

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

**CARACTERIZACIÓN DE ESTRELLAS TIPO PULSANTE Y
SOLAR MEDIANTE EL USO DE TÉCNICAS DE
ASTROSISMOLOGÍA**

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de:

Físico

Eddy Anthony Cruz Portilla

San Juan de Pasto, Colombia
22 de mayo de 2026

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**CARACTERIZACIÓN DE ESTRELLAS TIPO PULSANTE Y
SOLAR MEDIANTE EL USO DE TÉCNICAS DE
ASTROSISMOLOGÍA**

Eddy Anthony Cruz Portilla

TRABAJO DE GRADO

Directora:

Karla Patricia Reyes Sánchez
Magister en Astronomía y Astrofísica

San Juan de Pasto, Colombia
22 de mayo de 2026

© - Eddy Anthony Cruz Portilla

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Karla Patricia Reyes Sánchez

Directora

James Perengüez López

Jurado

Luis Leonardo Chaves Velásquez

Jurado

San Juan de Pasto, 22 de mayo del 2026

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi asesora de trabajo de grado, la profesora Karla Patricia Reyes Sánchez, quien siempre estuvo atenta y comprometida con el desarrollo y la presentación de este proyecto. Sus enseñanzas fueron fundamentales para comprender los aspectos necesarios que me permitieron alcanzar los objetivos propuestos. Valoro profundamente la confianza que depositó en mí, su paciencia inagotable, gran empatía y disposición constante para orientarme en cada etapa del proceso. Su acompañamiento fue clave para culminar esta investigación.

Asimismo, agradezco de corazón a mis padres por su apoyo incondicional y por inculcarme valores que han guiado mi formación personal y académica. A mis hermanos por siempre cuidarme y estar pendientes de mi progreso.

Agradezco a mi amada Emi por toda su confianza, amor y compañía. Su presencia en mi vida fue un estímulo constante en la realización de este trabajo.

Extiendo mi gratitud a compañeros y amigos de la universidad, quienes por medio de su amistad y colaboración, enriquecieron mi experiencia académica y personal.

*Dedico este trabajo a Dios, por ser mi guía y fortaleza de vida.
A mi familia y a mi pareja, por acompañarme en los momentos difíciles y confiar
siempre en mí.*

Mis triunfos también les pertenece.

Resumen

En el presente trabajo de grado se realiza una revisión bibliográfica sobre la Astrosismología, abarcando desde conceptos generales como la estructura y evolución estelar, hasta técnicas de análisis basados en datos observacionales obtenidos por fotometría.

Se estudiaron dos series temporales de estrellas pulsantes, con el propósito de caracterizar el tipo estelar y conocer sus propiedades descritas en la literatura. El desarrollo del software semi automático AD ASTRA Pulsantes, permitió determinar las frecuencias dominantes de la serie y encontrar el rango de periodos y amplitudes con los que oscila la estrella. Sus resultados fueron comparados con Period04, para determinar la validez del programa creado.

Por otro lado, se analizó la serie temporal del Sol y una estrella tipo solar, identificando sus modos de oscilación y los parámetros de gran y pequeña separación de frecuencias. De esta manera, se obtuvieron los valores de masa y radio estelar respecto al Sol, y fracción de hidrógeno de la misma, pudiendo estimar su fase evolutiva y posición en el diagrama H-R. Esto último, se desarrolló por medio de un enfoque metodológico en conjunto con el programa propuesto AD ASTRA Solar y Period04.

Palabras Claves: Astrosismología, Caracterización estelar, Oscilaciones estelares, Estrellas tipo pulsante y solar.

Abstract

In this undergraduate thesis, a bibliographic review on Asteroseismology is carried out, encompassing general concepts such as stellar structure and evolution, as well as analysis techniques based on observational data obtained through photometry.

Two time series of pulsating stars were examined with the aim of characterizing their stellar type and identifying their properties as described in the literature. The development of the semi-automatic software AD ASTRA Pulsantes enabled the determination of the dominant frequencies of each series and the identification of the corresponding range of oscillation periods and amplitudes. The results were compared with those obtained using Period04 in order to assess the validity of the proposed program.

Additionally, the time series of the Sun and of a solar-type star were analyzed, allowing the identification of their oscillation modes and the determination of the large and small frequency separations. From these parameters, estimates of stellar mass and radius relative to the Sun, as well as the hydrogen fraction, were obtained, enabling the evaluation of their evolutionary stage and placement on the Hertzsprung–Russell diagram. This final analysis was conducted through a methodological approach combining the AD ASTRA Solar software and Period04.

Palabras Claves: Asteroseismology, Stellar characterization, Stellar oscillations, Pulsating and solar type stars.

Contenido

1. Introducción	17
2. Planteamiento del Problema	19
3. Objetivos	20
3.1. General	20
3.2. Específicos	20
4. Introducción a las estrellas y la Astrosismología	21
4.1. Fundamentos de la física estelar	21
4.1.1. Evolución estelar	23
4.1.2. Clasificación estelar	25
4.1.3. Caracterización estelar	28
4.2. Definición de Astrosismología	29
4.3. Breve historia del desarrollo de la Astrosismología	29
4.3.1. Astrosismología desde el espacio	30
5. Oscilaciones estelares	32
5.1. El fenómeno de las pulsaciones estelares	32
5.2. Definición de oscilaciones estelares	33
5.3. Modos de oscilación	34
5.3.1. Pulsaciones radiales	34
5.3.2. Pulsaciones no radiales	35
5.4. Desarrollo teórico de las oscilaciones no radiales	37
5.5. Mecanismos de excitación	39
6. Estrellas pulsantes y de tipo solar	41
6.1. Estrellas pulsantes clásicas	41
6.1.1. Diversidad de estrellas pulsantes	41
6.2. Estrellas de tipo solar	44
6.2.1. El Espectro del Sol	46
7. Técnicas de análisis de datos observacionales	48
7.1. Análisis de Fourier	48
7.1.1. Periodograma clásico	53
7.1.2. Periodograma de Lomb-Scargle	54
7.2. Criterios de significancia	55



7.3.	Búsqueda de múltiples periodos	55
7.4.	Diagrama de fase	56
7.5.	Herramientas computacionales para el análisis	57
7.5.1.	Programa Period04	57
8.	Metodología para la caracterización de estrellas pulsantes y de tipo solar	59
8.1.	Metodología general del análisis frecuencial en estrellas pulsantes	59
8.2.	Análisis frecuencial en estrellas pulsantes	61
8.2.1.	Implementación del programa Period04	61
8.2.2.	Implementación del programa AD ASTRA Pulsantes	63
8.3.	Metodología frecuencial en estrellas de tipo solar	66
9.	Resultados del Análisis Astrosísmico	69
9.1.	Resultados para Star1	69
9.1.1.	Presentación de la curva de luz de Star1	69
9.1.2.	Análisis y resultados con Period04 para Star1	70
9.1.3.	Análisis y resultados con AD ASTRA Pulsantes para Star1	73
9.2.	Resultados para Star2	77
9.2.1.	Presentación de la curva de luz de Star2	77
9.2.2.	Análisis y resultados con Period04 para Star2	77
9.2.3.	Análisis y resultados con AD ASTRA Pulsantes para Star2	80
9.3.	Resultados para datos solares	84
9.3.1.	Presentación de la curva de luz del Sol	84
9.3.2.	Periodograma del Sol	84
9.3.3.	Identificación de modos	85
9.3.4.	Parámetros globales del Sol	85
9.3.5.	Caracterización estelar	87
9.3.6.	Representación de la estrella en el diagrama CD	88
9.4.	Resultados para Star3	90
9.4.1.	Presentación de la curva de luz de Star 3	90
9.4.2.	Periodograma de Star3	90
9.4.3.	Identificación de modos	91
9.4.4.	Parámetros globales de Star3	91
9.4.5.	Caracterización de Star3	93
9.4.6.	Representación de Star3 en el diagrama CD	94
10.	Análisis de resultados y discusión	96
10.1.	Análisis de estrellas Pulsantes	96
10.1.1.	Limitaciones y consideraciones del programa	96
10.1.2.	Comparación de los parámetros de pulsación para Star1	97
10.1.3.	Comparación de los parámetros de pulsación para Star2	99
10.2.	Análisis de estrellas de tipo solar	102
10.2.1.	Validación de la metodología mediante el Sol	102
10.2.2.	Análisis astrofísico de Star3	102
10.2.3.	Interpretación de los diagramas CD	103
11.	Conclusiones	104

Apéndices	106
A. Fundamentos Teóricos de Oscilaciones y Resonancia	106
A.I. Principios de Resonancia y Ondas Estacionarias en Sistemas Delimitados	106
A.I.1. Modos de Oscilación en Geometrías Simples	107
A.II. Ecuaciones generales de la hidrodinámica	110
A.II.1. Ecuación de continuidad	111
A.II.2. Ecuación de conservación del momento	111
A.II.3. Conservación de la energía	111
A.II.4. Ecuación de transporte	112
A.II.5. Ecuaciones de estado	112
A.III. Configuración de equilibrio estelar	112
B. Derivación de las Ecuaciones de Pulsación Estelar a partir de la Hidrodinámica Linealizada	115
C. Complementos Metodológicos	123
C.I. Caracterización de Estrellas Tipo Pulsante	123
C.I.1. Procedimiento Operativo en Period04	123
C.I.2. Desarrollo complementario con el programa AD ASTRA Pulsantes	128
C.I.3. Sumario de Tipos de Estrellas Pulsantes y sus Propiedades Características	129

Índice de figuras

4.1.1. Esquema evolutivo de una estrella	24
4.1.2. Diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R)	27
5.3.1. Modos no-radiales	35
5.3.2. Representación del interior solar con las zonas radiativa y convectiva	37
6.1.1. Diagrama H-R en estrellas pulsantes	42
6.2.1. Periodograma del Sol con Period04	45
6.2.2. Separación de frecuencias en estrellas tipo solar	46
6.2.3. Diagrama de Christensen-Dalsgaard	47
7.1.1. Ejemplo de una ventana espectral estelar del proyecto MACHO	52
7.1.2. Ejemplo de ventana espectral estelar de la misión espacial CoRoT	53
7.4.1. Diagrama de fase de una estrella modelo	57
9.1.1. Curva de luz completa de la estrella Star1 obtenida por el telescopio Kepler.	69
9.1.2. Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star1 tras la sustracción de 11 frecuencias significativas utilizando Period04.	71
9.1.3. Posible tipo de estrella correspondiente a Star1, en verde la selección por periodo y en recuadro azul por periodo y amplitud.	72
9.1.4. Gráficas que muestran el diagrama de fase luego de la primera y última transformada de Fourier. No es posible ver un diagrama típico dado la gran cantidad de puntos involucrado.	73
9.1.5. La Figura muestra el periodograma de amplitud de la curva de luz original de Star1. Las líneas verticales discontinuas (rojas) indican las posiciones y las puntas de flecha las amplitudes de las 9 frecuencias estelares significativas finales.	74
9.1.6. Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star1, tras la sustracción del modelo multifrecuencia global. Los picos residuales más prominentes corresponden a frecuencias instrumentales del telescopio Kepler, las cuales fueron exitosamente excluidas del modelo de pulsaciones estelares.	75
9.1.7. Gráficas que muestran los diagramas de fase de la primera y última iteración, obtenidos en AD ASTRA Pulsantes para Star1.	76
9.2.1. Curva de luz completa de la estrella Star2 obtenida por el telescopio Kepler.	77
9.2.2. Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star2 tras la sustracción de 6 frecuencias significativas utilizando Period04. El pico más alto en esta visualización se indica en el título del gráfico original del programa.	78
9.2.3. Posible tipo de estrella correspondiente a Star2, en verde la selección por periodo y en recuadro azul por periodo y amplitud.	79

9.2.4. Gráficas de fase en la primera y última transformada de Fourier. No es posible apreciar un diagrama típico dado la gran cantidad de puntos involucrado.	80
9.2.5. La Figura muestra el periodograma de amplitud de la curva de luz original de Star2. Las líneas verticales discontinuas (rojas) indican las posiciones y las puntas de flecha las amplitudes de las 6 frecuencias estelares significativas finales.	81
9.2.6. Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star2, tras la sustracción del modelo multifrecuencia global. El nivel de ruido de fondo general es bajo, predominantemente por debajo de 0.005mmag	82
9.2.7. Gráficas que muestran los diagramas de fase de la primera y última iteración, obtenidos en AD ASTRA Pulsantes para Star2.	83
9.3.1. Curva de luz completa para el Sol obtenida por el telescopio SoHo.	84
9.3.2. Periodograma del Sol generado por AD ASTRA Solar.	84
9.3.3. Periodograma del Sol y sus grados esféricos (l), a partir de Period04	85
9.3.4. Representación del Sol en el Diagrama C-D. El punto (Sol) se posiciona utilizando los parámetros medidos por el método híbrido. Las líneas sólidas representan trazas de masa constante (en $M_{\odot}$) y las líneas punteadas representan trazas de edad constante (fracción de hidrógeno en el núcleo, X_c).	89
9.4.1. Curva de luz de star3 obtenida por el telescopio Kepler.	90
9.4.2. Periodograma de star3 generado por AD ASTRA Solar.	90
9.4.3. Periodograma de star3 y sus grados esféricos (l), a partir de Period04	91
9.4.4. Representación de Star3 en el Diagrama C-D. El punto (Star3) se posiciona utilizando los parámetros medidos ($\langle \Delta \nu \rangle \approx 92.2 \mu\text{Hz}$, $\langle \delta \nu_{02} \rangle \approx 4.1 \mu\text{Hz}$).	95
A.I.1. Oscilaciones en un órgano de tubos	107
A.I.2. Oscilaciones en un parche de tambor	108
C.I.1. Módulo de cargue de la información.	123
C.I.2. Módulo de Fourier para el cálculo de la primera frecuencia.	124
C.I.3. Módulo <i>fit</i> del Period04 que muestra las frecuencias calculadas junto con la amplitud y la fase para la estrella Star2.	126
C.I.4. Espectro de amplitudes en el proceso de Pre-blanqueo para la estrella Star2	127
C.I.5. Diagnóstico de Pre-blanqueo para Star2- Iteraciones 4.	128
C.I.6. Tablas de estrellas pulsantes implementadas como apoyo para la clasificación de Star1 y Star2. Fuente: Obtenida de [1], adaptada de [2]	129

Índice de tablas

9.1.1. Análisis del espectro de amplitudes de Star1 con Period04. En la primera columna se detalla la frecuencia significativa encontrada, en la tercera columna la amplitud de las oscilaciones, en la cuarta columna la fase y finalmente los valores de señal ruido iterativo y global.	70
9.1.2. Periodos de oscilación de Star1 con la respectiva amplitud.	71
9.1.3. Frecuencias significativas, amplitudes, fases y valores de S/N iterativo y global para Star1 detectadas con AD ASTRA Pulsantes.	73
9.1.4. Periodos de oscilación correspondientes a las frecuencias mínima y máxima detectadas en Star1 con el programa AD ASTRA Pulsantes.	74
9.1.5. Clasificación tentativa de Star1 basada en la similitud de rangos de período (J_P) y amplitud (J_A). Los candidatos se ordenan por J_A descendente, luego por J_P descendente.	75
9.2.1. Análisis del espectro de amplitudes de Star2 con Period04. En la primera columna se especifica la frecuencia significativa encontrada, en la tercera columna la amplitud de las oscilaciones, en la cuarta columna la fase y finalmente los valores de señal ruido iterativo y global.	78
9.2.2. Periodos de oscilación correspondientes a las frecuencias estelares extremas (mínima y máxima) detectadas en Star2 con el programa Period04.	79
9.2.3. Frecuencias de pulsación estelares, amplitudes, fases y relaciones señal/ruido (S/N) para Star2, obtenidas con AD ASTRA Pulsantes.	80
9.2.4. Periodos correspondientes a las frecuencias estelares extremas (mínima y máxima) detectadas en Star2 con el programa AD ASTRA Pulsantes, basadas en 6 frecuencias confirmadas.	81
9.2.5. Clasificación tentativa de Star2 basada en la similitud de rangos de período (J_P) y amplitud (J_A). Los candidatos se ordenan por J_A descendente, luego por J_P descendente.	82
9.3.1. Frecuencias de Modos de Oscilación del Sol ($l = 0, 1, 2, 3$) y sus Incertidumbres.	86
9.3.2. Cálculo de la Gran Separación ($\Delta\nu$) para el Sol.	86
9.3.3. Cálculo de la Pequeña Separación ($\delta\nu_{02}$) para el Sol.	87
9.4.1. Frecuencias de Modos de Oscilación de star3 ($l = 0, 1, 2, 3$) y sus Incertidumbres.	92
9.4.2. Cálculo de la Gran Separación ($\Delta\nu$) para Star3.	92
9.4.3. Cálculo de la Pequeña Separación ($\delta\nu_{02}$) para Star3.	93
10.1.1. Comparación cuantitativa de las frecuencias y amplitudes detectadas en Star1 mediante Period04 y AD ASTRA Pulsantes. Se muestra la diferencia absoluta ($ \Delta $) entre los valores obtenidos por ambos métodos.	97
10.1.2. Comparación de la Fase (ϕ) para Star1. Se muestra el valor de Period04 convertido a radianes ($\phi_{P04} \times 2\pi$) para compararlo directamente con AD ASTRA Pulsantes. La diferencia $ \Delta $ confirma la equivalencia.	98

10.1.3	Comparación de la Relación Señal/Ruido (S/N) para Star1. Se contrastan los valores obtenidos durante la detección iterativa (Pre-blanqueo) frente a los obtenidos tras el ajuste global simultáneo. Nótese la convergencia de valores en la etapa global.	99
10.1.4	Comparación entre las frecuencias y amplitudes detectadas en Star2 mediante Period04 y AD ASTRA Pulsantes. Se muestra la diferencia absoluta ($ \Delta $) entre los valores obtenidos por ambos métodos.	100
10.1.5	Comparación de la Fase (ϕ) para Star2. Se muestra el valor de Period04 convertido a radianes ($\phi_{P04} \times 2\pi$) para compararlo directamente con AD ASTRA Pulsantes. La diferencia $ \Delta $ confirma la equivalencia.	100
10.1.6	Comparación de la Relación señal/ruido (S/N) para Star2.	101
10.2.1	Resumen final de parámetros sísmicos y físicos obtenidos.	103

Glosario

TAMS: Hace referencia al límite evolutivo o etapa final que posee una estrella de la secuencia principal.

Deriva instrumental: Cambio o variación periódica en la indicación de un instrumento por envejecimiento de componentes, desgaste, cambios de temperatura, presión o condiciones ambientales.

Heurística: Conjunto de métodos prácticos que permiten obtener soluciones útiles y rápidas cuando existe un grado de complejidad en los problemas o muestra que se está trabajando.

Cromosfera: Capa gaseosa del Sol ubicada por encima de la fotosfera y debajo de la corona.

Fotosfera: Superficie visible del Sol, de donde proviene la luz y el calor que recibimos en la Tierra.

Corona solar: Corresponde a la capa más externa de la atmósfera del Sol, formada por plasma muy caliente.

Metalicidad: Se refiere a la proporción de elementos más pesados que el hidrógeno y el helio, que están presentes en una estrella.

Capítulo 1

Introducción

Las estrellas son consideradas los laboratorios fundamentales del universo, porque en su interior ocurren las reacciones nucleares que permiten crear los elementos químicos que conocemos; sin embargo pese a su importancia, nuestra comprensión de la estructura interna ha estado históricamente limitada [3]. Durante siglos, la astronomía se restringió al estudio de la luz emitida por la fotosfera [4], dejando el interior estelar como una gran incógnita y siendo solo accesible a través de modelos teóricos [5]. Con la llegada de la Astrosismología, esta restricción ha quedado atrás en las últimas décadas, puesto que esta disciplina permite sondear el interior de las estrellas mediante el estudio de sus oscilaciones intrínsecas [6]. De manera análoga a cómo la sismología terrestre revela la estructura del núcleo y el manto de la Tierra, las ondas sísmicas que se propagan en el interior de una estrella, transportan información vital sobre las mismas.

La era actual de la astrofísica estelar, ha revolucionado con las misiones de fotometría espacial de alta precisión en *CoRoT*, *Kepler* y *TESS* de la NASA [6]. Estos telescopios proporcionaron series temporales de calidad y de larga duración para miles de estrellas. No obstante, la gran cantidad de datos conlleva a nuevos desafíos metodológicos. Las series temporales astronómicas suelen presentar muestreos irregulares como huecos en la adquisición de datos y niveles variables de ruido instrumental y estelar. Por tanto, el reto contemporáneo no reside únicamente en la obtención de datos, sino en el desarrollo de estrategias de análisis capaces de extraer parámetros físicos de señales complejas, distinguiendo entre la física real de la estrella y los artefactos del instrumento [2, 7].

En ese orden de ideas, el presente trabajo se centra en el desarrollo e implementación de una metodología de análisis para caracterizar dos grandes grupos de estrellas, pulsantes y de tipo solar. Para abordar los desafíos del análisis de datos, se desarrollaron los programas personalizados AD ASTRA Pulsantes y AD ASTRA Solar, cuya eficacia se valida mediante la contrastación con herramientas de referencia como *Period04* y la comparación con valores canónicos solares.

La organización del trabajo es la siguiente:

En el Capítulo 4, se dan a conocer algunos conceptos preliminares de la física estelar (Evolución, clasificación y caracterización de una estrella en el diagrama H-R). Adicionalmente se introducen los conceptos generales de la Astrosismología desde su definición hasta las misiones de lanzamiento de telescopios espaciales.

En el Capítulo 5, se estudian los fundamentos físicos de las oscilaciones estelares, describiendo el fenómeno de las pulsaciones, los diferentes modos de oscilación y los mecanismos de excitación para estrellas pulsantes y de tipo solar. En el Capítulo 6 se particulariza la información en los dos grupos de estrellas, destacando



la diversidad de estrellas pulsantes y las relaciones matemáticas en estrellas de tipo solar, que vinculan las frecuencias observadas con la estructura interna.

En el Capítulo 7, se estudia las técnicas de análisis implementadas para datos observacionales. Se abordan los conceptos de transformada discreta de Fourier, periodograma de Lomb-Scargle; así como la teoría necesaria para el desarrollo y ejecución de los programas computacionales.

El Capítulo 8 expone, en primer lugar, el proceso de desarrollo del software AD ASTRA Pulsantes y la implementación del programa Period04 orientado a la caracterización de estrellas pulsantes. Asimismo, se presenta la descripción del flujo de trabajo híbrido que integra Period04 con AD ASTRA Solar, diseñado para la caracterización de estrellas de tipo solar.

El Capítulo 9 presenta los hallazgos cuantitativos del análisis y el Capítulo 10, ofrece una interpretación física de los datos, discutiendo la clasificación morfológica de las estrellas pulsantes y el estado evolutivo de las estrellas de tipo solar a partir de los parámetros globales obtenidos.

Finalmente, en el Capítulo 11, se sintetizan las conclusiones principales de la investigación y se discuten las limitaciones y perspectivas futuras del trabajo.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

La Astrosismología es una rama de la astrofísica que estudia las oscilaciones o pulsaciones de estrellas con el objetivo de comprender su estructura interna, composición química, edad y evolución. Similar a cómo los sismólogos estudian las ondas sísmicas en la Tierra para aprender sobre su estructura interna, los astrofísicos utilizan las oscilaciones estelares para sondear el interior de las estrellas [8].

Estas oscilaciones estelares pueden revelar información valiosa sobre las capas internas de una estrella, incluyendo la temperatura, densidad y composición química. Además, la Astrosismología puede proporcionar datos sobre la rotación de una estrella y otros aspectos importantes de su evolución.

Para detectar estas oscilaciones, se utilizan observaciones de la variabilidad en el brillo de las estrellas a lo largo del tiempo; instrumentos como telescopios espaciales y terrestres son utilizados para recopilar datos precisos sobre las variaciones en el brillo de las estrellas y analizar las frecuencias de estas variaciones para inferir información sobre la estructura interna de las estrellas.

Dado que no hay otras técnicas posibles, la Astrosismología se convierte en la única manera mediante la cual se estudia la estructura interna de las estrellas pulsantes gracias al análisis de los espectros de frecuencias [9].

Por tanto, esta investigación plantea un estudio el cual se centrará en introducir la ciencia llamada Astrosismología que estudia el interior de las estrellas a partir del análisis de las oscilaciones estelares. Además, se implementará un programa básico para analizar la variabilidad estelar, que permita determinar las frecuencias de una serie temporal con componentes sinusoidales.

El estudio de estas frecuencias de pulsación permitirá entender cómo cambian las oscilaciones en el diagrama HR y cómo se puede reconocer los diferentes tipos de estrella conociendo su variabilidad.

Considerando lo mencionado anteriormente, se plantea la siguiente pregunta o problema de investigación:

¿Cómo se puede caracterizar y entender la estructura interna de las estrellas a través del estudio de sus oscilaciones utilizando datos observacionales, y cómo estas oscilaciones proporcionan información sobre densidad, composición química y edad?

Capítulo 3

Objetivos

3.1. General

Introducir la Astrosismología mediante el estudio de las oscilaciones de estrellas pulsantes y de tipo solar.

3.2. Específicos

- Realizar una revisión de la literatura existente sobre Astrosismología, abarcando métodos de detección, técnicas de análisis y resultados significativos previamente obtenidos.
- Implementar un software capaz de analizar la variabilidad estelar a lo largo del tiempo, identificar patrones de oscilación y determinar las frecuencias de las oscilaciones presentes en los datos.
- Analizar las oscilaciones estelares en una estrella no solar y una estrella tipo solar.
- Estudiar las frecuencias de pulsación de las estrellas para poder entender cómo cambian las oscilaciones en el diagrama HR y reconocer los diferentes tipos de estrella conociendo su variabilidad.

Capítulo 4

Introducción a las estrellas y la Astrosismología

Desde los albores de la civilización, una innata curiosidad ha impulsado al ser humano a explorar el mundo circundante, comprender su conexión con la naturaleza y perseguir los enigmas de lo desconocido. Las estrellas, aquellos destellos lejanos que salpican la oscuridad nocturna capturaron tempranamente esta fascinación. Su presencia constante en el firmamento, inspiró las primeras observaciones y reflexiones cosmológicas que generaron un gran número de creencias e hipótesis centradas principalmente en describir al Sol, nuestra estrella más próxima y vital.

Sin embargo, el estudio riguroso de estos astros constituye un desafío considerable, pues sus condiciones extremas inherentes tales como temperaturas abrasadoras, distancias inconmensurables y magnitudes colosales, imposibilitan cualquier aproximación directa, envío de sondas o recolección de muestras. Esta barrera física convertía a las estrellas en misterios aparentemente impenetrables; no obstante, el deseo por comprender la física de las estrellas y el desafío que esto suponía, actuó como un catalizador para que el ingenio científico y la comunidad astronómica a lo largo del tiempo y particularmente durante el siglo XX, desarrollara métodos indirectos cada vez más sofisticados para desentrañar sus secretos.

En el presente capítulo se presenta una introducción descriptiva sobre las estrellas, su evolución y métodos de caracterización estelar que permiten llegar hasta la Astrosismología.

4.1. Fundamentos de la física estelar

Para profundizar verdaderamente en el estudio de la Astrosismología, es importante en un principio sentar las bases de la física que gobierna las estrellas; comprender qué es un astro, cómo se mantiene estable durante miles de millones de años y cómo evoluciona. La interpretación de estos conceptos se rigen por leyes fundamentales.

Una estrella en su concepción más básica puede entenderse como una inmensa esfera de plasma auto-gravitante, un delicado equilibrio entre la permanente fuerza de la gravedad que tiende a comprimirla y su presión interna generada por el calor de las reacciones nucleares en su núcleo: dichas reacciones nucleares se oponen a este colapso [10]. Describir el equilibrio y entender la estructura interna de una estrella, dan como resultado lo que se conoce como el modelo estándar de estructura y evolución estelar. Este modelo no

es más que un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias que representan los principios físicos clave que operan en el interior estelar.

1. **Equilibrio Hidrostático:** expresado como:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM_r\rho}{r^2} \quad (4.1.1)$$

establece que el gradiente de presión contrarresta el peso de las capas superiores, determinado por la masa interior M_r , la densidad ρ y la constante gravitacional G . Es la lucha constante y perfectamente equilibrada entre la gravedad y la presión [10].

2. **Conservación de la Masa (o Continuidad de la Masa):** dada por:

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (4.1.2)$$

establece cómo se distribuye la masa dentro de la estrella. A medida que un observador se mueve hacia afuera desde el centro, la masa contenida dentro de una esfera de radio r aumenta en función de la densidad local.

3. **Generación de Energía (o Conservación de la Energía):** la ecuación:

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \epsilon \quad (4.1.3)$$

describe cómo se genera la energía que la estrella irradia. La luminosidad (L_r) que atraviesa una esfera de radio r aumenta si hay fuentes de energía (ϵ , la tasa de generación de energía por unidad de masa, principalmente debida a la fusión nuclear) dentro de esa esfera [10].

4. **Transporte de Energía:** una vez generada, esta energía debe viajar desde el núcleo hasta la superficie. Hay dos mecanismos principales:

- *Transporte Radiativo:* cuando la energía es transportada por fotones, el gradiente de temperatura (T) se describe por:

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho L_r}{16\pi a c r^2 T^3} \quad (4.1.4)$$

donde κ es la opacidad del material (su resistencia al paso de la radiación) y a y c son la constante de radiación y la velocidad de la luz, respectivamente [10].

- *Transporte Convectivo:* si el transporte radiativo no es eficiente (por ejemplo, si la opacidad es muy alta o el flujo de energía es muy grande), la estrella recurre a la convección: grandes burbujas de plasma caliente ascienden, transportando energía, mientras que material más frío desciende. Una descripción matemática más completa, se basa en comparar el gradiente de temperatura real con el gradiente adiabático [10].

Para que el anterior sistema de ecuaciones presentado tenga una solución única y describa una estrella particular, es necesario implementar conceptos de la microfísica o las llamadas ecuaciones constitutivas. Estas describen las propiedades del material estelar tales como la ecuación de estado (que relaciona presión, densidad y temperatura), la opacidad (qué tan transparente es el gas a la radiación) y las tasas de reacción nuclear (qué tan eficientemente ocurre la fusión).

Con lo anterior en mente, Una estrella es una esfera auto-gravitante de gas ionizado, o plasma, compuesta primordialmente por tres cuartas partes de hidrógeno y una cuarta parte de helio, por masa [10]; además una

4.1. FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA ESTELAR

fracción menor (1–2 %) corresponde a elementos más pesados, conocidos en el contexto astrofísico como ‘metales’ [10, 11]. En el núcleo, la energía se genera mediante reacciones de fusión nuclear. Esta energía liberada ejerce una presión expansiva que contrarresta la incesante fuerza de la gravedad. Como se mencionó anteriormente, cuando ambas fuerzas se equilibran se dice que la estrella ha alcanzado el estado de equilibrio hidrostático, una condición fundamental para su estabilidad [10].

El proceso de fusión nuclear más común en estrellas como el Sol implica una cadena de reacciones mediante la cual cuatro protones (núcleos de hidrógeno)¹ se transforman en un núcleo de helio (también conocido como partícula α) [11]. Durante la conversión, parte de la masa se transforma en energía y se libera principalmente en forma de fotones y neutrinos. En el caso de los neutrinos, estos abandonan la estrella al no interactuar con otras partículas o material; interpretando lo anterior como una fuente de pérdida de energía. Por otro lado, los fotones energéticos generados en el núcleo emprenden un largo viaje hacia la superficie, interactuando continuamente con el plasma estelar, calentándolo y contribuyendo a la presión que sostiene a la estrella contra el colapso gravitacional. Este flujo de energía es vital para la estructura interna y las propiedades observables de la estrella que contribuye al fenómeno de las pulsaciones que se estudiarán mas adelante [11].

A pesar de su apariencia estática en el cielo, las estrellas experimentan cambios constantes a lo largo de miles de millones de años. A continuación, se da una breve descripción de la evolución estelar desde su formación en densas nubes moleculares hasta sus etapas finales.

4.1.1. Evolución estelar

En un inicio las estrellas se forman a partir de regiones de nubes masivas de gas y polvo, en donde se produce inestabilidad frente al colapso gravitacional, provocando la contracción. Durante la contracción gravitacional, gran parte de la energía potencial liberada, se usa para calentar la materia de la protoestrella; lo demás se emite desde su superficie. Con el tiempo, las regiones que se encuentran en el centro de la estrella, se vuelven lo suficientemente densas alcanzando la temperatura necesaria para la combustión de hidrógeno y helio en el núcleo. Tal y como se mencionó anteriormente, la energía liberada debido a reacciones nucleares, contrarresta el colapso gravitacional, en este instante de su evolución la estrella se ubica en lo que se conoce como Secuencia Principal. Durante la formación, si la masa de la protoestrella es menor a $0.08 M_{\odot}$ ², nunca conseguirá obtener la temperatura de combustión de hidrógeno ($T \approx 6 \times 10^6 K$) que provoca la estrella se encienda; esto se debe a que su materia es fuertemente degenerada, y la energía liberada tras la contracción es absorbida por el gas de electrones en lugar de incrementar su temperatura, dando como resultado estrellas enanas marrones [5, 11, 12].

La etapa mas larga en la vida de las estrellas se da en la Secuencia Principal, donde la estrella está en equilibrio y su energía proviene de la combustión en su núcleo de hidrógeno y helio. Así mismo, se tiene que cuanto más masiva es la estrella, su luminosidad también lo será y por ende su producción de energía. De esta manera, aquellas estrellas con masas mayores que otras, tienen tiempos de vida más cortos. En el caso de una estrella de $20M_{\odot}$ su fase inicial dura aproximadamente (6×10^6 años) mientras que estrellas de $1M_{\odot}$ se encuentra alrededor de (10^{10} años). Incluso para estrellas con una masa inferior a $0.09 M_{\odot}$, el tiempo de vida

¹Se hace referencia a núcleos de hidrógeno y no a átomos completos, dado que en el estado de plasma de la materia estelar, los electrones y los núcleos se encuentran disociados.

²Siendo $M_{\odot}$ la notación que representa masa estelar. Generalmente se representa en términos de la masa del Sol configurando una proporción de masa solar.

en la fase de Secuencia Principal, supera la edad actual del universo [5]. Al agotarse el combustible nuclear en el centro, la combustión de hidrógeno se traslada a una cáscara que cubre el núcleo inerte rico en helio. De esta manera el núcleo se contrae mientras que la envoltura se expande, dando lugar a una disminución de temperatura superficial. La estrella asciende de rama hasta la región de gigantes rojas, incrementando su luminosidad a temperatura parcialmente constante. Debido a la expansión hacia la superficie de la cáscara de hidrógeno, la masa del núcleo de helio aumenta, así pues cuando alcanza una temperatura aproximada de $10^8 K$ da lugar a la combustión de helio, en carbono y oxígeno posteriormente. La fase en la que ocurre este proceso se conoce como, Rama Horizontal o Secuencia Principal de helio. A partir de este momento, su evolución posterior a la quema de helio, dependerá de la masa inicial en la que se formó la estrella. Así pues, es posible dividir la estrella en los siguientes tres grandes grupos, estrellas de baja masa inicial entre $0.08 M_{\odot}$ y $\sim 10 M_{\odot}$, estrellas de masa intermedia con $\sim 10 - 25 M_{\odot}$ y estrellas masivas $M_* \gtrsim 25 M_{\odot}$. La Figura 4.1.1 muestra un esquema de los posibles caminos que puede tomar una estrella en su evolución desde su origen [5].

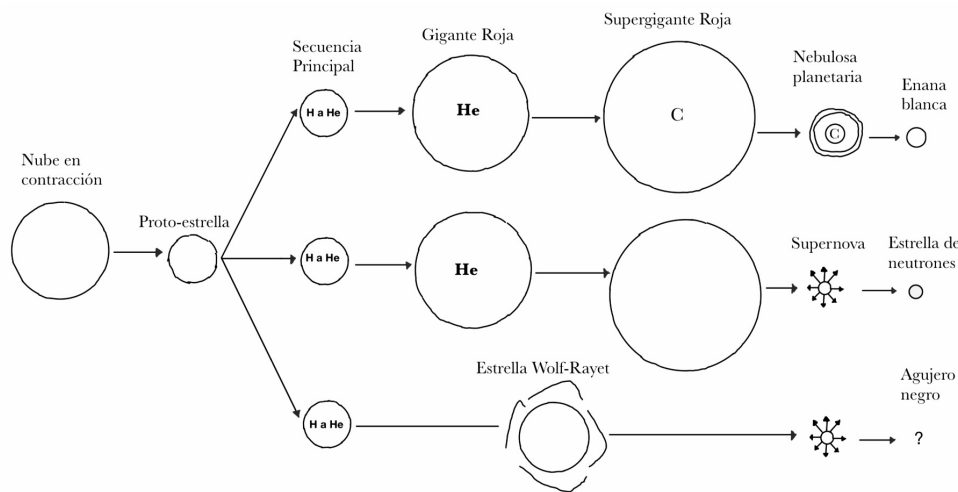


Figura 4.1.1: Esquema evolutivo de una estrella

Se ilustra los tres posibles caminos evolutivos de una estrella tomando en consideración la masa inicial con que esta se originó. Para estrellas con baja masa, masa intermedia y alta masa, los procesos evolutivos se representan en la fila superior, fila central e inferior respectivamente.

Fuente: Adaptada de [5].

En estrellas de baja masa cuando se acaba el helio central, estas desarrollan un núcleo degenerado compuesto por carbono y oxígeno que a su vez es rodeado por una cáscara de helio en proceso de combustión. Debido a que no se presentan reacciones nucleares en el núcleo, este se contrae y da lugar a la expansión de las capas de combustión. Lo anterior genera la disminución de temperatura en aquella región donde se encuentra la cáscara de hidrógeno, volviéndose inactiva. Por consiguiente la envoltura se expande y la estrella se traslada hacia la Rama Asintótica de las Gigantes (AGB), consiguiendo una alta luminosidad [5].

En la etapa final de la AGB, la estrella empieza a sufrir algunas inestabilidades termonucleares, llamadas pulsos térmicos debido al consumo de helio que rodea el núcleo. A medida que continua la evolución en la AGB, la masa del núcleo en la estrella aumenta debido al avance de la cáscara de helio en combustión; al mismo tiempo que erosionan capas más externas debido a las pérdidas de masa que experimenta la estrella. El núcleo de carbono y oxígeno es un cuerpo compacto y sumamente degenerado de $0.5 - 1 M_{\odot}$ y un radio

4.1. FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA ESTELAR

similar al de la Tierra. En estas condiciones, su núcleo es equiparable al de una enana blanca. El material arrojado alrededor de la estrella brilla como una nebulosa planetaria durante varios miles de años, siendo resultado de la fluorescencia provocada por la energía emitida del objeto central en el rango ultravioleta, antes de que esta pueda disiparse en el medio interestelar. Como resultado se obtiene, una enana blanca con un núcleo de carbono y oxígeno que brilla fundamentalmente a costa de la liberación de energía térmica almacenada en el gas iónico no degenerado. Las estrellas con una masa inicial de entre $\approx 8 - 10 M_{\odot}$ consiguen encender carbono en condiciones de semi-degenerancia, creando una estrella enana blanca masiva cuyo núcleo es de oxígeno y neón [5].

En el caso de estrellas de masa intermedia ($\sim 10 - 25 M_{\odot}$), luego de agotarse el helio en el centro; la combustión nuclear de carbono y de elementos más pesados se presenta en condiciones normales al no desarrollar un núcleo degenerado [5]. El número de reacciones nucleares que ocurren desde la fusión del carbono hasta elementos del grupo del hierro, tienen una duración de tan solo algunos cientos de años durante las cuales, las capas cercanas a la superficie de la estrella no varían. Se origina una estructura de «cebolla» y se ubican capas de elementos cada vez mas pesados, unas tras otras. Una vez originado la formación de hierro en la estrella, la producción de energía mediante fusión nuclear, se interrumpe al darse una reacción endotérmica si la fusión de hierro se presenta. De esta manera, la contracción gravitacional se posiciona como única fuente de energía y da lugar a un aumento de temperatura en el núcleo, así como, a la desintegración de núcleos atómicos en protones y neutrones; quienes a su vez, a medida que su densidad incrementa, los protones captan electrones para formar neutrones y emitir neutrinos. Al final, los neutrones forman un gas degenerado. El colapso de las capas externas de la estrella se detiene cuando, el núcleo alcanza valores de densidad comparables a las de núcleos atómicos, provocando que la materia ya no se pueda comprimir. En este punto, una onda de choque es generada y a la par de emisión de neutrinos, esta transfiere momento a la envoltura expulsándola y generando una explosión de supernova. Su núcleo remanente e increíblemente compacto, se convierte en una estrella de neutrones con masas alrededor de $1.4 - 2 M_{\odot}$ aproximadamente, los cuales pueden ser considerados como pulsares [5].

Por otra parte, las estrellas masivas son aquellas con masas iniciales de $\gtrsim 25 M_{\odot}$. Estas estrellas pasan la mayor parte de su vida en una fase de Wolf-Rayet como objetos luminosos en gran medida. Durante el transcurso de su evolución, aquel material que ha sido procesado en el núcleo central, eventualmente alcanza la superficie estelar. En dado caso que una gran cantidad de material sea acumulado en la superficie, se produce una fuerte absorción de radiación de la estrella, que resultan en vientos intensos con tasas de $10^{-6} - 10^{-5} M_{\odot}/\text{año}$ en pérdida de masa. Al producirse este fenómeno, el viento es tan espeso que puede ocultar la estrella por completo. Por otra parte, procesos que se originan en el interior de estrellas masivas, son similares a los que se suscitan en estrellas de masa intermedia y, por tanto, existirá formación de un núcleo central de hierro y composición interna por capas. En la etapa final de sus vidas, dichas estrellas estallaran de la misma forma en un evento de supernova. No obstante, al ser estrellas masivas, su masa excede a la masa límite para las estrellas de neutrones y, la presión originada por el gas de neutrones degenerados no es lo suficientemente intenso para contrarrestar el colapso gravitacional generando un agujero negro [5, 10].

4.1.2. Clasificación estelar

Existe una amplia diversidad en cuanto a tamaño, temperatura, luminosidad y composición química de una estrella. Dicha variedad es producto de las diferentes etapas evolutivas que atraviesan y de sus condiciones iniciales de formación.

Para estudiar la diversidad en las estrellas, se han desarrollado sistemas que permiten agruparlas en función

de sus características observables. La relación entre luminosidad (L) de una estrella y su temperatura efectiva (T_{eff}) nos permite clasificar estrellas según sus parámetros fundamentales [6]. La temperatura efectiva se define como la temperatura de un cuerpo negro con igual luminosidad por superficie (F_{Bol}) de la estrella, la cual sigue la Ley de Stefan-Boltzmann descrita como:

$$F_{Bol} = \sigma T_{eff}^4, \quad (4.1.5)$$

Dónde $\sigma = 5.670373 \times 10^{-8} W/(m^2 k^4)$ la constante de Boltzmann. La relación entre luminosidad y temperatura efectiva con (R) el radio estelar, se establece como:

$$L = 4\pi(R^2\sigma)T_{eff}^4, \quad (4.1.6)$$

De esta manera, la clasificación estelar descrita por la ecuación 4.1.6 y sus parámetros fundamentales, da lugar a distintas clases espectrales tales como las enanas marrones, enanas blancas, enanas rojas, estrellas en Secuencia Principal, subgigantes, estrellas supergigantes, entre otras. El diagrama de Hertzsprung-Russell o diagrama H-R, facilita la comprensión de distintos tipos de estrellas y su fase evolutiva. Descrito por primera vez en 1915 considera la temperatura efectiva en función de la luminosidad para clasificar estrellas. El diagrama facilita su comprensión al permitir entender la evolución de una estrella; así mismo otorga información de interés como edad y masa de la estrella.

