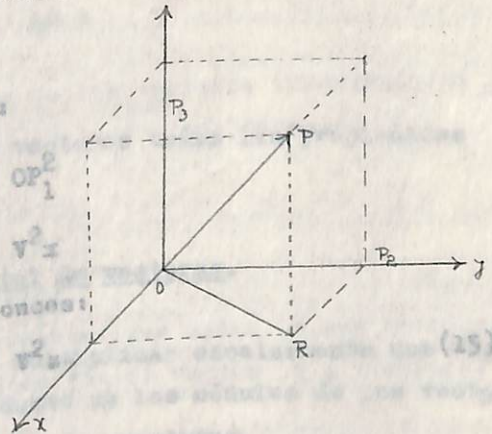


Fig. 11

Encontramos las proyecciones del vector  $\underline{V}$  sobre los ejes coordenados.

Se tiene:

$$V_x = |\underline{V}| \cos \widehat{Vx} \quad (11)$$

$$V_y = |\underline{V}| \cos \widehat{Vy}$$

$$V_z = |\underline{V}| \cos \widehat{Vz}$$

De aquí podemos encontrar los cosenos directores mediante las letras griegas,

Expresando en (11) los cosenos directores mediante las letras griegas,

$$\alpha, \beta, \gamma$$

$$V_x = |\underline{V}| \alpha$$

$$V_y = |\underline{V}| \beta$$

$$V_z = |\underline{V}| \gamma$$

Elevando al cuadrado las expresiones (12) y sumando:

$$V_x^2 = |\underline{V}|^2 \alpha^2$$

$$V_y^2 = |\underline{V}|^2 \beta^2$$

$$V_z^2 = |\underline{V}|^2 \gamma^2$$

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = |\underline{V}|^2 (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) \quad (13)$$

Rodas...

Considerando el triángulo POR de la figura 11 se tiene:

$$OP^2 = PR^2 + OR^2$$

Pero:

$$PR^2 = OP_3^2$$

En general se pueda escribir que

$$OR^2 = OP_2^2 + OP_1^2$$

Reemplazando estos valores en la (14):

$$OP^2 = OP_3^2 + OP_2^2 + OP_1^2$$

Esto es,

$$OP^2 = V_z^2 + V_y^2 + V_x^2$$

Pero  $OP^2$  es el módulo del vector, entonces:

$$|V|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

Sustituyendo (15) en (13)

$$|V|^2 = |V|^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

Luego  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$

Esto es, la suma de los cuadrados de los cosenos directores es igual a uno (1)

De aquí podemos sacar que:

$$|V|^2 = V_x^2 + V_y^2 + V_z^2$$

O sea que,

$$|V| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Es decir, que conociendo las componentes del vector según los ejes sacamos el valor de  $\underline{V}$ .

Conociendo las proyecciones podemos sacar también los cosenos directores, esto es:

$$\alpha = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

$$\beta = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

Fig. 12

$$\xi = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}} \quad (18)$$

En general se puede escribir que

$$\underline{V} = f(x, y, z)$$

De aquí que se pueda aplicar a los vectores todas las propiedades de las funciones.

PRODUCTO escalar y producto vectorial de vectores.

Tenemos los vectores  $\underline{V}_1$  y  $\underline{V}_2$ . Multiplicar escalarmente dos vectores  $\underline{V}_1 \times \underline{V}_2$  es encontrar el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo que forman estos vectores.

$$\text{Esto es: } \underline{V}_1 \times \underline{V}_2 = |\underline{V}_1| |\underline{V}_2| \cos \widehat{V_1 V_2}$$

$V_2 \cos V_1 V_2$  es la proyección del vector  $\underline{V}_2$  sobre  $\underline{V}_1$

$$\begin{aligned} \frac{OA}{OB} &= \cos \widehat{V_1 V_2} \\ OA &= OB \cos \widehat{V_1 V_2} \\ \underline{V}_1 &= \underline{V}_2 \cos \widehat{V_1 V_2} \end{aligned}$$

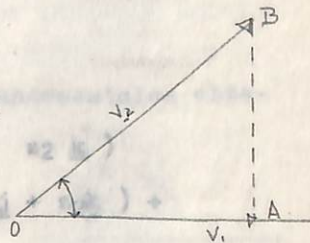


fig. 12

El producto escalar se puede interpretar como el producto de uno de los vectores dados, por la proyección del segundo vector sobre el primero.

Si el ángulo formado por los vectores es igual a cero, esto nos dice que los vectores son paralelos. Entonces:

$$\underline{V}_1 \times \underline{V}_2 = |\underline{V}_1| |\underline{V}_2|$$

Llevando (21) a  $\underline{V}_1 \times \underline{V}_2 = |\underline{V}_1| |\underline{V}_1| = |\underline{V}_1|^2$  si son iguales.

Si los vectores son perpendiculares  $\underline{V}_1 \times \underline{V}_2 = \frac{\sqrt{V_1^2 + V_2^2}}{2} \cos \widehat{V_1 V_2}$  y el producto escalar es igual a cero.

Quando se anula el producto escalar sin que uno de los vectores sea cero es cuando los vectores son perpendiculares. Entonces la condición de perpendicularidad es:  $\underline{V}_1 \neq 0$   
 $\underline{V}_2 \neq 0$

Hagamos ahora el producto escalar de los versores fundamentales  $\underline{i}$ ,  $\underline{j}$ ,  $\underline{k}$  perpendiculares entre sí y de módulo la unidad; tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{i} \times \underline{i} &= \underline{j} \times \underline{j} = \underline{k} \times \underline{k} = 1 \text{ son paralelos.} \\ \underline{i} \times \underline{j} &= \underline{j} \times \underline{k} = \underline{k} \times \underline{i} = 0 \text{ porque son perpendiculares} \end{aligned}$$

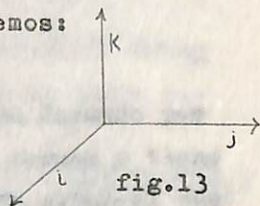


fig.13

De hecho el vector  $\underline{V}_1$  lo podemos representar por medio de sus coordenadas cartesianas y lo mismo podemos hacer con el vector  $\underline{V}_2$ . Tenemos:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k} \\ \underline{V}_2 &= x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k} \end{aligned}$$

El producto escalar será:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 \times \underline{V}_2 &= (x_1 \underline{i} + y_1 \underline{j} + z_1 \underline{k}) \times (x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}) \\ &= x_1 \underline{i} (x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}) + y_1 \underline{j} (x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}) + \\ &\quad + z_1 \underline{k} (x_2 \underline{i} + y_2 \underline{j} + z_2 \underline{k}) \\ &= x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 \end{aligned} \tag{19}$$

Podemos lograr el mismo resultado aplicando la definición misma:

$$\underline{V}_1 \times \underline{V}_2 = |\underline{V}_1| |\underline{V}_2| \cos \widehat{\underline{V}_1 \underline{V}_2} \tag{20}$$

Pero el coseno de dos rectas es igual:

$$\cos \widehat{\underline{V}_1 \underline{V}_2} = \cos x \widehat{\underline{V}_1} \cos x \widehat{\underline{V}_2} + \cos y \widehat{\underline{V}_1} \cos y \widehat{\underline{V}_2} + \cos z \widehat{\underline{V}_1} \cos z \widehat{\underline{V}_2} \tag{21}$$

Llevando (21) a (20)

$$\underline{V}_1 \times \underline{V}_2 = |\underline{V}_1| |\underline{V}_2| (\cos x \widehat{\underline{V}_1} \cos x \widehat{\underline{V}_2} + \cos y \widehat{\underline{V}_1} \cos y \widehat{\underline{V}_2} + \cos z \widehat{\underline{V}_1} \cos z \widehat{\underline{V}_2}) \tag{22}$$

Entonces:  $|\underline{V}_1||\underline{V}_2| \cos \widehat{V_1 V_2} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2$

Y de aquí:  $\cos \widehat{V_1 V_2} = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}$  (23)

Por consiguiente el producto vectorial de dos vectores  $\underline{V}_1$  y  $\underline{V}_2$  cuyas componentes son:

Producto Vectorial-. Tenemos dos vectores no nulos, ni paralelos.

Por definición  $\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2$  es igual al producto de los módulos de los vectores dados por el seno del ángulo que ellos forman.

Esto es:  $|\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2| = |\underline{V}_1||\underline{V}_2| \sin \widehat{V_1 V_2}$

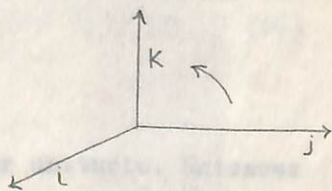
Este vector tiene longitud igual al área del paralelogramo formado por los mismos vectores, es perpendicular al plano que ellos forman y tiene un sentido tal que un observador colocado al lado de él ve girar el vector  $\underline{V}_1$  en el sentido contrario a las agujas del reloj para superponerse sobre el  $\underline{V}_2$ . De aquí se deduce que el producto vectorial no es conmutativo. Si los dos vectores son paralelos el producto vectorial es igual a cero.

