

MÉTODOS DE CÁLCULO FRACCIONAL EN LA DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS



TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

VICTOR GIRALDO BUESAQUILLO GÓMEZ

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
San Juan de Pasto, Colombia
Noviembre 2013

MÉTODOS DE CÁLCULO FRACCIONAL EN LA DESCRIPCIÓN DE SISTEMAS FÍSICOS

VICTOR GIRALDO BUESAQUILLO GÓMEZ

TRABAJO DE GRADO

Director:

MSc. Alejandro Pérez Riascos
PhD. Alvaro Rugeles Pérez

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
San Juan de Pasto, Colombia
Noviembre 2013

©2013 - VICTOR GIRALDO BUESAQUILLO GÓMEZ

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

MSc. Alejandro Pérez Riascos

Director

PhD. Alfredo Pasaje

Jurado

PhD. German Ramos

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 2013

Agradecimientos

El desarrollo de este trabajo fue posible gracias a Alejandro Pérez Riascos y a Alvaro Rugeles Pérez, quienes más que los directores del proyecto son verdaderos amigos que con paciencia supieron guiarme en este proceso de aprendizaje y descubrimiento de nuevos conocimientos. Gracias por indicarme el camino adecuado hasta la meta.

A mi tía Gloria Buesaquillo le debo el apoyo y afecto brindado durante toda mi carrera. Siempre estuvo atenta a ayudarme cuando lo necesité. Mis más sinceros agradecimientos para ella.

A mis amigos y compañeros Johana Castellanos, Leidy Eraso, Jorge Muñoz, Daniel Yela, Alberto Cuasapud, Diego López, Cristian Castro, Luis Bravo, Frank Chavez, Erick Potosí, Socorro Mafla y a todos los que me acompañaron en este proyecto, gracias.

Y muy especialmente quiero agradecer a mi madre Rosa Buesaquillo y a mi hermana Liliana Rosas por el amor y el respeto que siempre me han ofrecido.

A la memoria de mi abuela Evangelina Gómez,

quien fue mi madre y mi padre a la vez,

un verdadero ángel.

Gracias!!!

MÉTODOS DE CÁLCULO FRACCIONAL EN SISTEMAS FÍSICOS

Resumen

En este trabajo se presenta una revisión del cálculo fraccional, de ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionales y se estudian algunas aplicaciones en el contexto del electromagnetismo en medios materiales y en la teoría de ecuaciones diferenciales no lineales. En la primera parte se presentan las definiciones y propiedades de la función de Mittag-Leffler, la derivada fraccional de Riemann-Liouville y la derivada fraccional de Caputo. A partir de estos conceptos se estudian ecuaciones diferenciales lineales con derivadas fraccionales. En la segunda parte del trabajo se analiza en detalle la propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos con una respuesta dieléctrica dada por el modelo de Havriliak-Negami; en este modelo el campo de polarización del material se expresa mediante derivadas de orden fraccional del campo eléctrico. También se estudian diferentes tipos de soluciones de la ecuación fraccional no homogénea de Burgers. Esta ecuación es una generalización de la ecuación de difusión no homogénea en la que se incluye una derivada fraccional de Caputo que describe una no linealidad no local. Se analizan sus soluciones solitónicas, y se exploran los efectos asociados al término no homogéneo y al orden de la derivada fraccional.

FRACTIONAL CALCULUS METHODS IN PHYSICAL SYSTEMS

Abstract

In this work we present a revision of the mathematical tools related to the fractional calculus, differential equations with fractional derivatives and we study some applications in the context of electromagnetism in material media and nonlinear partial differential equations. In the first part we present the definitions and properties of the Mittag-Leffler function, the Riemann-Liouville derivative and the Caputo derivative. From these concepts we study linear differential equations with fractional derivatives. In the second part of this thesis we analyze in detail the propagation of electromagnetic waves in dispersive media with a dielectric response described by the Havriliak-Negami model; in this model the polarization field of the material is defined in terms of fractional derivatives of the electric field. Also, we study the one-dimensional nonhomogeneous fractional Burgers equation. This equation is a generalization of the nonhomogeneous diffusion equation with an additional term with a Caputo derivative that describes a nonlocal nonlinearity. We obtain soliton solutions and we explore the effects associated to the nonhomogeneous term and the fractional derivative order on these solutions.

Índice general

1. Cálculo fraccional	1
1.1. Introducción	1
1.2. Reseña histórica	2
1.3. Funciones especiales utilizadas en el cálculo fraccional	7
1.3.1. Función gamma	7
1.3.2. Función de Mittag-Leffler	9
1.3.3. Función hipergeométrica	12
1.4. Derivada fraccional	13
1.4.1. Derivada fraccional de Riemann-Liouville	13
1.4.2. Derivada fraccional de Caputo	18
1.5. Transformada de Laplace	22
1.5.1. Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler	23
1.5.2. Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann-Liouville	24
1.5.3. Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Caputo	25
2. Ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionales	26
2.1. Introducción	26
2.2. Ecuaciones diferenciales	27
2.2.1. Solución de problemas de valores iniciales	28
2.2.2. Ecuación diferencial lineal fraccional de un término	28
2.2.3. Ecuación diferencial lineal fraccional de dos términos	30
2.2.4. Ecuación diferencial lineal fraccional de tres términos	33
2.3. Oscilador fraccional	34
2.4. Difusión fraccional	38
2.4.1. Vuelos de Lévy	39
2.4.2. Ecuación de difusión normal en un plano	40
2.4.3. Ecuación de difusión fraccional	41
2.4.4. Solución de la ecuación de difusión fraccional	42
3. Ondas electromagnéticas en medios fraccionales	44
3.1. Introducción	44
3.2. Medios fraccionales	45
3.3. Ecuación de onda	51
3.4. Pulsos y paquetes de onda en medios fraccionales	53
3.5. Ondas cilíndricas y esféricas en medios fraccionales	55

4. Ecuación fraccional de Burgers	60
4.1. Introducción	60
4.2. Ecuación de Burgers no homogénea	61
4.2.1. Transformación de Cole-Hopf	62
4.2.2. Soluciones solitónicas de la ecuación homogénea	63
4.2.3. Soluciones solitónicas de la ecuación no homogénea	65
4.3. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea	68
4.3.1. Transformación generalizada de Cole-Hopf	68
4.3.2. Ecuación fraccional de Burgers homogénea	70
4.3.3. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea	73
Conclusiones y recomendaciones	77
ANEXOS	79
A. Método de Zakian	80

Índice de figuras

1.1. Función gamma	8
1.2. Función de Mittag-Leffler de un término	10
1.3. Función de Mittag-Leffler de dos términos	11
1.4. Derivada fraccional de Riemann-Liouville	14
1.5. Derivada fraccional de Caputo	19
2.1. Solución de la ecuación diferencial lineal fraccional de un término . . .	30
2.2. Solución de la ecuación diferencial lineal fraccional de dos términos . .	31
2.3. Ecuación de dos términos y función de Heaviside	32
2.4. Solución numérica de la ecuación de tres términos	34
2.5. Oscilador fraccional	37
2.6. Caminantes aleatorios en un plano	39
2.7. Solución de la ecuación de difusión fraccional	42
3.1. Respuesta de un material fraccional como función del tiempo	49
3.2. Campo eléctrico en un material con respuesta de Havriliak-Negami . .	54
3.3. Campo eléctrico en un medio fraccional	56
3.4. Campo eléctrico en un material con respuesta de Havriliak-Negami . .	57
3.5. Ondas cilíndricas en un medio con respuesta de Havriliak-Negami . .	58
3.6. Campo eléctrico en un medio con respuesta de Havriliak-Negami . . .	59
4.1. Ecuación de Burgers homogénea	64
4.2. Ecuación de Burgers no homogénea con $F(x, t) = -F_e \delta(x - 5)$	66
4.3. Ecuación de Burgers no homogénea con $F(x, t) = -16 \sin(3t) \delta(x - 5)$. .	67
4.4. Ecuación fraccional de Burgers homogénea	72
4.5. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea	74
4.6. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea	75
A.1. Método de Zakian	81

Índice de tablas

1.1. Derivada de Riemann-Liouville con $a = -\infty$ y $\alpha > 0$	16
1.2. Derivada de Riemann-Liouville con $a = 0$ y $\alpha > 0$	17
1.3. Derivada de Caputo con $a = 0$ y $\alpha > 0$	20
A.1. Constantes para el método de Zakian	80

Capítulo 1

Cálculo fraccional

En este capítulo se hace una introducción al cálculo fraccional mediante una revisión de los aspectos históricos relevantes para luego establecer las definiciones de derivada fraccional y sus propiedades. En este contexto se realiza una descripción de las herramientas básicas para el desarrollo del trabajo como lo son la función gamma, la función de Mittag-Leffler, la derivada fraccional de Riemann-Liouville y la derivada fraccional de Caputo. Además se incluyen las transformadas de Laplace de algunas funciones y de las derivadas fraccionales.

1.1. Introducción

El cálculo fraccional es una teoría cuyos fundamentos se empezaron a indagar desde los inicios del cálculo ordinario, inicialmente como una crítica a la notación de Leibniz de derivada y más adelante alcanzó una estructura matemática convincente gracias a la contribución de matemáticos de renombre como Riemann, Liouville y Abel [1, 2, 3]. Este formalismo matemático encuentra aplicaciones en diferentes áreas de la física, la química, la biología, entre otras [4, 5, 6, 7].

En el cálculo ordinario la aplicación sucesiva de los operadores de derivación e integración sugiere solo valores enteros n para el orden de esta operación, una unidad por cada vez que se aplica el operador. No obstante, se puede obtener una expresión general para estos operadores y proponer, además, un valor arbitrario α a dicho orden [8]. Es así como surge el cálculo fraccional para estudiar las derivadas e integrales de orden arbitrario α [1, 8, 9].

En este capítulo, en la sección 1.2 se hace una introducción histórica de las ideas que se fueron desarrollando para pasar del cálculo ordinario al cálculo de orden arbitrario y se mencionan algunos personajes históricos por la importancia de sus aportes al cálculo fraccional. Posteriormente en la sección 1.3 se introduce la función gamma [10] debido a su frecuente aparición en las definiciones estudiadas y también la función de Mittag-Leffler [8], la cual aparece en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales. Luego, en la sección 1.4 se definen las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville y de Caputo que son las que se usan generalmente en las diversas aplicaciones [1, 9, 11]. Finalmente en la sección 1.5 se estudia la transformada de Laplace de las funciones y derivadas mencionadas las cuales juegan un papel importante en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales a lo largo del trabajo.

1.2. Reseña histórica

Se podría pensar que el cálculo fraccional es un campo relativamente nuevo, no obstante, sus orígenes se remontan a Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) [1, 2, 3, 11] quien introdujo la notación $d^n f(x)/dx^n$ para la derivada n -ésima de una función $f(x)$, generando inquietudes a personajes como Guillaume François Antoine, marqués de L'Hôpital, quien ya para 1695 reflexionaba acerca de las posibles consecuencias de usar el valor $n = 1/2$, siendo esto una paradoja en ese entonces [3, 11]. Sin embargo, en 1730 Leonhard Paul Euler cuestionó seriamente la posibilidad de valores fraccionarios para n [2]. Más tarde, en 1772 Joseph-Louis de Lagrange desarrolla la ley de los exponentes para la aplicación sucesiva de diferenciales de ordenes enteros m y n , $\frac{d^m}{dx^m} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} f(x)$, y esto impulsó en los matemáticos el interés por la regla correspondiente para valores arbitrarios de m y n [1]. Es así como en 1812 Pierre Simon Laplace obtiene expresiones para ciertas derivadas fraccionales de casos particulares [8]. Adicionalmente, en 1819 Sylvestre François Lacroix encuentra la derivada fraccional de $y = x^m$ siendo m un entero positivo [3, 11]. Primero calcula

la n -ésima derivada de la función y con $m > n$:

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}. \quad (1.1)$$

La aparición del operador factorial en la ecuación (1.1) sugiere la posibilidad de una generalización con ayuda de la función gamma $\Gamma(z)$ ¹ [10], escribiendo la ecuación (1.1) de la siguiente manera:

$$\frac{d^n}{dx^n} y = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}. \quad (1.2)$$

Este cambio permite reemplazar m y n por valores reales positivos tales que $m > n$. No obstante, este resultado no sugiere aplicaciones importantes para la derivada de orden arbitrario [3]. A partir de estos acontecimientos se empiezan a establecer definiciones de derivada fraccional de una función arbitraria $f(x)$ para funciones en general. Es así como en 1822 Jean-Baptiste Joseph Fourier propone la siguiente definición [1, 2]:

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) p^\alpha \cos\left(p(x-u) + \frac{1}{2}\alpha\pi\right) du dp, \quad (1.3)$$

donde α es un valor real, positivo o negativo [11]. Sin embargo, la ecuación (1.3) es extensa y aún no se proponen aplicaciones para derivadas de este tipo. No fue sino hasta el año 1823 que el matemático noruego Niels Henrik Abel aplicó el cálculo fraccional en la solución de una ecuación integral que surgió en la formulación del problema de la tautócrona [1, 11]. Este problema consiste en encontrar la forma de la curva $y = f(x)$ sobre un plano vertical tal que un objeto al deslizarse por ella sin rozamiento llegue al final de su recorrido en un tiempo que sea independiente del lugar en que se inicie el movimiento. En otras palabras, dos objetos sobre la misma curva, uno situado a mayor altura que el otro, recorren la curva en el mismo tiempo. Si el tiempo de caída es una constante conocida, la ecuación integral de Abel para $f(x)$ tiene la forma $k = \int_0^x (x-x')^{1/2} f(x') dx'$, donde k es una constante que aparece en el proceso de obtención de dicha ecuación [11]. Como se verá más adelante, la integral

¹La función gamma y sus propiedades de analizan en detalle en la sección 1.3.1.

que aparece en la ecuación anterior representa la integral fraccional de orden $1/2$ excepto por un factor constante. Con ayuda de derivadas fraccionales², la solución de la citada ecuación integral es $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}k = \sqrt{\pi}f(x)$. Este resultado genera controversia ya que, según el mismo, la derivada fraccional de orden $1/2$ de la constante k es diferente de cero, a pesar de ello este acontecimiento es relevante para el cálculo fraccional ya que lo vuelve útil [1, 2].

En 1832 el matemático Joseph Liouville, considerando la derivada de orden arbitrario de la función $f(x) = e^{ax}$, obtiene una definición de derivada fraccional a partir del desarrollo en series de una función arbitraria $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{a_n x}$ que es $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n a_n^\alpha e^{a_n x}$, siendo α en general un número complejo [1, 2, 11]. Esta definición es solamente aplicable a valores de α para los cuales la serie converge. También encuentra la siguiente expresión para la derivada fraccional de $f(x) = x^{-a}$ con $x > 0$ y $a > 0$: $\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} x^{-a} = \frac{(-1)^\alpha \Gamma(a+\alpha)}{\Gamma(a)} x^{-a-\alpha}$, donde el término $(-1)^\alpha$ puede conducir a números complejos [2, 11]. No obstante, estos resultados solo son válidos para un conjunto restringido de funciones, razón por la cual no tienen buena acogida. De esta manera Liouville decide estudiar primero la integral fraccional para luego deducir el operador inverso, es decir, la derivada fraccional, obteniendo la siguiente definición de integral fraccional [1, 2]:

$$\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{(-1)^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^x t^{\alpha-1} f(x+t) dt, \quad \text{Re}(\alpha) > 0, \quad (1.4)$$

la cual se conoce como integral fraccional de Liouville de orden α . Un resultado similar obtiene Georg Friedrich Bernhard Riemann [2] quien, usando una serie de Taylor, deduce una fórmula para la integración de orden arbitrario dada por $\frac{d^{-\alpha}}{dx^{-\alpha}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt + \phi(x)$, donde debido a la aparición del límite inferior de integración a , Riemann incluye una función complementaria $\phi(x)$ que genera confusión debido a su carácter arbitrario [1, 2]. Finalmente en 1884 el matemático Matthhieu Paul Hermann Laurent obtiene la primera definición de integral fraccional

²En este caso $\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^x (x-t)^{1/2} f(t) dt$.

que es aceptada por los matemáticos modernos [2]:

$${}_a D_x^{-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0. \quad (1.5)$$

donde símbolo ${}_a D_x^{-\alpha} f(x)$ denota la integral fraccional de orden α . La expresión (1.5) también es conocida como la fórmula de Riemann-Liouville ya que si $a = 0$ o $a = -\infty$ se recuperan las fórmulas obtenidas por Riemann y Liouville respectivamente. En este contexto los matemáticos Grünwald en 1867 y Letnikov en 1868 [1] ponen a prueba la definición (1.5) al generalizar la definición de derivada de orden entero a un orden arbitrario α con la expresión ${}_a D_x^\alpha f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x-a}{n}\right)^{-\alpha} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f\left(x - k \frac{x-a}{n}\right)$ y encuentran que la definición de Riemann-Liouville coincide con esta generalización [8, 11]. Con unos pasos sencillos que se explican en [8] se puede calcular el operador inverso de la definición (1.5) y obtener la derivada fraccional de Riemann-Liouville, la cual se convierte en una definición fundamental en el cálculo fraccional principalmente en el marco de un formalismo puramente matemático ya que en problemas aplicados aparecen ciertos factores desconocidos que generan debate. Lo anterior debido a que la derivada de Riemann-Liouville tiene ciertas desventajas para modelar fenómenos reales con ecuaciones diferenciales fraccionales [8, 9].

Más adelante el cálculo fraccional crece al punto que se desarrollan diferentes definiciones de derivadas e integrales fraccionales y se encuentran aplicaciones en muchas áreas de las ciencias. Se puede mencionar al respecto que en 1917 Hermann Weyl definió una integral fraccional adecuada a funciones periódicas cuya definición es ${}_x W_\infty^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0$ [11].

Por otra parte, algunas aplicaciones del cálculo fraccional mostraron una dificultad para encontrar el significado físico de las condiciones iniciales de problemas con derivadas fraccionales debido a que, al trabajar con las definiciones planteadas, un problema sólo queda claro cuando se consideran condiciones iniciales nulas. Ante dicha dificultad en 1969 el físico matemático italiano Michele Caputo propone una nueva definición de derivada fraccional que permite interpretar físicamente las con-

diciones iniciales en problemas aplicados [8]. Para cada valor $n \in \mathbb{Z}$ la definición dada por Caputo es la siguiente [8, 9]:

$${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{-\infty}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n. \quad (1.6)$$

Lo importante de la definición (1.6) es que cuando se usa en ecuaciones diferenciales fraccionales las condiciones iniciales adquieren la misma forma que las que se usan en ecuaciones diferenciales de orden entero [8, 9].

Una vez mencionadas algunas definiciones de derivada fraccional se debe referir también que al aplicar estas definiciones sobre una función exponencial aparece una función importante en cálculo fraccional llamada función de Mittag-Leffler³. Existen diferentes variantes de esta función como la función de Mittag-Leffler de un término, definida y estudiada por Mittag-Leffler en 1903, y sus generalizaciones a dos y tres términos introducidas por Agarwal en 1953 y por Prabhakar en 1971, respectivamente [12]. Estas funciones desempeñan un papel análogo al de la función exponencial en el cálculo ordinario con la ventaja que amplían la precisión en la descripción de ciertos fenómenos físicos como los descritos en los capítulos 1, 2 y 3 [13].

Con esto se ha hecho una breve introducción histórica al concepto de derivada fraccional, teniendo en cuenta que se ha dejado de lado bastantes acontecimientos relevantes. Por ejemplo en [1] se hace una recopilación de las primeras aplicaciones relacionadas con la solución de algunas ecuaciones diferenciales fraccionales sencillas como la ecuación integral de Abel y problemas de difusión en el transporte en medios finitos, además de incluir un buen resumen histórico. En [8] también se citan algunas aplicaciones en diferentes áreas como viscoelasticidad, electrónica, reacciones químicas y biología. Además existen otros textos con aportes importantes a las ecuaciones diferenciales fraccionales [11] y otro enfocado al uso de la definición de Caputo de derivada fraccional [9]. En el contexto actual existen gran cantidad de pu-

³La función de Mittag-Leffler y sus propiedades se analizan en detalle en la sección 1.3.2

blicaciones con aplicaciones del cálculo fraccional en viscoelasticidad [4], mecánica cuántica [14], biología [6], semiconductores [7], propagación de ondas electromagnéticas [15] y materiales [16], por mencionar solo algunos campos. Además el cálculo fraccional es una rama de investigación abierta en la que existen diferentes asuntos no resueltos como buscar la interpretación física del uso de derivadas fraccionales para explicar ciertos fenómenos, encontrar una interpretación geométrica de los operadores del cálculo fraccional y unificar las diferentes definiciones de derivada fraccional en un solo formalismo.

1.3. Funciones especiales utilizadas en el cálculo fraccional

En esta sección se define la función gamma [8, 10] y la función de Mittag-Leffler [8, 17] mencionadas en la sección previa que son fundamentales en el estudio del cálculo fraccional.

1.3.1. Función gamma

Existen diferentes formas de definir la función gamma $\Gamma(z)$ [10]. A continuación se presenta la forma integral de la función gamma con $z \in \mathbb{C}$:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad t > 0, \quad (1.7)$$

que representa una generalización de la función factorial real a valores complejos [10, 18]. Como se indica en la sección 1.4 la función gamma interviene en la definición de derivada fraccional, de ahí su importancia en el presente trabajo. Con base en las diferentes definiciones de la función gamma $\Gamma(z)$ se demuestra que esta existe para todos los valores de z , excepto para $z = 0, -1, -2, -3, \dots$ [17]. Sin embargo, la representación integral (1.7) sólo está definida para $\text{Re}(z) > 0$. Por otra parte, al calcular por partes la integral (1.7) evaluada en $z + 1$ se encuentra que $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$

y por ende se demuestra que para un entero positivo n se cumple la propiedad $\Gamma(n + 1) = n!$ [10]. También suele ser útil definir una nueva función llamada función beta para evitar el uso de una combinación de valores de la función gamma [8]. La función beta se define mediante la ecuación:

$$\beta(z, w) = \int_0^1 \tau^{z-1} (1 - \tau)^{w-1} d\tau, \quad \text{Re}(z) > 0, \quad \text{Re}(w) > 0. \quad (1.8)$$

En [8] se demuestra que la función beta cumple $\beta(z, w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$. Resta decir que otra propiedad relacionada con la función gamma es la fórmula de reflexión de Euler: $\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$ [8, 17].

Para ilustrar mejor el dominio de definición de la función (1.7) en la Figura 1.1 se grafica la función gamma de variable real y el valor absoluto de la función gamma de variable compleja. Se observa que los valores para los cuales la función gamma no está definida se encuentran en la parte negativa del eje real.

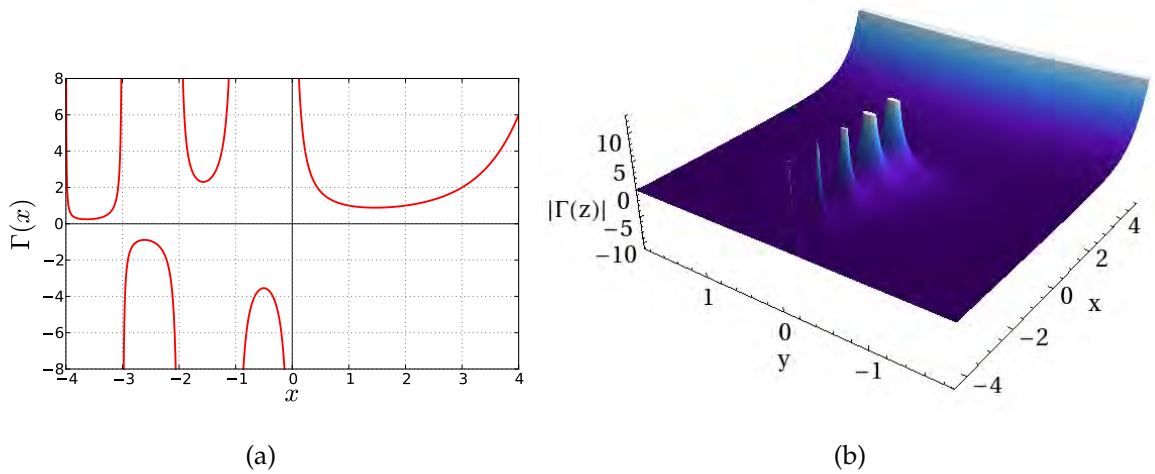


Figura 1.1: Gráfica de $\Gamma(z)$ con base en la ecuación (1.7). (a) $\Gamma(x)$ de dominio real. Se observa que la función gamma no está definida para enteros negativos y cero. (b) Valor absoluto de $\Gamma(z)$, siendo $z = x + iy$. Fuente: Esta investigación.