La Figura 4.1.2, muestra el diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R), diversas poblaciones estelares y sus etapas evolutivas. La característica más prominente de este diagrama es una banda diagonal densamente poblada, conocida como la Secuencia Principal. Las estrellas que residen en esta región se encuentran en la fase más estable y duradera de sus vidas, durante la cual generan energía mediante la fusión de hidrógeno en helio en sus núcleos.

En el extremo inferior derecho de la Secuencia Principal, caracterizado por temperaturas efectivas $T_{eff} < 4000$ K y luminosidades $L < 0.03L_{\odot}$, se ubican las enanas rojas: estrellas frías, poco masivas y de muy larga vida.

Cuando una estrella ha consumido la mayor parte del hidrógeno disponible en su núcleo, comienza a evolucionar fuera de la Secuencia Principal. Su primera transición la lleva a la fase de subgigante, donde la fusión de hidrógeno prosigue, pero ahora en una capa que envuelve un núcleo central de helio, mayormente inerte. A partir de este punto la trayectoria evolutiva de una estrella en el diagrama H-R, está íntimamente ligada a su masa inicial. Dependiendo de esta, la estrella puede expandir considerablemente su envoltura y disminuir su temperatura superficial, transformándose en una gigante roja, o, si su masa es suficientemente elevada, evolucionar hacia la aún más luminosa y extensa región de las supergigantes.

En el caso de estrellas con masa similar a la solar, en la etapa final de su existencia, dan lugar a una nebulosa planetaria con estrellas enanas blancas en su centro; dicha región es posible visualizarla en la parte inferior izquierda del diagrama H-R. Una clasificación estelar de acuerdo a sus características espectrales esta dada por: O, B, A, F, G, K, M, L, T, como una secuencia que describe estrellas desde las más calientes como las de tipo O, a las más frías como lo son las del tipo T. Cada clase se subdivide por una letra que a su vez se subdivide con el uso de un dígito numérico empezando desde el 0 para las más calientes hasta el dígito 9. Sin embargo, una clasificación moderna como la de Morgan-Keenan, emplea el uso de números romanos para designar el tipo de luminosidad que se posee. De esta manera, estrellas O o Ia+ son del tipo hipergigantes, estrellas gigantes como clase I, gigantes brillantes las de clase II, gigantes regulares en la clase

4.1. FUNDAMENTOS DE LA FÍSICA ESTELAR

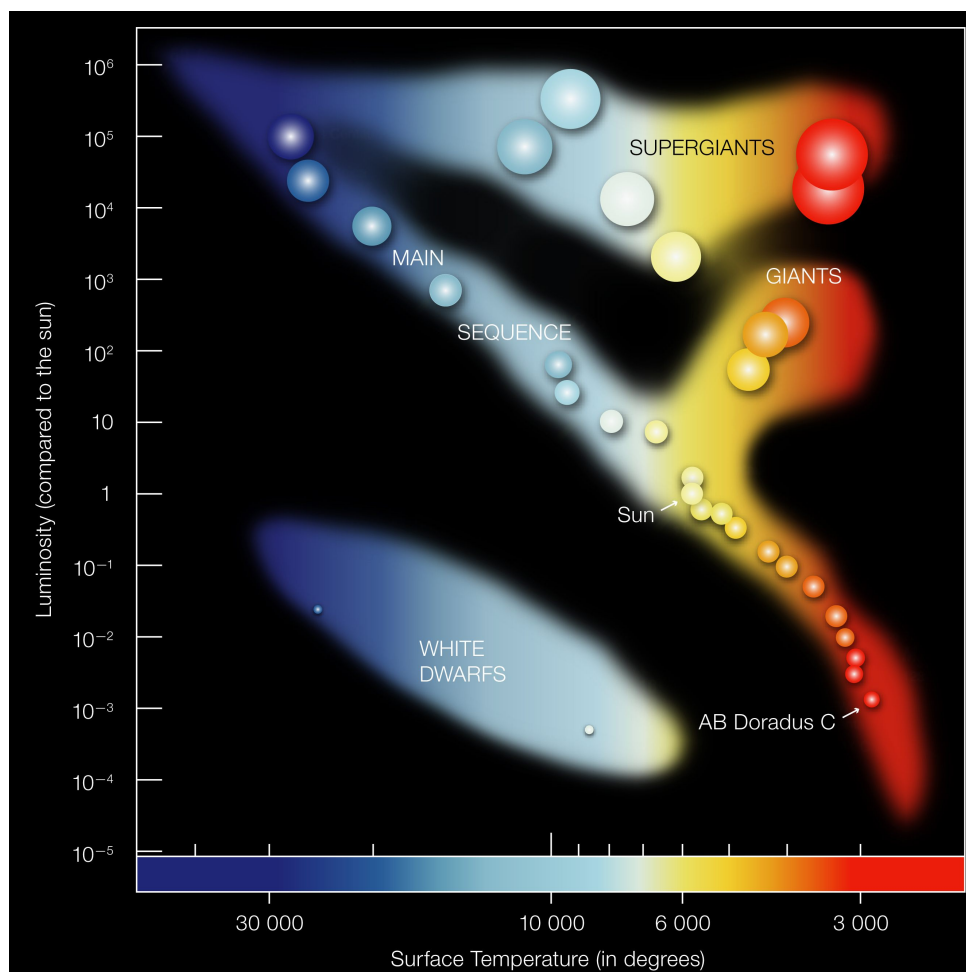


Figura 4.1.2: Diagrama de Hertzsprung-Russel (H-R)

El diagrama representa la temperatura efectiva de las estrellas frente a su luminosidad. La posición de estos cuerpos celestes en el diagrama otorga información sobre la etapa evolutiva en la que se encuentra e información de su masa. La región que se extiende desde la parte inferior derecha hasta la parte superior izquierda se conoce como Secuencia Principal.

Fuente: Obtenida de [13].

III, subgigantes para estrellas tipo *IV*, la clase *V* estrellas de la Secuencia Principal, clase *VI* se designan a estrellas subenanas y de clase *VII* a las enanas blancas.

Para ejemplificar la clasificación estelar designada en nuestra estrella más cercana el Sol; la cual, al presentar un proceso de fusión de hidrógeno en helio en su núcleo y estar dentro de la región de Secuencia Principal del diagrama H-R en su estado evolutivo, esta se describe como una estrella *G2V* [6].

4.1.3. Caracterización estelar

Existen diversas técnicas para obtener parámetros importantes en una estrella, tales como la temperatura efectiva, el radio, la masa, luminosidad y edad de estos cuerpos celestes. Entre estos se encuentran:

- *Fotometría*

Una técnica fundamental para desentrañar las características de las estrellas es la fotometría [6]. Este método se centra en medir con alta precisión el flujo luminoso que es recibido de una estrella, lo que en esencia implica registrar la cantidad de fotones que impactan en un detector sensible como un Dispositivo de Carga Acoplada (CCD) y analizar cómo esta emisión de luz varía a lo largo del tiempo [6]. Para estudiar propiedades específicas, se interponen filtros ópticos que seleccionan rangos concretos del espectro electromagnético; de esta manera se permite determinar la magnitud de la estrella, o en otras palabras obtener el brillo aparente, en una banda espectral definida [1]. Así mismo dicha magnitud observada, una vez corregida por factores como la distancia guarda una relación directa con la luminosidad intrínseca del astro [6].

A partir de estas mediciones, la diferencia entre las magnitudes obtenidas en dos bandas espectrales distintas proporciona el 'color' de la estrella que está estrechamente vinculado con su temperatura efectiva. Al representar gráficamente estos colores frente a las magnitudes, se construyen los conocidos diagramas color-magnitud, herramientas que ofrecen una primera y valiosa aproximación al tipo espectral y al estado evolutivo de una estrella. Adicionalmente, la fotometría también es crucial para investigar la actividad magnética estelar, por ejemplo, las sutiles modulaciones en el brillo que son causadas por la presencia y rotación de manchas en la superficie estelar. El estudio de estas variaciones es importante, ya que pueden llegar a mimetizar las señales producidas por el tránsito de exoplanetas o incluso afectar las mediciones de velocidad radial empleadas en su detección [6].

- *Astrometría*

La astrometría es una disciplina encargada de mapear el firmamento con el objetivo de determinar las posiciones estelares; sin embargo más allá de la mera localización estelar, la astrometría contemporánea permite rastrear con precisión los movimientos estelares a través del tiempo, abarcando la medición de movimientos propios que revelan el desplazamiento real de las estrellas en el espacio galáctico, así como la detección de mínimas perturbaciones en sus trayectorias que indican compañeros orbitales invisibles, tales como estrellas o planetas [6]. El método paradigmático para medir tales distancias es el cálculo del paralaje, un desplazamiento aparente en la posición de una estrella cercana.

- *Espectroscopía*

El concepto de espectroscopía puede entenderse desde el fenómeno de la dispersión de la luz del sol en un prisma. Las técnicas de espectroscopía permiten conocer de qué están compuestas las estrellas y su movimiento propio, por medio de la emisión y absorción de los espectros en base a su longitud de onda. Así pues es posible obtener la composición química de la superficie de una estrella, a través de la radiación de la luz para diferentes bandas del espectro electromagnético [6].

Al concluir esta revisión de las metodologías clave para la caracterización estelar, se ha mencionado cómo la fotometría permite cuantificar el brillo y el color de las estrellas, cómo la astrometría determina con precisión su posición y distancia, y cómo la espectroscopía desentraña la composición química y las condiciones físicas de sus atmósferas. Al trabajar en conjunto las técnicas mencionadas, proporcionan una visión externa y detallada de los astros. Sin embargo, para trascender esta perspectiva y explorar la estructura interna, la

dinámica y los procesos evolutivos que ocurren en las profundidades estelares, es necesario comprender la Astrosismología.

4.2. Definición de Astrosismología

La Astrosismología, una rama relativamente joven y que ha tomado protagonismo dentro de la astrofísica [14], brinda una poderosa ventana para extraer información crucial sobre las estrellas. Mediante el análisis meticuloso de las frecuencias y otras propiedades de las sutiles oscilaciones observadas en la superficie estelar, la Astrosismología permite sondear tanto la estructura interna como la compleja dinámica que rige estos cuerpos celestes. De esta manera, permite determinar parámetros estelares fundamentales con una precisión sin precedentes, incluyendo la masa, el radio, la densidad promedio, la edad, los periodos de rotación interna y composición química detallada [9].

El interior de una estrella es un sistema complejo, inaccesible a la exploración directa. Allí, la intensa actividad de fusión nuclear desata grandes cantidades de energía, las temperaturas se elevan a millones de grados Celsius y las presiones alcanzan valores colosales, incrementándose progresivamente hacia el núcleo [15]. Estas condiciones inhóspitas hacen que cualquier intento de enviar sondas o instrumentos para estudiar de cerca sus superficies, y en menor medida sus profundidades, sea una tarea inviable.

Ante este desafío, la Astrosismología emerge como un ingenioso método indirecto para explorar las profundidades estelares. Su principio se basa en el estudio de las pulsaciones globales de las estrellas las cuales, son la manifestación superficial de ondas que viajan y resuenan en el interior estelar. La propagación de estas ondas por las distintas capas internas, pueden interferir constructivamente consigo mismas, dando lugar a **modos resonantes** de oscilación (Ver Capítulo 5 para mayor información). Estas resonancias se traducen en patrones característicos de expansión y contracción en la fotosfera estelar, que son percibidas como diminutas variaciones periódicas en el brillo o en la velocidad radial de la estrella.

El concepto de Astrosismología encuentra una elocuente analogía en la música. De forma similar a como el sonido y timbre únicos de un instrumento musical emergen de la superposición de sus modos naturales de vibración o armónicos, cada estrella posee una 'melodía' característica, resultado de la combinación de sus propios modos de oscilación [2]. El quehacer fundamental de la técnica de caracterización estelar que se estudiará es, por tanto, analizar la 'música estelar' para revelar la física de su inaccesible interior.

4.3. Breve historia del desarrollo de la Astrosismología

Muchos autores que han trabajado en el área de la Astrosismología, ocasionalmente mencionan o comparan la ciencia que estudia las estrellas a los sonidos musicales de los instrumentos. Esto como se miró anteriormente, se debe a que los modos normales de frecuencia en los que oscila una estrella, pueden interpretarse como un sonido [8]. Sin embargo, ya existía un concepto semejante al que se describe tiempo atrás. En el Siglo V AC en la antigua Grecia, filósofos como los Pitagóricos, un pequeño grupo de seguidores de Pythagoras de Sálomos (569-475 AC) que junto a su maestro, buscaban entender el funcionamiento del mundo que les rodea, por medio de la razón. En cuestión, se creía que la Tierra era una esfera que flotaba libremente al igual que otros cuerpos celestes, y el movimiento del Sol, las estrellas, los planetas y la Luna generaban sonidos musicales [16].

Tiempo después Johannes Kepler (1571-1630) pasó muchos años en la búsqueda de comprender la naturaleza de los movimientos planetarios en términos de armonías musicales. Su tiempo de investigación le permitió afirmar que ningún sonido se emitía de cuerpos celestes, pero mantenía la idea de que estos están modulados respecto a proporciones armónicas [2].

De manera contemporánea a Kepler, se empezó a observar cada vez más estrellas que variaban en su brillo. Esto sería importante entender puesto que en la antigüedad se consideraba que las estrellas permanecían inmutables en el espacio, sin cambios en la brillantez; siendo la primera de estas estrellas variables *novae* localizada en la Nebulosa del Cangrejo en el año 1054.

En 1572 el astrónomo danés Tycho Brahe se percató del mismo fenómeno en una estrella la cual posteriormente se conocería como N1572 o supernova de Tycho. Años más tarde en 1596 se descubrió la estrella Ceti (Mira) por el holandés David Fabricius y en 1667 β Persei (Algol), descubierta por el astrónomo Geminiano Montanari.

El estudio de la variabilidad estelar fue un tema de interés para los astrónomos de la época del renacimiento y ya para la fecha de 1786, se realizó una recopilación de las estrellas que habían sido captadas con el mencionado comportamiento. Entre ellos, 12 objetos variables fueron registrados. Sin embargo no fue sino hasta 1873 que se utilizaron técnicas de caracterización estelar más avanzadas; entre ellas, Goodricke realizó la primera medición fotométrica de la variabilidad en la estrella Algol, consiguiendo un método de detección que sería altamente efectivo para el estudio de mencionadas estrellas. Dicho registro fotográfico de variaciones de espectros estelares favoreció la identificación de muchos otros cuerpos celestes, lo cuál más adelante se vería reflejado al ampliar el catálogo de estrellas variables, integrándose un gran número de astrónomos que por medio de asociaciones de investigación como: The British Astronomical Association en 1890 y The American Association of Variable Star Observers, hicieron un llamamiento general en esta nueva búsqueda a todos aquellos interesados [4].

En 1907 con el uso del fotómetro de selenio y en 1915 con el desarrollo de la celda fotoeléctrica, la variabilidad de las estrellas mediante señales eléctricas, iba a cambiar por completo la detección de fotones por medio del efecto fotoeléctrico, dando lugar a una nueva era. La mejora en la instrumentación no solo aumentó la detección de señales en estrellas variables, sino también fue posible el descubrimiento de otras estrellas más, como los astros Ap de rápida oscilación en el año 1986 [6].

A inicios del siglo XXI, por medio de innovaciones tecnológicas, se da lugar el lanzamiento de satélites capaces de observar en el espacio, lo que reducía ampliamente el ruido al momento de tomar o captar señales provenientes de una estrella [4].

Para ese entonces, 40 000 estrellas variables ya habían sido catalogadas y nuevas misiones espaciales buscaban detectar de igual forma sismos en dichas estrellas [4].

4.3.1. Astrosismología desde el espacio

El lanzamiento de misiones espaciales en el siglo XXI, contribuyó en gran medida a recopilar datos provenientes de estrellas objetivo; inspirando a muchos investigadores realizar nuevos descubrimientos y un fortalecimiento de conceptos previos obtenidos de forma práctica y teórica sobre las estrellas. Los telescopios en órbita alrededor de la tierra son capaces de obtener observaciones continuas de las estrellas; es decir, en ausencia de huecos en las curvas de luz que, facilitan cálculos más precisos de frecuencias de oscilación y de esta manera un modelado de las pulsaciones estelares. Entre estas misiones se tiene:

4.3. BREVE HISTORIA DEL DESARROLLO DE LA ASTROSISMOLOGÍA

- *MOST*

El satélite fotométrico MOST (Microvariability and Oscillations of STars) lanzado en junio de 2003, fue la primera misión astrosísmica en realizarse. En su tiempo de operación fue capaz de obtener mas de 850 estrellas secundarias en un poco mas de 64 campañas primarias, entre estas estrellas, ceca de 180 fueron estrellas variables, mas de la mitad del tipo variables pulsantes. Esta misión contribuyó en la detección de modos- p en estrellas tipo solar como las gigantes rojas, gigantes amarillas, α Cen A y B, así como también en estrellas de secuencia principal, roAp y δ Scuti [7], [17].

- *CoRoT*

La misión CoRoT (Convection, Rotation and Planetary Transits) fue lanzada en 2006 por la Agencia Espacial Europea, con el objetivo de detectar exoplanetas y estudiar la Astrosismología estelar. En esta misión se obtuvieron valiosos resultados en un amplio rango de estrellas desde tipo solar hasta estrellas de gran masa. Esta misión tuvo una duración nominal de 2.5 años; sin embargo debido al éxito que tuvo y buena salud del satélite, esta pudo extenderse hasta junio de 2012 [17].

- *Kepler*

Kepler fue una misión de la NASA lanzada en el año 2009 que tuvo como objetivo científico principal el descubrimiento de exoplanetas. Durante cuatro años observó la misma franja de cielo septentrional en la que fue capaz de desvelar alrededor de unos 2 300 planetas confirmados [18]. Los datos de Kepler mediante fotometría precisa, fueron igualmente usados para un estudio sísmico de las estrellas de dichos planetas; en particular para un gran número de estrellas tipo solar. Estos estudios proporcionaron un mayor entendimiento en la física que gobierna la evolución del Sol y otras estrellas; así como sus ciclos de actividad, convección cercana a la superficie y la rotación. Debido algunas fallas internas, la misión original funcionó hasta el año 2013, donde luego de unas adaptaciones mediante la misión K2, esta pudo extenderse hasta finalizar en el año 2018 [17].

- *TESS*

Sucesora de la misión Kepler, la misión TESS (Transiting Exoplanet Survey Satellite) de la NASA, tiene como objetivo principal descubrir exoplanetas en tránsito alrededor de las estrellas más brillantes y cercanas a la Tierra [19]. Durante sus dos primeros años fue capaz de monitorear la luminosidad de mas de 200 000 estrellas y un estimado de 1 900 candidatos a exoplanetas [20].

La contribución de TESS en el área de la Astrosismología abarca desde una muestra mucho mas grande de estrellas en comparación con misiones como Kepler y Corot, detección de sus oscilaciones que han permitido medir parámetros como $\Delta\nu$ (separación de frecuencias) y de otras propiedades estelares. Esta misión sigue en curso aún en la actualidad, ampliando nuestra comprensión de las estrellas [21].

También existen misiones futuras que se esperan puedan ser de utilidad para el descubrimiento y caracterización de nuevas estrellas. Entre estas misiones se encuentra la de la Agencia Espacial Europea, PLATO (PLanetary Transits and Oscillations of Stars) que pretende ser lanzada para 2026. Es importante mencionar que los datos de estrellas en misiones que ya culminaron como es el caso de Kepler, siguen siendo útiles y estudiadas por muchos investigadores en el área de Astrosismología; y así mismo será útil en el desarrollo de este trabajo de grado.

Capítulo 5

Oscilaciones estelares

A primera vista, se puede pensar que las estrellas son objetos estáticos; mas sin embargo, como se discute a lo largo del Capítulo 4, estos cuerpos celestes experimentan grandes cambios en su estructura interna en el trayecto de su evolución.

En este capítulo se aborda la definición de las oscilaciones estelares, las ecuaciones que describen sus movimientos y los distintos modos de oscilación que son esenciales para el análisis en Astrosismología.

5.1. El fenómeno de las pulsaciones estelares

En términos generales, la estrella es un sistema sumamente estable, donde la energía producida por las reacciones nucleares se disipa en forma de radiación desde su superficie (equilibrio térmico). Un sistema con este tipo de comportamiento también se encuentra en equilibrio mecánico, lo que significa que en cada lugar de la estrella la gravedad equilibra el gradiente de presión. De esta manera, la estrella puede expandirse si la presión aumenta o contraerse si sobrepasa dicho gradiente [5].

En determinadas situaciones, una pequeña perturbación en una estrella puede expandirse con el paso del tiempo y alcanzar la magnitud suficiente para ser observada, generando una estrella pulsante. Dichas pulsaciones pueden manifestarse mediante cambios periódicos en la luminosidad o a través de variaciones de las líneas espectrales. Estas señales observables son el resultado directo de las alteraciones físicas que experimenta la estrella, tales como cambios en su radio estelar, la temperatura superficial, el área y la orientación de la superficie estelar, así como a una combinación de todas ellas [5].

El fenómeno de las oscilaciones no es ajeno a fenómenos físicos que ocurren en la Tierra, entre ellos se observa en las olas que surcan los océanos, donde la gravedad actúa como fuerza restauradora; además en las ondas de sonido que se propagan por el aire que son impulsadas por gradientes de presión. Las oscilaciones estelares, impulsadas por estos mismos dos tipos de fuerzas fundamentales, los gradientes de presión y gravedad (o más precisamente, flotabilidad), comparten una naturaleza análoga con sus contrapartes terrestres. No obstante, el entorno estelar introduce complejidades y particularidades en su descripción. Una diferencia importante radica en que, en muchas estrellas pulsantes las oscilaciones no son simplemente una respuesta pasiva a una perturbación externa, sino que pueden ser autoexcitadas. Un ejemplo de lo anterior mencionado, ocurre cuando procesos físicos internos convierten eficientemente parte de la energía térmica de la estrella en la energía cinética de las pulsaciones, alimentando y manteniendo las vibraciones de forma

5.2. DEFINICIÓN DE OSCILACIONES ESTELARES

continua. Estos son los denominados 'mecanismos de excitación', que se describirán en mayor detalle más adelante [5].

5.2. Definición de oscilaciones estelares

En física, las oscilaciones son perturbaciones periódicas en el estado de un sistema, las cuales se repiten en el tiempo. Muy a menudo estas oscilaciones siguen patrones predecibles, lo que permite su modelado y análisis mediante métodos matemáticos.

Al extenderse a lo largo de un medio, estas oscilaciones pueden manifestarse como ondas que permiten que la perturbación viaje y se distribuya en el espacio. En una dimensión se puede visualizar este fenómeno en una cuerda vibrante, fija en ambos extremos como se aprecia en la Figura A.I.1 sus tres modos de oscilación dependen de sus propiedades físicas, como: longitud, tensión y densidad uniforme a lo largo de su extensión [2].

En dos dimensiones se puede entender las oscilaciones mediante el ejemplo de las vibraciones que se producen en un parche de tambor, en donde existen nodos en dos direcciones ortogonales (ver Figura A.I.2). El conjunto de modos que se puede apreciar tiene nodos en forma de círculos concéntricos en el parche del tambor. En este caso el modo fundamental puede percibirse como el movimiento hacia arriba y hacia abajo de este parche. Sus bordes serán un nodo y su amplitud máxima se encuentra en el centro, en cuyo caso es un antinodo. El primer y segundo armónico radial tendrán uno y dos círculos concéntricos respectivamente. Sin embargo; la segunda dirección de nodos da lugar a los modos no radiales. Sus nodos se observan como líneas que atraviesan el parche del tambor generando espacios donde la perturbación oscila en anti fase. De esta manera se generan patrones de vibración complejos que resultan en distintos sonidos y frecuencias [2].

En modelos estelares, una aproximación inicial y simplificada de una estrella, consiste en considerarla como una esfera de gas auto gravitante, la cual se encuentra inmersa en un campo de radiación. De esta manera, al representar una estrella en tres dimensiones, sus modos naturales de oscilación tendrán nodos en tres direcciones ortogonales (r, θ, ϕ) donde r refleja la distancia al centro, θ es la co-latitud y ϕ la longitud [2]. Para este tipo de configuración, las soluciones de las ecuaciones de movimiento tendrán desplazamientos $(\xi_r, \xi_\theta, \xi_\phi)$ en las direcciones anteriormente mencionadas y estarán dadas en función del tiempo (t), así:

$$\xi_r(r, \theta, \phi, t) = a(r)Y_l^m(\theta, \phi)e^{-i2\pi\nu t} \quad (5.2.1a)$$

$$\xi_\theta(r, \theta, \phi, t) = b(r)\frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta}e^{-i2\pi\nu t} \quad (5.2.1b)$$

$$\xi_\phi(r, \theta, \phi, t) = \frac{c(r)}{\sin\theta}\frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi}e^{-i2\pi\nu t} \quad (5.2.1c)$$

Donde ν es la frecuencia de oscilación, la cual está relacionada con: $w = 2\pi\nu$. Además $Y_l^m(\theta, \phi)$ son los armónicos esféricos, los cuales pueden expresarse por medio de la siguiente ecuación:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \quad (5.2.2)$$

Así, se puede apreciar cómo las variables angulares θ y ϕ , son dependientes para los modos de oscilación de una estrella esférica y simétrica que se encuentra en configuración de equilibrio.

El término $P_l^m(\cos\theta)$ de la ecuación 5.2.2, son los polinomios descritos como:

$$P_l^m(\cos\theta) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1 - \cos^2\theta)^{\frac{m}{2}} \frac{d^{l+m}}{d\cos^{l+m}\theta} (\cos^2\theta - 1)^l, \quad (5.2.3)$$

Además de 5.2.2, el término en raíz cuadrada hace referencia a una constante de normalización (c_{lm}) la cual garantiza que la integral de $|Y_{lm}|^2$ sobre la esfera unitaria sea igual a 1.

Una descripción más detallada de las ecuaciones anteriormente presentadas así como los conceptos de resonancia y ondas estacionarias, pueden revisarse en el apéndice A.

5.3. Modos de oscilación

Los parámetros n, l, m de la ecuación 5.2.2 son tres series de números cuánticos enteros, los cuales permiten caracterizar los modos normales de oscilación de una estrella.

- **n (Orden del modo):** indica el número de nodos, puntos donde la amplitud de oscilación es cero que existen desde el centro estelar hasta su superficie [3].
- **l (Grado del modo):** da información superficial del modo, en particular el parámetro "l" indica el número de líneas que dividen la superficie estelar para oscilar en fases opuestas [3].
- **m (Grado del modo):** al igual que "l", brinda información superficial del modo. Sin embargo, para ser más precisos "m" indica cuántos nodos superficiales de "l" son líneas de longitud [3].

Es importante conocer que para el caso de un cuerpo rotando, la simetría se rompe; por lo que un modo con un determinado valor de l se desdobra en $2l + 1$ modos, con un distinto valor de m cada uno [3, 5, 22].

Los modos con $m = 0$ se llaman *zonales o asimétricos*, y las líneas nodales son líneas de latitud, los modos con $l = |m|$ se llaman *sectoriales*, y las líneas nodales son líneas de longitud¹. Al resto de modos se les denomina *teserales* [3].

Existen dos grupos de modos de pulsación en la teoría de oscilaciones [2, 3], entre estos destacan las pulsaciones radiales y no radiales que se describen a continuación.

5.3.1. Pulsaciones radiales

Las pulsaciones radiales, son oscilaciones rítmicas mediante el cual la estrella se expande y contrae manteniendo simetría esférica.

En ellas se producen movimientos radiales en los que es posible expresar las oscilaciones en parámetros unidimensionales donde $l = 0$ y $m = 0$. Este tipo de oscilaciones están caracterizadas por un número de

¹Las líneas nodales son líneas que pasan a través del eje de rotación de la estrella

5.3. MODOS DE OSCILACIÓN

onda radial (n), el cual brinda información sobre el número de nodos que hay entre el centro y la superficie estelar, para sus funciones propias ². De esta manera, para $n = 0$ (*modo radial fundamental*), no se tendrá nodos entre el centro de la estrella y su atmósfera, generando un movimiento periódico de todos los elementos de masa en la estrella en la misma dirección. Para $n = 1$ se obtiene el primer sobretono radial, el cual posee un nodo en el interior de la estrella y su comportamiento es reflejado en que los elementos de masa en ambos lados del nodo, se mueven en direcciones opuestas. De esta manera, modos con n nodos se denotan sobretonos radiales n -ésimos. El modo radial es el modo habitual de pulsación de estrellas variables como Cefeidas y estrellas RR Lyrae. Además, pueden percibirse en estrellas masivas como las conocidas β Cephei [3].

5.3.2. Pulsaciones no radiales

Cuando el tipo de oscilaciones que se producen dentro de una estrella contiene movimientos tanto radiales como transversales ($l \neq 0, m \neq 0$) se entiende como una pulsación no radial, donde la simetría esférica no se conserva. De esta manera, es necesario considerar los tres parámetros (n, l, m) para caracterizar la oscilación [3].

La dinámica de las vibraciones en el interior de estrellas que poseen este tipo de comportamiento, se verá reflejado en distintas regiones en las que estas podrán moverse periódicamente hacia el interior, mientras que otras lo harán simultáneamente hacia el exterior.

Los límites entre diferentes regiones donde el movimiento ocurre en direcciones opuestas, serán determinados por las líneas nodales y superficiales [3]. En la Figura 5.3.1, se muestran cuatro modos no radiales vistos desde distintos ángulos de inclinación.

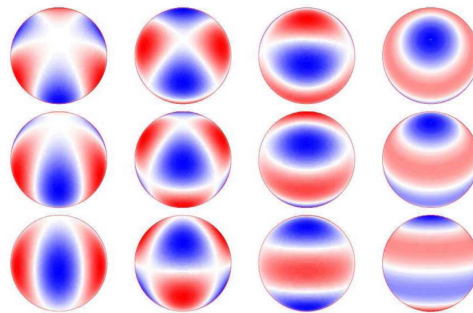


Figura 5.3.1: Modos no-radiales

Modos de oscilación donde $l = 3$. Las filas indican modos con distintos ángulos de inclinación: 30 grados, 60 grados y 90 grados, para la primera, segunda y tercera fila, respectivamente. Las bandas blancas indican posiciones donde el vector desplazamiento $\xi_r = 0$. Las regiones en rojo y azul indican las regiones de las estrellas que presentan movimiento hacia adentro (afuera) o calentándose (enfriándose). Se muestran de izquierda a derecha los modos azimutales, con un comportamiento de decrecimiento desde la columna 1 ($m = 3$) hasta ser cero en la columna 4.

Fuente: Tomada de [3].

²Una función propia o eigenfunción, es una respuesta matemática que ilustra los patrones espaciales de un tipo de oscilación particular en la estrella.

Se puede entender las oscilaciones radiales como un caso particular del tipo de oscilación no radial, siendo $l = 0$. Para todos los modos que satisfacen la desigualdad $l \geq 1$, se considera modos de pulsación no radial. Así mismo, a los polos $l = 1$ y $l = 2$ se les denomina modo dipolar y cuadripolar respectivamente. Las pulsaciones no radiales se pueden categorizar principalmente según la fuerza restauradora dominante que las origina, entre estas se encuentran:

Modos de presión (P)

Los modos p , también conocidos como modos de presión o modos acústicos, son la principal fuerza restauradora de una estrella que está perturbada de su equilibrio. Este tipo de ondas son movimientos verticales de gas principalmente. En el caso del Sol provocan un espectro de oscilaciones de aproximadamente cinco minutos obteniendo amplitudes máximas en la región de $3\,300\,\mu\text{Hz}$. Las ondas acústicas o de presión se propagan en el interior de las estrellas y al hacerlo, son refractadas dependiendo del grado angular l que estas posean, teniendo en cuenta que la velocidad del sonido aumenta [6].

La ecuación 5.3.1, describe por medio del radio r_t , la capa más profunda que las pulsaciones pueden alcanzar³.

$$r_t = c_t \frac{L}{2\pi\nu_{n,l}}, \quad (5.3.1)$$

Donde $L = l + 1/2$, $\nu_{n,l}$ es la frecuencia del modo y $c_t \equiv c_t(r_t)$ se trata de la velocidad del sonido para el radio r_t [6]. Por tanto, se percibe que el punto de retorno se aproxima más en la superficie, en tanto el grado angular aumenta. Como ejemplo, para los modos radiales $l = 0$, su punto de retorno interno se encontrará en el centro; en tal caso las ondas lo atraviesan. Mientras, para un mismo grado angular, los modos con mayor frecuencia son capaces de viajar más profundamente en la estrella [6].

Modos de gravedad (g)

En el caso de los modos g o modos gravitatorios transversales, la flotabilidad es la fuerza de restauración y los movimientos de gas son principalmente horizontales. Si se los compara con los modos acústicos, los modos g están localizados en menores frecuencias. La naturaleza de estos modos gravitatorios, resulta en que se propagan en regiones radiativas de la estrella; sin embargo, al pasar a la zona convectiva, transitan momentáneamente hasta desaparecer aumentando su dificultad a la hora de detectarlas [6].

Modos mixtos

Las pulsaciones mixtas son producto del acoplamiento entre las cavidades de modos p y modos g , que se presentan durante la evolución de una estrella. Por ejemplo, para una estrella como el Sol los modos g se mueven hacia frecuencias más altas, mientras que los modos p harán lo contrario, lo que resulta en una interacción mutua [6].

Dichos modos de pulsación son importantes ya que pueden propagarse como ondas tanto en regiones convectivas y radiativas, con nodos de presión y gravitatorios respectivamente. De esta manera son capaces de

³El radio r_t es comúnmente conocido como punto de retorno interno.

5.4. DESARROLLO TEÓRICO DE LAS OSCILACIONES NO RADIALES

llegar desde el núcleo interno de la estrella hasta su superficie con una amplitud lo suficientemente amplia para ser identificada con facilidad.

En un principio, los modos mixtos fueron observados en estrellas tipo solar, en la rama de estrellas que se conocen como gigantes rojas.

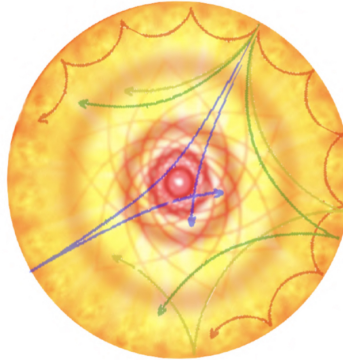


Figura 5.3.2: Representación del interior solar con las zonas radiativa y convectiva

En la Figura, se ilustra la dinámica de la propagación de los diversos modos de oscilación en una estrella no radial como el Sol.

Fuente: Obtenida de [6].

En la Figura 5.3.2, se aprecia una representación artística de las regiones radiativas y convectivas del Sol y como ocurre la dinámica de propagación de los distintos modos en la estrella. Las líneas azul y verde hacen referencia a la propagación de modos acústicos de bajo grado por todo el Sol, mientras que modos acústicos de alto grado lo harán en las capas con mayor proximidad a la superficie, descritas en líneas en color naranja. Así mismo, las pulsaciones que se desplazan en el interior de la estrella, específicamente en la zona radiativa, corresponden a líneas de color rojo [6].

5.4. Desarrollo teórico de las oscilaciones no radiales

En la sección anterior (Sección 5.3), se introdujeron los distintos tipos de modos de oscilación estelar, incluyendo las pulsaciones radiales ($l = 0$) y las no radiales ($l > 0$), estas últimas categorizadas principalmente en modos de presión (p) y de gravedad (g). Esta sección profundiza en el marco teórico que describe cómo estos modos no radiales surgen a partir de los principios físicos fundamentales que gobiernan el interior estelar, además cómo se determinan sus frecuencias características.

El punto de partida para un tratamiento riguroso de las pulsaciones estelares son las *ecuaciones de la hidrodinámica*, que describen la conservación de masa, momento y energía, junto con la ecuación de Poisson para el potencial gravitatorio (como se expone en el Apéndice A.1.1). Para el estudio de las oscilaciones de pequeña amplitud, las mencionadas ecuaciones se *linealizan*, considerando pequeñas perturbaciones alrededor de un estado de equilibrio esféricamente simétrico y no rotante. Este proceso (detallado en Apéndice B) conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales lineales para las variables perturbadas (como la densidad ρ' , la presión P' , el potencial gravitatorio ϕ' y el vector velocidad $\vec{v}$).

Para buscar soluciones modales a este sistema linealizado es importante asumir una dependencia temporal armónica ($e^{i\omega t}$) y una dependencia angular descrita por los *armónicos esféricos* $Y_l^m(\theta, \phi)$, cuya forma y pro-

piedades se presentaron en la Sección 5.2 (Ecuación (5.2.2)). Como se vio, el vector desplazamiento $\vec{\xi}$ para un modo (n, l, m) se puede expresar a través de sus componentes en Ecuaciones (5.2.1c)). La sustitución de estas formas en las ecuaciones hidrodinámicas linealizadas y la aplicación de la aproximación adiabática (donde se asume que no hay intercambio de calor durante la oscilación) reduce el problema a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias para dichas amplitudes radiales. Para las oscilaciones adiabáticas no radiales ($l > 0$), este sistema es típicamente de cuarto orden, pero puede escribirse como un conjunto de ecuaciones de primer orden. Un ejemplo de tal sistema (simplificado) es el siguiente [5, 23]:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_l^2}{\omega^2}\right) \frac{P'}{\rho c_s^2} = \frac{l(l+1)}{\omega^2 r^2} \phi' \quad (5.4.1a)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} P' + (N^2 - \omega^2) \xi_r = -\frac{d\phi'}{dr} \quad (5.4.1b)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi' - 4\pi G \left(\frac{P'}{c_s^2} + \rho \frac{N^2}{g} \xi_r \right) = 0 \quad (5.4.1c)$$

donde $c_s^2 = \Gamma_1 P / \rho$ es la velocidad del sonido adiabática al cuadrado, y N^2 y L_l^2 son los cuadrados de la frecuencia de Brunt-Väisälä y la frecuencia de Lamb, respectivamente:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) \quad (5.4.2)$$

$$L_l^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} c_s^2. \quad (5.4.3)$$

Estas dos frecuencias características son fundamentales dado que N^2 mide la estabilidad convectiva y es crucial para los modos g, mientras que L_l^2 está asociada a la propagación de ondas acústicas y es relevante para los modos p.

El sistema de Ecuaciones (5.4.1), junto con las condiciones de frontera apropiadas, constituye un problema de valores propios (o eigenvalores). Para un grado esférico l dado, solo existen soluciones no triviales para un conjunto discreto de valores de ω^2 . Estos son los *autovalores*, que corresponden a los cuadrados de las frecuencias propias de oscilación de los modos (n, l, m) . A cada autovalor $\omega_{n,l}^2$ le corresponde un conjunto de *autofunciones* (las amplitudes radiales $\xi_r(r)$, $P'(r)$, $\phi'(r)$ normalizadas de alguna manera), que permite describir la estructura radial de ese modo de oscilación particular, donde n es el orden radial.

La naturaleza de las soluciones de este problema de eigenvalores da lugar a las dos familias principales de modos no radiales que se introdujeron en la Sección 5.3:

- **Modos p (presión):** tienen altas frecuencias ($\omega^2 > L_l^2$ y $\omega^2 > N^2$ en gran parte de la región de propagación). Son ondas acústicas donde la fuerza restauradora principal es la presión.
- **Modos g (gravedad):** tienen bajas frecuencias ($\omega^2 < L_l^2$ y $\omega^2 < N^2$ en gran parte de la región de propagación). Son ondas de gravedad internas donde la fuerza restauradora principal es la flotabilidad en regiones con estratificación estable ($N^2 > 0$).
- **Modos mixtos:** en estrellas evolucionadas, pueden existir modos que se comportan como modos g en el interior profundo y como modos p en las capas externas.

Un análisis más detallado de las Ecuaciones (5.4.1) en la aproximación local (WKB) permite derivar una relación de dispersión $\omega(\vec{k})$ que ilustra explícitamente cómo las propiedades del medio (N^2 , c_s^2 , L_l^2) dictan las frecuencias de los modos p y g [5].

Por lo tanto, el formalismo de la hidrodinámica linealizada y la teoría de problemas de eigenvalores no solo confirman la existencia de los modos p y g , sino que también proporcionan el medio para calcular sus frecuencias y la estructura de sus eigenfunciones para un modelo estelar dado, si así se requiriese.

5.5. Mecanismos de excitación

Al momento de presentarse el fenómeno de pulsación en una estrella, estas pueden experimentar un comportamiento de hinchazón, contracción, calentamiento o enfriamiento [7]. Por cada ciclo de pulsación existe una pérdida de energía en la mayor parte del interior de una estrella, lo que se puede entender como un comportamiento de amortiguamiento de pulsación debido a su volumen [7].

Distintos tipos de estrellas pueden presentar diferentes mecanismos de excitación en sus oscilaciones. Así también, es posible que varios de estos mecanismos se presenten en una misma estrella [2].

Un mecanismo común que describe de forma general las autopulsaciones en una estrella es el de "*motor térmico*"; en el; se refiere al proceso generado al impulsar la oscilación mediante ganancia de calor. Se da generalmente en la capa radial de la estrella durante la compresión de un ciclo de pulsación. Las otras capas pierden calor durante el proceso y amortiguando el movimiento. De esta forma, se convierte energía térmica en energía mecánica, simulando su funcionamiento al de un motor térmico [7].

Sin embargo; para estrellas pulsantes o de tipo solar, existen tres mecanismos de conducción principales que pueden presentarse. De forma descriptiva estas serían:

- *Mecanismo $\kappa - \gamma$:*

También conocido como válvula de Eddington, es usado para explicar la variabilidad de una gran cantidad de estrellas pulsantes [8]. En el involucra un mecanismo de opacidad (κ) y un mecanismo de almacenamiento de energía de ionización (γ) [24].

Durante el proceso, al momento de incrementarse el flujo de radiación saliente, su temperatura también lo hará provocando disminución en la opacidad y un escape libre de radiación [24]. Por otro lado, en regiones de ionización parcial, el aumento en el flujo de radiación puede ser absorbido, incrementando la fracción de iones presentes en lugar de darse aumento en la temperatura del material en cuestión. Provocando, un bloqueo en el flujo de energía radiativa saliente, en donde su energía de ionización queda almacenada (mecanismo γ). Si una capa de la atmósfera se desplaza hacia el interior, esta se hará más densa y opaca, provocando una retención del flujo de energía, este fenómeno permite el incremento de temperatura y presión encargado de empujar la capa hacia afuera, enfriándose y continuando con el ciclo (mecanismo κ). Estos procesos se presentan en capas por debajo de la región de ionización He^+ [24].

- *Mecanismo convectivo:*

Similar al mecanismo $\kappa - \gamma$, la conducción convectiva se debe a que una región de la estrella actúa como válvula. En algunos ejemplos, la base de una zona en convección bloquea el flujo de radiación durante algún tiempo dentro de la estrella, permitiendo que la energía almacenada se libere cuando ocurre el estado de compresión en la fase de expansión posterior. Este mecanismo se presenta en estrellas enanas blancas de tipos espectrales DA y DB , en estrellas Doradas, así como también pueden estar involucrados parcialmente en estrellas pulsantes Mira y Cefeidas [8].