Aplicando el producto vectorial a los versores fundamentales obtenemos:

$$\underline{i} \wedge \underline{i} = \underline{j} \wedge \underline{j} = \underline{k} \wedge \underline{k} = 0$$

$$\underline{i} \wedge \underline{j} = \underline{k} \quad \underline{j} \wedge \underline{k} = \underline{i} \quad \underline{k} \wedge \underline{i} = \underline{j}$$

$$\underline{i} \wedge \underline{k} = -\underline{j} \quad \underline{k} \wedge \underline{j} = -\underline{i} \quad \underline{j} \wedge \underline{i} = -\underline{k}$$



El producto vectorial de dos vectores  $\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2$  con  $\underline{V}_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$  y  $\underline{V}_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$

será el siguiente:

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2 &= (X_1 \underline{i} + Y_1 \underline{j} + Z_1 \underline{k}) \wedge (X_2 \underline{i} + Y_2 \underline{j} + Z_2 \underline{k}) \\ &= X_1 \underline{i} \wedge (X_2 \underline{i} + Y_2 \underline{j} + Z_2 \underline{k}) + Y_1 \underline{j} \wedge (X_2 \underline{i} + Y_2 \underline{j} + Z_2 \underline{k}) + \\ &\quad Z_1 \underline{k} \wedge (X_2 \underline{i} + Y_2 \underline{j} + Z_2 \underline{k}) = \\ &= X_1 Y_2 \underline{k} - X_1 Z_2 \underline{j} - Y_1 X_2 \underline{k} + Y_1 Z_2 \underline{i} + Z_1 X_2 \underline{j} - Z_1 Y_2 \underline{i} \end{aligned}$$

$$\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2 = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) \underline{i} + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) \underline{j} + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) \underline{k} \quad (23)$$

Por consiguiente el producto vectorial es un vector cuyas componentes son: De la matemática  $V_x = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2)$  que es desarrollo de la teoría

de los números implica un conjunto de operaciones como suma, resta, etc.

Para indicar las operaciones se tienen realizar entre los números, tenemos unos signos: (+) para la suma; (-) para la resta; (x) para la multiplicación; (/) para la división.

en coordenadas cartesianas. Recordando la regla para desarrollar determinantes de tercer orden se observa que la relación (23) se puede escribir:

$$\underline{V}_1 \wedge \underline{V}_2 = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \underline{i}(Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) + \underline{j}(Z_1 X_2 - X_1 Z_2) + \underline{k}(X_1 Y_2 - Y_1 X_2)$$

Los menores de esta matriz representan los vectores coordenados -

del producto vectorial. El determinante representa las coordenadas del

vector producto vectorial.

El operador  $\nabla$  que se llama "nabla" u operador de campo, u operador diferencial porque la operación que simboliza es una diferenciación, y es

la siguiente:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right)$$

donde  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  son los cosenos directores de vector unitario. Entonces

el  $\nabla$  es un vector.

Este operador se puede aplicar a un escalar, se puede también aplicar

vectorialmente a un vector. De aquí salen los conceptos de Gradiente, divergencia y rotor como vamos a ver en seguida.

El concepto de gradiente se aplica aplicando el  $\nabla$  a una función  $s(x, y, z)$ . El resultado es lo siguiente:

$$\nabla s = \left( \frac{\partial s}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial s}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial s}{\partial z} \underline{k} \right)$$

$$= \frac{\partial s}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial s}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial s}{\partial z} \underline{k}$$

## OPERADORES DE CAMPO

Examinemos este resultado (24).

De la matemática elemental sabemos que el desarrollo de la teoría de los números implica un conjunto de operaciones como suma, resta, etc. Para indicar las operaciones que se deben realizar entre los números, tenemos unos signos: el (+) para la suma; (-) para la resta; (X) para la multiplicación; (:) para la división;  $\sqrt{\quad}$  para la radicación, etc.

A estos signos los llamamos "Operadores"

También el concepto de campo definido por una función o por un vector implica un conjunto de operaciones; operaciones relacionadas con la variación de la función o del vector definido en el campo, operaciones de productos de vectores, etc.

Para indicar las operaciones de derivación tenemos un signo particular  $\nabla$  que se llama "nabla" u operador de campo, u operador diferencial porque la operación que simboliza es una diferenciación, y es la siguiente:

$$\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right)$$

donde  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  son los cosenos directores de vector unitario. Entonces el  $\nabla$  es un vector.

Este operador se puede aplicar a un escalar, se puede también aplicar escalar y vectorialmente a un vector. De aquí salen los conceptos de Gradiente, divergencia y rotor como vamos a ver en seguida.

A. Gradiente. - El concepto de gradiente se saca aplicando el  $\nabla$  a una función  $\phi(x, y, z)$ . El resultado es lo siguiente:

$$\begin{aligned} \nabla \phi &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \phi \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbf{k} \end{aligned}$$

(24)

$$\nabla \Phi = \text{grad } \Phi \quad (27)$$

Examinemos este resultado (24).

$\Phi$  es una función escalar.  $\Phi(x, y, z)$  definida en todos los puntos de un espacio determinado o en todo el espacio.

El segundo miembro de la (24) es un vector, de cosenos directores:  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  que tiene como componentes las derivadas parciales de la función  $\Phi(x, y, z)$

Qué indica la dirección de este vector? Qué es esta función  $\Phi(x, y, z)$

Por Mecánica racional sabemos que, si hay un campo definido por  $\mathbf{F}$

$$dL = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{P} \quad (25)$$

Si  $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$  esto es:  $x = x(t)$   
 $y = y(t)$   
 $z = z(t)$

Entonces, diferenciando:  $dL = v dt \quad (26)$

Sustituyendo (26) en (25):

$$dL = \mathbf{F} \cdot v dt$$

Se tiene entonces que:

$$dL = (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) dt$$

De donde

$$L = \int_{t_1}^{t_2} (X\dot{x} + Y\dot{y} + Z\dot{z}) dt$$

Como dijimos antes  $\mathbf{F}$  es una función del punto. Ahora si la posición del punto es una función de la línea que recorre, entonces la  $\mathbf{F}$  es también una función de la  $s$ . Esto es:  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(s)$  por tanto  $x = x(s)$   
 $y = y(s)$   
 $z = z(s)$  (28)

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(s) \quad \text{por tanto} \quad \begin{aligned} x &= x(s) \\ y &= y(s) \\ z &= z(s) \end{aligned} \quad (29)$$

$\Phi(x, y, z)$  se llama potencial del campo y es un escalar.

Ahora si escribimos en forma explícita la ecuación (29)  
 Entonces  $dP = \frac{dP}{ds} \cdot ds = \mathbf{t} \cdot ds$  (27)  
 $Xdx + Ydy + Zdz = \left( \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz \right)$

donde  $\frac{dP}{ds}$  es la tangente a la curva.

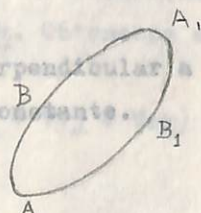
Sustituyendo (27) en (25):

O sea que 
$$dL = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} \cdot ds = F_t \cdot ds$$

$$L = \int_{s_1}^{s_2} F_t \cdot ds$$

Pero si la  $\mathbf{F}$  es conservativa, esto es, si hay un campo definido por  $\mathbf{F}$  de tal manera que el trabajo de  $\mathbf{F}$  a lo largo de una línea cerrada perteneciente al campo es nulo, eso es:

Entonces  $\int_{ABA} dL = \int_{AB,A} dL = 0$  luego  $\mathbf{F}$  perpendicular a  $dP$   
 Si  $\int_{ABA} dL = 0$  significa que  $U(x,y)$  es constante.  
 Se tienen esas superficies equipotenciales.



Consideremos las superficies equipotenciales con fig. 14  
 Sea  $OP$  la dirección de  $\mathbf{F}$ . Los dos  $\perp$   
 a  $OP$  y  $\gamma$  normal a  $\mathbf{F}$ . Los dos  $\perp$

De donde por  $L_1 = L_2$   
 El trabajo elemental será  $dL = -du$  lo que quiere decir que  $L = U_1 - U_2$   
 El trabajo elemental estará expresado por la diferencia de los valores en los extremos o es una diferencial exacta.

