

# Formulación simpléctica de campos vectoriales

Bayron Andres Campaña Narvárez

---

Director: PhD. German Ramos

5 de junio de 2026

Departamento de Física  
Universidad de Nariño



1. Planteamiento del problema
2. Objetivos
3. Formalismo de Faddeev–Jackiw
4. Aplicación 1: Campo de Proca real
5. Aplicación 2: Campo de Proca complejo
6. Conclusiones
7. Bibliografía

# Planteamiento del problema

---

# Planteamiento del problema

- Los sistemas con ligaduras aparecen de forma natural en diversas áreas de la física.
- El formalismo de Dirac ha sido el método tradicional para su tratamiento.
- El método de Faddeev–Jackiw ofrece una alternativa simpléctica más directa, evitando la clasificación jerárquica de ligaduras.
- Sin embargo, en la literatura suele presentarse de forma condensada, omitiendo el desarrollo iterativo del procedimiento.

## Pregunta de investigación:

*¿Cómo implementar sistemáticamente el formalismo de Faddeev–Jackiw y verificar su equivalencia con el método de Dirac?*

# Objetivos

---

## Objetivo general

Aplicar de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw al estudio de sistemas con grados de libertad infinitos, descritos por Lagrangianos singulares, con el propósito de comprender y caracterizar su estructura dinámica.

## Objetivo general

Aplicar de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw al estudio de sistemas con grados de libertad infinitos, descritos por Lagrangianos singulares, con el propósito de comprender y caracterizar su estructura dinámica.

## Objetivos específicos

- Presentar los elementos fundamentales del formalismo de Faddeev–Jackiw para el tratamiento de sistemas singulares.

## Objetivo general

Aplicar de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw al estudio de sistemas con grados de libertad infinitos, descritos por Lagrangianos singulares, con el propósito de comprender y caracterizar su estructura dinámica.

## Objetivos específicos

- Presentar los elementos fundamentales del formalismo de Faddeev–Jackiw para el tratamiento de sistemas singulares.
- Implementar el formalismo en el campo de Proca real y complejo, identificando sus ligaduras y estructura simpléctica.

## Objetivo general

Aplicar de manera sistemática el formalismo de Faddeev–Jackiw al estudio de sistemas con grados de libertad infinitos, descritos por Lagrangianos singulares, con el propósito de comprender y caracterizar su estructura dinámica.

## Objetivos específicos

- Presentar los elementos fundamentales del formalismo de Faddeev–Jackiw para el tratamiento de sistemas singulares.
- Implementar el formalismo en el campo de Proca real y complejo, identificando sus ligaduras y estructura simpléctica.
- Contrastar la estructura de ligaduras y los corchetes generalizados obtenidos mediante el formalismo de Faddeev–Jackiw con los resultados reportados en el formalismo de Dirac.

# Formalismo de Faddeev–Jackiw

---

# Espacio de fase

Lagrangiano en el espacio de configuración,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi^A, \partial_\mu \phi^A) \quad \Leftrightarrow \quad L = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{L}. \quad (1)$$

Momentos canónicos conjugados,

$$\Pi^A \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \phi^A)}. \quad (2)$$

Densidad lagrangiana canonica,

$$\mathcal{L}_C(\phi^A, \Pi^A) \equiv \mathcal{L}(\phi^A, \dot{\phi}^A) \Big|_{\dot{\phi}^A = g_i(\phi^A, \Pi^A)} = \Pi^A \dot{\phi}^A - \mathcal{H}(\phi^A, \Pi^A). \quad (3)$$

Densidad lagrangiana de primer orden,

$$\mathcal{L}^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = K_a^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_a^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}(\xi) \quad ; \quad \xi_a(\mathbf{x}) = (\phi^A(\mathbf{x}), \Pi^A(\mathbf{x})). \quad (4)$$

# Forma simpléctica

Matriz simpléctica funcional,

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}, \quad \Rightarrow \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5)$$