1.3.2. Función de Mittag-Leffler

La función de Mittag-Leffler es una función típica del cálculo fraccional y su importancia radica en que aparece directamente en problemas de física, biología, ingeniería y ciencias aplicadas [8, 17]. Generalmente se usan tres variantes de dicha función. La más sencilla es la función de Mittag-Leffler de un término [11]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad (1.9)$$

donde $z = x + iy$ es la variable compleja con x e y reales y α es una constante compleja con parte real positiva. La función (1.9) está relacionada con funciones de uso común para determinados valores de α . A continuación se citan algunos ejemplos de la función $E_\alpha(-x)$ con $x \in \mathbb{R}$ y α entero [8]:

$$E_\alpha(-x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si } \alpha = 1, \\ \cos(\sqrt{x}) & \text{si } \alpha = 2, \\ \frac{1}{3} \left(e^{-x^{1/3}} + 2e^{\frac{x^{1/3}}{2}} \cos\left(\frac{1}{2} \sqrt{3}x^{1/3}\right) \right) & \text{si } \alpha = 3, \\ \cos\left(\frac{x^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{x^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) & \text{si } \alpha = 4. \end{cases}$$

Sin embargo, para valores de α reales no siempre se obtienen expresiones conocidas o sencillas y por lo tanto se acude a métodos numéricos y computacionales con el objetivo de analizar dichas funciones. Con base en estos métodos se observa que la función de Mittag-Leffler de variable real $E_\alpha(-x)$ para valores de α tales que $0 < \alpha < 1$ tiene un comportamiento aproximadamente exponencial y cuando $1 < \alpha < 2$ la función es oscilatoria, lo cual se ilustra en la Figura 1.2. Adicionalmente, las

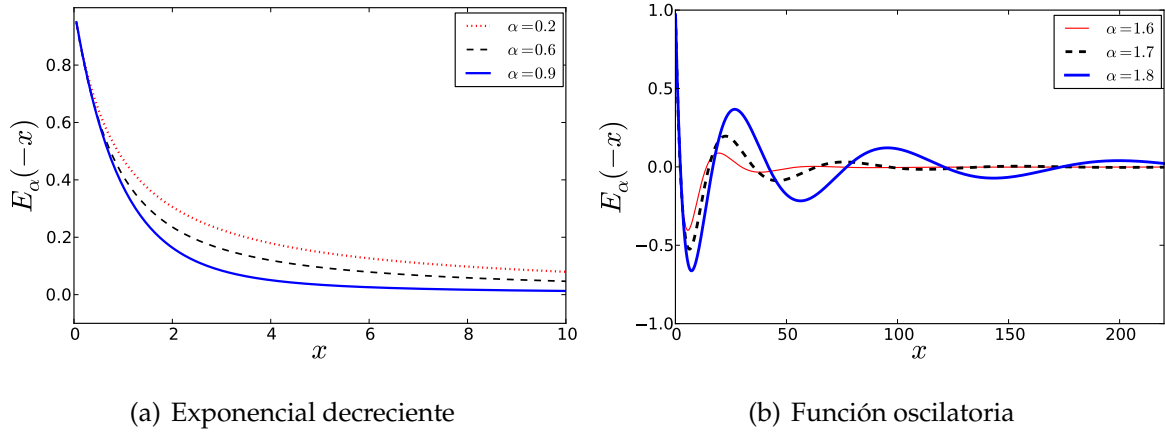


Figura 1.2: Gráficas de la función de Mittag-Leffler $E_\alpha(-x)$ en función de x . (a) $E_\alpha(-x)$ para valores de α comprendidos entre 0 y 1. La función tiene aproximadamente un decrecimiento exponencial. (b) $E_\alpha(-x)$ con valores de α entre 1 y 2. La función tiene un comportamiento oscilatorio. Fuente: Esta investigación.

funciones de Mittag-Leffler de orden racional $\alpha = p/q$ con $p, q = 1, 2, 3, \dots$, satisfacen las relaciones [9]:

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_p(z^p) = E_p(z^p), \quad (1.10)$$

y también [9]

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^p E_{\frac{p}{q}}(z^{\frac{p}{q}}) = E_{\frac{p}{q}}(z^{\frac{p}{q}}) + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{z^{k\frac{p}{q}} - p}{\Gamma(k\frac{p}{q} + 1 - p)}. \quad (1.11)$$

Las ecuaciones (1.10) y (1.11) se usan en la determinación de la transformada de Laplace de algunas funciones relacionadas con la función de Mittag-Leffler. Por otra parte, se introduce la función de Mittag-Leffler de dos términos [8, 9] cuya definición es:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (1.12)$$

siendo z variable compleja, α y β constantes complejas con parte real positiva. Cuando $\beta = 1$ la definición (1.12) se reduce a la función de Mittag-Leffler de un término,

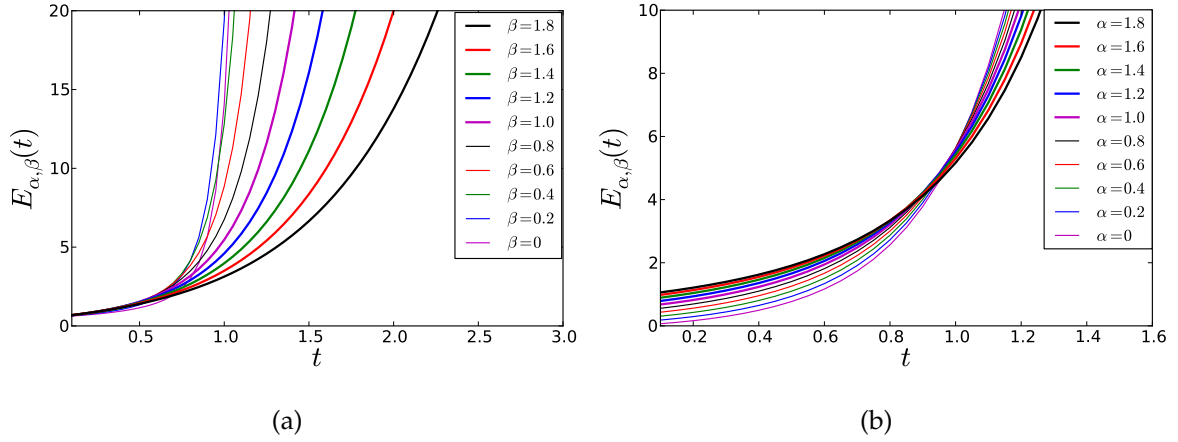


Figura 1.3: Gráficas de la función de Mittag-Leffler de dos términos $E_{\alpha,\beta}(x)$ dada por (1.12) con α , β y x reales. (a) $E_{\alpha,\beta}(x)$ con $\alpha = 0.5$ y diferentes valores de β . (b) $E_{\alpha,\beta}(x)$ con $\beta = 0.5$ y diferentes valores de α . Fuente: Esta investigación.

$E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z)$. Los siguientes son algunos casos en los que la función de Mittag-Leffler de dos términos se reduce a funciones ordinarias [8]:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{si } \alpha = 1 \text{ y } \beta = 2, \\ \frac{1}{z^{m-1}} \left\{ e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right\} & \text{si } \alpha = 1 \text{ y } \beta = m, \\ \cosh(z) & \text{si } \alpha = 2 \text{ y } \beta = 1, \\ \frac{\sinh(z)}{z} & \text{si } \alpha = 2 \text{ y } \beta = 2. \end{cases}$$

En la Figura (1.3) se presenta la gráfica de la función de Mittag-Leffler de dos términos $E_{\alpha,\beta}(x)$ con α , β y x reales. Se observa que los parámetros α y β atenúan la función en el sentido que las curvas se ensanchan a medida que dichos parámetros se incrementan. También es común en las aplicaciones el uso de la función de Mittag-Leffler generalizada [12]:

$$E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma + n)}{n! \Gamma(\alpha n + \beta) \Gamma(\gamma)} z^n, \quad (1.13)$$

donde z es variable compleja, α, β y γ son constantes complejas con parte real positiva. La función (1.13) puede resultar a partir de la derivada de la función de Mittag-Leffler de dos términos y aparece en la descripción de sistemas viscoelásticos estudiados en el capítulo 3. Es de notar que $E_{\alpha,\beta}^1(z) = E_{\alpha,\beta}(z)$. Las definiciones (1.9)-(1.13) en algunos casos conducen a expresiones en las que la suma infinita se reduce a una función analítica, no obstante, la mayor parte de las veces se mantiene la complejidad de dicha función por lo que se suele recurrir a métodos numéricos para su análisis.

1.3.3. Función hipergeométrica

Existe un conjunto de ecuaciones diferenciales de uso común en física que se generalizan por medio de la llamada ecuación diferencial hipergeométrica [18]:

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \quad (1.14)$$

donde α, β y γ son constantes y sus soluciones se pueden expresar por medio de una serie en términos de la función gamma conocida como función hipergeométrica [18]:

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)\Gamma(n+1)} z^n. \quad (1.15)$$

La función hipergeométrica es simétrica por intercambio de α y β . En este trabajo se usan dos variantes de la función hipergeométrica que son la función hipergeométrica confluyente de Kummer [9]:

$${}_1F_1(\alpha; \beta; z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\beta+n)n!} z^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad -\beta \notin \mathbb{N}_0, \quad (1.16)$$

y la función hipergeométrica de Gauss [9]:

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\gamma+n)n!} z^n, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad -\gamma \notin \mathbb{N}_0. \quad (1.17)$$

Las funciones (1.16) y (1.17) aparecen al calcular la derivada de Caputo (sección 1.4.2) de las funciones $\sin(z)$ y $\cos(z)$ respectivamente, así como al representar ciertas funciones de Mittag-Leffler.

1.4. Derivada fraccional

De acuerdo a lo estudiado en el apartado 1.2, a lo largo de la historia se han desarrollado diferentes definiciones para la derivada fraccional y dado que aún no existe una teoría fundamental que pueda unificarlas, en este trabajo se introducen las definiciones más importantes de derivada fraccional como lo son las definiciones de Riemann-Liouville [8] y de Caputo [9].

1.4.1. Derivada fraccional de Riemann-Liouville

La derivada fraccional de Riemann-Liouville de una función $f(t)$ se denota por ${}_aD_t^\alpha f(t)$ [8, 11] y para los propósitos de este trabajo se usa la siguiente definición:

$${}_aD_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t (t - \tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad (1.18)$$

donde $\alpha \geq 0$ es el orden real de la derivada perteneciente al intervalo $n - 1 \leq \alpha < n$ con n entero, además, $t > a$. La definición (1.18) se aplica a funciones $f(t)$ que tienen n derivadas continuas en el intervalo $[a, t)$, tales que $\int_a^t |f(x)| dx < \infty$. Debido a que la derivada de Riemann-Liouville está definida por medio de una integral, que depende de los valores que la función asuma en el intervalo de integración, se dice que es un operador no local. Por otra parte, en la referencia [8] se demuestra que la definición (1.18) está relacionada con la derivada de orden entero de tal manera que la derivada fraccional de Riemann-Liouville se reduce a la derivada de orden entero n cuando $\alpha = n$, ${}_aD_t^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t)$. También es importante señalar que la derivada fraccional de Riemann-Liouville es una operación lineal y que la definición (1.18) puede aplicarse a funciones de varias variables, sustituyendo la derivada entera ordinaria $\frac{d^n}{dt^n}$ por la respectiva derivada parcial. Por su parte, en la Figura 1.4 se observa que las derivadas fraccionales ofrecen un espectro más amplio que las derivadas enteras, lo que permite mejorar la precisión en la descripción de algunos fenómenos físicos.

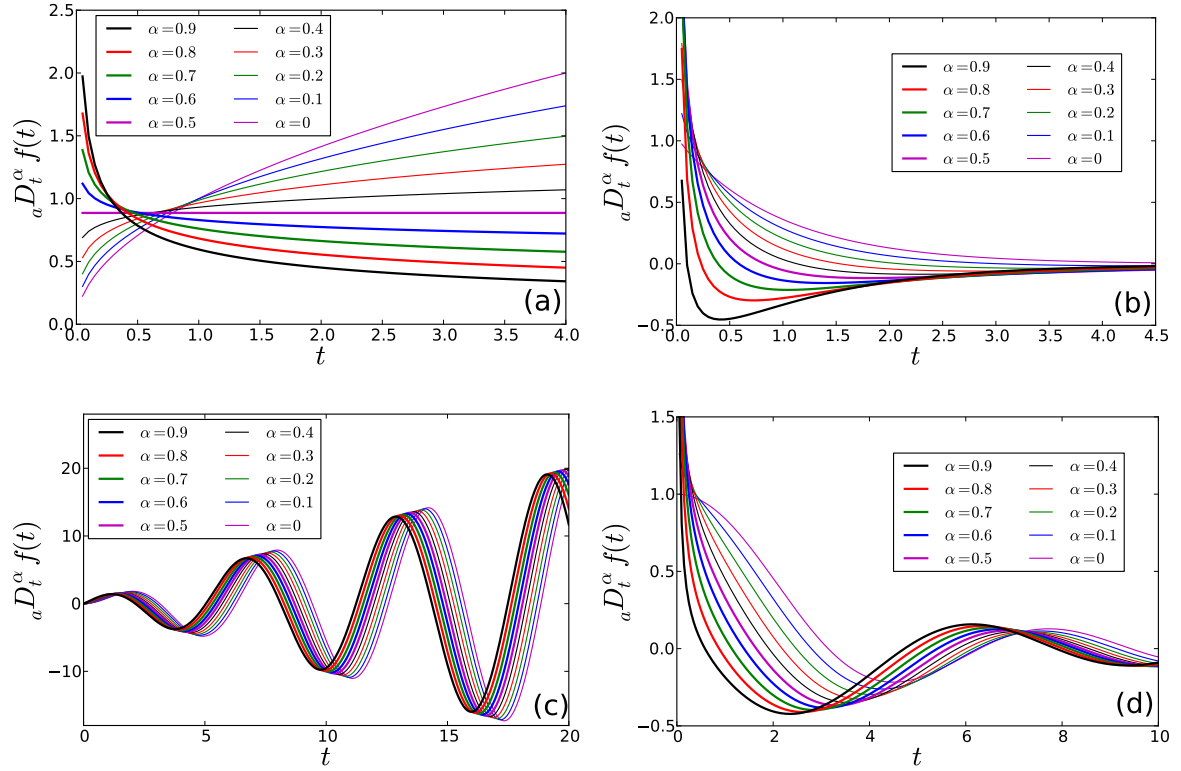


Figura 1.4: Gráficas de la derivada de Riemann-Liouville ${}_aD_t^\alpha f(t)$ de algunas funciones $f(t)$ dadas, con $a = 0$ y $0 \leq \alpha < 1$. (a) $f(t) = \sqrt{t}$. (b) $f(t) = e^{-t}$. (c) $f(t) = t \sin t$. (d) $f(t) = \sin t / t$. Se observa que entre las derivadas enteras de orden 0 y 1 existe un continuo de derivadas fraccionales lo que amplía el concepto de derivada ordinaria. Fuente: Esta investigación.

A continuación se describen algunas propiedades de la derivada fraccional de Riemann-Liouville, las cuales se necesitan a lo largo de este trabajo. En este apartado se supone que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, n es el menor entero mayor que α y m es el menor entero mayor que β . Para facilitar la comprensión de estas propiedades a continuación se introduce la definición de integral fraccional de Riemann-Liouville de una función $f(t)$ [8]:

$${}_aI_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad a < t < \infty, \quad (1.19)$$

donde $f(t)$ tiene n derivadas continuas en el intervalo $[a, t]$ y $\int_a^t |f(t)|dt < \infty$. Con esto en mente se tienen las siguientes propiedades [8, 9]:

- La derivada fraccional de Riemann-Liouville de una integral fraccional es:

$${}_a D_t^\beta {}_a I_t^\alpha f(t) = {}_a I_t^{\alpha-\beta} f(t), \quad \alpha \geq \beta, \quad (1.20)$$

y

$${}_a D_t^\beta {}_a I_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^{\beta-\alpha} f(t), \quad \alpha \leq \beta. \quad (1.21)$$

Por lo tanto la derivada fraccional de Riemann-Liouville es el operador inverso de la integral fraccional de Riemann-Liouville, es decir, ${}_a D_t^\alpha {}_a I_t^\alpha f(t) = f(t)$.

- La integral fraccional de Riemann-Liouville de una derivada fraccional de Riemann-Liouville se expresa así [8]:

$${}_a I_t^\alpha {}_a D_t^\alpha f(t) = f(t) - \sum_{j=1}^n {}_a D_t^{\alpha-j} f(a) \frac{(t-a)^{\alpha-j}}{\Gamma(\alpha-j+1)}. \quad (1.22)$$

Esta propiedad muestra que el operador integral fraccional de Riemann-Liouville no es en general el operador inverso de la derivada fraccional de Riemann-Liouville.

- Para la derivada entera D^k , con $k \in \mathbb{N}$, de una derivada fraccional de Riemann-Liouville se cumple la regla

$$D^k {}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^{\alpha+k} f(t), \quad (1.23)$$

que es la misma del cálculo ordinario. No obstante, para el caso inverso la regla es diferente [8, 9] y se escribe así:

$${}_a D_t^\alpha D^k f(t) = {}_a D_t^{\alpha+k} f(t) - \sum_{j=1}^n D^{k-j} f(a) \frac{(t-a)^{-(j+\alpha)}}{\Gamma(1-j-\alpha)}, \quad \alpha \geq \beta. \quad (1.24)$$

- La regla de composición de derivadas fraccionales es la siguiente [8]:

$${}_a D_t^\alpha {}_a D_t^\beta f(t) = {}_a D_t^{\alpha+\beta} f(t) - \sum_{j=1}^m {}_a D_t^{\beta-j} f(a) \frac{(t-a)^{-(\alpha+j)}}{\Gamma(1-j-\alpha)}. \quad (1.25)$$

Es de anotar que el uso de las propiedades anteriores supone la existencia de todas las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville que intervienen en las mismas [8, 9].

En las tablas 1.1 y 1.2 se dan las derivadas fraccionales de orden real α de algunas funciones de la variable real t para $t > 0$. El orden de la derivada fraccional se asume como cualquier valor arbitrario a menos que se diga lo contrario. Las derivadas de la tabla 1.1 se han calculado para $a = -\infty$, mientras que en la tabla 1.2 se ha tomado $a = 0$. Para cada función se indican las restricciones sobre los valores de las constantes b , λ y ν [8].

Función $f(t)$	Derivada fraccional ${}_{-\infty}D_t^\alpha f(t), \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
$H(t - b)$	$\frac{(t-b)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t > b$
$H(t - b)$	$0, \quad t \leq b$
$H(t - b)f(t)$	${}_aD_t^\alpha f(t), \quad t > b$
$H(t - b)f(t)$	$0, \quad t \leq b$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda t}, \quad \lambda > 0$
$e^{\lambda t + \nu}$	$\lambda^\alpha e^{\lambda t + \nu}, \quad \lambda > 0$
$\sin(\lambda t)$	$\lambda^\alpha \sin(\lambda t + \pi\alpha/2), \quad \lambda > 0, \quad \alpha > -1$
$\cos(\lambda t)$	$\lambda^\alpha \cos(\lambda t + \pi\alpha/2), \quad \lambda > 0, \quad \alpha > -1$

Tabla 1.1: En esta tabla se usa la definición (1.18) para calcular la derivada de Riemann-Liouville con $a = -\infty$ y $\alpha > 0$. La función $H(t)$ es la función de Heaviside siendo $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $H(t) = 0$ para $t < 0$. Por otra parte, $E_{\alpha,\beta}(t)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos.

Función $f(t)$	Derivada fraccional ${}_0D_t^\alpha f(t), \quad t > 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
$H(t)$	$\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$
$H(t-b)$	$\frac{(t-b)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad t > b$
$H(t-b)$	$0, \quad 0 \leq t \leq b$
$H(t-b)f(t)$	${}_aD_t^\alpha f(t), \quad t > b$
$H(t-b)f(t)$	$0, \quad 0 \leq t \leq b$
$\delta(t)$	$\frac{t^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$
$\delta^{(n)}(t)$	$\frac{t^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-n-\alpha)}, \quad n \in \mathbb{N}$
$\delta^{(n)}(t-b)$	$\frac{(t-b)^{-\alpha-n-1}}{\Gamma(-n-\alpha)}, \quad t > b, \quad n \in \mathbb{N}$
$\delta^{(n)}(t-b)$	$0, \quad 0 \leq t \leq b, \quad n \in \mathbb{N}$
t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu+\alpha}, \quad \nu > -1$
$e^{\lambda t}$	$t^{-\alpha} E_{1,1-\alpha}(\lambda t)$
$\cosh(\sqrt{\lambda} t)$	$t^{-\alpha} E_{2,1-\alpha}(\lambda t^2)$
$\frac{\sinh(\sqrt{\lambda} t)}{\sqrt{\lambda} t}$	$t^{1-\alpha} E_{2,2-\alpha}(\lambda t^2)$
$t^{\beta-1} E_{\nu,\beta}(\lambda t^\nu)$	$t^{\beta-\alpha-1} E_{\nu,\beta-\alpha}(\lambda t^\nu), \quad \beta > 0, \quad \nu > 0$

Tabla 1.2: En esta tabla se usa la definición (1.18) para calcular la derivada de Riemann-Liouville de las funciones indicadas, con $a = 0$ y $\alpha > 0$. $H(t)$ es la función de Heaviside siendo $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $H(t) = 0$ para $t < 0$. Por otra parte, $\delta(t)$ es la función delta de Dirac donde $\delta(t) = \infty$ para $t = 0$ y 0 para $t \neq 0$ con la condición que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. A su vez $E_{\alpha,\beta}(t)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos.

Hacer un análisis detallado de la obtención de las tablas 1.1 y 1.2 puede ser bastante extenso, no obstante, dicho estudio se puede revisar en [8]. La obtención analítica de derivadas fraccionales de funciones diferentes a las que aparecen en las tablas 1.1 y 1.2 puede resultar difícil, es el caso de la derivada de Riemann-Liouville

de la función $t \sin(t)$. Un caso más complejo puede ser la derivada fraccional de la función de Mittag-Leffler generalizada. Esto obliga a utilizar métodos numéricos para obtener resultados como los que se presentan en las Figuras 1.4 y 1.5.

1.4.2. Derivada fraccional de Caputo

La derivada fraccional de Riemann-Liouville se ha desarrollado con una formulación para usos estrictamente matemáticos, sin embargo, existen ciertas áreas de las ciencias naturales y aplicadas en las cuales dicha definición requiere de una revisión [8]. No obstante, se han acumulado una serie de trabajos, especialmente en la teoría de viscoelasticidad [4, 19] y de sólidos mecánicos con memoria [20] donde las derivadas fraccionales son usadas para mejorar la descripción de las propiedades de los materiales estudiados. El modelamiento matemático conduce a ecuaciones diferenciales de orden fraccional y a la necesidad de formular las condiciones iniciales para tales ecuaciones que tengan una interpretación física conveniente. No obstante, la aproximación dada por la definición (1.18) conduce a unas condiciones iniciales que dependen del valor límite inferior $t = a$ y pese a que el problema de valores iniciales con tales condiciones iniciales ya se ha resuelto, dichas soluciones no tienen la respectiva interpretación física [8].

La propuesta de derivada fraccional de Caputo es [8, 9]:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad (1.26)$$

donde se usa los parámetros y restricciones establecidas en la definición de Riemann-Liouville, además n es un número entero que satisface la condición $n - 1 < \alpha < n$ y $f(x)$ cumple que sus derivadas n -ésima y de órdenes inferiores son continuas e integrables. Así, la expresión (1.26) está definida y es única en el intervalo (a, b) [9]. Por otra parte, la definición (1.26) se reduce a una derivada de orden entero n en el límite cuando $\alpha \rightarrow n$ [8], esto se demuestra al integrar por partes la ecuación (1.26) y

calcular el límite:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\alpha \rightarrow n} {}^C D_t^\alpha f(t) &= \lim_{\alpha \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\
 &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau \\
 &= f^{(n)}(t), \quad n = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

que es posible gracias a que el término $(t-\tau)^{n-\alpha}$ no converge cuando $t = \tau$ dado que $n > \alpha$. La ecuación (1.26) depende de la derivada n -ésima de una función $f(t)$ y si ésta función es constante, la derivada fraccional de Caputo es cero, tal como en el cálculo ordinario. La definición (1.26) también aplica para funciones de varias variables si se sustituye la derivada entera total por su respectiva derivada parcial.

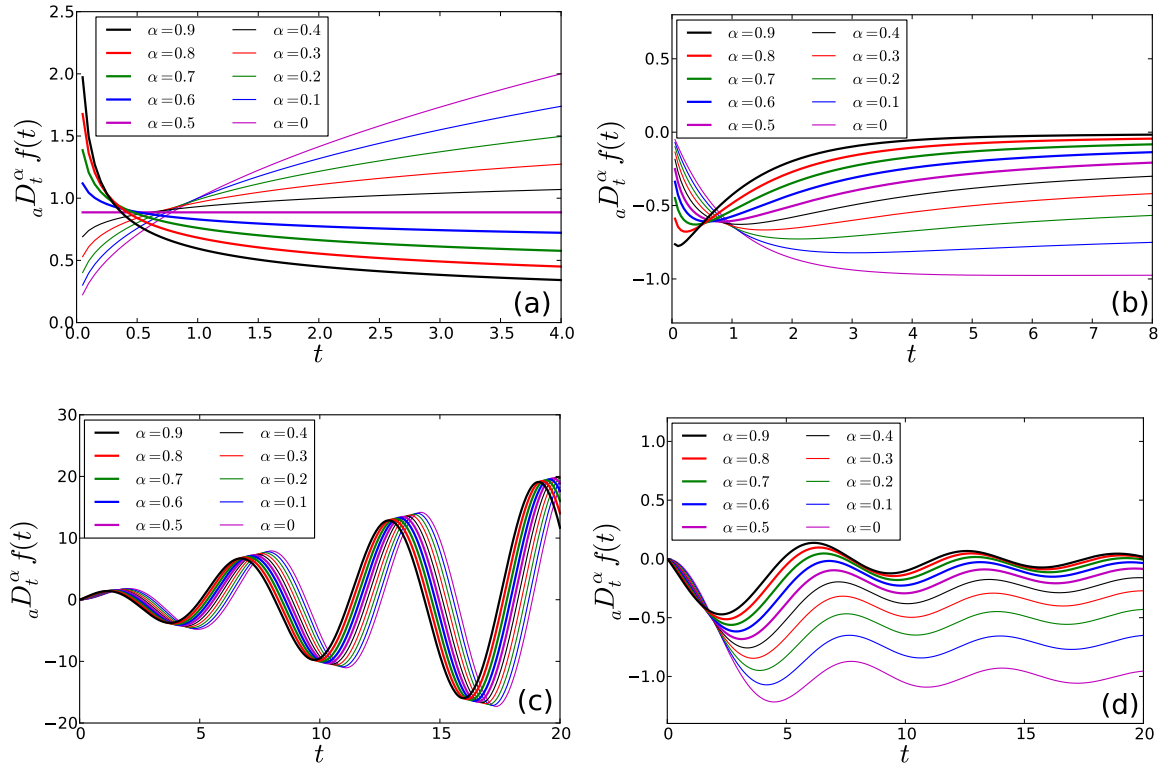


Figura 1.5: Gráficas de la derivada fraccional de Caputo (1.26) de ciertas funciones $f(t)$, con $a = 0$ y $0 \leq \alpha < 1$. (a) $f(t) = \sqrt{t}$. (b) $f(t) = e^{-t}$. (c) $f(t) = t \sin t$. (d) $f(t) = \sin t/t$. Fuente: Esta investigación.

En la Figura 1.5 se presenta la derivada de Caputo de algunas funciones y en la tabla 1.3 se resumen algunos ejemplos analíticos de derivada fraccional de Caputo. En [9] se estudia las funciones que aparecen en la tabla 1.3.

