

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Formulación simpléctica de campos vectoriales

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

Bayron Andres Campaña Narváez

San Juan de Pasto, Colombia

Junio de 2026

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Formulación simpléctica de campos vectoriales

Bayron Andres Campaña Narváez

TRABAJO DE GRADO

Director:

Germán Enrique Ramos Zambrano

Doctor en física

San Juan de Pasto, Colombia

Junio de 2026

©2026 -Bayron Andres Campaña Narváz

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Germán Enrique Ramos Zambrano

Director

Yithsbey Giraldo Úsuga

Jurado

Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

San Juan de Pasto, 5 de Junio de 2026

Agradecimientos

El desarrollo del presente trabajo de grado fue posible gracias al apoyo académico y personal de diversas personas, a quienes expreso mi más sincero y respetuoso agradecimiento.

En primer lugar, manifiesto mi profundo agradecimiento a mi familia y a las personas cercanas, por su apoyo incondicional, comprensión y constante apoyo a lo largo de este proceso, lo cual fue fundamental para alcanzar esta etapa de mi formación.

Agradezco al PhD Germán Enrique Ramos Zambrano, director de este trabajo, por su orientación, permanente acompañamiento y valiosas observaciones durante su desarrollo, las cuales fueron determinantes para la consolidación de los resultados presentados.

A mi familia, por su apoyo constante y su confianza a lo largo de este proceso.

*«El éxito pertenece solo a aquellos
que están dispuestos a trabajar
más duro que nadie.»*

Sir Lewis Hamilton

Formulación simpléctica de campos vectoriales

Resumen

El estudio de sistemas físicos con ligaduras es fundamental en la formulación hamiltoniana de teorías clásicas y de campos. Estos sistemas, descritos por Lagrangianos singulares, requieren métodos especializados para identificar sus grados de libertad y describir su dinámica. En este trabajo de grado se aplica de manera sistemática el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw al análisis de sistemas con grados de libertad finitos e infinitos, con el objetivo de caracterizar su estructura dinámica y explicitar los pasos intermedios del procedimiento.

La metodología empleada es teórica–analítica y se basa en la reformulación de los sistemas mediante Lagrangianos de primer orden, la construcción de las matrices simplécticas y la identificación de las ligaduras asociadas. El formalismo se aplica al modelo de Landau, a la partícula libre sobre una superficie y a los campos de Proca real y complejo. Los resultados muestran que el método de Faddeev–Jackiw reproduce la dinámica obtenida mediante el formalismo de Dirac de forma más directa, sin clasificar las ligaduras, constituyéndose en una herramienta clara y eficiente para el estudio de sistemas con restricciones.

Palabras clave: *Formalismo simpléctico; sistemas con ligaduras; dinámica hamiltoniana; campo de Proca; modelo de Landau.*

Symplectic formulation of vector fields

Abstract

The study of physical systems with constraints is fundamental in the Hamiltonian formulation of classical mechanics and field theories. Such systems, described by singular Lagrangians, require specialized methods to identify their degrees of freedom and to describe their dynamics. In this undergraduate thesis, the symplectic formalism of Faddeev–Jackiw is systematically applied to the analysis of systems with finite and infinite degrees of freedom, with the aim of characterizing their dynamical structure and making explicit the intermediate steps of the procedure.

The methodology is theoretical and analytical in nature and is based on the reformulation of the systems through first–order Lagrangians, the construction of the corresponding symplectic matrices, and the identification of the associated constraints. The formalism is applied to the Landau model, to a free particle on a surface, and to the real and complex Proca fields. The results show that the Faddeev–Jackiw method reproduces the dynamics obtained through the Dirac formalism in a more direct way, without classifying constraints, thus constituting a clear and efficient tool for the study of constrained systems.

Keywords: *Symplectic formalism; constrained systems; Hamiltonian dynamics; Proca field; Landau model.*

Glosario

- Variable simpléctica:** Conjunto de variables que parametrizan el sistema en el formalismo de Faddeev–Jackiw, sobre las cuales se define la estructura dinámica a través de la matriz simpléctica.
- Espacio simpléctico:** Espacio de variables dinámicas coordinatizado por las variables simplécticas, en el cual la estructura del sistema queda determinada por una forma simpléctica.
- Espacio de fase extendido:** Espacio de variables ampliado que incluye, además de las variables originales, los multiplicadores introducidos durante el procedimiento iterativo para incorporar las ligaduras.
- 1-forma simpléctica:** Objeto definido por los coeficientes que acompañan a las derivadas temporales en el lagrangiano de primer orden, a partir del cual se construye la matriz simpléctica.
- Matriz simpléctica:** Matriz antisimétrica obtenida a partir de la 1-forma simpléctica, que codifica la estructura geométrica del sistema y cuya inversa define los corchetes generalizados.
- Matriz simpléctica singular:** Matriz simpléctica cuyo determinante se anula, lo que implica la existencia de modos cero y la presencia de ligaduras.
- Matriz simpléctica no singular:** Matriz simpléctica invertible que define completamente la dinámica del sistema en términos de las variables simplécticas.
- Modo cero:** Vector no trivial que anula la matriz simpléctica. Su existencia indica la presencia de degeneración en la estructura simpléctica y conduce a la aparición de ligaduras.
- Lagrangiano singular:** Lagrangiano cuya estructura impide definir una matriz simpléctica invertible en una etapa dada, lo que se manifiesta en la aparición de modos cero.
- Ligaduras:** Condiciones que restringen el espacio de variables del sistema, definidas a partir de los modos cero de la matriz simpléctica y que delimitan la dinámica a una subvariedad.
- Multiplicador de Lagrange dinámico:** Variable auxiliar cuya derivada temporal aparece en el lagrangiano, permitiendo incorporar las ligaduras dentro de la estructura simpléctica.

- Potencial simpléctico:** Función $H(\xi)$ que aparece en el lagrangiano de primer orden y determina la evolución del sistema. En los casos considerados, coincide con el Hamiltoniano obtenido mediante el procedimiento canónico estándar.
- Corchetes generalizados:** Estructura bilineal definida como la inversa de la matriz simpléctica final, que determina la dinámica del sistema en términos de las variables independientes.
- Sistema con ligaduras:** Sistema cuya estructura simpléctica presenta degeneración, lo que requiere la imposición de condiciones adicionales para definir de manera consistente su dinámica.
- Teoría no gauge:** Teoría en la cual la degeneración de la estructura simpléctica no está asociada a simetrías gauge, sino a la presencia de ligaduras de segunda clase que restringen directamente el espacio de variables.
- Corchetes de Dirac:** Estructura de corchetes obtenida en el formalismo hamiltoniano para sistemas con ligaduras de segunda clase, equivalente a los corchetes generalizados en el enfoque de Faddeev–Jackiw.

Índice general

1. Introducción	13
2. Planteamiento del problema	15
3. Objetivos	16
3.1. Objetivo General	16
3.2. Objetivos específicos	16
4. Formalismo de Faddeev–Jackiw para sistemas singulares sin simetrías gauge	17
4.1. Formalismo de Faddeev–Jackiw en teoría de campos	21
5. Modelo de Landau	24
6. Partícula libre sobre una superficie	29
7. Campo de Proca Real	36
8. Campo de Proca Complejo	43
9. Conclusiones	51
Apéndices	53
A. Modelo de Landau	54
A.1. Análisis mediante el formalismo de Dirac	54
B. Partícula libre sobre una superficie	58
B.1. Linealización del lagrangiano	58
B.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$	59
B.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$	59
B.4. Obtención del potencial simpléctico $H^{(1)}$	60
B.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$	60
B.6. Determinación del modo cero $v_i^{(1)}$ y carácter singular de la matriz $f_{ij}^{(1)}$	61
B.7. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(1)}$	62
B.8. Obtención del potencial simpléctico $H^{(2)}$	63
B.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$	64
B.10. Carácter no singular de la matriz $f_{ij}^{(2)}$	65
B.11. Inversión de la matriz $f_{ij}^{(2)}$	68
C. Campo de Proca Real	70
C.1. Cálculo del momento canónico conjugado	70
C.2. Ecuación de movimiento para A_0	71
C.3. Linealización de la densidad lagrangiana	72

C.4. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	73
C.5. Obtención de la ligadura $\Omega^{(0)}(\mathbf{x})$	74
C.6. Cálculo del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$	75
C.7. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}$	76
C.8. Análisis de la regularidad de la matriz $f_{ab}^{(1)}$	77
C.9. Inversión de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	80
D. Campo de Proca Complejo	83
D.1. Cálculo de los momentos canónicos conjugados	83
D.2. Ecuación de movimiento para A_0 y A_0^*	84
D.3. Linealización de la densidad lagrangiana	85
D.4. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}$	86
D.5. Obtención de las ligaduras $\Omega^{(0)}$ y $\Omega^{*(0)}$	88
D.6. Cálculo del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$	89
D.7. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}$	90
D.8. Análisis de la regularidad de la matriz $f_{ab}^{(1)}$	91
D.9. Inversión de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	93
Bibliografía	96

Capítulo 1

Introducción

En la física teórica, los sistemas singulares aparecen de manera natural tanto en la mecánica clásica como en la teoría de campos. Estos sistemas se caracterizan porque la transición de la formulación lagrangiana a la hamiltoniana no puede realizarse de forma directa, debido a que la matriz hessiana asociada al lagrangiano es singular. Esta degeneración impide despejar de manera única todas las velocidades en términos de los momentos canónicos, lo que revela la existencia de ligaduras que restringen la dinámica del sistema [1, 2].

El tratamiento sistemático de estos sistemas fue desarrollado por Dirac [1], mediante un procedimiento basado en la identificación de ligaduras primarias y secundarias, su clasificación en ligaduras de primera y segunda clase, y la construcción de los corchetes de Dirac. Dentro de este formalismo resulta fundamental la distinción entre igualdades débiles y fuertes. Las primeras corresponden a relaciones que sólo se satisfacen sobre la superficie de ligadura en el espacio de fase, mientras que las segundas son válidas de manera idéntica en toda la dinámica del sistema. Esta diferenciación permite imponer las restricciones de manera consistente sin alterar la estructura hamiltoniana. En particular, cuando aparecen ligaduras de segunda clase, los corchetes de Dirac garantizan una descripción dinámica consistente al eliminar las variables no independientes del espacio de fase. Sin embargo, la aplicación explícita de este algoritmo puede volverse algebraicamente compleja en sistemas con múltiples ligaduras o con un gran número de variables dinámicas, especialmente en teorías de campos [2].

Diversos sistemas con ligaduras de segunda clase han sido estudiados dentro de este marco, tanto en mecánica clásica como en teoría de campos. En sistemas con un número finito de grados de libertad, el modelo de Landau en el límite de masa nula constituye un ejemplo representativo, donde la presencia del campo magnético induce una estructura no canónica en el espacio de fase y conduce a corchetes de Dirac no triviales. En este trabajo, su tratamiento mediante el método de Dirac se desarrolla en el Apéndice A.1, con el propósito de compararlo con los resultados obtenidos posteriormente a través del formalismo de Faddeev–Jackiw. De manera similar, la partícula libre sobre una superficie proporciona un ejemplo geométrico en el que una ligadura holónoma reduce el espacio de configuración y modifica la dinámica del sistema como se muestra en [3]. En teoría de campos, el campo de Proca real representa un caso prototípico de teoría no gauge con ligaduras de segunda clase, cuya estructura canónica ha sido desarrollada en [4, 5]. Por su parte, el campo de Proca complejo extiende esta formulación al considerar el campo y su conjugado como variables independientes, dando lugar a una duplicación de la estructura dinámica y de ligaduras [4].

Como alternativa al enfoque hamiltoniano de Dirac, Faddeev y Jackiw propusieron un formalismo simpléctico basado en la estructura del espacio de fase [6]. Este enfoque opera a nivel lagrangiano y requiere una dependencia lineal en las derivadas temporales de las variables dinámicas; sin embargo, mediante la introducción de momentos conjugados, un lagrangiano singular de segundo orden puede reescribirse en una formulación equivalente de primer orden [7, 8]. En esta descripción, la dinámica del sistema queda codificada en la matriz simpléctica, cuya degeneración permite identificar ligaduras a través de sus modos cero. Estas condiciones se incorporan iterativamente al lagrangiano hasta obtener una matriz no singular, cuya inversa define los corchetes generalizados [9, 8].

En sistemas con ligaduras de segunda clase y sin simetrías gauge, el procedimiento de Faddeev–Jackiw

permite obtener directamente una matriz simpléctica regular sin imponer condiciones adicionales. Los trabajos de Barcelos-Neto y Wotzasek [9, 8] establecen de manera general la equivalencia entre los corchetes generalizados y los corchetes de Dirac en este tipo de sistemas. A partir de esta formulación, distintos trabajos han desarrollado aplicaciones concretas que sirven como referencia para el presente estudio, entre ellos el análisis de la partícula libre sobre una superficie [9, 8], la electrodinámica de Proca real [10] y el tratamiento canónico del campo de Proca complejo [4]. En el caso del modelo de Landau, aunque su formulación no se desarrolla usualmente dentro del esquema simpléctico iterativo, su estructura puede compararse con los resultados obtenidos mediante el formalismo de Hamilton–Jacobi y el tratamiento de sistemas con ligaduras de segunda clase discutido en [11, 5], los cuales se utilizan como criterio adicional de consistencia.

No obstante, en varios de estos trabajos la exposición se concentra principalmente en los resultados finales, como la identificación de las ligaduras, la forma de la matriz simpléctica regular y los corchetes generalizados, sin presentar de manera detallada los pasos intermedios del procedimiento iterativo. En particular, la construcción explícita de cada matriz simpléctica, la determinación de los modos cero y la incorporación sucesiva de las ligaduras no siempre se desarrollan completamente. Por esta razón, en este trabajo se retoman estos sistemas con el propósito de realizar una aplicación sistemática y explícita del formalismo de Faddeev–Jackiw, mostrando cada etapa del proceso desde la formulación lagrangiana inicial hasta la obtención de los corchetes generalizados, y permitiendo una comparación directa con otros enfoques canónicos.

Este trabajo de grado se estructura de la siguiente manera. En el Capítulo 4 se presenta el desarrollo del método de Faddeev–Jackiw para sistemas singulares sin simetrías gauge, describiendo el procedimiento iterativo que permite identificar ligaduras a partir de la singularidad de la matriz simpléctica y mostrando cómo su regularización conduce a los corchetes generalizados.

En el Capítulo 5 se analiza el modelo de Landau en el límite de masa nula, un sistema mecánico con un número finito de grados de libertad cuya dinámica queda descrita desde una formulación de primer orden. Este caso permite estudiar una estructura simpléctica no degenerada desde el inicio y determinar las variables físicas junto con sus corchetes generalizados.

En el Capítulo 6 se estudia la partícula libre sobre una superficie, donde una ligadura geométrica impone restricciones sobre el espacio de configuración. Este ejemplo permite desarrollar explícitamente el procedimiento iterativo del formalismo de Faddeev–Jackiw y obtener los corchetes generalizados.

En el Capítulo 7 se examina el campo de Proca real, extendiendo la metodología al caso de teorías de campos con infinitos grados de libertad. En este sistema se analiza la componente temporal del campo y la forma en que las variables no dinámicas se incorporan en el formalismo simpléctico, permitiendo identificar los campos físicos y sus corchetes generalizados.

En el Capítulo 8 se analiza el campo de Proca complejo, donde el tratamiento del campo y su conjugado como variables independientes conduce a una duplicación de la estructura dinámica respecto al caso real. Este ejemplo permite extender el análisis a una teoría con mayor contenido estructural, manteniendo el carácter no gauge y la presencia de ligaduras de segunda clase.

Finalmente, en el Capítulo 9 se presentan las conclusiones generales derivadas de este trabajo.

Capítulo 2

Planteamiento del problema

En la física teórica, los sistemas con ligaduras aparecen de manera natural tanto en la mecánica clásica como en las teorías de campos. Su tratamiento requiere métodos que permitan incorporar de forma consistente las restricciones presentes y establecer una dinámica bien definida. El formalismo de Dirac ha sido tradicionalmente la herramienta estándar para este propósito.

Como alternativa, el formalismo de Faddeev–Jackiw ofrece un enfoque basado en la estructura simpléctica, en el cual las ligaduras se incorporan directamente sin necesidad de una clasificación jerárquica. Sin embargo, en gran parte de la literatura especializada este formalismo se presenta de manera condensada, enfatizando los resultados finales y omitiendo el desarrollo detallado del procedimiento iterativo. En particular, la ausencia de los pasos intermedios dificulta comprender cómo se identifican las ligaduras, cómo evoluciona la matriz simpléctica en cada etapa y de qué manera se obtienen los corchetes generalizados a partir de su inversa. Esto limita la aplicación sistemática del método y su interpretación en modelos de distinta complejidad.

En este contexto, surge la necesidad de desarrollar una aplicación explícita del formalismo de Faddeev–Jackiw en sistemas representativos, tanto con un número finito como infinito de grados de libertad, que permita reconstruir de manera clara cada una de las etapas del procedimiento.

En consecuencia, la pregunta que guía este trabajo es:

¿Cómo se implementa de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw en sistemas representativos de distinta complejidad y cómo se manifiesta, a nivel de los corchetes generalizados, su equivalencia con el formalismo de Dirac?

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivo General

Aplicar de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw al estudio de sistemas con grados de libertad finitos e infinitos, descritos por Lagrangianos singulares, con el propósito de comprender y caracterizar su estructura dinámica.

3.2. Objetivos específicos

- Analizar el modelo de Landau en el límite de masa nula bajo el formalismo de Faddeev–Jackiw, determinando su estructura simpléctica y las variables dinámicas independientes que describen el sistema.
- Abordar el problema de la partícula libre sobre a una superficie mediante el formalismo de Faddeev–Jackiw, con el fin de comprender la evolución del sistema.
- Implementar el formalismo de Faddeev–Jackiw al campo de Proca real y complejo, con el propósito de caracterizar la estructura de ligaduras y la dinámica asociada.
- Contrastar la estructura de ligaduras y los corchetes generalizados obtenidos mediante el formalismo de Faddeev–Jackiw con los resultados reportados en el formalismo de Dirac.

Capítulo 4

Formalismo de Faddeev–Jackiw para sistemas singulares sin simetrías gauge

El método propuesto por Ludvig Faddeev y Roman W. Jackiw en 1988 [6, 7] constituye una alternativa al enfoque de Dirac para el análisis de sistemas singulares, basándose en la estructura simpléctica del espacio de fase. A diferencia del método de Dirac [1, 2], en el que las ligaduras se clasifican en distintas clases, el formalismo de Faddeev–Jackiw permite identificar de manera sistemática las ligaduras asociadas a la degeneración de la estructura simpléctica, sin recurrir a una clasificación explícita. No obstante, dado que el método se formula a partir de un lagrangiano de primer orden, la obtención completa de las ligaduras depende de la elección de variables simplécticas, por lo que, en general, no todas las ligaduras presentes en la formulación lagrangiana original, en particular aquellas que surgen en la definición de los momentos canónicos, aparecen de manera explícita en este procedimiento. El punto de partida de este formalismo es un lagrangiano de primer orden en las derivadas temporales, que puede escribirse de forma general como

$$L(\xi, \dot{\xi}) = a_i(\xi)\dot{\xi}_i - H(\xi), \quad (4.1)$$

donde ξ_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) representa el conjunto de variables simplécticas que parametrizan el espacio de fase, $\dot{\xi}_i$ denota sus derivadas temporales, $a_i(\xi)$ son las componentes de una 1-forma definida en dicho espacio, cuya estructura determina la matriz simpléctica del sistema, y $H(\xi)$ es el potencial, también conocido como el hamiltoniano.

El lagrangiano que describe la dinámica en el espacio de configuración (q_i, \dot{q}_i) depende funcionalmente de estas variables, es decir,

$$L = L(q_i, \dot{q}_i), \quad (4.2)$$

Es posible reformular la dinámica del sistema mediante una descripción equivalente basada en el hamiltoniano, denotado como $H(q_i, p_i)$, el cual es función de las coordenadas generalizadas q_i y de sus momentos canónicos conjugados p_i [12, 13]. Estos últimos se definen a partir de la relación

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.3)$$

En el caso en que el lagrangiano asociado al sistema sea regular, la relación anterior permite escribir todas las velocidades generalizadas \dot{q}_i en función de las coordenadas generalizadas q_i y de los momentos canónicos conjugados p_i . Esto puede representarse como

$$\dot{q}_i = g_i(q, p). \quad (4.4)$$

Esta expresión hace posible establecer una relación entre el lagrangiano y el hamiltoniano mediante una transformación de Legendre, la cual se define como

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i) \Big|_{\dot{q}_i = g_i(q, p)}. \quad (4.5)$$

A partir de esta definición, se observa que el miembro derecho deja de depender explícitamente de las velocidades generalizadas \dot{q}_i . En consecuencia, el lagrangiano puede reescribirse de manera equivalente como

$$L_C(q_i, p_i) \equiv L(q_i, \dot{q}_i) \Big|_{\dot{q}_i = g_i(q, p)} = p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i). \quad (4.6)$$

Donde $L_C(q_i, p_i)$ es conocido como el lagrangiano canónico, cuya característica principal es que está definido en el espacio de fase (q_i, p_i) . Este objeto desempeña un papel esencial en el desarrollo del método, ya que permite reescribir un lagrangiano de orden arbitrario en las velocidades generalizadas en una forma equivalente que depende linealmente de ellas, condición necesaria dentro del formalismo de Faddeev–Jackiw.

Para implementar el método de Faddeev–Jackiw, el primer paso consiste en introducir una variable simpléctica ξ , la cual agrupa las $2n$ variables canónicas (q_i, p_i) del espacio de fase. En términos de esta variable, el lagrangiano de primer orden puede expresarse como

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - V^{(0)}(\xi). \quad (4.7)$$

Debido al carácter iterativo del método Faddeev–Jackiw, se introduce el superíndice (0) con el fin de indicar la etapa inicial del procedimiento. En la expresión anterior, $a_i^{(0)}(\xi)$ representan las componentes de la 1–forma canónica, mientras que $V^{(0)}(\xi)$ corresponde al denominado potencial simpléctico. Puede demostrarse que este último coincide con el hamiltoniano [6, 3], por lo que la ecuación anterior puede reescribirse como

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - H^{(0)}(\xi). \quad (4.8)$$

En este formalismo, las ecuaciones de movimiento se obtienen a partir de la llamada matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$, la cual se define como [6]

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}} - \frac{\partial a_i^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_j^{(0)}}. \quad (4.9)$$

De esta manera, la evolución dinámica del sistema queda determinada por la relación

$$f_{ij}^{(0)} \dot{\xi}_j^{(0)} = \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}}. \quad (4.10)$$

Toda la información estructural del sistema se encuentra codificada en la matriz simpléctica y en el potencial $H^{(0)}(\xi)$. Una vez definida la matriz simpléctica (4.9), el análisis del sistema se reduce al estudio de su carácter degenerado o no degenerado. En este sentido, el elemento central del formalismo de Faddeev–Jackiw consiste en determinar si dicha matriz es regular o singular.

Esta distinción resulta fundamental, ya que de ella depende la posibilidad de establecer de manera unívoca la dinámica del sistema. En efecto, si la matriz simpléctica es no degenerada,

$$\det f^{(0)} \neq 0, \quad (4.11)$$

entonces admite inversa, lo que permite escribir explícitamente las ecuaciones de movimiento como

$$\dot{\xi}_i^{(0)} = \left(f_{ij}^{(0)} \right)^{-1} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_j^{(0)}}. \quad (4.12)$$

En este caso, la evolución temporal de todas las variables simplécticas queda completamente determinada. Además, la existencia de la inversa permite definir de manera natural la estructura de corchetes del sistema mediante

$$\{\xi_i^{(0)}, \xi_j^{(0)}\} = \left(f_{ij}^{(0)}\right)^{-1}, \quad (4.13)$$

lo cual establece la conexión directa con los corchetes de Dirac y proporciona la base para la cuantización del sistema.

Por el contrario, cuando la matriz simpléctica es degenerada,

$$\det f^{(0)} = 0, \quad (4.14)$$

no es posible invertirla, lo que implica que las ecuaciones de movimiento no determinan de manera única todas las derivadas temporales. Esta indeterminación refleja la existencia de relaciones entre las variables dinámicas, es decir, la presencia de ligaduras en el sistema. De forma equivalente, existen m modos cero $v_\alpha^{i(0)}$, con $\alpha = 1, \dots, m$ y $m < 2n$, definidos por [8, 7]

$$v_\alpha^{i(0)} f_{ij}^{(0)} = 0. \quad (4.15)$$

Estos modos cero identifican las direcciones degeneradas de la matriz simpléctica, es decir, aquellas en las cuales no es posible definir la dinámica de forma independiente, reflejando la presencia de redundancias en la descripción del sistema.