Las ecuaciones de movimiento se expresan como,

$$\int d^3\mathbf{y} f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\xi}_b^{(0)}(\mathbf{y}) = \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})}. \quad (6)$$

Ecuaciones de evolución temporal,

$$\dot{\xi}_a^{(0)}(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} \left( f_{ab}^{(0)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (7)$$

Condición de regularidad,

$$\det f^{(0)} \neq 0. \quad (8)$$

La inversa de la matriz simpléctica define los corchetes de Poisson,

$$\left\{ \xi_a^{(0)}(\mathbf{x}), \xi_b^{(0)}(\mathbf{y}) \right\} = \left( f_{ab}^{(0)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (9)$$

Siempre que los pares canonicos  $(\phi^A, \Pi^A)$  esten contenidos en  $\xi_a$  como variables independientes.

Condición de singularidad,

$$\det f^{(0)} = 0. \quad (10)$$

Modos cero funcionales,

$$\int d^3\mathbf{x} v^{a(0)}(\mathbf{x}) f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (11)$$

Ligaduras funcionales,

$$\Omega_{\alpha}^{(0)} = \int d^3\mathbf{x} v_{\alpha}^{a(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} = 0. \quad (12)$$

# Forma simpléctica

Matriz simpléctica funcional,

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_b^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_a^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}, \quad \Rightarrow \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (13)$$

Las ecuaciones de movimiento se expresan como,

$$\int d^3\mathbf{y} f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \dot{\xi}_b^{(0)}(\mathbf{y}) = \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})}. \quad (14)$$

Ecuaciones de evolucion temporal,

$$\dot{\xi}_a^{(0)}(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{y} \left( f_{ab}^{(0)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi_b^{(0)}(\mathbf{y})}. \quad (15)$$

Condición de singularidad,

$$\det f^{(0)} = 0. \quad (16)$$

Modos cero funcionales,

$$\int d^3\mathbf{x} v^{a(0)}(\mathbf{x}) f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (17)$$

Ligaduras funcionales,

$$\Omega_{\alpha}^{(0)} = \int d^3\mathbf{x} v_{\alpha}^{a(0)}(\mathbf{x}) \frac{\delta H^{(0)}}{\delta \xi_a^{(0)}(\mathbf{x})} = 0. \quad (18)$$

Densidad lagrangian iterada,

$$\mathcal{L}^{(1)} = \mathcal{L}^{(0)} + \dot{\lambda}_\alpha^{(0)} \Omega_\alpha^{(0)} = K_a^{(0)} \dot{\xi}_a^{(0)} + \Omega_\alpha^{(0)} \dot{\lambda}_\alpha^{(0)} - \mathcal{H}^{(0)}. \quad (19)$$

Variables extendidas,

$$\xi_a^{(1)}(\mathbf{x}) = (\xi_a^{(0)}(\mathbf{x}), \lambda_\alpha^{(0)}(\mathbf{x})). \quad (20)$$

Densidad hamiltoniana restringida,

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega_\alpha^{(0)}=0}. \quad (21)$$

# Procedimiento iterativo

Ligaduras en la iteración  $k$ ,

$$\Omega_{\alpha}^{(k)} = \int d^3 \mathbf{x} v_{\alpha}^{a(k)}(\mathbf{x}) \frac{\delta H^{(k)}}{\delta \xi_a^{(k)}(\mathbf{x})}. \quad (22)$$

Densidad lagrangiana de orden de iteración superior

$$\mathcal{L}^{(k+1)} = K_a^{(k+1)} \dot{\xi}_a^{(k+1)} - \mathcal{H}^{(k+1)}. \quad (23)$$

Condición final,

$$\det f^{(k)} \neq 0. \quad (24)$$

Corchetes finales,

$$\left\{ \xi_a^{(k)}(\mathbf{x}), \xi_b^{(k)}(\mathbf{y}) \right\} = \left( f_{ab}^{(k)} \right)^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (25)$$

# Aplicación 1: Campo de Proca real

---

# Campo de Proca real

El modelo fue introducido por Alexandru Proca para describir partículas vectoriales masivas de espín 1.