- *Mecanismo estocástico:*

Este tipo de mecanismo suele presentarse en estrellas como el Sol y de tipo solar; quienes a su vez poseen un comportamiento intrínsecamente estable cuyos mecanismos de pulsación no son considerados como autoexcitados. Pues ocurren de manera estocástica debido a la turbulencia en lugares de convección parciales [8].

En capas superficiales más externas, los intensos movimientos convectivos, son capaces de producir ruido acústico en una amplia variedad de frecuencias excitando de esta manera los modos de oscilación. En la superficie estelar existe una gran variedad de elementos convectivos que repercutirán en una excitación de naturaleza aleatoria y amplitudes de oscilación que varían altamente en el tiempo [8].

Capítulo 6

Estrellas pulsantes y de tipo solar

Tal y como se menciona en reiteradas ocasiones, las pulsaciones estelares proporcionan una herramienta importante al momento de caracterizar una estrella. En el presente capítulo se explora una clasificación y estudio de las propiedades para dos grandes categorías de estrellas en las que se centra el presente trabajo de grado.

6.1. Estrellas pulsantes clásicas

Las estrellas pulsantes clásicas comprenden una vasta y diversa familia de objetos celestes cuya variabilidad lumínica es intrínseca; es decir, originada por oscilaciones o pulsaciones radiales o no radiales, que son autoexcitadas y mantenidas por mecanismos termodinámicos operando en sus interiores. Estos mecanismos, como el **mecanismo $\kappa - \gamma$** (acumulación y liberación de energía en zonas de ionización parcial de elementos como el Hidrógeno y el Helio) o el **mecanismo convectivo** (en estrellas más masivas), fueron introducidos en la Sección 5.5. El estudio de las propiedades observables de estas pulsaciones, extraídas principalmente del análisis de sus curvas de luz, es fundamental no solo para su clasificación taxonómica sino también para la inferencia de sus parámetros físicos fundamentales. A diferencia de las estrellas con oscilaciones de tipo solar, las pulsantes clásicas suelen exhibir amplitudes de variación significativamente mayores (desde milimagnitudes hasta varias magnitudes), además sus períodos de oscilación muestran una alta coherencia a lo largo del tiempo [2].

6.1.1. Diversidad de estrellas pulsantes

Las estrellas pulsantes clásicas no se distribuyen de forma aleatoria en el diagrama de Hertzsprung-Russell (H-R), sino que ocupan regiones específicas donde las condiciones de temperatura, densidad y opacidad en sus envolturas son propicias para la activación de los mecanismos de excitación. Estas regiones se conocen como *frangas de inestabilidad*. La Figura 6.1.1 ilustra esquemáticamente las regiones que se mencionan.

Las principales clases de estrellas pulsantes clásicas, agrupadas según su tipo espectral, etapa evolutiva y mecanismo de pulsación, incluyen [2, 26]:

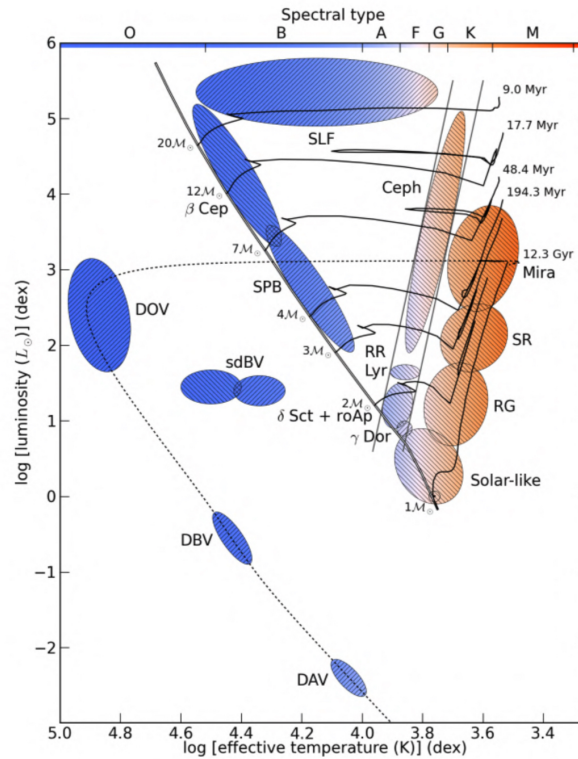


Figura 6.1.1: Diagrama H-R en estrellas pulsantes

El diagrama indica la posición de diferentes tipos de estrellas pulsantes. En este, los grupos de estrellas se encuentran abreviados por un tipo de nomenclatura común en astrofísica contemporánea [6]. Los modos de oscilación dominante en cada clase de estrella, se representan por medio de líneas que atraviesan las elipses. Entre estas, las barras verticales que se aprecian hacia un costado superior derecho del diagrama, indican modos de gravedad; los modos de presión se dirigen hacia la izquierda. Las líneas negras punteadas y continuas, hacen mención a pistas de modelos evolutivos estándar. La línea doble indica la secuencia principal de edad cero; mientras que por medio de trazos con líneas de color gris, representan los bordes de la franja de inestabilidad clásica.

Fuente: Obtenida de [6], adaptada de [25].

La franja de inestabilidad clásica

Es una región bastante estudiada, se extiende casi verticalmente en el diagrama H-R.

- **Cefeidas (Clásicas y de tipo II):** Son estrellas supergigantes (tipos espectrales F en el máximo de brillo, puede ir variando a G-K en el mínimo) muy luminosas.
 - *Cefeidas clásicas (Población I):* Jóvenes y masivas ($3 - 20 M_{\odot}$), cruzan la franja durante bucles azules en fases de quemado de Helio o en la AGB. Pulsan predominantemente en modos radiales con períodos de 1 a más de 100 días y amplitudes visuales de 0.1 a ~ 2 magnitudes.
 - *Cefeidas de tipo II:* Son estrellas mucho más viejas y menos masivas que las Cefeidas clásicas. Incluyen subtipos como W Virginis, BL Herculis y **RV Tauri**. Las RV Tauri son supergigantes (tipos F-G en máximo, K-M en mínimo) cuyas curvas de luz muestran mínimos primarios y

6.1. ESTRELLAS PULSANTES CLÁSICAS

secundarios alternantes, con períodos formales (entre dos mínimos primarios) de 30 a 150 días.

- **Estrellas RR Lyrae:** Son estrellas gigantes de población II, de baja masa ($\sim 0.7 M_{\odot}$), en la rama horizontal (quemando Helio central). Pulsan radialmente con períodos de ~ 0.2 a 1.2 días (aproximadamente 5 horas a 1.2 días) y amplitudes de 0.2 a 2 magnitudes en el visual. Los tipos RRab (período fundamental, $P_0 \sim 0.4 - 1$ día) tienen curvas asimétricas; los RRC (primer sobretono, $P_1 \sim 0.2 - 0.4$ días) son más sinusoidales. Este tipo de estrellas son excelentes indicadores de distancia en el espacio.
- **Estrellas δ Scuti (DSC):** Pertenecientes a la Secuencia Principal o ligeramente evolucionadas, poseen tipos espectrales A2-F5 y clases de luminosidad IV-V. Muestran pulsaciones de baja amplitud (típicamente 0.003 a 0.3 magnitudes, aunque algunas HADS —*High Amplitude δ Scuti*— pueden llegar a 0.9 mag) con períodos cortos (0.01 a 0.3 días, o ~ 20 minutos a ~ 8 horas). Excitan múltiples modos radiales y no radiales. Sus curvas de luz y velocidad radial suelen estar en fase o con una relación de fase muy consistente.
- **Estrellas SX Phoenicis (SXP):** Análogas a las δ Scuti pero de Población II. Se encuentran a menudo en cúmulos globulares.

Estrellas pulsantes azules

Este tipo de estrellas se encuentran principalmente en la Secuencia Principal y cercanías del diagrama H-R. Entre ellas están:

- **Estrellas β Cephei (BCEP):** Estrellas masivas de tipo B temprano (B0-B3 IV-V). Pulsan en modos p y g de bajo orden y bajo grado l , con períodos de 2 a 7 horas (típicamente 4-7 horas). Sus variaciones de brillo son débiles, generalmente inferior a 0.1 magnitudes; sin embargo las variaciones de velocidad radial pueden ser significativas (hasta > 100 km/s). Frecuentemente presentan múltiples períodos simultáneos muy cercanos.
- **Estrellas SPB (Slowly Pulsating B-stars):** Estrellas de tipo B medio a tardío (B3-B9 V). Dominadas por modos g no radiales de alto orden n y bajo l , con períodos más largos (0.5 a 5 días) y amplitudes fotométricas pequeñas.
- **Estrellas γ Doradus (GDOR):** Son estrellas de tipo F tardío a A tardío (clase V), a menudo superpuestas en el HR con las δ Scuti más frías. Pulsan en modos g no radiales de alto orden n y bajo l , con períodos entre 0.3 y 3 días y amplitudes de hasta centésimas de magnitud (ej. ~ 0.1 mag). Muchas son híbridas, mostrando modos p (tipo δ Scuti) y g (tipo γ Dor).

Variables de largo período (LPVs)

- **Variables Mira (o Mira Ceti):** Gigantes rojas muy evolucionadas (AGB), son de tipo espectral M, S o C. SUS pulsaciones se radiales se caracterizan por ser de muy larga duración (80 a > 1000 días) y amplitudes visuales enormes (2.5 a 11 magnitudes).
- **Variables Semirregulares (SR):** Estrellas gigantes o supergigantes rojas, al igual que las variables Mira, son de tipo espectral M, C, S. Sin embargo pese a que sus pulsaciones son menos recurrentes que las Mira, las periodicidades son mayormente detectables (20 a > 2000 días) y amplitudes menores (desde centésimas a 1-2 magnitudes). Sus curvas de luz son diversas y variables.

Estrellas pulsantes compactas (En etapas evolutivas avanzadas)

■ Enanas Blancas Variables:

- DAV (o **ZZ Ceti**): Son estrellas tipo DA (atmósferas de H). Poseen modos g no radiales, períodos de 30 segundos a 25 minutos (100-1200 s) y amplitudes entre 0.001 – 0.2 mag.
- DBV (o **V777 Her**): Tipo DB (atmósferas de He). Poseen modos g no radiales y períodos entre 100 – 1000 s.
- GW Virginis (o **PG 1159 / DOV**): Esta clase de estrellas corresponde a las pre-enanas blancas. Son estrellas muy calientes y poseen modos g con períodos de 300 – 5000 s.

■ Estrellas Subenanas B Variables (sdBV):

- sdBV_r (rápidas, V361 Hya): Estrellas caracterizadas por modos p de bajo orden, $P \sim 90 - 600$ s.
- sdBV_s (lentas, V1093 Her): Poseen modos g de alto orden, $P \sim 45$ minutos - 2 horas.
- También existen híbridas como las sdBV_{rs}.

Esta diversidad es fundamental, ya que el tipo de estrella pulsante y las características de sus modos de oscilación (radiales/no radiales, modos p/g, períodos, amplitudes) están íntimamente ligados a la masa, radio, temperatura, composición y estado evolutivo. Por lo tanto, una correcta clasificación basada en las propiedades observadas de la curva de luz es el primer paso para la caracterización astrosísmica [5].

6.2. Estrellas de tipo solar

El Sol, nuestra estrella central, se revela como un miembro destacado entre las estrellas pulsantes. Los primeros indicios de su comportamiento oscilatorio emergieron en la década de 1950, pero no fue hasta los años 70 que se estableció de manera formal la presencia de ondas acústicas propagándose a través de su estructura. El análisis espectral de sus amplitudes revela una abundancia de picos, con una concentración notable en torno a los 3 mHz, correspondientes a periodos que oscilan entre 3 y 15 minutos. Estos picos exhiben amplitudes del orden de $1 \mu\text{mag}$ en términos de brillo y aproximadamente 1 cm/s en velocidad radial [27].

Las oscilaciones observadas en el Sol son el resultado directo de los movimientos turbulentos que caracterizan su capa convectiva. Estas oscilaciones son excitadas de manera estocástica; en otras palabras, los modos de oscilación son activados aleatoriamente por la convección, sin constituir modos autosostenidos. En lugar de ello, estos modos experimentan una disipación temporal seguida de una reactivación cíclica. Cada modo pulsante posee un tiempo de vida específico el cual determina su grado de coherencia. Debido a este ciclo de excitación y disipación, el espectro de amplitudes no presenta la claridad de funciones sinusoidales puras, como se observaría en pulsaciones originadas por otros mecanismos de excitación como lo es el caso de las estrellas pulsantes ya mencionadas. En consecuencia, los picos en el espectro de amplitudes solares exhiben una anchura intrínseca, directamente vinculada al tiempo de vida del modo correspondiente [27].

El Sol exhibe un comportamiento oscilatorio caracterizado por un patrón de frecuencias estrictamente definido. Dicho patrón se describe con precisión mediante la aproximación asintótica:

6.2. ESTRELLAS DE TIPO SOLAR

$$\nu_{nl} \approx \Delta\nu \left(n + \frac{\ell}{2} + \epsilon \right) \quad (6.2.1)$$

donde ν_{nl} , corresponde a la frecuencia de los modos (n, ℓ) y el parámetro ϵ al desplazamiento de fase [28]. Además, $\Delta\nu$ conocida como la “gran separación”, corresponde a dos veces el tiempo que tarda el sonido en viajar desde el centro estelar hasta su superficie [27]. Esta relación establece un espaciamiento uniforme entre las frecuencias, dictado por el valor de $\Delta\nu$, el cual puede calcularse de manera empírica como [28]:

$$\Delta\nu_{nl} = \nu_{n+1\ell} - \nu_{n\ell} \quad (6.2.2)$$

Adicionalmente, los modos oscilatorios que comparten un mismo valor de $n + \ell/2$ presentan frecuencias notablemente próximas, cuya diferencia se define como la “pequeña separación”:

$$\delta\nu_{nl} \equiv \nu_{n\ell} - \nu_{n-1,\ell+2} \quad (6.2.3)$$

La pequeña separación, $\delta\nu_{nl}$, constituye una herramienta diagnóstica fundamental para determinar el estado evolutivo de una estrella [27].

Las frecuencias observadas en el Sol, caracterizadas por un patrón distintivo y excitadas de manera estocástica, se denominan oscilaciones de tipo solar. Teóricamente, se espera que estas oscilaciones se manifiesten en estrellas que posean una capa convectiva externa, abarcando tanto estrellas de tipo solar como aquellas en la rama de gigantes rojas [27]. No obstante, la detección de tales pulsaciones en estrellas distintas al Sol ha representado un desafío observacional formidable debido a sus amplitudes extremadamente reducidas. La confirmación de pulsaciones estocásticas en estrellas externas al sistema solar no se logró hasta la década de los noventa [27].

Misiones espaciales como *CoRoT*, *Kepler* y actualmente TESS, han permitido la detección de oscilaciones de tipo solar en un amplio espectro de objetos estelares. Entre estos se incluyen estrellas de tipo G-K similares al Sol, gigantes rojas y, sorprendentemente, estrellas masivas donde tales oscilaciones no eran anticipadas [27].

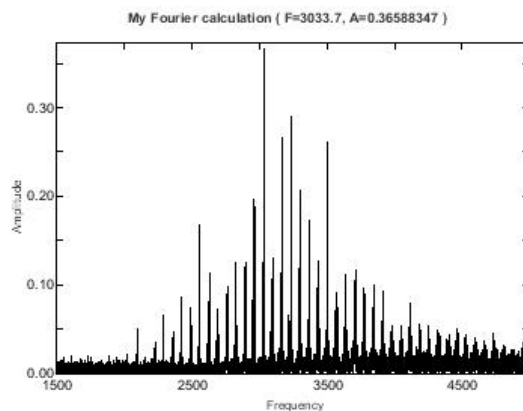


Figura 6.2.1: Periodograma del Sol con Period04

6.2.1. El Espectro del Sol

Las oscilaciones solares cuyos periodos abarcan de 3 a 15 minutos, fueron detectadas inicialmente desde observatorios terrestres; sin embargo, el progreso decisivo en heliosismología se logró con los datos del satélite SoHo (ESA/NASA), lanzado en 1995. Su espectro de frecuencias se ilustra en la Figura 6.2.1 [27].

En la Figura 6.2.2 se presenta en mayor detalle las regiones de mayor amplitud de la estrella.

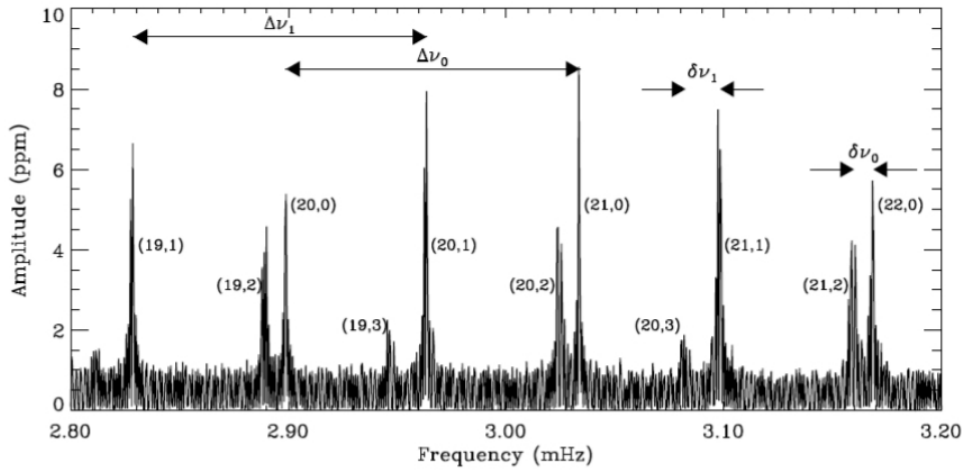


Figura 6.2.2: Separación de frecuencias en estrellas tipo solar

Definición de la gran separación ($\Delta\nu$) y la pequeña separación ($\delta\nu$) a partir del periodograma solar. Los modos de pulsación, identificados por los índices (n, ℓ) , exhiben un patrón regular con pares de modos $\ell = 0$ y $\ell = 2$, así como $\ell = 1$ y $\ell = 3$. La gran separación se define como la diferencia de frecuencias entre modos consecutivos con $\ell = 0$ y órdenes radiales n consecutivos. Por su parte, la pequeña separación corresponde a la diferencia de frecuencias entre modos consecutivos con $\ell = 0$ y $\ell = 2$, manteniendo órdenes n consecutivos [27].

Fuente: Obtenida de [27], (p. 4).

Se derivan dos parámetros fundamentales del espectro de frecuencias, la gran separación $\Delta\nu_\ell$, que mide la diferencia de frecuencia entre modos (n, ℓ) y $(n - 1, \ell)$, y la pequeña separación $\delta\nu_\ell$, que corresponde a la diferencia entre (n, ℓ) y $(n - 1, \ell + 2)$ [27]. La gran separación está vinculada a la densidad estelar promedio, mientras que la pequeña separación es sensible a variaciones abruptas en la velocidad del sonido, influenciadas por la composición del núcleo estelar. Estos parámetros permiten inferir propiedades clave como la masa y la edad estelar, dado que la composición nuclear evoluciona con la fusión del hidrógeno en helio [27].

En la Figura 6.2.3, se presenta un diagrama de Hertzsprung-Russell (HR) en el contexto astrosismológico, donde las separaciones de frecuencia son importantes para determinar características estelares fundamentales como información de la masa, del estado evolutivo o cantidad de hidrógeno en su núcleo [27].

Asimismo, se ha establecido que la frecuencia de máxima amplitud de oscilación, $\nu_{\text{máx}}$, está íntimamente relacionada con parámetros estelares fundamentales, como la gravedad superficial y la temperatura efectiva [27]. Por otro lado, estas variables de frecuencia también permiten llegar a relaciones de escalado con respecto a los valores solares [29, 30]:

6.2. ESTRELLAS DE TIPO SOLAR

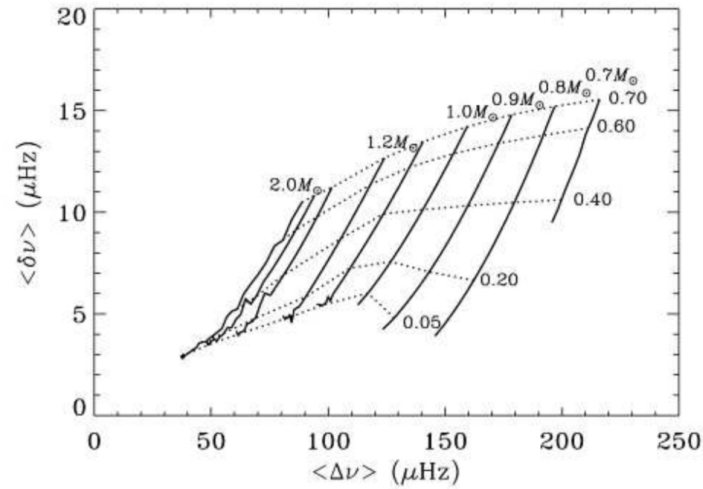


Figura 6.2.3: Diagrama de Christensen-Dalsgaard

El diagrama de Christensen-Dalsgaard o diagrama C-D, es un tipo de diagrama H-R adaptado para Astrosismología, en el la gran separación ($\Delta\nu$) muestra una alta sensibilidad a la masa estelar, mientras que la pequeña separación ($\delta\nu$) es predominantemente sensible a la edad estelar. Las líneas sólidas de orientación casi vertical, representan líneas de masa constante, mientras que las líneas punteadas de orientación casi horizontal, indican fracciones de masa de hidrógeno en el núcleo.

Fuente: Obtenida de [27], (p. 5).

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{\nu_{\text{máx}}}{\nu_{\text{máx},\odot}} \right) \cdot \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{T_{\text{eff}}}{5777 \text{ K}} \right)^{1/2} \quad (6.2.4)$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} = \left(\frac{R}{R_{\odot}} \right)^3 \cdot \left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\odot}} \right)^2 \quad (6.2.5)$$

Capítulo 7

Técnicas de análisis de datos observacionales

La detección de señales periódicas en series temporales con muestreo irregular constituye un desafío formidable en el análisis de datos astrofísicos. La complejidad inherente a este proceso ha impulsado el desarrollo de múltiples metodologías, cada una con sus propias limitaciones y aplicabilidad específica. Factores como el espectro de la ventana, los alias frecuenciales y la posible multiperiodicidad complican significativamente la tarea de identificar el período correcto [7].

Dado que las componentes del vector de desplazamiento lagrangiano descritas en la Sección 5.2 contienen un factor dependiente del tiempo $e^{i\nu t}$, es claro entender que las oscilaciones estelares, muestran variaciones periódicas en observables como el brillo y la velocidad radial, las cuales requieren un análisis frecuencial preciso para su caracterización [7]. Entre las técnicas disponibles, el periodograma de Fourier y la Minimización de la Dispersión de Fase (PDM) se destacan como métodos fundamentales [7]. El enfoque en este trabajo de grado se inclina hacia las técnicas basadas en Fourier; lo anterior dada su superioridad en la detección de variaciones sinusoidales, frente a la PDM, más adecuada para curvas de luz con un único período dominante.

7.1. Análisis de Fourier

El análisis de series temporales en astrosismología permite identificar las oscilaciones presentes en los datos observacionales de brillo estelar. El objetivo principal del análisis de Fourier se basa en encontrar una función que, al aplicarse a los datos observacionales, presente máximos en aquellas frecuencias donde existen oscilaciones reales. Esta técnica utiliza el dominio de la frecuencia que tiene ventajas para procesos periódicos, a diferencia del dominio del tiempo que es más adecuado para el caso aleatorio, como se evidencia en la construcción. A continuación se revisan algunos fundamentos del análisis de Fourier antes del estudio de distintos periodogramas.

La transformada de Fourier de una función $f(t)$ se define como:

$$F(\nu) := \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i\nu t} dt \quad (7.1.1)$$

7.1. ANÁLISIS DE FOURIER

Sea $f(t)$ constante e igual a 1, se obtiene la función delta de Dirac descrita como:

$$\delta(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} dt = \begin{cases} \infty, & \text{si } \nu = 0 \\ 0, & \text{si } \nu \neq 0 \end{cases} \quad (7.1.2)$$

Siendo algunas de sus propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu) d\nu = 1, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \nu_0) g(\nu) d\nu = g(\nu_0) \quad (7.1.3)$$

La determinación del período mediante el análisis de Fourier se fundamenta en el hecho de que la transformada de Fourier $F(\nu)$ de una función $f(t)$ que es una onda pura de frecuencia ν_0 , es distinta de cero solo cuando $\nu = \pm\nu_0$. Para su demostración, sea $f(t)$ una función periódica (onda sinusoidal) con frecuencia ν_0 :

$$f(t) = Ae^{2\pi i \nu_0 t} \quad (7.1.4)$$

su transformada será:

$$F(\nu) = A\delta(\nu - \nu_0) \quad (7.1.5)$$

En cuyo caso, el valor de la función resultado al realizar la transformada es distinto de 0 solo en $\nu = \pm\nu_0$.

Si se considera una función multiperiodica que se expresa en términos de una suma de n funciones armónicas de frecuencias $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ y amplitudes $A_1, A_2, \dots, A_n$, tal como:

$$f(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{2\pi i \nu_k t} \quad (7.1.6)$$

además de su transformada como:

$$F(\nu) = \sum_{k=1}^n A_k \delta(\nu - \nu_k) \quad (7.1.7)$$

En este caso, $F(\nu)$ es la suma de n funciones δ que son distintas de cero para las frecuencias $\pm\nu_1, \pm\nu_2, \dots, \pm\nu_n$.

Por otra parte, al tratar con un muestreo discreto y una cantidad finita de datos, lo mencionado anteriormente no se cumple. La mayoría de los procesos empleados para determinar $F(\nu)$ a partir de un conjunto finito de datos dan como resultado una expresión que se entiende como la convolución de la verdadera $F(\nu)$ con una ventana espectral.

Al disponer de datos reales, resulta de mayor utilidad trabajar con lo que se conoce como la transformada discreta de Fourier (DFT), la cual para un conjunto de datos muestreados arbitrariamente $X_j = X(t_j)$, $j = 1, 2, \dots, N$ se define como:

$$DFT_N(\nu) := \sum_{j=1}^N X(t_j) e^{-2\pi i \nu t_j} \quad (7.1.8)$$

Así mismo, para datos constantes $X(t_j) = 1$, se obtiene:

$$\delta_N(\nu) := \sum_{j=1}^N e^{-2\pi i \nu t_j} \quad (7.1.9)$$

A través de una función de ventana, se pueden asociar entre sí la DFT_N y $F(\nu)$. La función se define como:

$$w_N(t) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \delta(t - t_j) \quad (7.1.10)$$

Usando la definición de la función de ventana y las propiedades de la función delta ya mencionadas, la transformada de Fourier observada DFT_N puede escribirse en forma integral como:

$$\frac{DFT_N(\nu)}{N} = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) w_N(t) e^{-2\pi i \nu t} dt \quad (7.1.11)$$

De esta manera, la transformada de Fourier discreta de la función ventana $W_N(\nu)$ (ventana espectral), se escribe como:

$$W_N(\nu) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{-2\pi i \nu t_j} = \frac{\delta_N(\nu)}{N} \quad (7.1.12)$$

La aplicación de la ventana espectral a un conjunto de datos continuos da como resultado un conjunto de datos muestreados.

Si se define la convolución de dos funciones F y G en el dominio de la frecuencia:

$$F(\nu) * G(\nu) := \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu - \sigma) G(\sigma) d\sigma \quad (7.1.13)$$

Entonces, DFT_N/N será la convolución de la verdadera transformada de Fourier con la ventana espectral, de la siguiente manera:

$$DFT_N/N = F(\nu) * W_N(\nu) \quad (7.1.14)$$

De esta manera es fácil observar que la DFT_N y $F(\nu)$ de una misma señal sinusoidal pura son completamente diferentes. Su diferencia puede interpretarse en el dominio de las frecuencias como una interferencia entre frecuencias. En la práctica se consideran dos tipos de interferencias:

- Interferencia de frecuencias cercanas, descrita mediante una ventana espectral como producto de la longitud finita de los datos.
- Interferencia de frecuencias distantes, también conocida como *aliasing*, que resulta del espaciado entre los datos.

Aquellos datos registrados continuamente no presentan *aliasing*; sin embargo, para datos igualmente espaciados, este fenómeno existe en su forma más extrema. Al trabajar en Astrosismología con un espaciado de datos arbitrario, que es lo que generalmente ocurre en este tipo de estudios, no es posible identificar por separado ambos efectos de forma clara y concisa.

Conforme a lo establecido en la ecuación 7.1.14, se constata que, si $F(\nu)$ adopta la forma de una función delta centrada en la frecuencia ν_0 , entonces la expresión $\text{DFT}_N(\nu)/N$ replicará con precisión la estructura de la ventana espectral, la cual se encuentra centrada en ν_0 . Dicha réplica se materializa específicamente como $W_N(\nu - \nu_0)$. Es menester subrayar que, dado que $W_N(\nu)$ puede exhibir valores significativamente distintos de cero en frecuencias diferentes de $\nu = 0$, se deriva la posibilidad de que emerja interferencia entre las diversas frecuencias presentes en el conjunto de datos bajo análisis.

Resulta importante enfatizar que el comportamiento inherente a la distribución de los datos se halla íntegramente encapsulado dentro de la ventana espectral. Esta ventana, a su vez, puede ser determinada analíticamente a partir del espaciado temporal de los datos, manifestando una independencia notable respecto de los propios valores de los datos. En términos característicos, la representación gráfica de la amplitud de $W(\nu)$ en función de la frecuencia pone de manifiesto un pico central predominantemente definido en $\nu = 0$, cuyo ancho es del orden de T^{-1} en el dominio frecuencial, siendo T el intervalo de tiempo total abarcado por los puntos de datos. Asimismo, se observan picos secundarios que corresponden a singularidades derivadas del espaciado específico de los datos [7].

Este fenómeno, denominado *aliasing*, conlleva la generación de frecuencias espurias, conocidas como *frecuencias alias*, las cuales tienen el potencial de distorsionar gravemente la interpretación de los datos en el dominio espectral. La comprensión profunda y la mitigación efectiva de este efecto se erigen como elementos cruciales para garantizar la exactitud y fiabilidad del análisis de señales en el ámbito frecuencial [7].

A continuación se indican en las figuras, dos espectros de frecuencias representados a partir de datos observacionales que fueron obtenidos por un telescopio terrestre y espacial respectivamente:

En la Figura 7.1.1, se puede apreciar una ventana espectral de una estrella seccionada de el proyecto MA-CHO [31]; en ella se observan picos significativos en 1, 2, 3, 4, ... $c \text{ d}^{-1}$ además de sus valores negativos. La razón de ello es debido a la periodicidad de un día en su espaciado de datos, al ser tomada por telescopios terrestres, el objeto en cuestión solo puede observarse en la noche. De esta manera el *aliasing* que corresponde a la figura será de 1 día ($\nu_A = 1 \text{ d}^{-1}$). Se entiende entonces que para campañas de observación ubicadas desde un solo sitio, debería existir alias en la transformada de frecuencias $\nu = \nu_A + \nu_0$ y $\nu = \nu_A - \nu_0$. Evidentemente para datos recopilados desde el espacio como los que se observan en la Figura 7.1.2 el patrón de *aliasing* de 1 día no está presente en la ventana espectral.

Por otra parte, considerando algunas propiedades matemáticas de la ventana espectral, al asumir que las mediciones son equidistantes en el tiempo ($t_j = t_0 + \Delta t$), su función se describe como:

$$W_N(\nu) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{2\pi i \nu t_0} \cdot e^{2\pi i \nu j \Delta t} = \frac{\sin \pi \nu N \Delta t}{N \sin \pi \nu \Delta t} \quad (7.1.15)$$

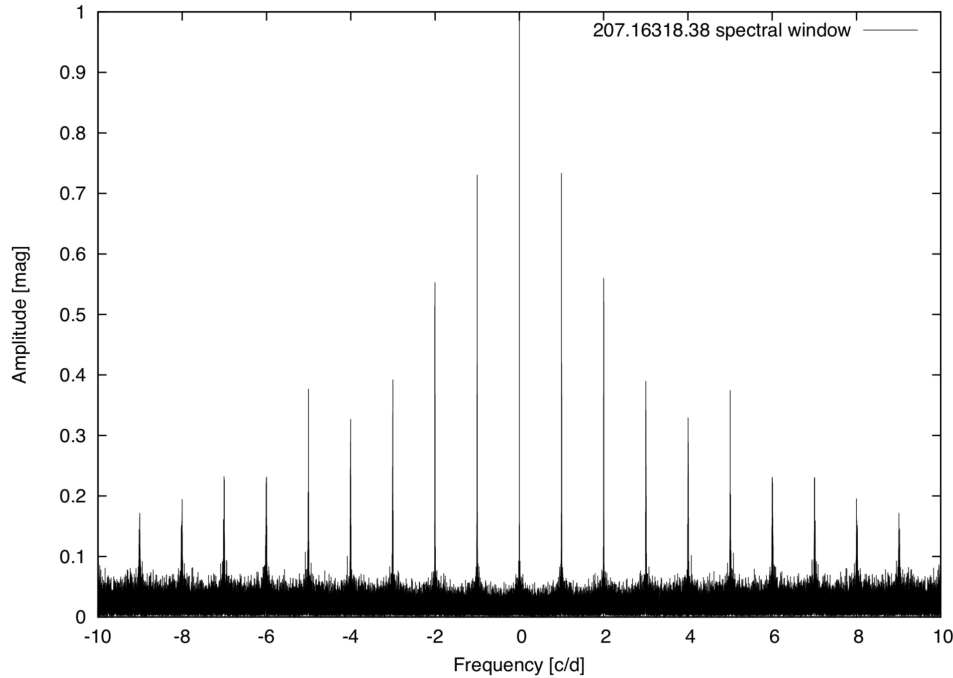


Figura 7.1.1: Ejemplo de una ventana espectral estelar del proyecto MACHO

Se ilustra la presencia de un patrón de alias típico de 1 día y cómo la extensa duración de las observaciones (~ 1960 días) produce picos de ventana muy marcados.

Fuente: Obtenida de [7], (p. 58).

Se deduce que la función ventana $W_N(\nu)$ exhibe las siguientes propiedades intrínsecas:

- **Simetría:** La función satisface la condición $W_N(\nu) = W_N(-\nu)$, evidenciando una estructura espejular respecto al origen en el dominio frecuencial.
- **Periodicidad:** Presenta un carácter periódico con un período de $1/\Delta t$, de modo que, para todo entero n , se cumple $W_N(\nu) = W_N(\nu + n/\Delta t)$.
- **Aproximación para bajas frecuencias:** En el régimen de valores pequeños de ν , la función admite la siguiente representación aproximada:

$$W_N(\nu) \simeq \frac{\sin \pi \nu N \Delta t}{N \pi \nu \Delta t} = \frac{\sin \pi \nu T}{\pi \nu T}, \quad (7.1.16)$$

donde $T = N \Delta t$ denota el intervalo temporal total de los datos.

En síntesis, la función $W_N(\nu)$ puede conceptualizarse o entenderse como una sucesión infinita de funciones sinc, distribuidas con una separación de $1/\Delta t$ en el dominio frecuencial. Para datos muestreados con un espaciado temporal uniforme, se verifica que $W_N(\nu)$ alcanza el valor unitario en un conjunto infinito de frecuencias discretas definidas por $\nu_n = n/\Delta t$. No obstante, en el caso de datos con espaciado no uniforme, las propiedades de simetría y periodicidad generalmente no se preservan [7]. A pesar de ello, se espera que $W_N(\nu)$ exhiba valores significativos, potencialmente próximos a la unidad, en frecuencias alejadas de $\nu = 0$, tal y como se ilustra en la Figura 7.1.1.

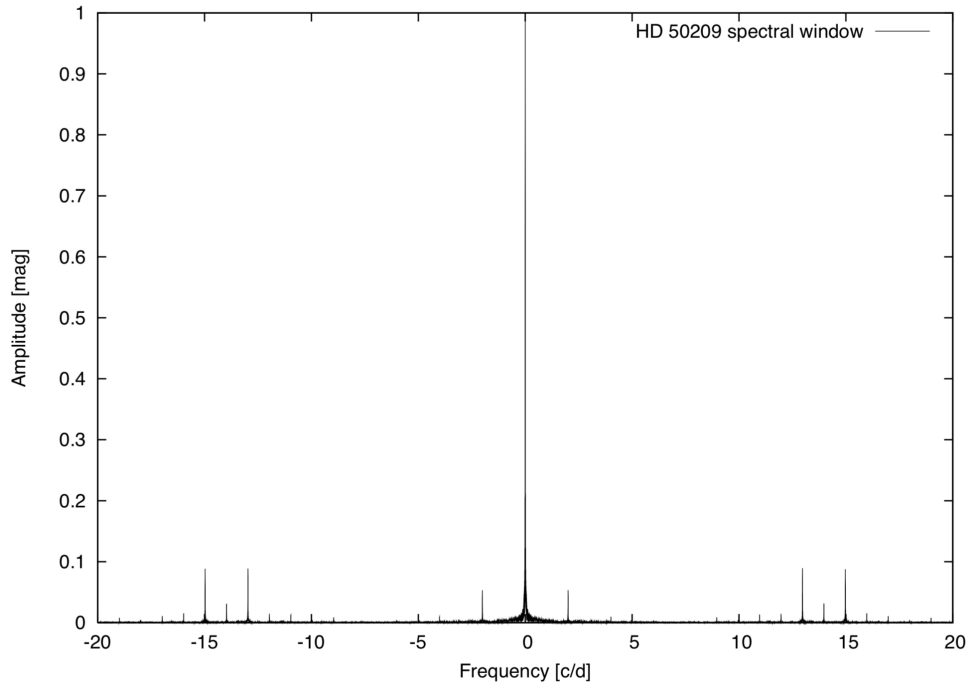


Figura 7.1.2: Ejemplo de ventana espectral estelar de la misión espacial CoRoT

Dado que las observaciones se tomaron desde el espacio, el patrón de aliasing es diferente a 1 día. Los picos en la frecuencia orbital del satélite corresponden a (13.97 c d^{-1}) , la frecuencia día-noche (2.007 c d^{-1}) e información de sus alias también están presentes. El lapso de tiempo en el que fue observada la estrella HD 50209 corresponde a 136 días.

Fuente: Tomada de [7], (p. 59).

En un panorama más general, el muestreo temporal impone un límite superior absoluto o una barrera al rango de frecuencias altas accesibles. Dicha frecuencia límite, se conoce como *frecuencia de Nyquist*, la cual define como $1/(2\Delta t)$. Intuitivamente, dicha magnitud implica que, para observaciones realizadas con un intervalo de una hora por ejemplo, resulta inviable resolver períodos del orden de un minuto. También es importante destacar que para datos con espaciado no uniforme, el concepto de frecuencia de Nyquist pierde validez. Como resultado, el periodograma correspondiente a tales datos podría extenderse hacia frecuencias arbitrariamente altas, lo que amplía el espectro de análisis frecuencial [7].

7.1.1. Periodograma clásico

Para la identificación de períodos en señales, se emplea el periodograma en detrimento de la transformada de Fourier discreta DFT_N , dado que esta última constituye una función de naturaleza compleja. El periodograma, también denominado *espectro de potencia*, se define como una magnitud proporcional a la parte real de la transformada de Fourier discreta [7]. matemáticamente se expresa como:

$$P_N(\nu) := \frac{1}{N} |\text{DFT}_N(\nu)|^2 = \frac{1}{N} \left\{ \left(\sum_{j=1}^N X_j \sin(2\pi\nu t_j) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N X_j \cos(2\pi\nu t_j) \right)^2 \right\} \quad (7.1.17)$$

Cuando la señal bajo escrutinio corresponde a una onda cosenoidal pura, definida como $X(t_j) = A \cos(2\pi\nu_0 t_j)$, el periodograma adopta la siguiente forma en la frecuencia ν_0 :

$$P_N(\nu_0) = \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N A \cos(2\pi\nu_0 t_j) \sin(2\pi\nu_0 t_j) \right\}^2 + \frac{1}{N} \left\{ \sum_{j=1}^N A \cos^2(2\pi\nu_0 t_j) \right\}^2 \quad (7.1.18)$$

Para un número suficientemente grande de muestras N , se establecen las siguientes aproximaciones:

$$\sum_{j=1}^N A \cos(2\pi\nu_0 t_j) \sin(2\pi\nu_0 t_j) \approx 0 \quad \text{y} \quad \sum_{j=1}^N \cos^2(2\pi\nu_0 t_j) \approx \frac{N}{2} \quad (7.1.19)$$

Como resultado el valor del periodograma en ν_0 se aproxima a $P_N(\nu_0) \approx \frac{A^2 N}{4}$. En frecuencias distintas de ν_0 , los términos de la suma alternan entre valores positivos y negativos de manera aleatoria, lo que induce una cancelación que resulta en una suma de magnitud reducida. Por ende, la presencia de una componente sinusoidal se manifiesta mediante valores significativamente elevados en $P_N(\nu)$.

Teniendo en cuenta lo anterior, la amplitud de la señal en una frecuencia específica ν puede encontrarse mediante la expresión:

$$A(\nu) = 2\sqrt{\frac{P_N(\nu)}{N}} \quad (7.1.20)$$

7.1.2. Periodograma de Lomb-Scargle

Tal y como se menciona en [7], el periodograma de Lomb-Scargle indica una mejora en la definición del periodograma clásico [32], [33]. Dicha definición es preferible cuando:

- El valor no cambia cuando todos los valores temporales de t_j son remplazados por $t_j + T$
- La distribución estadística del estimador es fácil de usar [7], [33].
- Es proporcional al ajuste por mínimos cuadrados de las ondas sinusoidales a los datos [7].

El periodograma de Lomb-Scargle es una herramienta útil en el análisis de series temporales [7], se define de manera precisa como:

$$P_N(\nu) := \frac{1}{2} \left\{ \frac{\left[\sum_{j=1}^N X_j \cos(2\pi\nu(t_j - \tau)) \right]^2}{\sum_{j=1}^N X_j \cos^2(2\pi\nu(t_j - \tau))} + \frac{\left[\sum_{j=1}^N X_j \sin(2\pi\nu(t_j - \tau)) \right]^2}{\sum_{j=1}^N X_j \sin^2(2\pi\nu(t_j - \tau))} \right\} \quad (7.1.21)$$

donde τ representa la época de referencia, seleccionada cuidadosamente para satisfacer la condición:

$$CS \equiv \sum_{j=1}^N X_j \cos(2\pi\nu(t_j - \tau)) \sin(2\pi\nu(t_j - \tau)) = 0 \quad (7.1.22)$$

o, en una forma equivalente,

$$\tan(4\pi\nu\tau) = \frac{\sum_{j=1}^N \sin(4\pi\nu t_j)}{\sum_{j=1}^N \cos(4\pi\nu t_j)} \quad (7.1.23)$$

7.2. CRITERIOS DE SIGNIFICANCIA

Para optimizar la manipulación de esta expresión, se establecen las siguientes definiciones auxiliares:

$$\begin{cases} CC \equiv \sum_{j=1}^N \cos^2[2\pi\nu(t_j - \tau)], & SS \equiv \sum_{j=1}^N \sin^2[2\pi\nu(t_j - \tau)] \\ XC \equiv \sum_{j=1}^N X_j \cos[2\pi\nu(t_j - \tau)], & XS \equiv \sum_{j=1}^N X_j \sin[2\pi\nu(t_j - \tau)] \end{cases} \quad (7.1.24)$$

Con estas notaciones, el periodograma de Lomb-Scargle se escribe de forma práctica y elegante como:

$$P_N(\nu) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(XC)^2}{CC} + \frac{(XS)^2}{SS} \right\} \quad (7.1.25)$$

En el caso de una señal armónica pura caracterizada por $X(t_j) = A \cos(2\pi\nu_1 t_j)$, y considerando un número suficientemente grande de observaciones N , el periodograma alcanza el valor $P_N(\nu_1) = \frac{A^2 N}{4}$ el cual es un resultado que exhibe paralelismo con el periodograma clásico. De la misma manera la amplitud asociada a una frecuencia específica ν se deriva del periodograma mediante la expresión:

$$A(\nu) = 2\sqrt{\frac{P_N(\nu)}{N}} \quad (7.1.26)$$

7.2. Criterios de significancia

En el ámbito del análisis frecuencial, resulta imperativo establecer un criterio de parada para discernir si un pico en una frecuencia determinada mantiene su relevancia o si, por el contrario, puede ser atribuido a fluctuaciones aleatorias. El método que se utiliza para este propósito es la relación señal-ruido (**SNR**), tal como fue descrita en [34]. Este método se describe en los siguientes pasos:

- Determinar la **señal** (S), definida como la amplitud del pico correspondiente a cada frecuencia identificada en el periodograma.
- Evaluar el **ruido** (N), que se obtiene promediando las amplitudes en un intervalo de 5 cd^{-1} del periodograma residual, posterior al proceso de preblanqueo de todas las frecuencias previamente detectadas.