Para determinar si estas direcciones dan lugar a ligaduras, se consideran las proyecciones sobre el gradiente del hamiltoniano,

$$\Omega_\alpha^{(0)} = v_\alpha^{i(0)} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}}. \quad (4.16)$$

Cuando se satisface $\Omega_\alpha^{(0)} = 0$, se obtienen las ligaduras independientes del sistema, las cuales emergen de manera directa a partir de la estructura simpléctica.

Para asegurar la consistencia dinámica del sistema, las ligaduras obtenidas deben ser invariantes bajo la evolución temporal [1, 8], lo que implica que su derivada total debe anularse, es decir,

$$\frac{d}{dt} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) = \frac{\partial \Omega_\alpha^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}} \dot{\xi}_i^{(0)} = 0. \quad (4.17)$$

Esta condición se incorpora al formalismo mediante multiplicadores de Lagrange $\lambda_\alpha^{(0)}$, los cuales se introducen como nuevas variables dinámicas del sistema. En consecuencia, el lagrangiano de la primera iteración puede escribirse como [6]

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda_\alpha^{(0)}) = L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) - \lambda_\alpha^{(0)} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi). \quad (4.18)$$

Sustituyendo la expresión del lagrangiano inicial dada en (4.8), se obtiene

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda_\alpha^{(0)}) = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - \lambda_\alpha^{(0)} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi) - H^{(0)}(\xi). \quad (4.19)$$

A continuación, el término que contiene $\dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi)$ puede reescribirse sin modificar las ecuaciones de movimiento del sistema, lo que permite expresar el lagrangiano como

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda_\alpha^{(0)}) = a_i^{(0)}(\xi)\dot{\xi}^{(0)i} + \Omega_\alpha^{(0)}(\xi)\dot{\lambda}_\alpha^{(0)} - H^{(0)}(\xi) - \frac{d}{dt}\left(\lambda_\alpha^{(0)}\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)\right). \quad (4.20)$$

En esta etapa, la incorporación de los multiplicadores de Lagrange implica la extensión del conjunto de variables dinámicas, introduciéndose una nueva variable simpléctica definida como $\xi_i^{(1)} \equiv (\xi_i^{(0)}, \lambda_\alpha^{(0)})$. Esta ampliación permite preservar la estructura de primer orden del formalismo, de modo que el lagrangiano puede expresarse como

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda_\alpha^{(0)}) = a_i^{(1)}(\xi)\dot{\xi}^{(1)i} - H^{(1)}(\xi), \quad (4.21)$$

donde se ha omitido el último término del lado derecho de la ecuación (4.21) ya que no afecta las ecuaciones de movimiento.

La razón de introducir los multiplicadores de Lagrange en su forma $\dot{\lambda}_\alpha^{(0)}$ en lugar de $\lambda_\alpha^{(0)}$, radica en que únicamente las variables que aparecen con derivadas temporales contribuyen a la construcción de la estructura simpléctica. En caso contrario, su inclusión no afectaría la matriz simpléctica y la degeneración del sistema permanecería sin cambios. En contraste, al incorporarlos como nuevas velocidades generalizadas, estos aportan términos adicionales a la matriz, incrementando su dimensión y permitiendo eliminar progresivamente la degeneración del sistema a lo largo del procedimiento iterativo. Aunque estos multiplicadores no representan grados de libertad físicos independientes, tampoco pueden considerarse constantes triviales, ya que su variación impone dinámicamente las ligaduras del sistema.

El hamiltoniano asociado a la primera iteración del procedimiento se determina imponiendo las ligaduras previamente obtenidas, lo que conduce a la expresión [6]

$$H^{(1)}(\xi) = H^{(0)}(\xi)\Big|_{\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)=0}. \quad (4.22)$$

En esta etapa, la matriz simpléctica correspondiente al sistema se obtiene a partir de las nuevas variables dinámicas y se define como

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a_j^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(1)}} - \frac{\partial a_i^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_j^{(1)}}. \quad (4.23)$$

Un aspecto importante de esta construcción es que la matriz $f_{ij}^{(1)}$ contiene a $f_{ij}^{(0)}$ como subestructura, lo que pone de manifiesto que en cada iteración no solo se amplía el conjunto de variables dinámicas, sino también la dimensión de la matriz simpléctica asociada. En este punto, es necesario reevaluar la singularidad de $f_{ij}^{(1)}$.

En general, el procedimiento iterativo del formalismo de Faddeev–Jackiw consiste en incorporar sucesivamente las ligaduras que emergen de la degeneración de la matriz simpléctica. En cada etapa, se construye una nueva matriz $f_{ij}^{(k)}$ cuya regularidad debe ser analizada. Si dicha matriz continúa siendo singular, el procedimiento debe repetirse incorporando las nuevas ligaduras obtenidas en esa iteración [8].

En cada iteración k , las nuevas ligaduras se determinan mediante la proyección sobre los modos cero asociados a la matriz simpléctica, de acuerdo con

$$\Omega_{\alpha}^{(k)}(\xi) = v_{\alpha}^{i(k)} \frac{\partial H^{(k)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(k)}} = 0. \quad (4.24)$$

En este contexto, el formalismo se interpreta como una sucesión de lagrangianos de la forma

$$L^{(k)} = a_i^{(k)}(\xi) \dot{\xi}_i - H^{(k)}(\xi), \quad (4.25)$$

donde en cada etapa se construye la correspondiente matriz simpléctica $f_{ij}^{(k)}$.

En el caso particular de sistemas con ligaduras de segunda clase, este procedimiento concluye tras un número finito de iteraciones K , en el cual la matriz simpléctica resulta no degenerada,

$$\det f^{(K)} \neq 0, \quad (4.26)$$

lo que garantiza su invertibilidad y permite determinar de manera unívoca la dinámica del sistema, así como definir los corchetes generalizados. En particular, estos vienen dados por

$$\{\xi_i^{(K)}, \xi_j^{(K)}\} = \left(f_{ij}^{(K)}\right)^{-1}. \quad (4.27)$$

En este contexto, cuando la degeneración ha sido completamente eliminada, los corchetes generalizados así definidos coinciden con los corchetes de Dirac obtenidos en el formalismo canónico para sistemas con ligaduras de segunda clase¹.

4.1. Formalismo de Faddeev–Jackiw en teoría de campos

En teoría de campos, el lagrangiano no se interpreta únicamente como una función de coordenadas generalizadas y sus velocidades, sino como una funcional que depende de un conjunto de campos dinámicos ϕ^A y de sus derivadas espacio-temporales $\partial_{\mu}\phi^A$, donde A es un índice interno que puede corresponder a componentes escalares, vectoriales o espinoriales según la teoría bajo consideración [14, 12].

Esta dependencia se expresa de manera general como

$$L = L(\phi^A, \partial_{\mu}\phi^A). \quad (4.28)$$

Un aspecto fundamental en este contexto es que la dinámica de los campos se describe mediante configuraciones definidas en el espacio-tiempo, es decir, $\phi^A = \phi^A(x)$. Esto implica que las coordenadas espaciales dejan de actuar como índices discretos y pasan a considerarse variables continuas, al mismo nivel que la coordenada temporal. En consecuencia, el lagrangiano puede expresarse en términos de la densidad lagrangiana como

$$L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}(\phi^A, \partial_{\mu}\phi^A). \quad (4.29)$$

¹En el sentido de Dirac, las ligaduras de segunda clase son aquellas cuya matriz de corchetes de Poisson es invertible, es decir, no degenerada, lo que implica que no todas las ligaduras conmutan entre sí.

La densidad lagrangiana juega un papel central en el formalismo de Faddeev–Jackiw aplicado a teoría de campos, ya que la construcción del sistema dinámico se realiza directamente a este nivel. En general, dicha densidad puede contener derivadas temporales de orden superior, por lo que el método requiere su reformulación en una estructura de primer orden en derivadas temporales.

Para ello, se introducen los momentos canónicos conjugados asociados a cada componente de los campos dinámicos, definidos como

$$\Pi^A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^A)}. \quad (4.30)$$

Se adopta la notación relativista $x^\mu = (t, \mathbf{x})$, con $c = 1$, y $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. A partir de esta construcción, la dinámica puede reescribirse de manera equivalente en una forma de primer orden, de modo que la densidad lagrangiana pasa a depender del conjunto de variables simplécticas

$$\xi_a(x) \equiv (\phi^A(x), \Pi^A(x)). \quad (4.31)$$

En términos de estas variables, la densidad lagrangiana en la etapa inicial del procedimiento se escribe como

$$\mathcal{L}^{(0)} = K_a^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_a^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi), \quad (4.32)$$

donde $K_a^{(0)}(\xi)$ representa la 1–forma canónica, $\dot{\xi}_a^{(0)}$ denota las derivadas temporales de las variables simplécticas y $\mathcal{H}^{(0)}(\xi)$ corresponde a la densidad hamiltoniana inicial de la teoría.

El hamiltoniano funcional asociado a la teoría se define como

$$H^{(0)} = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{H}^{(0)}. \quad (4.33)$$

Es importante destacar que los términos puramente dinámicos del sistema, tales como términos de masa o potenciales de interacción incluidos en la densidad hamiltoniana $\mathcal{H}^{(0)}$, no afectan directamente la estructura simpléctica del sistema. En el formalismo de Faddeev–Jackiw, dicha estructura queda determinada exclusivamente por los términos lineales en las derivadas temporales presentes en la densidad lagrangiana.

En consecuencia, la información geométrica del sistema se codifica únicamente en la parte cinética de primer orden, mientras que los términos contenidos en $\mathcal{H}^{(0)}$ contribuyen únicamente a la evolución dinámica a través de las ecuaciones de movimiento.

La estructura geométrica del sistema queda completamente determinada por la matriz simpléctica funcional $f_{ab}^{(0)}$, la cual se define mediante derivadas funcionales de la 1–forma canónica como [8]

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (4.34)$$

Si la matriz simpléctica resulta ser singular, entonces no admite inversa, lo cual es un indicio directo de la existencia de ligaduras en la teoría. Esta situación se manifiesta a través de la aparición de modos cero, es decir, vectores propios asociados a autovalor nulo, los cuales satisfacen la relación

$$\int d^3 \mathbf{x} v^{a(0)}(\mathbf{x}) f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (4.35)$$

Una vez determinados estos modos cero, es posible construir condiciones sobre el sistema mediante su proyección sobre el gradiente funcional del Hamiltoniano, lo que conduce a las expresiones

$$\Omega_\alpha^{(0)} = \int d^3\mathbf{x} v_\alpha^{a(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_a(\mathbf{x})} \int d^3\mathbf{y} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{y}). \quad (4.36)$$

donde el índice α etiqueta el conjunto de condiciones independientes asociadas a los distintos modos cero del sistema en esta etapa del procedimiento.

Las ligaduras obtenidas deben incorporarse de manera consistente en la dinámica del sistema. En el formalismo de Faddeev–Jackiw, esto se realiza directamente a nivel de la densidad lagrangiana mediante la introducción de multiplicadores de Lagrange $\lambda_\alpha^{(0)}$. Con el objetivo de preservar la estructura de primer orden característica del método, estas ligaduras se incluyen en forma de derivada temporal del multiplicador, lo que conduce a la densidad lagrangiana correspondiente a la primera iteración

$$\mathcal{L}^{(1)} = K_a^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_a^{(0)} + \dot{\lambda}_\alpha^{(0)} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) - \mathcal{H}^{(0)}(\xi). \quad (4.37)$$

La incorporación de estas nuevas variables dinámicas implica la extensión del conjunto simpléctico, el cual pasa a definirse como $\xi_a^{(1)} = (\xi_a^{(0)}, \lambda_\alpha^{(0)})$. En términos de este nuevo conjunto, la densidad lagrangiana puede reescribirse nuevamente en una forma compacta de primer orden como

$$\mathcal{L}^{(1)} = K_a^{(1)}(\xi) \dot{\xi}_a^{(1)} - \mathcal{H}^{(1)}(\xi), \quad (4.38)$$

donde la nueva densidad hamiltoniana se obtiene imponiendo las ligaduras del nivel anterior, es decir,

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega_\alpha^{(0)}=0}. \quad (4.39)$$

En consecuencia, se construye la matriz simpléctica correspondiente a la primera iteración, denotada como $f_{ab}^{(1)}$. Este procedimiento iterativo se repite de manera sistemática, de forma que en cada etapa se analiza la regularidad de la matriz simpléctica. Si la matriz continúa siendo singular y aparecen nuevos modos cero, entonces se generan nuevas ligaduras que deben incorporarse al sistema dinámico.

En el caso de sistemas con ligaduras de segunda clase, tras un número finito de iteraciones K , la matriz simpléctica $f_{ab}^{(K)}$ se vuelve no singular, una vez que se han incorporado las ligaduras que eliminan su degeneración. En consecuencia, es posible definir su inversa funcional a partir de la relación

$$\int d^3\mathbf{z} f_{ac}^{(K)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left(f^{(K)cb} \right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.40)$$

La inversa de la matriz simpléctica define directamente la estructura de corchetes generalizados del sistema,

$$\left(f_{ab}^{(K)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left\{ \xi_a^{(K)}(\mathbf{x}), \xi_b^{(K)}(\mathbf{y}) \right\}, \quad (4.41)$$

los cuales determinan completamente la dinámica de la teoría y coinciden con los corchetes de Dirac en sistemas con ligaduras de segunda clase.

Capítulo 5

Modelo de Landau

El modelo de Landau fue introducido originalmente por Lev Landau con el propósito de describir el espectro cuántico de electrones sometidos a campos magnéticos uniformes, dando lugar a la cuantización de los niveles de energía conocidos como niveles de Landau [13]. En el marco de la mecánica clásica, este sistema modela la dinámica de una partícula cargada confinada a un plano y sometida a un campo magnético constante perpendicular al mismo, así como a un potencial armónico.

Además de su relevancia física, el estudio de este modelo permite aplicar de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw en sistemas con un número finito de grados de libertad. Dado que el sistema presenta una estructura de lagrangiano singular¹ en el régimen de masa nula ($m \rightarrow 0$), constituye un escenario adecuado para comprender su estructura dinámica mediante el análisis simpléctico. En este capítulo, se analizará el modelo bajo el formalismo de Faddeev–Jackiw, lo cual permite estudiar la estructura de ligaduras del sistema y su correspondiente reducción a una descripción en términos de variables dinámicas independientes. Para iniciar este procedimiento, se considera el lagrangiano del sistema en coordenadas cartesianas [5].

$$L = \frac{1}{2} (m \dot{x}_i \dot{x}_i + B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j - k x_i x_i), \quad i = 1, 2. \quad (5.1)$$

El primer término corresponde a la energía cinética, el segundo describe el acoplamiento con el campo magnético transversal B , mientras que el tercero introduce un potencial armónico isotrópico. Las ecuaciones de movimiento se obtienen aplicando las ecuaciones de Euler–Lagrange al lagrangiano (5.1),

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial x_k} = 0. \quad (5.2)$$

Procedemos calculando primero la derivada del lagrangiano respecto a la velocidad generalizada \dot{x}_k . El término cinético contribuye directamente

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}_i \dot{x}_i \right) = m \dot{x}_k. \quad (5.3)$$

Mientras que el término lineal en las velocidades proporcional a B aporta

$$\frac{\partial}{\partial \dot{x}_k} \left(\frac{1}{2} B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j \right) = \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i. \quad (5.4)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k + \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i. \quad (5.5)$$

¹Un sistema es singular cuando el determinante de la matriz Hessiana asociada al lagrangiano se anula, lo que imposibilita expresar de manera única las velocidades en función de los momentos canónicos.

Derivando respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} \right) = m \ddot{x}_k + \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} \dot{x}_i. \quad (5.6)$$

Ahora calculamos la derivada respecto a x_k . Para el término magnético,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j \right) = \frac{1}{2} B \epsilon_{kj} \dot{x}_j. \quad (5.7)$$

y para el término potencial,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\frac{1}{2} k x_i x_i \right) = -k x_k. \quad (5.8)$$

En consecuencia,

$$\frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2} B \epsilon_{kj} \dot{x}_j - k x_k. \quad (5.9)$$

Sustituyendo en la ecuación (5.2) se obtiene

$$m \ddot{x}_k + \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} \dot{x}_i - \left(\frac{1}{2} B \epsilon_{kj} \dot{x}_j - k x_k \right) = 0. \quad (5.10)$$

Finalmente, utilizando la propiedad antisimétrica del símbolo de Levi-Civita, $\epsilon_{kj} = -\epsilon_{jk}$ y renombrando índices, los términos proporcionales a B se combinan y la ecuación de movimiento adopta la forma compacta

$$m \ddot{x}_k + B \epsilon_{ik} \dot{x}_i + k x_k = 0. \quad (5.11)$$

la cual describe la dinámica de una partícula cargada en dos dimensiones sometida simultáneamente a un campo magnético uniforme perpendicular al plano y a un potencial armónico isotrópico.

Para $m \neq 0$ el lagrangiano contiene un término cuadrático en las velocidades, por lo que la matriz Hessiana asociada al sistema resulta ser $W_{ij} = m \delta_{ij}$. Dado que $\det W \neq 0$ cuando $m \neq 0$, el sistema es regular y su formulación hamiltoniana puede construirse mediante el procedimiento canónico estándar. En esta situación no aparecen ligaduras y, por lo tanto, la aplicación del formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw no aporta información adicional al análisis dinámico.

Sin embargo, el interés principal radica en el límite singular $m \rightarrow 0$. En este régimen el término cinético desaparece y el lagrangiano completo (5.1) se reduce a una expresión lineal en las derivadas temporales. Sustituyendo este límite en (5.1) se obtiene el lagrangiano canónico

$$L_C = \frac{1}{2} (B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j - k x_i x_i). \quad (5.12)$$

Debido a esta estructura lineal en las derivadas temporales, el lagrangiano (5.12) ya se encuentra en forma de primer orden. En consecuencia, los momentos canónicos no constituyen variables dinámicas independientes, ya que quedan completamente determinados por las coordenadas. En efecto,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{1}{2} B \epsilon_{ji} x_j. \quad (5.13)$$

lo que muestra que satisfacen relaciones algebraicas con las posiciones. Por lo tanto, los momentos no representan grados de libertad independientes y el espacio de fase físico se reduce efectivamente a las coordenadas x_i .

A partir del lagrangiano (5.12), se define el potencial simpléctico del sistema como

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} k x_i x_i. \quad (5.14)$$

De este modo, el lagrangiano de primer orden toma la forma

$$L^{(0)} = \frac{1}{2} B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j - H^{(0)}. \quad (5.15)$$

Ahora, un lagrangiano de primer orden puede escribirse en la forma general [6]

$$L^{(0)} = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - H^{(0)}(\xi). \quad (5.16)$$

donde $\xi_i^{(0)}$ son las variables simplécticas y $H^{(0)}(\xi)$ es el potencial simpléctico asociado al sistema. Comparando esta expresión con el lagrangiano (5.15) se identifica directamente

$$\xi_i^{(0)} = x_i, \quad (5.17)$$

y

$$a_i^{(0)} = \frac{1}{2} B \epsilon_{ji} x_j. \quad (5.18)$$

Una vez definida la variable simpléctica $\xi_i^{(0)}$ e identificados los coeficientes de la 1-forma simpléctica $a_i^{(0)}(\xi)$, se procede a construir la matriz simpléctica mediante la expresión

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial x_j}. \quad (5.19)$$

Por construcción, la matriz $f_{ij}^{(0)}$ es antisimétrica. En consecuencia, todos los elementos sobre la diagonal principal se anulan, mientras que los elementos de fuera satisfacen la relación $f_{ij}^{(0)} = -f_{ji}^{(0)}$. Dado que el coeficiente simpléctico (5.18) depende linealmente de las coordenadas, las únicas contribuciones no triviales a $f_{ij}^{(0)}$ provienen de las derivadas cruzadas entre x_i y x_j .

Para determinar explícitamente sus componentes, sustituimos el coeficiente simpléctico (5.18) en la definición general (5.19). De esta manera evaluamos las derivadas parciales correspondientes.

El primer término resulta

$$\frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} B \epsilon_{kj} x_k \right) = \frac{1}{2} B \epsilon_{kj} \frac{\partial x_k}{\partial x_i}.$$

Dado que $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ki}$, resulta

$$\frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial x_i} = \frac{1}{2} B \epsilon_{ij}.$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} B \epsilon_{ji}.$$

Usando la propiedad de antisimetría del símbolo de Levi–Civita, $\epsilon_{ji} = -\epsilon_{ij}$, se obtiene

$$\frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial x_j} = -\frac{1}{2} B \epsilon_{ij}.$$

Sustituyendo en (5.19) se concluye finalmente que

$$f_{ij}^{(0)} = B \epsilon_{ij}, \quad (5.20)$$

En dos dimensiones, los componentes del símbolo de Levi–Civita pueden escribirse en forma matricial como

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz simpléctica toma la forma explícita

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}.$$

El carácter no singular de esta matriz se verifica calculando su determinante. Utilizando la fórmula estándar para una matriz 2×2 , se obtiene

$$\det f_{ij}^{(0)} = B^2. \quad (5.21)$$

Como se observa en (5.21), siempre que $B \neq 0$ la matriz es invertible, lo cual garantiza la existencia de la estructura simpléctica inversa. Aplicando la expresión general para la inversa de una matriz 2×2 , se encuentra

$$\left(f_{ij}^{(0)}\right)^{-1} = \frac{1}{B^2} \begin{pmatrix} 0 & -B \\ B & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{B} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observando que

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\epsilon_{ij},$$

por lo tanto, la inversa de la matriz simpléctica adopta la forma compacta

$$\left(f_{ij}^{(0)}\right)^{-1} = -\frac{1}{B} \epsilon_{ij}. \quad (5.22)$$

En el formalismo de Faddeev–Jackiw, los corchetes generalizados se identifican con la inversa de la matriz simpléctica final, es decir,

$$\{x_i, x_j\} = \left(f_{ij}^{(0)}\right)^{-1}, \quad (5.23)$$

por lo que, usando (5.22), se obtiene

$$\{x_i, x_j\} = -\frac{1}{B} \epsilon_{ij}. \quad (5.24)$$

Este resultado muestra que, en el límite de masa nula definido por (5.12), las coordenadas del plano dejan de conmutar a nivel clásico. La presencia del campo magnético induce así una estructura simpléctica no trivial directamente sobre el espacio de configuración, característica típica de sistemas con ligaduras de segunda clase [15].

Además, dado que los momentos canónicos están completamente determinados por las coordenadas mediante (5.13), es posible reconstruir el resto de la estructura algebraica a partir del corchete (5.24). Para los corchetes mixtos se tiene

$$\{x_i, p_j\} = \frac{1}{2} B \epsilon_{kj} \{x_i, x_k\}, \quad (5.25)$$

y sustituyendo (5.24),

$$\{x_i, p_j\} = -\frac{1}{2} \epsilon_{kj} \epsilon_{ik}. \quad (5.26)$$

Usando la identidad

$$\epsilon_{kj} \epsilon_{ik} = -\delta_{ij}, \quad (5.27)$$

se obtiene finalmente

$$\{x_i, p_j\} = \frac{1}{2} \delta_{ij}. \quad (5.28)$$

De manera análoga, para los corchetes entre momentos,

$$\{p_i, p_j\} = \frac{1}{4} B^2 \epsilon_{ki} \epsilon_{lj} \{x_k, x_l\}, \quad (5.29)$$

y sustituyendo nuevamente (5.24), resulta

$$\{p_i, p_j\} = -\frac{B}{4} \epsilon_{ij}. \quad (5.30)$$

Por tanto, la estructura simpléctica completa del sistema queda determinada por los corchetes (5.24), (5.28) y (5.30), mostrando que tanto las coordenadas como los momentos adquieren una geometría no canónica inducida por el campo magnético.

El análisis detallado mediante el método hamiltoniano de Dirac, incluyendo la identificación de las ligaduras de segunda clase y la construcción explícita de los corchetes de Dirac asociados al lagrangiano (5.12), se presenta en A.1. Asimismo, los resultados pueden contrastarse con la formulación de Hamilton–Jacobi desarrollada para este tipo de sistemas [11, 5]. En ambos enfoques se recupera la misma estructura algebraica, lo que confirma la consistencia del resultado obtenido mediante el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw y la equivalencia dinámica entre los distintos métodos.

Capítulo 6

Partícula libre sobre una superficie

El estudio del movimiento de una partícula libre sobre una superficie constituye un ejemplo fundamental en el análisis de sistemas con restricciones. Aunque la partícula no está sometida a fuerzas externas, la imposición de una condición holónoma reduce el espacio de configuración efectivo y modifica la estructura dinámica del sistema. Desde el punto de vista hamiltoniano, esta situación conduce naturalmente a la aparición de ligaduras en el espacio de fase [1].