Para que un trabajo sea una diferencial exacta sabemos que siendo  $X, Y, Z$  las componentes de la fuerza se debe tener:

$$\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0 \quad (28)$$

Si estas condiciones se verifican, existe una función  $U(x,y,z)$  del campo por la cual

La función  $U(x,y,z)$  se llama potencial del campo y es un escalar. (29)

Ahora si escribimos en forma explícita la ecuación (29)

$$Xdx + Ydy + Zdz = - \left( \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right)$$

De la cual se obtiene que:

$$X = - \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$Y = - \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$Z = - \frac{\partial u}{\partial z}$$

Resultado importante: las componentes de la fuerza del campo se obtienen por derivación de la función potencial.

Ahora bien:

$$\text{Si } du = 0 \quad dL = 0$$

Entonces  $F \times dP = F \cdot dP \cos \alpha = 0$  luego  $F$  perpendicular a  $dP$

Si  $du = 0$  significa que  $U(x,y)$  es constante.

Se tienen pues superficies equipotenciales.

Consideremos dos superficies equipotenciales con  $U_1 > U_2$

Sea  $OF$  la dirección de  $F$  positiva según  $OF$  y  $\vec{\zeta}$  normal a  $S_1$ . Los dos

coinciden por  $d\vec{\zeta}$ . Fig. 15

$$\text{Entonces } \cos \hat{F} \hat{\zeta} = 1 \quad F \hat{d\zeta} = 0$$

Por consiguiente:

$$dL = F \times d\vec{\zeta} \cos \alpha = F d\vec{\zeta} \quad -dU$$

$$\text{De donde } F = - \frac{dU}{d\vec{\zeta}}$$

La  $\frac{dU}{d\vec{\zeta}}$  expresa la variación de  $U(x,y,z)$  a lo largo de  $\vec{\zeta}$  y es máxima; y si  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  son los cosenos directores de  $\vec{\zeta}$  entonces:

$$\frac{du}{d\vec{\zeta}} = \frac{\partial u}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \underline{k} = \text{grad } u$$

Esta expresión es idéntica a la (24). Entonces podemos decir: la  $U$  es la función potencial del campo: los cosenos  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  indican la dirección de la normal a la superficie equipotencial.

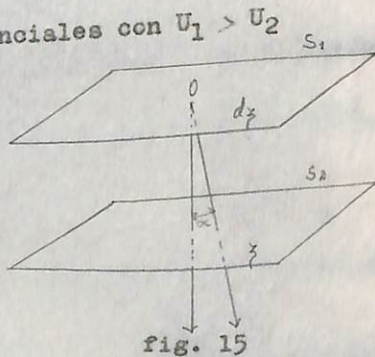


fig. 15

El gradiente de  $\Phi$  expresa la variación de la función o la velocidad de la variación de la función según una dirección de valores máximos.

Obsérvese: 
$$F = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \text{grad } \Phi \quad (31)$$

El gradiente de  $\Phi(x,y,z)$  define el vector fuerza que actúa en el campo. Entonces podemos decir:

1.- Si conocemos la función potencial del campo, por derivación sacamos la fuerza que actúa en el campo.

2.- La fuerza que actúa en un campo indica con su dirección, la dirección según la cual la función potencial varía más rápidamente.

B. Divergencia. - Aplicamos ahora el operador nabla  $\nabla$  escalarmente al vector  $\underline{V}$  que tiene como componentes  $V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}$ . Obtenemos el siguiente resultado:

$$\nabla \times \underline{V} = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right] \times (V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}) \quad (30)$$

$$\text{Igualando} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

A este resultado le damos el nombre de divergencia que se expresa así:

$$\nabla \times \underline{V} = \text{div } \underline{V}$$

La divergencia ¿qué significado tiene este escalar?

Debemos partir del concepto de flujo. Figura (16).

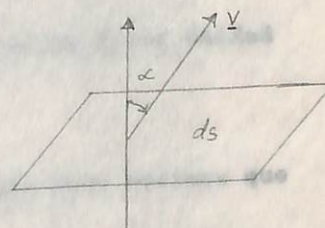


Fig. 16

el elemento  $d\Omega = ds \times \underline{V} = ds \underline{V} \cos$

Ahora consideremos una porción del espacio, limitado por un paralelepípedo, donde está definido el vector.

$$\underline{V} = x \underline{i} + y \underline{j} + z \underline{k}$$

Sean X, Y, Z las componentes del vector  $\underline{V}$  y la  $n$  perpendicular normal a las caras del paralelepípedo

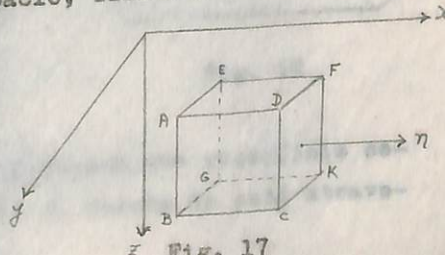


Fig. 17

Entonces el flujo

positiva hacia el exterior. Si consideramos las caras ABGE y CPOK el flujo a través de ellas será:

$$-Xdydz + \left( X + \frac{\partial X}{\partial x} dx \right) dydz = \frac{\partial X}{\partial x} dydz dx \quad (31)$$

Hacemos el mismo cálculo para encontrar el flujo a través de las otras caras.

Entonces el flujo total saliente por las seis caras del paralelepípedo es:

$$d\Phi = \frac{\partial X}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial Y}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial Z}{\partial z} dx dy dz \quad (32)$$

en donde  $dx dy dz$  es el volumen  $dv$  del paralelepípedo. Entonces la (32) se transforma en:

$$d\Phi = \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dv \quad (33)$$

Dividiendo la (33) por  $dv$  se obtiene:

$$\frac{d\Phi}{dv} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \quad (34)$$

Igualando la (30) y la (34) resulta:

$$\frac{d\Phi}{dv} = \text{div } \underline{V} \quad (35)$$

La divergencia expresa la variación del flujo del vector  $\underline{V}$  por unidad de volumen.

Observemos que:

1. Si  $d\Phi = 0$  entonces  $\Phi = k$  (constante). En este caso decimos que el campo es solenoidal, esto es,  $\text{div } \underline{V} = 0$ .

Si se consideran dos secciones  $S_1$  y  $S_2$  de un tubo de fuerza siendo  $n_1$  y  $n_2$  las normales a las secciones dirigidas en sentido concordante, fig.18, y  $R_1$  y  $R_2$  los valores del vector  $\underline{R}$  en  $S_1$  y  $S_2$ .

$S_1$  y  $S_2$  y la superficie lateral del tubo determinan una superficie cerrada. Pero la superficie lateral de un tubo de fuerza no está atravesada por el flujo por ser  $\cos\theta = 0$ .

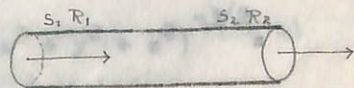


Fig. 18

Rodas...

Entonces el flujo total será  $S_1 R_1 + S_2 R_2$ . Si el campo es solenoidal

Sumando:  $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}) \text{div } R = 0$

Eso es:  $S_1 R_1 + S_2 R_2 = 0$  de donde  $S_1 R_1 = -S_2 R_2$

Esto quiere decir que el flujo depende de la superficie.

Entonces:  
2. Aplicamos  $\nabla$  escalarmente al gradiente. Esto se llama "divergencia del gradiente". Entonces

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \varphi &= \left[ \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right] \cdot \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x} i + \frac{\partial \varphi}{\partial y} j + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k \right] \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi \end{aligned} \quad (36)$$

Los campos de gradiente son solenoidales.

El operador  $\nabla^2$  se denomina Operador Laplaciano o de Laplace  
En el caso que  $\nabla^2 \varphi = 0$  se tiene la Ecuación de Laplace. El campo es solenoidal

Si  $\nabla^2 \varphi \neq 0$  se tiene la Ecuación de Poisson

3. Una solución de la Ecuación de Laplace es  $\varphi = \frac{1}{r}$

De hecho:  $\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Derivando parcialmente  $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  con respecto a x, y, z.

$$\frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ -x(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \right] =$$

$$= 3x^2(x^2 + y^2 + z^2)^{-5/2} - (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} =$$

$$= \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{2y^2 - z^2 - x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} i + \frac{\partial \varphi}{\partial z} k$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

$$\text{Sumando: } \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2x^2 - y^2 - z^2 + 2z^2 - x^2 - y^2 + 2y^2 - x^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0$$

Entonces:  $\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{r} \right) = 0$

4.  $\nabla \times \underline{V} = A$  Hay un manantial  
 $\nabla \times \underline{V} = -A$  Hay un sumidero.