Función $f(t)$	Derivada fraccional ${}_0D_t^\alpha f(t)$	
t^ν	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-\alpha)} t^{\nu-\alpha},$	$\nu \in \mathbb{N}_0$ y $\nu \geq n$ ó $\nu \notin \mathbb{N}$ y $\nu > n-1$
t^ν	0,	$\nu \in \mathbb{N}_0$ y $\nu < n$
$(t+c)^\nu$	$\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1-n)} \frac{c^{\nu-n-1} t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} {}_2F_1^{(-)},$	$c, \nu \in \mathbb{R}$ y $c > 0$
$e^{\lambda t}$	$\lambda^n t^{n-\alpha} E_{1,n-\alpha+1}(\lambda t)$	
$\sin(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{m/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[-{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right],$	n par, $\nu \in \mathbb{R}$
$\sin(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{(m-1)/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right],$	n impar, $\nu \in \mathbb{R}$
$\cosh(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{m/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right],$	n par, $\nu \in \mathbb{R}$
$\cosh(\lambda t)$	$\frac{\lambda^n i(-1)^{(m-1)/2} t^{n-\alpha}}{2\Gamma(n-\alpha+1)} \left[-{}_1F_1^{(+)} + {}_1F_1^{(-)} \right],$	n impar, $\nu \in \mathbb{R}$

Tabla 1.3: En esta tabla se usa la definición (1.26) para calcular la derivada de Caputo con $a = 0$, $t > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $n-1 < \alpha < n$ y $n \in \mathbb{N}$. La función $H(t)$ es la función de Heaviside siendo $H(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $H(t) = 0$ para $t < 0$. Por otra parte, $\delta(t)$ es la función delta de Dirac donde $\delta(t) = \infty$ para $t = 0$ y 0 para $t \neq 0$ con la condición que $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$. A su vez $E_{\alpha,\beta}(t)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos. También ${}_1F_1^{(+)} = {}_1F_1(1; n-\alpha+1; i\lambda t)$, ${}_1F_1^{(-)} = {}_1F_1(1; n-\alpha+1; -i\lambda t)$ y ${}_2F_1^{(-)} = {}_2F_1(1, n-\nu; n-\alpha+1; -x/c)$ son las funciones hipergeométricas definidas en la sección 1.3.3.

Una propiedad que se usa en los desarrollos del Capítulo 4 es:

- Para $m = 1, 2, 3, \dots$ y $n - 1 < \alpha < n$ se cumple:

$${}_a^C D_t^\alpha D^m f(t) = D^m {}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (1.28)$$

donde D^m es la derivada de orden entero m y $f^{(s)}(0) = 0$ para $s = n, n + 1, n + 2, \dots, m$. Por tanto la derivada fraccional de Caputo no tiene restricciones para $f^{(n)}(0)$ cuando $s = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Con lo anterior se completa el resumen de las definiciones de derivadas fraccionales con más aplicaciones, no obstante, existen otras definiciones tales como la planteada por Hermann Weyl [2], la de Matthieu Paul Hermann Laurent [3], y la de Grünwald-Letnikov [8].

Para finalizar se hace necesario establecer cuál es la relación entre la derivada fraccional de Riemann-Liouville y la definición de Caputo, relación que es dada por la siguiente expresión [8, 21]:

$${}_a D_t^\alpha f(t) = {}_a^C D_t^\alpha f(t) + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{\Gamma(1+j-\alpha)} (t-a)^{j-\alpha}, \quad (1.29)$$

que se da cuando se cumplen las condiciones adecuadas para f establecidas en las diferentes definiciones de derivada fraccional planteadas. Así, para funciones derivables hasta orden $n - 1$ en a y para las que exista ${}_a D_t^\alpha f(t)$ se puede establecer una nueva definición de derivada de Caputo [8, 21]:

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a D_t^\alpha \left[f(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(a)}{j!} (t-a)^j \right], \quad (1.30)$$

donde se observa que las definiciones de Caputo y de Riemann-Liouville difieren por la derivada fraccional de una serie. Además, la ecuación (1.29) explica la razón por la cual las gráficas de las derivadas fraccionales de las funciones $f(t) = \sqrt{t}$ y $f(t) = t \sin t$ en las Figuras 1.4 y 1.5 coinciden, ya que la suma en la ecuación (1.29) se hace cero dejando idénticas las definiciones de Riemann-Liouville y de Caputo. Esto no sucede cuando se usa las funciones $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = \sin t/t$.

1.5. Transformada de Laplace

Un método para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias es el uso de transformadas integrales, así también es útil para resolver ecuaciones diferenciales fraccionales. La transformada integral de una función $v(x)$ es otra función $u(x)$ dada por $u(x) = \int_a^b K(x, t)v(t)dt$, donde (a, b) es un intervalo conveniente, y $k(x, y)$ es llamado el núcleo o kernel de la transformada integral. Existen gran variedad de núcleos apropiados para ecuaciones diferenciales específicas y en física se usan principalmente las transformadas de Fourier y de Laplace [18]. La transformada de Laplace se define mediante la ecuación:

$$\tilde{g}(s) = \mathcal{L}[g(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt, \quad (1.31)$$

la cual es usada en la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales de una manera similar a como se usa en el cálculo ordinario [10]. La respectiva transformada de Laplace inversa es $f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} F(s) ds$, donde la integración se realiza a lo largo de la línea vertical $Re(s) = \gamma$ en el plano complejo tal que γ es mayor que la parte real de todas las singularidades de $F(s)$ [8]. Es de utilidad recordar la transformada de Laplace de la derivada de orden entero n de una función $f(t)$:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \quad (1.32)$$

que puede deducirse a partir de la definición (1.31) integrando por partes bajo la suposición que dichas integrales existen.

También es común en algunos campos la aparición de una operación llamada convolución. La convolución de dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ está definida por $f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$, la cual si $f(t)$ y $g(t)$ son iguales a cero para $t < 0$ se reduce a $f(t) * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau)d\tau$. Se cumple que la transformada de Laplace de una convolución es [8]:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(s)G(s), \quad (1.33)$$

donde $F(s)$ y $G(s)$ son las transformadas de Laplace de $f(t)$ y $g(t)$, respectivamente. Además, es necesario considerar la transformada de Laplace de la función $f(t) = t^\nu$ que aparece con frecuencia [8]:

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \int_0^\infty e^{-st} t^\nu dt = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int_0^\infty e^{-t'} t'^\nu dt' = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}, \quad (1.34)$$

donde se ha hecho la sustitución $t' = st$ y se ha utilizado la ecuación (1.7). La función (1.34) se usa a menudo para encontrar algunas transformadas de Laplace.

1.5.1. Transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler

La función exponencial se suele expresar como una serie de Taylor $e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$ y como una generalización de este resultado surge la función de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}$, de este modo también se calcula la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler utilizando la transformada de Laplace de la función exponencial. Para tal propósito se parte de la integral $\int_0^\infty e^{-t} e^{\pm zt} dt = \frac{1}{1 \mp z}$ ($|z| < 1$) que al derivar k veces respecto a z se obtiene $\int_0^\infty e^{-t} t^k e^{\pm zt} dt = \frac{ak!}{(1 \mp z)^{k+1}}$ ($|z| < 1$), siendo $a = 1$ para $-z$ y $a = (-1)^k$ para $+z$. Lo que permite establecer, con las condiciones adecuadas, que $\int_0^\infty e^{-st} t^k e^{\pm at} dt = \frac{k!}{(s \mp a)^{k+1}}$ ($\text{Re}(s) > |a|$) [8]. Bajo este formalismo se obtiene la transformada de Laplace de la función de Mittag-Leffler con peso $t^{\beta-1}$ [8, 17]:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(-\rho t^\alpha)] = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha + \rho}, \quad \text{Re}(s) > |\rho|^{1/\alpha}, \quad \rho > 0, \quad (1.35)$$

y la transformada de Laplace de la derivada k -ésima de la función de Mittag-Leffler con peso $t^{\alpha k + \beta - 1}$ [8, 17]:

$$\mathcal{L}[t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha,\beta}^{(k)}(\pm \rho t^\alpha)] = \frac{k! s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha \mp \rho}, \quad \text{Re}(s) > |\rho|^{1/\alpha}, \quad \rho > 0, \quad (1.36)$$

donde $E_{\alpha,\beta}^{(k)}(z) = \frac{d^k}{dz^k} E_{\alpha,\beta}(z)$. Así también se demuestra la siguiente propiedad:

$$\mathcal{L}[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}^\gamma(at^\alpha)] = s^{-\beta} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\gamma+n)}{s^n} \Gamma(\gamma) \left(\frac{a}{s}\right)^n \quad (1.37)$$

con $\alpha, \beta > 0$ y $0 < \gamma \leq 1$. Se destacan las expresiones (1.35), (1.36) y (1.37) ya que son útiles a la hora de resolver ecuaciones diferenciales fraccionales.

1.5.2. Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann-Liouville

Al observar la ecuación (1.19) se puede concluir que para $a = 0$ dicha expresión se reduce a una convolución de las funciones $t^{\alpha-1}$ y $f(t)$ multiplicada por una constante, de tal manera que la transformada de Laplace de la integral fraccional de Riemann-Liouville por ser de la forma (1.33) se reduce a:

$$\mathcal{L}({}_a I_t^\alpha f(t)) = s^{-\alpha} F(s), \quad (1.38)$$

donde se tiene en cuenta la relación (1.34) y $F(s)$ es la transformada de Laplace de la función $f(t)$. Por otra parte, la ecuación (1.18) es la derivada n -ésima de una integral fraccional de orden $n - \alpha$, así que se puede utilizar la propiedad (1.32) para aplicarla en la ecuación (1.18):

$$\mathcal{L}[{}_0 D_t^\alpha f(t)] = s^n \mathcal{L}[{}_0 D_t^{-(n-\alpha)} f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} s^k \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} {}_0 D_t^{-(n-\alpha)} f(t)|_{t=0}, \quad (1.39)$$

por tanto, de acuerdo a las propiedades (1.23) y (1.38) la transformada de Laplace de la derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $\alpha > 0$ con $a = 0$ es [8]:

$$\mathcal{L}[{}_0 D_t^\alpha f(t)] = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [{}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (1.40)$$

La aplicabilidad de la ecuación (1.40) se ve reducida por la ausencia de interpretación física para los valores de la derivada fraccional en el límite inferior $t = 0$. Por otra parte, si se considera la derivada fraccional de una constante c mediante la definición (1.18):

$${}_a D_t^\alpha c = \frac{-c}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{n-\alpha} = \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}, \quad (1.41)$$

no es cero como en el caso de derivadas de orden entero, lo cual se combina con el resultado (1.40) generando dificultad en la comprensión de las posibles aplicaciones.

1.5.3. Transformada de Laplace de la derivada fraccional de Caputo

Por su parte la ecuación (1.5) para $a = 0$ es una convolución de las funciones $\frac{t^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)}$ y $f^{(n)}(t)$, así que la transformada de Laplace de la derivada fraccional de Caputo con $a = 0$ es [8]:

$$\mathcal{L}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]}{s^{n-\alpha}} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha < n, \quad (1.42)$$

donde se han usado las propiedades (1.32) y (1.34). Puesto que la fórmula (1.42) está relacionada directamente con la función $f(t)$ y sus derivadas evaluadas en el límite inferior $t = 0$, la derivada de Caputo resulta en un formalismo más apropiado para definir problemas con condiciones de frontera no nulas.

De esta manera, en este capítulo se realizó una breve reseña histórica del cálculo fraccional desde sus inicios hasta definiciones más recientes que surgen en aplicaciones. Luego se definen la función gamma y la función de Mittag-Leffler que aparecen con frecuencia. A partir de estas funciones se definen las derivadas fraccionales de Riemann-Liouville y de Caputo, la primera debido a que se usa en los capítulos 2 y 3 y la segunda se utiliza en el capítulo 4. Finalmente se establece la transformada de Laplace de las principales funciones presentadas ya que el método de la transformada de Laplace se usa en la solución de las ecuaciones diferenciales fraccionales que aparecen en los capítulos 2, 3 y 4.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionales

En este capítulo se estudian ecuaciones diferenciales lineales que contienen derivadas fraccionales. Por medio de la transformada de Laplace se obtienen analíticamente soluciones a ecuaciones con coeficientes constantes. Este tipo de ecuaciones son de utilidad en el estudio de sistemas viscoelásticos, en particular, el oscilador fraccional descrito por una derivada de Riemann-Liouville temporal y estudiada en detalle en este capítulo. También se discute la difusión fraccional, en este caso, las derivadas fraccionales se introducen con el fin de estudiar los vuelos de Lévy que son un fenómeno espacialmente no local que generaliza al movimiento Browniano. La revisión teórica presentada en este capítulo permite establecer algunas de las características de las derivadas fraccionales y su uso en la descripción de sistemas físicos.

2.1. Introducción

Pese a que el cálculo fraccional es una rama de las matemáticas que se viene desarrollando desde principios del siglo XIX sólo hasta el siglo XX adquiere importancia práctica y se han reportado aplicaciones en áreas científicas diversas fundados en que ciertos datos experimentales son modelados de forma más adecuada usando ecuaciones diferenciales fraccionales [8]. Es así como se propone que medios que cumplen esta característica sean llamados sistemas dinámicos fraccionales. En viscoelasticidad el cálculo fraccional tiene bastantes aplicaciones ya que para muchos casos permite una mejor descripción que los modelos tradicionales basados en ecua-

ciones diferenciales de orden entero [1, 4, 8, 19]. Por otra parte, con el estudio de técnicas experimentales cada vez más precisas [22, 23] surgen nuevos resultados en áreas como biología y medicina que también sugieren el uso del cálculo fraccional [6, 24, 25], así como también en el estudio de materiales inorgánicos [7, 16] y en campos como la óptica [26]. Además desde el punto de vista teórico se proponen aplicaciones para la generalización fraccionaria en áreas como mecánica cuántica, difusión y ondas [14, 21].

A partir de la propuesta de ecuaciones diferenciales fraccionales, que son aquellas en las que aparecen derivadas fraccionales, se encuentran soluciones que describen algunos resultados experimentales en las áreas mencionadas anteriormente. En base a esto, en este capítulo se describe uno de los métodos para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales propuesto en [8] y se hace una revisión del problema del oscilador fraccional estudiado en [27], que además es de utilidad en el desarrollo del capítulo 3. Finalmente se analiza algunos aspectos de la difusión fraccional donde se estudia una ecuación diferencial en derivadas parciales con derivadas fraccionales espaciales y se introduce el concepto de Laplaciano fraccional [5, 13, 28].

2.2. Ecuaciones diferenciales

En este apartado se revisa un caso especial de ecuaciones diferenciales fraccionales por su relación con los problemas desarrollados en el capítulo 3. Dichas ecuaciones son casos particulares del problema de valores iniciales representado por una ecuación diferencial fraccional lineal con coeficientes constantes cuya expresión utilizando derivadas fraccionales de Riemann-Liouville es [8]:

$${}_0\mathcal{L}_t y(t) \equiv {}_0D_t^{\sigma_n} y(t) + \sum_{j=1}^{n-1} p_j(t) {}_0D_t^{\sigma_{n-j}} y(t) + p_n(t) y(t) = f(t), \quad (0 < t < T < \infty), \quad (2.1)$$

donde las condiciones iniciales son $\left[{}_0D_t^{\sigma_{k-1}} y(t) \right]_{t=0} = b_k$ con $k = 1, 2, \dots, n$. Por brevedad se suelen escoger valores de α_j tales que $0 < \alpha_j \leq 1$ para $j = 1, 2, \dots, n$, de tal manera

que $\sigma_k = \sum_{j=1}^k \alpha_j$, ($k = 1, 2, \dots, n$) y por ende ${}_0D_t^{\sigma_k} \equiv {}_0D_t^{\alpha_k} {}_0D_t^{\alpha_{k-1}} \dots {}_0D_t^{\alpha_1}$. También se considera que $\int_0^T |f(t)|dt < \infty$. La existencia y unicidad de la solución de la ecuación (2.1) se estudia en [8], así como también se obtiene dicha solución por el método de la función de Green [10, 11, 18].

2.2.1. Solución de problemas de valores iniciales

La ecuación (2.1) se resuelve utilizando una función auxiliar $G(t, \tau) = G(t - \tau)$ conocida como función de Green, la cual cumple que ${}_0\mathcal{L}_t G(t, \tau) = 0$ para cada $\tau \in (0, t)$, además $\lim_{\tau \rightarrow t-0} ({}_0D_t^{\sigma_k-1} G(t, \tau)) = \delta_{k,n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, ($\delta_{k,n}$ es la delta de Kronecker) y $\lim_{\tau \rightarrow t+0} ({}_0D_t^{\sigma_k} G(t, \tau)) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Dicha solución está dada por [8]:

$$y(t) = \sum_{k=1}^n b_k \Psi_k(t) + \int_0^t G(t - \tau) f(\tau) d\tau, \quad (2.2)$$

donde las condiciones iniciales están dadas por $b_k = \left[{}_0D_t^{\sigma_k-1} y(t) \right]_{t=0}$, siendo $\Psi_k(t) = {}_0D_t^{\sigma_n-\sigma_k} G(t)$ y ${}_0D_t^{\sigma_n-\sigma_k} \equiv {}_aD_t^{\alpha_n} {}_aD_t^{\alpha_{n-1}} \dots {}_aD_t^{\alpha_{k+1}}$ para $0 < \alpha_i \leq 1$ [8, 11]. Es preciso notar que bajo condiciones iniciales homogéneas, que exigen que $b_k = 0$, la solución de la ecuación diferencial fraccional (2.1) es dada por:

$$y(t) = \int_0^t G(t, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Pese a que no es el caso más general, en adelante se estudia la ecuación (2.3) dado que permite el análisis de algunas características de interés acerca del comportamiento global de la ecuación (2.1).

2.2.2. Ecuación diferencial lineal fraccional de un término

A partir de la ecuación (2.1) se obtienen diferentes casos particulares y en primera medida es conveniente estudiar la ecuación diferencial lineal fraccional de un sólo término con coeficiente constante real a , definida por la expresión [8]:

$${}_aD_t^\alpha y(t) = f(t). \quad (2.4)$$

Si se calcula la transformada de Laplace a la ecuación (2.4), considerando la ecuación (1.40) y teniendo en cuenta el caso en que las condiciones iniciales son homogéneas, se obtiene que $as^\alpha Y(s) = F(s)$, donde $Y(s)$ y $F(s)$ denotan a las transformadas de Laplace de $y(t)$ y $f(t)$. A su vez la transformada de Laplace de la ecuación (2.3) por ser una convolución (1.33) es:

$$Y(s) = g_1(s)F(s), \quad (2.5)$$

de tal manera que la transformada de Laplace de la función de Green $G_1(t)$ para la ecuación (2.4) es:

$$g_1(s) = 1/(as^\alpha), \quad (2.6)$$

y haciendo uso de (1.34) para obtener la transformada de Laplace inversa, se encuentra para la función de Green $G_1(t)$ [8]:

$$G_1(t) = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \quad (2.7)$$

por tanto, la solución de la ecuación (2.4) es de la forma [8]:

$$y(t) = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}} d\tau, \quad n-1 \leq \alpha < n. \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta el resultado (2.8), es posible suponer que la ecuación (2.4) describe cierto fenómeno físico, siendo $f(t)$ la fuente dependiente del tiempo de ese fenómeno. En la Figura 2.1 se grafica la solución $y(t)$ para diferentes fuentes $f(t)$. Además, se consideran diferentes valores del orden de la derivada comprendidos en el intervalo $1 \leq \alpha < 2$ y así se nota el efecto que tiene el orden de la derivada sobre los resultados. Se observa que aparecen una serie de curvas nuevas en relación con el caso ordinario. Los fenómenos descritos pueden ser de carácter no local si t es el tiempo y aparecen en el estudio de materiales con características de memoria. Por otra parte, si t es una variable espacial la descripción del fenómeno requiere información global de dicha variable.

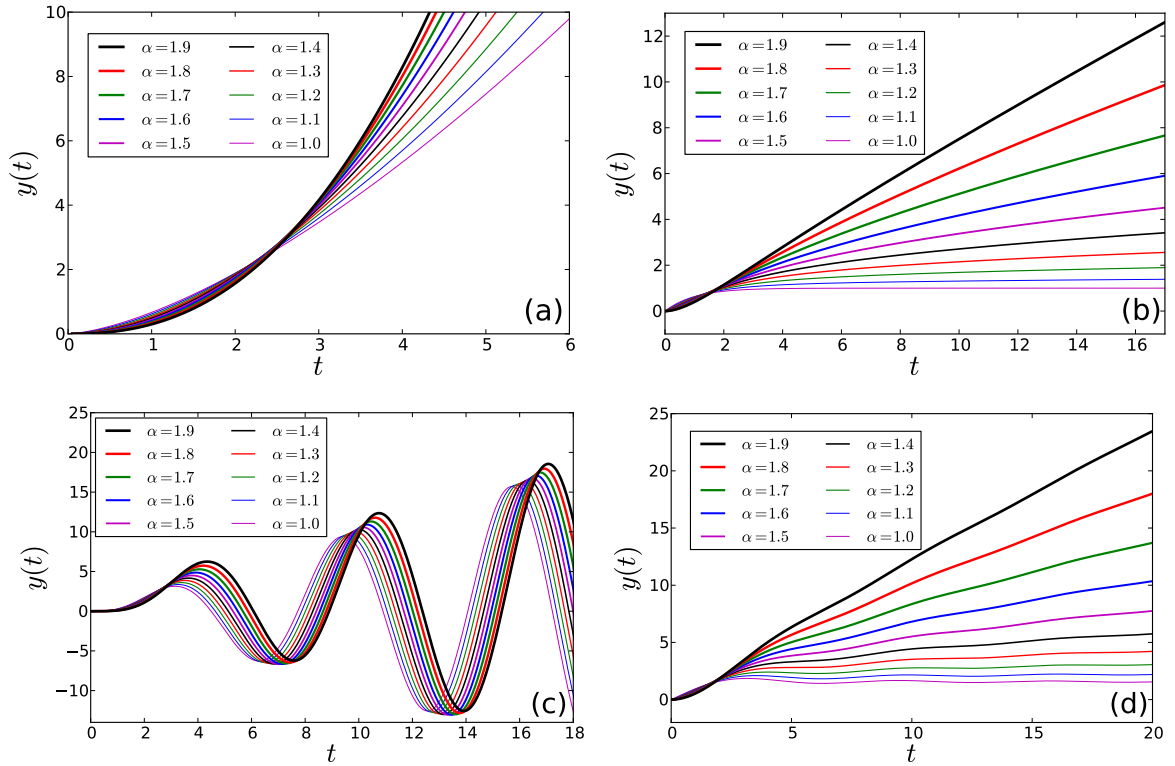


Figura 2.1: Solución de la ecuación diferencial fraccional (2.4) para valores de α comprendidos en el intervalo $1 \leq \alpha < 2$ y con el parámetro $a = 1$. Se presenta las soluciones $y(t)$ para diferentes funciones fuente que ya fueron empleadas en la Sección 1.4: (a) $f(t) = \sqrt{t}$. (b) $f(t) = e^{-t}$. (c) $f(t) = t \sin t$. (d) $f(t) = \sin t/t$. Fuente: Esta investigación.

2.2.3. Ecuación diferencial lineal fraccional de dos términos

La ecuación diferencial de orden fraccional de dos términos con coeficientes constantes reales a, b es [8]:

$${}_0D_t^\alpha y(t) + b y(t) = f(t). \quad (2.9)$$

En este caso la transformada de Laplace de la ecuación (2.9) bajo condiciones iniciales homogéneas es $a s^\alpha Y(s) + b Y(s) = F(s)$ y recordando que $Y(s) = g_2(s)F(s)$ se obtiene la expresión:

$$g_2(s) = \frac{1}{as^\alpha + b} = \frac{1}{a} \frac{1}{s^\alpha + \frac{b}{a}}, \quad (2.10)$$

donde $g_2(s)$ es la transformada de Laplace de la función de Green de la ecuación diferencial fraccional lineal de dos términos. Por último, haciendo uso de la ecuación (1.35) con $\alpha = \beta$, se calcula la transformada de Laplace inversa de la ecuación (2.10) para obtener la función de Green $G_2(t)$ [8]:

$$G_2(t) = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right), \quad (2.11)$$

donde $E_{\alpha,\beta}(z)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos. Para $b = 0$ en la ecuación (2.10) el resultado conduce a la función de Green $G_1(t)$ en el dominio del tiempo obtenida para la ecuación de un término. Finalmente reemplazando la ecuación (2.11) en la ecuación (2.3), que resulta bajo condiciones iniciales homogéneas, se obtiene la solución de la ecuación diferencial (2.9) y se grafica en la Figura 2.2 para diferentes funciones fuente y órdenes de derivada fraccional que varían en el

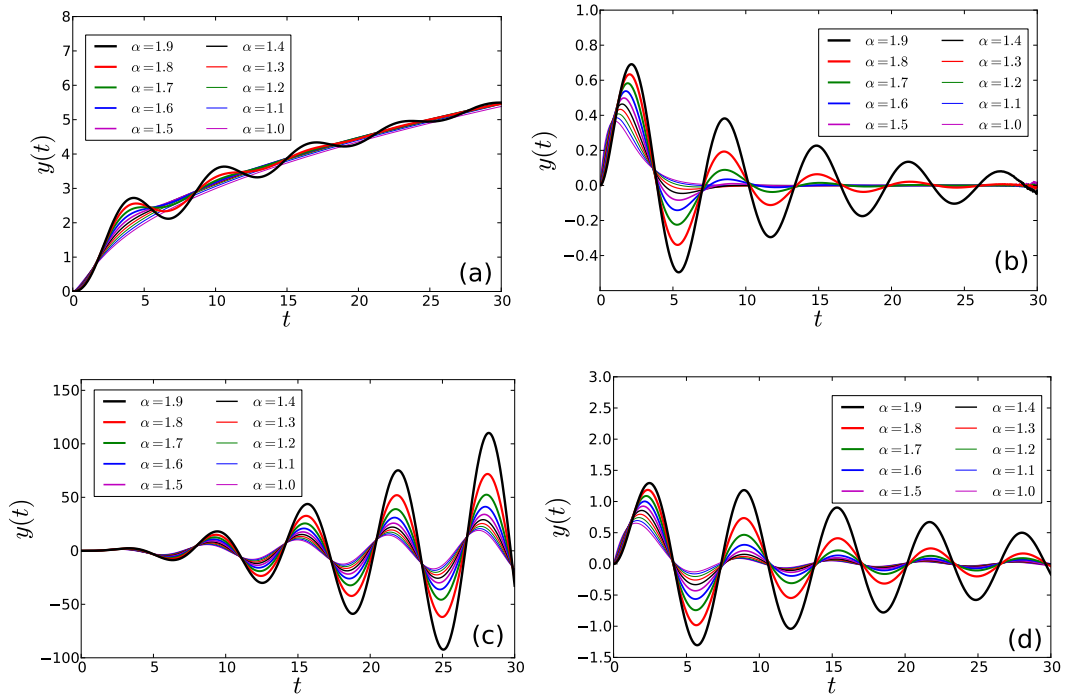


Figura 2.2: Solución de la ecuación diferencial fraccional (2.9) para valores de α entre $1 \leq \alpha < 2$ y de parámetros $a, b = 1$. Se obtiene $y(t)$ para diferentes funciones fuente: (a) $f(t) = \sqrt{t}$. (b) $f(t) = e^{-t}$. (c) $f(t) = t \sin t$. (d) $f(t) = \sin t / t$. Fuente: Esta investigación.