El intervalo frecuencial empleado para el cálculo del ruido se ajusta en función del rango espectral o las frecuencias que se están analizando [7]. Según lo establecido por [34], en el contexto de campañas multi-sitio, un valor de $\text{SNR} \geq 4$ se erige como un criterio robusto y confiable para distinguir entre picos genuinos y el ruido.

7.3. Búsqueda de múltiples periodos

A menudo las estrellas no solo exhiben un único modo de oscilación, sino una multiplicidad de ellos, lo que las clasifica como **multiperiódicas**. Es por ello que para el análisis de tales estrellas, se emplea el método de *preblanqueo* (prewhitening), la cual es una técnica esencial destinada a identificar y caracterizar las frecuencias de oscilación presentes en el espectro de amplitudes derivado de las curvas de luz estelares [7].

El procedimiento de preblanqueo se ejecuta de manera iterativa de la siguiente forma:

1. **Identificación de frecuencias:** se determina la frecuencia más significativa dentro del espectro de amplitudes mediante el empleo de métodos espectrales como los descritos anteriormente. Esta frecuencia corresponde al modo de oscilación predominante en los datos observacionales.
2. **Ajuste paramétrico:** se estiman la amplitud y la fase asociadas a la frecuencia identificada mediante un ajuste por mínimos cuadrados. De esta manera, el modelo matemático adoptado para describir la curva de luz se expresa mediante la siguiente función de ajuste:

$$Z + \sum_i A_i \sin(2\pi\nu_i t + \phi_i) \quad (7.3.1)$$

donde los parámetros se definen como sigue:

- Z : Nivel base de la curva de luz, representando el valor medio de las oscilaciones.
 - A_i : Amplitud correspondiente al i -ésimo modo de oscilación.
 - ϕ_i : Fase inicial del i -ésimo modo.
 - ν_i : Frecuencia asociada al i -ésimo modo identificado.
3. **Eliminación de componentes:** la señal modelada se sustrae de los datos originales para generar los datos residuales, según la ecuación:

$$\text{Datos residuales} = \text{Datos originales} - \sum_i A_i \sin(2\pi\nu_i t + \phi_i) \quad (7.3.2)$$

Este paso facilita el aislamiento de las frecuencias ya caracterizadas, permitiendo la detección de modos adicionales en el espectro residual.

El ciclo de identificación, ajuste y sustracción se repite iterativamente hasta que la frecuencia encontrada tiene una (SNR) menor a 4. Este umbral, establecido en [34], asegura que las frecuencias consideradas posean una significancia estadística suficiente, excluyendo así contribuciones espurias derivadas de ruido o artefactos instrumentales.

7.4. Diagrama de fase

El diagrama de fase constituye una herramienta fundamental en el análisis de series temporales astronómicas, permitiendo replegar el tiempo total de observación en un intervalo normalizado entre 0 y 1 [3]. Este procedimiento implica dividir el tiempo transcurrido, definido como $t - T_0$, donde T_0 representa el tiempo del primer punto de observación, por el período P , y extraer la parte fraccionaria del cociente resultante. La expresión matemática que describe este proceso se formula como:

$$Fase(t) = \text{decimal} \left(\frac{t - T_0}{P} \right) = \frac{t - T_0}{P} - \text{int} \left(\frac{t - T_0}{P} \right), \quad (7.4.1)$$

donde

$Fase(t)$ denota la fase, t es el tiempo de cada punto de observación, P es el período de la señal, $\text{decimal}(\cdot)$ representa la parte fraccionaria de un número. Este procedimiento permite compactar las observaciones en un ciclo de fase, facilitando la visualización de patrones periódicos.

El análisis del diagrama de fase revela la naturaleza de la variabilidad estelar, permitiendo discernir si la curva de luz exhibe un comportamiento sinusoidal o no sinusoidal (véase la Figura 7.4.1) [3]. Este enfoque resulta particularmente relevante en observaciones terrestres, donde las curvas de luz presentan interrupciones significativas debido a las condiciones de observación. En tales casos, el diagrama de fase permite interpolar los datos, completando los vacíos y facilitando la confirmación visual de las frecuencias dominantes [3]. Asimismo, esta técnica es crucial para el estudio de sistemas binarios, cuya curva de luz exhibe patrones no sinusoidales, proporcionando información esencial sobre la dinámica orbital y las propiedades físicas del sistema [3].

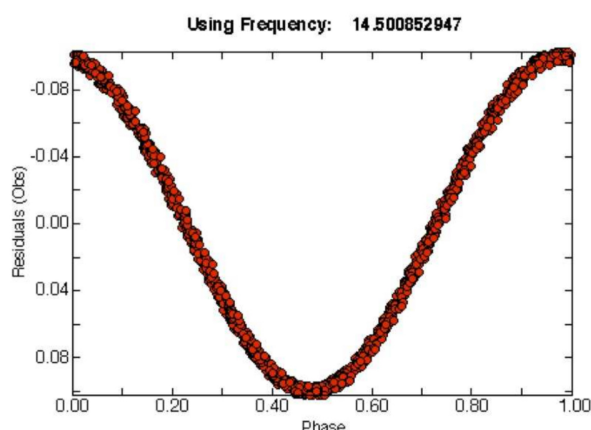


Figura 7.4.1: Diagrama de fase de una estrella modelo

Diagrama de fase generado mediante el software Period04 para una estrella modelo, ilustrando el comportamiento periódico de su curva de luz. Se observa un patrón claramente sinusoidal correspondiente a una frecuencia dominante, lo que evidencia la presencia de oscilaciones estelares coherentes.

Fuente: Tomada de [3], (p. 14).

7.5. Herramientas computacionales para el análisis

La aplicación práctica de las técnicas de análisis de frecuencias descritas en este capítulo, especialmente a los grandes volúmenes de datos generados por las misiones espaciales modernas y la naturaleza iterativa de procesos como el preblanqueo, depende propiamente del uso de herramientas computacionales.

Existen diversas herramientas a disposición de la comunidad científica, entre ellos destacan paquetes de software dedicados con interfaces gráficas y una serie de funcionalidades integradas. De la misma manera en lenguajes de programación como python las bibliotecas Numpy y Scipy que cumplen con este objetivo. Algunos programas especializados en astronomía con lenguaje en python son Astropy [35] y Lightkurve [36].

7.5.1. Programa Period04

El programa representa una versión mejorada del Period98 [37], cuyo funcionamiento recae en el análisis de series temporales largas con intervalos de muestreo tanto variables o constantes. El programa permite



realizar la transformada de Fourier discreta a partir de la serie temporal de los datos observados. Entre sus funciones, destacan la salida del espectro de potencias así como la frecuencia del pico de mayor amplitud del mismo, con su amplitud y fase correspondiente. También permite realizar un preblanqueo o "blanqueado" del espectro, eliminando sucesivamente las señales con las frecuencias dominantes para la búsqueda multiperiódica [4].

En esencia, el programa está estructurado en tres módulos principales:

1. El módulo time string: en este espacio el usuario carga los datos de la serie temporal y es capaz de realizar gráficos de la curva de luz.
2. El módulo fit: en este módulo es posible ajustar el número de frecuencias por el método de mínimos cuadrados, adicionalmente permite ajustar las amplitudes y variaciones de fase.
3. El módulo Fourier: el módulo permite determinar el espectro de amplitudes de los datos originales. Su desarrollo se basa en el algoritmo de la transformada discreta de Fourier.

Capítulo 8

Metodología para la caracterización de estrellas pulsantes y de tipo solar

En el presente capítulo se describe la metodología implementada para el análisis de datos de las curvas fotométricas en estrellas pulsantes y de tipo solar. Las dos primeras secciones corresponden a la metodología y el proceso de análisis frecuencial de estrellas pulsantes, las secciones posteriores a estrellas tipo solar correspondientemente.

8.1. Metodología general del análisis frecuencial en estrellas pulsantes

El análisis de las series temporales en Astrosismología resulta esencial para identificar y caracterizar las múltiples oscilaciones, presentes en los datos observacionales de brillo estelar. El objetivo principal tal como se presenta en el Capítulo 7, Sección 7.1, es aplicar funciones y transformadas a los datos observacionales que revelen máximos en aquellas frecuencias donde existen oscilaciones estelares reales. La presente metodología describe el flujo de trabajo general adoptado para la extracción de estas frecuencias y sus parámetros asociados.

1. **Datos observacionales y preparación inicial:** el material de partida es la curva de luz estelar, una serie temporal discreta compuesta por mediciones de magnitud (o flujo) X_j en instantes de tiempo t_j , donde $j = 1, 2, \dots, N$. Se considera la duración total de la observación, $T = T_N - T_1$, la cual define la resolución frecuencial fundamental. Dada la naturaleza típicamente no equiespaciada del muestreo temporal en observaciones astronómicas, se considera una frecuencia de Nyquist como guía para el análisis.
2. **Análisis espectral primario:** para transformar la información del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, se emplean técnicas basadas en la Transformada Discreta de Fourier (DFT) (ver Sección 7.1 para la definición de DFT y la problemática de la ventana espectral $W_N(\nu)$ y el aliasing para datos no uniformes). Dada la naturaleza no equiespaciada de las series temporales astronómicas, el Periodograma de Lomb-Scargle (PLS) [32, 33] se utiliza como herramienta principal para obtener el espectro de amplitudes o potencias. El PLS está diseñado para manejar datos con muestreo irregular

y es proporcional al ajuste por mínimos cuadrados de ondas sinusoidales a los datos. El periodograma $P_N(\nu)$ resultante revela las frecuencias candidatas iniciales.

3. **Proceso iterativo de búsqueda de múltiples períodos (Pre-blanqueo):** dado que las estrellas suelen ser multiperiodicas, se aplica la técnica de pre-blanqueo para identificar las diversas componentes de oscilación, tal como se describe en la Sección 7.3. Este proceso iterativo consiste en:
 - a. *Identificación de frecuencias:* en cada iteración k (iniciando con la curva de luz original para $k = 1$, y con los residuos de la iteración $k - 1$ para $k > 1$), se identifica la frecuencia más significativa, ν_k , en el espectro de amplitudes (PLS).
 - b. *Ajuste paramétrico:* una vez identificada ν_k , se estiman sus parámetros asociados (amplitud A_k y fase ϕ_k , junto con un término de offset¹ Z_k o C_k mediante un ajuste por mínimos cuadrados (LSQ) de una función sinusoidal $s_k(t) = A_k \sin(2\pi\nu_k t + \phi_k) + Z_k$ a la serie temporal actual (original o residual).
 - c. *Eliminación de componentes (Pre-blanqueo):* la señal sinusoidal modelada $s_k(t)$ (o, más precisamente, la componente $A_k \sin(2\pi\nu_k t + \phi_k)$ si el offset se maneja por separado o se resta la media global) se sustrae de la serie temporal que se estaba analizando en el paso (a), generando una nueva serie de datos residuales. Como se indica claramente en la Sección 7.3, los residuos pueden conceptualizarse como los datos originales menos la suma de todas las componentes sinusoidales encontradas hasta el momento.
 - d. *Iteración:* Los pasos (a)-(c) se repiten sobre la nueva serie de datos residuales.
4. **Criterio de significancia y parada:** el ciclo iterativo de pre-blanqueo se detiene cuando las frecuencias candidatas ya no se consideran estadísticamente significativas. Se utiliza el criterio de la relación señal/ruido (S/N) en amplitud, como se detalla en la Sección 7.2, basado en [34]. La Señal (S) es la amplitud del pico de la frecuencia identificada, y el Ruido (N) es la amplitud promedio en una ventana definida ($5 c/d$) del periodograma residual actual, tras el pre-blanqueo de todas las frecuencias previamente detectadas, excluyendo la región inmediata del pico candidato. Se adopta un umbral de $S/N \geq 4$.
5. **Refinamiento global de parámetros de pulsación:** una vez que el proceso de pre-blanqueo ha concluido y se ha obtenido un conjunto de N frecuencias significativas, se realiza un ajuste global. En este paso, un modelo multifrecuencia de la forma $M(t) = Z + \sum_{i=1}^N A_i \sin(2\pi\nu_i t + \phi_i)$ (como se indica en la Sección 7.3) se ajusta simultáneamente a la curva de luz original mediante mínimos cuadrados. Este ajuste global permite optimizar todos los parámetros (A_i, ν_i, ϕ_i, Z) de manera conjunta, resultando en el conjunto de parámetros más autoconsistente para el modelo multifrecuencia. El S/N de cada frecuencia puede ser entonces reevaluado utilizando estos parámetros globales y los residuos finales del modelo.
6. **Obtención de períodos y análisis en el dominio de la fase:** las frecuencias finales y refinadas, ν'_i , se convierten a sus correspondientes períodos, $P'_i = 1/\nu'_i$. Para cada modo significativo, se construyen diagramas de fase plegando la curva de luz original (generalmente centrada) con su período P'_i y una época de referencia T_0 , utilizando la ecuación:

$$\text{Fase}(t) = \left(\frac{t - T_0}{P'_i} \right) - \text{int} \left(\frac{t - T_0}{P'_i} \right) \quad (8.1.1)$$

¹El término 'offset' denotado como Z_k o C_k en un modelo multifrecuencial, representa el nivel de magnitud promedio alrededor del cual oscila la componente o componentes sinusoidales ajustadas. Corresponde al brillo medio de la estrella o de los residuos en una etapa dada del análisis, una vez sustraídas las variaciones periódicas modeladas.

(como se presenta en la ecuación 7.4.1). Estos diagramas ayudan a visualizar la forma de la onda de pulsación.

7. **Caracterización preliminar del tipo pulsante:** el conjunto de períodos y amplitudes de las pulsaciones detectadas y validadas se utiliza para una clasificación tentativa del tipo de estrella variable, mediante la comparación con los rangos característicos de diferentes clases de estrellas pulsantes conocidos en la literatura y bases de datos especializadas.

8.2. Análisis frecuencial en estrellas pulsantes

La metodología general descrita en la Sección 8.1 se implementa mediante el uso de herramientas computacionales especializadas. En este trabajo, se emplean dos enfoques principales para el análisis de las curvas de luz de las estrellas pulsantes que se estudiarán; por un lado, el software de dominio público Period04, que sirve como referencia y para la validación cruzada y por otra parte, un programa personalizado denominado “AD ASTRA Pulsantes”, desarrollado en Python por el presente autor. A continuación, se describe el procedimiento general de análisis seguido con cada una de estas herramientas.

8.2.1. Implementación del programa Period04

El programa Period04 [38], una herramienta reconocida en la comunidad astrosísmica (ver Sección 7.5), se emplea como un método de referencia para el análisis de las series temporales de estrellas pulsantes. El proceso general seguido dentro de Period04 para la identificación y caracterización de las frecuencias de pulsación se describe a continuación. Para una guía operativa detallada de los pasos ejecutados en Period04, se remite al lector al Apéndice C.I.1.

Carga y visualización de la serie temporal en Period04

La curva de luz observacional (tiempo, magnitud) de la estrella bajo estudio se importa inicialmente en el módulo *Time String* de Period04. Este módulo facilita la visualización gráfica de la serie temporal completa y permite realizar ajustes preliminares, como la sustracción del valor medio de los datos, una opción que se selecciona típicamente antes de proceder al análisis de Fourier.

Determinación de frecuencias y proceso de Pre-blanqueo en Period04

La búsqueda de frecuencias se basa en el módulo *Fourier* de Period04, el procedimiento iterativo se expone a continuación:

- **Análisis espectral inicial:** se calcula una Transformada Discreta de Fourier (DFT) de la serie temporal original. Se recomienda realizar una primera exploración en un rango amplio de frecuencias (ej., desde una frecuencia mínima hasta la frecuencia de Nyquist indicada por el programa) con un paso de muestreo moderado (ej., 0.01 c/d). El objetivo es identificar las regiones espectrales donde residen las frecuencias significativas. Posteriormente, el análisis se puede refinar focalizando en estos rangos de interés con un paso de muestreo más fino.

- **Identificación y ajuste de la primera frecuencia:** del espectro de amplitudes resultante, se identifica la frecuencia correspondiente al pico de mayor amplitud. Esta frecuencia, junto con su amplitud y fase estimadas, se transfiere al módulo *Fit*, donde sus parámetros son refinados mediante un ajuste por mínimos cuadrados a los datos originales.
- **Cálculo de S/N:** para evaluar la significancia de la frecuencia ajustada, Period04 permite calcular su relación señal/ruido (S/N). Esto se realiza típicamente en el menú *Special* con la opción `Calculate noise at frequency`, utilizando los residuos de la serie original tras el ajuste de la frecuencia en cuestión. Se adopta el criterio de $S/N \geq 4$ [34] para considerar una frecuencia como una detección real.
- **Pre-blanqueo y búsqueda de frecuencias adicionales:** si la frecuencia cumple el criterio de S/N, se procede al pre-blanqueo. En el módulo *Fourier*, se selecciona la opción de calcular la DFT basada en los *Residuals at original* (residuos respecto a los datos originales tras sustraer las frecuencias ya ajustadas y consideradas significativas). Se identifica el pico más alto en este nuevo periodograma de residuos, y se repite el proceso de ajuste (en el módulo *Fit*) y cálculo de S/N. Period04 permite el ajuste simultáneo de todas las frecuencias significativas encontradas hasta el momento para optimizar el modelo multifrecuencia.
- **Iteración:** los pasos de cálculo de periodograma de residuos, identificación de pico, ajuste y validación de S/N se repiten hasta que no se encuentran más frecuencias que satisfagan el umbral de significancia.

Durante este proceso, se utilizan las herramientas gráficas de Period04 (`Display graph` para periodogramas, `Phase diagram` para diagramas de fase de los residuos o del ajuste) para la inspección visual y la toma de decisiones.

Estrategia de identificación del tipo pulsante a partir de los resultados de Period04

Una vez que Period04 proporciona la lista final de frecuencias significativas (ν_i) junto con sus amplitudes (A_i) y fases (ϕ_i), la caracterización tentativa del tipo de estrella pulsante se realiza mediante un análisis posterior por parte del investigador. Este proceso comprende los siguientes pasos:

- Para establecer el rango de períodos de pulsación característico de la estrella, se identifica la frecuencia significativa más baja ($\nu_{\min, \text{sig}}$) y la más alta ($\nu_{\max, \text{sig}}$) del conjunto total de frecuencias detectadas. Únicamente estas dos frecuencias extremas se convierten a sus períodos correspondientes mediante la relación $P = 1/\nu$, obteniéndose así el período máximo observado, $P_{\max, \text{obs}} = 1/\nu_{\min, \text{sig}}$, y el período mínimo observado, $P_{\min, \text{obs}} = 1/\nu_{\max, \text{sig}}$.
- De forma análoga, se determina el rango de amplitudes observadas identificando la amplitud mínima ($A_{\min, \text{obs}}$) y máxima ($A_{\max, \text{obs}}$) directamente del conjunto de amplitudes (A_i) asociadas a las frecuencias significativas.
- Se realiza una comparación manual de estos rangos observados de período ($[P_{\min, \text{obs}}, P_{\max, \text{obs}}]$) y amplitud ($[A_{\min, \text{obs}}, A_{\max, \text{obs}}]$) con los rangos característicos de los diversos tipos de estrellas pulsantes documentados en la literatura especializada o en bases de datos (análogas a la utilizada por el programa “AD ASTRA pulsantes”), con el fin de inferir la clasificación más probable.

8.2. ANÁLISIS FRECUENCIAL EN ESTRELLAS PULSANTES

- Adicionalmente, se pueden analizar los diagramas de fase generados por Period04 para las frecuencias individuales más relevantes, con el objetivo de identificar morfologías de curva de luz distintivas que apoyen la clasificación.

8.2.2. Implementación del programa AD ASTRA Pulsantes

Como complemento y alternativa al análisis con Period04, se desarrolló el programa “AD ASTRA Pulsantes” utilizando el lenguaje Python dentro del entorno interactivo de Jupyter Notebook. Este programa tiene como objetivo sistematizar y automatizar en mayor medida el proceso de detección, validación y caracterización de frecuencias de pulsación, siguiendo los principios metodológicos descritos en la Sección 8.1. El flujo de trabajo del programa se estructura en los siguientes bloques funcionales:

Carga de datos, visualización inicial y configuración del análisis

Corresponde a la funcionalidad de los Bloques 0, 1, 2, 2.5 y 2.6 del programa:

- **Bloque 0 (Inicialización):** en este bloque se cargan las bibliotecas necesarias (NumPy, Matplotlib, SciPy, Astropy) y se definen las funciones modelo para los ajustes sinusoidales.
- **Bloque 1 (Carga de datos):** se carga la curva de luz (tiempo y magnitud) desde un archivo de texto especificado por la variable `data_file`. El programa calcula y muestra la duración total de la observación (T_{obs}) y una frecuencia de Nyquist efectiva ($f_{\text{Nyq,eff}}$). Esta última se determina mediante la expresión: $0.5/\Delta t_{\text{mínimo_positivo_único}}$. Finalmente, se visualiza la curva de luz original completa.
- **Bloque 2 (Periodograma inicial de inspección):** se calcula y grafica el periodograma de Lomb-Scargle de la curva de luz original, en un rango de frecuencias amplio por defecto (desde $\approx 0.1/T_{\text{obs}}$ hasta $f_{\text{Nyq,eff}}$), presentando el eje vertical en unidades de amplitud (mmag). Esta gráfica sirve para una inspección visual preliminar por parte del usuario.
- **Bloque 2.5 (Definición interactiva del rango de búsqueda):** el programa solicita interactivamente al usuario que defina un rango de frecuencias específico ($[f_{\text{min,B3}}, f_{\text{max,B3}}]$) que se utilizará para la búsqueda detallada de señales en la etapa de pre-blanqueo (Bloque 3). Si el usuario opta por no ingresar un rango, el programa emplea límites predeterminados (desde 1 c/d hasta la frecuencia de Nyquist calculada en el bloque 1 ($f_{\text{Nyq,eff}}$)).
- **Bloque 2.6 (Definición interactiva de frecuencias espurias conocidas):** el programa solicita interactivamente al usuario, que defina un rango de frecuencias específico en el que se omitirán frecuencias provenientes de ruido o fallas en la naturaleza del sistema.

Algoritmo de detección, refinamiento y validación de frecuencias

Esta subsección describe el núcleo del análisis frecuencial realizado por AD ASTRA Pulsantes, correspondiente a los Bloques 3 y 4, y sigue las etapas 3, 4 y 5 de la Metodología General (Sección 8.1):

Etapas 1: Detección iterativa de frecuencias candidatas por Pre-blanqueo secuencial (Bloque 3) Este proceso iterativo extrae secuencialmente las señales periódicas:

1. *Cálculo del periodograma de residuos*: se calcula el PLS de la serie temporal actual (datos originales en la primera iteración, residuos en las subsecuentes) dentro del rango $[f_{\min, B3}, f_{\max, B3}]$. El espectro de potencia estándar se convierte a un espectro de amplitud.
2. *Identificación del pico candidato*: se detecta la frecuencia (f_{cand}) del pico de mayor amplitud.
3. *Estimación de la señal (S)*: se realiza un ajuste LSQ rápido de una senoide a f_{cand} sobre los datos temporales actuales para obtener la amplitud de la señal (A_S) y una frecuencia ligeramente refinada ($f_{\text{refinada}, S}$).
4. *Estimación del ruido (N)*: se calcula como la amplitud promedio en el espectro de amplitud de los residuos actuales, dentro de una ventana de 5 c/d alrededor de $f_{\text{refinada}, S}$, excluyendo el pico.
5. *Criterio de significancia*: si $S/N < 4.0$, el bucle de detección se detiene.
6. *Ajuste y Pre-blanqueo*: si es significativa, se refinan los parámetros ($A_{\text{fit}}, f_{\text{fit}}, \phi_{\text{fit}}, C_{\text{fit}}$) de la frecuencia mediante un LSQ final a los datos actuales. Esta componente sinusoidal completa se almacena y se sustrae de los datos actuales para generar los residuos para la siguiente iteración. En cada paso, se generan gráficas diagnósticas del periodograma y los residuos, las cuales se cierran programáticamente para optimizar el uso de memoria.

La salida de este bloque consiste en una lista de frecuencias candidatas consideradas significativas. Esta lista, denominada `significant_frequencies_info_b3`, contiene sus parámetros derivados del pre-blanqueo secuencial. Para una ilustración detallada de esta secuencia iterativa de pre-blanqueo, se recomienda al lector dirigirse al Apéndice C, Sección C.I.2.

Etapla 2: Ajuste global simultáneo y validación final de frecuencias (Bloque 4) Las frecuencias candidatas obtenidas del Bloque 3 se someten a un refinamiento global:

1. *Modelo multifrecuencia*: se construye un modelo que es la suma de todas las N componentes sinusoidales candidatas más un offset global ($M(t) = C'_{\text{global}} + \sum_{i=1}^N A'_i \sin(2\pi f'_i t + \phi'_i)$).
2. *Ajuste LSQ Global*: este modelo se ajusta simultáneamente a la curva de luz original completa, optimizando todos los parámetros ($A'_i, f'_i, \phi'_i, C'_{\text{global}}$) y obteniendo sus errores formales.
3. *Reevaluación del S/N y validación final*: se calculan los residuos finales ($Res_{\text{final}}(t) = LC_{\text{original}}(t) - M_{\text{global}}(t)$). El S/N de cada frecuencia globalmente ajustada (f'_i) se reevalúa: la Señal (S'_i) es su amplitud A'_i , y el Ruido (N'_i) se estima del periodograma de amplitud de $Res_{\text{final}}(t)$. Solo las frecuencias que mantienen un $S/N'_{i, \text{global}} \geq 4.0$ se consideran robustamente detectadas y se incluyen en la lista final (`final_confirmed_frequencies_b4`).

Presentación de resultados del análisis frecuencial y caracterización tentativa

Los resultados del análisis frecuencial y la caracterización se gestionan mediante los Bloques 5, 6, 7 y 8 del programa:

- **Bloque 5 (Tabla resumen)**: genera una tabla formateada de las frecuencias finales confirmadas por el Bloque 4, detallando para cada una: número de identificación, frecuencia (con error), amplitud (con error), fase (con error) y S/N global.

8.2. ANÁLISIS FRECUENCIAL EN ESTRELLAS PULSANTES

- **Bloque 6 (Rangos observados):** calcula y muestra los rangos globales de período ($P_{\min, \text{obs}}$, $P_{\max, \text{obs}}$ en días, horas y minutos) y amplitud ($A_{\min, \text{obs}}$, $A_{\max, \text{obs}}$ en mmag) derivados del conjunto de frecuencias confirmadas.
- **Bloque 7 (Gráficos finales y retrospectivos):** produce un conjunto de visualizaciones finales (algunas opcionales para el usuario):
 - El periodograma de amplitud de la curva de luz original, con marcadores indicando la posición y amplitud de todas las frecuencias finales globalmente ajustadas.
 - Una secuencia de periodogramas de amplitud retrospectivos", que ilustran el proceso de preblanqueo si se hubieran utilizado los parámetros globalmente optimizados en cada paso, ordenados por amplitud decreciente. El último de esta secuencia es el periodograma de los residuos finales.
 - Diagramas de fase para cada frecuencia final confirmada, plegando la curva de luz original (corregida por el offset global) con sus parámetros globales.
- **Bloque 8 (Caracterización estelar tentativa):** el programa culmina con una caracterización tentativa del tipo de estrella pulsante. Para ello, compara automáticamente los rangos de período observados ($P_{\text{obs}, \min}$ a $P_{\text{obs}, \max}$) y de amplitud observada ($A_{\text{obs}, \min}$ a $A_{\text{obs}, \max}$) que habían sido obtenidos en el bloque 6, con una base de datos interna predefinida de tipos de estrellas pulsantes y sus rangos característicos.

El proceso de comparación se realiza en dos etapas:

- (i) *Filtro inicial por solapamiento:* para cada tipo estelar en la base de datos, se verifica si existe un solapamiento entre su rango de períodos catalogado ($[P_{\text{cat}, \min}, P_{\text{cat}, \max}]$) y el rango de períodos observado, Y si existe un solapamiento entre su rango de amplitudes catalogado ($[A_{\text{cat}, \min}, A_{\text{cat}, \max}]$) y el rango de amplitudes observado. Solo los tipos estelares que cumplen ambos criterios de solapamiento se consideran candidatos preliminares.
- (ii) *Cuantificación de la similitud de rangos mediante el índice de Jaccard:* para refinar la selección y ordenar los candidatos preliminares, se cuantifica la similitud entre los rangos observados y los rangos catalogados utilizando el índice de Jaccard (J). Este índice mide el grado de solapamiento relativo entre dos conjuntos o, en este caso, dos rangos continuos. Para un par de rangos, uno observado $R_{\text{obs}} = [\min_{\text{obs}}, \max_{\text{obs}}]$ y uno de catálogo $R_{\text{cat}} = [\min_{\text{cat}}, \max_{\text{cat}}]$, se define primero la longitud de su intersección L_I y la longitud del intervalo que abarca la unión de ambos $L_{U, \text{span}}$:

$$L_I = \max(0, \min(\max_{\text{obs}}, \max_{\text{cat}}) - \max(\min_{\text{obs}}, \min_{\text{cat}}))$$

$$L_{U, \text{span}} = \max(\max_{\text{obs}}, \max_{\text{cat}}) - \min(\min_{\text{obs}}, \min_{\text{cat}})$$

El índice de Jaccard se calcula entonces como:

$$J = \frac{L_I}{L_{U, \text{span}}} \quad (8.2.1)$$

donde J toma valores entre 0 (sin solapamiento) y 1 (solapamiento perfecto y rangos idénticos). Si $L_{U, \text{span}}$ es cero (lo que implica que ambos rangos son un único punto idéntico, y por

tanto L_I también es cero), se considera $J = 1$. Se calculan dos índices para cada tipo estelar candidato: J_P para la similitud de los rangos de período y J_A para la similitud de los rangos de amplitud.

Los tipos compatibles se presentan al usuario ordenados de forma descendente según una puntuación derivada de estos índices (priorizando J_A y luego J_P), mostrando además detalles adicionales del catálogo para cada tipo compatible según la teoría que fue descrita en la Sección 6.1.

8.3. Metodología frecuencial en estrellas de tipo solar

Para la caracterización de las estrellas de tipo solar, se adoptó un método de análisis híbrido, por el cual se obtienen listas de los valores de separación de frecuencias a analizar, con el programa Period04. Además por medio del programa personalizado AD ASTRA Solar, se calcula de manera automática los parámetros sísmicos globales y se realiza la propagación formal de sus incertidumbres.

El método divide el análisis en las siguientes partes secuenciales:

- Observación y curva de luz: una vez cargada la información a analizar, se obtiene la representación visual de los datos de brillo estelar vs tiempo, conocida como curva de luz. El programa AD ASTRA Solar es capaz de producir este tipo de gráfico una vez sean compilados los bloques 0 y 1 que se encargan de la importación de librerías y de la producción de este tipo de gráficos.
- Análisis frecuencial: se calcula el espectro de potencia por medio del periodograma de Lomb-Scargle debido a la naturaleza irregular y discreta de los datos suministrados. Este proceso puede completarse haciendo uso del programa Period04, a través del módulo de Fourier una vez el archivo de información de la serie temporal ha sido cargado. Por otra parte el programa AD ASTRA Solar, también permite calcular y generar un espectro de frecuencias al compilar el bloque 2.
- Identificación de modos: a partir del espectro de frecuencia, se detectan patrones de oscilación presente en la estructura tipo peine, los cuales son característicos de las estrellas tipo solar. Los picos individuales son clasificados y etiquetados manualmente según su grado esférico ($l = 0, 1, 2, 3$). Los valores de frecuencia, son obtenidos una vez se caractericen los picos que han sido seleccionados y se implemente el módulo Fit del programa Period04, que realiza un ajuste por mínimos cuadrados del pico seleccionado. El proceso se ejecuta seleccionando un solo pico a la vez y presionando la opción Improve all dentro del módulo Fit. Por otra parte, los errores de incertidumbre presente en el ruido de los datos, se calcula por medio de la función Show Analytical Uncertainties.
- Cálculo de parámetros globales: se derivan los valores de ($\Delta\nu$, $\delta\nu_{0.2}$ y ν_{max}) junto con sus errores, a partir del programa AD ASTRA Solar. Se disponen de las listas de frecuencias $l = 0$ y $l = 2$ previamente obtenidas, en las ecuaciones 6.2.2 y 6.2.3. De esta manera, se calcula el promedio de las diferencias entre frecuencias $l = 0$ consecutivas, para encontrar el valor medio de la gran separación:

$$\langle \Delta\nu \rangle = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} (\nu_{i+1, l=0} - \nu_{i, l=0}) \quad (8.3.1)$$

Asimismo, se calcula el promedio de las diferencias entre los modos $l = 0$ y $l = 2$ del mismo orden n , para obtener el valor medio de la pequeña separación:

$$\langle \delta\nu_{02} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\nu_{i,l=0} - \nu_{i,l=2}) \quad (8.3.2)$$

La frecuencia máxima ($\langle \nu_{max} \rangle$), se estima como el promedio de las frecuencias de los modos $l = 0$ identificados, ya que estos definen el centro de la envolvente de potencia.

Finalmente, el programa calcula los errores de los promedios utilizando la fórmula estándar para la propagación de la incertidumbre, en ella cada punto de datos tiene su propia incertidumbre individual. De esta manera, los errores de cada resta consecutiva $\sigma_{\Delta\nu,i}$ y de cada resta individual $\sigma_{\delta\nu,i}$ se calculan por medio de:

$$\sigma_{\Delta\nu,i} = \sqrt{(\sigma_{\nu,i+1,l=0})^2 + (\sigma_{\nu,i,l=0})^2} \quad (8.3.3)$$

$$\sigma_{\delta\nu,i} = \sqrt{(\sigma_{\nu,i,l=0})^2 + (\sigma_{\nu,i,l=2})^2} \quad (8.3.4)$$

Luego, los errores promedio de las $N - 1$ diferencias entre los errores obtenidos para la gran separación, y las N restas de la pequeña separación, se derivan a partir de:

$$\sigma_{\langle \Delta\nu \rangle} = \frac{1}{N-1} \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} (\sigma_{\Delta\nu,i})^2} \quad (8.3.5)$$

$$\sigma_{\langle \delta\nu_{02} \rangle} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma_{\delta\nu,i})^2} \quad (8.3.6)$$

- Caracterización estelar: una vez obtenidos los parámetros globales, se implementa las relaciones de escala descritas en las ecuaciones 6.2.4 y 6.2.5, para derivar la masa y radio de la estrella. Los errores de propagación de este tipo de medidas que son funciones de productos y potencias, esta dada por:

$$\left(\frac{\delta z}{z} \right)^2 = a^2 \left(\frac{\delta x}{x} \right)^2 + b^2 \left(\frac{\delta y}{y} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\delta w}{w} \right)^2,$$

donde la variable z se define como:

$$z = A \cdot x^a \cdot y^b \cdot w^c$$

Así pues, los errores relativos de masa y radio de la estrella se describen como:

$$\left(\frac{\sigma_R}{R} \right)^2 = \left(1 \cdot \frac{\sigma_{\langle \nu_{max} \rangle}}{\langle \nu_{max} \rangle} \right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{\sigma_{\langle \Delta\nu \rangle}}{\langle \Delta\nu \rangle} \right)^2 + \left(0.5 \cdot \frac{\sigma_{T_{eff}}}{T_{eff}} \right)^2 \quad (8.3.7)$$

$$\left(\frac{\sigma_M}{M} \right)^2 = \left(3 \cdot \frac{\sigma_{\langle \nu_{max} \rangle}}{\langle \nu_{max} \rangle} \right)^2 + \left(-4 \cdot \frac{\sigma_{\langle \Delta\nu \rangle}}{\langle \Delta\nu \rangle} \right)^2 + \left(1.5 \cdot \frac{\sigma_{T_{eff}}}{T_{eff}} \right)^2 \quad (8.3.8)$$



- Validación y estado evolutivo: haciendo uso de los parámetros globales ($\langle \Delta\nu \rangle$, $\langle \delta\nu_{02} \rangle$), se comprueba el valor de masa obtenida de la estrella, ubicando sus valores respectivamente en un diagrama CD, tal y como se indica en la Figura 6.2.3. Adicionalmente, el diagrama permite conocer su estado evolutivo respecto al consumo de hidrógeno que ha realizado la estrella en su núcleo.

Capítulo 9

Resultados del Análisis Astrosísmico

En este capítulo, se exponen los hallazgos obtenidos tras la aplicación de las técnicas astrosísmicas descritas previamente, al análisis de datos observacionales de estrellas tipo pulsante y solar. Las metodologías detalladas en el Capítulo 8 se aplican a cuatro curvas de luz distintas, entre ellas se encuentran Star1, Star2, Star3 y el Sol.

En cuestión el análisis de estrellas pulsantes que se describe en la Sección 8.2, se implementó para las curvas de luz de las estrellas denominadas Star1 y Star2. Por otra parte, la metodología para el estudio de oscilaciones de tipo solar, expuesta en la Sección 8.3, se aplicó al análisis de la estrella denominada Star3 y a datos solares.

9.1. Resultados para Star1

9.1.1. Presentación de la curva de luz de Star1

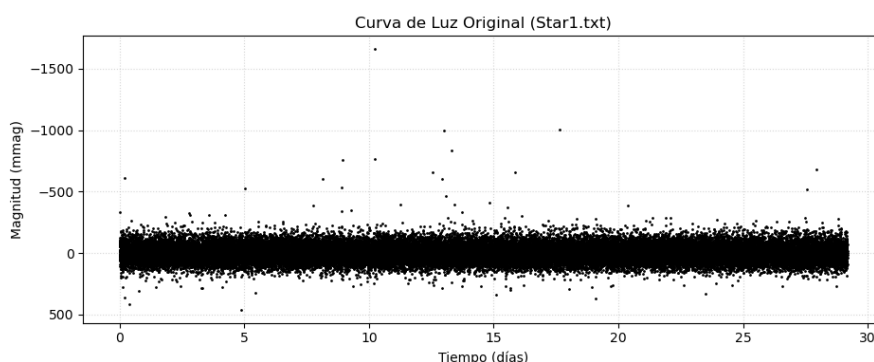


Figura 9.1.1: Curva de luz completa de la estrella Star1 obtenida por el telescopio Kepler.

La serie temporal analizada para Star1 consiste en datos fotométricos obtenidos por el telescopio espacial Kepler, los cuales fueron descargados de archivos públicos de la misión. La Figura 9.1.1 muestra la curva

de luz completa de Star1, representada como magnitud en milimagnitudes (mmag) en función del tiempo en días. Es importante mencionar que siguiendo la convención astronómica para las magnitudes, valores numéricamente menores en el eje vertical (magnitud) corresponden a un mayor brillo de la estrella; por tal motivo el eje Y se presenta invertido.

Esta serie temporal abarca un intervalo total de observación de 29.18 días, en los que fueron tomados 42700 datos. Visualmente la curva de luz exhibe una clara variabilidad fotométrica, sugiriendo la presencia de uno o más modos de pulsación. Se debe tener presente que los datos de Kepler pueden contener artefactos instrumentales o frecuencias espurias conocidas, entre ellas 391.53c/d y 440.47c/d corresponden a estas frecuencias.

9.1.2. Análisis y resultados con Period04 para Star1

Conforme a la metodología descrita en la Sección 8.2.1, se llevó a cabo un análisis de la curva de luz de la estrella Star1 mediante el empleo del software Period04 [38]. Lo anterior con el propósito de identificar las frecuencias de pulsación características y la caracterización de la variabilidad estelar.

Frecuencias de pulsación detectadas con Period04

El análisis de la serie temporal de Star1 en Period04, se llevó a cabo entre un rango de frecuencias de 250 a 500 c/d, aplicando un umbral de S/N de 4 para la selección de picos. El proceso iterativo de pre-blanqueo condujo a la identificación de 11 frecuencias significativas, de las cuales 2 de estas frecuencias correspondían a las mencionadas señales periódicas espúreas que introduce el satélite Kepler. Por tanto al eliminarlas, las frecuencias de oscilación de Star1, se indican en la Tabla 9.1.1.

Tabla 9.1.1: Análisis del espectro de amplitudes de Star1 con Period04. En la primera columna se detalla la frecuencia significativa encontrada, en la tercera columna la amplitud de las oscilaciones, en la cuarta columna la fase y finalmente los valores de señal ruido iterativo y global.

No.	Frecuencia (c/d)	Amplitud (mmag)	Fase (rad)	S/N Iterativo	S/N Global
F_1	372.375 ± 0.001	12.367 ± 0.464	0.554 ± 0.006	12.1	22.4
F_2	372.084 ± 0.001	10.294 ± 0.464	0.726 ± 0.007	14.1	19.0
F_3	372.671 ± 0.001	7.748 ± 0.464	0.646 ± 0.010	13.5	13.5
F_4	438.052 ± 0.001	7.764 ± 0.464	0.015 ± 0.010	10.2	13.5
F_5	438.329 ± 0.001	7.321 ± 0.464	0.677 ± 0.010	12.2	14.8
F_6	318.111 ± 0.002	4.778 ± 0.464	0.073 ± 0.015	6.7	13.5
F_7	318.383 ± 0.002	3.996 ± 0.464	0.584 ± 0.018	6.2	7.5
F_8	284.623 ± 0.003	3.221 ± 0.464	0.546 ± 0.023	4.9	6.2
F_9	438.602 ± 0.003	2.822 ± 0.464	0.148 ± 0.026	5.4	5.4

Adicionalmente, la Figura 9.1.2 muestra el periodograma de amplitud de los residuos finales para Star1, obtenido con Period04 tras la sustracción de las 9 frecuencias significativas listadas en la Tabla 9.1.1. En este espectro residual que se aprecia, el ruido de fondo presenta una distribución relativamente plana, consistente con un comportamiento de tipo ruido blanco en esta región. El proceso de pre-blanqueo en Period04

9.1. RESULTADOS PARA STAR1

concluyó hasta la 11ava iteración debido a que la siguiente frecuencia candidata identificada por el software, $F_{12} \approx 317.711$ c/d, arrojó una relación señal/ruido (S/N) inferior al umbral de significancia de 4. Aunque en el periodograma de la Figura 9.1.2 se observa un pico residual prominente en torno a $F \approx 438.60$ c/d con una amplitud de aproximada de 2.81 mmag, este, al igual que otros picos residuales, no alcanzó el criterio S/N requerido para ser considerado una detección significativa adicional. La presencia de este pico en 438.60 c/d podría ser indicio de un alias de alguna de las frecuencias ya extraídas o de una señal remanente de muy baja significancia. En consecuencia, se considera que no existen más señales periódicas robustas en los datos de Star1 según este análisis en el Period04 y el criterio S/N adoptado.