Además de su interés geométrico, este modelo ofrece un marco adecuado para aplicar de manera sistemática el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw, permitiendo estudiar directamente la estructura de ligaduras del sistema y la correspondiente reducción del espacio de fase a una descripción en términos de variables dinámicas independientes.

En este capítulo se analizará este sistema mediante dicho formalismo. Consideramos una partícula de masa unidad ($m = 1$) no relativista que se mueve en el espacio euclidiano \mathbb{R}^N , sometida a una restricción holónoma que limita su movimiento a una superficie. En ausencia de potencial, la dinámica está determinada exclusivamente por la energía cinética, por lo que el lagrangiano adopta la forma

$$L = T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 = \frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i, \quad (6.1)$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ representa el conjunto de coordenadas generalizadas de la partícula, y N corresponde a la dimensión del espacio en el cual se mueve.

Supongamos ahora que la partícula está restringida a permanecer sobre una superficie $S \subset \mathbb{R}^N$ definida por una única restricción holónoma

$$f(\mathbf{q}) = 0. \quad (6.2)$$

Desde el punto de vista geométrico, esta condición reduce el espacio de configuración efectivo desde \mathbb{R}^N al subconjunto

$$S = \{\mathbf{q} \mid f(\mathbf{q}) = 0\}, \quad (6.3)$$

de modo que las velocidades del sistema sólo pueden adoptar direcciones tangentes a dicha superficie¹ [2].

En el caso particular en que la partícula se encuentra confinada a la esfera unitaria, la condición geométrica viene dada por

$$f(\mathbf{q}) = \mathbf{q}^2 - 1 = 0. \quad (6.4)$$

En consecuencia, el espacio de configuración se reduce a la esfera unitaria, definida como

$$S^{N-1} = \{\mathbf{q} \mid \mathbf{q}^2 = 1\}, \quad (6.5)$$

¹En particular, esta condición implica que las velocidades satisfacen

$$\nabla f(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} = 0,$$

lo cual expresa que $\dot{\mathbf{q}}$ es perpendicular al vector normal de la superficie definida por la restricción.

la cual es una superficie de dimensión $N - 1$, ya que la condición $\mathbf{q}^2 = 1$ impone una única restricción entre las N coordenadas, reduciendo en una unidad la dimensión del espacio de configuración [2, 16]. Para incorporar esta ligadura en la formulación lagrangiana, introducimos un multiplicador de Lagrange λ , de modo que el lagrangiano (6.1) se escribe como [9]

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i + \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1). \quad (6.6)$$

La variable λ impone la ligadura geométrica y no posee término cinético propio. Esta característica anticipa el carácter singular del sistema, puesto que la matriz hessiana asociada al lagrangiano es degenerada².

Con el fin de aplicar el método de Faddeev–Jackiw [6], el primer paso consiste en reescribir el lagrangiano en forma de primer orden en las derivadas temporales. Para ello, se introduce el momento canónico

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i,$$

lo que permite expresar el lagrangiano original (6.6) en su forma canónica de primer orden³

$$L_C = p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} p_i p_i + \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1). \quad (6.7)$$

A partir de esta expresión, se define el potencial simpléctico del sistema como

$$H^{(0)} = \frac{1}{2} p_i p_i - \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1), \quad (6.8)$$

de modo que el lagrangiano de primer orden se puede reescribir de manera compacta como

$$L^{(0)} = p_i \dot{q}_i - H^{(0)}, \quad (6.9)$$

en esta representación, el sistema se formula en términos del conjunto ampliado de variables (q_i, p_i, λ) . Esta reescritura no introduce grados de libertad físicos adicionales, sino que permite exhibir explícitamente la estructura simpléctica del sistema en un espacio de variables ampliado. Así, se introduce la variable simpléctica que define el espacio de fase extendido, cuyas componentes están dadas por

$$\xi_i^{(0)} = (q_i, p_i, \lambda). \quad (6.10)$$

Para determinar la evolución del sistema, el formalismo requiere la construcción de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$. Esta matriz se obtiene a partir de los coeficientes $a_i^{(0)}$ que acompañan a las velocidades en el término de la forma $a_i^{(0)} \dot{\xi}_i^{(0)}$ del lagrangiano (6.9). Con este propósito, el lagrangiano debe escribirse en la forma general

$$L^{(0)} = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - H^{(0)}(\xi). \quad (6.11)$$

²Un sistema lagrangiano es singular cuando la matriz hessiana $W_{ij} = \partial^2 L / \partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j$ no es invertible. En este caso, la ausencia de derivadas temporales de λ implica que el determinante de dicha matriz se anula.

³La linealización del lagrangiano se muestra en el Apéndice B.1.

Al comparar explícitamente (6.9) con la expresión general (6.11), se identifican los coeficientes correspondientes como

$$a_{q_i}^{(0)} \rightarrow p_i, \quad a_{p_i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad a_{\lambda}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (6.12)$$

Una vez identificadas tanto las componentes de la variable $\xi_i^{(0)}$ como los coeficientes de la 1-forma $a_i^{(0)}$, se procede a calcular los elementos de la matriz simpléctica utilizando la definición

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial \xi_j^{(0)}}. \quad (6.13)$$

Por construcción, esta matriz es antisimétrica. En consecuencia, todos los elementos sobre la diagonal principal se anulan, mientras que los elementos fuera de la diagonal satisfacen la relación $f_{ij}^{(0)} = -f_{ji}^{(0)}$. Dado que el único coeficiente no nulo es $a_{q_i}^{(0)}$, las contribuciones no triviales provienen de las derivadas cruzadas entre q_i y p_j . Como resultado, la matriz simpléctica adopta la forma⁴

$$f_{ij}^{(0)} = \left(\begin{array}{c|ccc} & q_j & p_j & \lambda_j \\ \hline q_i & 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ p_i & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ \lambda_i & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6.14)$$

La matriz obtenida es claramente singular, debido a la presencia de una fila y una columna nulas asociadas a la variable λ . Como consecuencia, la matriz posee al menos un modo cero $v_i^{(0)}$ que satisface

$$v_i^{(0)} f_{ij}^{(0)} = 0. \quad (6.15)$$

En su forma más general, dicho modo cero puede escribirse como

$$v_i^{(0)} = \left(v_q^{(0)} \quad v_p^{(0)} \quad v_{\lambda}^{(0)} \right) \quad (6.16)$$

Sin embargo, al imponer explícitamente la condición (6.15) y utilizar la forma concreta de la matriz simpléctica dada en (6.14), se encuentra que las componentes asociadas a q_i y p_i deben anularse. En consecuencia, el modo cero adopta la forma particular

$$v_i^{(0)} = \left(0 \quad 0 \quad v_{\lambda}^{(0)} \right) \quad (6.17)$$

donde $v_{\lambda}^{(0)}$ es una constante arbitraria. La existencia de este modo cero refleja la singularidad de la matriz simpléctica y conduce directamente a la aparición de una ligadura en el sistema, que se expresa como⁵

$$\Omega^{(0)} \equiv \frac{1}{2}(q_i q_i - 1) = 0. \quad (6.18)$$

Para incorporar la ligadura en la formulación canónica, se añade al lagrangiano un término del tipo $\dot{\alpha} \Omega^{(0)}$, donde α es un nuevo multiplicador de Lagrange. La elección de esta forma no es arbitraria; en el formalismo de Faddeev–Jackiw, las nuevas variables deben aparecer a través de sus derivadas

⁴El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$ se encuentra en el Apéndice B.2.

⁵El cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$ se encuentra en el Apéndice B.3.

temporales para contribuir a la 1-forma. De este modo, la ligadura se introduce como coeficiente de $\dot{\alpha}$, quedando incorporada en la matriz simpléctica del sistema.

Esto permite analizar la consistencia de la condición $\Omega^{(0)} = 0$ dentro del proceso iterativo del formalismo. En particular, la introducción de la variable α no añade grados de libertad físicos, sino que actúa como un multiplicador que asegura la implementación dinámica de la ligadura.

Cabe destacar que la ligadura (6.18) coincide con la restricción holónoma original que impone que la partícula permanezca sobre la esfera unitaria. Por tanto, la condición inicial y la ligadura en el análisis simpléctico son equivalentes.

De esta manera, el lagrangiano resultante del primer proceso de iteración puede escribirse como

$$L^{(1)} = p_i \dot{q}_i + \frac{\dot{\alpha}}{2} (q_i q_i - 1) - H^{(1)}, \quad (6.19)$$

donde el potencial simpléctico asociado a esta primera iteración es⁶

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} p_i p_i. \quad (6.20)$$

La inclusión explícita de la ligadura en el lagrangiano modifica la estructura del espacio de fase del sistema. En consecuencia, se introduce una nueva variable simpléctica cuyos componentes reflejan la extensión de dicho espacio. En el primer proceso de iteración, esta se define como

$$\xi_i^{(1)} = (q_i, p_i, \alpha). \quad (6.21)$$

A partir de esta definición, se construye la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$. Esta se obtiene de los coeficientes $a_i^{(1)}$ que acompañan a las velocidades en el término de la forma $a_i^{(1)} \dot{\xi}_i^{(1)}$ del lagrangiano (6.19). Para ello, el lagrangiano debe escribirse en la forma general de primer orden

$$L^{(1)} = a_i^{(1)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(1)} - H^{(1)}(\xi). \quad (6.22)$$

Al comparar explícitamente (6.19) con la expresión general (6.22), se identifican los coeficientes como

$$a_{q_i}^{(1)} \rightarrow p_i, \quad a_{p_i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad a_{\alpha}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2} (q_i q_i - 1). \quad (6.23)$$

Una vez conocidos los coeficientes de la 1-forma $a_i^{(1)}$ y las componentes de la variable simpléctica $\xi_i^{(1)}$, se procede a construir la matriz $f_{ij}^{(1)}$ mediante la definición

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial \xi_i^{(1)}} - \frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial \xi_j^{(1)}}. \quad (6.24)$$

En este caso, los coeficientes no nulos $a_q^{(1)}$ y $a_{\alpha}^{(1)}$ generan contribuciones provenientes tanto de las derivadas cruzadas entre q_i y p_j como de las derivadas respecto de q_i y α . Como resultado, la matriz

⁶La forma de obtener el potencial simpléctico se muestra en el Apéndice B.4.

simpléctica adopta la forma⁷

$$f_{ij}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|ccc} & q_j & p_j & \alpha_j \\ \hline q_i & 0 & -\delta_{ij} & q_j \\ p_i & \delta_{ij} & 0 & 0 \\ \alpha_i & -q_i & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6.25)$$

Una vez obtenida la matriz $f_{ij}^{(1)}$, el siguiente paso consiste en analizar si esta matriz es invertible. En caso de que sea singular, debe existir al menos un modo cero no trivial $v_i^{(1)}$ tal que

$$v_i^{(1)} f_{ij}^{(1)} = 0. \quad (6.26)$$

Para determinar la existencia de dicho modo cero, consideramos un vector con componentes arbitrarias en el espacio simpléctico extendido

$$v_i^{(1)} = \left(v_q^{(1)} \quad v_p^{(1)} \quad v_\alpha^{(1)} \right), \quad (6.27)$$

Al imponer la condición (6.26) y utilizar la forma explícita de la matriz simpléctica dada en (6.25), se encuentra que el modo cero adopta la forma

$$v_i^{(1)} = v_\alpha^{(1)} \left(0 \quad q_i \quad 1 \right), \quad (6.28)$$

donde $v_\alpha^{(1)}$ es una constante arbitraria. Además, el determinante de la matriz simpléctica se anula, $\det f^{(1)} = 0$, lo cual confirma su carácter singular⁸. En consecuencia, la existencia de este modo cero conduce a la generación de una nueva ligadura en el sistema, que se expresa como⁹

$$\Omega^{(1)} \equiv q_i p_i = 0. \quad (6.29)$$

Nuevamente, esta ligadura debe incorporarse en la formulación original mediante la introducción de un nuevo multiplicador de Lagrange de carácter dinámico, al que denominaremos η . De este modo, el lagrangiano resultante del segundo proceso de iteración puede escribirse como

$$L^{(2)} = p_i \dot{q}_i + \frac{\dot{\alpha}}{2} (q_i q_i - 1) + \dot{\eta} q_i p_i - H^{(2)}, \quad (6.30)$$

donde el potencial simpléctico asociado a esta segunda iteración es¹⁰

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} p_i p_i. \quad (6.31)$$

La inclusión explícita de la ligadura en el lagrangiano modifica la estructura del espacio de fase del sistema. En consecuencia, es necesario redefinir las variables de modo que sus componentes reflejen esta ampliación. Así, la variable simpléctica correspondiente al segundo proceso de iteración se define como

$$\xi_i^{(2)} = (q_i, p_i, \alpha, \eta). \quad (6.32)$$

⁷El cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$ se encuentran en el Apéndice B.5.

⁸Los detalles del cálculo del modo cero y la verificación de la singularidad de $f_{ij}^{(1)}$ se presentan en el Apéndice B.6.

⁹El cálculo detallado de la ligadura $\Omega^{(1)}$ se presenta en el Apéndice B.7.

¹⁰La obtención del potencial simpléctico $H^{(2)}$ se presenta en el Apéndice B.8.

La ampliación del conjunto de variables implica la construcción de una nueva matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$, cuyos elementos se obtienen a partir de los coeficientes $a_i^{(2)}$ que acompañan a las velocidades en la expresión (6.30). Para identificarlos, esta debe escribirse en la forma general de primer orden

$$L^{(2)} = a_i^{(2)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(2)} - H^{(2)}(\xi). \quad (6.33)$$

Al comparar explícitamente (6.30) con la expresión general (6.33), se identifican las componentes de la 1-forma como

$$a_{q_i}^{(2)} \rightarrow p_i, \quad a_{p_i}^{(2)} \rightarrow 0, \quad a_{\alpha}^{(2)} \rightarrow \frac{1}{2}(q_i q_i - 1), \quad a_{\eta}^{(2)} \rightarrow q_i p_i. \quad (6.34)$$

A partir de las componentes $a_i^{(2)}$, se construye la matriz simpléctica correspondiente mediante la definición

$$f_{ij}^{(2)} = \frac{\partial a_j^{(2)}}{\partial \xi_i^{(2)}} - \frac{\partial a_i^{(2)}}{\partial \xi_j^{(2)}}, \quad (6.35)$$

en este caso, los coeficientes no nulos $a_q^{(2)}$, $a_\alpha^{(2)}$ y $a_\eta^{(2)}$ generan contribuciones provenientes tanto de las derivadas cruzadas entre q_i y p_j , como de aquellas que involucran derivadas respecto de q_i y p_i , α y η . En particular, los términos asociados a $a_\alpha^{(2)}$ y $a_\eta^{(2)}$ introducen nuevas contribuciones que modifican la estructura obtenida en la iteración anterior. Como resultado, la matriz simpléctica correspondiente al segundo proceso de iteración adopta la forma¹¹

$$f_{ij}^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} & q_j & p_j & \alpha_j & \eta_j \\ \hline q_i & 0 & -\delta_{ij} & q_j & p_j \\ p_i & \delta_{ij} & 0 & 0 & q_j \\ \alpha_i & -q_i & 0 & 0 & 0 \\ \eta_i & -p_i & -q_i & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (6.36)$$

Una vez construida la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$, el siguiente paso consiste en verificar si esta matriz es invertible. Para ello, se considera un vector arbitrario en el espacio simpléctico extendido

$$v_i^{(2)} = \left(v_q^{(2)} \quad v_p^{(2)} \quad v_\alpha^{(2)} \quad v_\eta^{(2)} \right) \quad (6.37)$$

y se analiza si existe algún vector no nulo que satisfaga la condición

$$v_i^{(2)} f_{ij}^{(2)} = 0, \quad (6.38)$$

lo cual define un posible modo cero de la matriz.

Al evaluar la condición (6.38) y utilizar la forma explícita de la matriz simpléctica dada en (6.36), se obtiene un sistema de ecuaciones lineales para las componentes del vector $v_i^{(2)}$. El análisis detallado muestra que la única solución compatible es la solución trivial,

$$v_i^{(2)} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0),$$

¹¹El cálculo de cada elemento de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$ se muestra en el Apéndice B.9.

lo que implica que no existen modos cero no triviales. En consecuencia, la matriz simpléctica (6.36) es no singular. En particular, su determinante resulta ser

$$\det f^{(2)} = (q_i q_i)^2,$$

el cual es distinto de cero siempre que $q_i \neq 0$ ¹².

En este caso no surgen ligaduras adicionales, y el espacio simpléctico definido por (6.32) describe completamente la dinámica de la partícula libre sobre la esfera, incorporando todas las ligaduras del sistema.

Una vez verificado que la matriz $f_{ij}^{(2)}$ es no singular, el siguiente paso consiste en determinar su inversa para obtener los corchetes generalizados del sistema, ya que en el formalismo de Faddeev–Jackiw, la inversa de la matriz simpléctica define directamente los corchetes entre las variables dinámicas,

$$\{\xi_i^{(2)}, \xi_j^{(2)}\} = \left(f_{ij}^{(2)}\right)^{-1}. \quad (6.39)$$

Al llevar a cabo este procedimiento, se obtiene que la matriz inversa correspondiente es¹³

$$\left(f_{ij}^{(2)}\right)^{-1} = \left(\begin{array}{c|cccc} \{, \} & q_j & p_j & \alpha_j & \eta_j \\ \hline q_i & 0 & \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} & -\frac{q_i}{q^2} & 0 \\ p_i & -\delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{q^2} & \frac{p_i q_j - p_j q_i}{q^2} & \frac{p_i}{q^2} & -\frac{q_i}{q^2} \\ \alpha_i & \frac{q_j}{q^2} & -\frac{p_j}{q^2} & 0 & -\frac{1}{q^2} \\ \eta_i & 0 & \frac{q_j}{q^2} & \frac{1}{q^2} & 0 \end{array} \right). \quad (6.40)$$

A partir de la matriz simpléctica inversa dada en (6.40), se obtienen directamente los corchetes generalizados que determinan la estructura dinámica del sistema reducido.

$$\{\xi_{q_i}^{(2)}, \xi_{q_j}^{(2)}\} = \{q_i, q_j\} = 0, \quad (6.41)$$

$$\{\xi_{q_i}^{(2)}, \xi_{p_j}^{(2)}\} = \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2}, \quad (6.42)$$

$$\{\xi_{p_i}^{(2)}, \xi_{p_j}^{(2)}\} = \{p_i, p_j\} = \frac{p_i q_j - p_j q_i}{q^2}. \quad (6.43)$$

Estos corchetes coinciden con los corchetes de Dirac, lo cual confirma la equivalencia entre el procedimiento simpléctico de Faddeev–Jackiw y el método hamiltoniano estándar para sistemas con ligaduras de segunda clase [3, 9].

¹²El cálculo explícito del determinante y la verificación de la ausencia de modos cero se presentan en el Apéndice B.10.

¹³El cálculo de la inversa de $f_{ij}^{(2)}$ se muestra en el Apéndice B.11.

Capítulo 7

Campo de Proca Real

El estudio de campos vectoriales masivos desempeña un papel importante en la teoría cuántica de campos, ya que describe la dinámica de partículas de espín 1 con masa distinta de cero. Un modelo relativista con estas características fue introducido por Alexandru Proca [17], quien formuló una extensión de la teoría electromagnética en la cual el campo vectorial adquiere un término de masa. Esta modificación altera de manera significativa la estructura de la teoría, ya que el término de masa rompe la invariancia gauge presente en el electromagnetismo. En ausencia de esta simetría, el campo vectorial deja de describir únicamente dos modos transversales, como ocurre en la teoría de Maxwell, y pasa a propagar tres grados de libertad físicos, correspondientes a los modos de polarización de una partícula vectorial masiva. El análisis de estos grados de libertad puede realizarse de manera sistemática mediante la formulación hamiltoniana del sistema, donde la estructura de ligaduras permite identificar las variables dinámicas independientes.

Desde este punto de vista, el modelo de Proca constituye un ejemplo interesante para el estudio de sistemas singulares en teorías de campo [1, 2]. Aunque la teoría no posee invariancia gauge, su lagrangiano resulta singular, ya que la componente temporal del campo vectorial no posee un momento canónico independiente. Esta característica indica la presencia de ligaduras en el sistema y hace necesario emplear un procedimiento sistemático para determinar la estructura del espacio de fase.

En este contexto, el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw proporciona un método directo para analizar sistemas con lagrangianos singulares. Este enfoque permite identificar las ligaduras del sistema a partir de la estructura de la matriz simpléctica y determinar de forma natural los corchetes generalizados entre las variables dinámicas.

Consideramos entonces el campo de Proca real, descrito por el campo vectorial $A_\mu(x)$ definido en el espacio-tiempo de Minkowski¹. La dinámica del sistema está dada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A_\mu A^\mu, \quad (7.1)$$

donde m representa la masa del campo vectorial. En la expresión anterior aparece el tensor de campo $F_{\mu\nu}$, definido como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (7.2)$$

el cual es antisimétrico por construcción, es decir $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

La estructura del lagrangiano (7.1) muestra que la teoría depende de las derivadas del campo A_μ . Para reformular el sistema dentro del formalismo simpléctico es necesario identificar primero las variables dinámicas del sistema. Esto se logra introduciendo el momento canónico conjugado asociado al campo A_μ , definido en teoría de campos por [14, 12]

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)}. \quad (7.3)$$

¹En este trabajo se adopta la convención de la métrica $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

La derivada parcial en (7.3) se evalúa utilizando la densidad lagrangiana (7.1), obteniéndose el resultado²

$$\Pi^\nu = F^{\nu 0}. \quad (7.4)$$

La relación (7.4) permite identificar el carácter dinámico de las distintas componentes del momento canónico. En particular, al considerar la componente temporal se obtiene

$$\Pi^0 = F^{00} = 0, \quad (7.5)$$

lo cual implica la existencia de una ligadura primaria del sistema, en el sentido de Dirac [1]. En consecuencia, la variable A_0 no posee un momento canónico conjugado independiente, lo que indica que no constituye un grado de libertad dinámico. De hecho, al considerar la ecuación de movimiento correspondiente a A_0 , se obtiene la relación

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^i, \quad (7.6)$$

lo que pone de manifiesto que A_0 no constituye una variable independiente, sino que está completamente determinada por las variables dinámicas del sistema. En este sentido, su papel es el de un multiplicador de Lagrange asociado a una ligadura del sistema³.

Por otro lado, para las componentes espaciales del momento canónico se obtiene

$$\Pi^i = F^{i0} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0, \quad (7.7)$$

esta expresión muestra que las variables (A_i, Π^i) constituyen los pares canónicos del sistema y parametrizan el espacio de fase dinámico.

Con el objetivo de aplicar el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw, el siguiente paso consiste en reformular la teoría en una forma de primer orden en las derivadas temporales [6, 7, 8]. Para ello se sustituyen las relaciones (7.4) y (7.7) en la densidad lagrangiana original (7.1). Después de una reorganización algebraica se obtiene

$$\mathcal{L} = \Pi^i \partial_0 A_i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} - \Pi^i \partial_i A_0 + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i. \quad (7.8)$$

En la expresión (7.8) aparece un término que contiene derivadas espaciales de A_0 . Este término puede reorganizarse mediante una integración por partes, despreciando contribuciones de frontera. De esta manera se obtiene

$$\Pi^i \partial_i A_0 = -A_0 \partial_i \Pi^i. \quad (7.9)$$

Sustituyendo la relación (7.9) en (7.8) se obtiene la forma canónica de primer orden de la densidad lagrangiana⁴

$$\mathcal{L}_C = \Pi^i \dot{A}_i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i, \quad (7.10)$$

donde se ha introducido la notación $\dot{A}_i \equiv \partial_0 A_i$.

²El cálculo explícito del momento canónico conjugado se presenta en el Apéndice C.1.

³La ecuación de movimiento para A_0 y su resolución explícita se presentan en el Apéndice C.2.

⁴El cálculo detallado que conduce a esta forma linealizada de la densidad lagrangiana se presenta en el Apéndice C.3.