Esta es la rotación en un campo definido por un gradiente es nula. Los C. Rotación o Curl. - El operador  $\nabla$  siendo un vector lo podemos aplicar vectorialmente a un vector. Obtenemos lo siguiente:

$$\nabla \wedge \underline{V} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right) \wedge (iV_x + jV_y + kV_z)$$

$$= \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = \underline{i} \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) + \underline{j} \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \underline{k} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) \quad (37)$$

Al segundo miembro de (37) lo llamamos  $\text{Rot } \underline{V}$  entonces  $\text{Rot } \underline{V} = \underline{R}$   
 Este vector  $\underline{R}$  que es perpendicular a nabra y al vector  $\underline{V}$  lo podemos expresar por medio de sus componentes, así:

$$R_x = \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$R_y = \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}$$

$$R_z = \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$$

Es decir que no hay variación de  $\underline{R}$  en el campo definido por  $\text{Rot } \underline{V}$ .  
 Entonces el campo del  $\underline{R}$  es irrotacional.  
 Veamos ahora  $\nabla \wedge \nabla \varphi = 0$  el campo es irrotacional. El trabajo que hace el vector  $\underline{V}$  en el campo a lo largo de una línea cerrada es nulo.

2. Apliquemos el rotor al gradiente. Tenemos:

$$\nabla \wedge \nabla \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right) \wedge \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \underline{k} \right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = i \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + j \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + k \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) = 0$$

Este es, la rotación en un campo definido por un gradiente es nula. Los campos de gradiente son irrotacionales.

3. Apliquemos escalarmente  $\nabla$  al rotor, es decir, hallamos la divergencia del rotor y comprobamos que también es igual a cero.

$$\nabla \cdot (\nabla \wedge \underline{V}) = \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \cdot \left( i \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) + j \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \right) + k \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) \right)$$

Entonces

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = 0$$

Es decir que no hay variación de flujo en el campo definido por  $\text{Rot } \underline{V}$ . Entonces el campo del rotor es solenoidal.

Veamos ahora físicamente qué significa el Rotor. Hemos visto que:

si  $R_x = R_y = R_z = 0$  el campo de  $\underline{R}$  es conservativo y tiene potencial. Todo vector rotacional es solenoidal.

Rot  $\underline{V}$  expresa un trabajo a lo largo de una línea cerrada.

Si  $\text{Rot } \underline{V} \neq 0$  tenemos el torbellino. Vamos a ver otro significado.

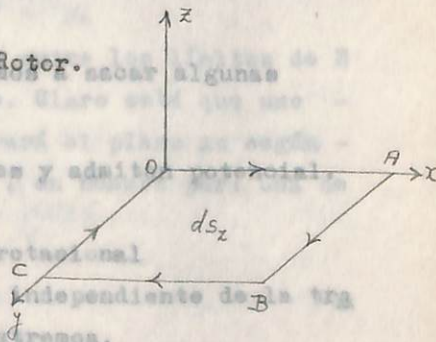


Fig.19

VI

Sea el vector  $\underline{V}$  definido en el espacio,  $dS_z$  un elemento de superficie, fig. 19.

El trabajo hecho a lo largo de OA es  $V_x dx$

A. Lema de Green. a lo largo de AB es  $(V_y + \frac{\partial V_y}{\partial x} dx) dy$

Para posteriores aplicaciones es necesario reducir la demostración del Lema de Green a lo largo de BC es  $-(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial y} dy) dx$

y de CO es  $-V_y dy$

Sea  $U(x,y,z)$  una función escalar, finita continua en conjunto con sus derivadas primeras, segundas y terceras. Entonces el trabajo a lo largo de OABCO es:

$$\oint_{OABCO} \underline{V} \cdot d\mathbf{s} = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dx dy = \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) dS_z$$

Calculamos la integral triple: Pero  $\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}$  es la componente del rotor según la Z

Entonces

$$\oint_S \underline{V} \cdot d\mathbf{s} = R_z dS_z = dQ_R$$

De donde  $R_z = \frac{\oint \underline{V} \cdot d\mathbf{s}}{dS_z} = \frac{dQ_R}{dS_z}$

Es decir que la circuitación del vector  $\underline{R}$  a lo largo de una línea es igual al flujo del rotor  $\underline{V}$  por la superficie encerrada por la línea misma.

Para tener presente todo lo que hemos visto vamos a sacar algunas conclusiones:

1. Los campos de Gradiente son solenoidales y admiten potencial.
2. Todo vector rotacional es solenoidal
3. Cuando el rotor es nulo el campo es irrotacional
4. En un campo conservativo el trabajo es independiente de la trayectoria y depende únicamente de los extremos.
5. El gradiente de una función define el vector fuerza que actúa en el campo.

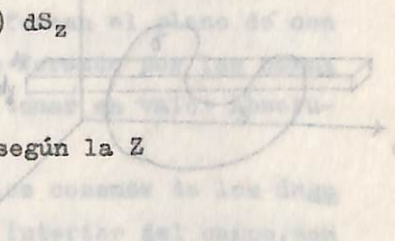


Fig. 20

## LEMA DE GREEN, TEOREMA DE GAUSS Y DE STOKES

A. Lema de Green.

Para posteriores aplicaciones es necesario introducir la demostración del Lema de Green.

Sea  $U(x,y,z)$  una función uniforme, finita continua en conjunto con sus derivadas primeras, en todos los puntos  $P(x,y,z)$  de una región  $S$  encerrada por una o más superficies cerradas  $\sigma$ .

Calculamos la integral triple:

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial y} dx dy dz \quad \text{siendo por hipótesis } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ limitada y extendida a toda la región } S \text{ continua en } S.$$

Para calcularla podemos hacer así: antes integramos con respecto de  $Y$ , entre límites oportunos y luego con respecto de  $x, z$ , y sumar.

Desde el punto de vista geométrico esto significa, dividir la región por prismas elementales, por medio de planos paralelos coordenados a los planos  $x = 0, z = 0$ .

Realizamos para cada prisma la integración entre los límites de  $S$  que le pertenece y luego sumamos los resultados. Claro está que uno cualquiera de estos prismas elementales encontrará el plano  $xz$  según rectángulos  $dx dz$ , y el campo  $S$ , según áreas  $d\sigma$ , en número par: una de entrada, otra de salida.

Llamemos  $P_e$  los puntos de entrada  
 $P_s$  los puntos de salida

La parte de la integral

$$\iiint \frac{\partial u}{\partial y} dx dy dz$$

respecto al prisma  $dx dz$  será el producto

$$dx dz \times \int \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

(42)

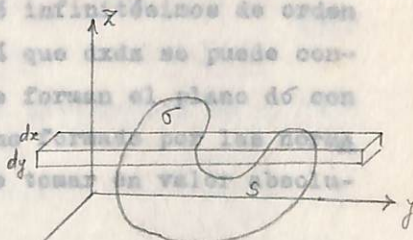


Fig. 20

extendido desde los puntos  $P_e$  a los  $P_s$  consecutivos. Entonces tendremos:

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial y} ds = \iint dx dz \int \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$= \iint dx dz \sum (U_{P_s} - U_{P_e})$$

$P_e$  y  $P_s$  son puntos de  $d\sigma$ .

Ahora tenemos  $d\sigma$ : la proyección de  $d\sigma$  sobre el plano  $y = 0$  es, por construcción:  $dx dz$ ; y siendo que  $d\sigma$  a menos de infinitésimos de orden superior, se puede considerar plana, claro está que  $dx dz$  se puede considerar como producto de  $d\sigma$  por el coseno que forman el plano  $d\sigma$  con el plano  $dx dz$ , o, siendo lo mismo, por el coseno formado por las normales a los planos  $d\sigma$  y  $dx dz$ , coseno que se debe tomar en valor absoluto.

Por consiguiente, si llamamos  $\alpha, \beta, \gamma$ , los cosenos de los ángulos que forman la normal a  $d$  dirigida hacia el interior del campo, con la dirección positiva de los ejes coordenados, tendremos:

$$dx dz = d\sigma |\alpha|$$

$$dx dz = \alpha d\sigma \text{ en el punto } P_e$$

$$dx dz = -\alpha d\sigma \text{ en el punto } P_s$$

Entonces:

$$dx dz = \sum (U_{P_s} - U_{P_e}) = dx dz \sum U_{P_s} - dx dz \sum U_{P_e}$$

$$= -\alpha d\sigma \sum U_{P_s} - \alpha d\sigma \sum U_{P_e} = - \int_{\sigma} \alpha U d\sigma$$

Por consiguiente:

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial y} dS = \int_{\sigma} dx dz \sum (U_{P_s} - U_{P_e}) = - \int_{\sigma} \alpha U d\sigma$$

Y análogamente:

$$\int_s \frac{\partial u}{\partial z} dS = - \int_{\sigma} \beta U d\sigma \quad (\text{Fórmulas de Green})$$

Observamos que en cada una de estas fórmulas, el eje se puede considerar como una recta generatriz orientada y  $\partial U$  como la derivada de la función según esta dirección.