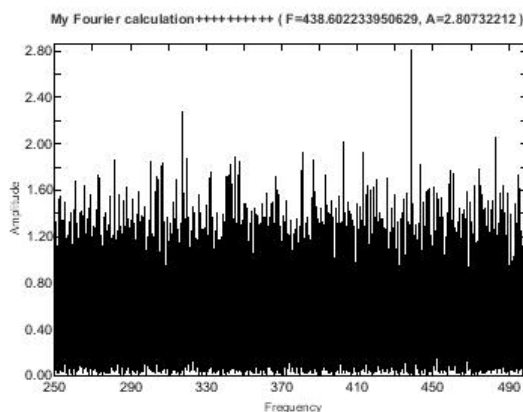


Figura 9.1.2: Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star1 tras la sustracción de 11 frecuencias significativas utilizando Period04.

Clasificación estelar tentativa basada en Period04

Para identificar el tipo pulsante que se ha trabajado, se determinan los límites o intervalos de periodo en los cuales pulsa. Teniendo en cuenta lo anterior, se consideran la mínima y la máxima frecuencia para obtener el máximo y mínimo periodo respectivamente. Empleando la forma tradicional de encontrar periodo,

$$T_i = \frac{1}{F_i} \quad (9.1.1)$$

Se obtienen los valores en la Tabla 9.1.2

Frecuencia (c/d)	Período (días)	Período (horas)	Período (minutos)
284.622	0.003513	0.08431	5.06
438.602	0.002280	0.05470	3.28

Tabla 9.1.2: Periodos de oscilación de Star1 con la respectiva amplitud.

Análogamente, el rango de las amplitudes correspondientes a las frecuencias significativas se determina identificando el valor mínimo y máximo. Para la estrella en estudio, las amplitudes de pulsación observadas se encuentran comprendidas entre 2.8 mmag y 12.5 mmag. Por tanto, a partir de estos intervalos establecidos

para la estrella, se procede a inferir su naturaleza pulsacional mediante la comparación con un catálogo de propiedades fundamentales de estrellas variables conocidas. Este catálogo, que sirve de base para la clasificación, se detalla en el Apéndice C, Sección C.I.3.

En concordancia con el procedimiento descrito, se realizó una preselección de tipos estelares cuyos rangos de período característicos solapaban con el de Star1; estos fueron destacados mediante recuadros verdes en el catálogo de referencia como se indica en la Figura 9.1.3. Posteriormente, se aplicó un filtro más restrictivo basado en la amplitud de brillo, se buscaron aquellos tipos cuya amplitud máxima no excediera significativamente los ~ 12 mmag observados y cuyo rango general de amplitud fuera el más congruente con el de Star1. Este segundo criterio condujo a la identificación de las estrellas roAp como la clasificación más probable. El rango de amplitud de las roAp (< 10 mmag) presenta la mayor afinidad con el del objeto de estudio.

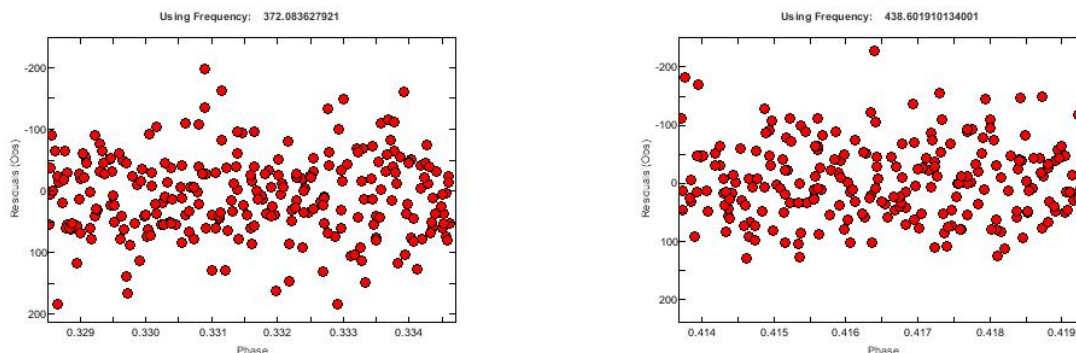
Class name adopted here	Other names in the literature	Mode Type	Period Ranges	Amplitudes (brightness)	Amplitudes (velocity)	$\log T_{\text{eff}}$ (K) approx. range	$\log L/L_{\odot}$ approx. range
Solar-like pulsator	main sequence red giants	p p	3 to 10 min few hours	few ppm few 10 ppm	$< 50 \text{ cm s}^{-1}$ few m s^{-1}	[3.70, 3.82] [3.65, 3.70]	[−0.5, 1.0] [−0.5, 2.0]
γ Dor	slowly pulsating F	g	8 h to 5 d	< 50 mmag	$< 5 \text{ km s}^{-1}$	[3.83, 3.90]	[0.7, 1.1]
δ Sct	SX Phe (Pop. II)	p	15 min to 8 h	< 0.3 mag	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.82, 3.95]	[0.6, 2.0]
roAp	—	p	5 to 22 min	< 10 mmag	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.82, 3.93]	[0.8, 1.5]
SPB	53 Per	g	0.5 to 5 d	< 50 mmag	$< 15 \text{ km s}^{-1}$	[4.05, 4.35]	[2.0, 4.0]
β Cep	β CMA, ζ Oph (SpT O) 53 Per	p&g p	1 to 12 h (p) few days (g)	< 0.1 mag < 0.01 mag	$< 20 \text{ km s}^{-1}$ $< 10 \text{ km s}^{-1}$	[4.25, 4.50]	[3.2, 5.0]
pulsating Be	λ Eri, SPBe	p&g	0.1 to 5 d	< 20 mmag	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[4.05, 4.50]	[2.0, 5.0]
pre-MS pulsator	pulsating T Tauri pulsating Herbig Ae/Be pulsating T Tauri	p p g	1 to 8 h 1 to 8 h 8 h to 5 d	< 5 mmag < 5 mmag < 5 mmag			
p-mode sdBV	EC14026, V361 Hya	p	80 to 800 s	< 0.1 mag		[4.20, 4.50]	[1.2, 2.2]
g-mode sdBV	PG1716+426, Betsy star, lpsdBV	g	0.5 to 3 h	< 0.01 mag		[4.40, 4.60]	[1.2, 2.6]
PNNV	ZZ Lep, [WCE]	g	5 h to 5 d	< 0.3 mag			
GW Vir	DOV, PG1159	g	5 to 80 min	< 0.2 mag		[4.80, 5.10]	[1.5, 3.5]
DBV	V777 Her	g	2 to 16 min	< 0.2 mag		[4.40, 4.60]	[−1.0, 0.7]
DAV	ZZ Ceti	g	0.5 to 25 min	< 0.2 mag		[3.95, 4.15]	[−2.6, −2.2]

Figura 9.1.3: Posible tipo de estrella correspondiente a Star1, en verde la selección por periodo y en recuadro azul por periodo y amplitud.

Adicionalmente, se generaron diagramas de fase en Period04 para las frecuencias identificadas, plegando la curva de luz original con los períodos correspondientes. Dada la naturaleza multimodal de Star1, con múltiples frecuencias de amplitud comparable presentes simultáneamente en los datos, los diagramas de fase individuales para la mayoría de las frecuencias mostraron una considerable dispersión de los puntos. Debido a ello y que la periodicidad en estos diagramas no son claros, la forma de la onda no es suficientemente distintiva para ser utilizada como un criterio primario de clasificación en este caso.

Por consiguiente, la caracterización tentativa de Star1 como una estrella roAp a partir del análisis con Period04, se fundamenta predominantemente en la concordancia de los rangos de período y amplitud observados con los valores típicos para esta clase de pulsadores.

9.1. RESULTADOS PARA STAR1



(a) Diagrama de fase tras la primera iteración.

(b) Diagrama de fase en la última iteración.

Figura 9.1.4: Gráficas que muestran el diagrama de fase luego de la primera y última transformada de Fourier. No es posible ver un diagrama típico dado la gran cantidad de puntos involucrado.

9.1.3. Análisis y resultados con AD ASTRA Pulsantes para Star1

La curva de luz de Star1 se analizó de forma independiente con el programa AD ASTRA Pulsantes, cuya metodología algorítmica se describió en detalle en la Sección 8.2.2. Para el análisis se empleó un rango de búsqueda de frecuencias para el pre-blanqueo entre 250 y 500c/d, esto con el objetivo de poder analizar los resultados con los obtenidos en el Period04; además, se instruyó al programa mediante la funcionalidad del Bloque 2.6 para que ignorara las regiones espectrales conocidas por contener artefactos instrumentales del telescopio Kepler, en particular alrededor de 391.53 ± 0.1 , c/d y 440.47 ± 0.1 , c/d.

Frecuencias de pulsación y parámetros derivados con AD ASTRA Pulsantes

Tabla 9.1.3: Frecuencias significativas, amplitudes, fases y valores de S/N iterativo y global para Star1 detectadas con AD ASTRA Pulsantes.

No.	Frecuencia (c/d)	Amplitud (mmag)	Fase (rad)	S/N Iterativo (Bloque 3)	S/N Global (Bloque 4)
F1	372.375 ± 0.001	12.361 ± 0.470	3.482 ± 0.076	16.18	21.85
F2	372.084 ± 0.001	10.300 ± 0.470	4.557 ± 0.091	15.50	18.07
F3	372.671 ± 0.001	7.796 ± 0.470	4.061 ± 0.120	13.58	13.83
F4	438.052 ± 0.001	7.789 ± 0.470	0.089 ± 0.120	11.27	11.38
F5	438.329 ± 0.001	7.354 ± 0.470	4.262 ± 0.130	11.86	10.62
F6	318.111 ± 0.002	4.779 ± 0.470	0.459 ± 0.200	7.39	7.62
F7	318.383 ± 0.002	3.996 ± 0.470	3.670 ± 0.230	6.20	6.31
F8	284.623 ± 0.003	3.219 ± 0.470	3.427 ± 0.290	4.98	4.98
F9	438.602 ± 0.003	2.801 ± 0.470	0.905 ± 0.330	4.71	4.05

Tras el proceso de detección iterativa, el ajuste global simultáneo y la validación final por relación señal/ruido ($S/N > 4$), el programa AD ASTRA Pulsantes identificó un total de 9 frecuencias de pulsación consideradas de origen estelar. La Tabla 9.1.3 presenta los parámetros detallados de estas frecuencias confirmadas incluyendo su amplitud, fase y valores de fase durante el proceso de pre-blanqueo (S/N iterativo) y S/N_{global} con los errores formales asociados. En base a este conjunto de 9 frecuencias estelares confirmadas, se determinó mediante el Bloque 6 del programa, que Star1 presenta pulsaciones en un rango de períodos como los descritos en la Tabla 9.1.4. El rango de amplitudes correspondientes a las frecuencias significativas se determina identificando el valor mínimo y máximo entre ellas. Estas se encuentran comprendidas entre 2.8 mmag y 12.4 mmag.

Tabla 9.1.4: Períodos de oscilación correspondientes a las frecuencias mínima y máxima detectadas en Star1 con el programa AD ASTRA Pulsantes.

Frecuencia (c/d)	Período (días)	Período (horas)	Período (minutos)
284.622620	0.003513	0.084	5.06
438.601977	0.002280	0.055	3.28

La Figura 9.1.5 muestra el periodograma de amplitud de la curva de luz original de Star1. En ella se han señalado las posiciones y amplitudes de las 9 frecuencias estelares finales confirmadas por AD ASTRA Pulsantes. Se puede observar cómo estas componentes se destacan sobre el nivel de ruido general del espectro original.

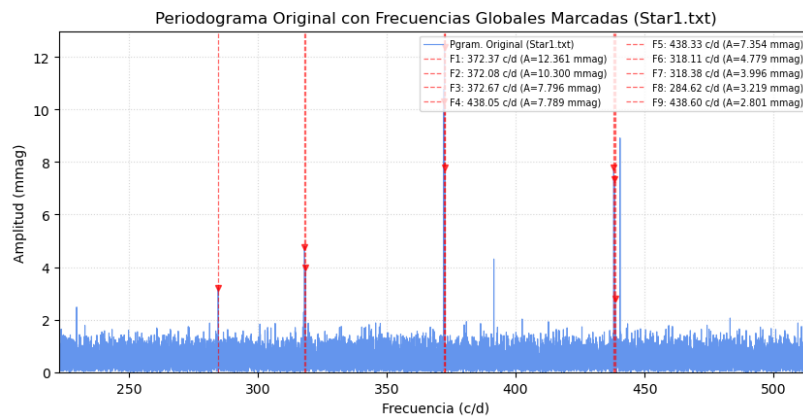


Figura 9.1.5: La Figura muestra el periodograma de amplitud de la curva de luz original de Star1. Las líneas verticales discontinuas (rojas) indican las posiciones y las puntas de flecha las amplitudes de las 9 frecuencias estelares significativas finales.

El espectro residual que se puede apreciar en la Figura 9.1.6 revela que, tras la sustracción del modelo multifrecuencia compuesto por las 9 señales estelares, los picos más prominentes que persisten corresponden a frecuencias cercanas a 391.53 y 440.47c/d. Estas frecuencias son consistentes con artefactos instrumentales bien documentados para el telescopio Kepler. Su presencia en los residuos finales y la ausencia en la lista de frecuencias estelares modeladas (Tabla 9.1.3), subraya la efectividad del procedimiento implementado en identificar y excluir estas señales espurias conocidas durante el proceso de detección de las pulsaciones intrínsecas de Star1. Por tanto, se considera que el modelo de 9 frecuencias estelares captura adecuadamente la variabilidad astrofísica significativa.

9.1. RESULTADOS PARA STAR1

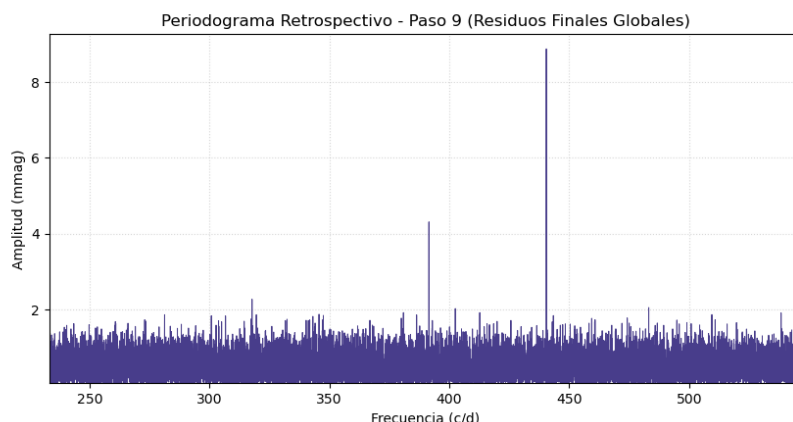


Figura 9.1.6: Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star1, tras la sustracción del modelo multifrecuencia global. Los picos residuales más prominentes corresponden a frecuencias instrumentales del telescopio Kepler, las cuales fueron exitosamente excluidas del modelo de pulsaciones estelares.

Caracterización estelar tentativa del tipo pulsante con AD ASTRA Pulsantes

Una vez obtenidos los rangos de período y amplitud observados para las 9 frecuencias estelares significativas de Star1, el Bloque 8 del programa realizó una comparación automática con la base de datos de tipos de estrellas pulsantes que se presentan en las tablas de referencia descritas en la Sección C.I.3. Esta comparación cuantitativa empleó el índice de Jaccard J_P para períodos y J_A para amplitudes, tal como se describe en la ecuación 8.2.1 para medir la similitud entre los rangos observados y los rangos característicos de cada tipo estelar catalogado.

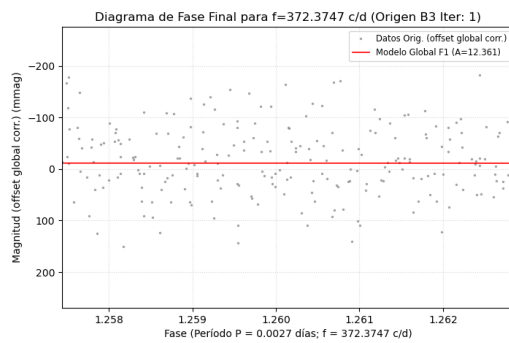
Los tipos estelares que presentaron mayor compatibilidad con las características observadas de Star1, se ordenan en la Tabla 9.1.5 de manera descendente según la similitud de su rango de amplitud J_A y seguido por la similitud del rango de período J_P .

Tabla 9.1.5: Clasificación tentativa de Star1 basada en la similitud de rangos de período (J_P) y amplitud (J_A). Los candidatos se ordenan por J_A descendente, luego por J_P descendente.

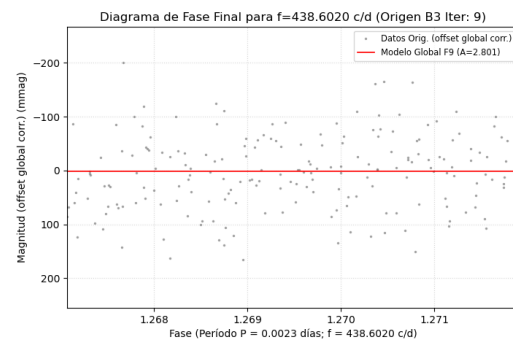
Tipo Estelar	Otros Nombres / Prototipos	Índice Jaccard Período (J_P)	Índice Jaccard Amplitud (J_A)
roAp	Estrellas Ap de oscilación rápida	0.003	0.59
sdBV (p)	EC14026, V361 Hya, sdBV_r	0.148	0.10
DBV	V777 Her, Enanas Blancas (He)	0.127	0.05
GW Vir	PG1159, DOV, pre-Enanas Blancas	0.001	0.05
DAV	ZZ Ceti, Enanas Blancas (H)	0.072	0.05

Considerando la alta similitud en el rango de amplitud ($J_A = 0.59$) y a pesar de la baja similitud en el rango de período ($J_P = 0.00$), la clasificación tentativa más destacada para Star1 por medio del programa AD ASTRA Pulsantes, corresponde a la estrella **roAp** o estrella Ap de oscilación rápida.

Los diagramas de fase presentes en la Figura 9.1.7, ilustran la naturaleza física de las pulsaciones de la frecuencia de mayor amplitud globalmente ajustada, así como el de la menor amplitud detectada. Para esta primera frecuencia los datos originales plegados, muestran una dispersión considerable debido a la presencia de otros modos de pulsación, la variación principal de la frecuencia con mayor amplitud (gráfica 9.1.7a), sigue la forma de la componente sinusoidal ajustada. Por otro lado, el diagrama de fase para la frecuencia de menor amplitud detectada (gráfica 9.1.7b), exhibe una dispersión mucho mayor, en cuyo caso la señal que corresponde a dicha frecuencia se encuentra absorbida dentro de las variaciones dominantes de las otras componentes de mayor amplitud. En ninguno de los diagramas de fase analizados para Star1 se observaron desviaciones claras y sistemáticas de una forma de onda sinusoidal que sugirieran tipos pulsacionales con morfologías de curva de luz marcadamente no sinusoidales tales como, las de estrellas RR Lyrae tipo RRab o Cefeidas. Sin embargo, esta apariencia es consistente con la superposición de múltiples modos de pulsación predominantemente sinusoidales, como se espera para las estrellas roAp o sdB.



(a) Diagrama de fase tras la primera iteración.



(b) Diagrama de fase en la última iteración.

Figura 9.1.7: Gráficas que muestran los diagramas de fase de la primera y última iteración, obtenidos en AD ASTRA Pulsantes para Star1.

9.2. Resultados para Star2

En esta sección se detallan los hallazgos del análisis astrosísmico efectuado sobre la curva de luz de la estrella denominada Star2, utilizando los mismos dos enfoques metodológicos aplicados a la primera estrella, el software Period04 y el programa AD ASTRA Pulsantes.

9.2.1. Presentación de la curva de luz de Star2

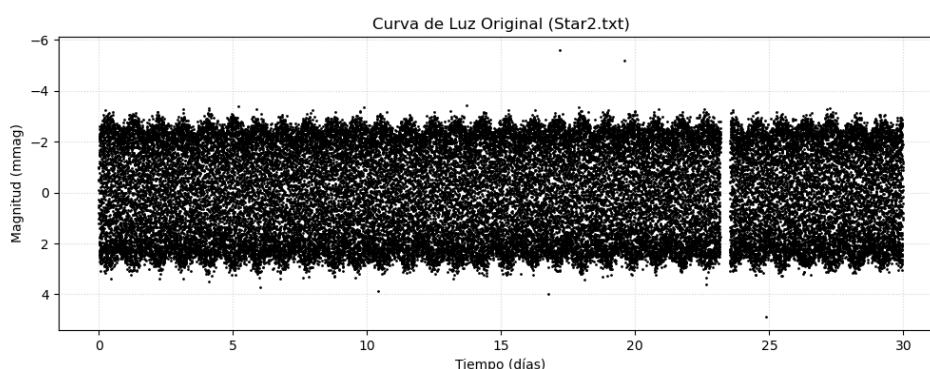


Figura 9.2.1: Curva de luz completa de la estrella Star2 obtenida por el telescopio Kepler.

La serie temporal analizada para Star2 corresponde a datos fotométricos del telescopio espacial Kepler. La Figura 9.2.1 presenta la curva de luz completa, graficada como magnitud (mmag) en función del tiempo (días). La escala temporal va de 0 a 29.97 días en la que fueron tomados 43372 datos. Cabe resaltar que hay un gap o interrupción muy notable en los datos, la cual se ve reflejada como una banda vertical casi vacía de puntos alrededor de 23 y 24 días. Así mismo se pueden apreciar algunos puntos alejados de la curva de luz conocidos como outliers. Para este estudio, también es importante reconocer los valores espúreos de frecuencia que son introducidos por el telescopio Kepler ($391.53c/d$, $440.47c/d$).

9.2.2. Análisis y resultados con Period04 para Star2

El análisis de Star2 con el software Period04, se realizó siguiendo el procedimiento general descrito en la Sección 8.2.1. En el se introdujo un rango e frecuencias entre 18 y 27 c/d , en el que se tuvo presente el criterio de parada de $S/N > 4$.

Frecuencias de pulsación detectadas con Period04

Durante el análisis se detectaron 6 frecuencias significativas comprendidas entre los rangos de 20 a 24 c/d ; es decir, ninguna de ellas pertenecientes a las señales espúreas ya mencionadas; por tanto fueron considerados como frecuencias estelares. Sus parámetros se resumen en la Tabla 9.2.1.

Tabla 9.2.1: Análisis del espectro de amplitudes de Star2 con Period04. En la primera columna se especifica la frecuencia significativa encontrada, en la tercera columna la amplitud de las oscilaciones, en la cuarta columna la fase y finalmente los valores de señal ruido iterativo y global.

No.	Frecuencia (c/d)	Amplitud (mmag)	Fase (rad)	S/N Iterativo	S/N Global
F_1	$22.790 \pm 1.2 \times 10^{-5}$	2.537 ± 0.002	$0.907 \pm 1.0 \times 10^{-4}$	414.3	1307.5
F_2	$21.714 \pm 1.2 \times 10^{-4}$	0.250 ± 0.002	0.286 ± 0.001	76.9	135.6
F_3	23.021 ± 0.001	0.039 ± 0.002	0.745 ± 0.006	16.6	19.5
F_4	20.575 ± 0.001	0.032 ± 0.002	0.935 ± 0.008	18.1	17.8
F_5	22.015 ± 0.001	0.030 ± 0.002	0.859 ± 0.008	11.2	16.8
F_6	21.965 ± 0.001	0.025 ± 0.002	0.468 ± 0.010	13.5	13.5

El proceso iterativo de pre-blanqueo seguido en Period04 para la identificación de estas componentes se ilustra con mayor detalle, incluyendo los periodogramas de residuos intermedios, en el Apéndice C, Sección C.I.1

Para evaluar el espectro residual final tras la extracción de todas las señales significativas, se procedió a calcular una iteración adicional. En la Figura 9.2.2 se observa, el espectro de amplitudes sin las frecuencias significativas que fueron obtenidas. En la escala focal entre 18 y 27 c/d que se ha trabajado, solo se alcanza apreciar señales en forma de ruido.

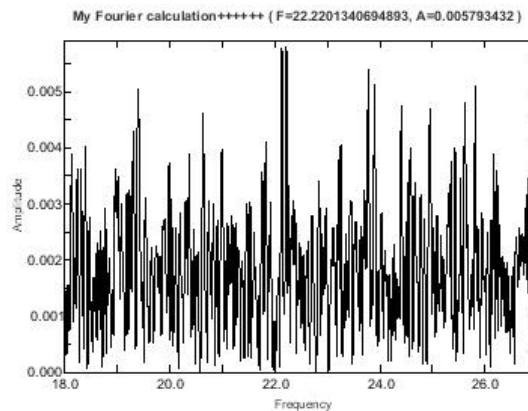


Figura 9.2.2: Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star2 tras la sustracción de 6 frecuencias significativas utilizando Period04. El pico más alto en esta visualización se indica en el título del gráfico original del programa.

Clasificación tentativa basada en Period04

Para identificar el tipo pulsante que se ha trabajado, se determinan los límites o intervalos de periodo en los cuales pulsa; así pues, se consideran la mínima y la máxima frecuencia para obtener el máximo y mínimo periodo respectivamente. Empleando la ecuación 9.1.1, se obtiene los valores de la Tabla 9.2.2.

Así mismo, son seleccionados los valores máximos y mínimos de amplitud de las frecuencias de oscilación,

9.2. RESULTADOS PARA STAR2

Tabla 9.2.2: Períodos de oscilación correspondientes a las frecuencias estelares extremas (mínima y máxima) detectadas en Star2 con el programa Period04.

Frecuencia (c/d)	Período (días)	Período (horas)	Período (minutos)
20.575	0.04860	1.1664	69.98
23.021	0.04344	1.0426	62.56

estos corresponden a 2.537 y 0.025 mmag. Por tanto, a partir de estos intervalos establecidos para la estrella, se procede a inferir su naturaleza pulsacional mediante la comparación con el catálogo de estrellas pulsantes y sus propiedades descrito en el Apéndice C, Sección C.I.3.

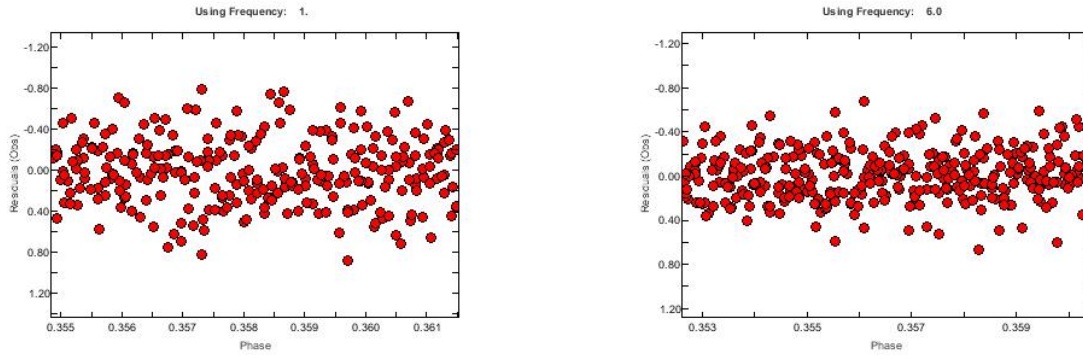
En la Figura 9.2.3, fueron seleccionadas en un recuadro verde las posibles clasificaciones estelares de acuerdo con el criterio de periodo de oscilación; se infieren estrellas como gigantes rojas del tipo solar, δ Sct, β Cep, pre-MS pulsante, una estrella sdBV de modos-g o finalmente una GW Vir.

Class name adopted here	Other names in the literature	Mode Type	Period Ranges	Amplitudes (brightness)	Amplitudes (velocity)	log T_{eff} (K) approx. range	log $L/L_{\odot}$ approx. range
Solar-like	main sequence	p	3 to 10 min	few ppm	$< 50 \text{ cm s}^{-1}$	[3.70, 3.82]	[-0.5, 1.0]
pulsator	red giants	p	few hours	few 10 ppm	few m s^{-1}	[3.65, 3.70]	[-0.5, 2.0]
γ Dor	slowly pulsating F	g	8 h to 5 d	$< 50 \text{ mmag}$	$< 5 \text{ km s}^{-1}$	[3.83, 3.90]	[0.7, 1.1]
δ Sct	SX Phe (Pop. II)	p	15 min to 8 h	$< 0.3 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.82, 3.95]	[0.6, 2.0]
roAp	—	p	5 to 22 min	$< 10 \text{ mmag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.82, 3.93]	[0.8, 1.5]
SPB	53 Per	g	0.5 to 5 d	$< 50 \text{ mmag}$	$< 15 \text{ km s}^{-1}$	[4.05, 4.35]	[2.0, 4.0]
β Cep	β CMa, ζ Oph (SpT O)	p&g	1 to 12 h (p)	$< 0.1 \text{ mag}$	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[4.25, 4.50]	[3.2, 5.0]
	53 Per		few days (g)	$< 0.01 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$		
pulsating Be	λ Eri, SPBe	p&g	0.1 to 5 d	$< 20 \text{ mmag}$	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[4.05, 4.50]	[2.0, 5.0]
pre-MS pulsator	pulsating T Tauri	p	1 to 8 h	$< 5 \text{ mmag}$			
	pulsating Herbig Ae/Be	p	1 to 8 h	$< 5 \text{ mmag}$			
	pulsating T Tauri	g	8 h to 5 d	$< 5 \text{ mmag}$			
p-mode sdBV	EC14026, V361 Hya	p	80 to 800 s	$< 0.1 \text{ mag}$		[4.20, 4.50]	[1.2, 2.2]
g-mode sdBV	PG1716+426, Betsy star, lpsdBV	g	0.5 to 3 h	$< 0.01 \text{ mag}$		[4.40, 4.60]	[1.2, 2.6]
PNNV	ZZ Lep, [WCE]	g	5 h to 5 d	$< 0.3 \text{ mag}$			
GW Vir	DOV, PG1159	g	5 to 80 min	$< 0.2 \text{ mag}$		[4.80, 5.10]	[1.5, 3.5]
DBV	V777 Her	g	2 to 16 min	$< 0.2 \text{ mag}$		[4.40, 4.60]	[-1.0, 0.7]
DAV	ZZ Ceti	g	0.5 to 25 min	$< 0.2 \text{ mag}$		[3.95, 4.15]	[-2.6, -2.2]

Figura 9.2.3: Posible tipo de estrella correspondiente a Star2, en verde la selección por periodo y en recuadro azul por periodo y amplitud.

Sin embargo, una clasificación tentativa más acertada será aquella en la que se considere su amplitud de brillantez más cercana, entre estas aquella exclusivamente menor a 2.5 mmag fue marcada en un recuadro azul, una pulsante pre-MS cuyo rango de amplitud menor a 5 mmag, es en este orden de ideas, la estrella más cercana a los valores requeridos.

La Figura 9.2.4 indica los diagramas de fase de la primera y última iteración que se realizaron en la estrella. Dado una gran dispersión en los datos y periodicidad no tan clara, su forma de onda en el diagrama, no es destacable para ser usada como un criterio primario de clasificación en este caso.



(a) Diagrama de fase tras la primera iteración.

(b) Diagrama de fase en la última iteración.

Figura 9.2.4: Gráficas de fase en la primera y última transformada de Fourier. No es posible apreciar un diagrama típico dado la gran cantidad de puntos involucrado.

9.2.3. Análisis y resultados con AD ASTRA Pulsantes para Star2

La curva de luz de Star2 fue igualmente analizada con el programa AD ASTRA Pulsantes; en ella, se excluyeron los artefactos instrumentales de Kepler en torno a 391.53 y 440.47 c/d. Se implementó una búsqueda de frecuencias en el rango de 18 y 27 c/d, con el objetivo de comparar sus resultados con los de Period04 en esta estrella a posteriori.

Frecuencias de pulsación y parámetros derivados con AD ASTRA Pulsantes

El análisis completo con el programa condujo a la identificación de 6 frecuencias de pulsación consideradas de origen estelar. La Tabla 9.2.3 detalla los parámetros de estas componentes confirmadas.

Tabla 9.2.3: Frecuencias de pulsación estelares, amplitudes, fases y relaciones señal/ruido (S/N) para Star2, obtenidas con AD ASTRA Pulsantes.

No.	Frecuencia (c/d)	Amplitud (mmag)	Fase (rad)	S/N Iterativo (Bloque 3)	S/N Global (Bloque 4)
F1	$22.791 \pm 1.2 \times 10^{-5}$	2.537 ± 0.002	5.698 ± 0.001	74.63	1299.70
F2	$21.714 \pm 1.2 \times 10^{-4}$	0.250 ± 0.002	1.798 ± 0.013	51.80	127.16
F3	23.021 ± 0.001	0.039 ± 0.002	4.711 ± 0.082	13.69	19.92
F4	20.575 ± 0.001	0.032 ± 0.002	5.877 ± 0.100	12.96	16.42
F5	22.015 ± 0.001	0.030 ± 0.002	5.397 ± 0.110	13.93	15.91
F6	21.965 ± 0.001	0.025 ± 0.002	2.941 ± 0.140	12.18	13.05

9.2. RESULTADOS PARA STAR2

Tabla 9.2.4: Períodos correspondientes a las frecuencias estelares extremas (mínima y máxima) detectadas en Star2 con el programa AD ASTRA Pulsantes, basadas en 6 frecuencias confirmadas.

Frecuencia (c/d)	Período (días)	Período (horas)	Período (minutos)
20.575	0.048602	1.166	69.99
23.021	0.043438	1.043	62.55

En base a este conjunto de 6 frecuencias estelares confirmadas, se determinó por medio del Bloque 6 del programa, el rango de periodos en los que Star2 presenta pulsaciones (ver Tabla 9.2.4). De igual manera, el rango de amplitudes se determina identificando el valor mínimo y máximo entre ellas. Estas corresponden a 2.537 mmag y 0.025 mmag.

La Figura 9.2.5 ilustra el periodograma de la curva de luz original de Star2 con estas 6 frecuencias estelares marcadas. Se puede observar como las componentes destacan sobre el nivel de ruido general del espectro original.

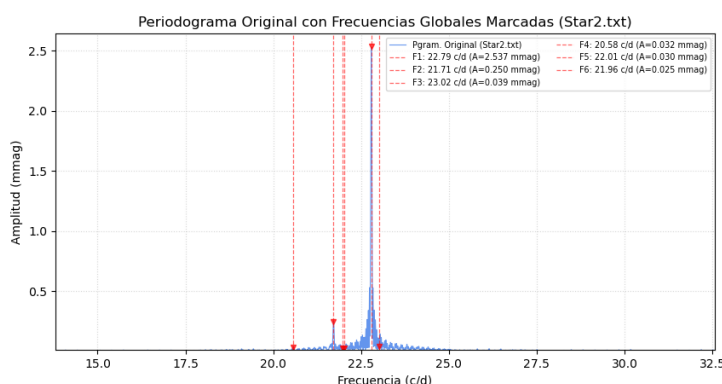


Figura 9.2.5: La Figura muestra el periodograma de amplitud de la curva de luz original de Star2. Las líneas verticales discontinuas (rojas) indican las posiciones y las puntas de flecha las amplitudes de las 6 frecuencias estelares significativas finales.

El espectro de los residuos finales, mostrado en la Figura 9.2.6, indica que aunque el nivel general de ruido sea predominantemente bajo, en especial en la zona focal donde se eliminaron las componentes frecuenciales, existen algunos picos agudos sobre el periodograma residual, especialmente el que es cercano a cero. Este tipo de señales a bajas frecuencias es común en datos fotométricos y a menudo se asocia con el ruido rojoinstrumental, tendencias residuales a largo plazo en los datos, o variabilidad estelar de muy largo período no relacionada con las pulsaciones de corto período investigadas. Es precisamente para evitar la dominancia de este tipo de "mogollón" de baja frecuencia que el análisis de frecuencias de pulsación en el programa creado y en herramientas como Period04, se inicia típicamente a partir de 1 c/d o una frecuencia mínima similar. Por otro lado si bien existe otro pico alrededor de 40 c/d, este no logró ser considerado significativo al no cumplir el criterio de señal ruido inferior a 4.

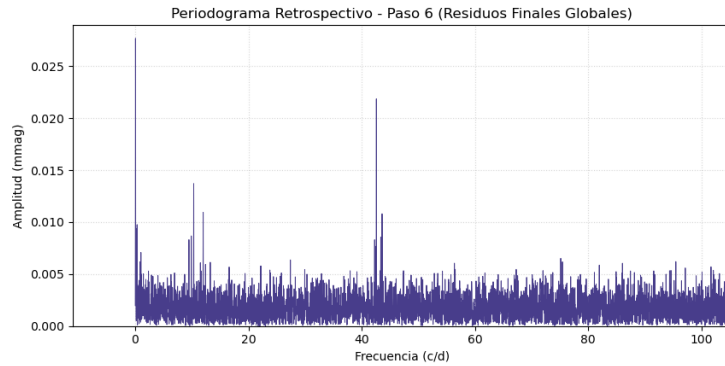


Figura 9.2.6: Periodograma de amplitud de los residuos finales para Star2, tras la sustracción del modelo multifrecuencia global. El nivel de ruido de fondo general es bajo, predominantemente por debajo de 0.005mmag

Caracterización tentativa del tipo pulsante con AD ASTRA Pulsantes

Una vez obtenidos los rangos de período y amplitud observados para las 6 frecuencias estelares significativas de Star2, el Bloque 8 del programa realizó una comparación automática con la base de datos de tipos de estrellas pulsantes que se presentan en las tablas de referencia de la Sección C.I.3. Dicha comparación cuantitativa empleó el índice de Jaccard J_P para períodos y J_A para amplitudes, tal como se describe en la ecuación 8.2.1 para medir la similitud entre los rangos observados y los rangos característicos de cada tipo estelar catalogado.

Las estrellas que presentaron mayor compatibilidad con las características observadas de Star2, se ordenan en la Tabla 9.2.5 de manera descendente según la similitud de su rango de amplitud J_A y seguido por la similitud del rango de período J_P .

Tabla 9.2.5: Clasificación tentativa de Star2 basada en la similitud de rangos de período (J_P) y amplitud (J_A). Los candidatos se ordenan por J_A descendente, luego por J_P descendente.

Tipo Estelar	Otros Nombres / Prototipos	Índice Jaccard Período (J_P)	Índice Jaccard Amplitud (J_A)
Pulsantes pre-Ms	Pulsantes T Tauri, Estrellas jóvenes	0.02	0.41
Pulsantes pre-Ms	Pulsantes Herbig Ae/Be	0.02	0.41
sdBV (g)	PG1716, Betsy stars, sdBV_s	0.05	0.24
Pulsantes tipo Solar	Gigantes rojas	0.02	0.03
(β Cep)	β CMa, ζ Oph	0.01	0.02
GW Vir	PG1159, DOV, pre-Enanas Blancas	0.10	0.01
(δ Sct)	SX Phe (Población II)	0.02	0.01

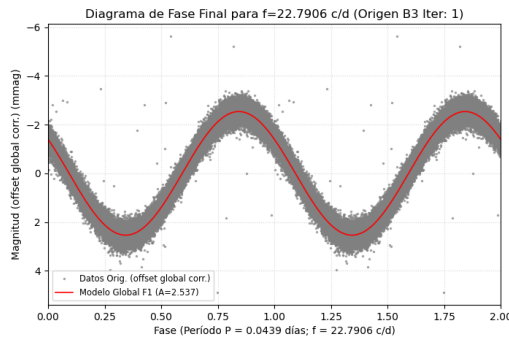
Considerando los resultados de la Tabla 9.2.5, los tipos estelares que muestran la mayor similitud en el rango de amplitud, corresponden a las pre-MS o pulsantes de pre-Secuencia Principal (T Tauri y Herbing Ae/Be), ambas con un $J_A \approx 0.41$ y ($J_P \approx 0.02$). Algunas características catalogadas para las estrellas de pre-Secuencia Principal como las T Tauri, indican modos de pulsación p, entre estas las PMS pueden

9.2. RESULTADOS PARA STAR2

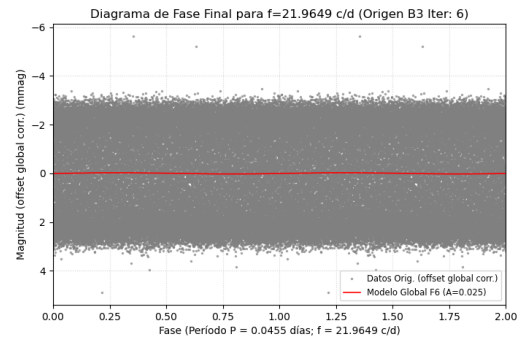
atravesar la franja de inestabilidad. Por lo general se caracterizan por ser estrellas jóvenes.

Por último, los diagramas de fase generados para Star2 se presentan en la Figura 9.2.7. Es importante destacar a diferencia de Star1, donde la señal era nítida y permitía un análisis de fase en escalas reducidas, Star2 presenta una dispersión intrínseca significativa (atribuible a ruido rojo o actividad estelar propia de estrellas jóvenes) que es comparable a la amplitud de la pulsación. Por este motivo, para los diagramas de fase generados con AD ASTRA Pulsantes, se ha optado por un panorama amplio de visualización. De este modo su representación resulta superior a la vista estándar de ciclo único (como la de Period04) para este caso específico, ya que permite apreciar la continuidad de la modulación sinusoidal a través de la densa nube de dispersión, revelando la estructura de la pulsación que quedaría oculta o fragmentada en una vista con mayor zoom.

En el panel izquierdo (gráfica 9.2.7a), correspondiente a la frecuencia dominante ($F_1 \approx 22.79$ c/d), esta visualización extendida revela que los datos observacionales forman una banda continua que ondula siguiendo una trayectoria sinusoidal del modelo ajustado. Así pues, la dispersión vertical de los puntos no es aleatoria sino que representa un ensanchamiento de la curva, confirmando que la señal de F_1 es lo suficientemente robusta para dominar visualmente sobre el ruido intrínseco de la estrella. Por el contrario, el diagrama para la frecuencia de menor amplitud ($F_6 \approx 21.96$ c/d), mostrado en el panel derecho (gráfica 9.2.7b), exhibe una banda de dispersión plana. En este escenario, la amplitud de la señal (0.025 mmag) es despreciable en comparación con la variabilidad total, quedando la modulación sinusoidal visualmente enmascarada por la varianza de los datos originales.



(a) Diagrama de fase tras la primera iteración.



(b) Diagrama de fase en la última iteración.

Figura 9.2.7: Gráficas que muestran los diagramas de fase de la primera y última iteración, obtenidos en AD ASTRA Pulsantes para Star2.

Por lo tanto desde una perspectiva morfológica, el diagrama de fase de Star2 indica pulsaciones de naturaleza puramente sinusoidal, descartando asimetrías pronunciadas o patrones característicos como el de dientes de sierra de las pulsantes RR Lyrae o Cefeidas. Esta morfología característica, combinada con la alta dispersión atmosférica, es consistente con estrellas de la secuencia principal o, muy probablemente, objetos de la Pre-Secuencia Principal como las estrellas tentativas obtenidas (Pulsantes T Tauri, Herbig Ae/Be).