La expresión (7.10) presenta explícitamente la estructura requerida para aplicar el formalismo de Faddeev–Jackiw. En particular, permite identificar el potencial simpléctico del sistema, definido como

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} - A_0\partial_i\Pi^i - \frac{m^2}{2}A_0A_0 + \frac{m^2}{2}A_iA_i. \quad (7.11)$$

Utilizando (7.11), la densidad lagrangiana puede escribirse en la forma compacta

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_i\Pi^i - \mathcal{H}^{(0)}. \quad (7.12)$$

La forma (7.12) permite identificar de manera natural el conjunto de variables simplécticas que parametrizan el espacio de fase del sistema. Estas variables están dadas por

$$\xi_a^{(0)} = (A_i, \Pi^i, A_0). \quad (7.13)$$

Una vez definidas las variables $\xi_a^{(0)}$, el formalismo requiere identificar los coeficientes de la llamada 1–forma simpléctica. Para ello la densidad lagrangiana (7.12) se compara con la forma general [6]

$$\mathcal{L}^{(0)} = K_a^{(0)}(\xi)\dot{\xi}_a^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi). \quad (7.14)$$

La equivalencia entre (7.12) y (7.14) permite identificar los coeficientes

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (7.15)$$

Finalmente, utilizando el conjunto de variables (7.13) y los coeficientes (7.15), se procede a construir la matriz simpléctica del sistema. De acuerdo con la definición general del formalismo, los elementos de esta matriz están dados por [8]

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (7.16)$$

Por construcción, la matriz simpléctica definida en (7.16) es antisimétrica. En consecuencia, sus elementos satisfacen la relación

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f_{ba}^{(0)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (7.17)$$

lo cual implica que todos los elementos sobre la diagonal principal se anulan, mientras que los elementos fuera de la diagonal aparecen con signo opuesto al intercambiar los índices correspondientes. De los coeficientes de la 1–forma simpléctica (7.15), el único coeficiente no nulo es $K_{A_i}^{(0)}$, mientras que los coeficientes asociados a Π^i y A_0 se anulan. Como consecuencia, las únicas contribuciones no triviales en (7.16) provienen de las derivadas funcionales cruzadas entre las variables. A_i y Π^i . De esta manera, la matriz simpléctica del sistema adopta la forma⁵

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & A_0 \\ \hline A_i & 0 & -\delta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.18)$$

⁵El cálculo explícito de cada uno de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el Apéndice C.4.

Se observa que la matriz simpléctica (7.18) es claramente singular, ya que la fila y la columna asociadas a la variable A_0 se anulan. Esta singularidad indica que la matriz posee al menos un modo cero.

En el formalismo de Faddeev–Jackiw, un modo cero $v^{A(0)}$ se define como un vector que satisface la condición

$$\int d^3\mathbf{y} v^{a(0)}(\mathbf{y}) f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (7.19)$$

donde a, b recorren el conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)} = (A_i, \Pi^i, A_0)$.

En su forma más general, el modo cero puede escribirse como

$$v^{a(0)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} v^{A_i}(\mathbf{x}) & v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) & v^{A_0}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Al imponer la condición (7.19) y utilizar la forma explícita de la matriz simpléctica (7.18), se obtiene que las componentes asociadas a A_i y Π^i deben anularse. En consecuencia, el modo cero adopta la forma particular

$$v^{a(0)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^{A_0}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

donde $v^{A_0}(\mathbf{x})$ es una constante arbitraria. La existencia de este modo cero refleja la singularidad de la matriz simpléctica (7.18) y conduce a la aparición de una ligadura en el sistema, la cual se obtiene al contraer dicho modo cero con el gradiente del potencial simpléctico. Como resultado, se obtiene la ligadura del sistema⁶

$$\Omega^{(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.22)$$

Es importante notar que la ligadura (7.22) coincide con la relación obtenida a partir de la ecuación de movimiento para A_0 , (7.6). Esto muestra que dicha ecuación no describe una dinámica independiente, sino que constituye una restricción sobre las variables del sistema, en concordancia con el análisis simpléctico.

La presencia de la ligadura (7.22) refleja que el sistema aún no está completamente descrito en términos de variables independientes, lo cual se manifiesta en la singularidad de la matriz simpléctica. En este contexto, el procedimiento sistemático consiste en extender el lagrangiano mediante la introducción de un multiplicador de Lagrange, incorporando un término del tipo $\dot{\lambda} \Omega^{(0)}$. Esta construcción permite que la ligadura aparezca como coeficiente de una velocidad dentro de la 1-forma, contribuyendo directamente a la estructura simpléctica del sistema en el proceso iterativo.

De este modo, la condición (7.22) se integra en la estructura del sistema, permitiendo que su consistencia sea analizada a través de la matriz simpléctica. La variable λ se incorpora así al conjunto ampliado de variables, sin introducir nuevos grados de libertad físicos, sino actuando como un multiplicador que garantiza la implementación de la ligadura dentro del esquema del formalismo.

Con esta modificación, el primer lagrangiano iterado queda dado por

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \Omega^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (7.23)$$

⁶El cálculo explícito de la ligadura $\Omega^{(0)}(\mathbf{x})$, se presenta en el Apéndice C.5.

donde el nuevo potencial simpléctico está dado por⁷

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i + \frac{1}{4}F_{ij}F_{ij} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 + \frac{m^2}{2}A_iA_i. \quad (7.24)$$

Con el propósito de simplificar la estructura de las variables y obtener una formulación más simétrica, resulta conveniente reparametrizar el multiplicador de Lagrange introducido en el paso anterior. En lugar de trabajar directamente con λ , se introduce una nueva variable Π^0 mediante la relación

$$\lambda \longrightarrow \frac{1}{m^2}\Pi^0. \quad (7.25)$$

Esta sustitución no modifica el contenido físico del sistema, sino que corresponde a una elección de variables en el espacio extendido que permite expresar el lagrangiano en términos de cantidades con interpretación canónica. En particular, Π^0 puede identificarse como el momento conjugado asociado a la componente temporal del campo A_0 .

Al sustituir esta relación en la expresión del lagrangiano anterior se obtiene

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i\Pi^i + \frac{1}{m^2}\dot{\Pi}^0(\partial_i\Pi^i + m^2A_0) - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (7.26)$$

A partir del lagrangiano iterado $\mathcal{L}^{(1)}$ obtenido en la ecuación (7.26), se procede a identificar el nuevo conjunto de variables del sistema. En esta etapa del procedimiento, se amplía el conjunto original para incluir la variable Π^0 , introducida mediante la redefinición del multiplicador de Lagrange. De este modo, las variables sipléticas quedan definidas como

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, \Pi^i, A_0, \Pi^0). \quad (7.27)$$

A partir de la expresión del lagrangiano (7.26), es posible identificar los coeficientes de la 1-forma simpléctica escribiendo $\mathcal{L}^{(1)}$ en la forma general

$$\mathcal{L}^{(1)} = K_a^{(1)}(\xi)\dot{\xi}_a^{(1)} - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (7.28)$$

Comparando (7.28) con el lagrangiano iterado (7.26), se identifican los coeficientes $K_a^{(1)}$

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\Pi^0}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2}(\partial_i\Pi^i + m^2A_0). \quad (7.29)$$

Una vez determinados los coeficientes de la 1-forma, se procede a construir la matriz simpléctica correspondiente a la primera iteración. De acuerdo con la definición general del formalismo, sus elementos están dados por

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(1)}(\mathbf{y})}. \quad (7.30)$$

Para determinar explícitamente sus componentes se utilizan los coeficientes simplécticos (7.29). De acuerdo con estos resultados, los únicos coeficientes no nulos de la 1-forma simpléctica son $K_{A_i}^{(1)}$ y $K_{\Pi^0}^{(1)}$. Como consecuencia, las contribuciones no triviales en (7.30) provienen de dos tipos de derivadas funcionales, por un lado, las derivadas cruzadas entre las variables A_i y Π^i , que generan el bloque canónico del sistema, y por otro lado las derivadas que involucran el coeficiente Π^0 .

⁷Los detalles del cálculo de del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$ se presentan en el Apéndice C.6.

Evaluando explícitamente estas derivadas funcionales se obtiene la matriz simpléctica correspondiente a la primera iteración⁸

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} & A_j & \Pi^j & A_0 & \Pi^0 \\ \hline A_i & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Pi^0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & -1 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.31)$$

Una vez obtenida la matriz $f_{ab}^{(1)}$, es necesario verificar si es singular o no. Esto se determina proponiendo que existe un modo cero asociado a ella. Para ello se introduce un vector arbitrario

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = \left(v^{A_i}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) \right), \quad (7.32)$$

y se impone la condición característica de un modo cero,

$$\int d^3\mathbf{y} v^{a(1)}(\mathbf{x}) f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (7.33)$$

Sustituyendo la forma explícita de la matriz simpléctica dada en (7.31) dentro de (7.33), se obtiene un sistema de ecuaciones para las componentes del vector (7.32). Al resolver este sistema se encuentra que

$$v^{A_i}(\mathbf{x}) = 0, \quad v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) = 0, \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) = 0, \quad v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) = 0. \quad (7.34)$$

Por lo tanto, la única solución compatible con (7.33) es el vector nulo,

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0), \quad (7.35)$$

lo que implica que no existen modos cero no triviales.

Para corroborar este resultado de manera independiente, analizamos el determinante de la matriz simpléctica. Se obtiene que

$$\det f^{(1)} \propto 1, \quad (7.36)$$

lo cual confirma su carácter no singular⁹.

En consecuencia, el procedimiento iterativo del formalismo se cierra en esta etapa y la matriz admite inversa, lo que permite determinar los corchetes generalizados del sistema. La matriz inversa se define a través de la ecuación funcional

$$\int d^3\mathbf{z} f_{ac}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.37)$$

⁸El cálculo explícito de cada uno de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se presenta en el Apéndice C.7.

⁹El desarrollo del análisis de modos cero y del cálculo del determinante de la matriz $f_{ab}^{(1)}$ se presenta en el Apéndice C.8.

Resolviendo la ecuación (7.37) se obtiene la siguiente expresión para la matriz inversa¹⁰

$$\left(f_{ab}^{(1)}\right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left(\begin{array}{c|cccc} \{, \} & A_j & \Pi^j & A_0 & \Pi^0 \\ \hline A_i & 0 & \delta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ \Pi^j & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & -1 \\ \Pi^0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (7.38)$$

Una vez determinada la matriz inversa (7.38), es posible calcular los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simpléctica (7.27). En el formalismo de Faddeev–Jackiw estos corchetes están definidos por la relación fundamental

$$\left\{ \xi_a^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_b^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} = \left(f_{ab}^{(1)}\right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (7.39)$$

Sustituyendo los elementos de la matriz inversa (7.38) en la definición (7.39), se obtienen los corchetes fundamentales. Sin embargo, al imponer las ligaduras del sistema, y reducir el espacio de fase a las variables físicas independientes, los únicos corchetes no nulos que sobreviven son

$$\left\{ A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y}) \right\} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (7.40)$$

los cuales coinciden con los corchetes de Dirac obtenidos en el tratamiento hamiltoniano estándar en el espacio de fase reducido [4]. Esto confirma la equivalencia entre ambos enfoques.

¹⁰El cálculo explícito de la matriz inversa que satisface la ecuación funcional (7.37) se presenta en el Apéndice C.9.

Capítulo 8

Campo de Proca Complejo

El modelo de Proca admite una extensión natural al caso complejo al considerar el campo vectorial A_μ y su conjugado complejo A_μ^* como variables independientes dentro del formalismo variacional. A diferencia del caso real, esta generalización introduce una estructura interna adicional asociada a transformaciones globales de fase.

En efecto, el lagrangiano es invariante bajo transformaciones globales del tipo

$$A_\mu \rightarrow e^{i\alpha} A_\mu, \quad A_\mu^* \rightarrow e^{-i\alpha} A_\mu^*, \quad (8.1)$$

lo que da lugar, mediante el teorema de Noether, a una corriente conservada. Sin embargo, al igual que en el caso real, la presencia del término de masa rompe la invariancia gauge local, por lo que el modelo describe un campo vectorial masivo sin redundancias gauge.

Desde el punto de vista dinámico, la teoría conserva su carácter singular. En particular, las componentes temporales A_0 y A_0^* no poseen momentos canónicos independientes, lo que conduce a la aparición de ligaduras en el sistema. Esta estructura puede analizarse de manera sistemática mediante el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw.

En este contexto, el objetivo del presente capítulo es extender el análisis desarrollado para el campo de Proca real al caso complejo, implementando el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw para caracterizar la estructura de ligaduras del sistema. En particular, se busca determinar la forma de la matriz simpléctica, analizar sus modos cero y establecer los corchetes generalizados entre las variables dinámicas, con el fin de identificar los campos físicos independientes que parametrizan el espacio de fase reducido del sistema.

Consideramos entonces el campo de Proca complejo en el espacio-tiempo de Minkowski¹, cuya dinámica está gobernada por la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^* A^\mu, \quad (8.2)$$

donde los tensores de campo se definen como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{\mu\nu}^* = \partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^*, \quad (8.3)$$

los cuales satisfacen $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ y $F_{\mu\nu}^* = -F_{\nu\mu}^*$.

La estructura de la densidad lagrangiana (8.2) muestra que la teoría depende de las derivadas temporales tanto del campo A_μ como de su conjugado A_μ^* . En consecuencia, la identificación de las variables dinámicas requiere introducir momentos canónicos conjugados asociados a cada uno de estos campos, tratándolos como variables independientes dentro del formalismo variacional. En teoría de campos, estos momentos se definen como [14, 12]

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)}, \quad \Pi^{*\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu^*)}. \quad (8.4)$$

¹Se adopta la convención $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+, -, -, -)$.

Las derivadas parciales definidas en (8.4) se evalúan a partir de la densidad lagrangiana (8.2), obteniéndose los momentos canónicos conjugados asociados a los campos A_μ y A_μ^* ²

$$\Pi^\nu = F^{*\nu 0}, \quad \Pi^{*\nu} = F^{\nu 0}. \quad (8.5)$$

Estas relaciones permiten caracterizar la estructura dinámica del sistema. En particular, al analizar las componentes temporales se obtiene

$$\Pi^0 = F^{*00} = 0, \quad \Pi^{*0} = F^{00} = 0, \quad (8.6)$$

lo cual evidencia la presencia de ligaduras primarias asociadas a ambas variables, en el sentido de Dirac [1]. Como consecuencia, las componentes temporales A_0 y A_0^* no poseen momentos canónicos conjugados definidos, por lo que no corresponden a grados de libertad dinámicos del sistema.

Por otro lado, las ecuaciones de movimiento asociadas a estas variables conducen a relaciones que las expresan en términos de las variables dinámicas. En particular, se obtiene

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^{*i}, \quad A_0^* = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^i, \quad (8.7)$$

lo que muestra que ambas componentes temporales quedan completamente determinadas por los campos dinámicos. En este sentido, su papel es el de multiplicadores de Lagrange asociados a las ligaduras del sistema³.

Por otro lado, para las componentes espaciales se tiene

$$\Pi^i = F^{*i0} = \partial_0 A_i^* - \partial_i A_0^*, \quad \Pi^{*i} = F^{i0} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (8.8)$$

Estas relaciones muestran que los pares (A_i, Π^i) y (A_i^*, Π^{*i}) constituyen las variables dinámicas del sistema y parametrizan el espacio de fase correspondiente al campo de Proca complejo.

Para implementar el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw, es necesario reformular la teoría en una forma lineal en las derivadas temporales [6, 7, 8]. En el caso complejo, este procedimiento debe realizarse teniendo en cuenta que los momentos canónicos de cada campo dependen del campo conjugado, lo que introduce un acoplamiento entre las variables dinámicas.

Sustituyendo las expresiones de los momentos canónicos en la densidad lagrangiana (8.2) y reorganizando los términos, se obtiene

$$\mathcal{L} = \Pi^i \partial_0 A_i + \Pi^{*i} \partial_0 A_i^* - \Pi^i \Pi^{*i} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} - \Pi^i \partial_i A_0 - \Pi^{*i} \partial_i A_0^* + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i. \quad (8.9)$$

En esta expresión aparecen términos que contienen derivadas espaciales de A_0 y A_0^* . Estos pueden reorganizarse mediante integración por partes, despreciando términos de frontera, obteniéndose

$$\Pi^i \partial_i A_0 = -A_0 \partial_i \Pi^i, \quad \Pi^{*i} \partial_i A_0^* = -A_0^* \partial_i \Pi^{*i}. \quad (8.10)$$

Sustituyendo estas relaciones en (8.9), se obtiene la forma canónica de primer orden de la densidad lagrangiana⁴

$$\mathcal{L}_C = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* - \Pi^i \Pi^{*i} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + A_0 \partial_i \Pi^i + A_0^* \partial_i \Pi^{*i} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i, \quad (8.11)$$

²El cálculo explícito de los momentos canónicos conjugados se presenta en el Apéndice D.1.

³La obtención explícita de estas relaciones se presenta en el Apéndice D.2.

⁴El desarrollo detallado de esta linealización se presenta en el Apéndice D.3.

donde se ha introducido la notación $\dot{A}_i \equiv \partial_0 A_i$ y $\dot{A}_i^* \equiv \partial_0 A_i^*$.

La forma de primer orden (8.11) permite identificar directamente la estructura requerida para la implementación del formalismo de Faddeev–Jackiw. En particular, a partir de esta expresión se reconoce el potencial simpléctico del sistema, dado por

$$\mathcal{H}^{(0)} = \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i - A_0^* \partial_i \Pi^{*i} - m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i. \quad (8.12)$$

En términos de este potencial, la densidad lagrangiana puede escribirse en la forma compacta

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* - \mathcal{H}^{(0)}. \quad (8.13)$$

Esta representación permite identificar de manera natural el conjunto de variables simplécticas que parametrizan el espacio de fase extendido del sistema. En el caso complejo, estas variables están dadas por

$$\xi_a^{(0)} = (A_i, A_i^*, \Pi^i, \Pi^{*i}, A_0, A_0^*). \quad (8.14)$$

Una vez definidas, se procede a identificar los coeficientes de la 1–forma simpléctica comparando (8.13) con la forma general [6]

$$\mathcal{L}^{(0)} = K_a^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_a^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi). \quad (8.15)$$

De esta comparación se obtiene

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{A_i^*}^{(0)} \rightarrow \Pi^{*i}, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{\Pi^{*i}}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0^*}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (8.16)$$

Con el conjunto de variables (8.14) y los coeficientes (8.16), se construye la matriz simpléctica del sistema mediante la definición

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (8.17)$$

Por construcción, esta matriz es antisimétrica, es decir

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -f_{ba}^{(0)}(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad (8.18)$$

lo que implica que los elementos diagonales se anulan, mientras que los elementos fuera de la diagonal aparecen con signo opuesto al intercambiar los índices.

A partir de los coeficientes de la 1–forma simpléctica (8.16), se observa que los únicos coeficientes no nulos son aquellos asociados a las variables A_i y A_i^* , mientras que los correspondientes a Π^i , Π^{*i} , A_0 y A_0^* se anulan. En consecuencia, las contribuciones no triviales en la definición (8.17) provienen únicamente de las derivadas funcionales cruzadas entre los pares (A_i, Π^i) y (A_i^*, Π^{*i}) .

De esta manera, la matriz simpléctica del sistema adopta la forma⁵

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_j & A_j^* & \Pi^j & \Pi^{*j} & A_0 & A_0^* \\ A_i & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ A_i^* & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*i} & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.19)$$

La matriz simpléctica (8.19) es claramente singular, ya que las filas y columnas asociadas a las variables A_0 y A_0^* se anulan. Esto indica la existencia de al menos dos modos cero independientes.

En el formalismo de Faddeev–Jackiw, los modos cero $v^{a(0)}$ satisfacen la condición

$$\int d^3\mathbf{y} v^{a(0)}(\mathbf{y}) f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad (8.20)$$

donde ahora los índices a y b recorren el conjunto de variables simplécticas $\xi^{(0)}$.

En su forma más general, un modo cero puede escribirse como

$$v^{a(0)}(\mathbf{x}) = \left(v^{A_i}(\mathbf{x}) \quad v^{A_i^*}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^{*i}}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0^*}(\mathbf{x}) \right). \quad (8.21)$$

Al imponer la condición de modo cero utilizando la forma explícita de la matriz (8.19), se obtiene que todas las componentes asociadas a A_i , A_i^* , Π^i y Π^{*i} deben anularse. Esto muestra que los únicos componentes no triviales del modo cero corresponden a A_0 y A_0^* , por lo que el núcleo de la matriz simpléctica está generado exclusivamente por estas variables.

En consecuencia, la matriz simpléctica posee un subespacio nulo de dimensión dos. Una base para este subespacio está dada por los modos cero

$$v_1^{a(0)}(\mathbf{x}) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^{A_0}(\mathbf{x}) \ 0), \quad v_2^{a(0)}(\mathbf{x}) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^{A_0^*}(\mathbf{x})), \quad (8.22)$$

donde $v^{A_0}(\mathbf{x})$ y $v^{A_0^*}(\mathbf{x})$ son funciones arbitrarias.

La existencia de estos modos cero refleja la singularidad de la matriz simpléctica y conduce a la aparición de dos ligaduras independientes en el sistema. Estas se obtienen al contraer cada modo cero con el gradiente del potencial simpléctico, dando lugar a⁶

$$\Omega^{(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + m^2 A_0^*(\mathbf{x}) = 0, \quad (8.23)$$

$$\Omega^{*(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^{*i}(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (8.24)$$

Es importante notar que las ligaduras $\Omega^{(0)}$ y $\Omega^{*(0)}$ coinciden con las relaciones obtenidas a partir de las ecuaciones de movimiento para A_0 y A_0^* , dadas en (8.7). Esto muestra que dichas ecuaciones no describen una dinámica independiente, sino que imponen restricciones sobre las variables del sistema, en concordancia con el análisis simpléctico.

⁵El cálculo explícito de los elementos de la matriz simpléctica se presenta en el Apéndice D.4.

⁶El cálculo de las ligaduras $\Omega^{(0)}(\mathbf{x})$ y $\Omega^{*(0)}(\mathbf{x})$ se presenta en el Apéndice D.5.

La presencia de estas ligaduras indica que el sistema aún no está completamente descrito en términos de variables independientes, lo cual se refleja en la singularidad de la matriz simpléctica. En este contexto, el procedimiento consiste en extender el lagrangiano mediante la introducción de multiplicadores de Lagrange asociados a cada ligadura, incorporando términos del tipo $\dot{\lambda} \Omega^{(0)}$ y $\dot{\lambda}^* \Omega^{*(0)}$. De esta manera, las ligaduras pasan a formar parte de la estructura del sistema como coeficientes de las nuevas variables introducidas.

Con esta extensión, las condiciones $\Omega^{(0)}$ y $\Omega^{*(0)}$ quedan integradas en el análisis, permitiendo estudiar su consistencia a través de la matriz simpléctica en el proceso iterativo. Las variables λ y λ^* se incorporan así al conjunto ampliado de variables sin introducir grados de libertad físicos adicionales, sino actuando como multiplicadores que garantizan la implementación de las ligaduras dentro del formalismo.

Con esta modificación, el primer lagrangiano iterado toma la forma

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* + \dot{\lambda} \Omega^{(0)} + \dot{\lambda}^* \Omega^{*(0)} - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (8.25)$$

El nuevo potencial simpléctico está dado por⁷

$$\mathcal{H}^{(1)} = \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i. \quad (8.26)$$

Con el fin de obtener una formulación más simétrica y facilitar la interpretación canónica de las variables, resulta conveniente reparametrizar los multiplicadores de Lagrange introducidos anteriormente. Para ello, se definen nuevas variables Π^0 y Π^{*0} mediante las relaciones

$$\lambda \longrightarrow \frac{1}{m^2} \Pi^0, \quad \lambda^* \longrightarrow \frac{1}{m^2} \Pi^{*0}. \quad (8.27)$$

Esta redefinición no altera el contenido físico del sistema, sino que corresponde a un cambio de variables en el espacio simpléctico extendido, permitiendo interpretar Π^0 y Π^{*0} como los momentos conjugados asociados a A_0 y A_0^* , respectivamente.

Al sustituir estas relaciones en el lagrangiano (8.25), se obtiene

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}^0 (\partial_i \Pi^i + m^2 A_0^*) + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}^{*0} (\partial_i \Pi^{*i} + m^2 A_0) - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (8.28)$$

A partir del lagrangiano iterado (8.28), se procede a identificar el conjunto ampliado de variables simplécticas. A diferencia del caso real, la incorporación de las dos ligaduras requiere introducir las variables Π^0 y Π^{*0} al espacio de fase extendido. En consecuencia, las variables simplécticas en esta etapa quedan definidas como

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, A_i^*, \Pi^i, \Pi^{*i}, A_0, A_0^*, \Pi^0, \Pi^{*0}). \quad (8.29)$$

A partir del lagrangiano (8.28), se identifican los coeficientes de la 1-forma simpléctica escribiendo $\mathcal{L}^{(1)}$ como

$$\mathcal{L}^{(1)} = K_a^{(1)}(\xi) \dot{\xi}_a^{(1)} - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (8.30)$$

⁷Los detalles del cálculo del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$ se presentan en el Apéndice D.6.

Al establecer la equivalencia entre (8.30) y (8.28), se determinan los coeficientes no nulos

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{A_i^*}^{(1)} \rightarrow \Pi^{*i}, \quad K_{\Pi^0}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} (\partial_i \Pi^i + m^2 A_0^*), \quad K_{\Pi^{*0}}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} (\partial_i \Pi^{*i} + m^2 A_0), \quad (8.31)$$

mientras que los demás coeficientes se anulan.