Los cosenos  $\alpha$ ,  $\beta$ , y  $\gamma$  son los cosenos que hacen las normales a  $\sigma$  con las direcciones de los ejes; entonces tiene carácter independiente del triedro de referencia y las fórmulas son intrínsecas.

El lema de Green se puede aplicar también a los vectores.  $\underline{V}$  tiene como componentes  $V_x, V_y, V_z$ .

Entonces: 
$$\int_S \frac{\partial V_x}{\partial x} dS = - \int_{\sigma} V_x \alpha d\sigma$$

$$\int_S \frac{\partial V_y}{\partial x} dS = - \int_{\sigma} V_y \alpha d\sigma$$

$$\int_S \frac{\partial V_z}{\partial x} dS = - \int_{\sigma} V_z \alpha d\sigma$$

Multiplicando por  $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$  y sumando:

$$\int_S \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \underline{j} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \underline{k} \right) dS = - \int_{\sigma} (V_x \underline{i} + V_y \underline{j} + V_z \underline{k}) \alpha d\sigma$$

$$\int_S \frac{\partial \underline{V}}{\partial x} dS = - \int_{\sigma} \underline{V} \alpha d\sigma$$

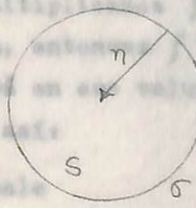
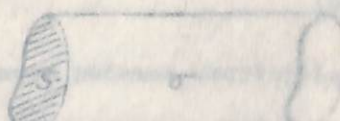
**B. Teorema de Gauss o de la divergencia.**

Dado un campo vectorial  $\underline{V}(P)$  considérese una superficie cerrada  $\sigma$ ; indiquemos como de costumbre con  $\alpha, \beta, \gamma$  las componentes del vector normal  $\underline{n}$  orientado hacia el interior y con  $S$  el espacio encerrado por  $\sigma$ .

El flujo saliente de  $S$  a través de  $\sigma$  será:

$$- \int_{\sigma} \underline{V} n d\sigma = - \int_{\sigma} (V_x \alpha + V_y \beta + V_z \gamma) d\sigma$$

Fig. 21



Por el lema de Green el 2º miembro de (51) es :

$$\int_S \left( \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dS$$

Pero sabemos que  $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div } \underline{V}$  (52)

Llevando (52) a (51):

$$\int_S \underline{V} \cdot \underline{n} \, d\sigma = \int_S \text{div } \underline{V} \, dS$$
 (53)

Una aplicación inmediata del teorema de la divergencia es la "Ecuación de la Continuidad"

C. Ecuación de la Continuidad.-

Tenemos un cuerpo cualquiera que lo llamamos medio continuo por que sus partículas están muy próximas las unas de las otras, fig. 22.

Si  $\rho$  es la densidad de este medio continuo y  $dS$  es un volumen elemental multiplicando  $\rho \, dS$  obtenemos la masa de un elemento, sumándolas obtenemos la masa del cuerpo, es decir  $\int \rho \, dS$ . El incremento de la masa por unidad de tiempo, por  $dS$  es la masa que está contenida en el volumen  $S$ .

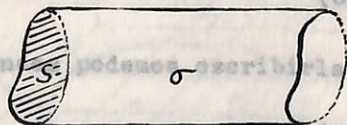


Fig. 22

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dS$$
 (54)

Si  $V$  es la velocidad que tienen las partículas,  $n$  está al exterior;  $\rho$  es la densidad que tienen las partículas. Si multiplicamos  $\rho V$ , desplazamiento de la partícula,  $V$  tiene una dirección, entonces  $\rho V \cdot \underline{n} \, d\sigma$  expresa el desplazamiento de todas las partículas así:  $\int_S \rho V \cdot \underline{n} \, d\sigma$  esto es el flujo que sale

$$-\int_S \rho V \cdot \underline{n} \, d\sigma$$
 (55)



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \underline{V} = 0 \quad (66)$$

Esto es que, cuando tenemos un medio continuo encerrado dentro de una superficie  $\sigma$ , la variación de la masa entre el volumen encerrado por la misma superficie  $\sigma$  depende del flujo a través de la superficie del mismo medio.

Observamos que: Si  $\rho$  es constante (fluido incompresible) el campo es solenoidal y siendo para densidad  $\rho \operatorname{div}(\rho \underline{V}) = \rho \operatorname{div} \underline{V}$  de esta teoría,  $\operatorname{div} \underline{V} = 0$  tendremos campo de velocidades.

D. Teorema de STOKES.--

Partiendo de las fórmulas de Green en el plano, modificadas así: Si  $\theta$  es el ángulo que forma la T con el eje Y

$$\cos \theta = \frac{dy}{ds} \quad \operatorname{Sen} \theta = \frac{dx}{ds}$$

Para la normal n:

$$\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{sen} \theta = -\frac{dx}{ds} = \beta$$

Entonces  $dx = -\beta ds$  (67)

$$\operatorname{Sen}(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos \theta = \frac{dy}{ds} = \alpha \quad \text{de donde } dy = \alpha ds \quad (68)$$

Pero  $\alpha$  y  $\beta$  son los cosenos de las fórmulas de Green en el plano, aplicándolas a los vectores:

$$\iint_R \frac{\partial v_y}{\partial x} dx dy = - \int_A \beta v_y ds = - \int_A v_y dy \quad (69)$$

$$\iint_R \frac{\partial v_x}{\partial y} dx dy = - \int_A \alpha v_x ds = - \int_A v_x dx \quad (70)$$

Restando de la (69) la (70)

$$\iint_R \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) d\sigma = \int_A v_y dy + v_x dx \quad (71)$$

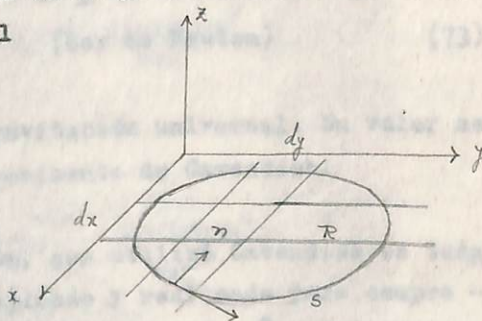


Fig. 23

Rodas...

$$\int_{\mathcal{R}} \mathbf{R}_z \, d\mathcal{R} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{V} \times d\mathbf{P} \quad (72)$$

La (72) significa que la circulación de un vector  $\mathbf{R}$  a lo largo de un contorno  $\mathcal{S}$  es igual al flujo del vector  $\text{Rot } \mathbf{R}$  a través de cualquier su superficie cuyo contorno sea  $\mathcal{S}$ .

De todo lo anteriormente visto vamos a hacer unas aplicaciones a los campos para demostrar la importancia de esta teoría.

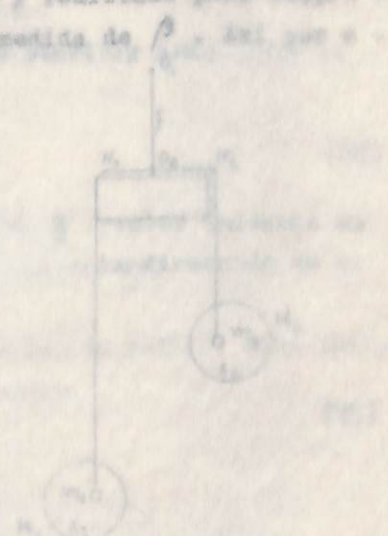


Fig. 24

VII

APLICACIONES

A. Campo Gravitatorio. - Gravitación Universal

Los experimentos de Cavendish constituyen la comprobación directa de la hipótesis de Newton; cuerpos  $A_1$  y  $A_2$  prácticamente puntiformes se atraen en razón directa de sus masas inertes  $M, m$  y en razón inversa del cuadrado de su distancia  $r$ .

Si  $\underline{F}$  es la fuerza que  $M$  ejerce sobre  $m$  dicha fuerza está dirigida según la recta de unión  $A_1A_2$  en el sentido  $A_2 \rightarrow A_1$ ; de acuerdo con el principio de acción y reacción  $m$  aplica a  $M$  la fuerza  $-\underline{F}$ . Tomando como referencia el eje  $A_1 \rightarrow A_2$  la magnitud  $F$  de  $\underline{F}$  es en valor y signo

$$F = -\beta \frac{M m}{r^2} \quad \text{(Ley de Newton)} \quad (73)$$

en donde  $\beta > 0$  es la constante de gravitación universal. Su valor se determina precisamente mediante el experimento de Cavendish.