Características:

- Campo vectorial masivo
- El término de masa rompe la invariancia gauge
- El sistema presenta ligaduras

Densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu. \quad (26)$$

Tensor de campo:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (27)$$

# Momentos canónicos y singularidad

Momento canónico conjugado:

$$\Pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0}. \quad (28)$$

Para la componente temporal:

$$\Pi^0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{el sistema es singular.} \quad (29)$$

La ecuación de movimiento para  $A_0$  produce

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^i. \quad (30)$$

Para las componentes espaciales:

$$\Pi^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (31)$$

# Forma canónica de primer orden

Tras sustituir los momentos canónicos y realizar una integración por partes:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^i \dot{A}_i - \underbrace{\left( \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - A_0 (\partial_i \Pi^i + m^2 A_0) + \frac{m^2}{2} A_0^2 + \frac{m^2}{2} A_i^2 \right)}_{\mathcal{H}^{(0)}}. \quad (32)$$

Variables simplécticas:

$$\xi_a^{(0)} = (A_i, \Pi^i, A_0). \quad (33)$$

# Matriz simpléctica inicial

Coeficientes de la 1-forma:

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (34)$$

La matriz simpléctica resulta

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \begin{array}{c|ccc} & A_j & \Pi^j & A_0 \\ \hline A_i & 0 & -\delta_j^i & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (35)$$

Modo cero asociado:

$$v^{a(0)}(\mathbf{x}) = ( 0 \quad 0 \quad v^{A_0}(\mathbf{x}) ). \quad (36)$$

# Ligadura de Proca y lagrangiano de la primera iteración

El modo cero genera la ligadura

$$\Omega^{(0)} = \partial_i \Pi^i + m^2 A_0 = 0. \quad (37)$$

Coincide con la ecuación de movimiento de  $A_0$ .

La ligadura se incorpora mediante un multiplicador de Lagrange para eliminar la singularidad.

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i \Pi^i + \dot{\lambda} \Omega^{(0)} - \underbrace{\left( \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} + \frac{m^2}{2} A_0^2 + \frac{m^2}{2} A_i^2 \right)}_{\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0}}. \quad (38)$$

# Lagrangiano de la primera iteración

Reparametrizando

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{m^2} \Pi^0, \quad (39)$$

se obtiene

$$\mathcal{L}^{(1)} = \dot{A}_i \Pi^i + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}^0 \Omega^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (40)$$

La redefinición permite expresar el sistema en términos de variables con interpretación canónica.

Variables simplécticas:

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, \Pi^i, A_0, \Pi^0). \quad (41)$$

# Matriz simpléctica final

Coefficientes de la 1-forma:

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\Pi^0}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} \left( \partial_i \Pi^i + m^2 A_0 \right). \quad (42)$$

La matriz simpléctica queda

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \begin{array}{c|cccc} & A_j & \Pi^j & A_0 & \Pi^0 \\ \hline A_i & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Pi^0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & -1 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (43)$$

Resultado:  $\det f^{(1)} \propto 1$ .

# Inversa de la matriz simpléctica y corchetes generalizados

La inversa está dada por

$$\left( f_{ab}^{(1)} \right)^{-1} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \begin{array}{c|cccc} \{, \} & A_j & \Pi^j & A_0 & \Pi^0 \\ \hline A_i & 0 & \delta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ \Pi^j & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & -1 \\ \Pi^0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (44)$$

A partir de la matriz inversa se obtiene

$$\{A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (45)$$

## Aplicación 2: Campo de Proca complejo

---

## Características del campo

- Campo vectorial masivo complejo o cargado de espín 1.
- Los campos  $A_\mu$  y  $A_\mu^*$  se tratan como variables independientes.
- Invariante bajo transformaciones globales de fase

$$A_\mu \rightarrow e^{i\alpha} A_\mu, \quad A_\mu^* \rightarrow e^{-i\alpha} A_\mu^*.$$