Una vez determinados estos coeficientes, se construye la matriz simpléctica de la primera iteración utilizando la definición general

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(1)}(\mathbf{y})}. \quad (8.32)$$

El cálculo explícito de las derivadas funcionales muestra términos canónicos para los pares (A_i, Π^i) y (A_i^*, Π^{*i}) , junto con contribuciones que acoplan las componentes espaciales con las variables temporales mediante Π^0 y Π^{*0} . La evaluación explícita de estas derivadas funcionales conduce a la matriz simpléctica correspondiente a la primera iteración⁸

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_j & A_j^* & \Pi^j & \Pi^{*j} & A_0 & A_0^* & \Pi^0 & \Pi^{*0} \\ A_i & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_i^* & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ \Pi^{*i} & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Pi^0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*0} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.33)$$

Una vez construida la matriz (8.33), se analiza su regularidad proponiendo la existencia de modos cero asociadas a ella. Para ello, se considera un vector general

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = \left(v^{A_i}(\mathbf{x}) \quad v^{A_i^*}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^{*i}}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0^*}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^{*0}}(\mathbf{x}) \right), \quad (8.34)$$

y se impone la condición

$$\int d^3 \mathbf{y} v^{a(1)}(\mathbf{y}) f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (8.35)$$

Al sustituir la matriz (8.33) en (8.35) y resolver el sistema resultante, se encuentra que todas las componentes del vector deben anularse. Por tanto, la única solución es

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0), \quad (8.36)$$

⁸El cálculo detallado de los elementos de la matriz simpléctica se presenta en el Apéndice D.7.

lo que indica que no existen modos cero no triviales.

En consecuencia, la matriz simpléctica es regular en esta etapa. Este resultado puede verificarse de manera independiente mediante el cálculo de su determinante, el cual resulta no nulo⁹. Por lo tanto, el procedimiento iterativo del formalismo se cierra en esta etapa, y la matriz simpléctica admite inversa, lo que permite determinar los corchetes generalizados del sistema.

La matriz inversa se define a través de la ecuación funcional

$$\int d^3\mathbf{z} f_{ac}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (8.37)$$

la cual garantiza que $\left(f_{ab}^{(1)} \right)^{-1}$ actúa como el inverso de la matriz simpléctica en el sentido funcional [8, 6].

Al resolver la ecuación (8.37), se obtiene la matriz inversa correspondiente a la primera iteración¹⁰

$$\left(f_{ab}^{(1)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \{, \} & A_j & A_j^* & \Pi^j & \Pi^{*j} & A_0 & A_0^* & \Pi^0 & \Pi^{*0} \\ A_i & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 & 0 \\ A_i^* & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 \\ \Pi^i & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*i} & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ A_0^* & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \Pi^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.38)$$

Una vez determinada la matriz (8.38), se pueden definir los corchetes generalizados entre las variables simplécticas del sistema. En el formalismo de Faddeev–Jackiw, estos corchetes se identifican directamente con los elementos de la matriz inversa mediante la relación [6, 7]

$$\left\{ \xi_a^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_b^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} = \left(f_{ab}^{(1)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (8.39)$$

Sustituyendo los elementos de la matriz inversa (8.38) en la definición de los corchetes generalizados (8.39), y una vez impuestas las ligaduras del sistema, se obtiene que el espacio de fase se reduce a las variables físicas independientes. En este contexto, los corchetes fundamentales no nulos se organizan en dos sectores desacoplados.

Para el campo A_μ se tiene

$$\left\{ A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y}) \right\} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (8.40)$$

⁹El análisis detallado de la regularidad de la matriz se presenta en el Apéndice D.8.

¹⁰El cálculo explícito de la matriz inversa que satisface la ecuación funcional (8.37) se presenta en el Apéndice D.9.

mientras que para el campo conjugado A_μ^* se obtiene

$$\{A_i^*(\mathbf{x}), \Pi^{*j}(\mathbf{y})\} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8.41)$$

Los corchetes mixtos entre variables no conjugadas se anulan, lo que refleja la independencia entre ambos sectores. Estos resultados coinciden con los corchetes de Dirac obtenidos en el tratamiento hamiltoniano estándar para sistemas con ligaduras de segunda clase, confirmando la equivalencia entre el formalismo simpléctico y el enfoque hamiltoniano en el caso del campo de Proca complejo [4].

Capítulo 9

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló de manera sistemática la aplicación del formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw al estudio de sistemas singulares con ligaduras de segunda clase y sin simetrías gauge, considerando tanto sistemas mecánicos con un número finito de grados de libertad como teorías de campos. Para ello, se analizó el modelo de Landau en el límite de masa nula, la partícula libre restringida a la esfera y los campos de Proca real y complejo. En cada caso, el procedimiento consistió en reformular el sistema mediante un lagrangiano de primer orden, construir la matriz simpléctica correspondiente e identificar su posible degeneración como criterio para determinar la presencia de ligaduras.

En los sistemas mecánicos estudiados fue posible observar dos comportamientos complementarios dentro del formalismo. En el modelo de Landau, la matriz simpléctica resulta no singular desde la formulación inicial, por lo que la estructura dinámica queda completamente determinada sin necesidad de iteraciones adicionales. En contraste, en la partícula libre sobre una superficie, la presencia de restricciones geométricas genera una matriz simpléctica singular cuya regularización requiere la incorporación sucesiva de ligaduras mediante multiplicadores dinámicos. Este contraste permitió mostrar de manera explícita cómo la degeneración simpléctica refleja la existencia de variables no independientes y cómo el procedimiento iterativo conduce a una descripción consistente en términos de variables físicas.

En el caso de las teorías de campos, el análisis del campo de Proca real permitió identificar la ligadura asociada a la componente temporal del campo, evidenciando que dicha variable no representa un grado de libertad dinámico independiente sino una condición determinada por la propia dinámica del sistema. Para el campo de Proca complejo, el tratamiento simultáneo del campo y su conjugado mostró una duplicación de la estructura simpléctica respecto al caso real, manteniendo el carácter no gauge de la teoría y la presencia de ligaduras de segunda clase. En ambos casos, la extensión funcional del formalismo conservó la misma estructura conceptual observada en los sistemas mecánicos, aunque requirió el tratamiento de operadores diferenciales y distribuciones tipo delta de Dirac.

Una vez obtenida una matriz simpléctica no degenerada, la inversión de dicha estructura permitió construir los corchetes generalizados que describen la dinámica del sistema en términos de variables independientes. En todos los sistemas analizados, estos corchetes coincidieron con los corchetes de Dirac obtenidos mediante el tratamiento hamiltoniano estándar, lo que confirma la equivalencia dinámica entre ambos enfoques para sistemas con ligaduras de segunda clase. Esta concordancia constituye una verificación de la consistencia del formalismo de Faddeev–Jackiw como una alternativa válida para la descripción de sistemas singulares.

Asimismo, el desarrollo realizado permitió identificar ventajas y limitaciones del método simpléctico frente al formalismo de Dirac. Entre sus principales ventajas se encuentra la eliminación de la clasificación explícita de ligaduras en primera y segunda clase, así como la ausencia de la distinción entre igualdades débiles y fuertes, ya que las restricciones se incorporan directamente dentro de la estructura lagrangiana. Además, la obtención de los corchetes generalizados a partir de la inversa de la matriz simpléctica simplifica de manera considerable el tratamiento algebraico del sistema.

Sin embargo, también se evidencian ciertas limitaciones. En particular, algunas relaciones asociadas

a la definición de los momentos canónicos no aparecen como ligaduras independientes dentro del formalismo de Faddeev–Jackiw, sino que quedan absorbidas en la formulación de primer orden. Esto implica que, aunque la dinámica final coincide con la obtenida mediante Dirac, la organización interna de la información del sistema difiere entre ambos enfoques. Como consecuencia, la identificación inmediata de todas las variables verdaderamente independientes no siempre resulta tan directa como en el tratamiento hamiltoniano estándar.

En conjunto, los resultados obtenidos muestran que el formalismo de Faddeev–Jackiw constituye un procedimiento geométrico, consistente y algebraicamente eficiente para el estudio de sistemas con ligaduras de segunda clase. Su formulación permite describir la dinámica directamente a partir de la estructura simpléctica del sistema, conservando equivalencia con el método de Dirac y ofreciendo una alternativa particularmente útil en teorías donde la manipulación algebraica de las ligaduras puede volverse más compleja.

Como continuación de este trabajo, resulta relevante estudiar sistemas en los cuales la matriz simpléctica no se regulariza en un número finito de iteraciones, con el fin de analizar el comportamiento de la estructura de ligaduras en estos casos y establecer criterios más precisos para la terminación del procedimiento simpléctico.

Asimismo, sería de interés profundizar en la relación entre las condiciones implícitas que surgen en la formulación de primer orden y las ligaduras obtenidas mediante el método de Dirac, con el propósito de precisar con mayor claridad el alcance de la equivalencia entre ambos formalismos y las diferencias en la identificación de las variables dinámicas independientes.

Finalmente, resulta pertinente extender este análisis a sistemas con ligaduras funcionalmente dependientes o con estructuras simplécticas más complejas, donde la regularización de la matriz simpléctica puede no ser única. Esto permitiría delimitar con mayor precisión el dominio de validez del formalismo de Faddeev–Jackiw y estudiar sus alcances en situaciones más generales.

Apéndices

Apéndice A

Modelo de Landau

A.1. Análisis mediante el formalismo de Dirac

En esta sección desarrollamos el análisis hamiltoniano completo del modelo de Landau en el límite $m \rightarrow 0$, siguiendo el procedimiento sistemático de Dirac[1, 2].

Consideremos el lagrangiano definido en (5.1)

$$L = \frac{1}{2} (m \dot{x}_i \dot{x}_i + B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j - k x_i x_i), \quad (\text{A.1})$$

cuyas ecuaciones dinámicas se obtienen a partir de (5.2).

Un cálculo directo, análogo al realizado en el capítulo 5, conduce a

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m \dot{x}_k + \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i, \quad \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{1}{2} B \epsilon_{kj} \dot{x}_j - k x_k.$$

Sustituyendo en (5.2) y utilizando la antisimetría $\epsilon_{ij} = -\epsilon_{ji}$, se obtiene

$$m \ddot{x}_k + B \epsilon_{ik} \dot{x}_i + k x_k = 0. \quad (\text{A.2})$$

Esta es la ecuación dinámica asociada a la coordenada x_k .

El régimen de interés corresponde al límite $m \rightarrow 0$, en cuyo caso el lagrangiano (A.1) se reduce a

$$L = \frac{1}{2} (B \epsilon_{ij} x_i \dot{x}_j - k x_i x_i). \quad (\text{A.3})$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas se obtienen nuevamente a partir de (5.2). Pero, para este caso basta con aplicar el límite de masa nula en la ecuación (A.2) resultando

$$B \epsilon_{ik} \dot{x}_i + k x_k = 0 \quad (\text{A.4})$$

Obsérvese que esta expresión no contiene aceleraciones; por consiguiente, no determina de manera independiente la evolución dinámica sino que impone una ligadura entre coordenadas y velocidades. El sistema se convierte así en un sistema singular¹. Con el fin de realizar un análisis de la estructura canónica de la teoría, es necesario introducir los momentos canónicos conjugados a las coordenadas x_i , los cuales se definen de la siguiente manera

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i. \quad (\text{A.5})$$

Dado que (A.5) no puede invertirse para expresar las velocidades en términos de los momentos, se identifica inmediatamente la presencia de ligaduras primarias

$$\phi_k \equiv p_k - \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i \approx 0. \quad (\text{A.6})$$

¹La matriz hessiana asociada al lagrangiano es $W_{ij} = m \delta_{ij}$, la cual se anula en el límite $m \rightarrow 0$, indicando que el sistema se vuelve singular.

El hamiltoniano canónico resulta

$$\begin{aligned} H_C &= p_k \dot{x}_k - L, \\ &= p_k \dot{x}_k - \frac{1}{2}(p_k \dot{x}_k - k x_k x_k), \\ &= \frac{k}{2} x_k x_k. \end{aligned}$$

En presencia de (A.6), la dinámica está gobernada por el hamiltoniano primario

$$H_P = H_C + \lambda_k \phi_k, \quad (\text{A.7})$$

donde λ_k son multiplicadores de Lagrange arbitrarios. Con el fin de garantizar que la ligadura se mantenga durante la evolución del sistema, se debe calcular su consistencia de la siguiente manera

$$\dot{\phi}_k = \{\phi_k, H_P\} \approx 0. \quad (\text{A.8})$$

Para resolver esta expresión se introducen los corchetes de Poisson (CP) entre dos variables dinámicas $A\{X, P\}, B\{X, P\}$ definidos como

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial X} \frac{\partial B}{\partial P} - \frac{\partial B}{\partial X} \frac{\partial A}{\partial P}.$$

A partir de esta definición, los CP fundamentales son

$$\{x_k, p_l\} = \delta_{kl}, \quad \{x_k, x_l\} = \{p_k, p_l\} = 0.$$

El cálculo explícito conduce a

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= \{\phi_k, H_P\} = \{\phi_k, H_C + \lambda_k \phi_k\} = \{\phi_k, H_C\} + \lambda_m \{\phi_k, \phi_m\}, \\ &= \left\{ p_k - \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i, \frac{k}{2} x_l x_l \right\} + \lambda_m \left\{ p_k - \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i, p_m - \frac{1}{2} B \epsilon_{im} x_i \right\}, \\ &= \left\{ p_k, \frac{k}{2} x_l x_l \right\} - \lambda_m \left\{ p_k, \frac{1}{2} B \epsilon_{im} x_i \right\} - \lambda_m \left\{ \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} x_i, p_m \right\}, \\ &= k \{p_k, x_l\} x_l - \lambda_m \frac{1}{2} B \epsilon_{im} \{p_k, x_i\} - \lambda_m \frac{1}{2} B \epsilon_{ik} \{x_i, p_m\}, \\ &= -k x_l \delta_{kl} - \lambda_m \frac{1}{2} B (-\epsilon_{im} \delta_{ki} + \epsilon_{ik} \delta_{im}), \\ &= -k x_k - \lambda_m \frac{1}{2} B (-\epsilon_{km} + \epsilon_{mk}), \\ &= -k x_k - \lambda_m B \epsilon_{mk}. \end{aligned}$$

El resultado obtenido determina una condición sobre el multiplicador de Lagrange correspondiente a la ligadura primaria ϕ_k . En consecuencia, la teoría no admite ligaduras adicionales, de modo que la única presente en el sistema es (A.6).

Siguiendo el procedimiento del método de Dirac, el siguiente paso consiste en clasificar las ligaduras en primera y segunda clase. Para ello, se construye la matriz de ligaduras, cuyos elementos están dados por

$$C_{ij} \equiv \{\phi_i, \phi_j\}. \quad (\text{A.9})$$

La forma matricial implicara que se calcule el siguiente elemento

$$\begin{aligned} \{\phi_k, \phi_m\} &= \left\{ p_k - \frac{1}{2}B \epsilon_{ik} x_i, p_m - \frac{1}{2}B \epsilon_{im} x_i \right\} \\ &= -\frac{1}{2}B \{p_k, \epsilon_{im} x_i\} - \frac{1}{2}B \{\epsilon_{ik} x_i, p_m\} = -\frac{1}{2}B (-\epsilon_{im} \delta_{ki} + \epsilon_{ik} \delta_{im}) \\ &= -\frac{1}{2}B (-\epsilon_{km} + \epsilon_{mk}) \\ &= B \epsilon_{km}. \end{aligned}$$

Con lo cual se determina que

$$C_{ij} = B \epsilon_{ij}.$$

Dado que su determinante es diferente de cero, la matriz es regular y, por tanto, se puede invertir. Definiendo la inversa como C^{ij} , y siguiendo el desarrollo hecho en el capítulo 5 se obtiene

$$C^{ij} = -\frac{\epsilon_{ij}}{B}. \quad (\text{A.10})$$

A continuación, se define un nuevo conjunto de corchetes compatibles con las ligaduras de segunda clase presentes en la teoría. Estos se conocen como corchetes de Dirac (CD) y se definen, para dos variables dinámicas A y B , de la siguiente forma

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_i\} C^{ij} \{\phi_j, B\}$$

A partir de esta definición, se calculan los CD entre las variables del espacio de fase $\{x_k, p_k\}$. Para ello, se consideraran los siguientes

$$\begin{aligned} \{x_k, x_l\}_D &= \{x_k, x_l\} - \{x_k, \phi_i\} C^{ij} \{\phi_j, x_l\}, \\ &= -\{x_k, \phi_i\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \{\phi_j, x_l\}, \\ &= -\left\{ x_k, p_i - \frac{1}{2}B \epsilon_{ni} x_n \right\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \left\{ p_j - \frac{1}{2}B \epsilon_{aj} x_a, x_l \right\}, \\ &= -\{x_k, p_i\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \{p_j, x_l\}, \\ &= -\delta_{ki} \frac{\epsilon_{ij}}{B} (-\delta_{jl}), \\ &= \frac{\epsilon_{kl}}{B}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{x_k, p_l\}_D &= \{x_k, p_l\} - \{x_k, \phi_i\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \{\phi_j, p_l\}, \\
&= \delta_{kl} - \left\{ x_k, p_i - \frac{1}{2} B \epsilon_{ni} x_n \right\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \left\{ p_j - \frac{1}{2} B \epsilon_{aj} x_a, p_l \right\}, \\
&= \delta_{kl} - \{x_k, p_i\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \left\{ -\frac{1}{2} B \epsilon_{aj} x_a, p_l \right\}, \\
&= \delta_{kl} - \delta_{ki} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \left(-\frac{1}{2} B \epsilon_{aj} \delta_{al} \right), \\
&= \delta_{kl} + \frac{1}{2} \delta_{ki} \epsilon_{ij} \epsilon_{lj}, \\
&= \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\delta_{kl} \delta_{jj} - \delta_{kj} \delta_{lj}), \\
&= \delta_{kl} + \frac{1}{2} (2 \delta_{kl} - \delta_{kl}), \\
&= \frac{3}{2} \delta_{kl}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{p_k, p_l\}_D &= \{p_k, p_l\} - \{p_k, \phi_i\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \{\phi_j, p_l\}, \\
&= - \left\{ p_k, p_i - \frac{1}{2} B \epsilon_{ni} x_n \right\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \left\{ p_j - \frac{1}{2} B \epsilon_{aj} x_a, p_l \right\}, \\
&= - \left\{ p_k, -\frac{1}{2} B \epsilon_{ni} x_n \right\} \frac{\epsilon_{ij}}{B} \left\{ -\frac{1}{2} B \epsilon_{aj} x_a, p_l \right\}, \\
&= -\frac{1}{4} B \epsilon_{ni} \{p_k, x_n\} \epsilon_{ij} \epsilon_{aj} \{x_a, p_l\}, \\
&= -\frac{1}{4} B \epsilon_{ni} (-\delta_{kn}) \epsilon_{ij} \epsilon_{aj} \delta_{al} = \frac{1}{4} B \epsilon_{ki} \epsilon_{ij} \epsilon_{lj}, \\
&= \frac{1}{4} B \epsilon_{ki} (\delta_{il} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{lj}) = \frac{1}{4} B \epsilon_{ki} (2 \delta_{il} - \delta_{il}), \\
&= \frac{1}{4} B \epsilon_{kl}.
\end{aligned}$$

Finalmente, se establece que los corchetes generalizados asociados al modelo de Landau corresponden a

$$\{x_i, x_j\}_D = -\frac{\epsilon_{ij}}{B}, \quad \{x_i, p_j\}_D = \frac{\delta_{ij}}{2}, \quad \{p_i, p_j\}_D = -\frac{1}{4} B \epsilon_{ij}. \quad (\text{A.11})$$

Apéndice B

Partícula libre sobre una superficie

B.1. Linealización del lagrangiano

En el formalismo de Faddeev-Jackiw, una condición fundamental para su correcta aplicación es que el lagrangiano debe expresarse en primer orden respecto a las velocidades. Esto implica que debemos escribir el lagrangiano de manera que la relación entre las variables generalizadas y sus derivadas temporales se exprese de forma lineal.

Para lograr esto, procedemos a linealizar el lagrangiano de la siguiente manera. Consideremos el lagrangiano original del sistema, mostrado en (6.6)

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + \frac{\lambda}{2} (\mathbf{q}^2 - 1) \equiv \frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i + \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1),$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N)$ son las coordenadas generalizadas de la partícula, y λ es el multiplicador de Lagrange introducido para imponer la ligadura.

Para poder expresar el lagrangiano de manera canónica y facilitar la aplicación de la formulación hamiltoniana, introducimos los momentos canónicos asociados a cada coordenada q_i . Estos momentos se definen como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i.$$

De esta forma, el término cinético $\frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i$ puede reescribirse como

$$\frac{1}{2} \dot{q}_i \dot{q}_i = \frac{1}{2} p_i p_i.$$

A continuación, reorganizamos el término cuadrático en p_i . Para ello, sumamos y restamos un término que contiene $p_i \dot{q}_i$, con el fin de aislar el término lineal en las velocidades \dot{q}_i . Esto es crucial en el formalismo simpléctico, ya que los coeficientes de los términos lineales en \dot{q}_i definen la 1-forma simpléctica del sistema. La reorganización se realiza de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} p_i p_i = p_i \dot{q}_i - p_i \dot{q}_i + \frac{1}{2} p_i p_i = p_i \dot{q}_i - \left(p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} p_i p_i \right) = p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} p_i p_i. \quad (\text{B.1})$$

Después de reorganizar el término cuadrático (B.1), el lagrangiano toma la forma de primer orden en las velocidades

$$L_C = p_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} p_i p_i + \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1).$$

Este es el lagrangiano canónico que se utiliza en la formulación hamiltoniana, tal como se muestra en (6.7).

B.2. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$

Partimos del conjunto de variables simplécticas definido en la ecuación (6.10), junto con los coeficientes del lagrangiano de primer orden dados por (6.12).

La matriz simpléctica se construye a partir de la definición general (6.13), esto es,

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial \xi_j^{(0)}}.$$

A partir de esta expresión, procedemos a calcular sus componentes. Para el bloque asociado a las variables q_i y p_j , se obtiene

$$f_{q_i p_j}^{(0)} = \frac{\partial a_{p_j}^{(0)}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{q_i}^{(0)}}{\partial p_j} = 0 - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = -\delta_{ij}.$$

Por otro lado, las componentes que involucran la variable λ se anulan. En efecto, dado que los coeficientes $a_i^{(0)}$ no dependen de λ , se tiene

$$f_{q_i \lambda}^{(0)} = 0, \quad f_{p_i \lambda}^{(0)} = 0.$$

Reuniendo todos los resultados anteriores, la matriz simpléctica $f_{ij}^{(0)}$ adopta la forma matricial mostrada en la ecuación (6.14). Esta estructura evidencia que el sector (q_i, p_i) es no degenerado, mientras que las componentes asociadas a λ se anulan, lo cual implica que la matriz es singular.

B.3. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(0)}$

Para llevar a cabo el cálculo de las ligaduras generadas por la singularidad de la matriz simpléctica, la cual implica la existencia de modos cero, recurrimos a una condición fundamental en el análisis hamiltoniano. Esta condición se expresa de la siguiente manera

$$\Omega^{(0)} \equiv v_i^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}} = 0. \quad (\text{B.2})$$

Al expandir los términos de la sumatoria sobre el índice i , se obtiene una expresión detallada para el cálculo de la ligadura en función del modo cero de la ecuación (6.16). La condición completa es

$$\Omega^{(0)} = v_q^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_q^{(0)}} + v_p^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_p^{(0)}} + v_\lambda^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi_\lambda^{(0)}}.$$

Siendo que el modo cero de la matriz simpléctica es exactamente el de la ecuación (6.17) y de identificar las variables simplécticas descritas en la ecuación (6.10), podemos escribir la ecuación de manera más sencilla

$$\Omega^{(0)} = v_\lambda^{(0)} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \lambda}. \quad (\text{B.3})$$

Dado que el hamiltoniano en su forma simpléctica está dado por la ecuación (6.8), su derivada parcial con respecto a la variable simpléctica λ es

$$\frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{1}{2} p_i p_i - \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1) \right) = -\frac{1}{2} (q_i q_i - 1),$$

sustituyendo esta expresión en la ecuación (B.3), obtenemos

$$\Omega^{(0)} = v_\lambda^{(0)} \left(-\frac{1}{2} (q_i q_i - 1) \right).$$

Para que la condición de ligadura mencionada en la ecuación (B.2) se cumpla, se iguala a cero. Dado que $v_\lambda^{(0)}$ es una constante arbitraria y la igualdad se satisface para cualquier caso, se concluye que

$$\Omega^{(0)} = \frac{1}{2} (q_i q_i - 1) = 0,$$

es la expresión para la ligadura de la ecuación (6.18).