El método de la balanza de torsión, que utilizó Cavendish es todavía hoy el mejor de cuantos se han imaginado y realizado para comprobar la ecuación (73) y por lo tanto para la medida de  $\beta$ . Así por ejemplo Boys utilizó una balanza de torsión, fig.24 en la que la suspensión  $f$  es de hilo de cuarzo, y el equipo  $H_1H_2$  es el mismo espejo rectangular, que permite emplear el método de Poggendorff. De las extremidades del equipo  $H_1H_2$  penden las bolitas  $A_1A_2$  de masas  $m_1, m_2$ , de oro, de unos 4 gms. cada una, colocadas en niveles notablemente distintos. Todo el equipo  $O_1O_2A_1A_2$  está en una vitrina dorada, en la que se puede efectuar el vacío para evitar las perturbaciones

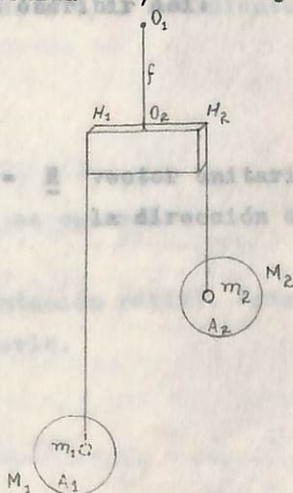


Fig. 24

producidas por las corrientes de aire.

Las masas actuantes  $M_1$  y  $M_2$  son dos esferas de plomo de unos 7 kgm. cada una colocadas como se indica en la figura 24. Gracias al fuerte desnivel entre  $m_1$  y  $m_2$  pueden suponerse despreciables las acciones de  $M_1$  sobre  $m_2$  y de  $M_2$  sobre  $m_1$ ; quedan las atracciones de  $M_1$  sobre  $m_1$  y de  $M_2$  sobre  $m_2$  constituyendo un par que se mide mediante la balanza de torsión.

Conocidas las características elásticas de torsión del hilo  $f$ , conocido el brazo  $H_1 H_2$  del par (unos 23 mm en el aparato de Boys) conocidas las distancias entre  $m_1$  y  $M_1$ ,  $m_2$  y  $M_2$  y conocidas las masas  $m_1$ ,  $m_2$   $M_1$   $M_2$  se deduce el valor de  $\beta$ . En el sistema cm. gm. seg. ( $F$  en dinas;  $r$  en cm;  $m_1$   $m_2$  en gm) es:

$$\beta = (6.67 \pm 0.005) 10^{-8} \frac{\text{dinas-cm}^2}{\text{seg}^2} \frac{r}{r}$$

En el sistema KG, m, seg. es

$$\beta = (6.67 \pm 0.005) 10^{-11} \frac{\text{newton-m}^2}{\text{seg}^2}$$

Pero la ecuación (73) también la podemos escribir así:

$$F = -\beta \frac{Mm}{r^2} \cdot \frac{r}{r} \tag{74}$$

Donde

$$\frac{r}{r} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \underline{R} \text{ vector unitario en la dirección de } r.$$

Entonces la ecuación (74) nos queda:

$$F = -\beta \frac{Mm}{r^2} \underline{R} \tag{75}$$

Pero

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

Reemplazando en (75)  $(1/r) = \nabla (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Demonstración:  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = -\beta \frac{M m}{r^2} \frac{R}{\partial x} \frac{k}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  (76)

De donde:  $\frac{dV}{dt} = -\beta \frac{M}{r^2} \frac{R}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + k \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$  (77)

Multiplicando vectorialmente por  $r$

$$r \wedge \frac{dV}{dt} = -\beta \frac{M}{r^2} \frac{R}{r} r$$

Que podemos escribir:

$$\frac{d}{dt} (r \wedge V) = -\beta M (r \wedge R) = 0$$

siendo  $(r \wedge R) = (r \wedge \frac{R}{r}) = 0$

Por consiguiente:  $\frac{d}{dt} (r \wedge V) = 0$

Lo que quiere decir que  $(r \wedge V) = C$  (es un área)

Observamos lo siguiente:

Si  $c = 0$  el movimiento es rectilíneo  
 $c \neq 0$   $r$  y  $v$  son perpendiculares a  $C$ , el movimiento es plano y central.

De hecho, multiplicando por  $r$ :

$$r \times (r \wedge v) = r \times C = 0 \text{ es plano}$$

$$r \wedge \frac{dv}{dt} = 0 \text{ de donde } r \wedge a = 0 \text{ es central}$$

Luego el campo gravitatorio tiene una representación radial. Este Campo es solenoidal e irrotacional. Vamos a comprobarlo.

Siendo  $\Phi = \frac{1}{r}$  entonces:

$$\nabla \times \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

$$\nabla \wedge \left( \frac{1}{r} \right) = 0$$

Que es la ley de Gauss

$\Phi = 1/r$  porque  $\nabla (1/r) = \nabla (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

Demostración:  $\nabla \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$

$$= i \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + j \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} + k \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$= i \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x \right\} + j \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y \right\} + k \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z \right\}$$

$$= \frac{-x i - y j - z k}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Calculamos  $\nabla \wedge \left( \frac{1}{r} \right) = \left( \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \wedge (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} =$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} & (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} & (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \end{vmatrix}$$

$$= i \left[ \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right] +$$

$$j \left[ \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right] +$$

$$k \left[ \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} - \frac{\partial}{\partial y} (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \right]$$

$$= i \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y - \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z \right] \right\}$$

$$+ j \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2z - \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x \right] \right\}$$

$$+ k \left\{ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2x - \left[ -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} 2y \right] \right\}$$

$$= \frac{-y i}{r^3} + \frac{z i}{r^3} - \frac{z j}{r^3} + \frac{x j}{r^3} - \frac{x k}{r^3} + \frac{y k}{r^3}$$

$$= \frac{(z - y) i + (y - x) j + (x - z) k}{r^3} = \frac{\mathbf{x} i + \mathbf{y} j + \mathbf{z} k}{r^3} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Que es la ley de Newton

Para el campo gravitatorio de la tierra  
 Siendo la dirección de  $\underline{F}$  hacia abajo según la Z, tiene un potencial,  
 porque

$$\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} = 0 ; \quad \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} = 0$$

Con Z constante tenemos superficies equipotenciales.

$$-\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial z} = g$$

$$\underline{U} = -gz + C$$

B. Campo electrostático de cargas Puntiformes.-

El campo electrostático puede ser engendrado por cargas únicas o por cargas distribuidas sobre una superficie, siempre fijas. El segundo caso lo podemos relacionar con el primero, pensando en la densidad.

Así,  $\int_V \rho = \frac{dq}{dv}$  (densidad eléctrica espacial)

$\int_\sigma \rho = \frac{dq}{d\sigma}$  (densidad eléctrica superficial)

De donde;  $q = \int \rho d\sigma$

En todo caso vale la ley de Coulomb que se expresa así:

$$\underline{F} = \pm K \frac{qq_1}{r^2} \tag{78}$$

Si  $q_1 = 1$  entonces  $\underline{F} = \pm K \frac{q}{r^2} = \pm K \frac{q}{r^2} \underline{r}$  (79)

donde  $\frac{\underline{r}}{r}$  es un vector unitario.

De la (79) se saca que  $\underline{F} = F(r)$  como la encontrada en el campo gravitatorio, entonces, como éste, el campo electrostático admite potencial - que tendrá la misma expresión  $U = \frac{1}{r}$

Imaginemos una carga  $q$  en un punto dado  $O$  rodeada por una superficie cerrada arbitraria. Construimos un cono infinitesimal con su vértice en  $O$  que corta la superficie que envuelve a la carga en un elemento de área  $\sigma$  a una distancia  $r$  a partir de  $O$ , fig.25. Sea  $w$  el ángulo formado por el cono.

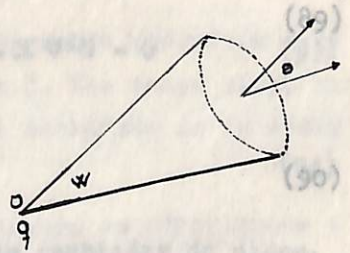


Fig. 25

El flujo que emerge a través de  $\sigma$  donde  $n$  es normal a la superficie fig. (25) es:

$$d\Phi = \text{En } d\sigma = q \frac{\cos\theta d\sigma}{r^2} \quad \text{Ec. de Poisson que vale para (80) los puntos P donde existen cargas.}$$

Pero  $\frac{\cos\theta d\sigma}{r^2} = d\Omega$  es irrotacional.