- El término de masa rompe la invariancia gauge local.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^* F^{\mu\nu} + m^2 A_\mu^* A^\mu. \quad (46)$$

con

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad F_{\mu\nu}^* = \partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^*. \quad (47)$$

# Momentos canónicos

Los momentos conjugados se definen como

$$\Pi^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{*\nu 0}, \quad \Pi^{*\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu^*)} = F^{\nu 0}. \quad (48)$$

Para las componentes temporales:

$$\Pi^0 = F^{*00} = 0, \quad \Pi^{*0} = F^{00} = 0. \quad (49)$$

Las ecuaciones de movimiento asociadas a  $A_0$  y  $A_0^*$  conducen a

$$A_0 = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^{*i}, \quad A_0^* = -\frac{1}{m^2} \partial_i \Pi^i. \quad (50)$$

Para las componentes espaciales se obtiene

$$\Pi^i = F^{*i0} = \partial_0 A_i^* - \partial_i A_0^*, \quad \Pi^{*i} = F^{i0} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (51)$$

Por tanto, los pares dinámicos son

$$(A_i, \Pi^i), \quad (A_i^*, \Pi^{*i}).$$

La densidad lagrangiana queda

$$\mathcal{L}^{(0)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* - \underbrace{\left( \Pi^i \Pi^{*i} - \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} - A_0 (\partial_i \Pi^i + m^2 A_0^*) - A_0^* (\partial_i \Pi^{*i} + m^2 A_0) + m^2 A_0 A_0^* + m^2 A_i^* A_i \right)}_{\mathcal{H}^{(0)}}.$$

# Variables simplécticas iniciales

Las variables simplécticas son

$$\xi_a^{(0)} = (A_i, A_i^*, \Pi^i, \Pi^{*i}, A_0, A_0^*). \quad (52)$$

Los coeficientes de la 1-forma:

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{A_i^*}^{(0)} \rightarrow \Pi^{*i}. \quad (53)$$

Los demás coeficientes se anulan.

# Matriz simpléctica inicial

$$f_{ab}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \begin{array}{c|cccccc} & A_j & A_j^* & \Pi^j & \Pi^{*j} & A_0 & A_0^* \\ \hline A_i & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ A_i^* & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*i} & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (54)$$

La matriz es singular y posee dos modos cero independientes.

Los modos cero son

$$v_1^{a(0)}(\mathbf{x}) = ( 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^{A_0}(\mathbf{x}) \ 0 ), \quad v_2^{a(0)}(\mathbf{x}) = ( 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^{A_0^*}(\mathbf{x}) ). \quad (55)$$

La singularidad proviene exclusivamente de  $A_0$  y  $A_0^*$ .

Al contraer los modos cero con el gradiente del potencial simpléctico:

$$\Omega^{(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^i(\mathbf{x}) + m^2 A_0^*(\mathbf{x}) = 0, \quad \Omega^{*(0)}(\mathbf{x}) = \partial_i \Pi^{*i}(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) = 0. \quad (56)$$

Estas ligaduras coinciden con las ecuaciones de movimiento para  $A_0$  y  $A_0^*$ .

Incorporando las ligaduras:

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* + \dot{\lambda} \Omega^{(0)} + \dot{\lambda}^* \Omega^{*(0)} - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (57)$$

El nuevo potencial simpléctico es

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}^{(0)} \Big|_{\Omega^{(0)}=0, \Omega^{*(0)}=0} = \Pi^i \Pi^{*i} + \frac{1}{2} F_{ij}^* F^{ij} + m^2 A_0^* A_0 + m^2 A_i^* A_i. \quad (58)$$

Definimos

$$\lambda \rightarrow \frac{1}{m^2} \Pi^0, \quad \lambda^* \rightarrow \frac{1}{m^2} \Pi^{*0}. \quad (59)$$