9.3. Resultados para datos solares

9.3.1. Presentación de la curva de luz del Sol

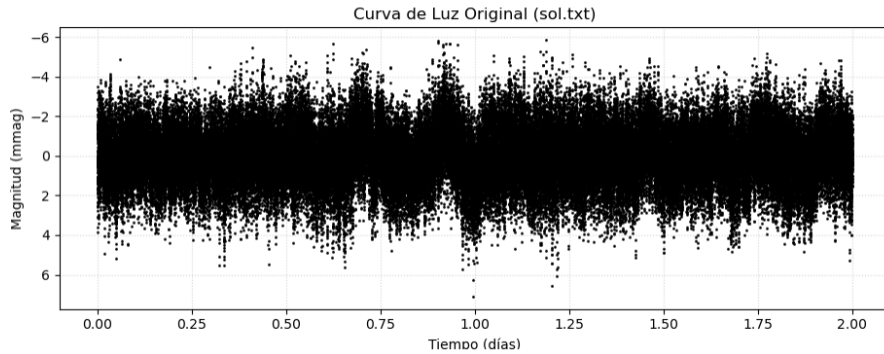


Figura 9.3.1: Curva de luz completa para el Sol obtenida por el telescopio SoHo.

La serie temporal analizada para el Sol, consiste en datos fotométricos obtenidos con el instrumento GOLF del telescopio espacial SoHo, los cuales fueron descargados a partir de los archivos públicos de la misión. La Figura 9.3.1 presenta la curva de luz completa, graficada como magnitud (mmag) en función del tiempo (*das*) obtenida por el programa AD ASTRA Solar. Esta serie abarca un intervalo total de observación de 2 días en la que fueron tomados 100000 datos.

9.3.2. Periodograma del Sol

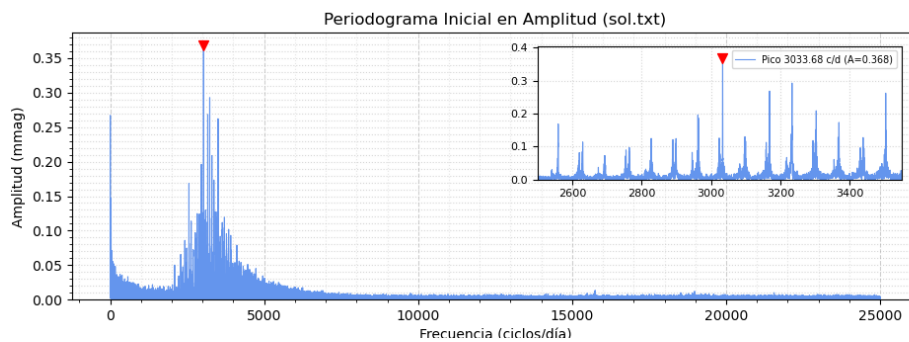


Figura 9.3.2: Periodograma del Sol generado por AD ASTRA Solar.

Se calcula el espectro de frecuencia de la serie temporal, a partir del periodograma de Lomb-Scargle. La Figura 9.3.2, señala el cálculo desde 0 hasta la frecuencia de Nyquist (25000), generada a través del programa AD ASTRA Solar. En ella se observa la estructura tipo peine al tomar un rango de frecuencias entre 2500 y 3500 μHz , tal y como se indica en el zoom de la misma Figura.

9.3.3. Identificación de modos

A través de la herramienta Period04, se calcula el espectro de frecuencias utilizando el módulo de Fourier que otorga el programa. De esta manera, se procede a identificar los modos de frecuencia entre un rango de visión de 2500 a 3500 μHz , espacio donde se generan las oscilaciones de la estrella.

Para identificar los modos de oscilación, se necesita reconocer en primer lugar los patrones de secuencia existentes en el periodograma (Gran y pequeña separación de frecuencias), de esta manera y tal como se menciona en la Sección 8.3 de la metodología, los picos individuales son clasificados y etiquetados manualmente según su grado esférico ($l = 0, 1, 2, 3$). En la Figura 9.3.3, se identifican los grados esféricos (l) por medio del reconocimiento del patrón característico en el periodograma.

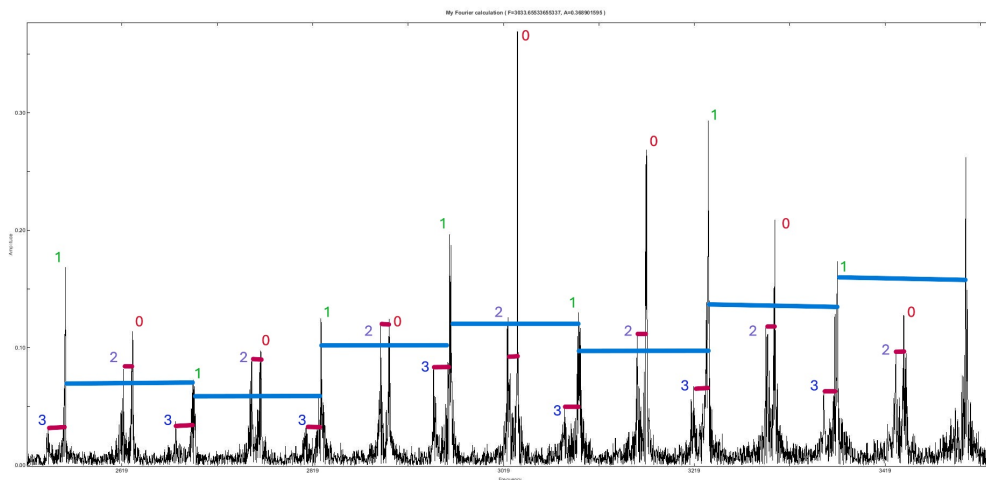


Figura 9.3.3: Periodograma del Sol y sus grados esféricos (l), a partir de Period04

El patrón característico, consiste en:

- Una agrupación de los modos $l = 0$ y $l = 2$, que aparecen muy juntos.
- Una agrupación similar de los modos $l = 1$ y $l = 3$.
- El grupo ($l = 1, 3$) se sitúa aproximadamente a medio camino entre dos grupos consecutivos de ($l = 0, 2$).

Asimismo, el orden radial n absoluto no se determina en esta etapa.

Tras la identificación visual, cada pico fue ajustado individualmente en el módulo Fit de Period04 para obtener su frecuencia central (ν) y su incertidumbre estadística (σ_ν).

9.3.4. Parámetros globales del Sol

Una vez identificados y medidos los modos de oscilación tal y como se indica en la Tabla 9.3.1, se calcularon los parámetros sísmicos globales, utilizando el programa AD ASTRA Solar.

Tabla 9.3.1: Frecuencias de Modos de Oscilación del Sol ($l = 0, 1, 2, 3$) y sus Incertidumbres.

No.	$l = 0$ (μHz)	$l = 1$ (μHz)	$l = 2$ (μHz)	$l = 3$ (μHz)
1	2630.2767 ± 0.0156	2559.6370 ± 0.0105	2620.5656 ± 0.0217	2541.7171 ± 0.0579
2	2764.5950 ± 0.0183	2694.0123 ± 0.0246	2755.1006 ± 0.0198	2675.3137 ± 0.0477
3	2899.3119 ± 0.0142	2827.7144 ± 0.0142	2890.2243 ± 0.0147	2811.9876 ± 0.0558
4	3033.6589 ± 0.0047	2962.3992 ± 0.0090	3023.0276 ± 0.0146	2945.7141 ± 0.0215
5	3168.9451 ± 0.0066	3097.8828 ± 0.0137	3159.1921 ± 0.0158	3082.8839 ± 0.0372
6	3303.4368 ± 0.0085	3233.6523 ± 0.0060	3294.0304 ± 0.0150	3218.3414 ± 0.0265
7	3438.6031 ± 0.0139	3368.9540 ± 0.0102	3430.4618 ± 0.0183	3354.6664 ± 0.0291

El cálculo de la gran separación, se determina en primera instancia al obtener las diferencias individuales entre frecuencias $l = 0$ consecutivas. Para el propósito en cuestión se implementan las ecuaciones 6.2.2 y 8.3.3, cuyos resultados se indican en la Tabla 9.3.2.

Tabla 9.3.2: Cálculo de la Gran Separación ($\Delta\nu$) para el Sol.

Modo $\nu_{i+1,l=0}$ (μHz)	Modo $\nu_{i,l=0}$ (μHz)	Diferencia $\Delta\nu_i$ (μHz)	Error $\sigma_{\Delta\nu,i}$ (μHz)
2764.5950	2630.2767	134.318	0.024
2899.3119	2764.5950	134.717	0.023
3033.6589	2899.3119	134.347	0.015
3168.9451	3033.6589	135.286	0.008
3303.4368	3168.9451	134.492	0.011
3438.6031	3303.4368	135.166	0.016

De esta manera, se determina el valor promedio de la gran separación y su error promedio respectivo, a partir de las ecuaciones 8.3.1 y 8.3.5 como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\nu \rangle &= \frac{1}{6}(134.318 + 134.717 + 134.347 + 135.286 + 134.492 + 135.166) \mu\text{Hz} \\ &= 134.721 \mu\text{Hz} \end{aligned} \quad (9.3.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle \Delta\nu \rangle} &= \frac{1}{6} \sqrt{(0.024^2 + 0.023^2 + 0.015^2 + 0.008^2 + 0.011^2 + 0.016^2)} \\ &= 0.007 \end{aligned} \quad (9.3.2)$$

De esta manera, se concluye que el valor experimental obtenido para el promedio de la gran separación, a partir de nuestra serie temporal analizada para el Sol. Este corresponde a $\langle \Delta\nu \rangle = (134.721 \pm 0.007) \mu\text{Hz}$.

9.3. RESULTADOS PARA DATOS SOLARES

De manera similar, para calcular el valor promedio de la pequeña separación, se encuentran las diferencias individuales entre los modos $l = 0$ y $l = 2$ del mismo orden n . En ese orden de ideas, se disponen de las ecuaciones 6.2.3 y 8.3.4, siendo la Tabla 9.3.3 los resultados obtenidos.

Tabla 9.3.3: Cálculo de la Pequeña Separación ($\delta\nu_{02}$) para el Sol.

Modo $\nu_{i,l=0}$ (μHz)	Modo $\nu_{i,l=2}$ (μHz)	Diferencia $\delta\nu_{02,i}$ (μHz)	Error $\sigma_{\delta\nu,i}$ (μHz)
2630.2767	2620.5656	9.711	0.027
2764.5950	2755.1006	9.494	0.027
2899.3119	2890.2243	9.088	0.020
3033.6589	3023.0276	10.631	0.015
3168.9451	3159.1921	9.753	0.017
3303.4368	3294.0304	9.406	0.017
3438.6031	3430.4618	8.141	0.023

Posteriormente, los valores promedios son obtenidos a partir de las ecuaciones 8.3.2 y 8.3.6, tal y como se desarrolla a continuación:

$$\begin{aligned}\langle\delta\nu_{02}\rangle &= \frac{1}{7}(9.711 + 9.494 + 9.088 + 10.631 + 9.753 + 9.406 + 8.141) \mu\text{Hz} \\ &= 9.461 \mu\text{Hz}\end{aligned}\quad (9.3.3)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\langle\delta\nu_{02}\rangle} &= \frac{1}{7}\sqrt{0.027^2 + 0.027^2 + 0.020^2 + 0.015^2 + 0.017^2 + 0.017^2 + 0.023^2} \\ &= 0.008\end{aligned}\quad (9.3.4)$$

Por lo tanto, el promedio de la pequeña separación calculado a partir de la serie temporal del Sol equivale a: $\langle\delta\nu_{02}\rangle = (9.461 \pm 0.008) \mu\text{Hz}$

Adicionalmente, la frecuencia máxima de oscilación se obtiene a partir del promedio de frecuencias de los modos $l = 0$ identificados en la Tabla 9.3.1, ya que son estos los que describen la envolvente de la señal. Por lo tanto:

$$\langle\nu_{max}\rangle = (3034.118 \pm 0.005) \mu\text{Hz}$$

Este valor es consistente con el rango de máxima potencia observado en el periodograma (Figura 9.3.3).

9.3.5. Caracterización estelar

Con los tres parámetros sísmicos globales previamente determinados, se procede a caracterizar los valores de masa y radio estelar del sol. Este proceso se aplica a través de las relaciones de escala descritas en las ecuaciones 6.2.4 y 6.2.5, además de sus correspondientes fórmulas de propagación de error (Ecuaciones 8.3.7 y 8.3.8).

El programa AD ASTRA Solar, utiliza los valores medidos y los valores solares de referencia ($T_{eff} = 5777 \text{ K}$; $\nu_{\max, \odot} = 3090 \mu\text{Hz}$; $\Delta\nu_{\odot} = 135.1, \mu\text{Hz}$), para calcular la masa y radio estelar normalizados.

Tales parámetros se remplazan en las ecuaciones de escala 6.2.4 y 6.2.5 como se ilustra a continuación:

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{3034.118 \mu\text{Hz}}{3090 \mu\text{Hz}} \right) \cdot \left(\frac{134.721 \mu\text{Hz}}{135.1 \mu\text{Hz}} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{5777 \text{ K}}{5777 \text{ K}} \right)^{1/2} \quad (9.3.5)$$

$$= 0.9874$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} = (0.9874)^3 \cdot \left(\frac{134.721 \mu\text{Hz}}{135.1 \mu\text{Hz}} \right)^2 \quad (9.3.6)$$

$$= 0.9574$$

En cuyo caso los errores de propagación a obtener, se derivan a partir de las ecuaciones 8.3.7 y 8.3.8:

$$\left(\frac{\sigma_R}{R} \right)^2 = \left(1 \cdot \frac{0.005}{3034.118} \right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{0.007}{134.721} \right)^2 + \left(0.5 \cdot \frac{0}{5777} \right)^2 \quad (9.3.7)$$

$$= 0.0001$$

$$\left(\frac{\sigma_M}{M} \right)^2 = \left(3 \cdot \frac{0.005}{3034.118} \right)^2 + \left(-4 \cdot \frac{0.007}{134.721} \right)^2 + \left(1.5 \cdot \frac{0}{5777} \right)^2 \quad (9.3.8)$$

$$= 0.0002$$

De esta manera, los valores de masa y radio normalizados, corresponden a:

$$\mathbf{R}_{\text{Sol}} = (0.9874 \pm 0.0001) R_{\odot} \quad (9.3.9)$$

$$\mathbf{M}_{\text{Sol}} = (0.9574 \pm 0.0002) M_{\odot} \quad (9.3.10)$$

9.3.6. Representación de la estrella en el diagrama CD

Como último paso para caracterizar estrellas de tipo solar, se representa la estrella analizada en el diagrama de Christensen-Dalsgaard (C-D), para validar el valor de la masa obtenida de la estrella y averiguar su evolución estelar teniendo en cuenta la fracción de masa hidrógeno de los modelos teóricos de evolución estelar.

Los valores utilizados para el Sol, calculados por AD ASTRA SOLAR, fueron:

- $\langle \Delta\nu \rangle = 134.721 \pm 0.007 \mu\text{Hz}$
- $\langle \delta\nu_{02} \rangle = 9.461 \pm 0.008 \mu\text{Hz}$

El resultado se muestra en la Figura 9.3.4.

9.3. RESULTADOS PARA DATOS SOLARES

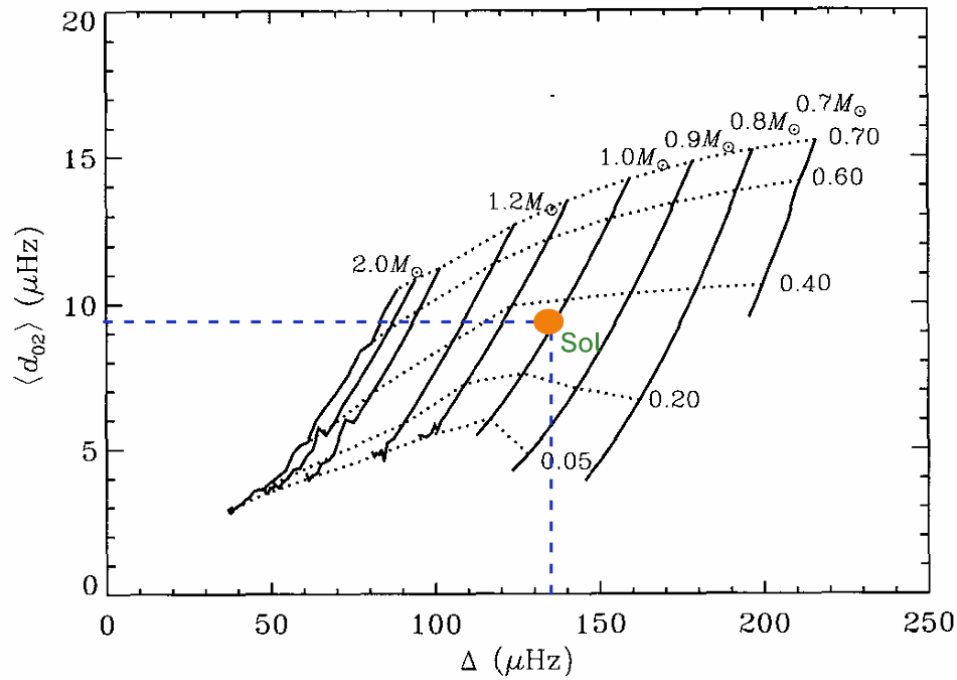


Figura 9.3.4: Representación del Sol en el Diagrama C-D. El punto (Sol) se posiciona utilizando los parámetros medidos por el método híbrido. Las líneas sólidas representan trazas de masa constante (en $M_{\odot}$) y las líneas punteadas representan trazas de edad constante (fracción de hidrógeno en el núcleo, X_c).

Como se observa en la figura, el punto medido para el Sol (134.7, 9.46) se alinea de manera correcta con las trazas teóricas. Cae directamente sobre la línea de masa constante de $1.0 M_{\odot}$ y cercana la línea de edad de $X_c \approx 0.40$, que indica un estado evolutivo de mediana edad; lo cual es consistente con los 4.5 mil millones de años del Sol [6].

9.4. Resultados para Star3

Una vez validados los resultados obtenidos en el Sol, se aplicó el mismo análisis al objetivo científico, Star3.

9.4.1. Presentación de la curva de luz de Star 3

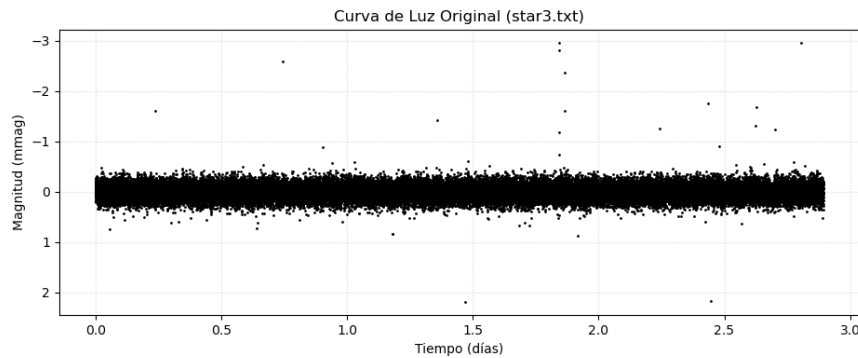


Figura 9.4.1: Curva de luz de star3 obtenida por el telescopio Kepler.

La serie temporal analizada para star3, consiste en datos fotométricos obtenidos con el telescopio espacial Kepler, los cuales fueron descargados a partir de los archivos públicos de la misión. La Figura 9.4.1 ilustra la curva de luz completa, graficada como magnitud (mmag) en función del tiempo (*das*) obtenida por el programa AD ASTRA Solar. Dicha señal, abarca un intervalo total de observación de 2.89 días en la que fueron tomados 49032 datos.

9.4.2. Periodograma de Star3

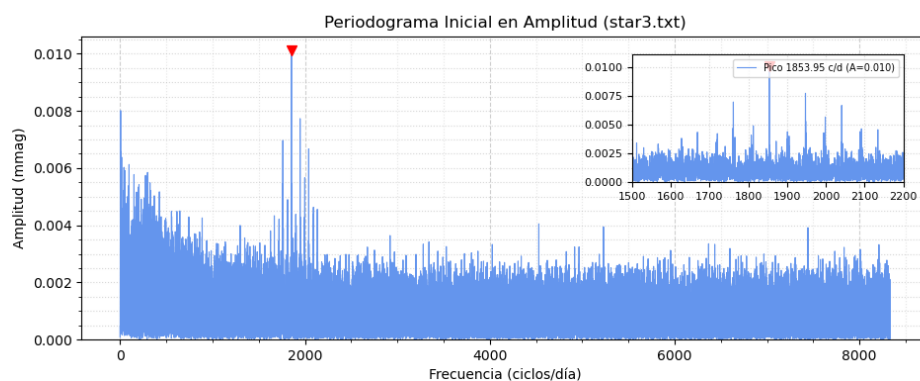


Figura 9.4.2: Periodograma de star3 generado por AD ASTRA Solar.

9.4. RESULTADOS PARA STAR3

Se calcula el espectro de frecuencia de la serie temporal, a partir del periodograma de Lomb-Scargle. La Figura 9.4.2, señala el cálculo desde 0 hasta la frecuencia de Nyquist (8333.33), generada a través del programa AD ASTRA Solar. La estructura tipo peine se puede observar al tomar un rango de frecuencias entre 1500 y 2200 μHz , tal y como se indica en el zoom del mismo gráfico.

9.4.3. Identificación de modos

Por medio de Period04, se calcula el espectro de frecuencias utilizando la herramienta Fourier que otorga el mismo programa. Se identifican los modos de frecuencias en el rango de visión de 1500 a 2200 μHz , reconociendo patrones de secuencia presentes en el periodograma. De esta manera y siguiendo la metodología descrita en la Sección 8.3, los picos individuales de la estrella son seleccionados y etiquetados, como se observa en la Figura 9.4.3:

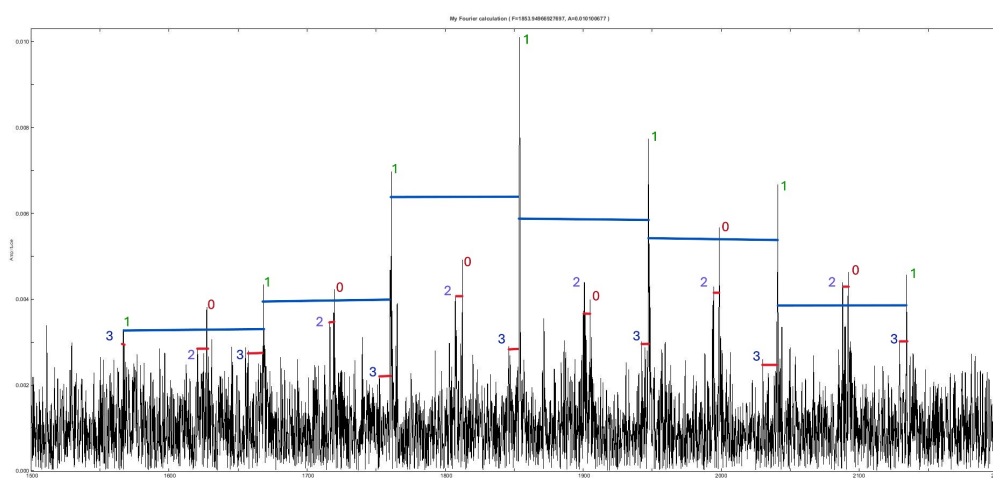


Figura 9.4.3: Periodograma de star3 y sus grados esféricos (l), a partir de Period04

Las líneas destacadas en el gráfico indican la gran y la pequeña separación, mostradas mediante rectas de color azul y rojo respectivamente. Los modos con $l = 0$ y $l = 2$, al igual que aquellos con $l = 1$ y $l = 3$, forman pares que aparecen próximos entre sí. Posterior a la identificación visual, cada pico fue sometido a un ajuste individual en el módulo Fit de Period04, obteniéndose así su frecuencia central (ν) junto con la estimación de la incertidumbre estadística (σ_ν).

9.4.4. Parámetros globales de Star3

Una vez identificados y medidos los modos de oscilación tal y como se indica en la Tabla 9.4.1, se calcularon los parámetros sísmicos globales, utilizando el programa AD ASTRA Solar.

Tabla 9.4.1: Frecuencias de Modos de Oscilación de star3 ($l = 0, 1, 2, 3$) y sus Incertidumbres.

No.	$l = 0$ (μHz)	$l = 1$ (μHz)	$l = 2$ (μHz)	$l = 3$ (μHz)
1	1630.9738 ± 0.0556	1596.8840 ± 0.0619	1627.3631 ± 0.0446	1593.2807 ± 0.0597
2	1719.8752 ± 0.0402	1668.4414 ± 0.0392	1716.4964 ± 0.0490	1664.8520 ± 0.0681
3	1812.5698 ± 0.0346	1765.2776 ± 0.0436	1807.4238 ± 0.0416	1761.1332 ± 0.0244
4	1904.9993 ± 0.0425	1853.9435 ± 0.0168	1900.8999 ± 0.0387	1847.0202 ± 0.0634
5	1998.5524 ± 0.0300	1947.4044 ± 0.0220	1994.5498 ± 0.0396	1942.4887 ± 0.0566
6	2091.9968 ± 0.0367	2040.9829 ± 0.0255	2087.9346 ± 0.0387	2038.3726 ± 0.0771
7	-	2134.2413 ± 0.0372	-	2129.0919 ± 0.0562

Se realizan las diferencias individuales entre frecuencias $l = 0$ consecutivas, por medio de las ecuaciones 6.2.2 y 8.3.3 para obtener la gran separación. Los resultados se reportan en la Tabla 9.4.2:

Tabla 9.4.2: Cálculo de la Gran Separación ($\Delta\nu$) para Star3.

Modo $\nu_{i+1,l=0}$ (μHz)	Modo $\nu_{i,l=0}$ (μHz)	Diferencia $\Delta\nu_i$ (μHz)	Error $\sigma_{\Delta\nu,i}$ (μHz)
1719.8752	1630.9738	88.901	0.069
1812.5698	1719.8752	92.695	0.053
1904.9993	1812.5698	92.430	0.055
1998.5524	1904.9993	93.553	0.052
2091.9968	1998.5524	93.444	0.047

De esta manera, se determina el valor promedio y error promedio respectivo, a partir de las ecuaciones 8.3.1 y 8.3.5 como se observa a continuación:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\nu \rangle &= \frac{1}{5} (88.901 + 92.695 + 92.430 + 93.553 + 93.444) \mu\text{Hz} \\ &= 92.205 \mu\text{Hz} \end{aligned} \quad (9.4.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\langle \Delta\nu \rangle} &= \frac{1}{5} \sqrt{(0.069^2 + 0.053^2 + 0.055^2 + 0.052^2 + 0.047^2)} \\ &= 0.025 \end{aligned} \quad (9.4.2)$$

Por lo tanto, el valor experimental obtenido para el promedio de la gran separación a partir de la serie temporal analizada para star3, corresponde a: $\langle \Delta\nu \rangle = (92.205 \pm 0.025) \mu\text{Hz}$.

Análogamente, los valores individuales de las pequeñas separaciones, se determinan a través de las ecuaciones 6.2.3 y 8.3.4, siendo la Tabla 9.4.3 los resultados obtenidos.

Tabla 9.4.3: Cálculo de la Pequeña Separación ($\delta\nu_{02}$) para Star3.

Modo $\nu_{i,l=0}$ (μHz)	Modo $\nu_{i,l=2}$ (μHz)	Diferencia $\delta\nu_{02,i}$ (μHz)	Error $\sigma_{\delta\nu,i}$ (μHz)
1630.9738	1627.3631	3.611	0.071
1719.8752	1716.4964	3.379	0.063
1812.5698	1807.4238	5.146	0.054
1904.9993	1900.8999	4.099	0.057
1998.5524	1994.5498	4.003	0.050
2091.9968	2087.9346	4.062	0.053

A partir de las ecuaciones 8.3.2 y 8.3.6, se determinan los valores promedios tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\langle\delta\nu_{02}\rangle &= \frac{1}{6}(3.611 + 3.379 + 5.146 + 4.099 + 4.003 + 4.062) \mu\text{Hz} \\ &= 4.050 \mu\text{Hz}\end{aligned}\tag{9.4.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\langle\delta\nu_{02}\rangle} &= \frac{1}{6}\sqrt{0.071^2 + 0.063^2 + 0.054^2 + 0.057^2 + 0.050^2 + 0.053^2} \\ &= 0.024\end{aligned}\tag{9.4.4}$$

En consecuencia, la pequeña separación obtenida a partir de la serie temporal star3 se determina como $\langle\delta\nu_{02}\rangle = (4.050 \pm 0.024) \mu\text{Hz}$. Asimismo, la frecuencia de oscilación máxima, calculada a partir del promedio de las frecuencias correspondientes a los modos $l=0$ listados en la Tabla 9.4.1, se establece en:

$$\langle\nu_{max}\rangle = (1859.828 \pm 0.017) \mu\text{Hz}$$

Siendo este valor, el rango obtenido de máxima potencia observada en el periodograma (Figura 9.4.3).

9.4.5. Caracterización de Star3

Para la caracterización de Star3, se utilizó el valor de la temperatura efectiva $T_{\text{eff}} = 5650 \text{ K}$, reportado por [3]. Dado que el documento formativo no especifica una incertidumbre para esta medición, se adoptó un error estándar de $\sigma_{T_{\text{eff}}} = \pm 200 \text{ K}$ para la propagación de errores; este valor es típico para temperaturas estelares derivadas de fotometría, ya que tiene en cuenta las incertidumbres sistemáticas del enrojecimiento interestelar y la metalicidad [39]. El programa AD ASTRA Solar, por tanto, realiza el cálculo de la masa y el radio estelar normalizados utilizando este valor ($T_{\text{eff}} = 5650 \pm 200 \text{ K}$) junto con los valores solares de referencia ($\nu_{\text{max},\odot} = 3090 \mu\text{Hz}$, $\Delta\nu_{\odot} = 135.1 \mu\text{Hz}$) y los parámetros sísmicos medidos para la estrella.

Tales parámetros se remplazan en las ecuaciones de escala 6.2.4 y 6.2.5 a continuación:

$$\frac{R}{R_{\odot}} = \left(\frac{1859.828 \mu\text{Hz}}{3090 \mu\text{Hz}} \right) \cdot \left(\frac{92.205 \mu\text{Hz}}{135.1 \mu\text{Hz}} \right)^{-2} \cdot \left(\frac{5650 \text{ K}}{5777 \text{ K}} \right)^{1/2} \quad (9.4.5)$$

$$= 1.2779$$

$$\frac{M}{M_{\odot}} = (1.2779)^3 \cdot \left(\frac{92.205 \mu\text{Hz}}{135.1 \mu\text{Hz}} \right)^2 \quad (9.4.6)$$

$$= 0.9720$$

En cuyo caso los errores de propagación a obtener, se derivan a partir de las ecuaciones 8.3.7 y 8.3.8:

$$\left(\frac{\sigma_R}{1.2779} \right)^2 = \left(1 \cdot \frac{0.017}{1859.828} \right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{0.025}{92.205} \right)^2 + \left(0.5 \cdot \frac{200}{5650} \right)^2 \quad (9.4.7)$$

$$= 0.0226$$

$$\left(\frac{\sigma_M}{0.9720} \right)^2 = \left(3 \cdot \frac{0.017}{1859.828} \right)^2 + \left(-4 \cdot \frac{0.025}{92.205} \right)^2 + \left(1.5 \cdot \frac{200}{5650} \right)^2 \quad (9.4.8)$$

$$= 0.0516$$

De esta manera, los valores de masa y radio normalizados, corresponden a:

$$\mathbf{R}_{\text{Star3}} = (1.28 \pm 0.02) R_{\odot} \quad (9.4.9)$$

$$\mathbf{M}_{\text{Star3}} = (0.97 \pm 0.05) M_{\odot} \quad (9.4.10)$$

9.4.6. Representación de Star3 en el diagrama CD

Finalmente, a partir de los observables sísmicos ($\langle \Delta\nu \rangle$ y $\langle \delta\nu_{02} \rangle$), se representa la estrella en el diagrama CD y se determina el valor de masa teórica obtenida y la evolución de la estrella.

- $\langle \Delta\nu \rangle = 92.205 \pm 0.025 \mu\text{Hz}$
- $\langle \delta\nu_{02} \rangle = 4.050 \pm 0.024 \mu\text{Hz}$

Estos valores se posicionaron en el Diagrama C-D, como se muestra en la Figura 9.4.4.

9.4. RESULTADOS PARA STAR3

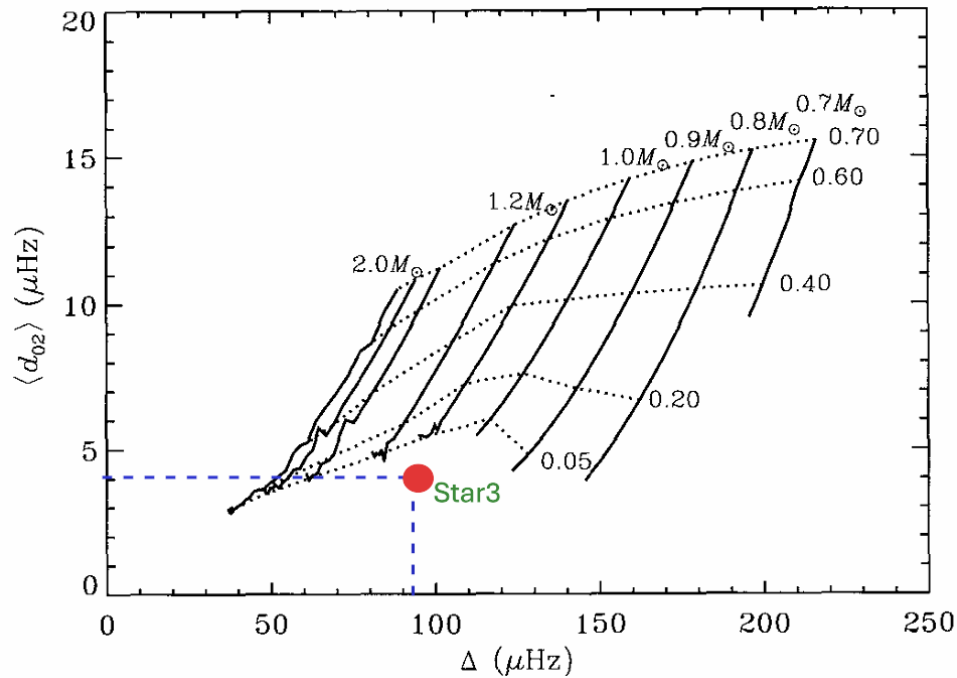


Figura 9.4.4: Representación de Star3 en el Diagrama C-D. El punto (Star3) se posiciona utilizando los parámetros medidos ($\langle \Delta \nu \rangle \approx 92.2 \mu\text{Hz}$, $\langle \delta \nu_{02} \rangle \approx 4.1 \mu\text{Hz}$).

Así pues, la representación de Star3 en el diagrama CD indica que la estrella toma valores aproximados entre 1 y 1.2 masas solares, lo cual es cercano al valor experimental obtenido previamente en las relaciones de escala. Por otro lado, se visualiza un consumo alto en la cantidad de hidrógeno disponible en el núcleo, infiriendo una clasificación espectral por fuera de la secuencia principal.

Capítulo 10

Análisis de resultados y discusión

10.1. Análisis de estrellas Pulsantes

Antes de discutir los resultados obtenidos en estrellas pulsantes, es importante tener en cuenta algunas limitaciones del programa semiautomático AD ASTRA Pulsantes, creado para este propósito.

10.1.1. Limitaciones y consideraciones del programa

- Al calcular la transformada de Fourier y obtener las frecuencias significativas, la ventana de cálculo del programa ya toma de manera predeterminada un valor de $5c/d$, en cuyo caso para rangos de frecuencia muy estrechos como por ejemplo entre 20 y $25c/d$ para Star2, las frecuencias significativas a obtener, resultan menores a las previstos en un análisis más completo, alterando el denominador en la relación S/N .
- Se identificó la necesidad de restringir el proceso de pre-blanqueo por defecto, a rangos de frecuencia superiores a un umbral mínimo de $f > 1 c/d$ (Siempre que no se establezca un rango de frecuencias en el bloque 2.5 del programa). Esto responde a la naturaleza de los datos fotométricos espaciales como los de la misión *Kepler*, los cuales suelen presentar derivas instrumentales o tendencias a largo plazo. En el espectro de potencias, estos artefactos se manifiestan como una acumulación masiva de amplitud asintótica hacia la frecuencia cero (Ruido rojo), sin exhibir la morfología definida de un pico de pulsación coherente, sino más bien como una aglomeración de ruido. Así pues, sin la imposición de este límite inferior manual, el algoritmo de detección automática tiende a identificar erróneamente esta deriva instrumental como la frecuencia de mayor amplitud, afectando la convergencia de los ajustes subsiguientes y la caracterización estelar tentativa.
- En el programa, existe una divergencia metodológica en el cálculo del límite superior del espectro, dado que estima la frecuencia de Nyquist basándose estrictamente en el intervalo de muestreo mínimo positivo del conjunto de datos ($f_{Nyq} \approx 0.5/\Delta t_{\min}$). En contraste, el software Period04 emplea una heurística diferente (basada típicamente en la cadencia promedio o mediana), lo que resulta en valores nominales de f_{Nyq} diferentes entre ambos programas.

Si bien esto altera el límite visual superior de los periodogramas generados, no compromete la vali-

10.1. ANÁLISIS DE ESTRELLAS PULSANTES

dez del análisis astrosísmico realizado en las estrellas, puesto que las frecuencias dominantes y los patrones de oscilación detectados, se encuentran en regímenes de frecuencia muy inferiores a ambos límites de Nyquist calculados ($f_{\text{pulsación}} \ll f_{\text{Nyq}}$), asegurando que la detección de modos no se ve afectada por problemas de aliasing o por la definición exacta del techo espectral.

10.1.2. Comparación de los parámetros de pulsación para Star1

En este apartado se discuten los resultados obtenidos al implementar los programas de AD ASTRA Pulsantes y Period04.

Frecuencias y amplitudes en Star1:

El número de frecuencias significativas encontradas en el rango de frecuencias para el pre-blanqueo entre 250 y 500 c/d , fueron exactamente las mismas, si se omiten las frecuencias espurias en Period04. Sus valores se registran en la siguiente Tabla:

Tabla 10.1.1: Comparación cuantitativa de las frecuencias y amplitudes detectadas en Star1 mediante Period04 y AD ASTRA Pulsantes. Se muestra la diferencia absoluta ($|\Delta|$) entre los valores obtenidos por ambos métodos.

No.	Frecuencia (c/d)			Amplitud (mmag)		
	Period04	AD ASTRA	$ \Delta $	Period04	AD ASTRA	$ \Delta $
F1	372.375	372.375	0.000	12.367	12.361	0.006
F2	372.084	372.084	0.000	10.294	10.300	0.006
F3	372.671	372.671	0.000	7.748	7.796	0.048
F4	438.052	438.052	0.000	7.764	7.789	0.025
F5	438.329	438.329	0.000	7.321	7.354	0.033
F6	318.111	318.111	0.000	4.778	4.779	0.001
F7	318.383	318.383	0.000	3.996	3.996	0.000
F8	284.623	284.623	0.000	3.221	3.219	0.002
F9	438.602	438.602	0.000	2.822	2.801	0.021

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en la Tabla 10.1.1, por medio de las diferencias entre frecuencias obtenidas, es posible afirmar que los valores obtenidos fueron exactamente los mismos, lo que indica que el algoritmo de Lomb-Scargle y la optimización en Python, son tan precisos como lo es en Period04. Por otro lado, Las diferencias en amplitud son mínimas (el mayor desvío es de solo 0.048 mmag en F3). Dado que el error de incertidumbre es de ≈ 0.47 mmag, todas estas diferencias están muy por dentro del margen de error, lo que significa que los resultados son estadísticamente idénticos.

Comparación de fases en Star1:

Al contrastar los parámetros obtenidos para Star1, se observó inicialmente una discrepancia numérica significativa entre los valores de fase reportados por Period04 y los obtenidos mediante AD ASTRA Pulsantes

según las Tablas 9.1.1 y 9.1.3. Sin embargo, teniendo en cuenta las convenciones trigonométricas empleadas, ambos conjuntos de resultados son físicamente equivalentes a los valores de fase encontrados en Period04, si se los multiplica por 2π . Lo anterior se justifica debido a que el software Period04, reporta la fase en unidades de ciclos normalizados en el intervalo $[0, 1]$. Por el contrario, las librerías de optimización científica en Python (como `scipy.optimize`) empleadas en AD ASTRA Pulsantes operan naturalmente en radianes, cubriendo el intervalo $[0, 2\pi]$. Así pues, por medio de la Tabla 10.1.2, los valores de fase obtenidos por medio de ambos programas son equivalentes mostrando un error absoluto de máximo 0.025 radianes.

Tabla 10.1.2: Comparación de la Fase (ϕ) para Star1. Se muestra el valor de Period04 convertido a radianes ($\phi_{P04} \times 2\pi$) para compararlo directamente con AD ASTRA Pulsantes. La diferencia $|\Delta|$ confirma la equivalencia.

No.	Period04 (Ciclos)	Period04 (Radianes)	AD ASTRA (Radianes)	Diferencia $ \Delta $ (Rad)
F1	0.554	3.481	3.482	0.001
F2	0.726	4.562	4.557	0.005
F3	0.646	4.059	4.061	0.002
F4	0.015	0.094	0.089	0.005
F5	0.677	4.254	4.262	0.008
F6	0.073	0.459	0.459	0.000
F7	0.584	3.669	3.670	0.001
F8	0.546	3.431	3.427	0.004
F9	0.148	0.930	0.905	0.025

Análisis de la Relación señal/ruido (S/N) en Star1:

Al comparar la relación Señal/Ruido, se observan dos tendencias claras. Por un lado el incremento sustancial del S/N en el ajuste global respecto al iterativo, y la discrepancia entre programas durante la fase de detección inicial.

Los valores de S/N calculados tras el ajuste global, son en ambos programas mas altos a los obtenidos durante la detección iterativa de las frecuencias dominantes inicialmente detectadas. Durante la fase iterativa, el "nivel de ruido" estimado incluye la contribución de todas las demás frecuencias aún no detectadas, elevando artificialmente el piso de ruido. En el ajuste global simultáneo, el modelo sustrae todas las señales coherentes a la vez; por tanto, el ruido se calcula sobre los residuos finales limpios, disminuyendo el denominador de la relación y revelando la verdadera significancia estadística de los picos.

Por otro lado, se observa una discrepancia en los valores de S/N iterativos entre ambos programas (Nótese que F_1 corresponde a 12.1 en Period04 vs 16.1 en AD ASTRA), lo cual es atribuible a diferencias algorítmicas en la estimación del ruido local, así como a la incapacidad de omitir las frecuencias espúreas del telescopio en Period04, que, si bien son ignoradas al clasificarlas como frecuencias dominantes, sus valores de ruido afectan al resto. No obstante, es relevante señalar que los valores de S/N global muestran una tendencia a coincidir (Por ejemplo F_1 es 22.4 en Period04 y 21.8 en AD ASTRA). Por lo tanto, una vez limpio el espectro de las componentes deterministas, ambos programas arriban a una solución de residuos equivalente.