Entonces reemplazando en (80)

$$d\Phi = q d\Omega \quad (81)$$

$$\text{Integrando } \Phi = 4\pi q \quad (q \text{ carga total contenida en el cono}) \quad (82)$$

Si  $q$  es espacial:

$$dq = \rho dV \quad \text{donde } \rho = \frac{dq}{dV} \quad \text{donde } J = |\mathbf{E}| \quad (83)$$

$$\text{Diferenciando (82)} \quad d\Phi = 4\pi \rho dV \quad (84)$$

$$\text{Integrando (84)} \quad \Phi = 4\pi \int \rho dV = 4\pi q \quad \text{para cargas interiores} \quad (85)$$

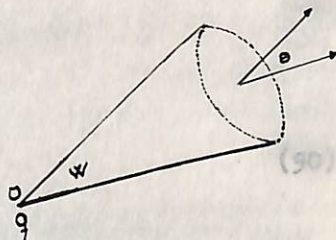
$$\text{Por el teorema de la divergencia} \quad d\Phi = \text{div } \mathbf{E} dV \quad \text{si las corrientes son estacionarias} \quad (86)$$

$$\text{Igualando (84) y (86)} \quad \text{div } \mathbf{E} dV = 4\pi \rho dV \quad (\text{constante}) \quad (87)$$

$$\text{Entonces:} \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho \quad (88)$$

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \int_V 4\pi \rho dV$$

Imaginemos una carga  $q$  en un punto dado  $O$  rodeada por una superficie cerrada arbitraria. Construimos un cono infinitesimal con su vértice en  $O$  que corta la superficie que envuelve a la carga en un elemento de área  $\sigma$  a una distancia  $r$  a partir de  $O$ , fig.25. Sea  $w$  el ángulo formado por el cono.



El flujo que emerge a través de  $\sigma$  donde  $n$  es normal a la superficie fig. (25) es:

$$d\Phi = E_n d\sigma = q \frac{\cos\theta d\sigma}{r^2} \quad (80)$$

Pero  $\frac{\cos\theta d\sigma}{r^2} = d\omega$

Entonces reemplazando en (80)

$$d\Phi = q d\omega \quad (81)$$

Integrando  $\Phi = 4\pi q$  (  $q$  carga total contenida en el cono ) (82)

Si  $q$  es espacial:

$$dq = \rho dV \quad (83)$$

Diferenciando (82)

$$d\Phi = 4\pi \rho dV \quad (84)$$

Integrando (84)

$$\Phi = 4\pi \int \rho dV = 4\pi q \text{ para cargas interiores} \quad (85)$$

Por el teorema de la divergencia

$$d\Phi = \text{div } \underline{E} dV \quad (86)$$

Igualando (84) y (86)

$$\text{div } \underline{E} dV = 4\pi \rho dV \quad (87)$$

Entonces:

$$\int_V \text{div } \underline{E} dV = \int_V 4\pi \rho dV \quad (88)$$

O sea que de (88) tenemos:

$$\text{Teníamos: } \text{div } \underline{E} = 4\pi\rho \quad (89)$$

Pero habíamos visto que  $\underline{E} = -\text{grad } U$

Reemplazando en (89) nos queda:

$$\text{div grad } U = -4\pi\rho \quad (90)$$

Que podemos escribir así:

$$\nabla \times \nabla U = -4\pi\rho \quad (91)$$

O sea que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -4\pi\rho \quad \text{Ec. de Poisson que vale para todos los puntos P donde existen cargas.}$$

El campo no es solenoidal es irrotacional.

### C. Campo electrostático de Conductores.

Si en un conductor eléctrico homogéneo, isotrópico, a temperatura constante vale la ecuación de la continuidad

$$\text{Esto es, } \text{div } \underline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \text{siendo } J \text{ densidad de corriente (92)}$$

$$\text{O sea que } J = \frac{di}{d\sigma} \quad \text{de donde } J = \chi |E|$$

$\chi = \text{conductividad eléctrica}$

dondo  $\underline{E}$  es el campo eléctrico en el conductor. Si asumimos el conductor isotrópico  $\underline{J}$  será paralelo a  $\underline{E}$  y entonces podemos escribir en forma diferencial la ley de Ohm

$$\underline{J} = \chi \underline{E}$$

En condiciones de equilibrio, si las corrientes son estacionarias

$$\underline{J} = C \quad (\text{constante})$$

$$\text{Entonces } \frac{1}{4\pi} \text{div } \underline{J} = 0$$

$$\underline{E} = \text{Constante}$$

Pero como vimos anteriormente

$$\text{donde } \underline{E} = -\nabla U$$

$$\text{Entonces } \nabla U = 0 \quad U = \text{Constante}$$

Luego las superficies del conductor son equipotenciales.

Teníamos:

$$\text{div } \underline{J} = 0 = \text{div} (\chi \underline{E}) = \chi \text{div grad } U = -\chi \nabla^2 U = 0 \quad (93)$$

Así, si las corrientes no son estacionarias

$$\text{div } \underline{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (94)$$

Los manantiales de  $\underline{J}$  son las derivadas temporales cambiadas de signo, de la densidad de carga.

Pero

$$\text{div } \underline{D} = 4\pi \rho \quad (95)$$

de donde

$$\rho = \frac{\text{div } \underline{D}}{4\pi} \quad (96)$$

Entonces derivando parcialmente con respecto al tiempo la (96)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \text{div } \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \quad (97)$$

Esto es,

$$\text{div} \left( \underline{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (98)$$

Obsérvese que la  $\underline{J}$  es densidad de corriente de conducción.

$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$  densidad de corriente de desplazamiento

En cualquier cuerpo conductor o aislador hay corriente de conducción y de desplazamiento.

Sólo en los dieléctricos hay corrientes de desplazamiento.

En los conductores perfectos hay corrientes de conducción.

Siendo

$$\underline{D} = \underline{E} + 4\pi \underline{P}$$

Entonces

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} + \frac{\partial \underline{P}}{\partial t}$$

$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}$  densidad de corriente en el vacío

$\frac{\partial \underline{P}}{\partial t}$  densidad de corriente de polarización

$$\oint (\text{Rot } \underline{H} - 4\pi \underline{J}) d\sigma = 0 \quad (102)$$

D. Campo magnético de las Corrientes.-

Esto La experiencia de Oersted indica que una corriente eléctrica crea en el espacio que la envuelve un campo magnético  $\underline{H}$ . Ese campo tiene las mismas propiedades que el de un imán y puede ser estudiado de la misma manera.

El trabajo realizado por este campo según Ampere es  $4\pi i$ , donde  $i$  es la corriente que pasa. Esto es:

$$\oint \underline{H} ds = 4\pi \frac{i}{c} \quad (99)$$

Pero si consideramos un conductor de sección  $d\sigma$  entonces:

$\underline{J} = \frac{di}{d\sigma}$  donde  $\underline{J}$  es densidad de corriente

Reemplazando el valor de  $i$  en (99)

$$\oint_s \underline{H} ds = \frac{4\pi}{c} \int_{\sigma} \underline{J} d\sigma \quad (100)$$

Por el teorema de Stokes sabemos que la integral de línea es igual a la integral de superficie.

Así:

$$\oint_s \underline{H} ds = \int_{\sigma} \text{Rot } \underline{H} d\sigma$$

Reemplazando este valor en (100)

$$\int_{\sigma} \text{Rot } \underline{H} d\sigma = \frac{4\pi}{c} \int_{\sigma} \underline{J} d\sigma \quad (101)$$

Si  $\underline{J} = 0$  significa  $\frac{dq}{ds} = 0$   $i = k$

Pero  $\frac{dq}{dt} = 0$

Entonces hay potencial si las corrientes son constantes en el tiempo y también solenoidal.

La ecuación 101 se convierte en:

$$\text{Rot Rot } \underline{H} = \text{grad div } \underline{H} - \Delta \underline{H} = 0$$

Entonces  $\int_{\sigma} (\text{Rot } \underline{H} - \frac{4\pi \underline{J}}{c}) d\sigma = 0$  (102)

Esto vale siempre para cualquier valor de  $d\sigma$ . Entonces podemos escribir:

Entonces  $\text{Rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J}$  (103)

Si  $\underline{J} = 0$  entonces  $\text{Rot } \underline{H} = 0$

Todo esto lo justificamos así: Aplicando la divergencia a (103)

Siendo  $\text{Rot} (\text{div Rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div } \underline{J})$

Esto es:  $\nabla \times \nabla \wedge \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \nabla \times \underline{J}$

El primer miembro será:

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right) \times \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left[ \underline{i} \frac{\partial}{\partial x} + \underline{j} \frac{\partial}{\partial y} + \underline{k} \frac{\partial}{\partial z} \right] \times \left[ \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \underline{i} + \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \underline{j} + \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \underline{k} \right] =$$

$$= \frac{\partial^2 H_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 H_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 H_x}{\partial z \partial y} = 0$$

Entonces  $\text{div Rot } \underline{H} = 0$

De aquí que  $\text{div } \underline{J} = 0$  porque  $\text{div Rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \text{div } \underline{J}$

Esto significa que la  $\underline{J}$  debe ser constante respecto al tiempo y solenoidal.