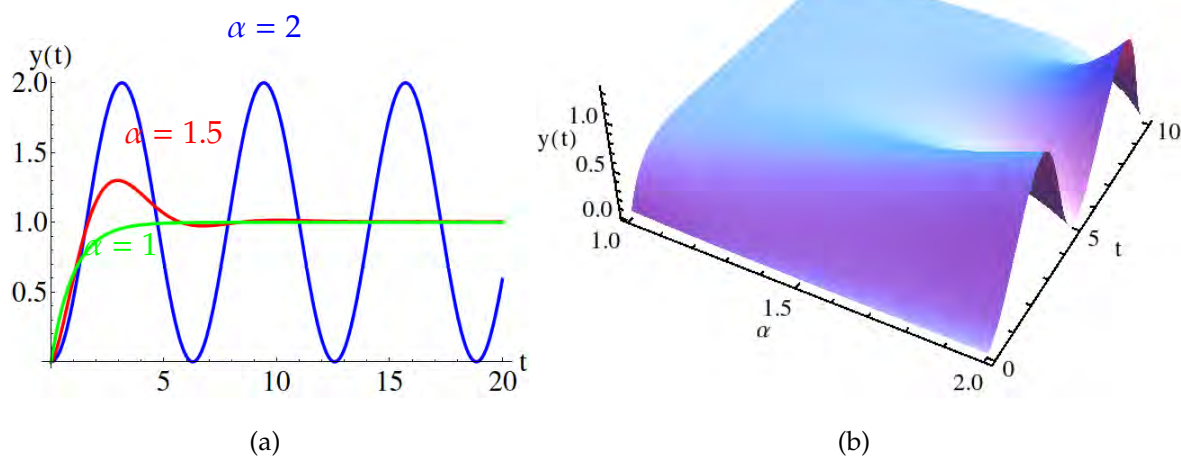


Figura 2.3: Solución de la ecuación diferencial lineal fraccional de dos términos (2.2) con fuente dada por la función de Heaviside $f(t) = H(t)$, de parámetros $a, b = 1$. (a) Familia de curvas que se obtiene utilizando la ecuación (2.3) para $\alpha = 1, \alpha = 1.5$ y $\alpha = 2$. (b) Solución numérica de la ecuación diferencial lineal fraccional de dos términos (2.2). Se observa concordancia entre los dos métodos. Fuente: Esta investigación.

intervalo $1 \leq \alpha < 2$.

Dentro de las aplicaciones del cálculo fraccional suelen aparecer funciones especiales tales como la función de Heaviside para modelar una fuente que se enciende en el tiempo $t = 0$, de tal manera que en la Figura 2.3 se considera una fuente de este tipo y se grafica el resultado de la solución de la ecuación de dos términos para diferentes valores de α . Por otra parte, encontrar soluciones analíticas en ocasiones necesita bastante tiempo por la complejidad de las funciones implicadas, por tanto también se recurre al uso de métodos numéricos con una buena aproximación como lo es en este caso un algoritmo basado en la definición de derivada fraccional de Grünwald-Letnikov utilizado en [8]. La gráfica 2.3(a) es una familia de curvas que se obtiene utilizando la ecuación (2.3) para $\alpha = 1, \alpha = 1.5$ y $\alpha = 2$, mientras que la gráfica 2.3(b) se obtiene utilizando el método numérico descrito en [8]. Una particularidad

de la Figura 2.3, de utilidad para la sección 2.3 es que para valores de α cercanos a 2 el comportamiento del fenómeno estudiado es oscilatorio, mientras que para valores de α cercanos a 1 dicho comportamiento es amortiguado.

2.2.4. Ecuación diferencial lineal fraccional de tres términos

Para finalizar se analiza la ecuación diferencial lineal de orden fraccional de tres términos con coeficientes constantes reales a, b, c [8]:

$${}_0D_t^\beta y(t) + b {}_0D_t^\alpha y(t) + c y(t) = f(t), \quad (2.12)$$

donde, como antes, las derivadas pueden ser enteras o de orden fraccional real α, β . En este caso, al realizar la transformada de Laplace de la ecuación (2.12) y comparando con la transformada de Laplace de la ecuación (2.3) se obtiene que $g_3(s) = (as^\beta + bs^\alpha + c)^{-1}$. Para usar las herramientas citadas se define $u = cs^{-\alpha}/(as^{\beta-\alpha} + b)$ siendo $\beta > \alpha$, con lo que $g_3(s) = \frac{1}{c} \frac{u}{1+u}$, que expandiendo en serie de Taylor [18] es $g_3(u) = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k u^{k+1}$ y reescribiendo en términos de s resulta:

$$g_3(s) = \frac{1}{c} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{c}{a}\right)^{k+1} \frac{s^{-\alpha(k+1)}}{\left(s^{\beta-\alpha} + \frac{b}{a}\right)^{k+1}}, \quad (2.13)$$

finalmente al recordar la ecuación (1.36) se obtiene la función de Green para la ecuación (2.12) [8]:

$$G_3(t) = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{c}{a}\right)^k t^{\beta(k+1)-1} E_{\beta-\alpha, \beta+\alpha k}^{(k)} \left(-\frac{b}{a} t^{\beta-\alpha}\right), \quad (2.14)$$

donde $E_{\lambda, \mu}(z)$ es la función de Mittag-Leffler de dos parámetros, y

$$E_{\lambda, \mu}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\lambda, \mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)! y^j}{j! \Gamma(\lambda j + \lambda k + \mu)}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.15)$$

aquí se exige que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ dado que estos casos pueden ser tratados de la misma manera que se resuelve la ecuación de dos términos.

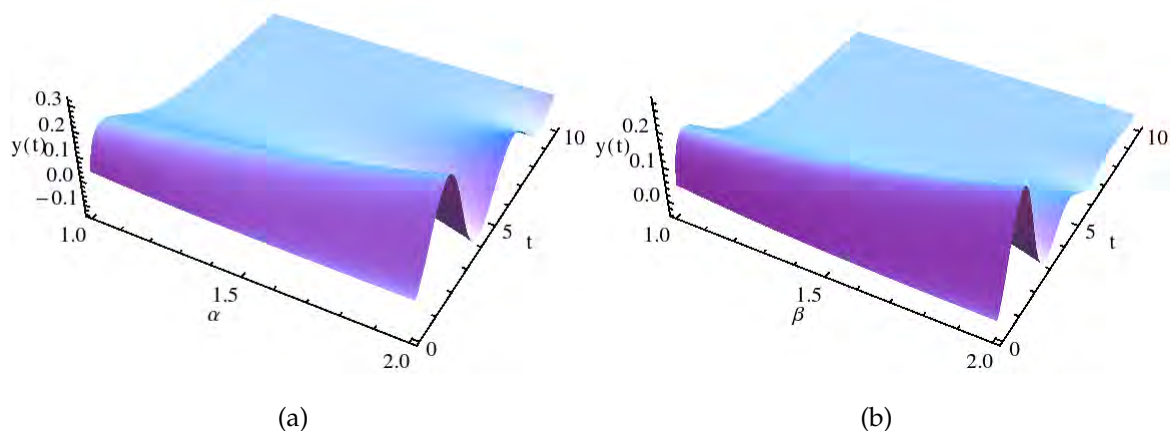


Figura 2.4: Solución numérica de la ecuación diferencial lineal fraccional de tres términos (2.12) con fuente armónica. La fuente es $f(t) = e^{-t}$, los parámetros $a = 0.8$, $b = 1.3$ y $c = 1.8$. (a) Solución cuando $\beta = 0.5$ y α varía entre 1 y 2. (b) Solución cuando $\alpha = 0.5$ y β varía entre 1 y 2. Se observa que aparecen regiones de periodicidad que dependen de los valores de α y β . Fuente: Esta investigación.

En la Figura 2.4 se grafica la solución numérica de la ecuación (2.12) con fuente $f(t) = e^{-t}$ y haciendo variar α entre 1 y 2. Las herramientas presentadas en esta sección son de utilidad en el estudio de sistemas como el oscilador fraccional y la ecuación de difusión fraccional estudiadas en los apartados 2.3 y 2.4, así como también se utilizan mecanismos comunes en los diferentes métodos de solución de ecuaciones diferenciales fraccionales que surgen en el desarrollo de este trabajo.

2.3. Oscilador fraccional

Como un ejemplo de posibles aplicaciones físicas al uso de derivadas fraccionales, en [27] y [29] se estudia un sistema físico llamado oscilador fraccional ya que sustituye las derivadas ordinarias en el oscilador clásico por derivadas fraccionales. En [27] se muestra que la presencia de una derivada fraccional en la ecuación del oscilador es cualitativamente equivalente a la presencia de un término disipativo. Surge entonces

el interés por encontrar otras aplicaciones del oscilador fraccional y se encuentra que para explicar cómo responde un medio viscoelástico ante un campo eléctrico variable a frecuencias relativamente altas en comparación con el tiempo de relajación se propone el uso del oscilador fraccional [4, 19, 30]. En vista de esto se plantea un nuevo modelo basado en un oscilador fraccional para describir algún tipo de respuesta de determinado material, el cual se denomina material fraccional. Dicho problema cumple las siguientes condiciones [31]:

- Cada átomo del material en ausencia de un campo eléctrico aplicado está formado por esferas concéntricas de cargas eléctricas positiva y negativa respectivamente. La esfera positiva representa el núcleo masivo, mientras que la esfera negativa representa la nube de electrones.
- Al exponer el sistema a un campo eléctrico variable, la carga positiva permanece estacionaria y la carga negativa se mueve respecto a la positiva desplazándose una distancia x . De esta manera, se forma un dipolo eléctrico que varía en el tiempo como un oscilador fraccional.
- No se considera específicamente las fuerzas presentes como la fuerza de fricción y la fuerza elástica, tal como se hace en otras situaciones, a través de las leyes de Newton, ya que la interpretación fraccional de ellas es aún un campo de estudio. Se asume que las cantidades que determinan dichas fuerzas están implícitas en los respectivos parámetros de la ecuación diferencial fraccional que le corresponde [8].
- Dado que hasta el momento no se tiene una interpretación física para la proposición de condiciones iniciales en derivadas fraccionales del tipo Riemann-Liouville, para el ejemplo planteado se considera que dichas condiciones son nulas, lo cual quiere decir que el sistema estaba completamente en reposo en el momento en que se activa el campo eléctrico externo [8].
- La respuesta del material se mide cuando el sistema alcanza el equilibrio luego de quitar el campo eléctrico.

Bajo las condiciones planteadas, como una primera aproximación, se considera una ecuación diferencial dada de la siguiente manera [27]:

$$\nu_0^{2-\alpha} {}_0D_t^\alpha x(t) + \nu_0^\alpha x(t) = \frac{f_0}{m} g(t). \quad (2.16)$$

La fuerza externa es determinada por el campo eléctrico aplicado al material y tiene una amplitud $f_0 = QE_0$. En la ecuación (2.16) ${}_0D_t^\alpha$ es el operador derivada fraccional de Riemann-Liouville de orden $1 \leq \alpha < 2$. Además $x(t)$ es una función desconocida que en el caso más simple puede ser considerada como el desplazamiento desde la posición de equilibrio, t es la variable de tiempo y ν_0 es la frecuencia propia de vibración. Es necesario incluir el término $\nu_0^{\alpha-2}$ para corregir las discrepancias en las unidades. La función $g(t)$ es la función fuente. Se puede tomar como condición inicial $g(t) = \nu_0 \delta(t)$ donde $\delta(t)$ es la función delta de Dirac. Esta función fuente representa el pulso inicial de la fuerza aplicada al oscilador y f_0 es la amplitud del pulso [27]. Reorganizando (2.16) y reemplazando $g(t)$ por $\nu_0 \delta(t)$ resulta:

$${}_0D_t^\alpha x(t) + \nu_0^\alpha x(t) = \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-2} \nu_0 \delta(t). \quad (2.17)$$

La solución de la ecuación (2.17) fue estudiada previamente para condiciones iniciales homogéneas y está dada por la ecuación (2.3) y la función de Green (2.11). La función de Green relacionada es de la forma:

$$G(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\nu_0^\alpha t^\alpha), \quad (2.18)$$

donde $E_{\alpha,\beta}(z)$ es la función de Mittag-Leffler de dos términos (1.12). Por lo tanto el resultado que se obtiene es el siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-\nu_0^\alpha \tau^\alpha] \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-2} \nu_0 \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-1} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu_0^\alpha)^n (t-\tau)^{\alpha n}}{\Gamma[\alpha(n+1)]} \delta(\tau) d\tau \\ &= \frac{QE_0}{m} \nu_0^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\nu_0^\alpha)^n}{\Gamma[\alpha(n+1)]} t^{\alpha(n+1)-1}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

y por medio de la definición de la función de Mittag-Leffler de dos términos (1.12) se obtiene:

$$x(t) = \frac{QE_0}{m} (\nu_0 t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[-(\nu_0 t)^\alpha]. \quad (2.20)$$

La razón de encontrar el resultado (2.20) es que se usa en el capítulo 3 para demostrar que describe uno de los resultados experimentales de la respuesta de un material viscoelástico, evidenciando que el oscilador fraccional puede ser utilizado en la descripción de fenómenos físicos reales. La Figura 2.5 contiene la gráfica de (2.20) para diferentes valores de α y se observa que es similar a la Figura 2.2(b) ya que la función de Mittag-Leffler es una generalización de la función exponencial. Al calcular $x(t)$ con fuentes diferentes a $\nu_0 \delta(t)$ se obtienen resultados como los que aparecen en la Figura 2.2.

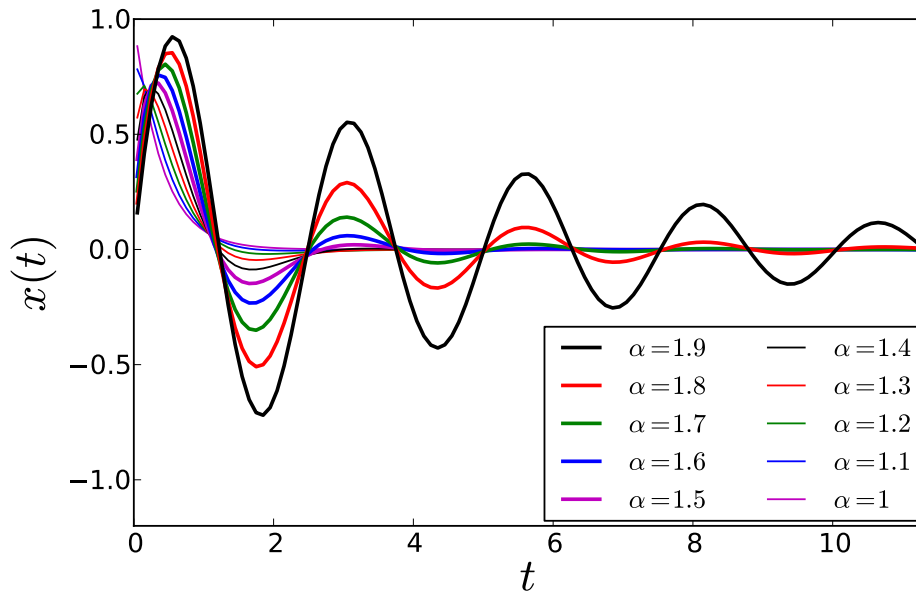


Figura 2.5: Gráfica de la solución de la ecuación (2.17) $x(t)$ correspondiente al oscilador fraccional que representa un oscilador eléctrico fraccional con parámetros $\nu_0 = 1$, $\frac{QE_0}{m} = 1$ y $g(t) = \nu_0 \delta(t)$. Fuente: Esta investigación.

2.4. Difusión fraccional

En lo anterior se han utilizado las derivadas fraccionales como derivadas temporales, sin embargo, el cálculo fraccional también puede estar asociado a fenómenos espaciales. En esta sección se presenta una breve deducción de la ecuación de difusión normal y su generalización al caso fraccional. Para una distancia pequeña $\Delta l > 0$ se analiza a un caminante aleatorio en la red $\Delta l \mathbb{Z}^n$ que se puede ver como la forma discreta del espacio $\mathbb{R}^n$. Cada incremento temporal se da en una unidad de tiempo Δt y de esta manera la probabilidad $\psi(x, t)$ para que un caminante aleatorio se encuentre en $x \in \Delta l \mathbb{Z}^n$ al tiempo $t \in \Delta t \mathbb{Z}$ es descrita por la ecuación maestra [32]:

$$\psi(x, t + \Delta t) = \sum_{l \in \Delta l \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(l) \psi(x + l, t), \quad (2.21)$$

donde $\mathcal{K}(l)$ es la probabilidad de dar un paso de longitud l . Se requiere que $\mathcal{K}(l) \geq 0$ y que $\mathcal{K}(0) = 0$, de tal manera que el caminante aleatorio cambie de posición en cada paso. Además $\sum_{l \in \Delta l \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(l) = 1$. Así, las probabilidades de transición $\mathcal{K}$ describen al caminante aleatorio y se puede definir un movimiento local con desplazamientos a primeros vecinos o un movimiento con desplazamientos de largo alcance.

La ecuación maestra (2.21) permite establecer ecuaciones de difusión para $\psi(x, t)$; utilizando la condición de normalización de $\mathcal{K}(l)$ se obtiene [32]:

$$\frac{\psi(x, t + \Delta t) - \psi(x, t)}{\Delta t} = \frac{(\Delta l)^n}{\Delta t} \frac{1}{(\Delta l)^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(m \Delta l) (\psi(x + m \Delta l, t) - \psi(x, t)). \quad (2.22)$$

En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta l \rightarrow 0$ con $\frac{(\Delta l)^n}{\Delta t}$ constante, se recupera una dinámica de tiempo y espacios continuos donde se obtienen las ecuaciones de difusión normal y difusión fraccional dependiendo si el caminante aleatorio sigue una dinámica de movimiento Browniano [32] o de vuelos de Lévy [33].

2.4.1. Vuelos de Lévy

El término vuelos de Lévy hace referencia a un caminante aleatorio con desplazamientos l con una distribución de probabilidad $\mathcal{K}(l)$ que asintóticamente se comporta como una ley de potencias inversas [32, 33]. Para los vuelos de Lévy en $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}(0) = 0$ y si $l \neq 0$:

$$\mathcal{K}(l) \sim \frac{1}{|l|^{n+2\gamma}} \quad \text{con} \quad 0 < \gamma < 1, \quad (2.23)$$

donde $|\dots|$ representa la norma Euclidiana en $\mathbb{R}^n$. Bajo esta definición, la varianza de los desplazamientos $\int \mathcal{K}(x)|x|^2 d^n x$ diverge. Esta característica diferencia notablemente a los vuelos de Lévy con el movimiento Browniano para el que la varianza

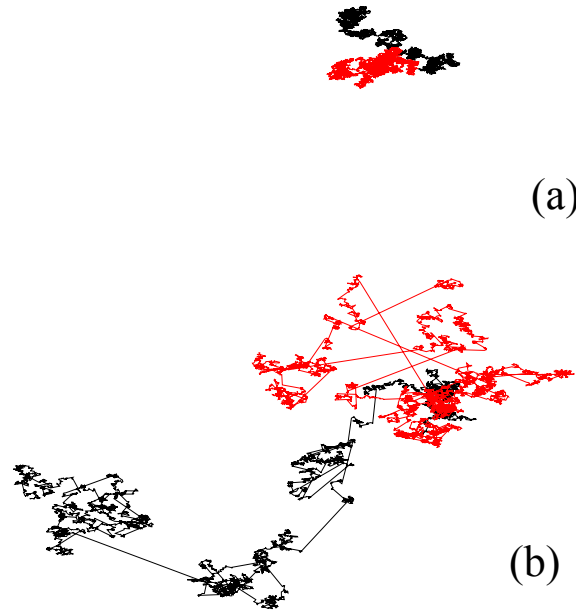


Figura 2.6: Caminantes aleatorios en un plano. (a) Movimiento Browniano. (b) Vuelos de Lévy. Se grafican 10.000 pasos para dos realizaciones de cada tipo de caminante aleatorio. Fuente: Esta investigación.

es finita. En la Figura 2.6 se presentan simulaciones Monte Carlo para diferentes realizaciones del movimiento Browniano y de los vuelos de Lévy en un plano.

Los vuelos de Lévy poseen un comportamiento fractal que consiste en formas que alternan entre las trayectorias descritas por movimientos locales (similares a lo observado en el movimiento Browniano) interrumpidos por eventuales desplazamientos de largo alcance que dan inicio a un nuevo grupo de desplazamientos locales, esta estructura se repite a todas las escalas. De esta manera los vuelos de Lévy combinan un movimiento local, que se realiza con mayor probabilidad, con una dinámica de desplazamientos de largo alcance que aparecen con baja probabilidad. Estas características se observan en la Figura 2.6. Los vuelos de Lévy constituyen un campo activo de investigación en diferentes sistemas complejos. Por ejemplo, se han encontrado vuelos de Lévy en el contexto de la dinámica animal y el forrajeo, la movilidad humana, la difusión en medios porosos, entre otros procesos [33, 34].

2.4.2. Ecuación de difusión normal en un plano

El movimiento Browniano se encuentra asociado a la difusión normal, de esta manera, para el caso de un caminante aleatorio Browniano en un plano $\mathcal{K}(\pm\Delta l, 0) = \mathcal{K}(0, \pm\Delta l) = \frac{1}{4}$ que corresponde a los desplazamientos a los 4 vecinos cercanos en la red cuadrada. De esta manera, la ecuación (2.22) para $\psi(x, y; t)$ con $(x, y) \in \Delta l \mathbb{Z}^2$ toma la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{\psi(x, y; t + \Delta t) - \psi(x, y; t)}{\Delta t} \\ &= -\frac{(\Delta l)^2}{4\Delta t} \frac{4\psi(x, y; t) - \psi(x + \Delta l, y; t) - \psi(x, y + \Delta l; t) - \psi(x, y - \Delta l; t) - \psi(x - \Delta l, y; t)}{(\Delta l)^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

En el límite $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta l \rightarrow 0$ y $C = \frac{(\Delta l)^2}{4\Delta t}$ constante se obtiene para $\psi(x, y; t)$:

$$\frac{\partial \psi(x, y; t)}{\partial t} = C \nabla^2 \psi(x, y; t), \quad (2.25)$$

que es la ecuación de difusión normal. Un tratamiento similar permite definir esta ecuación para el espacio continuo de n dimensiones $\mathbb{R}^n$ a partir de un caminante

aleatorio con desplazamientos a primeros vecinos.

2.4.3. Ecuación de difusión fraccional

En este caso $\mathcal{K}(l)$ define una dinámica con vuelos de Lévy. La probabilidad es $\mathcal{K}(l) = \sigma_\gamma |l|^{-(n+2\gamma)}$ donde σ_γ es una constante para que se cumpla la condición $\sum_{l \in \Delta \mathbb{Z}^n} \mathcal{K}(l) = 1$. De esta manera, a partir de la ecuación (2.22) se obtiene [32]:

$$\frac{\psi(x, t + \Delta t) - \psi(x, t)}{\Delta t} = \frac{(\Delta l)^n \sigma_\gamma}{\Delta t} \frac{1}{(\Delta l)^n} \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} \frac{\psi(x + m\Delta l, t) - \psi(x, t)}{|m\Delta l|^{n+2\gamma}}. \quad (2.26)$$

En el límite $\Delta t \rightarrow 0$ y $\Delta l \rightarrow 0$ manteniendo $C_\gamma = \frac{(\Delta l)^n \sigma_\gamma}{\Delta t}$ constante se obtiene la ecuación de difusión fraccional para $\psi(x, t)$ con $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -C_\gamma (-\nabla^2)^\gamma \psi(x, t), \quad (2.27)$$

donde el operador Laplaciano fraccional $(-\nabla^2)^\gamma$ en $\mathbb{R}^n$ se define como [32]:

$$(-\nabla^2)^\gamma \psi(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\psi(x) - \psi(y)}{|x - y|^{n+2\gamma}} dy. \quad (2.28)$$

De esta definición es claro como el Laplaciano fraccional requiere información global del espacio a diferencia del operador ∇^2 que se encuentra asociado a un entorno infinitesimal alrededor de un punto. La ecuación (2.27) surge entonces a partir de la generalización del movimiento Browniano a una dinámica con vuelos de Lévy y aparece el Laplaciano fraccional indicando que el fenómeno que describe tal ecuación no es local. Los métodos de solución de la ecuación (2.27) requieren de herramientas más complejas que lo que se quiere tratar en este trabajo y si se quiere profundizar en este tema se puede consultar por ejemplo [35]. Por un método similar al enunciado anteriormente se llega a una ecuación que describe fenómenos con memoria [36] o fenómenos no temporales ya que en este caso el cálculo fraccional aparece en la parte temporal de la ecuación diferencial fraccional resultante, tal como se observa en el apartado 2.4.4.

2.4.4. Solución de la ecuación de difusión fraccional

En [36], a partir del análisis del problema del caminante aleatorio con saltos a tiempo continuo, se obtiene la ecuación diferencial fraccional unidimensional:

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha} C_\alpha \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}, \quad (2.29)$$

y su solución es [36]:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4C_\alpha t^\alpha}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma[1 - \alpha(n+1)/2]} \left(\frac{x^2}{C_\alpha t^\alpha} \right)^{n/2}. \quad (2.30)$$

Tanto en [36] como en [37] se estudian además formas más generales de la ecuación (2.29). En la Figura 2.7 se observa que la distribución de probabilidades dista de la función Gaussiana que presenta la difusión normal.

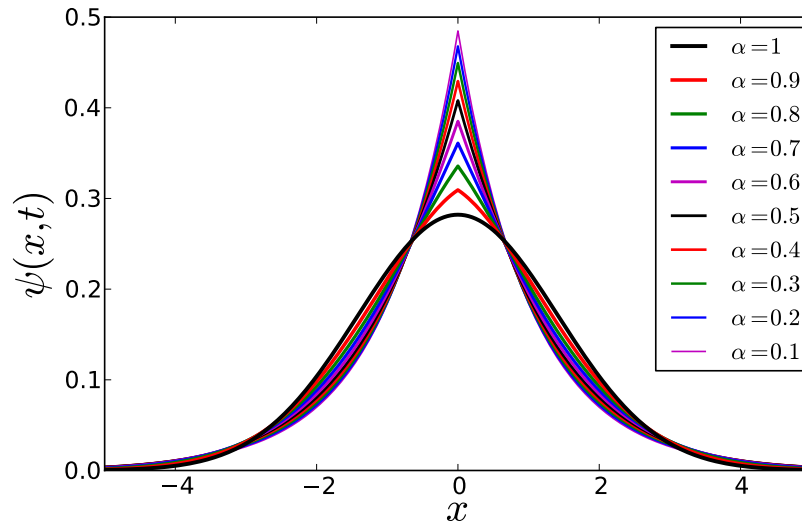


Figura 2.7: Gráfica de la ecuación (2.30) $\psi(x, t)$ correspondiente a la solución de la ecuación de difusión fraccional con α variable y $C_\alpha = 1$. La distribución de probabilidades dista de la función Gaussiana que presenta la difusión normal cuando $\alpha = 1$. Fuente: Esta investigación.