Entonces la lagrangiana queda

$$\mathcal{L}^{(1)} = \Pi^i \dot{A}_i + \Pi^{*i} \dot{A}_i^* + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}^0 (\partial_i \Pi^i + m^2 A_0^*) + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}^{*0} (\partial_i \Pi^{*i} + m^2 A_0) - \mathcal{H}^{(1)}. \quad (60)$$

# Variables simplécticas iteradas

El conjunto simpléctico ampliado es

$$\xi_a^{(1)} = (A_i, A_i^*, \Pi^i, \Pi^{*i}, A_0, A_0^*, \Pi^0, \Pi^{*0}). \quad (61)$$

Los coeficientes no nulos de la 1-forma son

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i, \quad K_{A_i^*}^{(1)} \rightarrow \Pi^{*i}, \quad (62)$$

$$K_{\Pi^0}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} (\partial_i \Pi^i + m^2 A_0^*), \quad (63)$$

$$K_{\Pi^{*0}}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} (\partial_i \Pi^{*i} + m^2 A_0). \quad (64)$$

# Matriz simpléctica final

$$f_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} & A_j & A_j^* & \Pi^j & \Pi^{*j} & A_0 & A_0^* & \Pi^0 & \Pi^{*0} \\ A_i & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_i^* & 0 & 0 & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^i & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 \\ \Pi^{*i} & 0 & \delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ A_0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \Pi^0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*0} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (65)$$

Resulta:  $\det f^{(1)} \propto 1$ .

# Matriz inversa

$$\left( f_{ab}^{(1)} \right)^{-1} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \begin{array}{c|cccccccc} \{, \} & A_j & A_j^* & \Pi^j & \Pi^{*j} & A_0 & A_0^* & \Pi^0 & \Pi^{*0} \\ \hline A_i & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 & 0 \\ A_i^* & 0 & 0 & 0 & \delta_j^i & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 \\ \Pi^i & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*i} & 0 & -\delta_j^i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ A_0^* & 0 & \frac{1}{m^2} \partial_j^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ \Pi^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \Pi^{*0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (66)$$

# Corchetes generalizados

Los corchetes fundamentales no nulos son

Para el campo  $A_\mu$

$$\{A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y})\} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (67)$$

Para el campo  $A_\mu^*$

$$\{A_i^*(\mathbf{x}), \Pi^{*j}(\mathbf{y})\} = \delta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (68)$$

Los corchetes mixtos se anulan y los resultados coinciden con los corchetes de Dirac.

# Conclusiones

---

# Conclusiones generales

- Se desarrolló de manera sistemática el formalismo simpléctico de Faddeev–Jackiw para sistemas singulares con ligaduras de segunda clase y sin simetrías gauge.
- En cada caso se realizó:
  1. formulación lagrangiana de primer orden,
  2. construcción de la matriz simpléctica,
  3. análisis de modos cero y ligaduras,
  4. regularización iterativa de la matriz,
  5. obtención de corchetes generalizados.
- La degeneración de la matriz simpléctica permitió identificar la presencia de variables no independientes y caracterizar las ligaduras dinámicas del sistema.

# Resultados físicos y estructura simpléctica

- En los campos de Proca, las componentes temporales  $A_0$  y  $A_0^*$  no constituyen grados de libertad dinámicos independientes.
- El campo de Proca complejo presenta una duplicación de la estructura simpléctica respecto al caso real, manteniendo el carácter no gauge de la teoría.
- En teorías de campos, el formalismo requiere el tratamiento funcional de operadores diferenciales y distribuciones tipo delta de Dirac.
- En los casos estudiados, los corchetes obtenidos coincidieron con los corchetes de Dirac del tratamiento hamiltoniano estándar.

# Ventajas y limitaciones del formalismo

- Ventajas principales:
  - no requiere clasificar ligaduras en primera y segunda clase,
  - evita la distinción entre igualdades débiles y fuertes,
  - incorpora las ligaduras directamente en la estructura lagrangiana,
  - simplifica el tratamiento algebraico mediante la inversión de la matriz simpléctica,
  - proporciona una descripción geométrica de la dinámica de sistemas singulares.