B.4. Obtención del potencial simpléctico $H^{(1)}$

El potencial simpléctico del primer proceso de iteración en el formalismo de Faddeev-Jackiw se obtiene a partir de la siguiente definición

$$H^{(1)}(\xi) = H^{(0)}(\xi) \Big|_{\Omega^{(0)}=0},$$

es decir, para obtener $H^{(1)}$, debemos evaluar la ligadura, que se expresa en la ecuación (6.18), en el hamiltoniano de la forma simpléctica (6.8). Esto da como resultado

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} p_i p_i - \frac{\lambda}{2} (q_i q_i - 1) \Big|_{\frac{1}{2}(q_i q_i - 1)=0}.$$

Al imponer la condición de ligadura $\frac{1}{2}(q_i q_i - 1) = 0$, obtenemos el potencial simpléctico del primer proceso de iteración presentado en la ecuación (6.20)

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} p_i p_i.$$

B.5. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$

En esta etapa se determinan los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$ correspondientes a la primera iteración del procedimiento. El conjunto de variables simplécticas está dado por (6.21), mientras que los coeficientes del lagrangiano de primer orden se especifican en (6.23). La matriz simpléctica se define, de manera análoga al caso anterior, como

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial \xi_i^{(1)}} - \frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial \xi_j^{(1)}}.$$

Dado que $f_{ij}^{(1)}$ es antisimétrica, basta calcular sus componentes independientes. Para las variables q_i y p_j , utilizando que $a_{q_i}^{(1)} = p_j$ y $a_{p_i}^{(1)} = 0$, se obtiene

$$f_{q_i p_j}^{(1)} = \frac{\partial a_{p_j}^{(1)}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{q_i}^{(1)}}{\partial p_j} = 0 - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = -\delta_{ij}.$$

Para las componentes que involucran la variable α , se tiene

$$f_{q_i \alpha}^{(1)} = \frac{\partial a_{\alpha}^{(1)}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{q_i}^{(1)}}{\partial \alpha}.$$

Dado que $a_{\alpha}^{(1)} = \frac{1}{2}(q_k q_k - 1)$, el primer término se evalúa como

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{2}(q_k q_k - 1) \right] = \frac{1}{2} \cdot 2q_k \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = q_k \delta_{ki} = q_i,$$

mientras que el segundo término se anula, ya que p_i no depende de α . En consecuencia,

$$f_{q_i \alpha}^{(1)} = q_i.$$

Finalmente, considerando que $a_{p_i}^{(1)} = 0$ y que $a_{\alpha}^{(1)}$ no depende de p_i , se obtiene

$$f_{p_i \alpha}^{(1)} = \frac{\partial a_{\alpha}^{(1)}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{p_i}^{(1)}}{\partial \alpha} = 0.$$

Reuniendo los resultados anteriores, la matriz simpléctica $f_{ij}^{(1)}$ adopta la forma matricial indicada en la ecuación (6.25).

B.6. Determinación del modo cero $v_i^{(1)}$ y carácter singular de la matriz $f_{ij}^{(1)}$

Para determinar el modo cero asociado a la matriz simpléctica dada en la ecuación (6.25), consideramos el vector general introducido en la ecuación (6.27). La condición de modo cero establece que dicho vector debe anular la matriz simpléctica al contraerse con ella, es decir,

$$v_i^{(1)} f_{ij}^{(1)} = 0,$$

lo que equivale a exigir que el producto matricial sea el vector nulo. En forma explícita,

$$\begin{pmatrix} v_q^{(1)} & v_p^{(1)} & v_{\alpha}^{(1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & q_i \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ -q_i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al efectuar el producto fila–columna y considerar la suma sobre índices repetidos, se obtiene

$$\begin{pmatrix} v_p^{(1)} \delta_{ij} - v_{\alpha}^{(1)} q_i & -v_q^{(1)} \delta_{ij} & v_q^{(1)} q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para que esta igualdad se satisfaga, cada componente debe anularse por separado. De la segunda y tercera componente se deduce inmediatamente que

$$v_q^{(1)} = 0.$$

Ahora de la primera componente, se obtiene la relación

$$v_p^{(1)} \delta_{ij} - v_\alpha^{(1)} q_i = 0,$$

de donde se tiene que

$$v_p^{(1)} \delta_{ij} = v_\alpha^{(1)} q_i.$$

Por consiguiente, todas las componentes del vector quedan determinadas en términos del parámetro arbitrario $v_\alpha^{(1)}$, el cual refleja la degeneración de la matriz simpléctica. El modo cero resultante puede escribirse como

$$v_i^{(1)} = v_\alpha^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & q_i & 1 \end{pmatrix},$$

que coincide con el presentado en la ecuación (6.28).

Determinante de la matriz simpléctica. La singularidad de la matriz simpléctica también puede establecerse a partir de su estructura. En efecto, $f_{ij}^{(1)}$ es una matriz antisimétrica definida en un espacio de dimensión impar $(2N + 1)$, por lo que su determinante se anula. Para una matriz antisimétrica A se cumple que $\det A = \det(-A^T) = (-1)^n \det A$, y si n es impar, se sigue que $\det A = -\det A$, de donde resulta

$$\det f^{(1)} = 0.$$

Este resultado es consistente con la existencia del modo cero no trivial obtenido previamente.

B.7. Cálculo de la ligadura $\Omega^{(1)}$

Una vez determinado el modo cero de la matriz $f_{ij}^{(1)}$, la nueva ligadura se obtiene contrayendo dicho vector con el gradiente del hamiltoniano simpléctico. Esta condición se expresa de manera general como

$$\Omega^{(1)} = v_i^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(1)}} = 0. \quad (\text{B.4})$$

Al expandir explícitamente la suma sobre el índice i , la expresión anterior toma la forma

$$\Omega^{(1)} = v_q^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_q^{(1)}} + v_p^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_p^{(1)}} + v_\alpha^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_\alpha^{(1)}},$$

Sustituyendo la forma explícita del modo cero dada en la ecuación (6.28), y utilizando las variables simplécticas definidas en la ecuación (6.21), se obtiene

$$\Omega^{(1)} = v_\alpha^{(1)} \left(q_i \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial p_i} + \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \alpha} \right). \quad (\text{B.5})$$

Para evaluar esta expresión utilizamos el hamiltoniano simpléctico dado en la ecuación (6.20), en donde se observa que $H^{(1)}$ depende únicamente de las variables p_i , por lo que

$$\frac{\partial H^{(1)}}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial H^{(1)}}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{1}{2} p_j p_j \right) = p_i.$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión (B.5), obtenemos

$$\Omega^{(1)} = v_\alpha^{(1)} q_i p_i.$$

Dado que $v_\alpha^{(1)}$ es un parámetro arbitrario y no trivial, al aplicar la condición (B.4) implica necesariamente

$$\Omega^{(1)} \equiv q_i p_i = 0, \quad (\text{B.6})$$

que corresponde a la nueva ligadura generada por la degeneración de la matriz simpléctica que se muestra en la ecuación (6.29).

B.8. Obtención del potencial simpléctico $H^{(2)}$

El potencial simpléctico correspondiente al segundo proceso de iteración en el formalismo de Faddeev–Jackiw se define de manera análoga al caso anterior como

$$H^{(2)}(\xi) = H^{(1)}(\xi) \Big|_{\Omega^{(1)}=0},$$

es decir, para obtener $H^{(2)}$, debemos evaluar la nueva ligadura $\Omega^{(1)}$, dada en la ecuación (6.29), dentro del potencial simpléctico del primer proceso de iteración (6.20).

Dado que

$$H^{(1)} = \frac{1}{2} p_i p_i,$$

y que la segunda ligadura está dada por

$$\Omega^{(1)} \equiv q_i p_i = 0,$$

observamos que $H^{(1)}$ depende únicamente de las variables p_i a través del término cuadrático $p_i p_i$. La condición $q_i p_i = 0$ no modifica explícitamente esta dependencia funcional, ya que no introduce ningún término adicional en el hamiltoniano ni elimina los términos cuadráticos en los momentos.

Por lo tanto, al imponer la condición $\Omega^{(1)} = 0$, el potencial simpléctico permanece invariante, obteniéndose

$$H^{(2)} = \frac{1}{2} p_i p_i,$$

que coincide formalmente con el potencial del primer proceso de iteración.

B.9. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$

En esta etapa se determinan los elementos de la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$ correspondientes a la segunda iteración del procedimiento. El conjunto de variables simplécticas está dado por (6.32), mientras que los coeficientes del lagrangiano de primer orden se especifican en (6.34). La matriz simpléctica se define, de manera análogo a los casos anteriores, como

$$f_{ij}^{(2)} = \frac{\partial a_j^{(2)}}{\partial \xi_i^{(2)}} - \frac{\partial a_i^{(2)}}{\partial \xi_j^{(2)}}.$$

Dado que $f_{ij}^{(2)}$ es antisimétrica, es suficiente calcular sus componentes independientes. Para las variables q_i y p_j , utilizando que $a_{q_i}^{(2)} = p_i$ y $a_{p_i}^{(2)} = 0$, se obtiene

$$f_{q_i p_j}^{(2)} = \frac{\partial a_{p_j}^{(2)}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{q_i}^{(2)}}{\partial p_j} = 0 - \frac{\partial p_i}{\partial p_j} = -\delta_{ij}.$$

Para las componentes que involucran la variable α , se tiene

$$f_{q_i \alpha}^{(2)} = \frac{\partial a_\alpha^{(2)}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{q_i}^{(2)}}{\partial \alpha}.$$

Dado que $a_\alpha^{(2)} = \frac{1}{2}(q_k q_k - 1)$, el primer término se evalúa como

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{1}{2}(q_k q_k - 1) \right] = \frac{1}{2} \cdot 2q_k \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = q_k \delta_{ki} = q_i,$$

mientras que el segundo término se anula, ya que p_i no depende de α . En consecuencia,

$$f_{q_i \alpha}^{(2)} = q_i.$$

Para las componentes asociadas a la variable η , se obtiene

$$f_{q_i \eta}^{(2)} = \frac{\partial a_\eta^{(2)}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{q_i}^{(2)}}{\partial \eta}.$$

Dado que $a_\eta^{(2)} = q_k p_k$, el primer término resulta

$$\frac{\partial (q_k p_k)}{\partial q_i} = p_k \frac{\partial q_k}{\partial q_i} = p_k \delta_{ki} = p_i,$$

mientras que el segundo término se anula. Por tanto,

$$f_{q_i \eta}^{(2)} = p_i.$$

Por otro lado, considerando que $a_\alpha^{(2)}$ no depende de p_i y que $a_{p_i}^{(2)} = 0$, se obtiene

$$f_{p_i \alpha}^{(2)} = \frac{\partial a_\alpha^{(2)}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{p_i}^{(2)}}{\partial \alpha} = 0.$$

De manera similar, para la componente (p_i, η) se tiene

$$f_{p_i \eta}^{(2)} = \frac{\partial a_\eta^{(2)}}{\partial p_i} - \frac{\partial a_{p_i}^{(2)}}{\partial \eta} = \frac{\partial (q_k p_k)}{\partial p_i} = q_k \delta_{ki} = q_i.$$

Finalmente, dado que $a_\alpha^{(2)}$ y $a_\eta^{(2)}$ no dependen entre sí, se obtiene

$$f_{\alpha \eta}^{(2)} = \frac{\partial a_\eta^{(2)}}{\partial \alpha} - \frac{\partial a_\alpha^{(2)}}{\partial \eta} = 0.$$

Reuniendo los resultados anteriores, la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$ queda completamente determinada y adopta la forma matricial indicada en la ecuación (6.36).

B.10. Carácter no singular de la matriz $f_{ij}^{(2)}$

Para determinar si la matriz simpléctica del segundo proceso de iteración, dada en la ecuación (6.36), posee un modo cero, consideremos el vector general de la ecuación (6.37), la condición de modo cero exige que este vector anule la matriz simpléctica al contraerse con ella, es decir,

$$v_i^{(2)} f_{ij}^{(2)} = 0,$$

lo que equivale a exigir que el producto matricial sea el vector nulo. En forma explícita,

$$\begin{pmatrix} v_q^{(2)} & v_p^{(2)} & v_\alpha^{(2)} & v_\eta^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & q_j & p_j \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & q_j \\ -q_i & 0 & 0 & 0 \\ -p_i & -q_i & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De este producto se obtiene el siguiente sistema

$$\begin{aligned} v_p^{(2)} \delta_{ij} - v_\alpha^{(2)} q_i - v_\eta^{(2)} p_i &= 0, \\ -v_q^{(2)} \delta_{ij} - v_\eta^{(2)} q_i &= 0, \\ v_q^{(2)} q_j &= 0, \\ v_q^{(2)} p_j + v_p^{(2)} q_j &= 0. \end{aligned}$$

Procedamos a analizar estas relaciones de manera sistemática.

De la tercera ecuación se tiene

$$v_q^{(2)} q_j = 0.$$

Dado que el vector q_j es no trivial, se concluye necesariamente que

$$v_q^{(2)} = 0.$$

Sustituyendo este resultado en la segunda ecuación se obtiene

$$-v_\eta^{(2)} q_i = 0,$$

lo cual implica, nuevamente por la no trivialidad de q_i , que

$$v_{\eta}^{(2)} = 0.$$

Con $v_q^{(2)} = 0$, la cuarta ecuación se reduce a

$$v_p^{(2)} q_j = 0,$$

y, dado que $q_j \neq 0$, se deduce

$$v_p^{(2)} = 0.$$

Finalmente, sustituyendo estos resultados en la primera ecuación, obtenemos

$$-v_{\alpha}^{(2)} q_i = 0,$$

de donde se sigue

$$v_{\alpha}^{(2)} = 0.$$

En consecuencia,

$$v_q^{(2)} = 0, \quad v_p^{(2)} = 0, \quad v_{\alpha}^{(2)} = 0, \quad v_{\eta}^{(2)} = 0.$$

Por lo tanto, la única solución del sistema homogéneo es el vector nulo. Esto demuestra que la matriz simpléctica (6.36) es no degenerada y, en consecuencia, no posee modo cero.

Adicionalmente, para corroborar este resultado, procedemos a calcular el determinante de la matriz $f_{ij}^{(2)}$ la cual es

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & q_j & p_j \\ \delta_{ij} & 0 & 0 & q_j \\ -q_i & 0 & 0 & 0 \\ -p_i & -q_i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

En primer lugar, intercambiamos filas y columnas de manera adecuada para reagrupar la matriz en bloques de la forma

$$f^{(2)} \sim \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} q_j & p_j \\ 0 & q_j \end{pmatrix}.$$

La matriz A es invertible, con inversa dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix},$$

y satisface $\det A = 1$.

Utilizando la fórmula del determinante para matrices por bloques,

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & 0 \end{pmatrix} = \det(A) \det(B^T A^{-1} B),$$

obtenemos

$$\det f^{(2)} = \det(B^T A^{-1} B).$$

A continuación, calculamos el producto $A^{-1}B$:

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j & p_j \\ 0 & q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij}q_j \\ -\delta_{ij}q_j & -\delta_{ij}p_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_i \\ -q_i & -p_i \end{pmatrix}.$$

Por tanto,

$$B^T A^{-1} B = \begin{pmatrix} q_i & 0 \\ p_i & q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_i \\ -q_i & -p_i \end{pmatrix}.$$

Al efectuar el producto matricial, se obtiene

$$B^T A^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & q_i q_i \\ -q_i q_i & p_i q_i - q_i p_i \end{pmatrix}.$$

El elemento inferior derecho se anula, por lo que resulta

$$B^T A^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & q_i q_i \\ -q_i q_i & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, el determinante de esta matriz 2×2 es

$$\det(B^T A^{-1} B) = (q_i q_i)^2.$$

Por consiguiente,

$$\det f^{(2)} = (q_i q_i)^2.$$

Este resultado es distinto de cero siempre que $q_i \neq 0$. En particular, para el caso de la esfera unitaria donde $q_i q_i = 1$, se tiene

$$\det f^{(2)} = 1,$$

lo que confirma que la matriz simpléctica $f_{ij}^{(2)}$ es no singular.

B.11. Inversión de la matriz $f_{ij}^{(2)}$

Una vez establecida la regularidad de la matriz $f_{ij}^{(2)}$, el siguiente paso consiste en determinar su inversa $(f_{ij}^{(2)})^{-1}$. Dado que la matriz presenta una estructura por bloques, resulta conveniente aplicar el método estándar de inversión de matrices por bloques¹. Para ello, se divide $f_{ij}^{(2)}$ en submatrices de manera que

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde los bloques están dados por

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} \\ \delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} q_j & p_j \\ 0 & q_j \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -q_i & 0 \\ -p_i & -q_i \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que el bloque A es invertible, con inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que $D = 0$, la fórmula de inversión por bloques adopta la forma

$$(f_{ij}^{(2)})^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} \\ (CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -(CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix},$$

siempre que el complemento de Schur $CA^{-1}B$ sea invertible.

Procedemos entonces a calcular los términos intermedios.

Primero,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_j & p_j \\ 0 & q_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & q_i \\ -q_i & -p_i \end{pmatrix},$$

luego,

$$CA^{-1}B = \begin{pmatrix} -q_i & 0 \\ -p_i & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & q_i \\ -q_i & -p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q_i q_i \\ q_i q_i & 0 \end{pmatrix},$$

de donde la inversa es

$$(CA^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q_i q_i} \\ -\frac{1}{q_i q_i} & 0 \end{pmatrix}.$$

Como

$$q_i q_i = q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \equiv q^2,$$

¹Se utiliza la fórmula estándar de inversión por bloques basada en el complemento de Schur, válida cuando el bloque A es invertible.

entonces

$$(CA^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^2} \\ -\frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$CA^{-1} = \begin{pmatrix} -q_i & 0 \\ -p_i & -q_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -q_j \\ q_j & -p_j \end{pmatrix}.$$

Con estos resultados, podemos determinar cada bloque de la matriz inversa.

- Bloque superior derecho:

$$A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & q_i \\ -q_i & -p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^2} \\ -\frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{q_i}{q^2} & 0 \\ \frac{p_i}{q^2} & -\frac{q_i}{q^2} \end{pmatrix}.$$

- Bloque inferior izquierdo:

$$(CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^2} \\ -\frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q_j \\ q_j & -p_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{q_j}{q^2} & -\frac{p_j}{q^2} \\ 0 & \frac{q_j}{q^2} \end{pmatrix}.$$

- Bloque superior izquierdo:

$$\begin{aligned} A^{-1} - A^{-1}B(CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} \\ -\delta_{ij} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & q_i \\ -q_i & -p_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{q^2} \\ -\frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -q_j \\ q_j & -p_j \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} \\ -\delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{q^2} & \frac{-q_i p_j + p_i q_j}{q^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Bloque inferior derecho:

$$-(CA^{-1}B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q^2} \\ \frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, la inversa completa es

$$\left(f_{ij}^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{q^2} & -\frac{q_i}{q^2} & 0 \\ -\delta_{ij} + \frac{q_i q_j}{q^2} & \frac{p_i q_j - p_j q_i}{q^2} & \frac{p_i}{q^2} & -\frac{q_i}{q^2} \\ \frac{q_j}{q^2} & -\frac{p_j}{q^2} & 0 & -\frac{1}{q^2} \\ 0 & \frac{q_j}{q^2} & \frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix},$$

lo que coincide con la expresión presentada en la ecuación (6.40).

Apéndice C

Campo de Proca Real

C.1. Cálculo del momento canónico conjugado

En teoría de campos, el momento canónico conjugado asociado a un campo A_ν se define como la derivada del lagrangiano con respecto a la derivada temporal del campo como en (7.3). En términos generales se introduce primero la derivada

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Para el campo de Proca, el lagrangiano está dado por (7.1). Al derivar con respecto a $\partial_\mu A_\nu$, únicamente contribuye el término que depende del tensor de campo $F_{\alpha\beta}$, de modo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$$

Utilizando la definición del tensor de campo

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha,$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= \frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} - \frac{\partial(\partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\ &= \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu. \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la expresión anterior se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu).$$

Al contraer los índices se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} (F^{\mu\nu} - F^{\nu\mu}).$$

Dado que el tensor de campo es antisimétrico, $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$, resulta finalmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\nu\mu}. \quad (\text{C.1})$$

Por lo tanto, el momento canónico conjugado asociado al campo A_ν queda definido como

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0}.$$

lo cual coincide con la expresión presentada en la ecuación (7.4).

C.2. Ecuación de movimiento para A_0

Partiendo de la densidad lagrangiana del campo de Proca real,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu,$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

las ecuaciones de Euler–Lagrange para el campo A_μ están dadas por

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0. \quad (\text{C.2})$$

Calculamos cada término. En primer lugar,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^\nu. \quad (\text{C.3})$$

Por otro lado, la dependencia de la lagrangiana en las derivadas del campo está contenida en $F_{\mu\nu}$. Usando la definición de este tensor como en (C.1), se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\nu\mu}. \quad (\text{C.4})$$

Sustituyendo en (C.2), resulta la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} + m^2 A^\nu = 0. \quad (\text{C.5})$$

Para estudiar la dinámica de la componente temporal, tomamos $\nu = 0$:

$$\partial_\mu F^{0\mu} + m^2 A^0 = 0.$$

Separando explícitamente las componentes temporal y espaciales,

$$\partial_0 F^{00} + \partial_i F^{i0} + m^2 A_0 = 0.$$

En este punto es importante notar que, por la antisimetría del tensor $F^{\mu\nu}$, se tiene $F^{00} = 0$, por lo que la ecuación se reduce a

$$\partial_i F^{i0} + m^2 A_0 = 0. \quad (\text{C.6})$$

Recordando que el momento canónico conjugado a A_i está dado por

$$\Pi^i = F^{i0},$$

la ecuación anterior puede reescribirse como

$$\partial_i \Pi^i + m^2 A_0 = 0. \quad (\text{C.7})$$

Obsérvese que esta ecuación no contiene derivadas temporales de A_0 . Esto implica que no describe una ecuación de evolución, sino una relación de tipo algebraico entre las variables del sistema. En consecuencia, puede resolverse directamente para A_0 :

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^i. \quad (\text{C.8})$$

Por tanto, la variable A_0 no constituye un grado de libertad dinámico independiente, sino que queda completamente determinada por las variables dinámicas del sistema.

C.3. Linealización de la densidad lagrangiana

A partir de la definición del momento canónico conjugado obtenida en la ecuación (7.4),

$$\Pi^\nu = F^{\nu 0},$$

se observa que la componente temporal del momento canónico se anula, ya que

$$\Pi^0 = F^{00} = 0,$$

mientras que para las componentes espaciales se obtiene

$$\Pi^i = F^{i0} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (\text{C.9})$$

Utilizando estas relaciones, la densidad lagrangiana del campo de Proca puede reescribirse separando las componentes temporales y espaciales del tensor de campo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i.$$

Subiendo índices y teniendo en cuenta la antisimetría del tensor $F_{\mu\nu}$, esta expresión se simplifica como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{2} F_{0i} F^{0i} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i, \\ &= \frac{1}{2} F^{i0} F^{i0} - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i. \end{aligned}$$

Usando la relación $F^{i0} = \Pi^i$, se obtiene entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i. \quad (\text{C.10})$$

Con el fin de obtener una forma lineal en las derivadas temporales del campo, se añade y sustrae el término $\dot{A}_i \Pi^i$, es decir,

$$\dot{A}_i \Pi^i - \dot{A}_i \Pi^i = \dot{A}_i \Pi^i - \partial_0 A_i \Pi^i.$$

Sustituyendo esta identidad en la densidad lagrangiana (C.10) se obtiene

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i - \partial_0 A_i \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i. \quad (\text{C.11})$$

Utilizando la relación (C.9) se tiene

$$\partial_0 A_i = \Pi^i + \partial_i A_0,$$

que al sustituir en la densidad lagrangiana (C.11) da

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i - (\Pi^i + \partial_i A_0) \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i.$$

Agrupando términos resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i - \Pi^i \Pi^i - (\partial_i A_0) \Pi^i + \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i, \\ &= \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - \Pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

El tercer término puede transformarse mediante una integración por partes,

$$- \int d^3 \mathbf{x} \Pi^i \partial_i A_0 = - \int d^3 \mathbf{x} \partial_i (\Pi^i A_0) + \int d^3 \mathbf{x} A_0 \partial_i \Pi^i.$$

El primer término del lado derecho corresponde a una integral de superficie que se anula bajo condiciones de frontera apropiadas, en las que los campos decrecen suficientemente rápido cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, es decir,

$$A_0(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \Pi^i(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

En consecuencia,

$$- \int d^3 \mathbf{x} \Pi^i \partial_i A_0 = \int d^3 \mathbf{x} A_0 \partial_i \Pi^i.$$

Sustituyendo este resultado en la densidad lagrangiana (C.12) se obtiene la forma de primer orden en las derivadas temporales del campo A_i

$$\mathcal{L}_C = \dot{A}_i \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + A_0 \partial_i \Pi^i - \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 - \frac{m^2}{2} A_i A_i.$$

Este es la densidad lagrangiana canónica que se utiliza en la formulación hamiltoniana, tal como se muestra en (7.10).