En este capítulo se introdujo un método general para la solución de ecuaciones diferenciales fraccionales que se basa en el uso de transformadas integrales como la transformada de Laplace. Con esto se conocen los fundamentos básicos de este método que se pueden utilizar en diferentes problemas. Luego se estudia dos problemas de aplicación del cálculo fraccional como lo es el oscilador fraccional descrito por una ecuación diferencial fraccional que se resuelve por el método analizado en este capítulo y se propone que puede ser usado para explicar fenómenos que se manifiestan en la interacción de cargas eléctricas. También se estudia la ecuación de difusión fraccional, en especial la que resulta por el análisis de vuelos de Lévy con saltos largos a tiempo continuo. En el capítulo 3 se hace un estudio más detallado de fenómenos relacionados con el oscilador fraccional, mientras que en el capítulo 4 se analiza la ecuación de Burgers fraccional no homogénea que está relacionada con ecuaciones de difusión fraccional.

Capítulo 3

Ondas electromagnéticas en medios fraccionales

En este capítulo se estudia la propagación de ondas electromagnéticas en medios dispersivos con una respuesta dieléctrica dada por el modelo de Havriliak-Negami. En este modelo el campo de polarización del medio se expresa mediante derivadas de orden fraccional del campo eléctrico. A partir de las ecuaciones de Maxwell en medios materiales se deduce una ecuación de onda para el campo eléctrico que contiene derivadas temporales fraccionales de Riemann-Liouville. Se analizan numéricamente soluciones para ondas planas, esféricas, cilíndricas y paquetes de ondas en estos medios. Los resultados obtenidos describen la propagación de ondas electromagnéticas en materiales complejos como polímeros, tejidos biológicos, entre otros.

3.1. Introducción

Para obtener información de las propiedades de un material es común analizar la permitividad compleja ϵ^* [31], ya que es fácil de medir y permite estudiar la estructura molecular. Esta propiedad está relacionada con la respuesta del material ante un estímulo electromagnético y uno de los primeros modelos empleados en describir este fenómeno es el modelo de Debye [31], sin embargo, diversos estudios sobre propiedades dieléctricas de sistemas como polímeros, alcoholes y cristales [38] se analizan en términos de modelos dieléctricos empíricos más generales, como los propuestos por Cole y Cole, Davidson y Cole, y Havriliak y Negami, todos en función de la frecuencia [12, 39]. El modelo de Havriliak-Negami se puede obtener a partir de una ecuación diferencial fraccional del campo de polarización [40].

Existen diversas disciplinas en las que se requiere conocer con precisión las propiedades de los materiales y esto se logra mediante el uso del cálculo fraccional. En el área del desarrollo de semiconductores el óxido de circonio amorfo dopado con lantano es uno de los dieléctricos más prominentes para reemplazar el óxido de silicio y se cita debido a que manifiesta el tipo de relajación anómala que se estudia en este capítulo [7]. En el área de la biología también existen modelos paramétricos para describir la variación de las propiedades dieléctricas de los tejidos como función de la frecuencia relacionadas con el modelo de Havriliak-Negami [6]. Por otra parte, las medidas sobre la exposición de cuerpos humanos a la radiación electromagnética requieren una cantidad de datos suficientes sobre las propiedades dieléctricas de los tejidos para obtener resultados óptimos [24]. Con esto se mencionan algunas de las áreas en las que se han reportado aplicaciones del cálculo fraccional en física que se encuentran relacionadas con este capítulo.

En este capítulo se hace un estudio de los fenómenos físicos presentados dentro de dieléctricos cuya respuesta es dada por el modelo de Havriliak-Negami, que aquí se denominan medios con respuesta electromagnética fraccional o en su forma resumida medios fraccionales. Para tal objeto, en la sección 3.3 se deduce la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell [15, 41]. Posteriormente en la sección 3.4 se hace el estudio de la propagación de pulsos y paquetes eléctricos en medios con respuesta dieléctrica anómala [26, 42]. Finalmente en la sección 3.5 se estudia este fenómeno considerando diferentes geometrías. En el proceso de obtención de la transformada inversa de Laplace se usan métodos numéricos que permiten estudiar las características del campo eléctrico [43].

3.2. Medios fraccionales

En esta sección se consideran mecanismos tales como la polarización electrónica y atómica debidas a las perturbaciones producidas en el movimiento de los electrones y átomos respectivamente; la polarización orientacional debida a la modificación de

la orientación de los dipolos y finalmente la polarización por migración de cargas [31]. En este caso, los mecanismos de polarización inducida se simbolizan por $\vec{P}_\infty(\vec{r}, t)$ y la polarización orientacional por $\vec{P}_0(\vec{r}, t)$ [22]. Todos los mecanismos considerados son causados por una acción externa que excita el sistema, el cual responde con una acción restauradora para retornar al estado de equilibrio original. La rapidez a la cual avanza este mecanismo es proporcional al grado de desviación producido y el tiempo involucrado en este proceso se denomina tiempo de relajación τ . Estos mecanismos se estudian a través de la permitividad relativa $\hat{\epsilon}$ que está directamente relacionada con la respuesta del medio y es medible. En presencia de un dieléctrico la densidad de flujo eléctrico se expresa por [31, 44]:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \vec{D}_0(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t), \quad (3.1)$$

donde $\vec{D}_0(\vec{r}, t)$ es la densidad del flujo eléctrico en el espacio libre y ϵ_0 es la permitividad del vacío. Para ciertos procesos se puede, también, suponer que la densidad de flujo eléctrico es proporcional al campo eléctrico aplicado: $\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \hat{\epsilon} \vec{E}(\vec{r}, t)$, donde ϵ es la permitividad del material y $\hat{\epsilon}$ es la permitividad relativa. De igual manera sucede con la polarización: $\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t)$, siendo χ_e la susceptibilidad eléctrica del medio. Para estos casos se cumple que $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ [31]. Sin embargo, en medios materiales más generales, el campo de polarización $\vec{P}(\vec{r}, t)$ del medio asociado a un campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ recibe diferentes contribuciones. En el caso de los mecanismos de polarización inducida $\vec{P}_\infty(\vec{r}, t)$ el aporte es [22, 39, 42]:

$$\vec{P}_\infty(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_\infty \vec{E}(\vec{r}, t) = (\epsilon_\infty - \epsilon_0) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3.2)$$

donde ϵ_∞ y χ_∞ son las contribuciones de los procesos de alta frecuencia a la constante dieléctrica y a la susceptibilidad. Por otra parte, la polarización orientacional $\vec{P}_0(\vec{r}, t)$ contribuye con [22, 31, 39, 42]:

$$\vec{P}_0(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau, \quad (3.3)$$

siendo ϵ_0 la permitividad eléctrica en el vacío y $\chi(t)$ la susceptibilidad eléctrica del material. La función $\chi(t)$ está relacionada con la respuesta del material y su

dependencia temporal da como resultado un índice de refracción dependiente de la frecuencia. Formas más generales de χ pueden incluir la intensidad del campo eléctrico (medios no lineales) o depender de la dirección (medios anisótropos) [45]. Teniendo en cuenta que $\vec{P}(\vec{r}, t) = \vec{P}_\infty(\vec{r}, t) + \vec{P}_0(\vec{r}, t)$ e introduciendo (3.2) y (3.3) en (3.1) se obtiene:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + (\epsilon_\infty - \epsilon_0) \vec{E}(\vec{r}, t) + \epsilon_0 \int_{-\infty}^t \chi(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau \quad (3.4)$$

$$= \epsilon_\infty \vec{E}(\vec{r}, t) + (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \int_{-\infty}^t \xi(t - \tau) \vec{E}(\vec{r}, \tau) d\tau, \quad (3.5)$$

siendo $\epsilon_0 \chi(t) = (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \xi(t)$, además $\xi(t)$ es la respuesta del material, y ϵ_{es} es la permitividad estática. Utilizando la transformada de Laplace definida por la ecuación (1.31) la ecuación (3.3) se reduce a [39, 42]:

$$\vec{P}(\vec{r}, s) = \epsilon_0 \tilde{\chi}(s) \vec{E}(\vec{r}, s), \quad (3.6)$$

así, la transformada de Laplace de la ecuación (3.5) se expresa [39, 42]:

$$\vec{D}(\vec{r}, s) = \epsilon_\infty \vec{E}(\vec{r}, s) + (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \tilde{\xi}(s) \vec{E}(\vec{r}, s). \quad (3.7)$$

En (3.7) aparece la transformada de Laplace de la respuesta del medio $\tilde{\xi}(s)$ que está relacionada con la susceptibilidad eléctrica por [39, 42]:

$$\epsilon_0 \tilde{\chi}(s) = (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty) \tilde{\xi}(s), \quad (3.8)$$

donde las constantes ϵ_{es} y ϵ_∞ son las permitividades estática y cuando $t \rightarrow \infty$, respectivamente. La importancia de la ecuación (3.8) es que está relacionada con la permitividad compleja mediante la ecuación $\epsilon_0 \hat{\epsilon}(\omega) = \epsilon_\infty + \epsilon_0 \tilde{\chi}(i\omega)$, lo que posibilita diversas técnicas que permiten medir directamente la función $\tilde{\xi}(s)$, de lo cual surgen diversos modelos que representan algunas características encontradas en ciertos medios materiales. Una de las respuestas más estudiadas es la de Debye $\tilde{\chi}_D(s) = (1 + s\tau)^{-1}$ [31], sin embargo, es aplicable en un número limitado de casos; por tanto surgen generalizaciones de éste modelo que llevan a la respuesta de Havriliak-Negami dada por [12, 38, 40, 42]:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = \frac{1}{(1 + (s\tau)^\alpha)^\beta} \quad 0 < \alpha, \beta \leq 1, \quad (3.9)$$

en estas respuestas τ es un tiempo característico que depende del tipo de material. El modelo (3.9) permite describir la respuesta electromagnética de diversas estructuras como son los polímeros, tejidos biológicos, entre otros. Las técnicas de medida se recopilan en lo que se denomina espectroscopia dieléctrica de banda ancha, la cual permite estudiar la estructura molecular, abarcando un rango de frecuencias de 10^{-4} a 10^{11} Hz [23]. En la ecuación (3.9), el caso $\beta = 1$ se conoce como respuesta de Cole-Cole [4, 12, 40]:

$$\tilde{\xi}_{CC}(s) = \frac{1}{1 + (s\tau)^\alpha}. \quad (3.10)$$

Y cuando $\alpha = 1$ resulta el modelo de Davidson-Cole [4, 12, 40]:

$$\tilde{\xi}_{DC}(s) = \frac{1}{(1 + s\tau)^\beta}. \quad (3.11)$$

Para $\alpha = \beta = 1$, todos estos casos recuperan el modelo de Debye que describe la respuesta electromagnética del material como osciladores sobre amortiguados. Por otra parte, las respuestas (3.9)-(3.11) describen al medio como un sistema viscoelástico usando osciladores fraccionales o casos más generales que se definen en términos de la derivada de Riemann-Liouville (1.18) [30]. Por esta razón en este trabajo se denomina a estos modelos medios con respuesta electromagnética fraccional o en forma simplificada medios fraccionales.

Por otra parte, la ecuación (3.9) también se puede estudiar en el dominio del tiempo. A partir de la expansión en serie de la ecuación (3.9) se deduce la transformada inversa de Laplace de $\tilde{\xi}_{HN}(s)$. Reescribiendo los términos de la definición (3.9) resulta:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = (s\tau)^{-\alpha\gamma} \left(1 + \frac{1}{(s\tau)^\alpha} \right)^{-\gamma}, \quad (3.12)$$

donde se presta especial atención al segundo factor ya que es de la forma $(1 + x^{-1})^{-\gamma}$ y por lo tanto permite utilizar la expansión en serie de Taylor [10], dada por la expresión:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(t)|_{t_0}}{n!} (t - t_0)^n, \quad f^n(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad (3.13)$$

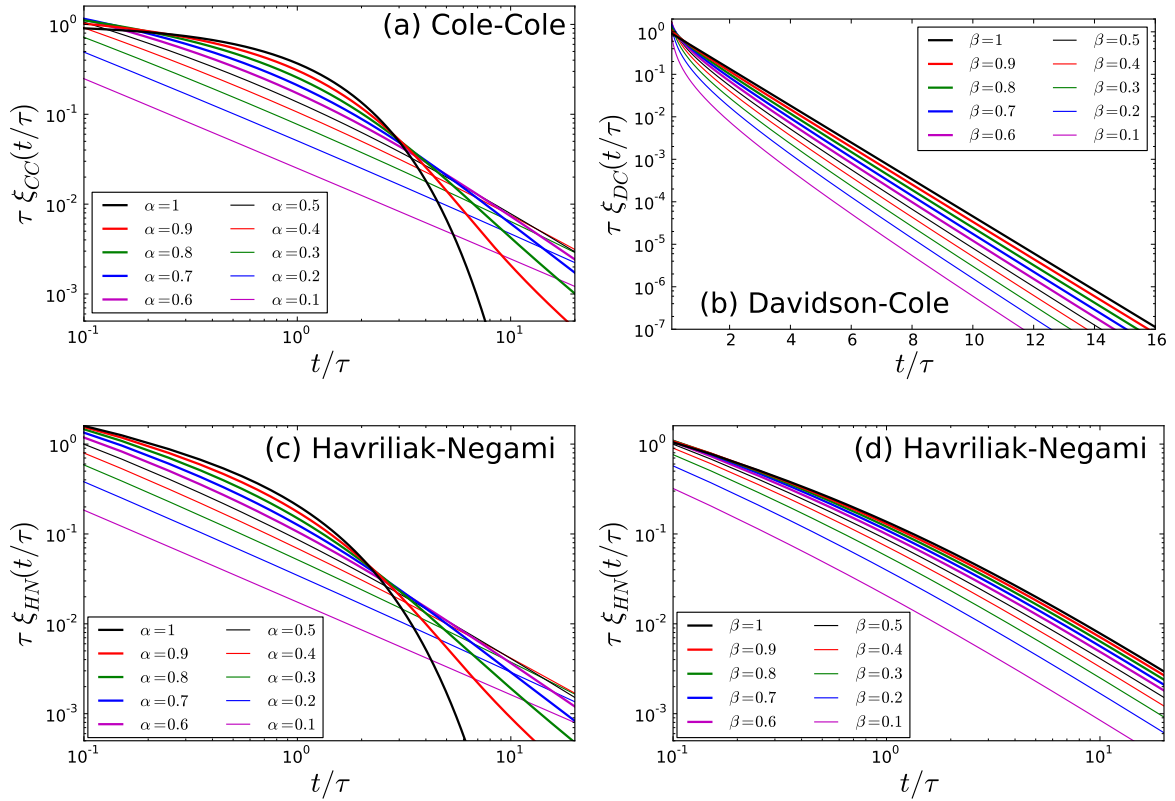


Figura 3.1: Respuesta de un material fraccional (3.17) como función del tiempo. (a) Respuesta de Cole-Cole $\xi_{CC}(t)$ en escala logarítmica. Se obtienen respuestas con comportamientos con decaimiento exponencial (similares a las respuestas de Debye $\alpha = 1$) y respuestas que decaen como una ley de potencias. (b) Respuesta de Davidson-Cole $\xi_{DC}(t)$ en escala semilogarítmica. Se obtienen respuestas que principalmente decaen exponencialmente (la respuesta de Debye se da cuando $\beta = 1$). En algunos casos se observa que para $t < \tau$ la respuesta sigue una ley de potencias. (c) Respuesta de Havriliak-Negami $\xi_{HN}(t)$ en escala logarítmica para $\beta = 0.5$ y α variable. El resultado es similar a la respuesta de Cole-Cole. (d) Respuesta de Havriliak-Negami $\xi_{HN}(t)$ en escala semilogarítmica con $\alpha = 0.5$ y β variable. El comportamiento es similar a la respuesta de Davidson-Cole. Fuente: Esta investigación.

con lo que la ecuación (3.12) queda:

$$\tilde{\xi}_{HN}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(\gamma + n)}{n! \Gamma(\gamma)} (s\tau)^{-\alpha(n+\gamma)}, \quad (3.14)$$

y si se multiplica tanto en el numerador como en el denominador por el factor

$\Gamma(\alpha(n + \gamma))$ resulta:

$$\widetilde{\xi}_{HN}(s) = \int_0^\infty e^{-st} t^{\alpha\gamma-1} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\alpha + n)(-1)^n t^{\alpha n}}{n! \Gamma(\alpha(n + \gamma)) \Gamma(\gamma)} \tau^{-\alpha(n+\gamma)} dt. \quad (3.15)$$

Recordando la función de Mittag-Leffler generalizada, $E_{\alpha,\beta}^\gamma(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(\gamma+n)}{n! \Gamma(\alpha n + \beta) \Gamma(\gamma)} z^n$, $0 < \alpha, \beta, \gamma \leq 1$ [12], la ecuación (3.15) se reduce a:

$$\widetilde{\xi}_{HN}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \tau^{-\alpha\gamma} t^{\alpha\gamma-1} E_{\alpha,\alpha\gamma}^\gamma \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right) dt, \quad (3.16)$$

y finalmente comparando con la transformada de Laplace (1.31) se establece que [12]:

$$\xi_{HN}(t) = \frac{t^{\alpha\gamma-1}}{\tau^{\alpha\gamma}} E_{\alpha,\alpha\gamma}^\gamma \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right), \quad (3.17)$$

resultado que da la respuesta de Havriliak-Negami en el dominio del tiempo. En la Figura 3.1 se presentan los resultados para $\xi_{CC}(t)$ y $\xi_{DC}(t)$ obtenidos a partir de la ecuación (3.17). Se observa que medios con respuesta de Cole-Cole pueden tener un comportamiento exponencial o de ley de potencias dependiendo de los valores de α . En el caso de Davidson-Cole para $\beta < 1$ se observa un pequeño intervalo inicial $t < \tau$ en el que la respuesta decae como una ley de potencias y para $t > \tau$ todos los casos analizados representan un decaimiento exponencial. El análisis del modelo de Havriliak-Negami muestra comportamientos similares con decaimientos exponenciales o de leyes de potencias dependiendo de los valores de α y β .

En el modelo de relajación de Havriliak-Negami se determina la polarización $\vec{P}(\vec{r}, t)$ utilizando una ecuación pseudo-diferencial fraccional auxiliar dada de la siguiente manera [15, 42]:

$$(\tau_0^\alpha D_t^\alpha + 1)^\beta \vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0(\epsilon_s - \epsilon_\infty) \vec{E}(\vec{r}, t), \quad (3.18)$$

donde aparecen términos en derivadas fraccionales que están elevados a una potencia arbitraria. Por otra parte, utilizando un mecanismo similar al planteado en esta sección se puede demostrar que el resultado (2.20) del capítulo 2 conduce a la

respuesta para un material dada por el modelo de Cole-Cole. En primera medida se supone que las cargas negativas $-Q$, del medio fraccional, se desplazan una pequeña distancia $\vec{x}(t)$ respecto a las cargas positivas $+Q$ y se forman dipolos por acción del campo eléctrico, que tienen un momento dipolar promedio $Q\vec{x}$ [31]. En consecuencia, como condición primaria, la polarización del material es [31]:

$$\vec{P}(t) = N_e Q \vec{x}(t), \quad (3.19)$$

donde Q es la carga fundamental, $\vec{x}$ es el desplazamiento relativo de los centroides de las cargas positivas y negativas que se calculó en el capítulo 2, y N_e es el número de dipolos por unidad de volumen. Ahora todo es cuestión de utilizar (2.20), (3.1) y (3.19) para obtener, en una dimensión:

$$D(t) = \epsilon_0 E_0 + N_e \frac{Q^2 E_0}{m} (\nu_0 t)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} [-(\nu_0 t)^\alpha]. \quad (3.20)$$

Por medio de la transformada de Laplace, ecuación (1.31), se obtiene:

$$\hat{\epsilon} = 1 + \frac{N_e Q^2}{m \epsilon_0} \frac{\nu_0^\alpha}{s^\alpha + \nu_0^\alpha} = 1 + \frac{N_e Q^2}{m \epsilon_0} \frac{1}{(s\tau)^\alpha + 1}, \quad (3.21)$$

para lo cual se ha considerado $\tau = \frac{1}{\nu_0}$. Al tomar $s = i\omega$, la expresión (3.21) tiene una parte imaginaria debida a la dispersión producida por el material, tal como sucede en un material normal. Comparando la ecuación (3.21) con la ecuación (3.7) se deduce que la respuesta de dicho material es:

$$\xi(s) = \frac{1}{1 + (s\tau)^\alpha}. \quad (3.22)$$

La ecuación (3.22) es precisamente la respuesta de Cole-Cole y por tanto, un material con este tipo de respuesta se puede describir a partir de osciladores fraccionales. Por tanto se dice que es un fenómeno no local en el tiempo o con memoria.

3.3. Ecuación de onda

Una vez descritos los materiales fraccionales, en esta sección se obtiene la función de onda de ondas electromagnéticas en estos medios. Se consideran materiales no

magnéticos, sin cargas libres ni corrientes. Para este caso las ecuaciones de Maxwell toman la forma [15, 44]:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.23)$$

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.24)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0, \quad (3.25)$$

$$\nabla \times \vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.26)$$

donde se supone la relación constitutiva $\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \vec{H}$ para el campo magnético. Por otra parte, el campo de desplazamiento $\vec{D}(\vec{r}, t)$ está relacionado con el campo $\vec{P}(\vec{r}, t)$ mediante la expresión [31]:

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \epsilon_\infty \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t), \quad (3.27)$$

$\vec{P}(\vec{r}, t)$ es la suma de las contribuciones de (3.2) y (3.3). Combinando las ecuaciones (3.23)-(3.26) y teniendo en cuenta que $\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}, t) = 0$ se obtiene la ecuación para el campo $\vec{E}(\vec{r}, t)$ [15, 26, 42]:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{\epsilon_\infty}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{P}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} \quad (3.28)$$

donde $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$. La ecuación (3.28) junto con la relación (3.18) proponen un problema de cálculo fraccional establecido recientemente y cuya solución constituye un campo activo de investigación en matemáticas, física, métodos numéricos, entre otros. Por medio de la ecuación (3.6), al tomar la transformada de Laplace de (3.28) para el caso en que $\vec{E}(\vec{r}, t) = 0$ cuando $t \geq 0$, se obtiene [15, 26]:

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}, s) - s^2 \left(\frac{n(s)}{c} \right)^2 \vec{E}(\vec{r}, s) = 0, \quad (3.29)$$

donde:

$$n(s) = \sqrt{\epsilon_\infty + \tilde{\chi}(s)}. \quad (3.30)$$

La ecuación (3.29) permite hallar la transformada de Laplace del campo eléctrico en diferentes geometrías y condiciones iniciales. En la siguiente parte se analiza la propagación de ondas en una geometría plana para diferentes tipos de respuesta fraccional.

3.4. Pulsos y paquetes de onda en medios fraccionales

Se considera un problema modelo en el que las ondas electromagnéticas se propagan en la dirección del eje x en el medio fraccional con una fuente ubicada en la posición $x = 0$. De esta manera $\vec{E}(\vec{r}, s) = E(x, s)\hat{y}$, donde $\hat{y}$ denota un vector unitario en la dirección y y la ecuación de (3.29) toma la forma [15]:

$$\frac{\partial^2 E(x, s)}{\partial x^2} - s^2 \left(\frac{n(s)}{c} \right)^2 E(x, s) = 0, \quad x > 0. \quad (3.31)$$

La condición de frontera $E(0, t) = F(t)$ es:

$$E(0, s) = \tilde{F}(s). \quad (3.32)$$

En términos de la función de respuesta $\xi(s)$, por medio de (3.8), $n(s)$ está determinada por:

$$n(s) = \sqrt{\epsilon_\infty + (\epsilon_{es} - \epsilon_\infty)\tilde{\xi}(s)}. \quad (3.33)$$

Teniendo en cuenta ondas electromagnéticas que se propagan en $x > 0$ y la condición inicial en $x = 0$, la solución de (3.31) es:

$$E(x, s) = \tilde{F}(s)e^{-\frac{n(s)}{c}sx}, \quad (3.34)$$

donde, finalmente el campo eléctrico $E(x, t)$ se recupera al obtener la transformada inversa de Laplace, de esta manera:

$$E(x, t) = \mathcal{L}^{-1}[\tilde{F}(s)e^{-\frac{n(s)}{c}sx}]. \quad (3.35)$$

Hasta la fecha no se conocen soluciones analíticas de (3.35) para medios con respuesta fraccional dado que la función $n(s)$ no permite aplicar los métodos convencionales

para calcular la transformada inversa de Laplace. En ciertos casos asintóticos se han desarrollado algunos resultados, pero la solución de (3.35) es un problema abierto. En lo que sigue se utilizan métodos numéricos para la inversión numérica, con el fin de analizar $E(x, t)$ en diferentes medios. El método empleado se describe en detalle en el apéndice A.

En la Figura 3.2 se estudia el caso de una perturbación en $x = 0$ dada por $F(t) = \delta(t)$, por lo tanto $\tilde{F}(s) = H(s)$ donde $H(s)$ denota a la función de Heaviside. Se obtiene $|E(x, t)|$ para un material con respuesta de Havriliak-Negami con $\alpha = \beta = 0.5$. En esta figura se hace evidente el efecto dispersivo que tiene el material. Además, con el fin de establecer las variaciones en el campo eléctrico para las diferentes respuestas analizadas en la Figura 3.1, en la Figura 3.3 se presenta $E(x, t)$ en las posiciones $x_1 = c\tau$ y $x_2 = 5c\tau$. En x_2 la perturbación electromagnética ha penetrado lo suficiente en el material de tal manera que los campos en los medios fraccionales difieren

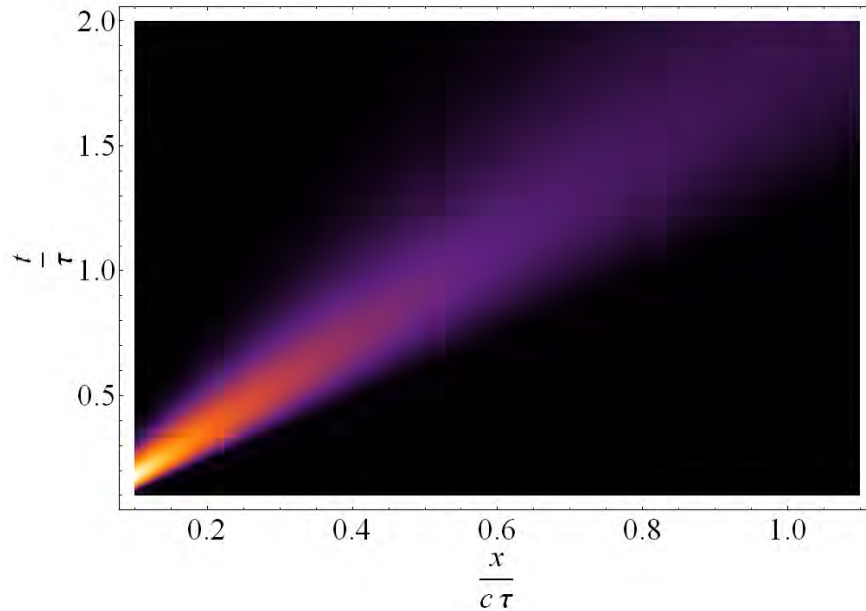


Figura 3.2: $|E(x, t)|$ en un material con respuesta de Havriliak-Negami con $\alpha = \beta = 0.5$ y con $\kappa = 1.5$. La condición inicial es un pulso $E(0, t) = \delta(t)$. Fuente: Esta investigación.

significativamente con respecto a la respuesta de Debye. En x_1 los cambios son menores. Por otra parte, si se tratara del vacío, $E(x, t) = \delta(x - ct)$, el retraso temporal en el medio material se observa en los diferentes tiempos en los que se da el máximo de $E(x, t)$.