10.1. ANÁLISIS DE ESTRELLAS PULSANTES

Tabla 10.1.3: Comparación de la Relación Señal/Ruido (S/N) para Star1. Se contrastan los valores obtenidos durante la detección iterativa (Pre-blanqueo) frente a los obtenidos tras el ajuste global simultáneo. Nótese la convergencia de valores en la etapa global.

No.	S/N Iterativo		S/N Global	
	Period04	AD ASTRA	Period04	AD ASTRA
F_1	12.1	16.2	22.4	21.9
F_2	14.1	15.5	19.0	18.1
F_3	13.5	13.6	13.5	13.8
F_4	10.2	11.3	13.5	11.4
F_5	12.2	11.9	14.8	10.6
F_6	6.7	7.4	13.5	7.6
F_7	6.2	6.2	7.5	6.3
F_8	4.9	5.0	6.2	5.0
F_9	5.4	4.7	5.4	4.1

Clasificación tentativa y morfología en Star1:

Las técnicas aplicadas para caracterizar Star1 y clasificar el tipo estelar obtenido, presenta un desafío metodológico al tener en cuenta la limitada información necesaria para conocer la posición de la estrella en el Diagrama H-R. Los indicadores de amplitud que fueron obtenidos en Period04 y el programa desarrollado, son altamente concordantes. Sin embargo a pesar de su similitud, es necesario conocer de antemano el valor de la temperatura efectiva de la misma, puesto que si el análisis se basa estrictamente en el dominio de la amplitud, Star1 presenta una similitud notable ($J_A \approx 0.60$) con las estrellas **roAp** (Estrellas Ap de oscilación rápida) lo cual corresponde a un tipo de pulsadores de la secuencia principal.

Por otro lado, el análisis en el dominio del período revela una discrepancia con el grupo de estrellas mencionado. Puesto que las frecuencias dominantes detectadas (~ 372 c/d), hacen parte de períodos extremadamente cortos, aproximadamente 3.9 minutos. Lo anterior sugiere un comportamiento inusualmente rápido para las estrellas roAp clásicas, cuyos períodos fundamentales suelen situarse en el rango de 5 a 21 minutos.

De esta manera, al buscar similitud por período, se encuentran como candidatos objetos compactos y calientes, tales como las estrellas subenanas de tipo B (**sdBV**), con una similitud del 15 %, seguidas por las variables enanas blancas (**DBV**), con una similitud del 7 %.

Por tanto, aunque el algoritmo del programa desarrollado prioriza la amplitud (sugiriendo roAp), la restricción física impuesta por el corto período sugiere que Star1 es probablemente una estrella subenana sdB pulsando en modos p acústicos o una roAp de edad media y perteneciente a la Secuencia Principal, en un régimen de pulsación límite. Adicionalmente, cabe mencionar que los diagramas de fase obtenidos al estudiar el espectro de frecuencias de la estrella, no presenta un patrón característico que permita reconocer alguna estrella conocida.

10.1.3. Comparación de los parámetros de pulsación para Star2

Siguiendo el mismo análisis y discusión realizados para Star1, se obtiene lo siguiente:

Frecuencias y amplitudes en Star2:

En el intervalo de frecuencias considerado, las frecuencias relevantes obtenidas con Period04 y AD ASTRA Pulsantes resultaron idénticas; la comparación de sus resultados se reflejan en la siguiente Tabla:

Tabla 10.1.4: Comparación entre las frecuencias y amplitudes detectadas en Star2 mediante Period04 y AD ASTRA Pulsantes. Se muestra la diferencia absoluta ($|\Delta|$) entre los valores obtenidos por ambos métodos.

No.	Frecuencia (c/d)			Amplitud (mmag)		
	Period04	AD ASTRA	$ \Delta $	Period04	AD ASTRA	$ \Delta $
F1	22.790	22.791	0.001	2.537	2.537	0.000
F2	21.714	21.714	0.000	0.250	0.250	0.000
F3	23.021	23.021	0.000	0.039	0.039	0.000
F4	20.575	20.575	0.000	0.032	0.032	0.000
F5	22.015	22.015	0.000	0.030	0.030	0.000
F6	21.965	21.965	0.000	0.025	0.025	0.000

De esta manera los valores descritos en la Tabla 10.1.4, indican que el algoritmo de Lomb-Scargle y la optimización en el programa personalizado, se equiparan a los del programa oficial de Period04. La diferencia absoluto para cada una de las frecuencias es cero a excepción de la señal F1 con un valor de 0.001.

Comparación de fases en Star2:

Al normalizar los resultados de Period04 mediante el factor 2π , se demuestra la equivalencia física de las soluciones. Como se detalla en la Tabla 10.1.5, las discrepancias remanentes son despreciables, presentando una diferencia absoluta prácticamente nula (0.001 rad) para las frecuencias dominantes y un error máximo de apenas 0.03 radianes en las señales más débiles. Esto valida que el algoritmo de ajuste en AD ASTRA Pulsantes converge a la misma forma de onda que el de referencia.

Tabla 10.1.5: Comparación de la Fase (ϕ) para Star2. Se muestra el valor de Period04 convertido a radianes ($\phi_{P04} \times 2\pi$) para compararlo directamente con AD ASTRA Pulsantes. La diferencia $|\Delta|$ confirma la equivalencia.

No.	Period04 (Ciclos)	Period04 (Radianes)	AD ASTRA (Radianes)	Diferencia $ \Delta $ (Rad)
F1	0.907	5.699	5.698	0.001
F2	0.286	1.797	1.798	0.001
F3	0.745	4.681	4.711	0.030
F4	0.935	5.875	5.877	0.002
F5	0.859	5.397	5.397	0.000
F6	0.468	2.941	2.941	0.000

Análisis de la relación señal/ruido (S/N) en Star2:

El comportamiento de la relación señal/ruido para Star2 presenta tendencias similares a las observadas en Star1, pero sus magnitudes son significativamente amplificadas debido a la estructura de amplitud de las pulsaciones.

Como se observa en la Tabla 10.1.6, el incremento del S/N tras el ajuste global es dramático, especialmente para la frecuencia dominante (F_1). En el programa AD ASTRA Pulsantes, el valor salta de un S/N iterativo de 74.6 a un valor global de 1299.7. Este aumento masivo se explica por la naturaleza del espectro de Star2, el cual al ser F_1 una señal extremadamente dominante (2.5 mmag) frente a las demás (todas < 0.3 mmag), su correcta sustracción limpia drásticamente el espectro residual, reduciendo el denominador de ruido a niveles mínimos e incrementando la significancia estadística.

Tabla 10.1.6: Comparación de la Relación señal/ruido (S/N) para Star2.

No.	S/N Iterativo		S/N Global	
	Period04	AD ASTRA	Period04	AD ASTRA
F_1	414.3	74.6	1307.5	1299.7
F_2	76.9	51.8	135.6	127.2
F_3	16.6	13.7	19.5	19.9
F_4	18.1	13.0	17.8	16.4
F_5	11.2	13.9	16.8	15.9
F_6	13.5	12.2	13.5	13.1

Así pues, al comparar los valores entre ambos programas, se mantiene la discrepancia inicial en la fase iterativa (F_1 es 414.3 en Period04 vs 74.6 en AD ASTRA). Esta diferencia notable sugiere que Period04 emplea un algoritmo de estimación de ruido local que es menos sensible a la presencia de un pico dominante único antes de su sustracción completa. Sin embargo, la convergencia en los valores globales es contundente, puesto que para F_1 , ambos programas reportan valores extremadamente altos (1307.5 vs 1299.7), confirmando que la solución final del modelo multifrecuencia es equivalente y altamente confiable.

Clasificación tentativa y morfología en Star2:

La caracterización de Star2 presenta un escenario de clasificación dual. Por un lado, el análisis automatizado del programa (Tabla 9.2.5) prioriza la similitud en amplitud ($J_A \approx 0.41$), identificando a la estrella como una variable de la **Pre-Secuencia Principal (PMS)**, tipo T Tauri o Herbig Ae/Be. Sin embargo, los periodos cortos detectados (~ 1 hora) generan una tensión física, siendo numéricamente más compatibles con pulsadores masivos de la secuencia principal temprana, como las variables **β Cephei**.

Por tanto para clasificar la estrella, se recurre al análisis morfológico de los diagramas de fase (Figura ??). La visualización de campo amplio indica una modulación puramente sinusoidal, descartando pulsadores radiales evolucionados que no presentan este mismo patrón. No obstante, se distingue una notable cantidad de ruido alrededor de la curva ajustada. Así pues mientras una β Cephei estable debería presentar una curva de fase limpia, esta dispersión significativa es una prueba observacional de la actividad cromosférica o la interacción con discos residuales que son típicos en estrellas jóvenes. Por tanto, la evidencia morfológica

favorece la hipótesis de que Star2 es una estrella **PMS (candidata a Herbig Ae/Be o δ Scuti pre-MS)**, donde las pulsaciones acústicas coexisten con la actividad estelar.

10.2. Análisis de estrellas de tipo solar

En esta sección se discuten los hallazgos obtenidos mediante la metodología aplicada al Sol como estrella de calibración y a Star3, la estrella objetivo.

10.2.1. Validación de la metodología mediante el Sol

El primer paso crucial del análisis es verificar la fiabilidad del software desarrollado (AD ASTRA Solar) y del procedimiento de identificación manual con Period04. Para esto, se compara los resultados obtenidos del Sol con los valores estándar reportados en la literatura; así pues se observa una concordancia notable en los siguientes aspectos:

- **Parámetros sísmicos:** los valores medidos de $\Delta\nu$ ($134.72 \pm 0.01 \mu\text{Hz}$) y ν_{max} ($3034.118 \pm 0.005 \mu\text{Hz}$) presentan bajas desviaciones respecto a los valores de referencia ($135.1 \mu\text{Hz}$ y $3090 \mu\text{Hz}$), lo cual confirma que la identificación visual de los modos $l = 0, 2$ y los algoritmos de promedio en Python, funcionan adecuadamente.
- **Parámetros físicos:** por otro lado, los resultados obtenidos de masa y radio estelar a partir de las relaciones de escala (Masa de $\approx 0.96 M_{\odot}$ y un radio de $\approx 0.99 R_{\odot}$), corresponden a resultados satisfactorios con un error menor al 5 % y 2 % respectivamente. Teniendo en cuenta lo anterior, no solo es posible validar las ecuaciones implementadas sino la estrategia de propagación de errores.

10.2.2. Análisis astrofísico de Star3

Tras la validación del programa implementado, se procede a comparar los resultados obtenidos de Star3 con los del Sol, con el fin de interpretar características físicas de su estructura, tales como:

- **Comparación de densidad:** se conoce que la gran separación de frecuencias ($\Delta\nu$), es proporcional a la masa y radio de la estrella según lo descrito en la sección 6.2 de la metodología. Por tanto, este parámetro se encuentra relacionado con la densidad media ρ de la siguiente manera [6,40]:

$$\Delta\nu \propto \sqrt{\rho} \quad (10.2.1)$$

De este modo, al comparar la gran separación de frecuencias de la estrella objetivo con el valor obtenido para el Sol (Tabla 10.2.1), es posible notar que Star3 posee una densidad media mas baja. Además, si se tiene en cuenta que Star3 posee una masa comparable a la del Sol, se traduce en un radio mayor o lo que es igual a que la estrella es volumétricamente más grande.

- **Masa y radio:** al aplicar las relaciones de escala, se determinó que Star3 comparte prácticamente la misma masa que el Sol ($0.97 \pm 0.05 M_{\odot}$) aunque su radio es aproximadamente un 30 % más amplio ($1.28 \pm 0.02 R_{\odot}$), lo que evidencia una expansión envolvente.

Tabla 10.2.1: Resumen final de parámetros sísmicos y físicos obtenidos.

Parámetro	Sol	Star3
Parámetros Sísmicos (μHz)		
$\langle \Delta\nu \rangle$	134.721 ± 0.007	92.205 ± 0.025
$\langle \delta\nu_{02} \rangle$	9.461 ± 0.008	4.050 ± 0.024
$\langle \nu_{max} \rangle$	3034.118 ± 0.005	1859.828 ± 0.017
Propiedades Físicas		
Masa ($M_{\odot}$)	0.9574 ± 0.0002	0.97 ± 0.05
Radio ($R_{\odot}$)	0.9874 ± 0.0001	1.28 ± 0.02

- **Estado evolutivo:** el indicador más sensible de la edad estelar es la pequeña separación de frecuencias. La disminución de $\delta\nu_{02}$ ocurre a medida que el núcleo estelar convierte hidrógeno en helio, aumentando el gradiente de velocidad del sonido en el interior profundo. En el caso de Star3, un valor tan bajo como $4.05\mu\text{Hz}$ sugiere que la estrella ha consumido una fracción muy significativa de su hidrógeno central.

10.2.3. Interpretación de los diagramas CD

La posición de Star3 en el Diagrama de Christensen-Dalsgaard (Figura 9.4.4) sintetiza gráficamente su estado evolutivo.

- **Trayectoria de masa:** se observa que el punto se sitúa en la región comprendida entre las trazas evolutivas de $1.0M_{\odot}$ y $1.2M_{\odot}$, sugiriendo visualmente una masa cercana a $\approx 1.05 - 1.1M_{\odot}$. Al comparar este valor con el derivado analíticamente mediante las relaciones de escala ($0.97 \pm 0.05M_{\odot}$), se contempla una ligera diferencia sistemática. Sin embargo, ambos resultados son consistentes dentro de un margen de 2σ (dos desviaciones estándar). Lo anterior, puede ser atribuible a dos factores físicos. En primer lugar, el diagrama CD de referencia asume una metalicidad solar estándar. Por tanto estas diferencias en la composición química de Star3 respecto al Sol desplazarían las trazas teóricas, explicando el desajuste visual. Por otro lado al ser Star3 una estrella más evolucionada, se aleja de la homología solar, lo que introduce pequeñas desviaciones naturales en las relaciones de escala simplificadas que produjeron buenos resultados para el Sol.
- **Edad y evolución:** la posición de la estrella, desplazada hacia la izquierda (menor densidad) y hacia abajo (núcleo más evolucionado) respecto al Sol, la ubica cerca de la línea de fracción de hidrógeno central $X_c = 0.05$ (o inferior). En conjunto, estos indicadores sugieren que Star3 es una estrella de masa solar en una fase avanzada de la secuencia principal, cercana al TAMS, o en transición hacia la etapa de subgigantes.

Capítulo 11

Conclusiones

El presente trabajo de grado, abordó el problema de caracterizar la estructura interna y el estudio de las oscilaciones estelares, a partir del análisis de datos observacionales obtenidos por fotometría. Se implementaron herramientas computacionales de referencia y un software capaz de replicar los mismos resultados. Así pues fue posible concluir lo siguiente:

En primera instancia, respecto al análisis de estrellas pulsantes, se determinó que el programa desarrollado *AD ASTRA Pulsantes* es una herramienta robusta y precisa, capaz de recuperar frecuencias y amplitudes idénticas o casi cercanas a las obtenidas mediante el análisis manual en *Period04*. Por otro lado, si bien se identificaron limitaciones técnicas como la sensibilidad al ruido instrumental de baja frecuencia y la dependencia del intervalo de muestreo mínimo para el cálculo de Nyquist, estos fueron mitigados mediante pre-procesamiento, validando la eficacia de los algoritmos de pre-blanqueo iterativo y ajuste global implementados. La clasificación tentativa de las estrellas a partir de los valores de periodo y magnitudes obtenidas, permitió compararlas con los resultados existentes en la literatura. Sin embargo, también se realizó un análisis morfológico de los diagramas de fase que permitió entender en mayor medida la estrella y su clasificación. En el caso de *Star1* la detección de periodos cortos (~ 3.9 min) y amplitudes moderadas, sugiere una estrella subenana (sdBV) o una variable roAp en un régimen límite. Por su parte, para *Star2*, la visualización de fase de campo amplio reveló una pulsación sinusoidal coexistiendo con una fuerte dispersión intrínseca, lo que permitió clasificarla como una estrella joven de la Pre-Secuencia Principal (tipo T Tauri o Herbig Ae/Be), donde la actividad estelar domina sobre la señal pulsante.

Por otro lado, en cuanto a las estrellas de tipo solar, se analizaron las curvas de luz de estas estrellas por medio de los programas computacionales *AD ASTRA Solar* y *Period04* en conjunto. Se concluyó que el método híbrido que combina ambos programas, obtuvo resultados exitosos en el Sol, permitiendo recuperar sus parámetros físicos con una precisión superior al 95 %. De esta manera el método genera la suficiente confianza estadística para replicar el mismo proceso en una estrella objetivo. Por lo tanto al trabajar con *Star3* fue posible determinar su estado evolutivo. Los cálculos de la gran separación ($\Delta\nu \approx 92\mu\text{Hz}$) y pequeña separación de frecuencias ($\delta\nu_{02} \approx 4.05\mu\text{Hz}$), fueron significativamente menores a las solares obtenidas, dando a entender que *Star3* es una estrella de masa solar ($0.97M_{\odot}$) pero con un radio expandido ($1.28R_{\odot}$) y un núcleo químicamente evolucionado. La posición en el Diagrama de Christensen-Dalsgaard confirma que ha abandonado la Secuencia Principal de edad cero y se encuentra en una fase avanzada de quema de hidrógeno, cercana al TAMS o iniciando su ascenso a la rama de subgigantes.

Por último, para concluir este trabajo de grado, es importante mencionar que se determinaron las variables permitidas a partir de datos fotométricos; ya que para una caracterización completa de una estrella, se requie-

re complementariedad con las variables externas provenientes de otras técnicas de detección. En particular, la espectroscopía permite fijar la escala de metalicidad y temperatura efectiva que en este estudio tuvieron que ser asumidas o aproximadas, limitando la precisión en la masa de Star3 y la clasificación definitiva de Star1 y Star2. Asimismo, la integración de datos espectroscópicos permitiría determinar las abundancias químicas detalladas y la gravedad superficial ($\log g$) independiente. Posteriormente, al introducir estos parámetros en modelos de evolución estelar junto con las frecuencias de oscilación medidas, permitirían realizar una inversión sísmica completa, resolviendo la degeneración actual y proporcionando una descripción física exacta de la estructura y edad de las estrellas estudiadas como se realizaron en los trabajos [5, 22, 28].

Apéndice A

Fundamentos Teóricos de Oscilaciones y Resonancia

Se examinan las ecuaciones de onda y sus soluciones para geometrías simples, con el objetivo de fundamentar la comprensión de los modos de oscilación y su descripción matemática necesarios para una mayor comprensión del estudio de las pulsaciones estelares abordado en el Capítulo 5.

A.I. Principios de Resonancia y Ondas Estacionarias en Sistemas Delimitados

Las oscilaciones en un medio confinado por fronteras pueden dar lugar a ondas estacionarias, estas oscilaciones generan patrones de vibración estables que resultan de la interferencia constructiva de ondas propagantes y sus reflexiones. Dichos patrones solo existen a frecuencias de resonancia específicas ν , que son intrínsecas al sistema. Cada frecuencia está asociada a un modo propio de oscilación, caracterizado por una distribución espacial de amplitud con superficies nodales (donde la amplitud es cero). La condición de resonancia exige que una onda complete un ciclo de propagación y reflexión regresando a su origen en fase (desfase de $2\pi n$, n entero).

Estas oscilaciones se describen matemáticamente por la ecuación de onda. Para una perturbación escalar Ψ en un medio homogéneo con velocidad de propagación c_s , es:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \Psi = 0. \quad (\text{A.I.1})$$

Las soluciones específicas (modos y frecuencias) dependen de la geometría del sistema y las condiciones de frontera impuestas.

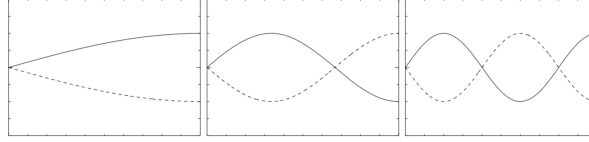


Figura A.I.1: La figura representa los tres primeros modos de oscilación de un órgano de tubos delimitado. En el lado izquierdo se encuentra el modo fundamental, en el centro el primer sobre tono con un solo nodo y dos sobre tonos con dos nodos al final.

Fuente: Obtenida de [2].

A.I.1. Modos de Oscilación en Geometrías Simples

Caso Unidimensional: Cuerda Vibrante

Para una cuerda de longitud L fija en $x = 0$ y $x = L$, la ecuación de onda 1D (Ecuación (A.I.1) con $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2$) tiene soluciones estacionarias $\Psi(x, t) = A_k \sin(k_x x) \cos(\omega_k t)$, donde el número de onda $k_x = k\pi/L$ (k entero positivo) es cuantizado por las condiciones de frontera. Esto lleva a frecuencias de resonancia discretas:

$$\nu_k = \frac{\omega_k}{2\pi} = k \frac{c_s}{2L}. \quad (\text{A.I.2})$$

El entero k define el modo (fundamental para $k = 1$, sobretonos para $k > 1$) y $k - 1$ es el número de nodos internos.

Caso Bidimensional: Membranas Vibrantes

Membrana Rectangular. Para una membrana rectangular ($X \times Y$) con bordes fijos, la ecuación de onda 2D corresponde a:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_s^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (\text{A.I.3})$$

Las soluciones de onda estacionaria son de la forma $\Psi(x, y, t) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \cos(\omega t)$, con $k_x = n_x\pi/X$ y $k_y = n_y\pi/Y$ (n_x, n_y enteros positivos). Las frecuencias angulares de resonancia son:

$$\omega_{n_x, n_y}^2 = c_s^2 \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{X} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{Y} \right)^2 \right]. \quad (\text{A.I.4})$$

Los enteros (n_x, n_y) caracterizan el patrón nodal bidimensional.

Membrana Circular. Para una membrana circular de radio R con borde fijo ($\Psi(R, \phi, t) = 0$), la ecuación de onda en coordenadas polares (r, ϕ) se define:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - c_s^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right] = 0. \quad (\text{A.I.5})$$

Las soluciones separables $\Psi(r, \phi, t) = \mathcal{R}(r)\Phi(\phi)e^{-i\omega t}$ involucran que:

- Para la parte acimutal $\Phi(\phi)$: $\cos(m\phi)$ o $\sin(m\phi)$ (o $e^{im\phi}$), donde m (entero, orden acimutal) asegura la periodicidad en 2π . Define m líneas nodales diametrales.

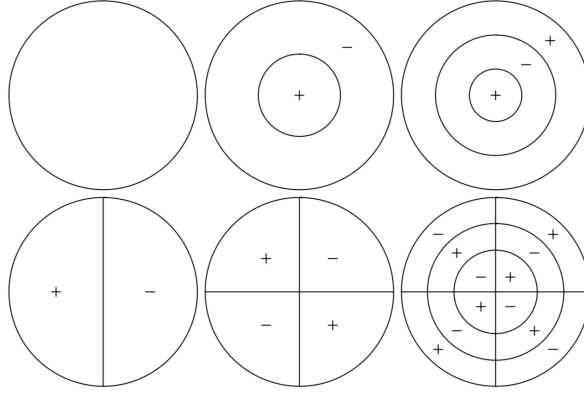


Figura A.I.2: La figura representa algunos modos de oscilación en un parche de tambor. Sus modos pueden caracterizarse por medio de números cuánticos, tanto para los nodos radiales como los no radiales respectivamente. Si se considera un orden de lectura para sus modos de oscilación de izquierda a derecha y de arriba hacia abajo, estos pueden numerarse de la siguiente manera de manera que (0,0), (1,0), (2,0), (0,1), (0,2) y finalmente (2,2). Para mayor información revisar la descripción en la sección 5.2.

Fuente: Obtenida de [2], .

- Para la parte radial $\mathcal{R}(r)$: Funciones de Bessel de orden m , $J_m(k_r r)$, donde $k_r = \omega/c_s$. La condición $\mathcal{R}(R) = 0$ implica $J_m(\omega R/c_s) = 0$. Los ceros de $J_m(x)$, denotados j_{m,n_r} (n_r entero positivo, orden radial), cuantifican las frecuencias:

$$\omega_{n_r,m} = \frac{c_s j_{m,n_r}}{R}. \quad (\text{A.I.6})$$

El orden radial $n_r - 1$ indica el número de nodos circulares concéntricos.

Caso Tridimensional: Oscilaciones Escalares en una Esfera Uniforme

Este caso es el análogo más directo a una estrella idealizada; se considera una perturbación escalar $\Psi(r, \theta, \phi, t)$ en una esfera de radio R con velocidad del sonido c_s constante, regida por la ecuación de onda (Ecuación (A.I.1)) con el Laplaciano ∇^2 en coordenadas esféricas:

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2}. \quad (\text{A.I.7})$$

Buscando soluciones modales de la forma $\Psi(r, \theta, \phi, t) = \psi(r, \theta, \phi) e^{-i\omega t}$, la parte espacial $\psi(r, \theta, \phi)$ debe satisfacer la ecuación de Helmholtz: $\nabla^2 \psi + (\omega^2/c_s^2) \psi = 0$. Lo anterior mediante separación de variables, $\psi(r, \theta, \phi) = \mathcal{R}(r) Y_l^m(\theta, \phi)$, se obtiene:

- **Parte Angular:** La solución es dada por los **armónicos esféricos** $Y_l^m(\theta, \phi)$:

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (\text{A.I.8})$$

Siendo $P_l^m(\cos \theta)$ los polinomios asociados de Legendre, que describen la estructura latitudinal. El entero $l \geq 0$ es el **grado** (define el número total de planos nodales que intersecan la esfera) y el entero m ($-l \leq m \leq l$) es el **orden acimutal** (define cuántos de estos planos nodales contienen el eje z).

- **Parte Radial:** La función $\mathcal{R}(r)$ satisface la ecuación de Bessel esférica:

$$\frac{d^2 \mathcal{R}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\mathcal{R}}{dr} + \left[\left(\frac{\omega}{c_s} \right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \mathcal{R} = 0. \quad (\text{A.I.9})$$

Las soluciones físicamente aceptables (finitas en $r = 0$) son las funciones de Bessel esféricas $j_l(\omega r/c_s)$.

Cada modo (n, l, m) tiene una frecuencia $\nu_{nlm} = \omega_{nlm}/2\pi$ y una estructura espacial dada por $\mathcal{R}_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \phi)$.

El análisis anterior para una perturbación escalar Ψ en una esfera uniforme idealizada fundamenta la aparición de los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$ y la clasificación modal (n, l, m) debido a la geometría esférica y las condiciones de frontera.

En una estrella real, las oscilaciones son perturbaciones del fluido (gas/plasma) y se describen mediante el vector desplazamiento $\xi(r, \theta, \phi, t)$. Como se detalla en la Sección 5.2 (Ecuaciones (5.2.1a)-(5.2.1c)), las componentes de este vector para un modo (n, l, m) adoptan una forma donde la dependencia angular es precisamente la dada por los armónicos esféricos Y_l^m y sus derivadas:

$$\begin{aligned} \xi_r(r, \theta, \phi, t) &\propto \mathcal{A}_r(r) Y_l^m(\theta, \phi) e^{-i2\pi\nu_{nlm}t} \\ \xi_\theta(r, \theta, \phi, t) &\propto \mathcal{A}_h(r) \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \theta} e^{-i2\pi\nu_{nlm}t} \\ \xi_\phi(r, \theta, \phi, t) &\propto \mathcal{A}_h(r) \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial Y_l^m(\theta, \phi)}{\partial \phi} e^{-i2\pi\nu_{nlm}t}. \end{aligned}$$

La diferencia crucial es que las amplitudes radiales ($\mathcal{A}_r(r)$, $\mathcal{A}_h(r)$) que son equivalentes a $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ descritas en la sección 5.2) ya no son simples funciones de Bessel esféricas. En su lugar, son soluciones de un sistema más complejo de ecuaciones diferenciales radiales que surgen de la linealización de las ecuaciones de la hidrodinámica (conservación de masa, momento, energía, y la ecuación de Poisson) aplicadas a la estructura interna estratificada de una estrella real (donde $c_s(r)$, $\rho(r)$, $P(r)$ varían con r). El presente apéndice, al mostrar el origen de los Y_l^m y la cuantización modal en un sistema esférico idealizado, sirve para comprender por qué estas mismas funciones angulares describen la geometría de las pulsaciones estelares más complejas.

Ecuaciones Generales de la Hidrodinámica y Configuración de Equilibrio Estelar

A.II. Ecuaciones generales de la hidrodinámica

Existen dos formalismos principales para describir el movimiento de un fluido: las descripciones euleriana y lagrangiana. En el formalismo lagrangiano, cada partícula fluida recibe una etiqueta y se sigue su movimiento, como en la mecánica clásica. Esta etiqueta podría ser, por ejemplo, su posición inicial $\vec{r}_0$. En general se emplea un vector $\vec{a}$ como etiqueta. El fluido se describe entonces mediante funciones como $\vec{r}(\vec{a}, t)$, $\rho(\vec{a}, t)$, $P(\vec{a}, t)$, entre otras.

Por su parte, en el formalismo euleriano, las partículas no se rastrean individualmente. En cambio, en cada posición $\vec{r}$, el fluido se caracteriza por funciones como $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $\rho(\vec{r}, t)$, $P(\vec{r}, t)$, entre otras.

Notablemente, las derivadas temporales en ambos formalismos tienen significados distintos: en el formalismo lagrangiano, $\partial/\partial t$ representa la derivada temporal siguiendo el movimiento del fluido, mientras que en el formalismo euleriano, este símbolo denota la derivada temporal en un punto fijo. Por consiguiente, se tiene:

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \vec{v} \quad \text{en el formalismo lagrangiano,} \quad (\text{A.II.1})$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0 \quad \text{en el formalismo euleriano.} \quad (\text{A.II.2})$$

En el formalismo euleriano, se introduce el operador diferencial denominado derivada de Stokes, o derivada con respecto a t siguiendo el fluido. Para una cantidad X , se define como:

$$\frac{dX}{dt} := \frac{\partial X}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla X \quad (\text{A.II.3})$$

Es evidente que:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t} \right)_{\text{Lagrange}} = \frac{dX}{dt} \quad (\text{A.II.4})$$

Ambos formalismos se emplean frecuentemente de manera simultánea. Para evitar confusiones, se adopta la notación $\partial/\partial t$ para $(\partial/\partial t)_{\text{Euler}}$ y d/dt para el operador $(\partial/\partial t)_{\text{Lagrange}}$. Esta convención es coherente con la relación anterior entre la derivada de Stokes y la derivada temporal lagrangiana.

A.II.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad expresa la conservación de la masa. Puede escribirse como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{A.II.5})$$

donde $\vec{v}$ y ρ representan, respectivamente, la velocidad local y la densidad.

A.II.2. Ecuación de conservación del momento

La ecuación del momento se expresa como:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla \Phi - \frac{\nabla P}{\rho} \quad \text{o} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = -\nabla \Phi - \frac{\nabla P}{\rho} \quad (\text{A.II.6})$$

donde P es la presión total (que incluye contribuciones del gas, la radiación y la presión turbulenta) y Φ es el potencial gravitacional, que satisface la ecuación de Poisson:

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (\text{A.II.7})$$

siendo G la constante gravitacional.

A.II.3. Conservación de la energía

La conservación de la energía se escribe como:

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla S \right) = \varepsilon - \frac{\nabla \cdot \vec{F}}{\rho} \quad \text{o} \quad T \frac{dS}{dt} = \varepsilon - \frac{\nabla \cdot \vec{F}}{\rho} \quad (\text{A.II.8})$$

donde T es la temperatura local, S la entropía por unidad de masa, ε la tasa de generación de energía por unidad de masa y $\vec{F}$ la densidad de flujo de energía.

A.II.4. Ecuación de transporte

El transporte de energía en una estrella ocurre mediante radiación o convección, por lo que el flujo total se denota como $\vec{F} = \vec{F}_R + \vec{F}_C$, donde $\vec{F}_R$ es el flujo radiativo y $\vec{F}_C$ el flujo convectivo. En el interior estelar, la aproximación de difusión es válida, dado que el camino libre medio de los fotones (típicamente del orden de centímetros en el interior solar) es mucho menor que la distancia necesaria para alcanzar la superficie. Por ende, el flujo radiativo se describe, con buena aproximación, mediante la ecuación de difusión:

$$\vec{F}_R = -K\nabla T \quad (\text{A.II.9})$$

donde K es el coeficiente de conductividad radiativa, que puede expresarse en términos de la opacidad media de Rosseland κ como:

$$K = -\frac{4ac_s T^3}{3\kappa\rho} \quad (\text{A.II.10})$$

siendo $a = 7.56 \cdot 10^{-15}$ cgs la constante de densidad de radiación y c_s la velocidad de la luz.

A.II.5. Ecuaciones de estado

Además de las ecuaciones diferenciales parciales y sus condiciones de contorno, se requieren ecuaciones que describan el comportamiento de la materia en función de su composición química y las variables termodinámicas. Estas ecuaciones, denominadas constitutivas o de estado, incluyen la ecuación de estado, la opacidad κ y la tasa de generación de energía nuclear ε ; también se consideran ρ y T variables termodinámicas independientes. Las propiedades de la materia se describen mediante relaciones de la forma:

$$P = P(\rho, T, \chi_i), \quad S = S(\rho, T, \chi_i), \quad \kappa = \kappa(\rho, T, \chi_i), \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T, \chi_i), \dots$$

donde χ_i representa la composición química en términos de i elementos diferentes. Cabe destacar que la tasa de generación de energía nuclear ε suele ser el resultado de múltiples reacciones nucleares, cuyas tasas dependen de elementos con abundancias muy bajas, vidas cortas y que no están descritos por χ_i . Solo cuando estos elementos alcanzan sus valores de abundancia en equilibrio, ε puede considerarse función de ρ , T y χ_i .

A.III. Configuración de equilibrio estelar

Dado que el estado de equilibrio es esféricamente simétrico, la estructura depende únicamente de la distancia r al centro. En coordenadas polares esféricas $\{r, \theta, \varphi\}$ (descritas en detalle en B.1), las ecuaciones fundamentales de la hidrodinámica se reescriben como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dr} + \frac{d\Phi}{dr} = 0 \quad (\text{A.III.1})$$

A.III. CONFIGURACIÓN DE EQUILIBRIO ESTELAR

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = 4\pi G \rho \quad (\text{A.III.2})$$

$$\varepsilon - \frac{1}{\rho r^2} \frac{d}{dr} (r^2 F) = 0 \quad (\text{A.III.3})$$

$$F = -\frac{4acT^3}{3\kappa\rho} \frac{dT}{dr} \quad (\text{zona radiativa}) \quad (\text{A.III.4})$$

En la ecuación anterior, el transporte de energía se considera únicamente por radiación. Cuando la convección está presente, debe incluirse el flujo convectivo.

Sea M_r la masa de la esfera de radio r y L_r su luminosidad, definidas como:

$$M_r = \int_0^r 4\pi r^2 \rho dr \quad (\text{A.III.5})$$

$$L_r = 4\pi r^2 F \quad (\text{A.III.6})$$

Entonces, las ecuaciones anteriores adoptan la forma estándar de las ecuaciones de estructura estelar:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho g, \quad \text{donde} \quad g = \frac{GM_r}{r^2} \quad (\text{A.III.7})$$

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \quad (\text{A.III.8})$$

$$\frac{dL_r}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon \quad (\text{A.III.9})$$

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3\kappa\rho}{4ac_*} \frac{1}{T^3} \frac{L_r}{4\pi r^2} \quad (\text{zona radiativa}) \quad (\text{A.III.10})$$

En ciertas fases evolutivas, los modelos no están en equilibrio térmico, y aparece un término que involucra la derivada de la entropía en la ecuación de conservación de energía. En lo que sigue, no se considerará modelos fuera del equilibrio térmico.

Las zonas convectivas de la estrella se delimitan mediante el criterio de Schwarzschild, como se propuso en [41], para denotar el grado de inestabilidad convectiva ($A > 0$) o estabilidad ($A < 0$). Este criterio está relacionado con la frecuencia de Brunt-Väisälä N mediante:

$$A := \frac{N^2}{g} = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \quad (\text{A.III.11})$$

donde $g = (GM_r)/r^2$ y Γ_1 es uno de los coeficientes adiabáticos, definido como:

$$\Gamma_1 := \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}} \quad \text{y} \quad \Gamma_3 - 1 := \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right)_{\text{ad}} \quad (\text{A.III.12})$$

Además, los parámetros estelares ρ , T , P , entre otros, se obtienen a partir de la *teoría de la longitud de mezcla* (MLT, por sus siglas en inglés) de la convección. Esta es una teoría local e independiente del tiempo, en la que se asume que el camino libre medio de un elemento convectivo, l , puede describirse como:

$$l = \alpha_{\text{MLT}} H_P = -\alpha_{\text{MLT}} \left(\frac{d \ln P}{dr} \right)^{-1} \quad (\text{A.III.13})$$

donde H_P es la altura de escala de presión y α_{MLT} es el parámetro de longitud de mezcla, que es del orden de la unidad ($\alpha_{\text{MLT}} \sim 1.8$ para el Sol). La ubicación precisa de la transición entre una región radiativa y una convectiva es extremadamente difícil de determinar. Esto se debe a un fenómeno poco conocido denominado *sobrepaso convectivo*, que describe el hecho de que las celdas convectivas no se detienen abruptamente al entrar en una zona radiativa.

El sobrepaso convectivo se parametriza usualmente mediante el *parámetro de sobrepaso* α_{ov} , definido como la fracción de longitud, expresada en unidades de H_P , a lo largo de la cual las celdas convectivas continúan moviéndose al entrar en la zona radiativa. Los valores típicos de α_{ov} considerados en modelos estelares varían entre 0.0 y 0.3. Un tema de investigación crucial en la estructura estelar es encontrar restricciones observacionales precisas para este parámetro, que permanece poco conocido.

Apéndice B

Derivación de las Ecuaciones de Pulsación Estelar a partir de la Hidrodinámica Linealizada

Las estrellas pulsantes y estrellas tipo solar, presentan un comportamiento no radial principalmente en sus oscilaciones; por tanto, es importante tener en cuenta un análisis que permita entender, como se relaciona la estructura de las estrellas al presentar pulsaciones de este tipo.

A continuación, se desarrolla la teoría de oscilaciones no radiales adiabáticas en la aproximación lineal; es decir, a partir de pequeñas perturbaciones para un sistema con simetría esférica, sin rotación o campos magnéticos. Por medio de las ecuaciones de la hidrodinámica que se presentaron en el Apéndice A.I.1, se pretende obtener un sistema de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones serán las autofunciones y autofrecuencias de pulsación [5, 23].

Haciendo uso de las ecuaciones básicas de la hidrodinámica:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0, \quad (\text{B..1})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) \vec{u} = \rho \vec{f} + \nabla P - \rho \nabla \phi + \nabla \Theta, \quad (\text{B..2})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \right) S = \rho (\epsilon_N + \epsilon_V) - \nabla \cdot \vec{F}_R, \quad (\text{B..3})$$

Dónde las ecuaciones B..1, B..2 y B..3 corresponden a la conservación de masa, del momento y de la energía respectivamente. Siendo P la presión, T la temperatura, S entropía específica, ρ la densidad de masa, $\vec{u}$ la velocidad de flujo, ϕ corresponde al potencial gravitatorio, $\vec{f}$ las fuerzas electromagnéticas externas, ϵ_N corresponde a la tasa de generación de energía nuclear, ϵ_V generación de calor por viscosidad, Θ es el tensor de esfuerzos viscosos y $\vec{F}_R$ el flujo de energía por radiación.

También es necesario agregar algunas ecuaciones suplementarias para poder completar una descripción del sistema, entre estas ecuaciones se encuentran la ecuación de Poisson, siendo útil para poder relacionar el potencial gravitatorio con la descripción de masa.

$$\nabla^2 \phi = 4\rho, \quad (\text{B..4})$$

Además, la ecuación de difusión radiativa:

$$\hat{F}_R = -K \nabla T, \quad (\text{B..5})$$

Siendo G la constante de gravitación universal, ∇^2 el operador Laplaciano y K la constante de conductividad radiativa, que está definida en términos de κ (opacidad):

$$K = \frac{4ac}{3\kappa\rho} T^3, \quad (\text{B..6})$$

En la ecuación B..6, (a) es una constante de densidad de rotación y (c) corresponde a la velocidad de la luz.

Teniendo en cuenta que la viscosidad por lo general es pequeña cuando se trabaja en el interior estelar y en ausencia de convección; se puede despreciar el término de viscosidad ($\nabla \cdot \Theta \approx 0$) en la ecuación B..2, así mismo, como el término que contiene ϵ_V en B..3.

De esta manera y trabajando con un sistema autogravitante el cual no se encuentra sometido bajo la influencia de campos magnéticos, se tiene que $\vec{f} = 0$.

Entonces las ecuaciones B..1, B..2 y B..3 se expresan como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (\text{B..7})$$

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \vec{v} = \rho \vec{f} - \nabla P - \rho \nabla \phi, \quad (\text{B..8})$$

$$\rho T \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) S = \rho \epsilon_N - \nabla \cdot \vec{F}_R, \quad (\text{B..9})$$

En B..8 es posible apreciar una aproximación a la ecuación de Navier-Stokes en fluidos no viscosos. Además se realiza un cambio en la notación del fluido " $\vec{v}$ " debido a que $\vec{u}$ indica la velocidad del fluido general la cual puede abordar campos de velocidad turbulentos.

La ecuación B..4 no varía, al sustituir la ecuación B..6 en B..5, se obtiene:

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G \rho, \quad (\text{B..10})$$

$$\vec{F}_R = \frac{-4ac}{3\kappa\rho} T^3 \nabla T, \quad (\text{B..11})$$

Ahora al fijar v_0 y $(\partial \rho / \partial t = 0)$ debido a la consideración del estado de equilibrio. Las ecuaciones B..7-B..11 se expresan como:

$$-\nabla P_0 - \rho_0 \nabla \phi_0 = 0, \quad (\text{B..12})$$

$$\rho_0 \epsilon_{N,0} - \nabla \cdot \vec{F}_{R,0} = 0, \quad (\text{B..13})$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi G \rho_0, \quad (\text{B..14})$$

$$\vec{F}_{R,0} = -K_0 \nabla T, \quad (\text{B..15})$$

En donde el subíndice 0 en las variables físicas indican que se encuentran en estado de equilibrio. Para el cálculo de las ecuaciones de pulsación, se tiene en consideración el estado no alterado y se agregan pequeñas alteraciones al sistema. Debido a que las perturbaciones son en gran medida menores en magnitud que las variables en estado de equilibrio, es posible asumir el desarrollo de la teoría lineal en las perturbaciones y descartar términos cuyo orden es mayor a uno [5].