Podemos sacar una expresión explícita de  $\underline{H}$

Aplicando Rot a la ecuación (103)

$$\text{Rot Rot } \underline{H} = \text{grad div } \underline{H} - \nabla^2 \underline{H} = -\nabla^2 \underline{H} \text{ por ser } \text{div } \underline{H} = 0 \quad (104)$$

Entonces  $\text{Rot Rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \text{Rot } \underline{J}$

O sea que por (103)

Para que siempre  $\nabla^2 \underline{H} = -\frac{4\pi}{c} \text{Rot } \underline{J}$  (Ecuación de Poisson en coordenadas cartesianas).

Cuya solución es:  $\underline{H} = \frac{1}{c} \int_V \frac{\text{Rot } \underline{J}}{r} dV$  (105)

Siendo  $\text{Rot} (\nabla \underline{A}) = \nabla \text{Rot } \underline{A} + \text{grad } \nabla \wedge \underline{A}$  (identidad)

Así,  $\text{Rot} (1/r \underline{J}) = 1/r \text{Rot } \underline{J} + \text{grad} (1/r \wedge \underline{J})$

Reemplazando en (105)

$$\underline{H} = \frac{1}{c} \int_V \text{Rot}(1/r \underline{J}) dV - \frac{1}{c} \int_V \text{grad}(1/r \wedge \underline{J}) dV \quad (106)$$

Reemplazando el

La integral (a) transformada por Gauss en una de superficie, será cero, siendo  $\underline{J}$  sobre la superficie  $\sigma$  igual a cero.

Entonces la ecuación (106) nos queda

$$\underline{H} = -\frac{1}{c} \int_V \text{grad} (1/r \wedge \underline{J}) dV \quad (107)$$

Por consiguiente

$$\underline{H} = -\frac{1}{c} \int \frac{\underline{r} \wedge \underline{J}}{r^3} dV \quad \text{siendo } \text{grad } 1/r = -\frac{\underline{r}}{r^3}$$

Reemplazando en

Una aplicación inmediata es:

Si hay una espira consideramos:

- $\sigma$  = sección
- $dl$  = elemento de longitud
- $dV$  =  $\sigma dl$
- $\underline{J} dV$  =  $\sigma \underline{J} dl = I dl$

$$\underline{H} = \frac{I}{c} \int \frac{\underline{r} \wedge dl}{r^3}$$

Observamos que

hay cargas de polarización

De donde: 
$$\underline{dH} = \frac{Idl \text{ Sen } \theta}{r^2}$$

Para que siempre  $\text{div } \underline{J} = 0$  aunque no haya cargas verdaderas sino cargas de polarización debemos pensar en el vector D (inducción electrostática) Para este vector tenemos:

$$\text{div } D = 4\pi \rho \quad (\text{esto es el flujo del campo}) \quad (108)$$

De donde 
$$\rho = \frac{1}{4\pi} \text{div } D \quad (109)$$

Tenemos  $\rho$  en función del campo. Ahora, en la ecuación de la continuidad

$$\text{div } \underline{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Reemplazamos el valor de  $\rho$  y obtenemos

$$\text{div } \underline{J} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi} \text{div } D \right) = 0 \quad (110)$$

Factorizando Div: 
$$\text{div} \left[ \underline{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \right] = 0 \quad (111)$$

Por consiguiente el verdadero vector  $\underline{J}$  que siempre es solenoidal es:

$$\underline{J} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (112)$$

Reemplazando en la ecuación (103)

$$\text{Rot } \underline{H} = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} \quad (113)$$

que constituye la primera ecuación de Maxwell. Esta ecuación también - la podemos escribir así:

$$\text{Rot } H = \frac{4\pi}{c} \underline{J} + \frac{\epsilon \partial D}{c \partial t}$$

(a)            (b)

Observamos que cuando no hay cargas verdaderas (a) es cero y cuando no hay cargas de polarización (b) es cero.

### E. Campos eléctricos de campos magnéticos variables.

Para analizar estos campos tomamos la experiencia de Faraday que dice que cuando hay variación de flujo magnético conectado con un circuito, en el circuito se engendra una fuerza electromotriz que se reduce a la fórmula

$$e = - \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad \text{por ser } \Phi = \int_{\sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (114)$$

siendo  $e = IR$  escribimos la (114) así

$$IR = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (115)$$

Pero si en el interior del circuito hay una fuerza electromotriz  $e^i$ , entonces expresamos la (115) así:

$$IR = e^i - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (116)$$

La existencia de una fuerza electromotriz declara la presencia de un campo; entonces en el caso de la (116) tenemos dos campos  $\underline{E} + \underline{E}^i$

Calculamos la  $\underline{J}$ :

$$\underline{J} = \chi (\underline{E} + \underline{E}^i)$$

Multiplicando por  $ds$ :

$$\underline{J} \times ds = \underline{E} \times ds + \underline{E}^i \times ds \quad (117)$$

$$\text{Pero con } \underline{J} \times ds = \frac{dI}{d\sigma} ds \quad \text{siendo } J = \frac{dI}{d\sigma}$$

Entonces reemplazando en (117)

$$\frac{dI}{d\sigma} \cdot ds = \underline{E} \times ds + \underline{E}^i \times ds$$

De otra manera:

$$\frac{dI}{d\sigma} \cdot ds = IR = \int_{\sigma} (\underline{E} \times \underline{E}^i) ds \quad (118)$$

Sustituyendo (118) en (115)

$$-\frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta} \mathbf{E} \times d\mathbf{s} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} B_n d\sigma \quad (119)$$

El trabajo a lo largo de la línea es un rotor aplicado a la superficie.

Esto es:

$$\text{Siendo } \int_{\sigma} \text{Rot } \mathbf{E} \, d\sigma = - \int_{\Delta} \mathbf{E} \times d\mathbf{s} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\sigma} B_n \, d\sigma \quad (120)$$

$$\text{Entonces: } \int_{\sigma} \left( \text{Rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\sigma = 0 \quad (121)$$

Como esta integral está extendida a toda la superficie. Entonces:

$$\text{Rot } \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

De donde:

$$\text{Rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad \text{porque } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (122)$$

De todo esto podemos deducir que cuando varía el campo eléctrico se obtiene un campo magnético como en (113) y viceversa, si varía el campo magnético se obtiene un campo eléctrico como en (122).

Esto vale en presencia de las cargas.

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0$$

Además afirmamos que el campo eléctrico que se engendra en el circuito por efecto de la variación del flujo magnético no es irrotacional.

Para concluir vamos a calcular la divergencia del producto vectorial:

$\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}$

$$\begin{aligned} \text{Entonces: } \text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) &= \mathbf{H} \times \text{Rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{Rot } \mathbf{H} \\ &= \frac{1}{c} \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{E} \times \mathbf{J} - \frac{1}{c} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\text{Siendo } \text{Rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi \mathbf{J}}{c} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Si multiplicamos todo por  $\frac{c}{4\pi}$

$$\frac{c}{4\pi} \text{div}(\mathbf{E} \wedge \mathbf{H}) = -\frac{1}{4\pi} \mathbf{H} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E} \times \mathbf{J} - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$



BIBLIOGRAFIA

- 1.- ATTWOOD S., Stephen, . Electric and Magnetic Fields. John Wiler, Sons, New York, 1949.
- 2.- APPELL, P., Précis de Mecanique Rationnelle, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire. 1952.
- 3.- EINSTEIN, Albert- INFELD Leopold, L'evoluzione della Fisica, Editore Einaudi, 1.948.
- 4.- MURRAY R. Spiegel, Vector Analysis, Schaum Publishing Company, New York, 1.959.
- 5.- NATHANIEL, Frnk, Introducción a la Electricidad y a la Optica. Editorial Grijalbo, Los Angles, 1.958.
- 6.- WANGSNESS, K, Roald, Introduction to Theoretical Physics, 1963
- 7.- WESTPHAL H. Wilhelm, Tratado de Física, Editorial Labor, 1964.
- 8.- Woodbridge F. Constant, Theoretical Physics, Adisson Wesley Publishing, Massachusetts, 1.961



UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
Facultad de Ciencias de la Educación  
BIBLIOTECA  
PASTO

**T.**  
 E-530.11 Inventario 7128  
 R685  
 Autor Rodas, Magdalena Sofia.  
 Título Teoria de los campos (Elementos)

Fecha Devol.	NOMBRE	Carné
- 4 JUL 1975	<i>Patricio Salazar</i>	0008
11-5-19	<i>Patricia Hernandez</i>	

PRO DE CONSULTA  
se presta a domicilio

X

T  
530.11  
R685

007128

X c

7128