Adicionalmente, la forma de $n(s)$ en (3.33) representa un índice de refracción que depende de las diferentes frecuencias del espectro de la perturbación en $x = 0$. En la Figura 3.4 se presenta $|E(x, t)|$ para una condición que se asemeja a un solitón [45]. Dado que el medio es únicamente dispersivo, este paquete de ondas no mantiene su forma inicial durante la evolución temporal.

3.5. Ondas cilíndricas y esféricas en medios fraccionales

Ahora se plantea un problema en el que las ondas electromagnéticas son generadas en una línea recta orientada a lo largo del eje z , inmerso en un medio fraccional y se analiza la componente z del campo. La ecuación de onda (3.29) en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) para la componente z del campo es dada por:

$$\nabla^2 E_z(\rho, \phi, z, s) - \beta^2 E_z(\rho, \phi, z, s) = 0, \quad (3.36)$$

siendo $\beta^2 = s^2 \left(\frac{n(s)}{c} \right)^2$ y c la velocidad de la luz. Suponiendo que la componente $E_z(\rho, \phi, z, s)$ no depende de las coordenadas ϕ y z , entonces, $E_z(\rho, s)$ cumple:

$$\rho^2 \frac{d^2 E_z(\rho, s)}{d\rho^2} + \rho \frac{dE_z(\rho, s)}{d\rho} - \beta^2 E_z(\rho, s) = 0. \quad (3.37)$$

Las soluciones de la ecuación (3.37) son las funciones asociadas de Bessel y una solución particular para ondas viajeras que son nulas cuando $\rho \rightarrow \infty$ es [10, 31]:

$$E_z(\rho, s) = F(s) K_0(\beta \rho), \quad (3.38)$$

donde $K_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(s+k)!} \left(\frac{x}{2} \right)^k$, por lo tanto:

$$E(\rho, t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s) K_0(\beta \rho)]. \quad (3.39)$$

Con la ecuación (3.39) se obtiene el campo eléctrico a una distancia ρ del eje del cilindro y su variación en el tiempo. Si el material en el que se genera el pulso es uno cuya respuesta es la de Havriliak-Negami entonces el espectro de la onda, a determinado radio ρ del cilindro, es como se observa en la Figura 3.5. En la Figura

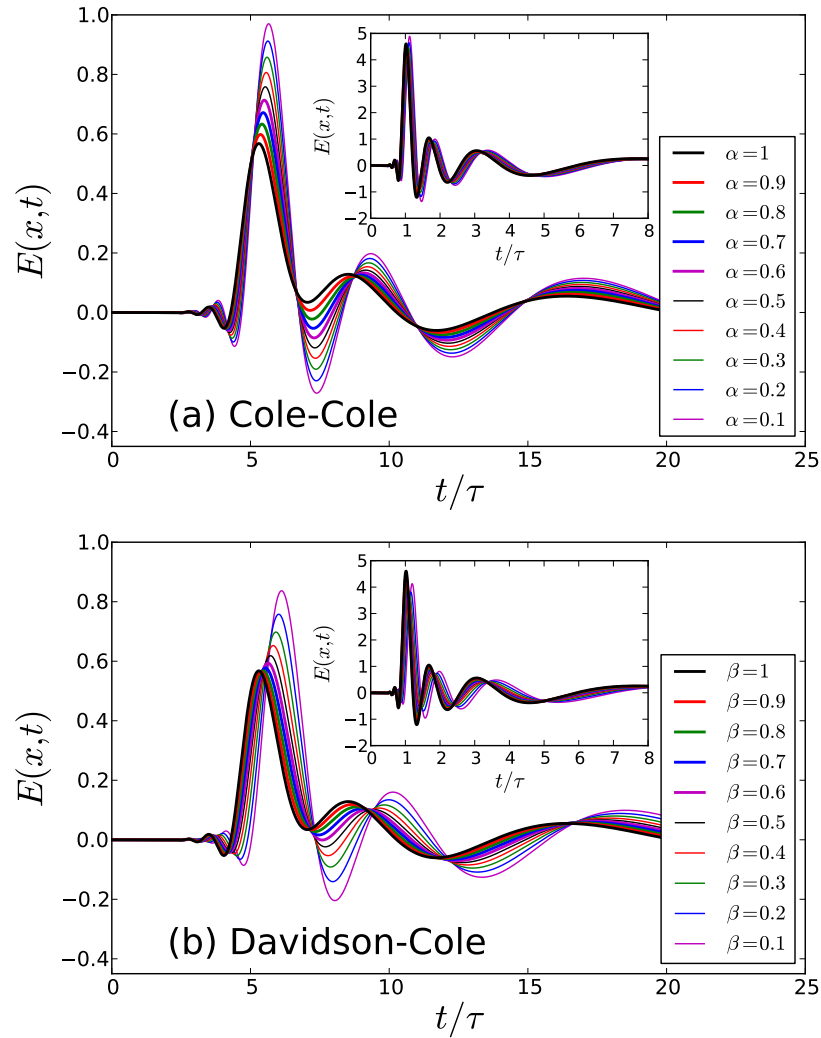


Figura 3.3: Campo eléctrico $E(x, t)$ como función del tiempo para $x = 5c\tau$, se analizan materiales con las respuestas presentadas en la Figura 3.1 con la condición inicial $E(0, t) = \delta(t)$. (a) Respuesta de Cole-Cole. (b) Respuesta de Davidson-Cole. En estas figuras los cuadros internos muestran el campo eléctrico cuando $x = c\tau$. Fuente: Esta investigación.

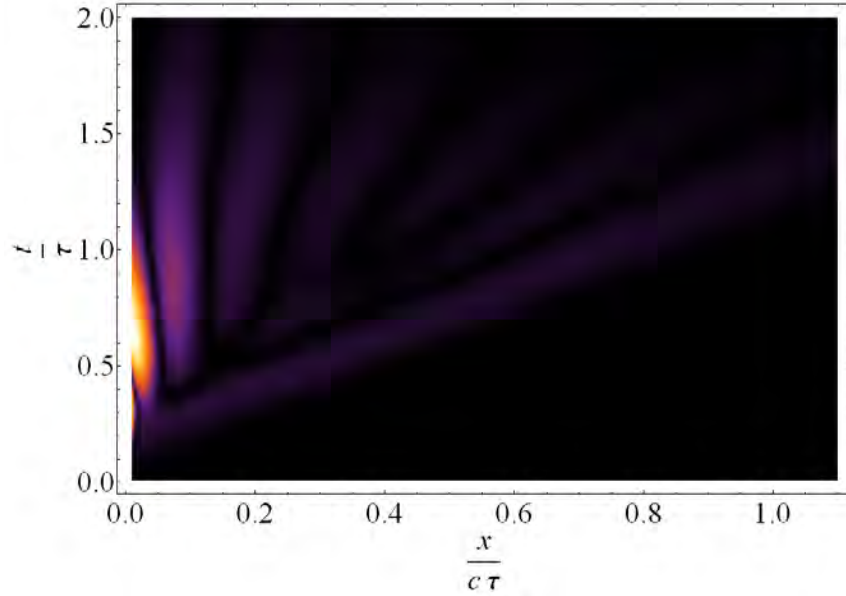


Figura 3.4: $|E(x,t)|$ en un material con respuesta de Havriliak-Negami con $\alpha = \beta = 0.5$ y con $\frac{\epsilon_{es}}{\epsilon_{\infty}} = 1.5$. La condición inicial es un paquete de ondas $E(0,t) = 2 \operatorname{sech}(a(x - x_0 - \omega t)) \sin(a(x - \omega t))|_{x=0}$, con $a = 8$, $\omega = 2$, $x_0 = -0.5$. Fuente: Esta investigación.

3.3 el máximo del pulso de la onda es cercano a la unidad, mientras que en la Figura 3.5 es de alrededor de 0.5 unidades de campo eléctrico, lo cual quiere decir que bajo las nuevas condiciones, la onda se atenúa más rápidamente.

Bajo condiciones especiales, se puede resolver la ecuación (3.29) en coordenadas esféricas. Para la componente radial del campo $E_r(r, \theta, \phi)$, y asumiendo que no depende de las coordenadas θ y ϕ , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{dE_r(r,s)}{dr} \right\} - \beta^2 r^2 E_r(r,s) = 0, \quad (3.40)$$

ecuación que se puede escribir también de la forma:

$$\frac{d^2}{dr^2} (rE_r(r,s)) - \beta^2 (rE_r(r,s)) = 0, \quad (3.41)$$

cuya solución es dada por:

$$E_r(r, s) = \frac{F(s)}{r} e^{-\beta r}, \quad (3.42)$$

y resulta:

$$E(r, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{r} e^{-\beta r} \right]. \quad (3.43)$$

La ecuación (3.43) describe una onda generada por una carga puntual cuando se activa un pulso del tipo delta de Dirac en un medio homogéneo y sin fuentes cuya respuesta es la de Havriliak-Negami. El espectro de la onda, a determinado radio r de la esfera, es graficado en la Figura 3.6. En dicha figura la atenuación del campo eléctrico es más pronunciada, a medida que el pulso avanza, de lo que se aprecia en la Figura 3.4, lo que significa que la geometría desde la que se observa el fenómeno influye en cuanto a su atenuación, sin embargo, no parecen haber cambios significativos en la forma del espectro del pulso. De esta manera, los resultados presentados en esta sección muestran la variedad de fenómenos asociados a la ecuación (3.28). Trabajos futuros pretenden analizar lo que sucede en interfaces que pueden ser vacío-material fraccional, dos materiales fraccionales, o material no lineal y medio

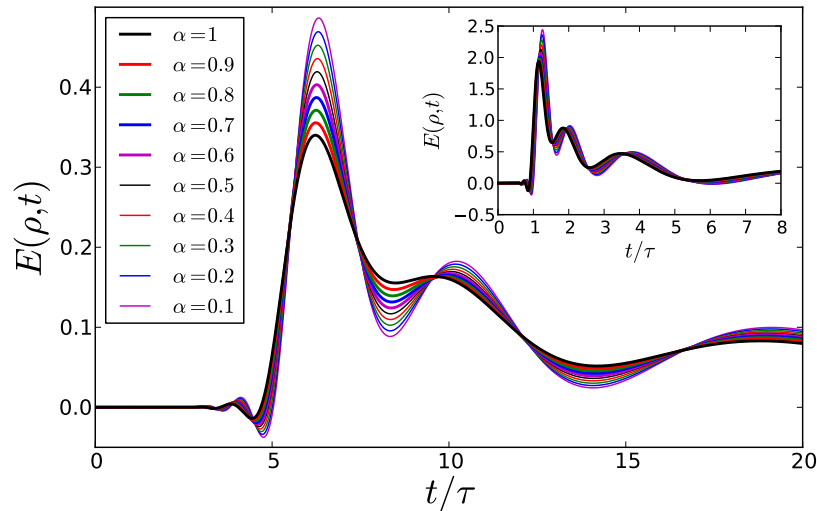


Figura 3.5: $E(\rho, t)$ en coordenadas cilíndricas en un medio con respuesta de Havriliak-Negami con $\beta = 0.5$ y $\kappa = 1.5$. Se presenta un pulso de una onda cilíndrica para $\rho = 5c\tau$. En el recuadro se grafica el pulso cuando $\rho = c\tau$. Fuente: Esta investigación.

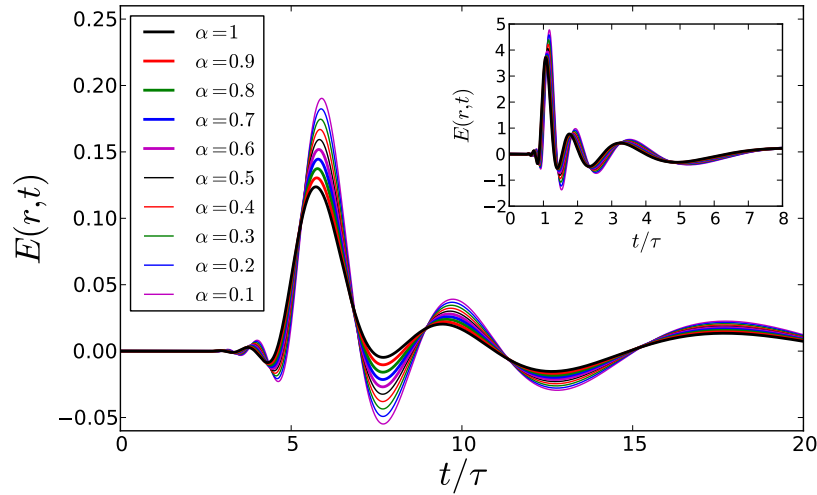


Figura 3.6: $E(r, t)$ en coordenadas esféricas en un material con respuesta de Havriliak-Negami con $\beta = 0.5$ y con $\kappa = 1.5$. La condición inicial es un pulso $E(0, t) = \delta(t)$. Se presenta un pulso de una onda esférica para $r = 5c\tau$. En el recuadro se grafica el pulso cuando $r = c\tau$. Fuente: Esta investigación.

fraccional.

En resumen en este capítulo se definen las características físicas que determinan los medios fraccionales, para luego deducir la ecuación de onda de un pulso electromagnético que se propaga en un medio de dichas características. En este sentido se analiza los mecanismos de polarización relevantes que se presentan en los medios fraccionales y así encontrar el desplazamiento eléctrico que es necesario para deducir la ecuación de onda a partir de las ecuaciones de Maxwell. La ecuación de onda se resuelve con el uso de la transformada de Laplace, sin embargo, para obtener la transformada de Laplace inversa fue necesario el uso de métodos numéricos. Finalmente se analiza el problema planteado en diferentes geometrías para establecer las consecuencias que ello conlleva.

Capítulo 4

Ecuación fraccional de Burgers

En este capítulo se estudian diferentes tipos de soluciones de la ecuación fraccional unidimensional no lineal de Burgers con un término no homogéneo asociado a fuerzas externas. Esta ecuación es una generalización de la ecuación de difusión no homogénea en la que se incluye una derivada fraccional de Caputo que describe una no linealidad no local. Por medio de la transformación de Cole-Hopf generalizada la ecuación de Burgers fraccional no homogénea se convierte en una ecuación diferencial lineal en derivadas parciales, lo que permite obtener soluciones analíticas. Se analizan soluciones solitónicas y se exploran los efectos asociados al término no homogéneo y al orden de la derivada fraccional.

4.1. Introducción

La ecuación de Burgers es una generalización de la ecuación de difusión no lineal que describe la velocidad $u(x, t)$ en un fluido con viscosidad. Esta ecuación aparece inicialmente en el estudio de la turbulencia [46] y tiene numerosas aplicaciones en física y matemáticas [47, 48]. En [49] se hace un estudio de la ecuación diferencial de Burgers $u_t + u u_x - u_{xx} = F(x, t)$ que presenta un término adicional $F(x, t)$, con respecto a la ecuación original de Burgers, asociado a fuerzas externas y se obtienen algunas de las características que derivan de dichas fuerzas. También se discute el efecto que tienen las fuerzas externas sobre soluciones solitónicas y se presentan soluciones numéricas que ilustran la variedad de comportamientos que se pueden obtener como consecuencia de la no linealidad de la ecuación de Burgers no homogénea. Este formalismo se emplea en este capítulo para resolver la ecuación fraccional de Burgers.

La razón para extender el tratamiento de la ecuación de Burgers al caso fraccional es que existen diferentes fenómenos de carácter no local [46, 50] que se presentan cuando las propiedades de un sistema en un cierto punto de configuración o espacio de fase no solo dependen de las propiedades de este sistema en este punto, sino también de las propiedades de al menos un punto del ambiente [46] y, como consecuencia, se usa el cálculo fraccional para describir dichos fenómenos.

En este capítulo se analiza la ecuación fraccional de Burgers no homogénea. En la sección 4.2 se resume el método empleado en [49] para obtener soluciones de la ecuación de Burgers no homogénea, ya que este formalismo se usa en el análisis de la ecuación fraccional de Burgers. En esta parte se usa la transformación de Cole-Hopf para convertir la ecuación no homogénea de Burgers en una ecuación de difusión y a partir de ella analizar soluciones disipativas y solitónicas. En la sección 4.3 se usa una versión modificada de la transformación de Cole-Hopf en función de una derivada fraccional para usarla en la solución de la ecuación fraccional de Burgers no homogénea. Luego se obtiene una ecuación diferencial en términos de derivadas de orden entero y se analizan soluciones solitónicas y disipativas de la ecuación fraccional de Burgers no homogénea.

4.2. Ecuación de Burgers no homogénea

En esta sección se introducen algunos resultados de [49] que son la base para el análisis de la ecuación fraccional de Burgers. Se parte de la ecuación de Burgers unidimensional no homogénea para $u(x, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t) \quad (4.1)$$

siendo $-\infty < x < \infty$, $t \geq 0$ y la condición inicial $u(x, 0) = u_0(x)$. El término $F(x, t)$ se encuentra asociado a fuerzas externas y $u_0(x)$ es el perfil a tiempo $t = 0$ de $u(x, t)$. Para el caso homogéneo $F(x, t) = 0$ se conocen soluciones solitónicas [51] y otro conjunto

de soluciones obtenidas mediante la transformación de Cole-Hopf [52, 53]. En lo siguiente se aplica esta transformación con el fin de estudiar el caso no homogéneo.

4.2.1. Transformación de Cole-Hopf

En la ecuación (4.1) la transformación de Cole-Hopf [52, 53] describe $u(x, t)$ por medio de una función $\psi(x, t)$ a través de la relación:

$$u(x, t) = -\frac{2}{\psi(x, t)} \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}. \quad (4.2)$$

Cuando se introduce (4.2) en la ecuación (4.1) se obtiene la relación:

$$2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\psi} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right] = F(x, t). \quad (4.3)$$

Luego se define $F(x, t)$ en términos de un *potencial* $V(x, t)$ que cumple con $F(x, t) = -2 \frac{\partial V}{\partial x}$, la ecuación (4.3) permite establecer para $\psi(x, t)$:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x, t) \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

con una condición inicial de la forma:

$$\psi(x, 0) = g(x) \equiv \exp \left[-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^x u_0(x') dx' \right], \quad (4.5)$$

donde $g(x)$ es obtenida aplicando (4.2) a la condición inicial $u_0(x)$. En consecuencia, la transformación de Cole-Hopf convierte la ecuación no homogénea de Burgers (4.1) en la ecuación de difusión (4.4) con términos de fuente de la forma $V(x, t)\psi(x, t)$. La importancia de este tipo de transformación radica en que establece una correspondencia entre un problema no lineal donde no es evidente un principio de superposición y un problema lineal donde el principio de superposición permite utilizar el método de la función de Green.

4.2.2. Soluciones solitónicas de la ecuación homogénea

Cuando se considera $v(x, t) = 0$ en la ecuación (4.4) resulta el caso particular de la ecuación de Burgers homogénea resuelta usando la transformación de Cole-Hopf [52]. En este caso, por medio de la ecuación (4.4), $\psi_0(x, t)$ satisface:

$$\frac{\partial^2 \psi_0}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi_0}{\partial t} \quad -\infty < x < \infty, t \geq 0, \quad (4.6)$$

con la condición inicial $\psi_0(x, 0) = g(x)$. A partir de $\psi_0(x, t)$ se obtienen dos tipos de resultados para $u(x, t)$: soluciones disipativas y soluciones solitónicas. Teniendo en cuenta que la expresión (4.6) es una ecuación de difusión cuya solución toma la forma [54]:

$$\psi_0(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-x')^2}{4t}\right] g(x') dx', \quad (4.7)$$

las soluciones disipativas de la ecuación de Burgers homogénea se obtienen reemplazando (4.7) en (4.2). Por su parte, para solucionar (4.6) con un pulso que se propaga a velocidad v , se introduce el cambio de variables $z = x - vt$ y en consecuencia $\psi(x, t) = \psi(z)$ satisface $\frac{d^2 \psi}{dz^2} = -v \frac{d\psi}{dz}$. Las soluciones de esta ecuación toman la forma $\psi(z) = a_1 e^{-vz} + b_1$ donde a_1, b_1 son constantes, por lo tanto:

$$\psi(x, t) = a_1 e^{-v(x-vt)} + b_1. \quad (4.8)$$

Mediante (4.2) y (4.8) se obtiene la solución solitónica de la ecuación de Burgers:

$$u(x, t) = \frac{2a_1 v e^{-v(x-vt)}}{a_1 e^{-v(x-vt)} + b_1}. \quad (4.9)$$

Teniendo en cuenta que (4.6) es una ecuación lineal, es posible superponer N soluciones:

$$\psi(x, t) = \sum_{i=1}^N \left[a_i e^{-v_i(x-v_i t)} + b_i \right], \quad (4.10)$$

donde a_i, b_i, v_i para $i = 1, \dots, N$ son constantes que describen a cada uno de los solitones. De esta manera $u(x, t) = -\frac{2}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ permite obtener la solución con N solitones. En las Figuras 4.1(a) y 4.1(b) se presenta una solución solitónica. En las Figuras 4.1(c)

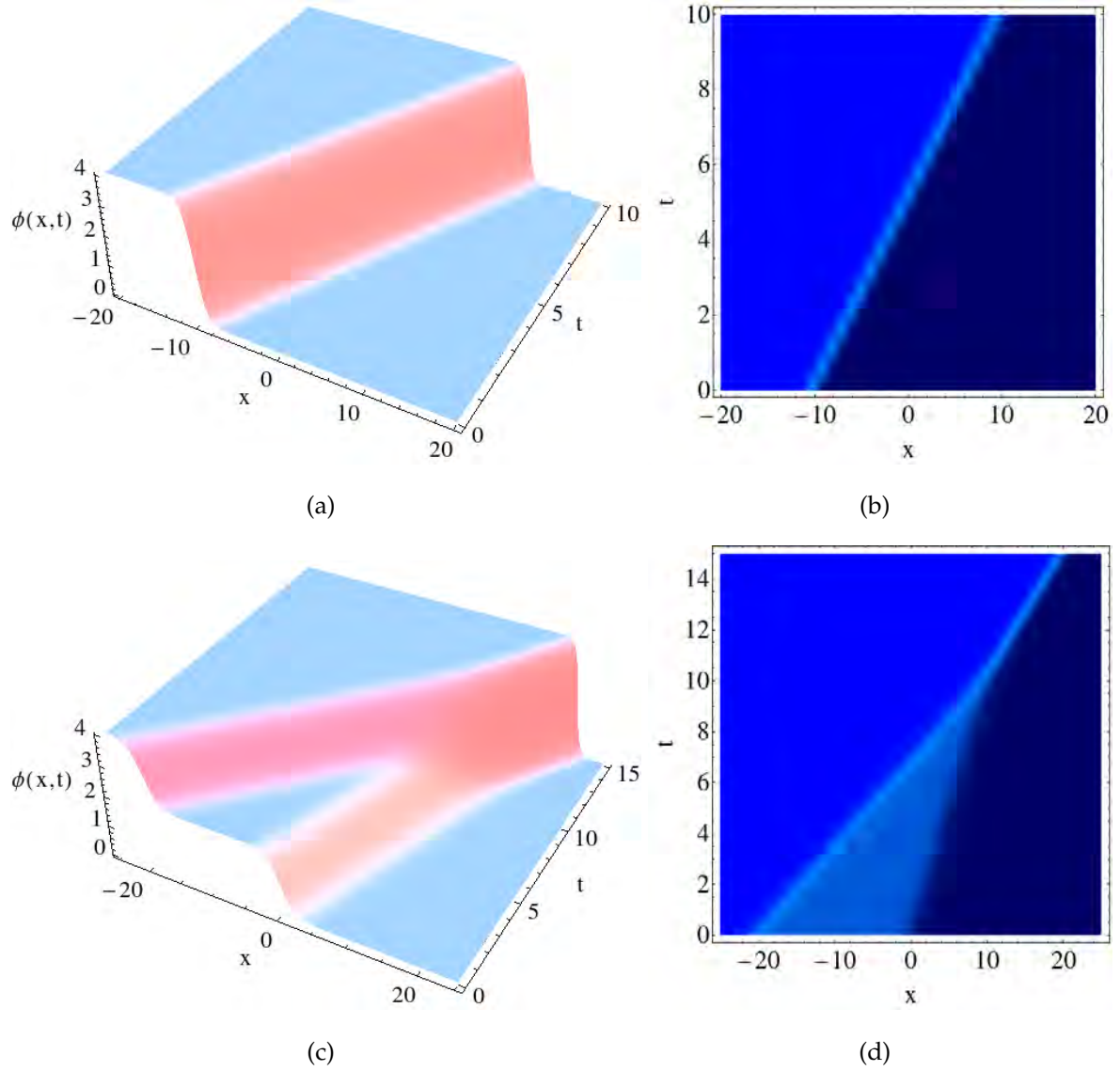


Figura 4.1: Soluciones solitónicas de la ecuación de Burgers homogénea. En (a) y (b) $\psi(x, t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$. En (c) y (d) se grafica la solución obtenida para la interacción de dos solitones descritos por $\psi(x, t) = e^{-((x+4)-t)} + e^{-2((x+10)-2t)} + 1$. Fuente: Esta investigación.

y 4.1(d) se presenta la interacción de dos solitones obtenidos a partir de (4.10). Se nota que la velocidad del solitón resultante después de la interacción es diferente

a la de los dos solitones iniciales. Las soluciones presentadas en esta sección son dos grupos de soluciones que se conocen para la ecuación de Burgers homogénea [51, 52]. En la siguiente sección se estudia la forma en la que varían estas soluciones al introducirse la fuerza $F(x, t)$ en (4.1).