C.4. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

En esta sección se determinan los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, definida por

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}.$$

A partir de esta expresión, se calculan explícitamente sus componentes no nulas.

$$f_{A_i \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

donde se ha utilizado la identidad funcional

$$\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Para los elementos que involucran la variable A_0 se obtiene

$$f_{A_i A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = 0, \quad f_{\Pi^i A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

ya que las variables Π^i y A_0 son independientes.

Los resultados anteriores permiten construir la forma matricial de $f_{ab}^{(0)}$, presentada en la ecuación (7.18).

C.5. Obtención de la ligadura $\Omega^{(0)}(\mathbf{x})$

Dado que la matriz simpléctica obtenida en (7.18) es singular, existe un modo cero $v^{a(0)}(\mathbf{x})$ tal que

$$\int d^3 \mathbf{y} f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^{b(0)}(\mathbf{y}) = 0.$$

La presencia de un modo cero implica la existencia de una ligadura del sistema. Esta se obtiene contrayendo el modo cero con el gradiente funcional del potencial simpléctico del sistema, es decir

$$\Omega = \int d^3 \mathbf{y} v^{a(0)}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{y})} \int d^3 \mathbf{z} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{z}) = 0. \quad (\text{C.13})$$

Expandiendo el índice a en términos de las variables simplécticas $\xi_a^{(0)}$ dadas en (7.13) y el modo cero de la ecuación (7.20) se obtiene

$$\Omega = \int d^3 \mathbf{y} \left(v^{A_i}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{y})} + v^{\Pi^i}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{y})} + v^{A_0}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} \right) \int d^3 \mathbf{z} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{z}). \quad (\text{C.14})$$

Para el sistema considerado, el único componente no nulo del modo cero (7.21) está asociado a la variable A_0 . En consecuencia, la expresión anterior se reduce a

$$\Omega = \int d^3 \mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{y})} \int d^3 \mathbf{z} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{z}).$$

La densidad hamiltoniana obtenida en (7.11) contiene los términos dependientes de A_0

$$\mathcal{H}^{(0)} \supset -A_0 \partial_i \Pi^i - \frac{m^2}{2} A_0 A_0.$$

Por lo tanto,

$$\Omega = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{y})} \int d^3\mathbf{z} \left(A_0(\mathbf{z}) \partial_i^z \Pi^i(\mathbf{z}) + \frac{m^2}{2} A_0(\mathbf{z}) A_0(\mathbf{z}) \right).$$

Al calcular la derivada funcional se obtiene

$$\Omega = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \int d^3\mathbf{z} (\partial_i^z \Pi^i(\mathbf{z}) + m^2 A_0(\mathbf{z})) \frac{\delta A_0(\mathbf{z})}{\delta A_0(\mathbf{y})}.$$

Utilizando la identidad funcional

$$\frac{\delta A_0(\mathbf{z})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{y}),$$

resulta

$$\Omega = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \int d^3\mathbf{z} (\partial_i^z \Pi^i(\mathbf{z}) + m^2 A_0(\mathbf{z})) \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{y}).$$

que al integrar sobre \mathbf{z} se obtiene

$$\Omega = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) (\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + m^2 A_0(\mathbf{y})).$$

Para que se satisfaga la condición de ligadura establecida en la ecuación (C.13), la expresión anterior debe ser nula. Dado que la función $v^{A_0}(\mathbf{y})$ es completamente arbitraria, esta condición implica que el término entre corchetes debe anularse. De este modo se obtiene la ligadura

$$\Omega^{(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i^x \Pi^i(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{C.15})$$

la cual coincide con la ligadura presentada en la ecuación (7.22).

C.6. Cálculo del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$

El potencial simpléctico de la primera iteración se obtiene imponiendo la ligadura primaria $\Omega^{(0)}$ dada en (C.15) sobre el potencial simpléctico inicial $\mathcal{H}^{(0)}$ definido en (7.11). Esto se expresa como

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0}. \quad (\text{C.16})$$

Recordando la forma explícita de $\mathcal{H}^{(0)}$

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i - \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A_i A_i, \quad (\text{C.17})$$

y utilizando la ligadura obtenida en (C.15) se tiene

$$\partial_i \Pi^i = -m^2 A_0.$$

Sustituyendo esta relación en $\mathcal{H}^{(0)}$ se obtiene

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^{(1)} &= \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - A_0 \left(-m^2 A_0 + \frac{m^2}{2} A_0 \right) + \frac{m^2}{2} A_i A_i \\ &= \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A_i A_i.\end{aligned}\quad (\text{C.18})$$

resultado que coincide con la potencial simpléctica presentado en la ecuación (7.24).

C.7. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}$

Los elementos de la matriz simpléctica de la primera iteración se obtienen a partir de la definición general mencionada en (C.19)

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(1)}(\mathbf{y})}, \quad (\text{C.19})$$

donde $\xi_a^{(1)}$ denota el conjunto de variables simplécticas de la primera iteración mencionadas en (7.27) y $K_a^{(1)}$ son los coeficientes que acompañan a las derivadas temporales en el lagrangiano simpléctico correspondiente definidas en (7.29).

A partir de esta definición se calculan explícitamente los distintos elementos de la matriz simpléctica.

$$f_{A_i \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

donde se ha utilizado la identidad funcional

$$\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De manera similar,

$$f_{A_i A_0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = 0,$$

ya que las variables Π^i y A_0 son independientes.

Para el elemento asociado a Π^0 se obtiene

$$f_{A_i \Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y})} = \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{m^2} \left(\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) + m^2 A_0(\mathbf{y}) \right) \right) - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^0(\mathbf{y})} = 0,$$

debido a que ninguna de las cantidades depende funcionalmente de A_i ni de Π^0 .

De forma análoga,

$$f_{\Pi^i A_0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y})} = 0.$$

Para el bloque (Π^i, Π^0) se obtiene

$$\begin{aligned}
 f_{\Pi^i\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y})} \\
 &= \frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \left(\frac{1}{m^2} \left(\partial_j^y \Pi^j(\mathbf{y}) + m^2 A_0(\mathbf{y}) \right) \right) \\
 &= \frac{1}{m^2} \partial_j^y \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} \\
 &= \frac{1}{m^2} \partial_j^y \left(\delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\
 &= \frac{1}{m^2} \partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

donde en el último paso se utilizó la propiedad

$$\partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De manera similar,

$$\begin{aligned}
 f_{\Pi^0\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{y})} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta \Pi^i(\mathbf{y})} \left(\frac{1}{m^2} \left(\partial_j^x \Pi^j(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{m^2} \partial_j^x \frac{\delta \Pi^j(\mathbf{x})}{\delta \Pi^i(\mathbf{y})} \\
 &= -\frac{1}{m^2} \partial_j^x \left(\delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \\
 &= -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned}$$

Los elementos obtenidos se reorganizan en la estructura matricial de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}$ presentada en la ecuación (7.31).

C.8. Análisis de la regularidad de la matriz $f_{ab}^{(1)}$

Con el fin de determinar si existen modos cero asociados a la matriz simpléctica (7.31), se introduce un vector arbitrario de la forma

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = \left(v^{A_i}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) \right), \quad (\text{C.20})$$

y se impone la condición característica de un modo cero,

$$\int d^3\mathbf{y} v^{a(1)}(\mathbf{y}) f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (\text{C.21})$$

Sustituyendo la expresión explícita de la matriz simpléctica (7.31) y el vector arbitrario (C.20) en (C.21) se tiene

$$\int d^3\mathbf{y} \begin{pmatrix} v^{A_i}(\mathbf{y}) & v^{\Pi^i}(\mathbf{y}) & v^{A_0}(\mathbf{y}) & v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_j^x & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Al efectuar el producto fila–columna y considerar la suma sobre índices repetidos, se obtiene

$$\int d^3\mathbf{y} \left(v^{\Pi^i}(\mathbf{y})\delta_j^i - v^{A_i}(\mathbf{y})\delta_j^i - \frac{1}{m^2}v^{\Pi^0}(\mathbf{y})\partial_j^x - v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) - \frac{1}{m^2}v^{\Pi^i}(\mathbf{y})\partial_i^x + v^{A_0}(\mathbf{y}) \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Realizando la integración sobre \mathbf{y} , se obtiene

$$\left(v^{\Pi^i}(\mathbf{y})\delta_j^i - v^{A_i}(\mathbf{y})\delta_j^i - \frac{1}{m^2}\partial_j^y v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) - v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) - \frac{1}{m^2}\partial_i^y v^{\Pi^i}(\mathbf{y}) + v^{A_0}(\mathbf{y}) \right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

resultando en el siguiente sistema de ecuaciones para las componentes del vector (7.32):

$$v^{\Pi^i}(\mathbf{y})\delta_j^i = 0, \quad (\text{C.22})$$

$$-v^{A_i}(\mathbf{y})\delta_j^i - \frac{1}{m^2}\partial_j^y v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) = 0, \quad (\text{C.23})$$

$$v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) = 0, \quad (\text{C.24})$$

$$-\frac{1}{m^2}\partial_i^y v^{\Pi^i}(\mathbf{y}) + v^{A_0}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{C.25})$$

De la ecuación (C.22) se obtiene inmediatamente $v^{\Pi^i}(\mathbf{y}) = 0$. Sustituyendo este resultado en (C.25) se sigue que

$$v^{A_0}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{C.26})$$

Por otra parte, la ecuación (C.24) implica $v^{\Pi^0}(\mathbf{y}) = 0$, lo cual, al sustituirse en (C.23), conduce a

$$v^{A_i}(\mathbf{y}) = 0. \quad (\text{C.27})$$

En consecuencia, todas las componentes del vector (7.32) deben anularse, por lo que la única solución de (7.33) es el vector nulo,

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.28})$$

La ausencia de modos cero no triviales sugiere que la matriz simpléctica (7.31) es no singular. Para corroborar este resultado de manera independiente, procedemos a calcular su determinante, lo cual permite establecer de forma directa su regularidad.

Este análisis es fundamental, ya que el carácter singular o no singular de la matriz determina la existencia de nuevas ligaduras en el sistema.

La matriz simpléctica (7.31) presenta un factor proporcional a la distribución de Dirac $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, el cual no afecta la invertibilidad del operador. Por lo tanto, el estudio de la regularidad se reduce al bloque matricial interno, dado por¹

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_j^x & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para evaluar su determinante, escribimos la matriz en forma de bloques 2×2 :

$$M_{ab} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

donde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i \\ \delta_j^i & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_i^x \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_j^x \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dado que el bloque A corresponde a la forma simpléctica canónica, puede identificarse δ_j^i con la matriz identidad. En consecuencia,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 1,$$

lo que garantiza que A es invertible.

Por tanto, podemos aplicar la identidad de Schur para matrices por bloques:

$$\det(M) = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

Procedemos a calcular los términos involucrados. Primero,

$$A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i \\ -\delta_j^i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_i^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i \frac{1}{m^2}\partial_i^x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_j^x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_j^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{m^2}\partial_j^x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De este modo, se obtiene

$$D - CA^{-1}B = D.$$

¹En efecto, la matriz simpléctica puede escribirse en la forma $f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$, donde M_{ab} es una matriz diferencial que contiene derivadas espaciales actuando sobre la distribución. En este sentido, la invertibilidad del operador queda determinada por la estructura del bloque M_{ab} .

Finalmente, el determinante del bloque D es

$$\det(D) = 1.$$

Por consiguiente,

$$\det(M) = \det(A) \det(D) = 1.$$

Dado que este determinante es distinto de cero, se concluye que la matriz simpléctica (7.31) es no singular. En consecuencia, no existen modos cero no triviales y, por lo tanto, no surgen nuevas ligaduras en el sistema en esta etapa del procedimiento.

C.9. Inversión de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Una vez obtenidos los elementos de la matriz simpléctica de la primera iteración, es necesario calcular su inversa funcional. Esta se define a través de la relación

$$\int d^3 \mathbf{z} f_{ac}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{C.29})$$

donde δ_a^b es el delta de Kronecker asociado a los índices de las variables simplécticas y $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ es la delta de Dirac tridimensional.

La matriz inversa $\left(f^{(1)cb} \right)^{-1}$ puede escribirse en forma matricial general como

$$\left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (\alpha_1)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\alpha_2)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\alpha_3)_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\alpha_4)_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\beta_1)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\beta_2)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\beta_3)_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\beta_4)_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\gamma_1)_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\gamma_2)_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ (\theta_1)_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & (\theta_2)_j(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}. \quad (\text{C.30})$$

Sustituyendo esta expresión en la condición de inversión (C.29) y utilizando la forma explícita de la matriz simpléctica obtenida en (7.31), se tiene

$$\int d^3 \mathbf{z} \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & -\varphi \partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varphi \partial_j^x & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde se ha definido

$$\varphi \equiv \frac{1}{m^2}.$$

Debido a la presencia de la delta de Dirac $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z})$, la integral sobre \mathbf{z} se evalúa directamente, lo cual conduce a la relación algebraica

$$\begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & -\varphi \partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varphi \partial_j^x & -1 & 0 \end{pmatrix} \left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, el problema se reduce a resolver el producto matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & -\delta_k^i & 0 & 0 \\ \delta_k^i & 0 & 0 & -\varphi \partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\varphi \partial_k^x & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\alpha_1)_{kj} & (\alpha_2)_{kj} & (\alpha_3)_k & (\alpha_4)_k \\ (\beta_1)_{kj} & (\beta_2)_{kj} & (\beta_3)_k & (\beta_4)_k \\ (\gamma_1)_j & (\gamma_2)_j & \gamma_3 & \gamma_4 \\ (\theta_1)_j & (\theta_2)_j & \theta_3 & \theta_4 \end{pmatrix} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Al realizar explícitamente el producto de matrices en el miembro izquierdo se obtiene

$$\begin{pmatrix} -\delta_k^i(\beta_1)_{kj} & -\delta_k^i(\beta_2)_{kj} & -\delta_k^i(\beta_3)_k & -\delta_k^i(\beta_4)_k \\ \delta_k^i(\alpha_1)_{kj} - \varphi \partial_i^x(\theta_1)_j & \delta_k^i(\alpha_2)_{kj} - \varphi \partial_i^x(\theta_2)_j & \delta_k^i(\alpha_3)_k - \varphi \partial_i^x \theta_3 & \delta_k^i(\alpha_4)_k - \varphi \partial_i^x \theta_4 \\ (\theta_1)_j & (\theta_2)_j & \theta_3 & \theta_4 \\ -\varphi \partial_k^x(\beta_1)_{kj} - (\gamma_1)_j & -\varphi \partial_k^x(\beta_2)_{kj} - (\gamma_2)_j & -\varphi \partial_k^x(\beta_3)_k - \gamma_3 & -\varphi \partial_k^x(\beta_4)_k - \gamma_4 \end{pmatrix} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comparando elemento a elemento con el miembro derecho se obtienen las relaciones que determinan las funciones desconocidas.

De la tercera fila se deduce inmediatamente

$$(\theta_1)_j = 0, \quad (\theta_2)_j = 0, \quad \theta_3 = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \theta_4 = 0. \quad (\text{C.31})$$

De la primera fila se obtiene

$$-\delta_k^i(\beta_1)_{kj} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad -\delta_k^i(\beta_2)_{kj} = 0, \quad -\delta_k^i(\beta_3)_k = 0, \quad -\delta_k^i(\beta_4)_k = 0,$$

lo cual implica

$$(\beta_1)_{ij} = -\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\beta_2)_{ij} = (\beta_2)_i = (\beta_2)_i = 0. \quad (\text{C.32})$$

Sustituyendo estos resultados en la cuarta fila se determinan las componentes γ_k . Para $k = 1$ se obtiene

$$\begin{aligned} (\gamma_1)_j &= -\varphi \partial_i^x (\beta_1)_{kj} \\ &= \varphi \partial_k^x (\delta_j^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= \varphi \partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{m^2} \partial_j^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Para $k = 2, 3$ se tiene

$$(\gamma_2)_j = \gamma_3 = 0,$$

mientras que para $k = 4$

$$\gamma_4 = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{C.34})$$

Finalmente, sustituyendo los valores de θ_k en la segunda fila se determinan las componentes α_k . De esta forma se obtiene

$$(\alpha_1)_{ij} = (\alpha_4)_i = 0,$$

$$(\alpha_2)_{ij} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{C.35})$$

y

$$(\alpha_3)_i = \frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{C.36})$$

Sustituyendo todas las componentes obtenidas en la expresión general (C.30) se obtiene finalmente la inversa de la matriz simpléctica

$$\left(f_{ab}^{(1)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{C.37})$$

resultado que coincide con la expresión presentada en la ecuación (7.38).

Apéndice D

Campo de Proca Complejo

D.1. Cálculo de los momentos canónicos conjugados

En el caso del campo de Proca complejo, el campo vectorial A_μ y su conjugado complejo A_μ^* se tratan como variables independientes dentro del formalismo variacional. En consecuencia, es necesario introducir un momento canónico conjugado para cada uno de estos campos.

De manera general, estos momentos se definen como

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)}, \quad \Pi^{*\nu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu^*)}.$$

Para evaluar estas expresiones, se considera primero la derivada funcional general

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^*)}.$$

El lagrangiano del campo de Proca complejo está dado por la ecuación (8.2), y depende de las derivadas de los campos únicamente a través de los tensores $F_{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}^*$. Por lo tanto, al derivar con respecto a $\partial_\mu A_\nu$, solo contribuye el término que contiene $F_{\mu\nu}$, obteniéndose

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} F^{*\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}.$$

De manera análoga, al derivar con respecto a $\partial_\mu A_\nu^*$ se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^*)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}^*}{\partial(\partial_\mu A_\nu^*)}.$$

Utilizando las definiciones

$$F_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha, \quad F_{\alpha\beta}^* = \partial_\alpha A_\beta^* - \partial_\beta A_\alpha^*,$$

se obtiene en ambos casos

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu,$$

$$\frac{\partial F_{\alpha\beta}^*}{\partial(\partial_\mu A_\nu^*)} = \delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu.$$

Sustituyendo estos resultados, se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -\frac{1}{2} F^{*\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^*)} = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu - \delta_\beta^\mu \delta_\alpha^\nu).$$

Al contraer índices y utilizar la antisimetría de los tensores de campo, se obtiene finalmente

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{*\nu\mu}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu^*)} = F^{\nu\mu}.$$

Por lo tanto, los momentos canónicos conjugados quedan dados por

$$\Pi^\nu = F^{*\nu 0}, \quad \Pi^{*\nu} = F^{\nu 0}, \quad (\text{D.1})$$

en concordancia con las expresiones presentadas en (8.5).

D.2. Ecuación de movimiento para A_0 y A_0^*

Partiendo de la densidad lagrangiana del campo de Proca complejo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^*F^{\mu\nu} + m^2A_\mu^*A^\mu,$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{\mu\nu}^* = \partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^*,$$

las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen variando de manera independiente respecto a A_μ y A_μ^* . Para el campo A_μ se tiene

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0. \quad (\text{D.2})$$

Calculamos cada término. En primer lugar,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = m^2 A^{*\nu}. \quad (\text{D.3})$$

Por otro lado, la dependencia de la lagrangiana en las derivadas del campo está contenida en $F_{\mu\nu}$. Se obtiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{*\nu\mu}. \quad (\text{D.4})$$

Sustituyendo en (D.2), resulta la ecuación de movimiento

$$\partial_\mu F^{*\nu\mu} + m^2 A^{*\nu} = 0. \quad (\text{D.5})$$

Para estudiar la componente temporal, tomamos $\nu = 0$:

$$\partial_\mu F^{*0\mu} + m^2 A_0^* = 0.$$

Separando explícitamente las componentes,

$$\partial_0 F^{*00} + \partial_i F^{*i0} + m^2 A_0^* = 0.$$

Por la antisimetría del tensor $F^{*\mu\nu}$ se tiene $F^{*00} = 0$, por lo que la ecuación se reduce a

$$\partial_i F^{*i0} + m^2 A_0^* = 0. \quad (\text{D.6})$$

Recordando que el momento canónico conjugado está dado por

$$\Pi^i = F^{*i0},$$

la ecuación anterior puede escribirse como

$$\partial_i \Pi^i + m^2 A_0^* = 0. \quad (\text{D.7})$$

Obsérvese que esta ecuación no contiene derivadas temporales de A_0^* , por lo que no describe una ecuación de evolución, sino una relación algebraica entre las variables del sistema. En consecuencia, puede resolverse como

$$A_0^* = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^i. \quad (\text{D.8})$$

De manera completamente análoga, al variar respecto a A_μ^* se obtiene

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^{*i}. \quad (\text{D.9})$$

Por tanto, las variables A_0 y A_0^* no constituyen grados de libertad dinámicos independientes, sino que quedan completamente determinadas por las variables dinámicas del sistema.

D.3. Linealización de la densidad lagrangiana

A partir de las expresiones obtenidas para los momentos canónicos conjugados en el caso complejo,

$$\Pi^\nu = F^{*\nu 0}, \quad \Pi^{*\nu} = F^{\nu 0},$$

se observa nuevamente que las componentes temporales se anulan,

$$\Pi^0 = F^{*00} = 0, \quad \Pi^{*0} = F^{00} = 0,$$

lo cual indica que A_0 y A_0^* no poseen momentos canónicos independientes. Para las componentes espaciales se obtiene

$$\Pi^i = F^{*i0} = \partial_0 A_i^* - \partial_i A_0^*, \quad \Pi^{*i} = F^{i0} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (\text{D.10})$$

Con estas relaciones, la densidad lagrangiana (8.2) puede reescribirse separando las componentes temporales y espaciales del tensor de campo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{0i}^* F^{0i} - \frac{1}{2} F_{i0}^* F^{i0} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i.$$

Utilizando la antisimetría de los tensores de campo, esta expresión se simplifica a

$$\mathcal{L} = F^{*i0} F^{i0} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i.$$

Sustituyendo las definiciones (D.10), se obtiene

$$\mathcal{L} = \Pi^i \Pi^{*i} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i. \quad (\text{D.11})$$

Con el objetivo de llevar la densidad lagrangiana a una forma lineal en derivadas temporales, se añaden y sustraen los términos $\dot{A}_i \Pi^i$ y $\dot{A}_i^* \Pi^{*i}$, de modo que

$$\dot{A}_i^* \Pi^{*i} - \dot{A}_i^* \Pi^{*i} + \dot{A}_i \Pi^i - \dot{A}_i \Pi^i = \dot{A}_i^* \Pi^{*i} + \dot{A}_i \Pi^i - \partial_0 A_i^* \Pi^{*i} - \partial_0 A_i \Pi^i,$$

Al usar esta identidad en (D.11), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \dot{A}_i \Pi^i + \dot{A}_i^* \Pi^{*i} - \partial_0 A_i \Pi^i - \partial_0 A_i^* \Pi^{*i} \\ &\quad + \Pi^i \Pi^{*i} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

A partir de (D.10), se pueden despejar las derivadas temporales,

$$\partial_0 A_i = \Pi^{*i} + \partial_i A_0, \quad \partial_0 A_i^* = \Pi^i + \partial_i A_0^*.$$

Sustituyendo estas expresiones en (D.12)

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{A}_i^* \Pi^{*i} - (\Pi^{*i} + \partial_i A_0) \Pi^i - (\Pi^i + \partial_i A_0^*) \Pi^{*i} + \Pi^i \Pi^{*i} - \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i,$$

y reorganizando términos, se obtiene

$$\mathcal{L} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{A}_i^* \Pi^{*i} - \Pi^{*i} \Pi^i + \Pi^i \partial_i A_0 + \Pi^{*i} \partial_i A_0^* - \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i. \quad (\text{D.13})$$

Los términos que contienen derivadas espaciales de A_0 y A_0^* pueden transformarse mediante integración por partes,

$$\begin{aligned} - \int d^3 \mathbf{x} \Pi^{*i} \partial_i A_0^* &= - \int d^3 \mathbf{x} \partial_i (\Pi^{*i} A_0^*) + \int d^3 \mathbf{x} A_0^* \partial_i \Pi^{*i}, \\ - \int d^3 \mathbf{x} \Pi^i \partial_i A_0 &= - \int d^3 \mathbf{x} \partial_i (\Pi^i A_0) + \int d^3 \mathbf{x} A_0 \partial_i \Pi^i. \end{aligned}$$

Los primeros términos del lado derecho corresponden a integrales de superficie, las cuales se anulan bajo condiciones de frontera apropiadas, en las que los campos decrecen suficientemente rápido cuando $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$, es decir,

$$A_0(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad A_0^*(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \Pi^i(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad \Pi^{*i}(\mathbf{x} \rightarrow \infty) \rightarrow 0.$$

En consecuencia, se obtiene

$$\begin{aligned} - \int d^3 \mathbf{x} \Pi^{*i} \partial_i A_0^* &= \int d^3 \mathbf{x} A_0^* \partial_i \Pi^{*i}, \\ - \int d^3 \mathbf{x} \Pi^i \partial_i A_0 &= \int d^3 \mathbf{x} A_0 \partial_i \Pi^i. \end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados, la densidad lagrangiana adopta la forma de primer orden

$$\mathcal{L}_C = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{A}_i^* \Pi^{*i} - \Pi^i \Pi^{*i} + A_0^* \partial_i \Pi^{*i} + A_0 \partial_i \Pi^i - \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_i^* A_i, \quad (\text{D.14})$$

la cual corresponde a la forma canónica empleada en la formulación hamiltoniana, tal como se muestra en (8.11).