# Ventajas y limitaciones del formalismo








- Ventajas principales:
  - no requiere clasificar ligaduras en primera y segunda clase,
  - evita la distinción entre igualdades débiles y fuertes,
  - incorpora las ligaduras directamente en la estructura lagrangiana,
  - simplifica el tratamiento algebraico mediante la inversión de la matriz simpléctica,
  - proporciona una descripción geométrica de la dinámica de sistemas singulares.
- Limitaciones:
  - algunas relaciones asociadas a los momentos canónicos quedan absorbidas en la formulación de primer orden,
  - ciertas restricciones no aparecen explícitamente como ligaduras independientes,
  - en sistemas con muchas variables simplécticas o que requieren múltiples iteraciones de regularización, la construcción e inversión de la matriz simpléctica puede volverse algebraicamente tediosa.







# Ventajas y limitaciones del formalismo




- Ventajas principales:
  - no requiere clasificar ligaduras en primera y segunda clase,
  - evita la distinción entre igualdades débiles y fuertes,
  - incorpora las ligaduras directamente en la estructura lagrangiana,
  - simplifica el tratamiento algebraico mediante la inversión de la matriz simpléctica,
  - proporciona una descripción geométrica de la dinámica de sistemas singulares.
- Limitaciones:
  - algunas relaciones asociadas a los momentos canónicos quedan absorbidas en la formulación de primer orden,
  - ciertas restricciones no aparecen explícitamente como ligaduras independientes,
  - en sistemas con muchas variables simplécticas o que requieren múltiples iteraciones de regularización, la construcción e inversión de la matriz simpléctica puede volverse algebraicamente tediosa.
- A pesar de estas diferencias estructurales, ambos formalismos conducen a la misma dinámica física.

# Bibliografía

---

-  K. D. Rothe and F. G. Scholtz, arXiv preprint hep-th/0308142 (2003), 10.1016/j.aop.2003.08.005.
-  R. Jackiw, arXiv preprint hep-th/9306075 (1993).
-  M. C. Bertin, B. M. Pimentel, and C. E. Valcárcel, *Annals of Physics* **323**, 3137 (2008).
-  J. A. A. Narváez, *TRATAMIENTO CANÓNICO DE LA ECUACIÓN DE PROCA PARA CAMPO REAL Y COMPLEJO*, Ph.D. thesis, Universidad de Nariño (2017).
-  L. Faddeev and R. Jackiw, *Physical Review Letters* **60**, 1692 (1988).
-  P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Belfer Graduate School of Science, 1964).
-  K. Sundermeyer, Springer; *Lect. Notes Phys.* **169**, 1 (1982).

-  G. E. Zambrano and B. M. Pimentel, *Estructura Canónica para una Teoría de Fotones Masivos*, Tech. Rep. (Universidad de Nariño; Universidade Estadual Paulista, 2014).
-  J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Modern Physics Letters A* **07**, 1737 (1992a).
-  J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *International Journal of Modern Physics A* **07**, 4981 (1992b).
-  J. Ramos, *Canadian Journal of Physics* **95**, 225 (2017).
-  J. A. R. Medina, *Método de Dirac e de Faddeev e Jackiw: um estudo comparativo*, Ph.D. thesis, Universidade Estadual Paulista (2000).
-  B. M. Pimentel and G. E. Zambrano, in *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, Vol. 267-269 (Elsevier B.V., 2015) pp. 183–185.

-  S. Anjali and S. Gupta, Modern Physics Letters A **35** (2020), 10.1142/S0217732320500728.
-  F. Darabi and F. Naderi, International Journal of Theoretical Physics **50**, 3432 (2011).
-  A. Escalante and M. Zarate, Annals of Physics **353**, 163 (2015).