4.2.3. Soluciones solitónicas de la ecuación no homogénea

En esta sección se analiza el efecto que tiene $F(x, t)$ en la ecuación de Burgers no homogénea sobre soluciones solitónicas. Cuando $F(x, t) = F_e \delta(x - x_e)$ se presentan solitones. En este caso F_e, x_e son constantes y el potencial es: $V(x, t) = -\frac{F_e}{2} H(x - x_e)$. La ecuación (4.4) toma la forma:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{si } x < x_e, \quad (4.11)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{F_e}{2} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{si } x \geq x_e. \quad (4.12)$$

Tal como se estudia en la sección previa, la ecuación (4.11) posee soluciones solitónicas en $x < x_e$. Para la ecuación (4.12), existen soluciones viajeras que dan lugar a solitones en la región $x \geq x_e$. Así, buscando soluciones de la forma $\psi(x, t) = \psi(z)$ con $z = x - \beta t$, la ecuación (4.12) requiere:

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \beta \frac{d\psi}{dz} - \frac{F_e}{2} \psi = 0. \quad (4.13)$$

En la región $x \geq x_e$ se presenta un solitón transmitido cuando $F_e^2 > 16\beta$, en este caso la solución de (4.13) está dada por:

$$\psi(x, t) = C_1 e^{-\frac{1}{2}(\beta + \bar{F})(x - \beta t)} + d_1 e^{-\frac{1}{2}(\beta - \bar{F})(x - \beta t)}, \quad (4.14)$$

donde $\bar{F} = \sqrt{\beta^2 + 2F_e}$. Por medio de la transformación de Cole-Hopf se obtiene:

$$u(x, t) = \beta - \bar{F} + \frac{2C_1 \bar{F}}{C_1 + d_1 e^{\bar{F}(x - \beta t)}}, \quad (4.15)$$

que es un solitón transmitido. Las constantes C_1, d_1, β se deducen a partir de las condiciones de continuidad que establece (4.4) en $x = x_e$. Cuando $\beta^2 + 2F_e \leq 0$ se

obtienen soluciones para (4.12) que no son solitones transmitidos. En este caso el solitón es reflejado y en $x > x_e$ se utiliza la solución de (4.12) $\psi(x, t) \propto e^{-F_e t/2}$ que da como resultado $u(x, t) = 0$ en $x > x_e$. En la Figura 4.2 se ilustran estas situaciones para

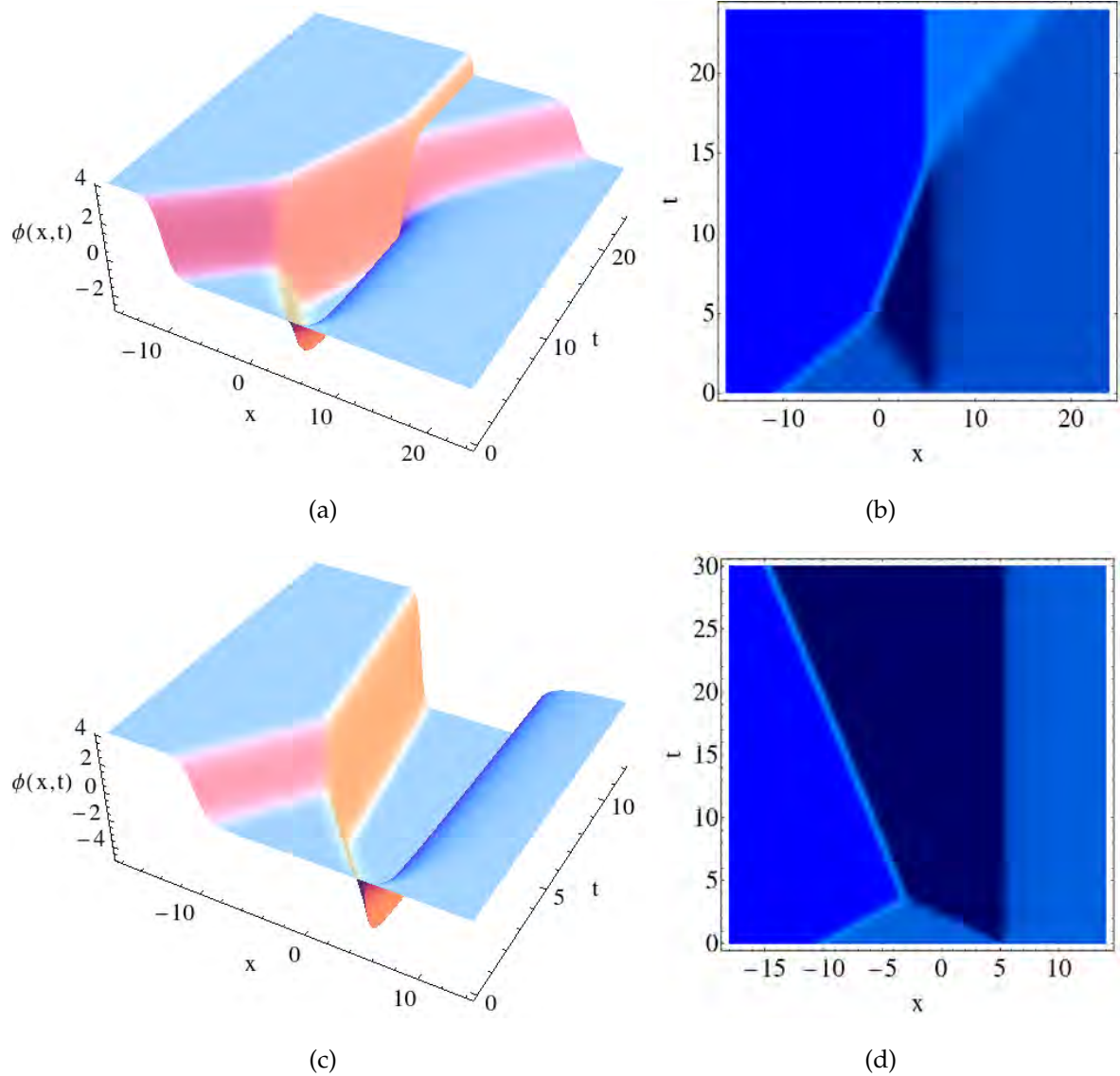


Figura 4.2: Soluciones de la ecuación no homogénea de Burgers con $F(x, t) = -F_e \delta(x - 5)$. En (a) y (b) el solitón incidente es descrito por $\psi(x, t) = e^{-4((x+10)-4t)} + 1$ y $F_e = -16$. Se obtiene un solitón transmitido y uno reflejado. En (c) y (d) $F_e = -36$ y solo se da reflexión. Fuente: Esta investigación.

un caso donde hay un solitón transmitido y otro en el que no hay transmisión.

En lo anterior se consideró F_e constante simulando una barrera donde llega el solitón. Se puede hacer que esta barrera sea variable en el tiempo. Tomando la forma $F(x, t) = f(t)\delta(x - x_e)$ la ecuación (4.12) no tiene solución analítica, sin embargo, la solución numérica presentada en la Figura 4.3 muestra como mediante un $f(t)$ oscilatorio el solitón incidente puede pasar o ser reflejado, se observa que el pulso transmitido ya no es un solitón y se desvanece.

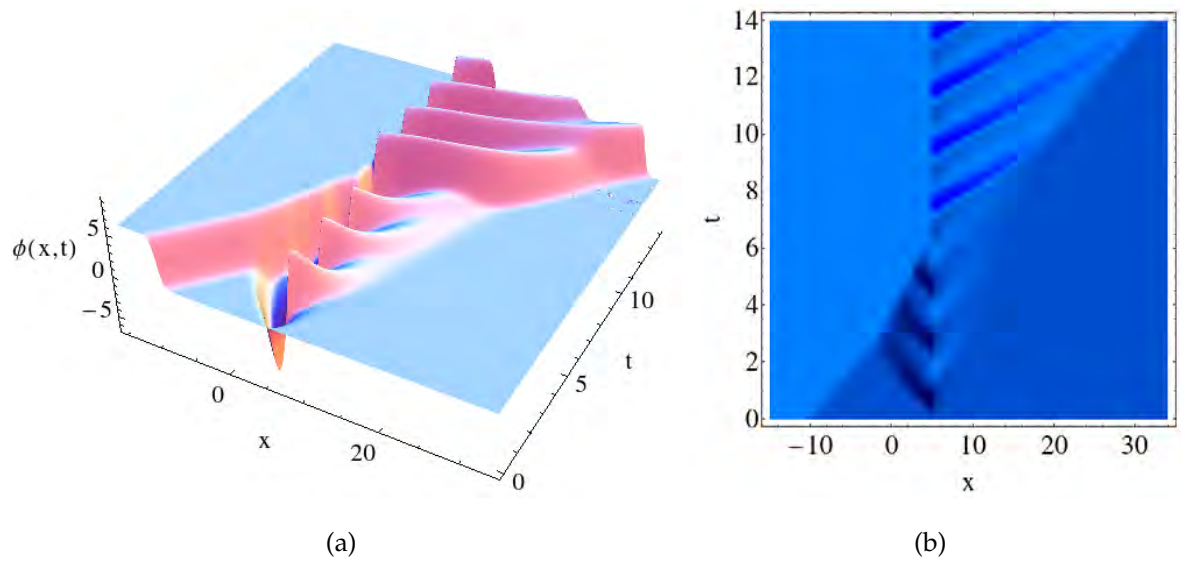


Figura 4.3: Solución de la ecuación de Burgers no homogénea con $F(x, t) = -16 \sin(3t)\delta(x - 5)$. El solitón incidente es descrito por $\psi(x, t) = e^{-4((x+10)-4t)} + 1$. La solución se obtiene resolviendo numéricamente (4.4) y aplicando la transformación (4.2). Fuente: Esta investigación.

En la siguiente sección se considera la ecuación fraccional de Burgers no homogénea teniendo en cuenta el formalismo planteado hasta el momento. En este sentido se utiliza la ecuación de Burgers fraccional propuesta en [55] y se adiciona un término $F(x, t)$ asociado a fuerzas externas de una manera análoga a como se hace en [49] con la ecuación de Burgers. Se utiliza una transformada de Cole-Hopf generalizada que transforma la ecuación de Burgers fraccional en una ecuación diferencial en deriva-

das parciales. Luego se analizan soluciones solitónicas y disipativas de la ecuación fraccional de Burgers.

4.3. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea

En esta sección se estudia la ecuación fraccional de Burgers no lineal planteada en [46, 55] con un término adicional $F(x, t)$:

$$\phi_t(x, t) + \frac{1}{2} {}_a D_x^\alpha \left({}_a D_x^{1-\alpha} \phi(x, t) \right)^2 - \gamma \phi_{xx}(x, t) = F(x, t), \quad (4.16)$$

siendo $-\infty < x < +\infty$, $t \geq 0$ y $0 < \alpha < 1$. En esta ecuación, ${}_a D_x^\alpha \phi(x, t) = \lambda^{\alpha-1} {}_a^C D_x^\alpha \phi(x, t)$ es la derivada fraccional, ${}_a^C D_x^\alpha \phi(x, t)$ es la derivada fraccional de Caputo definida en la ecuación (1.26), λ es una longitud que define una escala de referencia, $F(x, t)$ está asociado a fuerzas externas y γ es el coeficiente de viscosidad. Por su parte, la ecuación (4.16) está sometida a la condición inicial:

$$\phi(x, 0) = \phi_0(x), \quad (4.17)$$

en donde $\phi(x, t)$ y $\phi_0(x)$ son funciones definidas en el conjunto de los números reales. Adicionalmente se debe considerar que los problemas físicos se plantean en dominios acotados, en este caso el problema está bien definido en la región $a \leq x < \infty$ y $0 \leq t$.

4.3.1. Transformación generalizada de Cole-Hopf

Para simplificar la ecuación (4.16) existe una transformación que es la generalización de la transformación de Cole-Hopf clásica al caso fraccional y está definida por la expresión [46, 55]:

$$\phi(x, t) = -2\gamma {}_a D_x^\alpha \log y(x, t), \quad (4.18)$$

donde γ es el coeficiente de viscosidad del medio. A partir de la ecuación (4.18) se obtiene que:

$$\phi_t(x, t) = -2\gamma {}_a D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial t} \log[y(x, t)], \quad (4.19)$$

para la segunda derivada espacial se obtiene:

$$\phi_{xx}(x, t) = -2\gamma_a D_x^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log[y(x, t)], \quad (4.20)$$

y para el término entre paréntesis de la ecuación (4.16) resulta:

$${}_a D_x^{1-\alpha} \phi(x, t) = {}_a D_x^{1-\alpha} (-2\gamma_a D_x^\alpha \log[y(x, t)]) = -2\gamma_a D_x^1 \log[y(x, t)] = -2\gamma \frac{y_x(x, t)}{y(x, t)}, \quad (4.21)$$

por tanto, reemplazando (4.19), (4.20) y (4.21) en (4.16) se obtiene:

$$\begin{aligned} & -2\gamma_a D_x^\alpha \left(\frac{y_t}{y} \right) + \frac{1}{2} {}_a D_x^\alpha \left(-2\gamma \frac{y_x}{y} \right)^2 - \gamma \left[-2\gamma_a D_x^\alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y_x}{y} \right) \right] \\ & = -2\gamma_a D_x^\alpha \left\{ \frac{y_t}{y} - \gamma \left(\frac{y_x}{y} \right)^2 - \gamma \left[\frac{y_{xx}}{y} - \left(\frac{y_x}{y} \right)^2 \right] \right\} \\ & = -2\gamma_a D_x^\alpha \left[\frac{y_t - \gamma y_{xx}}{y} \right] = F(x, t). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Además, si el término de fuerza externa está asociado a fenómenos no locales entonces $F(x, t)$ resulta de un potencial $V(x, t)$ que satisface:

$$F(x, t) = -2\gamma_a D_x^\alpha V(x, t), \quad (4.23)$$

de tal manera que al reemplazar (4.23) en (4.22) resulta:

$${}_a D_x^\alpha \left[\frac{y_t(x, t) - \gamma y_{xx}(x, t)}{y(x, t)} - V(x, t) \right] = 0. \quad (4.24)$$

Debido a que la derivada de Caputo de una constante es cero, la ecuación (4.24) implica que:

$$\frac{y_t(x, t) - \gamma y_{xx}(x, t)}{y(x, t)} - V(x, t) = C_1(t), \quad (4.25)$$

donde la función $C_1(t)$ depende únicamente del tiempo ya que la derivada fraccional de Caputo se calcula con respecto a x . Para lo que sigue se define la función:

$$u(x, t) = V(x, t) + C_1(t), \quad (4.26)$$

de tal manera que la ecuación (4.25) satisface:

$$\gamma y_{xx}(x, t) - y_t(x, t) - u(x, t)y(x, t) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0. \quad (4.27)$$

La condición inicial se obtiene reemplazando (4.17) en (4.18) y despejando $y(x, 0)$:

$$y(x, 0) = q(x) = \exp \left[-\frac{1}{2\gamma} {}^a D_x^{-\alpha} \phi_o(x) \right]. \quad (4.28)$$

En la siguiente parte se utilizan diferentes tipos de $u(x, t)$ para hallar la fuerza asociada a estos términos y obtener numéricamente la solución de la ecuación de Burgers. En la sección 4.3.2 se hace un estudio de las consecuencias de la ecuación (4.27) cuando $y(x, t) = y(x - vt)$.

4.3.2. Ecuación fraccional de Burgers homogénea

Se obtienen soluciones solitónicas a partir de la ecuación (4.27) cuando $y(x, t) = y(x - vt) = y(z)$ donde v es la velocidad del solitón. De esta manera, la ecuación (4.27) se expresa:

$$\gamma \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + v \frac{dy(z)}{dz} - u(z, t)y(z) = 0, \quad (4.29)$$

que es una ecuación diferencial lineal homogénea. El término $u(z, t)$ está relacionado con la fuerza externa y una primera opción es considerar $u(z, t) = 0$. Para este caso se obtiene la solución:

$$y(z) = C_1 \exp \left[-\frac{v}{\gamma} z \right] + C_2, \quad (4.30)$$

donde $z = x - vt$. Para continuar se utiliza la ecuación (4.18) que está definida en términos de la derivada de Caputo (1.26), donde $0 < \alpha < 1$ implica $n = 1$, como consecuencia:

$$\phi(x, t) = -2\gamma \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_a^x (x - x')^{-\alpha} \frac{\partial}{\partial x'} \log[y(x', t)] dx'. \quad (4.31)$$

En la ecuación (4.31) aparece la expresión $\Psi_0(x, t) \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \log y(x - vt)$ que está dada por:

$$\Psi_0(x, t) = \frac{v}{\gamma} \frac{\exp \left[-\frac{v}{\gamma} (x - vt - b) \right]}{1 + \exp \left[-\frac{v}{\gamma} (x - vt - b) \right]} \quad (4.32)$$

con $b = -\frac{\gamma}{v} \log(C_1/C_2)$. La ecuación (4.32) es la solución de un solitón de la ecuación de Burgers normal obtenida en la ecuación (4.9), se nota que el efecto de las constantes C_1, C_2 es establecer el desfase b del solitón. Al incorporar el resultado (4.32) en el análisis de la ecuación fraccional de Burgers se obtiene:

$$\phi(x, t) = \frac{2\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x \frac{\Psi_0(x', t)}{(x-x')^\alpha} dx'. \quad (4.33)$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_0(x, t) = v/\gamma$, se encuentra que en el límite $a \rightarrow -\infty$ diverge haciendo que la solución solitónica no sea posible en ese caso. Como consecuencia, tomar a finito hace que $\phi(x, t)$ en (4.33) cambie su valor con una relación proporcional al tamaño de a . Por otra parte, cuando $u(z, t) = c$ es una constante diferente de cero la ecuación (4.29) tiene por solución:

$$y(z) = C_1 \exp[\lambda_+ z] + C_2 \exp[\lambda_- z], \quad (4.34)$$

con $\lambda_{\pm} = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4\gamma c}}{2\gamma}$. Por lo tanto:

$$\Psi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \log y(x - vt) = -\lambda_+ - \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + \exp[-\kappa(x - vt - b)]), \quad (4.35)$$

siendo $\kappa = \lambda_+ - \lambda_- = \frac{\sqrt{v^2 + 4\gamma c}}{\gamma}$ y $b = \frac{1}{\kappa} \log \frac{C_2}{C_1}$. Al buscar la solución de la ecuación fraccional de Burgers se obtiene:

$$\phi(x, t) = \frac{2\gamma}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (\lambda_+ + \Psi_0(x', t)) \frac{1}{(x-x')^\alpha} dx'. \quad (4.36)$$

donde $\Psi_0(x, t)$ es similar a lo encontrado en el caso $c = 0$ con una redefinición de las constantes. En esta expresión la integral $\int_a^x \frac{\lambda_+}{(x-x')^\alpha} dx'$ resulta en algo que aumenta de tamaño conforme x aumenta, este no es el tipo de comportamiento de los solitones. Por lo tanto soluciones solitónicas requieren que $\lambda_+ = 0$ lo que implica que $c = 0$. Las soluciones obtenidas en este caso también son soluciones de la ecuación fraccional, sin embargo, en estas soluciones la no linealidad es mayor que la dispersión del pulso haciendo que el pulso aumente su amplitud con la dinámica del sistema. Tal como en el caso ordinario, teniendo en cuenta que (4.29) es una ecuación diferencial

lineal, es posible superponer soluciones de la forma $y(z) = \sum_{i=1}^N y_i(z)$, donde $i = 1, \dots, N$ determina las constantes que describen a cada uno de los solitones dados por $y_i(z)$. De esta manera, $\phi(x, t) = -2\gamma_a^C D_z^\alpha \log[y(z)]$ permite obtener la solución con N solitones para el caso fraccional. En las Figuras 4.4(a) y 4.4(b) se presenta una solución solitónica. Por su parte, en las Figuras 4.4(c) y 4.4(d) se presenta la interacción de dos

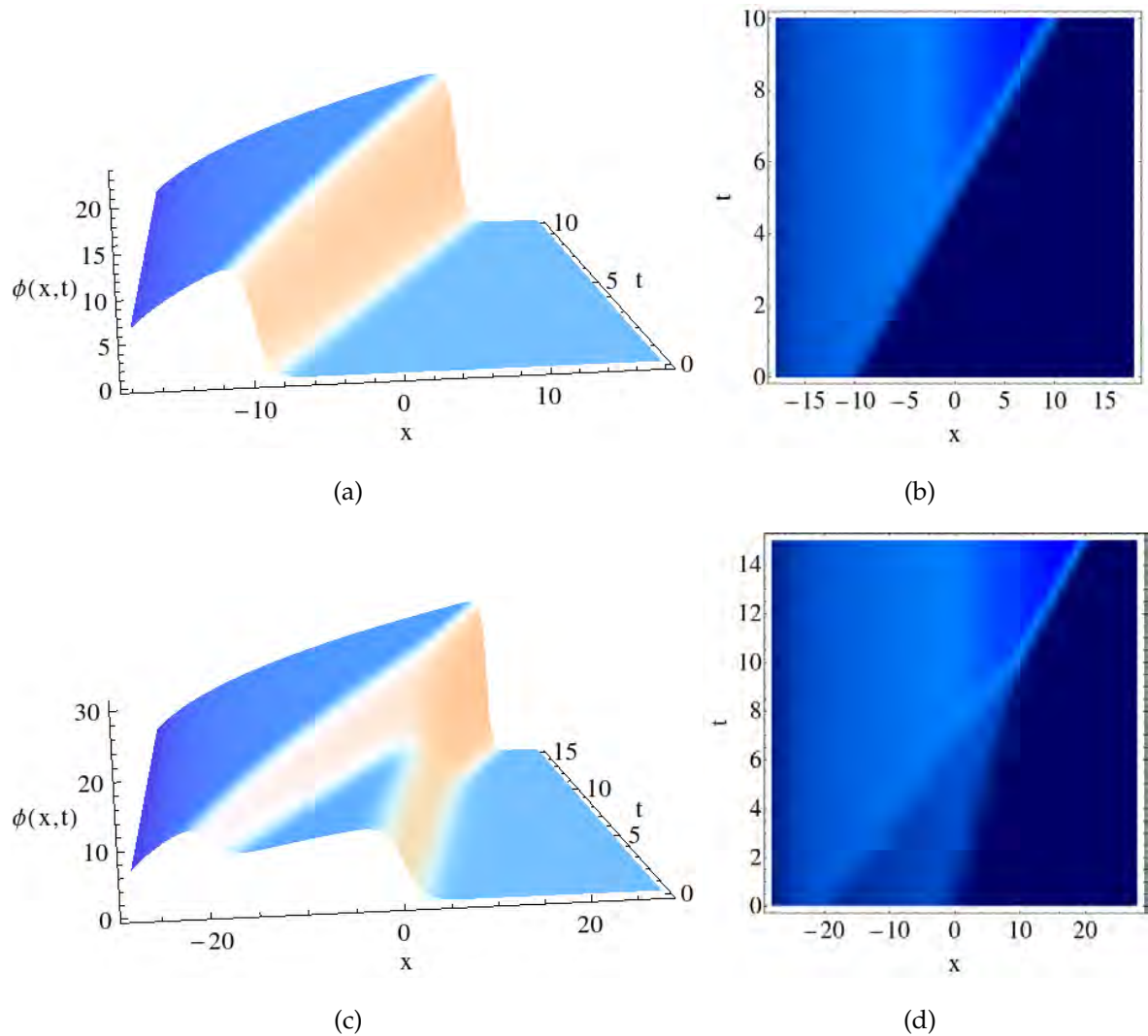


Figura 4.4: Soluciones de la ecuación (4.16) con $F(x, t) = 0$, $\gamma = 1$ y $\alpha = 0.5$. En (a) y (b), $y(x, t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$ con $a = -20$. En (c) y (d), $y(x, t) = e^{-((x+4)-t)} + e^{-2((x+10)-2t)} + 1$, siendo $a = -30$. Fuente: Esta investigación.

solitones fraccionales obtenidos a partir de (4.10). Dichos solitones interaccionan de la misma manera que en el caso ordinario, sin embargo, el valor de α modifica la forma del pulso respecto al que se presenta en el caso ordinario. En la siguiente parte se busca estudiar la forma en la que varían estas soluciones al introducirse la fuerza $F(x, t)$ en (4.1).