D.4. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}$

En esta sección se determinan los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, definida por

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}.$$

A partir de esta definición, se procede a calcular explícitamente los distintos elementos de la matriz. Dado que el sistema involucra ahora los campos A_i , A_i^* y sus respectivos momentos conjugados Π^i , Π^{*i} , es necesario considerar también las posibles contribuciones cruzadas entre estas variables.

Se comienza con los elementos que involucran los campos A_i y A_j^* ,

$$f_{A_i A_j^*}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j^*}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta A_j^*(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Pi^{*j}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_j^*(\mathbf{y})} = 0,$$

donde se ha utilizado que A_i y A_j^* son variables independientes.

Para los elementos que involucran la componente temporal A_0 se obtiene

$$f_{A_i A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = 0,$$

$$f_{A_i A_0^*}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0^*}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta A_0^*(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta A_0^*(\mathbf{y})} = 0,$$

ya que Π^i , A_0 y A_0^* son independientes.

El bloque canónico asociado a A_i y Π^j está dado por

$$f_{A_i \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

mientras que los elementos cruzados con Π^{*j} se anulan,

$$f_{A_i \Pi^{*j}}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^{*j}}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^{*j}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^{*j}(\mathbf{y})} = 0.$$

De manera análoga, para los términos asociados al campo conjugado A_i^* se obtiene

$$f_{A_i^* A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i^*(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i^*}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^{*i}(\mathbf{x})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = 0,$$

$$f_{A_i^* A_0^*}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_0^*}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i^*(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i^*}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta A_0^*(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^{*i}(\mathbf{x})}{\delta A_0^*(\mathbf{y})} = 0,$$

$$f_{A_i^* \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i^*(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i^*}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^{*i}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = 0,$$

$$f_{A_i^* \Pi^{*j}}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^{*j}}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta A_i^*(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i^*}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^{*j}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^{*i}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^{*j}(\mathbf{y})} = -\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Finalmente, los elementos que involucran únicamente los momentos conjugados se anulan,

$$f_{\Pi^i \Pi^{*j}}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^{*j}}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \Pi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^{*j}(\mathbf{y})} = 0,$$

así como aquellos que contienen las componentes temporales,

$$f_{\Pi^i A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad f_{\Pi^i A_0^*}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

$$f_{\Pi^{*i} A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad f_{\Pi^{*i} A_0^*}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Los resultados anteriores permiten construir la forma matricial de $f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, presentada en (8.19).

D.5. Obtención de las ligaduras $\Omega^{(0)}$ y $\Omega^{*(0)}$

Dado que la matriz simpléctica correspondiente al caso complejo es singular, existen modos cero $v^{a(0)}(\mathbf{x})$ que satisfacen

$$\int d^3\mathbf{y} f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) v^{b(0)}(\mathbf{y}) = 0.$$

En este caso, la estructura del sistema conduce a dos modos cero independientes, asociados a las variables A_0 y A_0^* . En consecuencia, se generan dos ligaduras, las cuales se obtienen contrayendo cada modo cero con el gradiente funcional del potencial simpléctico,

$$\Omega = \int d^3\mathbf{y} v^{a(0)}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{y})} \int d^3\mathbf{z} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{z}) = 0. \quad (\text{D.15})$$

Para el primer modo cero, cuya única componente no nula corresponde a A_0 , se tiene

$$\Omega^{(0)} = \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{y})} \int d^3\mathbf{z} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{z}).$$

De la densidad hamiltoniana se identifican los términos dependientes de A_0 ,

$$\mathcal{H}^{(0)} \supset -A_0 \partial_i \Pi^i - m^2 A_0^* A_0.$$

Por lo tanto,

$$\Omega^{(0)} = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{y})} \int d^3\mathbf{z} (A_0(\mathbf{z}) \partial_i^z \Pi^i(\mathbf{z}) + m^2 A_0^*(\mathbf{z}) A_0(\mathbf{z})).$$

Al calcular la derivada funcional,

$$\Omega^{(0)} = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) \int d^3\mathbf{z} (\partial_i^z \Pi^i(\mathbf{z}) + m^2 A_0^*(\mathbf{z})) \frac{\delta A_0(\mathbf{z})}{\delta A_0(\mathbf{y})}.$$

Usando

$$\frac{\delta A_0(\mathbf{z})}{\delta A_0(\mathbf{y})} = \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{y}),$$

se obtiene

$$\Omega^{(0)} = - \int d^3\mathbf{y} v^{A_0}(\mathbf{y}) (\partial_i^y \Pi^i(\mathbf{y}) + m^2 A_0^*(\mathbf{y})).$$

Dado que $v^{A_0}(\mathbf{y})$ es arbitraria, se obtiene la primera ligadura

$$\Omega^{(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + m^2 A_0^*(\mathbf{x}) = 0. \quad (\text{D.16})$$

Resultado que queda expresado en la ecuación (8.23).

Al analizar el segundo modo cero, cuya única componente no nula corresponde a A_0^* , se procede de manera análoga,

$$\Omega^{*(0)} = \int d^3\mathbf{y} v^{A_0^*}(\mathbf{y}) \frac{\delta}{\delta A_0^*(\mathbf{y})} \int d^3\mathbf{z} \mathcal{H}^{(0)}(\mathbf{z}).$$

Los términos relevantes del potencial simpléctico son ahora

$$\mathcal{H}^{(0)} \supset -A_0^* \partial_i \Pi^{*i} - m^2 A_0^* A_0.$$

Siguiendo los mismos pasos,

$$\Omega^{*(0)} = - \int d^3 \mathbf{y} v^{A_0^*}(\mathbf{y}) \int d^3 \mathbf{z} (\partial_i^z \Pi^{*i}(\mathbf{z}) + m^2 A_0(\mathbf{z})) \delta^3(\mathbf{z} - \mathbf{y}),$$

lo que conduce a

$$\Omega^{*(0)} = - \int d^3 \mathbf{y} v^{A_0^*}(\mathbf{y}) (\partial_i^y \Pi^{*i}(\mathbf{y}) + m^2 A_0(\mathbf{y})).$$

Por lo tanto, la segunda ligadura está dada por

$$\Omega^{*(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^{*i}(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) = 0, \quad (\text{D.17})$$

como se muestra en la ecuación (8.24).

En consecuencia, el sistema presenta dos ligaduras independientes,

$$\Omega^{(0)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \Omega^{*(0)}(\mathbf{x}) = 0,$$

reflejando así la estructura compleja del campo y la duplicación de variables dinámicas en el espacio de fase.

D.6. Cálculo del potencial simpléctico $\mathcal{H}^{(1)}$

El potencial simpléctico en la primera iteración se obtiene imponiendo las ligaduras primarias $\Omega^{(0)}$ y $\Omega^{*(0)}$ sobre el potencial inicial $\mathcal{H}^{(0)}$, es decir,

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0, \Omega^{*(0)}=0}. \quad (\text{D.18})$$

Recordando la forma explícita del potencial inicial para el campo de Proca complejo,

$$\mathcal{H}^{(0)} = \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} - A_0 \partial_i \Pi^i - A_0^* \partial_i \Pi^{*i} - m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i, \quad (\text{D.19})$$

y utilizando las ligaduras obtenidas en (D.16) y (D.17), se obtiene

$$\partial_i \Pi^{*i} = -m^2 A_0, \quad \partial_i \Pi^i = -m^2 A_0^*.$$

Sustituyendo estas relaciones en $\mathcal{H}^{(0)}$, resulta

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} - A_0 (-m^2 A_0^*) - A_0^* (-m^2 A_0) - m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i \\ &= \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} + m^2 A_0 A_0^* + m^2 A_0^* A_0 - m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i \\ &= \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} + m^2 A_0 A_0^* + m^2 A_i^* A_i. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Finalmente, reorganizando los términos escalares en función de combinaciones reales del campo, se obtiene la forma compacta

$$\mathcal{H}^{(1)} = \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F_{ij} + m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i, \quad (\text{D.21})$$

en concordancia con la expresión esperada del potencial simpléctico, dada en (8.26).

D.7. Cálculo de los elementos de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}$

Los elementos de la matriz simpléctica en la primera iteración se obtienen a partir de la definición general

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(1)}(\mathbf{y})}, \quad (\text{D.22})$$

donde $\xi_a^{(1)}$ denota el conjunto de variables del sistema definidas en (8.29), mientras que $K_a^{(1)}$ son los coeficientes que acompañan a las derivadas temporales, tal como se establece en (8.31).

Los elementos de la matriz simpléctica se obtienen evaluando explícitamente las derivadas funcionales correspondientes. En particular, para el bloque (A_i, A_j^*) se tiene

$$f_{A_i A_j^*}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{A_j^*}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta A_j^*(\mathbf{y})}.$$

Dado que los coeficientes simplécticos $K_{A_i}^{(1)}$ y $K_{A_j^*}^{(1)}$ no dependen funcionalmente de A_j^* ni de A_i , respectivamente, ambas derivadas funcionales se anulan, por lo que

$$f_{A_i A_j^*}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

De manera análoga, para los bloques (A_i, A_0) y (A_i, A_0^*) se obtiene

$$f_{A_i A_0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad f_{A_i A_0^*}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0,$$

ya que no existe dependencia funcional entre estas variables.

Para el bloque (A_i, Π^j) ,

$$f_{A_i \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})}.$$

Como $K_{\Pi^j}^{(1)} = 0$ y $K_{A_i}^{(1)} = \Pi^i$, se obtiene

$$f_{A_i \Pi^j}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Por otra parte, la independencia funcional entre A_i y Π^{*j} implica

$$f_{A_i \Pi^{*j}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

En el caso del bloque (A_i, Π^0) , se tiene

$$f_{A_i \Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^0(\mathbf{y})}.$$

Usando

$$K_{\Pi^0}^{(1)} = \frac{1}{m^2} (\partial_k \Pi^{*k} + m^2 A_0),$$

se observa que no depende de A_i , y además Π^i no depende de Π^0 . Por tanto,

$$f_{A_i \Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad f_{A_i \Pi^{*0}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0.$$

Para el bloque (A_0, Π^0) ,

$$\begin{aligned} f_{A_0 \Pi^0}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_0}^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \Pi^0(\mathbf{y})} \\ &= \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\ &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

Mientras que

$$f_{A_0 \Pi^{*0}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0, \quad f_{A_0^* \Pi^{*0}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Finalmente, para el bloque (Π^i, Π^{*0}) , se obtiene

$$f_{\Pi^i \Pi^{*0}}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

donde se utilizó la identidad

$$\partial_i^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

De forma similar,

$$f_{\Pi^{*0} \Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Los demás elementos se anulan debido a la independencia funcional entre variables no conjugadas, es decir,

$$f_{\Pi^i \Pi^0}^{(1)} = f_{\Pi^{*i} \Pi^{*0}}^{(1)} = f_{\Pi^i A_0}^{(1)} = f_{\Pi^{*i} A_0}^{(1)} = 0.$$

Todos estos resultados se organizan en la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}$, presentada en la ecuación (8.33).

D.8. Análisis de la regularidad de la matriz $f_{ab}^{(1)}$

Con el fin de determinar la existencia de modos cero asociados a la matriz simpléctica del sistema, se introduce un vector arbitrario

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = \left(v^{A_i}(\mathbf{x}) \quad v^{A_i^*}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^{*i}}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) \quad v^{A_0^*}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) \quad v^{\Pi^{*0}}(\mathbf{x}) \right). \quad (\text{D.23})$$

y se impone la condición característica

$$\int d^3 \mathbf{y} v^{a(1)}(\mathbf{y}) f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (\text{D.24})$$

Utilizando la forma explícita de la matriz simpléctica, la cual puede escribirse como

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_{ab}^{(C)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

la condición (D.24) se reduce a resolver

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) M_{ab}^{(C)} = 0.$$

Reemplazando el vector arbitrario $v^{a(1)}(\mathbf{x})$ y el bloque $M_{ab}^{(C)}$ de la matriz (8.33) se tiene

$$\left(\begin{array}{cccccccc} v^{A_i} & v^{A_i^*} & v^{\Pi^i} & v^{\Pi^{*i}} & v^{A_0} & v^{A_0^*} & v^{\Pi^0} & v^{\Pi^{*0}} \end{array} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Al efectuar el producto fila-columna se obtiene un sistema de ecuaciones para las componentes del vector (8.34).

$$v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) \delta_j^i = 0, \quad (D.25)$$

$$v^{\Pi^{*i}}(\mathbf{x}) \delta_j^i = 0, \quad (D.26)$$

$$-v^{A_i}(\mathbf{x}) \delta_j^i - \frac{1}{m^2} \partial_j^x v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) = 0, \quad (D.27)$$

$$-v^{A_i^*}(\mathbf{x}) \delta_j^i - \frac{1}{m^2} \partial_j^x v^{\Pi^{*0}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (D.28)$$

$$v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) = 0, \quad (D.29)$$

$$v^{\Pi^{*0}}(\mathbf{x}) = 0, \quad (D.30)$$

$$-\frac{1}{m^2} \partial_i^x v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) + v^{A_0}(\mathbf{x}) = 0, \quad (D.31)$$

$$-\frac{1}{m^2} \partial_i^x v^{\Pi^{*i}}(\mathbf{x}) + v^{A_0^*}(\mathbf{x}) = 0. \quad (D.32)$$

De las ecuaciones (D.25) y (D.26) se obtiene de inmediato que $v^{\Pi^i}(\mathbf{x}) = 0$ y $v^{\Pi^{*i}}(\mathbf{x}) = 0$. Reemplazando este resultado en las ecuaciones (D.31) y (D.32) respectivamente se tiene que

$$v^{A_0}(\mathbf{x}) = 0, \quad v^{A_0^*}(\mathbf{x}) = 0. \quad (D.33)$$

Por otra parte de las ecuaciones (D.29) y (D.30) implican que $v^{\Pi^0}(\mathbf{x}) = 0$ y $v^{\Pi^{*0}}(\mathbf{x}) = 0$, lo cual al sustituir estos resultados respectivamente en (D.27) y (D.28) conducen a

$$v^{A_i}(\mathbf{x}) = 0, \quad v^{A_i^*}(\mathbf{x}) = 0. \quad (D.34)$$

En consecuencia, todas las componentes del vector (8.34) deben anularse, por lo que la única solución es

$$v^{a(1)}(\mathbf{x}) = \left(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right). \quad (D.35)$$

La ausencia de modos cero no triviales indica que la matriz simpléctica (8.33) es no singular. Para verificar esta conclusión de manera independiente, calculamos su determinante, lo que permite confirmar de forma directa su regularidad.

Este análisis resulta esencial, ya que la naturaleza singular o no singular de la matriz condiciona la posible aparición de nuevas ligaduras en el sistema.

Como se indicó anteriormente, la matriz simpléctica puede escribirse como

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_{ab}^{(C)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

por lo que el factor $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ no afecta la invertibilidad del operador. En consecuencia, basta estudiar el determinante del bloque matricial $M_{ab}^{(C)}$.

Para efectos del análisis del determinante, resulta conveniente reordenar las variables simplécticas como

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, \Pi^i, A_0, \Pi^0 \mid A_i^*, \Pi^{*i}, A_0^*, \Pi^{*0}), \quad (\text{D.36})$$

la matriz $M_{ab}^{(C)}$ adopta una estructura en bloques diagonales de la forma

$$M_{ab}^{(C)} = \begin{pmatrix} M_{ab}^{(R)} & 0 \\ 0 & M_{ab}^{(R)} \end{pmatrix}. \quad (\text{D.37})$$

donde cada bloque $M_{ab}^{(R)}$ coincide exactamente con la matriz obtenida en el caso del campo de Proca real,

$$M_{ab}^{(R)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \delta_j^i & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j & -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.38})$$

Esta estructura en bloques diagonales es consecuencia de que los sectores A_μ y A_μ^* se tratan como variables independientes en el formalismo, lo que impide la aparición de términos cruzados en la matriz simpléctica.

Dado que el determinante de una matriz en bloques diagonales es el producto de los determinantes de sus bloques, se tiene

$$\det(M^{(C)}) = \det(M^{(R)})^2.$$

El determinante del bloque $M_{ab}^{(R)}$ fue calculado explícitamente en el caso del campo de Proca real en el Apéndice C.8, obteniéndose

$$\det(M^{(R)}) = 1,$$

resultado que es directamente aplicable en este contexto, ya que la estructura algebraica del bloque es idéntica. Por consiguiente,

$$\det(M^{(C)}) = 1. \quad (\text{D.39})$$

Por tanto, la matriz simpléctica (8.33) es no singular. Este resultado confirma la ausencia de modos cero no triviales y, en consecuencia, la inexistencia de nuevas ligaduras en esta etapa del procedimiento.

D.9. Inversión de la matriz simpléctica $f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$

Una vez establecida la regularidad de la matriz simpléctica de la primera iteración en la sección anterior, procedemos a determinar su inversa funcional. Esta se define como el operador que satisface la relación

$$\int d^3 \mathbf{z} f_{ac}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \left(f^{(1)cb} \right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{D.40})$$

donde δ_a^b es el delta de Kronecker en el espacio de índices simplécticos y $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ es la distribución de Dirac tridimensional.

Como se mostró previamente, la matriz simpléctica puede escribirse en la forma

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = M_{ab}^{(C)}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{D.41})$$

donde $M_{ab}^{(C)}(\mathbf{x})$ es un operador diferencial local, cuyas derivadas espaciales actúan sobre la variable \mathbf{x} .

Sustituyendo (D.41) en la definición de inversa funcional (D.40), se obtiene

$$\int d^3\mathbf{z} M_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \left(f^{(1)cb}\right)^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Dado que el operador $M_{ac}^{(C)}(\mathbf{x})$ actúa únicamente sobre la variable \mathbf{x} y no sobre la variable de integración \mathbf{z} , puede factorizarse fuera de la integral. Utilizando la propiedad de la delta de Dirac la integral se reduce a

$$M_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}) \left(f^{(1)cb}\right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{D.42})$$

En este punto, nótese que el miembro derecho es proporcional a la distribución $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. Esto sugiere buscar la inversa funcional en la clase de operadores locales, es decir, de la forma

$$\left(f^{(1)cb}\right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = N^{cb}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (\text{D.43})$$

donde $N^{cb}(\mathbf{x})$ es un operador diferencial aún por determinar.

Sustituyendo (D.43) en (D.42) se obtiene

$$M_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}) N^{cb}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta_a^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Dado que la igualdad anterior es válida en el sentido de distribuciones y la distribución $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ es no degenerada, se concluye que los operadores deben satisfacer la relación

$$M_{ac}^{(C)}(\mathbf{x}) N^{cb}(\mathbf{x}) = \delta_a^b. \quad (\text{D.44})$$

Esta ecuación muestra que $N^{cb}(\mathbf{x})$ corresponde a la inversa del operador $M_{ac}^{(C)}(\mathbf{x})$. En consecuencia, la existencia y unicidad de la inversa funcional de $f_{ab}^{(1)}$ queda determinada por la invertibilidad del operador local $M_{ab}^{(C)}$.

Para explotar dicha estructura, resulta conveniente reordenar las variables simplécticas como en (D.36), es decir,

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, \Pi^i, A_0, \Pi^0 \mid A_i^*, \Pi^{*i}, A_0^*, \Pi^{*0}). \quad (\text{D.45})$$

En esta base, el operador $M_{ab}^{(C)}$ adquiere una estructura diagonal por bloques,

$$M_{ab}^{(C)} = \begin{pmatrix} M_{ab}^{(R)} & 0 \\ 0 & M_{ab}^{(R)} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.46})$$

donde cada subbloque $M_{ab}^{(R)}$ reproduce el resultado obtenido para el campo de Proca real (véase el Apéndice C.9). Esta propiedad indica que, en esta representación, los sectores correspondientes a A_μ y A_μ^* se encuentran desacoplados, conservando la estructura simpléctica del caso real.

Dado que la matriz es diagonal por bloques, su inversa se obtiene invirtiendo cada bloque de manera independiente. Así,

$$\left(M_{ab}^{(C)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \left(M_{ab}^{(R)}\right)^{-1} & 0 \\ 0 & \left(M_{ab}^{(R)}\right)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (\text{D.47})$$

es decir, la matriz inversa sigue siendo un operador integral con núcleo proporcional a $\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$.

La forma explícita de $(M_{ab}^{(R)})^{-1}$ es

$$(M_{ab}^{(R)})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.48})$$

A partir de (D.41) y (D.47), la inversa funcional en la base reordenada está dada por

$$(f_{ab}^{(1)})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} (M_{ab}^{(R)})^{-1} & 0 \\ 0 & (M_{ab}^{(R)})^{-1} \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{D.49})$$

Sustituyendo (D.48), se obtiene la forma explícita

$$(f_{ab}^{(1)})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{D.50})$$

Finalmente, para expresar el resultado en términos del orden original de variables simplécticas introducido en (8.29),

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, A_i^*, \Pi^i, \Pi^{*i}, A_0, A_0^*, \Pi^0, \Pi^{*0}), \quad (\text{D.51})$$

se realiza una permutación de filas y columnas asociada a un cambio de base, sin alterar la estructura algebraica del operador. Como resultado, se obtiene la expresión final

$$(f_{ab}^{(1)})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 \\ -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (\text{D.52})$$

Esta expresión coincide con (8.38) y será utilizada en la construcción de los corchetes de Faddeev–Jackiw.

Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*. New York: Belfer Graduate School of Science, 1964.
- [2] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, vol. 169 of *Lecture Notes in Physics*. Springer, 1982.
- [3] G. E. R. Zambrano and B. M. Pimentel, “Estructura canónica para una teoría de fotones masivos,” tech. rep., Universidad de Nariño, 2014.
- [4] J. A. A. Narváez, *Tratamiento Canónico de la Ecuación de Proca para Campo Real y Complejo*. PhD thesis, Universidad de Nariño, 2017.
- [5] K. D. Rothe and F. G. Scholtz, “On the hamilton-jacobi equation for second class constrained systems,” *Annals of Physics*, 2003.
- [6] L. D. Faddeev and R. Jackiw, “Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems,” *Physical Review Letters*, vol. 60, pp. 1692–1694, 1988.
- [7] R. Jackiw, “Constrained quantization without tears,” *Diverse Topics in Theoretical and Mathematical Physics*, 1993.
- [8] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, “Faddeev-jackiw quantization and constraints,” *International Journal of Modern Physics A*, vol. 7, pp. 4981–5003, 1992.
- [9] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, “Symplectic quantization of constrained systems,” *Modern Physics Letters A*, vol. 7, pp. 1737–1747, 1992.
- [10] B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, “Faddeev-jackiw quantization of proca electrodynamics,” in *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, vol. 267–269, pp. 183–185, 2015.
- [11] M. C. Bertin, B. M. Pimentel, and C. E. Valcárcel, “Non-involutive constrained systems and hamilton-jacobi formalism,” *Annals of Physics*, vol. 323, pp. 3137–3149, 2008.
- [12] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1996.
- [13] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*, vol. 3 of *Course of Theoretical Physics*. Pergamon Press, 3 ed., 1977.
- [14] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*. Westview Press, 1995.
- [15] J. Ramos, “On the equivalence and non-equivalence of dirac and faddeev-jackiw formalisms for constrained systems,” *Canadian Journal of Physics*, vol. 95, pp. 225–233, 2017.
- [16] J. A. R. Medina, *Método de Dirac e de Faddeev e Jackiw: um estudo comparativo*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista, 2000.
- [17] A. Proca, “Sur la théorie ondulatoire des électrons positifs et négatifs,” *Journal de Physique et le Radium*, vol. 7, pp. 347–353, 1936.