# GRACIAS

# Identificación del potencial simpléctico con el Hamiltoniano

Partimos del lagrangiano en forma simpléctica de primer orden

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi), \quad (69)$$

El Hamiltoniano se define mediante la transformada de Legendre

$$H^{(0)} = \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} \dot{\xi}^i - L^{(0)}. \quad (70)$$

Del lagrangiano se obtiene directamente

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} = a_i(\xi). \quad (71)$$

Sustituyendo en la transformada de Legendre:

$$H^{(0)} = a_i(\xi)\dot{\xi}^i - [a_i(\xi)\dot{\xi}^i - V(\xi)]. \quad (72)$$

Por tanto,

$$H^{(0)} = V(\xi). \quad (73)$$

## Demostración de los corchetes de Poisson

Cuando en  $\xi_j$  contiene a las coordenadas con su momento canonico,

$$\xi_j = (q_j, p_j). \quad (74)$$

Por consiguiente, su evolución temporal también debe satisfacer las ecuaciones de Hamilton,

$$\dot{\xi}_j = \{\xi_j, H^{(0)}\}. \quad (75)$$

podemos desarrollar el corchete utilizando la regla de la cadena:

$$\{\xi_j, H^{(0)}\} = \{\xi_j, \xi_k\} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi_k}. \quad (76)$$

Por tanto,

$$\dot{\xi}_j = \{\xi_j, \xi_k\} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi_k}. \quad (77)$$

## Demostración de los corchetes de Poisson

Comparemos las ecuaciones de movimiento

$$\dot{\xi}_i = (f_{ij})^{-1} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi_j}, \quad (78)$$

con

$$\dot{\xi}_i = \{\xi_i, \xi_j\} \frac{\partial H^{(0)}}{\partial \xi_j}. \quad (79)$$

Como esta igualdad debe cumplirse para cualquier Hamiltoniano  $H^{(0)}$ , en consecuencia,

$$\{\xi_i, \xi_j\} = (f_{ij}^{-1}). \quad (80)$$

## Demostración de los corchetes generalizados

De la aplicación de las ecuaciones de E-L al lagrangiano general se tiene

$$\frac{da_i}{dt} - \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_j + \frac{\partial H}{\partial \xi_i} = 0. \quad (81)$$

Aplicamos la regla de la cadena

$$\frac{da_i}{dt} = \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \dot{\xi}_j. \quad (82)$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación anterior resulta

$$\underbrace{\left( \frac{\partial a_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial a_i}{\partial \xi_j} \right)}_{f_{ij}} \dot{\xi}_j = \frac{\partial H}{\partial \xi_i}. \quad (83)$$

## Demostración de los corchetes generalizados

Ahora consideremos una función arbitraria de las variables simplécticas,

$$F = F(\xi). \quad (84)$$

Su derivada temporal viene dada por la regla de la cadena:

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i. \quad (85)$$

Sustituyendo las ecuaciones de movimiento recién obtenidas,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} (f_{ij})^{-1} \frac{\partial H}{\partial \xi_j}. \quad (86)$$

## Demostración de los corchetes generalizados

En mecánica hamiltoniana, la evolución temporal de una función  $F(q, p)$  está dada por

$$\dot{F} = \{F, H\}, \quad (87)$$

donde el corchete de Poisson se define como

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial z_A} (J_{AB})^{-1} \frac{\partial G}{\partial z_B}, \quad (J_{AB})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

siendo  $z_A = (q_i, p_i)$ .

Comparando,

$$(f_{ij})^{-1} \equiv (J_{ij})^{-1} \quad (89)$$

## Demostración de los corchetes generalizados

Esto sugiere introducir una estructura de corchete generalizada definida por

$$\{F, G\}_{FJ} = \frac{\partial F}{\partial \xi_i} (f_{ij})^{-1} \frac{\partial G}{\partial \xi_j} = \dot{F}. \quad (90)$$

Para identificar los corchetes fundamentales, elegimos,

$$F = \xi_k, \quad G = \xi_l. \quad (91)$$

Resultando en:

$$\{\xi_i, \xi_j\}_{FJ} = (f_{ij})^{-1}. \quad (92)$$