4.3.3. Ecuación fraccional de Burgers no homogénea

En esta sección se busca entender lo que sucede cuando el término $F(x, t)$ que aparece en la ecuación (4.16) representa una barrera de potencial que en la ecuación (4.27) implica $u(x, t) = F_e \Gamma(1 - \alpha) H(x - x_e)$ de tal manera que la fuerza externa es de la forma $F(x, t) = -2\gamma F_e (x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, siendo F_e, x_e, c constantes y el potencial $V(x, t) = F_e \Gamma(1 - \alpha) H(x - x_e) - c$. Por lo tanto la ecuación (4.25) toma la forma:

$$y_t(x, t) - \gamma y_{xx}(x, t) - cy(x, t) = 0 \quad \text{si } x < x_e, \quad (4.37)$$

$$y_t(x, t) - \gamma y_{xx}(x, t) - F_e \Gamma(1 - \alpha) y(x, t) = 0 \quad \text{si } x \geq x_e. \quad (4.38)$$

La ecuación (4.37) posee soluciones solitónicas en $x < x_e$ cuando la constante c es nula. Para la ecuación (4.38), al buscar soluciones de la forma $y(x, t) = y(z)$ con $z = x - \beta t$, la ecuación (4.38) requiere:

$$\beta y_z(z) + \gamma y_{zz}(z) + F_e \Gamma(1 - \alpha) y(z) = 0. \quad (4.39)$$

En la región $x \geq x_e$ la solución de (4.39) está dada por:

$$y(x, t) = d_1 e^{-\frac{1}{2\gamma}(\beta + \bar{F})(x - \beta t)} + d_2 e^{-\frac{1}{2\gamma}(\beta - \bar{F})(x - \beta t)}, \quad (4.40)$$

donde $\bar{F} = \sqrt{\beta^2 - 4\gamma c - 4\gamma F_e \Gamma(1 - \alpha)}$. La solución (4.40) es equivalente a la que se obtuvo en la sección 4.3.2 si se considera $\lambda'_\pm = \frac{1}{2\gamma}(\beta \pm \bar{F})$, de tal manera que la función $\psi(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} \log y(x - \beta t)$ es:

$$\Psi(x, t) = -\lambda'_+ - \frac{\partial}{\partial x} \log(1 + \exp[-\kappa(x - \beta t - b)]), \quad (4.41)$$

siendo, en este caso, $\kappa = \lambda'_+ - \lambda'_- = \frac{-\bar{F}}{\gamma}$ y $b = \frac{1}{\kappa} \log \frac{d_2}{d_1}$. Por lo dicho en la sección 4.3.2 para obtener soluciones solitónicas es necesario que $\lambda'_+ = 0$, lo cual es equivalente a quitar la barrera de potencial y en consecuencia la ecuación (4.38) no tiene soluciones solitónicas. En las Figuras 4.5(a) y 4.5(b) se grafica la interacción de un solitón con una barrera de fuerza donde se presenta un solitón incidente pero en la interacción

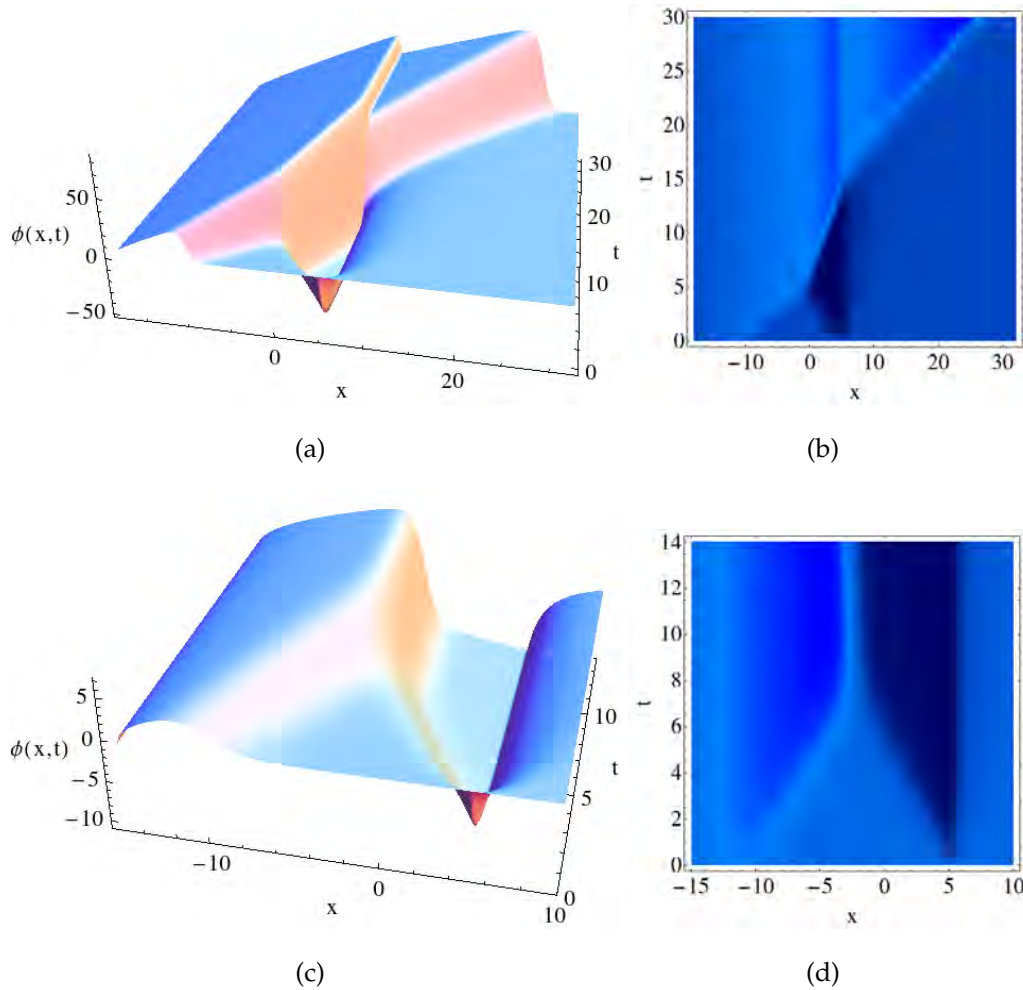


Figura 4.5: Soluciones de la ecuación (4.16) con $F(x, t) = F_e(x - x_e)^{-\alpha}H(x - x_e)$, $x_e = 5$, $F_e = 1$ y $\gamma = 1$. En (a) y (b) $\alpha = 0.1$, $y(x, t) = e^{-2((x+10)-2t)} + 1$ y $a = -20$. En (c) y (d) $\alpha = 0.5$, $y(x, t) = e^{-((x+10)-t)} + 1$ y $a = -15$. Fuente: Esta investigación.

con la barrera no hay solitones transmitidos. No obstante, si se compara con el resultado presentado en las Figuras 4.2(a) y 4.2(b) se observa una similitud dado que los resultados del caso fraccional deben coincidir con los del caso ordinario en el límite cuando el orden de la derivada tiende a un valor entero. En las figuras 4.5(c) y 4.5(d) el solitón fraccional incidente es reflejado e interacciona con el incidente tal como sucede en el caso ordinario.

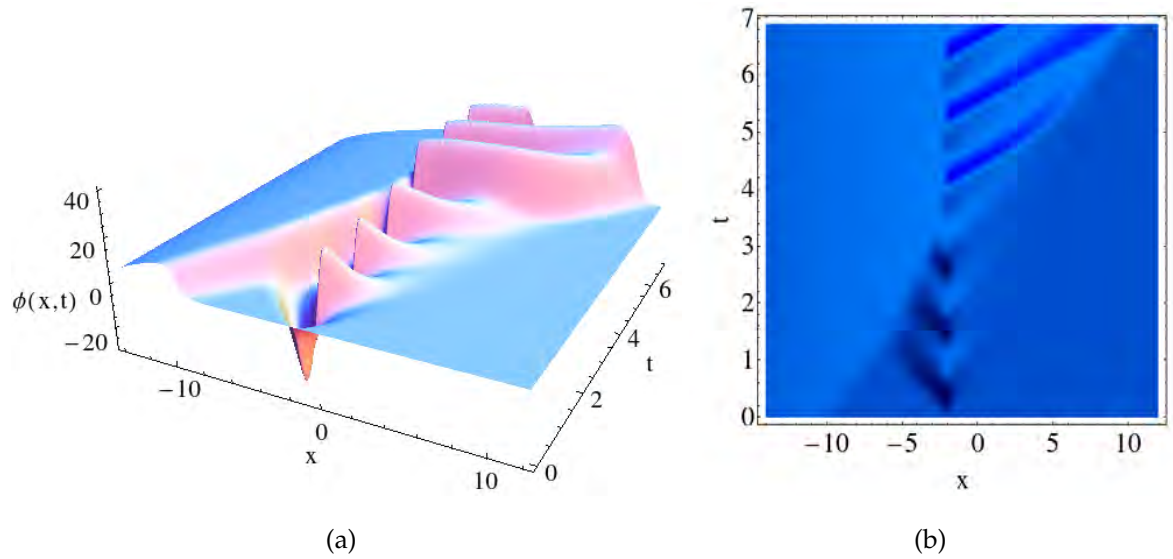


Figura 4.6: Soluciones de la ecuación (4.16) con $F(x, t) = F_e \sin(1.8\pi t)(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, $x_e = 5$, $F_e = 8$, $\gamma = 1$ y $\alpha = 0.5$. En este caso $y(x, t) = e^{-3((x+10)-3t)} + 1$ y $a = -15$. Fuente: Esta investigación.

En este caso también se puede hacer que la barrera sea variable en el tiempo, tomando $F(x, t) = f(t)(x - x_e)^{-\alpha} H(x - x_e)$, donde la solución numérica es presentada en la Figura 4.6 y muestra como mediante un $f(t)$ oscilatorio el solitón incidente genera un pulso transmitido que pierde las características de solitón.

De esta manera, en este capítulo se parte de los resultados conocidos para el estudio de la ecuación de Burgers no homogénea y se amplían con el fin de analizar un

problema no lineal con ecuaciones diferenciales fraccionales. Se presenta la ecuación de Burgers no homogénea y se resuelve con el uso de la transformación de Cole-Hopf. Con esto es posible obtener soluciones solitónicas, analizar la interacción de solitones y estudiar las consecuencias de la inclusión de una barrera de potencial tanto constante como variable. A partir de ello se procede al estudio de la ecuación de Burgers fraccional no homogénea que se resuelve con el uso de una versión modificada de la transformación de Cole-Hopf. También se obtienen soluciones solitónicas y se hace un estudio análogo al llevado a cabo con la ecuación de Burgers normal. Los resultados de los casos ordinario y fraccional presentan similitud, sin embargo, en el caso fraccional aparecen características que alteran las predicciones del cálculo ordinario, ya que existe un pulso transmitido pero este se deforma y ya no se considera una solución solitónica de la ecuación diferencial.

Conclusiones y recomendaciones

En este trabajo se estudian algunos conceptos del cálculo fraccional, se analiza la propagación de ondas electromagnéticas en medios fraccionales y se resuelve la ecuación fraccional de Burgers no homogénea. Como resultado de este estudio:

- Se observa que el concepto de derivada fraccional surge a partir de la definición de derivada ordinaria y que el concepto de integral fraccional se desarrolla desde la existencia de una fórmula general para la integral iterada. Además, bajo ciertas condiciones, la derivada e integral fraccionales se representan por una misma fórmula que tiene orden positivo para la derivada y negativo para la integral. No obstante, en cálculo fraccional se sacrifican ciertas propiedades que son útiles en cálculo ordinario. Por otra parte, se observa que existen diferentes fenómenos físicos descritos por ecuaciones diferenciales fraccionales que se asocian a procesos no locales en el espacio y a procesos con memoria. La difusión fraccional que surge a partir del estudio de la dinámica de los vuelos de Lévy es un ejemplo de fenómeno no local. A su vez, la respuesta de ciertos materiales que se obtiene a partir de la inclusión de osciladores fraccionales en la descripción del proceso de relajación es un fenómeno con memoria.
- Se resuelve la transformada de Laplace de la ecuación de onda unidimensional de un pulso eléctrico que se propaga en un material en coordenada cartesianas, cilíndricas y esféricas. La solución está relacionada con la respuesta del material. Dado que no fue posible obtener una expresión analítica para la transformada inversa de Laplace de la solución se realizó la inversión numérica utilizando diferentes modelos de respuesta y se compararon con el resultado obtenido con el modelo de Havriliak-Negami el cual es uno de los modelos más generales asociado al carácter fraccional del problema. El campo eléctrico se propaga de distintas formas en relación con los parámetros que definen el modelo de Havriliak-Negami, es decir, que los campos en los medios fraccionales difieren significativamente con respecto a la respuesta de Debye, que es el modelo más

simple.

- Se resuelve la ecuación fraccional de Burgers no homogénea en el caso en el que el término no homogéneo hace referencia a una barrera de potencial y se encuentra que la ecuación tiene soluciones solitónicas cuando el pulso aún no llega a la barrera, pero dicho pulso pierde las características de solitón al ser transmitido por la barrera. Esto contrasta con los resultados del caso ordinario donde se encuentran solitones transmitidos cuando la barrera es constante.

Con esto se han presentado los diferentes resultados del trabajo. Debido a que la introducción del cálculo fraccional en problemas de física es relativamente reciente, se recomienda en futuras investigaciones:

- Desarrollar una extensión de la teoría de Sturm-Liouville y funciones ortogonales con el fin de incluir derivadas fraccionales. En este trabajo se presentó únicamente el oscilador armónico fraccional, pero, la teoría puede ser más general.
- Explorar nuevos métodos numéricos con el fin de resolver de manera eficiente ecuaciones diferenciales con derivadas fraccionales.
- Con respecto al electromagnetismo en medios fraccionales, se propone estudiar interfases de materiales con el fin de observar el efecto producido en la onda al alternar entre diversos medios. También puede ser de utilidad en aplicaciones introducir términos no lineales con el fin de establecer solitones en medios fraccionales.
- Los resultados obtenidos para la ecuación fraccional de Burgers sugieren el estudio de la ecuación de Burgers con derivadas fraccionales temporales, para este tipo de ecuaciones no se conoce un método para obtener soluciones analíticas.

ANEXOS

Apéndice A

Método de Zakian

El método de Zakian para obtener la transformada de Laplace inversa $f(t)$ de la función $F(s)$ utiliza la siguiente serie infinita de evaluaciones ponderadas del dominio de la función [43]:

$$f(t) = \frac{2}{t} \sum_{i=1}^n \text{Re} \left\{ K_i F \left(\frac{\alpha_i}{t} \right) \right\}, \quad (\text{A.1})$$

donde las constantes K_i y α_i para $n = 5$ están dadas en la Tabla A.1. Este método es rápido y fácil de implementar y hay un parámetro arbitrario, n , para ser determinado. El valor de n puede ser optimizado para obtener soluciones precisas. El método de Zakian es satisfactorio para funciones que tienen un término exponencial positivo, e^t .

i	α	K
1	$12.83767675 + j1.666063445$	$-36902.08210 + j196990.4257$
2	$12.22613209 + j5.012718792$	$+61277.02524 - j95408.62551$
3	$10.93430308 + j8.409673116$	$-61277.02524 + j95408.62551$
4	$8.776434715 + j11.92185389$	$+4655.361138 - j1.901528642$
5	$5.225453361 + j15.72952905$	$-118.7414011 - j141.3036911$

Tabla A.1: En esta Tabla aparecen los primeros cinco valores necesarios al usar el método de Zakian para la transformada inversa de Laplace. La constante j es el número imaginario de los números complejos $j = \sqrt{-1}$

En la Figura A.1 se compara el método de inversión numérico de Zakian de las funciones $f(t) = e^{-t}$ y $f(t) = J_0(t)$ con las funciones analíticas respectivas.

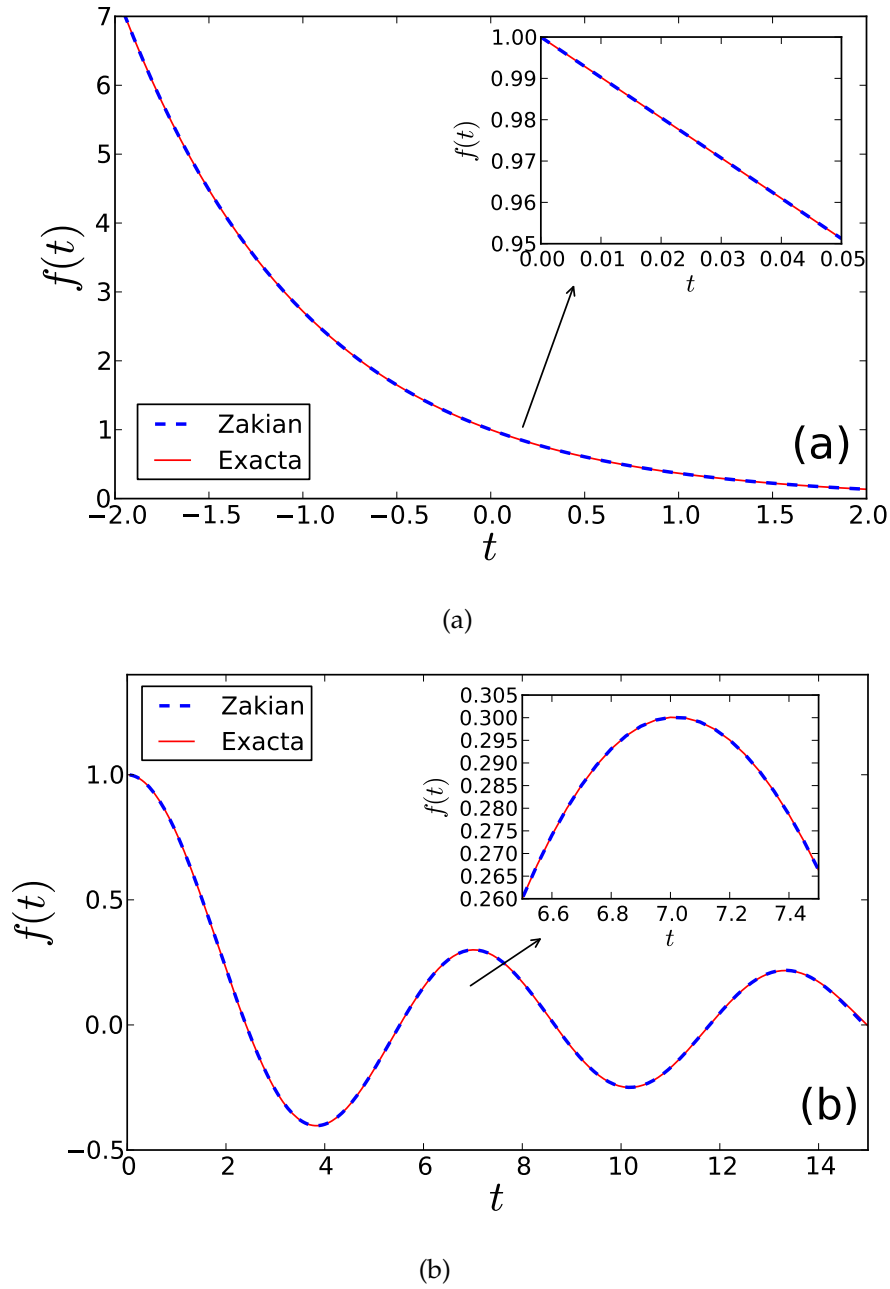


Figura A.1: Método de Zakian de inversión numérica. En (a) aparece la función $f(t) = e^{-t}$ cuya transformada de Laplace es $\frac{1}{s+1}$. En (b) se analiza la función $f(t) = J_0(t)$ con transformada de Laplace dada por $\frac{1}{\sqrt{s^2+1}}$. Fuente: Esta investigación.

Bibliografía

- [1] Keith B Oldham and Jerome Spanier. *The fractional calculus*, volume 17. Dover, New York, NY, USA, 1st edition, 1974.
- [2] José Manuel Sánchez Muñoz. Génesis y desarrollo del cálculo fraccional. *Pensamiento Matemático*, 33(1):4, Octubre 2011.
- [3] SA David, JL Linares, and EMJA Pallone. Fractional order calculus: historical apologia, basic concepts and some applications. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 33(4):4302–4302, October/2010–November/2011 2011.
- [4] H Schiessel, R Metzler, A Blumen, and T Nonnenmacher. Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 28(23):6567–6584, July 1995.
- [5] Boris Cristhian Romero Suárez et al. *Método de Lattice Boltzmann para difusión anómala en medios porosos*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, 2011.
- [6] S Gabriel, RW Lau, and Camelia Gabriel. The dielectric properties of biological tissues: III. parametric models for the dielectric spectrum of tissues. *Physics in medicine and biology*, 41(11):2271, April 1996.
- [7] CZ Zhao, M Werner, S Taylor, PR Chalker, AC Jones, Chun Zhao, et al. Dielectric relaxation of la-doped zirconia caused by annealing ambient. *Nanoscale Research Letters*, 6(1):1–6, 2010.
- [8] Igor Podlubny. *Generalized viscoelastic models: their fractional equations with solutions*, volume 198. Academic press, New York, NY, USA, 1998.
- [9] Kai Diethelm. *The analysis of fractional differential equations: an application-oriented exposition using differential operators of Caputo type*, volume 2004. Springer Verlag, New York, NY, USA, 2010.

- [10] George B Arfken, Hans J Weber, and Frank E Harris. *Mathematical methods for physicists*. Academic press, 5th edition, 2001.
- [11] Kenneth S Miller and Bertram Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. *John Wiley & Sons*, 1993.
- [12] E Capelas de Oliveira, Francesco Mainardi, and Jayme Vaz Jr. Models based on Mittag-Leffler functions for anomalous relaxation in dielectrics. *The European Physical Journal Special Topics*, 193(1):161–171, June-November 2011.
- [13] Yoav Sagi, Miri Brook, Ido Almog, and Nir Davidson. Observation of anomalous diffusion and fractional self-similarity in one dimension. *Physical Review Letters*, 108(9):093002, November-March 2012.
- [14] Nick Laskin. Fractional Schrödinger equation. *Physical Review E*, 66(5):056108, June-November 2002.
- [15] Matthew Frank Causley. *Asymptotic and numerical analysis of time-dependent wave propagation in dispersive dielectric media that exhibit fractional relaxation*. PhD thesis, The State University of New Jersey, 2011.
- [16] Martha Elena Londoño López et al. *Principio fenomenológico del comportamiento dieléctrico de un hidrogel de alcohol polivinílico-Phenomenological principle dielectrical behaviour of poly (vinyl alcohol) hidrogel*. PhD thesis, Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, 2011.
- [17] AM Mathai and Hans J Haubold. *Special functions for applied scientists*. Springer, New York, NY, USA, 2008.
- [18] Sadri Hassani. *Mathematical Methods: For Students of Physics and Related Fields*. Springer, New York, NY, USA, 2nd edition, 2009.
- [19] M Di Paola and A Pirrotta. Fractional calculus application to visco-elastic solids. *Meccanica dei Materiali e delle Strutture*, 1(2):52–62, -.

- [20] V Uchaikin, R Sibatov, and D Uchaikin. Memory regeneration phenomenon in dielectrics: the fractional derivative approach. *Physica Scripta*, 2009(T136):014002, January-October 2009.
- [21] Teresa Pierantozzi. *Estudio de generalizaciones fraccionarias de las ecuaciones estándar de difusión y de ondas*. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones, 2007.
- [22] R Masot. *Desarrollo de un sistema de medida basado en espectroscopía de impedancia para la determinación de parámetros fisicoquímicos en alimentos*. PhD thesis, Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, Spain, 2010.
- [23] B.J. Ryszard. Dielectrics experimental techniques. In *Presentación*. Ryszard, B.J., 2011.
- [24] J.Z. Bao, S.T. Lu, W.D. Hurt, M.E. Belt, D.D. Cox, and P.J. Henry. Dielectric measurements of brain tissues in the frequency range between 45 mhz and 26.5 ghz. In *The Eighteenth Annual Meeting of the Bioelectromagnetics Society*. The Eighteenth Annual Meeting of the Bioelectromagnetics Society, 1996.
- [25] AAM Arafa, SZ Rida, and M Khalil. Fractional modeling dynamics of HIV and CD4+ T-cells during primary infection. *Nonlinear biomedical physics*, 6(1):1, 2012.
- [26] Patrick O Kano and Moysey Brio. Application of Post's formula to optical pulse propagation in dispersive media. *Computers & mathematics with applications*, 59(2):629–650, 2010.
- [27] Ya E Ryabov and A Puzenko. Damped oscillations in view of the fractional oscillator equation. *Physical Review B*, 66(18):184201, May-November 2002.
- [28] Rudolf Gorenflo, Francesco Mainardi, Daniele Moretti, Gianni Pagnini, and Paolo Paradisi. Discrete random walk models for space-time fractional diffusion. *Chemical physics*, 284(1):521–541, 2002.

-
- [29] AA Stanislavsky. Fractional oscillator. *Physical Review E*, 70(5):051103, November 2004.
- [30] Masataka Fukunaga and Nobuyuki Shimizu. Initial condition problems of fractional viscoelastic equations. *ASME DETC 2003*, pages 2–6, 2003.
- [31] Constantine A Balanis. *Advanced engineering electromagnetics*, volume 205. Wiley New York, Arisona, USA, 4th edition, 1989.
- [32] Enrico Valdinoci. From the long jump random walk to the fractional laplacian. *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SeMA*, (49):3344, May-August 2009.
- [33] Pierre Barthelemy, Jacopo Bertolotti, and Diederik S Wiersma. A lévy flight for light. *Nature*, 453(7194):495–498, 2008.
- [34] SV Buldyrev, S Havlin, A Ya Kazakov, MGE Da Luz, EP Raposo, HE Stanley, and GM Viswanathan. Average time spent by lévy flights and walks on an interval with absorbing boundaries. *Physical Review E*, 64(4):041108, 2001.
- [35] YJ Choi and SK Chung. Finite element solutions for the space fractional diffusion equation with a nonlinear source term. In *Abstract and Applied Analysis*, volume 2012. Hindawi Publishing Corporation, 2012.
- [36] Ralf Metzler and Joseph Klafter. The restaurant at the end of the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 37(31):R161, April 2004.
- [37] RK Saxena, AM Mathai, and HJ Haubold. Solutions of certain fractional kinetic equations and a fractional diffusion equation. *Journal of Mathematical Physics*, 51:103506, 2010.
- [38] Justyna Trzmiel, Agnieszka Jurlewicz, and Marek Teuerle. Comparison of the two-power-law generalized Mittag-Leffler and Havriliak-Negami dielectric re-

- laxation responses. In *Solid Dielectrics (ICSD), 2010 10th IEEE International Conference on*, pages 1–4, Potsdam, Germany, 2010. IEEE.
- [39] F Alvarez, A Alegra, and J Colmenero. Relationship between the time-domain kohlrausch-williams-watts and frequency-domain Havriliak-Negami relaxation functions. *Physical Review B*, 44(14):7306, April-October 1991.
- [40] Paulius Miskinis. The Havriliak-Negami susceptibility as a nonlinear and non-local process. *Physica Scripta*, 2009(T136):014019, January-October 2009.
- [41] Vasily E Tarasov. Universal electromagnetic waves in dielectric. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 20(17):175223, 2008.
- [42] RT Sibatov, VV Uchaikin, and DV Uchaikin. Fractional wave equation for dielectric medium with Havriliak-Negami response. In *Fractional Dynamics and Control*, pages 293–301. Springer, 2012.
- [43] Hassan Hassanzadeh and Mehran Pooladi-Darvish. Comparison of different numerical laplace inversion methods for engineering applications. *Applied mathematics and computation*, 189(2):1966–1981, 2007.
- [44] Friedrich W Hehl et al. *Foundations of classical electrodynamics: Charge, flux, and metric*, volume 33. Springer, 2003.
- [45] Robert W Boyd. *Nonlinear optics*. Academic press, New York, NY, USA, 2003.
- [46] Paulius Miškinis et al. A generalization of the hopf-cole transformation. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 9:016–19, 2013.
- [47] Erik Aurell, Carlos Mejía-Monasterio, and Paolo Muratore-Ginanneschi. Optimal protocols and optimal transport in stochastic thermodynamics. *Physical review letters*, 106(25):250601, 2011.
- [48] Tsevi Beatus, Tsvi Tlusty, and Roy Bar-Ziv. Burgers shock waves and sound in a 2d microfluidic droplets ensemble. *Physical review letters*, 103(11):114502, 2009.

- [49] Rugeles Pérez Alvaro Pérez Riascos Alejandro. Soluciones analíticas de la ecuación de Burgers no homogénea. *En evaluación para publicación en la Revista Colombiana de Física*, 2011.
- [50] Cyril Imbert, Antoine Mellet, and Régis Monneau. Non-local operators and applications. 2008.
- [51] Esmaeel Hesameddini and Razieh Gholampour. Soliton solutions of the burgers-Type equation. *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 5(31):1541–1552, 2010.
- [52] Julian D Cole et al. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics. *Quart. Appl. Math*, 9(3):225–236, 1951.
- [53] Eberhard Hopf. The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$. *Communications on Pure and Applied mathematics*, 3(3):201–230, 1950.
- [54] John Rozier Cannon. *The one-dimensional heat equation*, volume 23. Cambridge University Press, 1984.
- [55] P Miškinis. Some properties of fractional burgers equation. *Mathematical Modelling and Analysis*, 7(1):151–158, October-November 2002.