En física es posible describir las perturbaciones de una cierta cantidad f mediante las variaciones Lagrangianas (δf) o Eulerianas (f') [5]:

$$\begin{aligned} \delta f(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}), \\ f'(\vec{r}, t) &= f(\vec{r}, t) - f_0(\vec{r}), \end{aligned} \quad (\text{B..16})$$

Dónde $\vec{\xi} = \vec{r} - \vec{r}_0$ define la variación Lagrangiana en un elemento de fluido. La ecuación que relaciona ambos tipos de perturbaciones está dada por:

$$\delta f(\vec{r}, t) = f'(\vec{r}, t) + \vec{x}_i \cdot \nabla f_0(\vec{r}_0), \quad (\text{B..17})$$

Se procede a escribir cada variable física con su valor en equilibrio junto a una perturbación Euleriana, de tal manera que se pueda linealizar las ecuaciones B..7-B..11:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 + \rho', \\ \phi &= \phi_0 + \phi', \\ P &= P_0 + P', \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{v}', \end{aligned} \quad (\text{B..18})$$

Tanto en variaciones Lagrangianas como Eulerianas, para el caso no perturbado dónde ($\vec{v}_0 = 0$), ambas perturbaciones coinciden:

$$\vec{v} = \vec{v}' = \delta v = \frac{d\vec{\xi}}{dt}, \quad (\text{B..19})$$

Haciendo uso de las expresiones B..18, se trabaja con las ecuaciones B..12 - B..15 y al no considerar términos de orden dos o mayor a este, se pueden re-escribir las ecuaciones B..7 - B..11 de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_0 \vec{v}) = 0, \quad (\text{B..20})$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \nabla P' + \rho_0 \nabla \phi' + \rho' \nabla \phi_0 = 0, \quad (\text{B..21})$$

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial}{\partial t} (S' + \vec{\xi} \cdot \nabla S_0) = (\rho_{\epsilon N})' - \nabla \cdot \vec{F}'_R, \quad (\text{B..22})$$

$$\nabla^2 \phi' = 4\pi G \rho', \quad (\text{B..23})$$

$$\vec{F}'_R = -K_0 \nabla T' - K' \nabla T_0, \quad (\text{B..24})$$

De esta manera, se construye un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para las variables perturbadas (ρ', ϕ', T') , el vector velocidad $\vec{v}$ y la variación Lagrangiana de desplazamiento $\vec{\xi}$. Así mismo sus coeficientes contienen cantidades en equilibrio las cuales dependen de "r" debido a que se considera la simetría esférica del modelo no perturbado con el que se está trabajando [5].

$$\begin{aligned} T_0 &= T_0(r), \\ \phi_0 &= \phi_0(r), \\ \rho_0 &= \rho_0(r), \end{aligned} \quad (\text{B..25})$$

Omitiendo los índices 0 para mayor comodidad, se tiene que al operar en simetría esférica las variaciones Eulerianas las cuales son funciones del tiempo y sus coordenadas, estas se denotan como:

$$f' = f'(r, \theta, \phi, t), \quad (\text{B..26})$$

En dónde, por medio de separación de variables, se puede expresar f en términos de $e^{i\nu t}$ al cual está asociado a su dependencia radial oscilatoria, siendo ν la frecuencia angular de oscilación, quién a su vez está relacionada con la frecuencia cíclica w y de la misma manera con el periodo:

$$w = \frac{\nu}{2\pi} = \frac{1}{\Pi}, \quad (\text{B..27})$$

Considerando lo previamente mencionado, de B..26 se tiene:

$$f'(r, \theta, \phi, t) = f'(r, \theta, \phi) e^{i\nu t}, \quad (\text{B..28})$$

Teniendo en cuenta la siguiente relación termodinámica, tal y como se menciona en [23]:

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{1}{\Gamma_1} \frac{P'}{P} - A \xi_r - \nabla_{rad} \rho \frac{T}{P} \delta S, \quad (\text{B..29})$$

Donde:

$$\Gamma_1 = \left(\frac{\partial \ln P}{\partial \ln \rho} \right)_{S'}, \quad \nabla_{ad} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_{S'}, \quad (\text{B..30})$$

En dónde se trabajan las derivadas a entropía constante [5]. Además de la ecuación B..29, ξ_r corresponde a la componente radial de $\vec{\xi}$ y A resulta ser el discriminante de Schwartzchild, que denota el grado de estabilidad ($A < 0$) o inestabilidad convectiva ($A > 0$), siendo así:

$$A = \frac{d \ln \rho}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr}, \quad (\text{B..31})$$

Teniendo en cuenta la expresión en la ecuación B..28, la relación termodinámica escrita en B..29 y las ecuaciones B..20 - B..24, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\rho g}{\Gamma_1 P} \right) P' - (\nu^2 + gA) \xi_r + \frac{\partial \phi'}{\partial r} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S, \quad (\text{B..32})$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(r^2 \xi_r)}{\partial r} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \left(\frac{P}{\Gamma_1 P} + \frac{\nabla_{\perp}^2}{\nu^2} \right) \frac{P'}{\rho} + \frac{1}{\nu^2} \nabla_{\perp}^2 \phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S, \quad (\text{B..33})$$

$$\left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 \right) \phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\Gamma_1 P} - A \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{P} \delta S, \quad (\text{B..34})$$

$$i\nu \rho T \delta S = (\rho \xi_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r')}{\partial r} + \nabla_{\perp}^2 (KT'), \quad (\text{B..35})$$

$$F_r' = -K \frac{\partial T'}{\partial r} - K' \frac{dT}{dr}, \quad (\text{B..36})$$

Siendo el operador $\nabla_{\perp}^2$:

$$\nabla_{\perp}^2 = \frac{1}{r^2} \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right], \quad (\text{B..37})$$

Dónde F_r' es la parte radial de la perturbación Euleriana del flujo F_R' . Se destaca la independencia temporal de las ecuaciones que se presentó anteriormente y de como sus coeficientes están escritos en términos de la coordenada radial.

Dado que $\nabla_{\perp}^2$ es el único operador diferencial con derivadas respecto a θ y ϕ , es factible realizar otra separación de variables, donde se obtengan tanto la parte radial y angular; en cuyo caso la parte radial se refleja en función de los armónicos esféricos $Y_l^m(\theta, \phi)$, los cuales son autofunciones del operador $L^2 = R^2 \nabla_{\perp}^2$ con autovalores $l(l+1)$:

$$L^2 Y_l^m(\theta, \phi) = r^2 \nabla_{\perp}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = l(l+1) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{B..38})$$

De tal manera que la ecuación 5.2.2 nos indica la forma explícita de los armónicos esféricos, dónde $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, l$; además $P_l^m(\cos \theta)$ son los polinomios de Legendre como se mencionó anteriormente.

Así pues, se procede a escribir los modos normales de las perturbaciones de la siguiente forma:

$$f'(r, \theta, \phi) = f(r) Y_l^m(\theta, \phi), \quad (\text{B..39})$$

Y la perturbación Lagrangiana del desplazamiento es:

$$\vec{\xi} = \left[\xi_r(r), \xi_h(r) \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi_h(r) \frac{\partial}{\sin \theta \partial \phi} \right]_l^m (\theta, \phi) e^{i\nu t}, \quad (\text{B..40})$$

Siendo:

$$\xi_h = \frac{1}{\nu^2 r} \left(\frac{P'}{\rho} + \phi' \right), \quad (\text{B..41})$$

Considerando que las perturbaciones de las cantidades físicas, tienen la forma funcional escrita en la ecuación B..39; las ecuaciones B..32 - B..36 se expresan como:

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} P' + (N^2 - \nu^2) \xi_r + \frac{d\phi'}{dr} = g \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S, \quad (\text{B..42})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} + \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} \xi_r + \left(1 - \frac{L_l^2}{\nu^2} \right) \frac{P'}{\rho c_s^2} - \frac{l(l+1)}{\nu^2 r^2} \phi' = \nabla_{ad} \frac{\rho T}{P} \delta S, \quad (\text{B..43})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi' - 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right) = -4\pi G \nabla_{ad} \frac{\rho^2 T}{P} \delta S, \quad (\text{B..44})$$

$$K \frac{dT'}{dr} = -F'_r - K' \frac{dT}{dr}, \quad (\text{B..45})$$

$$i\nu \rho T \delta S = (\rho \epsilon_N)' - \frac{1}{r^2} \frac{dr^2 F'_r}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} K T', \quad (\text{B..46})$$

En dónde $c_s^2 = (\Gamma_1 P / \rho)^{1/2}$ corresponde a la velocidad local del sonido, y las variables N y L_l son frecuencias conocidas como *Frecuencias de Brunt-Väisälä* y *Lamb* respectivamente [5]:

$$N^2 = g \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right) = -gA, \quad (\text{B..47})$$

$$L_l^2 = \frac{l(l+1)}{r^2} c_s^2, \quad (\text{B..48})$$

Es relevante escribir el sistema de ecuaciones en términos de estas frecuencias; dado su importancia en la teoría de pulsaciones no radiales y su característica particular para determinar aspectos globales. Entre estos definir propiedades al espectro de modos g haciendo uso de la frecuencia de Brunt-Väisälä [5]. Considerando la aproximación adiabática, se toma en cuenta el no intercambio de calor entre los elementos del fluido a oscilar [5]. En el caso de una estrella, esta condición de aproximación se cumple en sus zonas internas y la entropía específica de sus oscilaciones adiabáticas se conservan, por lo cual:

$$\delta S = 0, \quad (\text{B..49})$$

Del mismo modo la ecuación B..26 se expresa como:

$$\rho' = \frac{P'}{c_s^2} + \frac{\xi_r \rho N^2}{g}, \quad (\text{B..50})$$

En consecuencia, las ecuaciones B..42 - B..46 se reformulan de la siguiente manera:

$$\frac{1}{r} \frac{d(r^2 \xi_r)}{dr} - \frac{g}{c_s^2} \xi_r + \left(1 - \frac{L_l^2}{\nu^2}\right) \frac{P'}{\rho c_s^2} = \frac{l(l+1)}{\nu^2 r^2} \phi', \quad (\text{B..51})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP'}{dr} + \frac{g}{\rho c_s^2} P' + (N^2 - \nu^2) \xi_r = \frac{-d\phi'}{dr}, \quad (\text{B..52})$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi'}{dr} \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \phi' = 4\pi G \rho \left(\frac{P'}{\rho c_s^2} + \frac{N^2}{g} \xi_r \right), \quad (\text{B..53})$$

Las ecuaciones B..51 - B..53 con ciertas condiciones de contorno en su centro ($r = 0$) y en la superficie estelar ($r = RP = 0$), crean un problema de autovalores (ν^2), en el que se pueden encontrar soluciones discretas para σ^2 teniendo en cuenta los modos normales de oscilación [5].

Así mismo estas ecuaciones no tienen dependencia del número azimutal m , en consecuencia tendrán una degeneración al orden de $2l+1$ en sus autovalores. Dicha degeneración se rompe cuando se trabaja en sistemas donde se considera rotación o la presencia de un campo magnético. Ahora si se desea aplicar las ecuaciones B..51 - B..53 a modelos estelares, es necesario un cambio de variables para que estén escritas de forma adimensional y así poder resolverlas de forma numérica. Continuando con lo previamente mencionado, se definen las nuevas variables adimensionales:

$$y_1 = \frac{\xi_r}{r}, \quad y_2 = \frac{1}{gr} \left(\frac{P'}{\rho} \right), \quad y_3 = \frac{\phi'}{gr}, \quad y_4 = \frac{1}{g} \frac{d\phi'}{dr}, \quad \sigma^2 = \frac{R_*^3}{GM_*} \nu^2 \quad (\text{B..54})$$

Así pues:

$$\begin{aligned} \xi_r &= r y_1, \\ P' &= \rho g r (y_2 - y_1), \\ \phi' &= g r y_3, \\ \frac{d\phi'}{dr} &= g y_4, \\ \nu^2 &= \frac{GM_*}{R_*^3} \sigma^2, \end{aligned} \quad (\text{B..55})$$

Sustituyendo las expresiones de B..55 en las ecuaciones B..51 - B..53:

$$x \frac{dy_1}{dr} = (V_g' 3) y_1 + \left[\frac{l(l+1)}{C_1 \sigma^2} - V_g \right] y_2 + V_g y_3, \quad (\text{B..56})$$

$$x \frac{dy_2}{dr} = (C_1 \sigma^2 - A*) + (A* - U + 1) y_2 - A* y_3, \quad (\text{B..57})$$

$$x \frac{dy_3}{dr} = (1 - u) y_3 + y_4, \quad (\text{B..58})$$

$$x \frac{dy_4}{dr} = U A* Y_1 + U V_g y_2 + [l(l+1) - U V^g] y_3 - U y_4, \quad (\text{B..59})$$

En dónde:

$$V_g = \frac{V}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{d \ln r} = \frac{gr}{c_s^2} = \frac{gr\rho}{\Gamma_1 P}, \quad (\text{B..60})$$

$$U = \frac{d \ln M_r}{d \ln r} = \frac{4\pi\rho r^3}{M_r}, \quad (\text{B..61})$$

$$C_1 = \left(\frac{r}{R_*} \right)^3 \frac{M_*}{M_r}, \quad (\text{B..62})$$

$$A_* = -rA = \frac{r}{g} N^2 = r \left(\frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln P}{dr} - \frac{d \ln \rho}{dr} \right), \quad (\text{B..63})$$

$$x = \frac{r}{R_*}, \quad (\text{B..64})$$

Donde la variable adimensional x es conocido como (*Coordenada radial escalada con el radio de la estrella [23]*).

Por último las condiciones de contorno para el sistema de ecuaciones con el que se trabaja es:

- Centro del modelo ($x = 0$):

$$y_1 C_1 \sigma^2 - l y_2 = 0, \quad l y_3 - y_4 = 0, \quad (\text{B..65})$$

- Superficie estelar:

$$y_1 - y_2 + y_3 = 0, \quad (l + 1) y_3 + y_4 = 0, \quad (\text{B..66})$$

- Condición de normalización:

Donde $y = 1$ en $x = 1$

Apéndice C

Complementos Metodológicos

C.I. Caracterización de Estrellas Tipo Pulsante

C.I.1. Procedimiento Operativo en Period04

Se detalla el procedimiento operativo general seguido en este trabajo para la extracción de frecuencias y la caracterización de estrellas pulsantes.

1. Introducción de la Serie Temporal de Datos

El primer paso consiste en cargar los datos fotométricos en el programa:

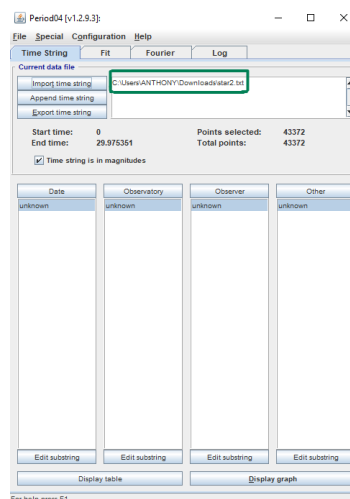


Figura C.I.1: Módulo de cargue de la información.

1. Se selecciona el módulo *Time String* en la interfaz principal de Period04.

2. A continuación, se hace clic en la opción `Import time string`. En el cuadro de diálogo que aparece, se especifican los atributos para cada columna del archivo de datos (usualmente tiempo, magnitud u errores), o se pueden ignorar columnas no deseadas. La Figura C.I.1, muestra la pantalla del Period04 con el archivo star2.txt.
3. Para una verificación visual de la correcta carga de los datos, se utiliza la opción `Display graph` dentro de este módulo, la cual muestra la curva de luz.

2. Búsqueda de la Primera Frecuencia de Pulsación

Una vez cargada la serie temporal, se procede a la búsqueda de la señal periódica más prominente:

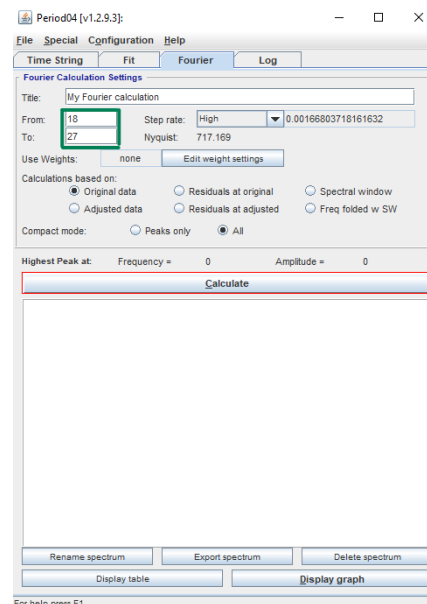


Figura C.I.2: Módulo de Fourier para el cálculo de la primera frecuencia.

1. Se selecciona el módulo *Fourier*.
2. Se define el rango de frecuencias para el cálculo del periodograma. Es fundamental considerar la frecuencia de Nyquist proporcionada por el programa, ya que representa un límite superior teórico para las frecuencias muestreables sin ambigüedad en datos equiespaciados (aunque su interpretación es más compleja en datos no uniformes). Para un análisis inicial, se recomienda un rango amplio, por ejemplo, desde 0 c/d (o un valor pequeño positivo) hasta la frecuencia de Nyquist, utilizando un paso de frecuencia inicial no demasiado fino (ej., `Step rate: custom, 0.01 c/d`). El objetivo de este primer periodograma es identificar las regiones espectrales donde residen las posibles frecuencias significativas.
3. En una etapa posterior, se puede refinar el análisis calculando un segundo periodograma enfocado en el rango de interés detectado, empleando un paso de frecuencia más fino (opción `low` o un valor personalizado menor) para una mejor resolución de los picos. En la Figura C.I.2 se especifica el rango de frecuencias en el que se desea calcular la primera frecuencia (ver recuadro verde).

4. En la opción *Calculations based on*, se selecciona *Original data* para el análisis de la primera frecuencia.
5. Se presiona el botón *Calculate*. *Period04* calcula el espectro y automáticamente identifica la frecuencia correspondiente al pico de mayor amplitud, proporcionando una estimación inicial de su frecuencia y amplitud.
6. Para visualizar el periodograma calculado, se selecciona *Display graph*. *Period04* suele preguntar si se desea sustraer la media de los datos antes de calcular la transformada de Fourier, a lo cual se responde afirmativamente para eliminar el pico de potencia en frecuencia cero. También puede preguntar si se desea incluir la frecuencia máxima encontrada en la lista de frecuencias para análisis posterior, lo cual también es recomendable aceptar.

3. Ajuste de la Frecuencia Identificada

Los parámetros de la frecuencia candidata se refinan mediante el siguiente procedimiento:

1. Se selecciona el módulo *Fit*.
2. En la lista de frecuencias, se selecciona la frecuencia candidata obtenida del módulo *Fourier*.
3. Se hace clic en *Calculate*. *Period04* realiza un ajuste por mínimos cuadrados de una función sinusoidal a los datos (o a los residuos, según la configuración), optimizando la frecuencia, amplitud y fase. El programa muestra los parámetros ajustados y el valor de los residuos cuadráticos tras el ajuste.
4. Para visualizar la curva de luz plegada en fase con el período de la frecuencia ajustada, y observar la calidad del ajuste y la forma de la onda, se utiliza la opción *Phase diagram*.
5. Para determinar la significancia estadística de la frecuencia, se calcula su relación señal/ruido (S/N). Esto se realiza accediendo al menú *Special* y seleccionando la opción *Calculate noise at frequency*. En el diálogo correspondiente, se elige la frecuencia a evaluar y se especifica que el cálculo del ruido se base en los *Residuals at original* (es decir, los residuos de la curva de luz original después de sustraer la(s) frecuencia(s) ya ajustada(s)). Tras hacer clic en *Calculate*, se obtiene el valor S/N. Se considera que una frecuencia es una detección real si su S/N es mayor o igual a 4, siguiendo el criterio de [34].
6. Para visualizar el ajuste sinusoidal superpuesto a la curva de luz en el dominio del tiempo, se regresa al módulo *Time String*, se selecciona *Display graph*, y se puede hacer zoom en una región de interés. El ajuste correspondiente a las frecuencias marcadas (con un “tick”) en el módulo *Fit* se mostrará como una línea continua sobre los datos.

4. Búsqueda de Multiperiodicidades

El proceso de pre-blanqueo para encontrar frecuencias adicionales se realiza de forma iterativa:

1. En el módulo *Fit*, se asegura que todas las frecuencias significativas previamente calculadas y validadas estén seleccionadas (marcadas con un “tick”).
2. Se retorna al módulo *Fourier*.

3. Se especifica el rango de frecuencias para la nueva búsqueda.
4. Crucialmente, en la opción `Calculations based on`, se selecciona `Residuals at original`. Esto asegura que el nuevo periodograma se calcule a partir de los datos originales después de haber sustraído todas las señales sinusoidales correspondientes a las frecuencias ya ajustadas y seleccionadas.
5. Se hace clic en `Calculate` para obtener la siguiente frecuencia candidata del periodograma de residuos.
6. Se visualiza este nuevo periodograma de residuos con `Display graph`.
7. La nueva frecuencia obtenida se ajusta siguiendo los pasos descritos en el apartado anterior (Paso 3: Ajuste de la Frecuencia).
8. Se calcula el S/N de esta nueva frecuencia como se detalló en el punto 3.5. Si el S/N es ≥ 4 , la frecuencia se considera significativa y se añade a la lista.
9. Estos pasos (1-8 de esta sección) se repiten iterativamente para obtener nuevas frecuencias hasta que no se encuentren más señales que cumplan el criterio de significancia.

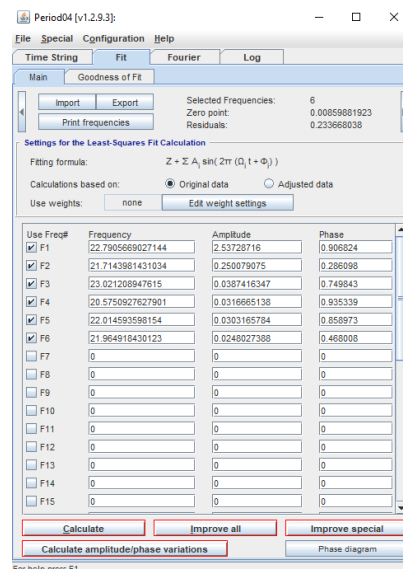


Figura C.I.3: Módulo *fit* del Period04 que muestra las frecuencias calculadas junto con la amplitud y la fase para la estrella Star2.

Este procedimiento iterativo permite la extracción sistemática de las múltiples frecuencias de oscilación presentes en la estrella. Las gráficas de periodograma de magnitud durante el Pre-blanqueo y el ajuste de cada una de las frecuencias significativas encontradas son:

C.I. CARACTERIZACIÓN DE ESTRELLAS TIPO PULSANTE

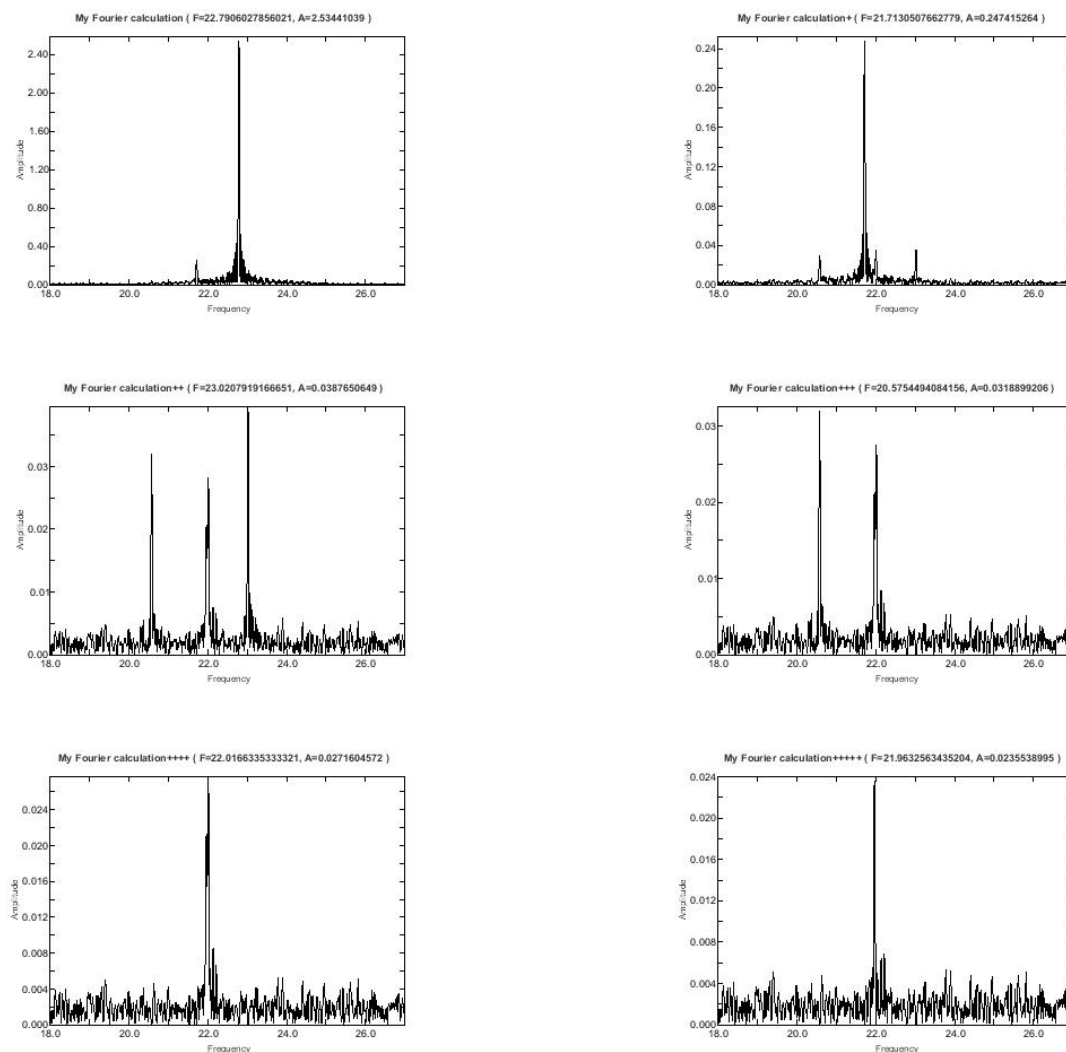


Figura C.I.4: Espectro de amplitudes en el proceso de Pre-blanqueo para la estrella Star2

C.I.2. Desarrollo complementario con el programa AD ASTRA Pulsantes

1. Ilustración detallada del proceso de Pre-blanqueo para Star2

Aquí se presenta un ejemplo paso a paso del proceso de pre-blanqueo implementado en el Bloque 3 a la curva de luz de la estrella Star2. Se muestran los periodogramas de amplitud y las series temporales de residuos para las primeras 4 iteraciones en esta estrella.

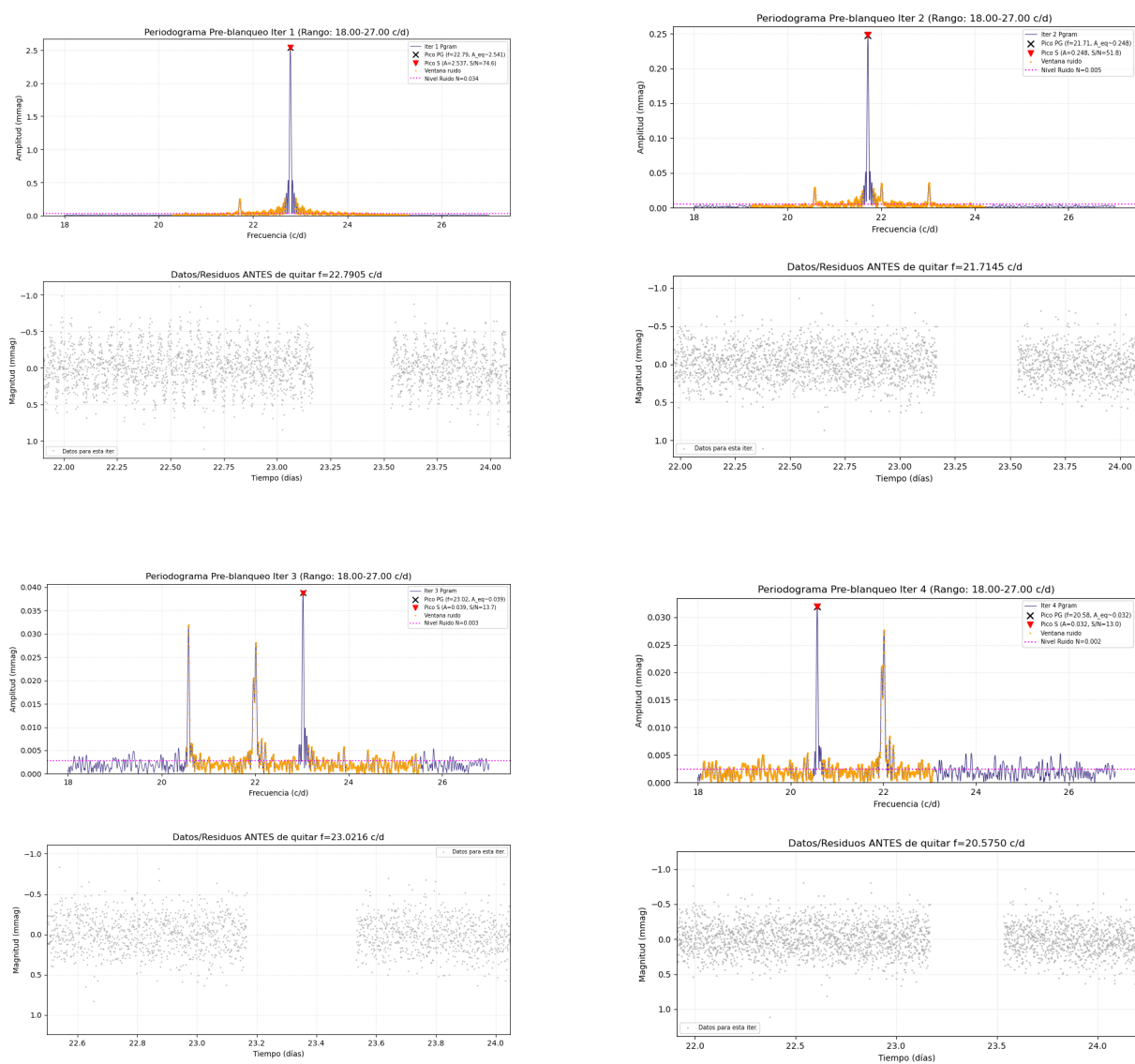


Figura C.I.5: Diagnóstico de Pre-blanqueo para Star2- Iteraciones 4.

C.I.3. Sumario de Tipos de Estrellas Pulsantes y sus Propiedades Características

Class name adopted here	Other names in the literature	Mode Type	Period Ranges	Amplitudes (brightness)	Amplitudes (velocity)	log T_{eff} (K) approx. range	log $L/L_{\odot}$ approx. range
Solar-like pulsator	main sequence red giants	p	3 to 10 min	few ppm	$< 50 \text{ cm s}^{-1}$	[3.70, 3.82]	[−0.5, 1.0]
γ Dor	slowly pulsating F	g	8 h to 5 d	$< 50 \text{ mmag}$	$< 5 \text{ km s}^{-1}$	[3.83, 3.90]	[0.7, 1.1]
δ Sct	SX Phe (Pop. II)	p	15 min to 8 h	$< 0.3 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.82, 3.95]	[0.6, 2.0]
roAp	—	p	5 to 22 min	$< 10 \text{ mmag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.82, 3.93]	[0.8, 1.5]
SPB	53 Per	g	0.5 to 5 d	$< 50 \text{ mmag}$	$< 15 \text{ km s}^{-1}$	[4.05, 4.35]	[2.0, 4.0]
β Cep	β Cma, ζ Oph (SpT O)	p&g	1 to 12 h (p)	$< 0.1 \text{ mag}$	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[4.25, 4.50]	[3.2, 5.0]
	53 Per		few days (g)	$< 0.01 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$		
pulsating Be	λ Eri, SPBe	p&g	0.1 to 5 d	$< 20 \text{ mmag}$	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[4.05, 4.50]	[2.0, 5.0]
pre-MS pulsator	pulsating T Tauri	p	1 to 8 h	$< 5 \text{ mmag}$			
	pulsating Herbig Ae/Be	p	1 to 8 h	$< 5 \text{ mmag}$			
	pulsating T Tauri	g	8 h to 5 d	$< 5 \text{ mmag}$			
p-mode sdBV	EC14026, V361 Hya	p	80 to 800 s	$< 0.1 \text{ mag}$		[4.20, 4.50]	[1.2, 2.2]
g-mode sdBV	PG1716+426, Betsy star, lpsdBV	g	0.5 to 3 h	$< 0.01 \text{ mag}$		[4.40, 4.60]	[1.2, 2.6]
PNNV	ZZ Lep, [WCE]	g	5 h to 5 d	$< 0.3 \text{ mag}$			
GW Vir	DOV, PG1159	g	5 to 80 min	$< 0.2 \text{ mag}$		[4.80, 5.10]	[1.5, 3.5]
DBV	V777 Her	g	2 to 16 min	$< 0.2 \text{ mag}$		[4.40, 4.60]	[−1.0, 0.7]
DAV	ZZ Ceti	g	0.5 to 25 min	$< 0.2 \text{ mag}$		[3.95, 4.15]	[−2.6, −2.2]

(a) Propiedades básicas de estrellas pulsantes pertenecientes a la Secuencia Principal gigantes o compactas.

Class name adopted here	Other names in literature	Mode Type	Period Ranges	Amplitudes (brightness)	Amplitudes (velocity)	log T_{eff} (K) approx. range	log $L/L_{\odot}$ approx. range
RR Lyr	RRab	F	$\sim 0.5 \text{ d}$	$< 1.5 \text{ mag}$	$< 30 \text{ km s}^{-1}$	[3.78, 3.88]	[1.4, 1.7]
	RRc	FO	$\sim 0.3 \text{ d}$	$< 0.5 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$		
	RRd	F+FO	0.3 to 0.5 d	$< 0.2 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$		
Type II Cepheid	W Vir	F	10 to 30 d	$< 1 \text{ mag}$	$< 30 \text{ km s}^{-1}$	[3.70, 3.90]	[2.0, 4.0]
	BL Her	F	1 to 5 d	$< 1 \text{ mag}$	$< 30 \text{ km s}^{-1}$		
RV Tauri	RVa, RVb	F?	30 to 150 d	$< 3 \text{ mag}$	$< 30 \text{ km s}^{-1}$	[3.60, 3.90]	[3.2, 4.2]
Type I Cepheid	—	F	1 to 50 d	$< 1 \text{ mag}$	$< 30 \text{ km s}^{-1}$	[3.55, 3.85]	[2.0, 5.5]
	s-Cepheid	FO	$< 20 \text{ d}$	$< 0.1 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$		
Mira	SRa, SRb	$l = 0$	$> 80 \text{ d}$	$< 8 \text{ mag}$		[3.45, 3.75]	[2.5, 4.0]
	SRc	$l = 0$	$> 80 \text{ d}$	$< 1 \text{ mag}$			
	SRd	$l = 0$	$< 80 \text{ d}$	$< 1 \text{ mag}$			
PVSG (SpT A)	α Cyg	g,S?	10 to 100 d	$< 0.3 \text{ mag}$	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[3.45, 4.00]	[2.5, 4.5]
PVSG (SpT B)	SPBsg	g	1 to 10 d	$< 0.3 \text{ mag}$	$< 20 \text{ km s}^{-1}$	[4.00, 4.50]	[4.3, 5.8]
LBV	S Dor	g,S	2 to 40 d	$< 0.1 \text{ mag}$		[3.80, 4.20]	[5.5, 6.5]
WR	WC, WN	g,S	1h to 5 d	$< 0.2 \text{ mag}$		[4.40, 4.70]	[4.5, 6.0]
HdC eHe	R CrB	g?	40 to 100 d	$< 0.05 \text{ mag}$	$< 10 \text{ km s}^{-1}$	[3.50, 4.20]	[3.5, 4.5]
	PV Tel	S	$\sim 20 \text{ d}$				
	V652 Her	g,S?	$\sim 0.1 \text{ d}$				
	V2076 Oph	g,S?	0.5 to 8 d				

(b) Propiedades básicas de estrellas pulsantes supergigantes.

Figura C.I.6: Tablas de estrellas pulsantes implementadas como apoyo para la clasificación de Star1 y Star2.

Fuente: Obtenida de [1], adaptada de [2]

Bibliografía

- [1] Amar Rambukwella-Gill. MOSES: MHT Optical Star and Exoplanet Survey. MSc Thesis, University of Central Lancashire, may 2017.
- [2] Conny Aerts, Jørgen Christensen-Dalsgaard, and Donald W Kurtz. *Asteroseismology*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [3] Raquel Oreiro Rey. *Actividad Guiada 1: Introducción a la astrosismología y al Period04*. Máster Universitario en Astronomía y Astrofísica, VIU, 2014. Curso 2013-14.
- [4] Rosa María Domínguez Quintero. Astrosismología en estrellas binarias eclipsantes; astrosismología en estrellas binarias eclipsantes; asteroseismology in eclipsing binary stars. *Ph. D. Thesis*, 2015.
- [5] Alejandra Daniela Romero. *Astrosismología de estrellas enanas blancas variables ZZ Ceti*. Tesis doctoral, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2012.
- [6] Lucia González Cuesta. *Sismología en estrellas de tipo solar con planetas observadas por las misiones k2 y tess*. PhD thesis, Universidad de La Laguna, 2023.
- [7] Pascual David Diago Nebot. *Asteroseismology and mass loss in be stars. Study with CoRoT*. PhD thesis, Universitat De Valencia, year = 2010.
- [8] Gerald Handler. Asteroseismology. *arXiv preprint arXiv:1205.6407*, 2012.
- [9] Maria Pia Di Mauro. A review on asteroseismology. *arXiv preprint arXiv:1703.07604*, 2017.
- [10] John R. Percy. *Understanding Variable Stars*. Cambridge University Press, Cambridge and New York, 2007.
- [11] Physics Almanac. Stellar physics 1a: Star formation, 2022. Accedido: 2024-11-14.
- [12] SEA. How do stars work?, 2019. Fecha de acceso: 2024-11-14.
- [13] ESO – European Southern Observatory. Stellar evolution diagram. <https://www.eso.org/public/images/eso0728c/>, 2007. Accessed: 2025-05-15.
- [14] Hans Kjeldsen, Timothy R Bedding, and Jørgen Christensen-Dalsgaard. Measurements of stellar properties through asteroseismology: A tool for planet transit studies. *Proceedings of the International Astronomical Union*, 4(S253):309–317, 2008.
- [15] National Geographic. Todo lo que querías saber sobre las estrellas, 2019.
- [16] WJ SPARROW. The sleepwalkers-koestler, a, 1959.

- [17] Michael Bazot, Mário JPFG Monteiro, and Christian W Straka. Current issues in asteroseismology. In *Journal of Physics: Conference Series*, volume 118, page 012008. IOP Publishing, 2008.
- [18] National Geographic. El telescopio espacial kepler ha pasado a mejor vida, ¿y ahora qué?, 2018. Último acceso: 12 de noviembre de 2024.
- [19] Wikipedia. Satélite de sondeo de exoplanetas en tránsito, 2024. Último acceso: 12 de noviembre de 2024.
- [20] NASA. El telescopio espacial tess, 2024. Último acceso: 12 de noviembre de 2024.
- [21] Sam Grunblatt Marc Hon Claudia Reyes Daniel Huber Timothy R. Bedding Yvonne Elsworth Rafael A. García Saskia Hekker Thomas Kallinger Savita Mathur Benoit Mosser Marc H. Pinsonneault Dennis Stello, Nicholas Saunders. Tess asteroseismology of the kepler red giants. *arXiv*, 2022. Último acceso: 12 de noviembre de 2024.
- [22] Leila Magdalena Calcaferro. Determinación astrosismológica de la estructura interna de la estrella pg 1159 variable sdss j0349-0059. Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Cs. Astronómicas y Geofísicas, La Plata, Argentina, 2015. Director: Dr. Alejandro H. Córscico; Co-director: Dr. Leandro G. Althaus.
- [23] Wasaburo Unno, Yoji Osaki, and Hiroshi Ando. *Nonradial Oscillations of Stars*. University of Tokyo Press, 1989.
- [24] Francisco César De Gerónimo. *Incertezas en la estratificación química del núcleo de las enanas blancas: impacto sobre las propiedades pulsacionales y determinaciones astrosismológicas de estrellas ZZ Ceti*. PhD thesis, Universidad Nacional de La Plata, 2018.
- [25] P. I. Pápics. *PhD Thesis*. Phd thesis, Katholieke University of Leuven, Astronomical Institute, 2013.
- [26] Márcio Catelan and Horace A. Smith. *Pulsating Stars*. Wiley-VCH, Weinheim, Germany, 2015.
- [27] Raquel Oreiro. Actividad Guiada 2: El Sol y estrellas de tipo solar. Material didáctico para el Máster Universitario en Astronomía y Astrofísica, Valencian International University (VIU), 2014. Curso: 2013-14; e-mail: raquel.oreiro@campusviu.es.
- [28] Earl Patrick Bellinger. *Inverse Problems in Asteroseismology*. Dissertation for the award of the degree "doctor of philosophy"(ph.d.) division of mathematics and natural sciences, Georg-August-Universität Göttingen, Göttingen, 2018.
- [29] T. Kallinger, B. Mosser, S. Hekker, D. Huber, D. Stello, S. Mathur, S. Basu, T. R. Bedding, W. J. Chaplin, J. De Ridder, Y. P. Elsworth, S. Frandsen, R. A. García, R. L. Gilliland, and H. Kjeldsen. The connection between stellar parameters and the frequency of maximum power in solar-like oscillations. *The Astrophysical Journal*, 722(1):L104–L108, 2010.
- [30] Rafael A García and Jérôme Ballot. Asteroseismology of solar-type stars. *Living Reviews in Solar Physics*, 16(1):4, 2019.
- [31] C. Alcock, R. A. Allsman, D. R. Alves, T. S. Axelrod, A. C. Becker, D. P. Bennett, K. H. Cook, A. J. Drake, K. C. Freeman, M. Geha, K. Griest, M. J. Lehner, S. L. Marshall, D. Minniti, B. A. Peterson, P. Popowski, M. R. Pratt, C. A. Nelson, P. J. Quinn, C. W. Stubbs, W. Sutherland, A. B. Tomaney, T. Vandehei, D. L. Welch, and The MACHO Collaboration. The macho project: Microlensing results from 5.7 years of lmc observations. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific*, 111:1539–1551, 1999.

- [32] N. R. Lomb. Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. *Astrophysics and Space Science*, 39:447–462, 1976.
- [33] J. D. Scargle. Studies in astronomical time series analysis. ii - statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. *The Astrophysical Journal*, 263:835–853, 1982.
- [34] M. Breger, J. Stich, R. Garrido, B. Martin, S. Y. Jiang, Z. P. Li, D. P. Hube, W. Ostermann, M. Paparo, and M. Scheck. scuti network observations - i. the 1989 multisite campaign and the pulsation frequencies of ϕ Vir. *Astronomy and Astrophysics*, 271:482–496, 1993.
- [35] Astropy Collaboration, T. P. Robitaille, E. J. Tollerud, et al. Astropy: A community python package for astronomy. *Astronomy & Astrophysics*, 558:A33, 2013.
- [36] Lightkurve Collaboration, M. Z. Vinícius, G. Barentsen, et al. Lightkurve: Kepler and tess time series analysis in python. *Research Notes of the AAS*, 2:217, 2018.
- [37] M. Sperl. A new method for the analysis of stellar oscillations. *Communications in Asteroseismology*, 111:1, 1998.
- [38] P. Lenz and M. Breger. Period04 User Guide. *Communications in Asteroseismology*, 146:53–130, 2005.
- [39] Timothy M Brown, David W Latham, Mark E Everett, and Gilbert A Esquerdo. Kepler input catalog: photometric calibration and stellar classification. *The Astronomical Journal*, 142(4):112, 2011.
- [40] H. Kjeldsen and T. R. Bedding. Amplitudes of stellar oscillations: the implications for asteroseismology. , 293:87–106, jan 1995.
- [41] Paul Ledoux and Théodore Walraven. Variable stars. In S. Flügge, editor, *Handbuch der Physik / Encyclopedia of Physics*, volume 51, pages 353–604. Springer, Berlin, Heidelberg, 1958.