

Universidad de Nariño
Facultad de ciencias exactas y naturales
Departamento de física



DINÁMICA ORBITAL DE LAS ESTRELLAS
INTERNAS TIPO S DEL CENTRO GALÁCTICO

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título profesional de

Físico:

Jhon Alexander Flórez Leitón

Universidad de Nariño

Universidad de Nariño
Facultad de ciencias exactas y naturales
Departamento de física

Dinámica orbital de las estrellas internas tipo S del centro Galáctico

Jhon Alexander Flórez Leitón

TRABAJO DE GRADO

Director:

Dr. Luis Leonardo Chaves Velasquez
Ph.D. en Astrofísica

San Juan de Pasto, Colombia
Mayo del 2026

©2026 - Jhon Alexander Flórez Leitón

«Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores»

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Luis Leonardo Chaves Velasquez

Director

Ivânio Puerari

Jurado

Raúl Felipe Maldonado Sanchez

Jurado

San Juan de Pasto, 10 de Junio del 2026

Agradecimientos

Agradezco a todas las personas que generosamente han aportado las ideas y el tiempo necesario para cumplir con mis estudios. Su apoyo ha sido invaluable y demuestra su deseo por verme triunfar tanto en el ámbito académico como en el ámbito personal. Este logro no es solamente mío, es de todas aquellas personas que me brindaron su aliento y su apoyo incondicional durante este proceso de estudios. A cada uno de ustedes, les debo una parte de mi éxito.

El agradecimiento más profundo es para mi amada madre, quien ha estado en todo momento y en todo lugar a mi lado. Su apoyo incondicional ha sido el motor que me impulsa cada día a superarme como persona y como futuro profesional. Cada logro que alcance es suyo, puesto que ella ha dado su vida por y para mí. Agradezco de igual manera a mi padre, quien ha inculcado en mí el valor de la resiliencia y ha dado el mejor de sus esfuerzos para verme realizado como persona.

Agradezco al Dr. Leonardo Chaves, por servir como referente en la planificación y en la ejecución de este trabajo de grado, en medio de este proceso ha inculcado en mí la pasión y el interés por la astrofísica.

Finalmente, agradezco a cada uno de mis amigos, a los de ayer y a los de hoy, por servirme como sostén en los momentos más difíciles de mi carrera.

*A la memoria de mi querida abuela, quien me enseñó a luchar
por mis sueños y por perseverar en los momentos más difíciles.
Tu sueño fue verme realizado, con tu ayuda lo busco lograr.
Te extraño con todo el corazón.*

*Lola Delgado de Leyton
(1926-2017)*

Resumen

Se realizó un estudio newtoniano de la dinámica orbital de una muestra de 44 estrellas de tipo S que orbitan el agujero negro supermasivo (SMBH) Sagitario A* (Sgr A*) utilizando una simulación de N cuerpos implementada con REBOUND. La evolución del sistema se analizó durante los 100000 años posteriores al último paso de la estrella S2 por el pericentro. Del conjunto total, se seleccionaron las 7 estrellas con períodos orbitales cercanos al período orbital de S2 (S2, S38, S55, S62, S4711, S4714 y S4715) para analizar las perturbaciones de sus elementos orbitales, con especial énfasis en el argumento sobre el pericentro ω y en la desviación de este parámetro al paso por el pericentro ($\Delta\omega_p(N)$). El objetivo fue determinar si ($\Delta\omega_p(N)$) puede modificar la precesión de ω predicha por la relatividad general ($\Delta\omega_p(RG)$). Los resultados muestran que la excentricidad (e) y el semieje mayor (a) presentan variaciones bajas y moderadas, respectivamente, mientras que la inclinación (i), el argumento sobre el pericentro (ω) y la longitud del nodo ascendente (Ω) experimentan perturbaciones más significativas. La jerarquía $\Delta\omega > \Delta\Omega > \Delta i$ sugiere que la dinámica del sistema está dominada por torques gravitacionales que inducen precesión orbital. En general, se encontró que la ($\Delta\omega_p(N)$) tiende a reducir paulatinamente el valor de ($\Delta\omega_p(RG)$). Finalmente, se recomienda realizar un estudio observacional exhaustivo de la estrella S62, ya que, de acuerdo con la simulación realizada, es la estrella del sistema que más se perturba.

Palabras Claves: Estrellas tipo S internas, Sagittarius A*, dinámica orbital, parámetros orbitales, desviaciones relativas, argumento sobre el pericentro

Abstract

A newtonian study of the orbital dynamics of a sample of 44 S-type stars orbiting the supermassive black hole (SMBH) Sagittarius A* (Sgr A*) was performed using an N-body simulation implemented with REBOUND. The evolution of the system was analyzed over the 100000 years following the last passage of S2 through the pericenter. From the total set, the 7 stars with orbital periods close to the orbital period of S2 were selected (S2, S38, S55, S62, S4711, S4714 and S4715) were selected to analyze the perturbations of their orbital elements, with emphasis on the argument about the pericenter ω and on the deviation of this parameter at the pericenter passage ($\Delta\omega_p(N)$). The objective was to determine whether ($\Delta\omega_p(N)$) can modify the precession of ω predicted by general relativity ($\Delta\omega_p(GR)$). The results show that the eccentricity (e) and the semi-major axis (a) show low and moderate variations, respectively, while the inclination (i), the argument about the pericenter (ω), and the length of the ascending node (Ω) experience more significant perturbations. The hierarchy $\Delta\omega > \Delta\Omega > \Delta i$ suggests that the system's dynamics are dominated by gravitational torques that induce orbital precession. In general terms, it was found that ($\Delta\omega_p(N)$) tends to gradually reduce the value of ($\Delta\omega_p(GR)$). Finally, it is recommended to carry out an exhaustive observational study of the star S62, since, according to the simulation carried out, it is the star most perturbed of the system.

Palabras Claves: Inner S-type stars, Sagittarius A*, orbital dynamics, orbital parameters, relative deviations, argument about the pericenter

Contenido

1. Introducción	15
1.1. Planteamiento del Problema	16
1.2. Objetivos	17
2. Marco conceptual	18
2.1. Desarrollo teórico	18
2.1.1. El centro Galáctico	18
2.1.2. El problema de N cuerpos	19
2.1.3. El problema de dos cuerpos-elementos orbitales	20
2.1.4. Teoría de órbitas osculantes	25
2.1.5. Métodos numéricos	26
2.1.6. REBOUND	26
2.1.7. Integrador IAS15	27
2.1.8. Verificación de la teoría de la relatividad general	27
2.2. Marco referencial	29
2.2.1. Estructura cinemática del cúmulo S del centro Galáctico	29
2.2.2. Estrellas de corto período	31
3. Metodología	34
4. Resultados	37
4.1. Resultados generales obtenidos	37
4.1.1. Anomalias verdaderas de las estrellas del sistema S	37
4.1.2. Condiciones iniciales	38
4.1.3. Conservación de las cantidades de movimiento del sistema	39
4.1.4. Órbitas de las estrellas de corto período	40
4.1.5. Perturbaciones en los parámetros orbitales	41
4.1.6. Perturbaciones de las desviaciones relativas de cada parámetro orbital	48
4.1.7. Determinación de la precesión del argumento sobre el pericentro debido a la relatividad general $\Delta\omega_p(\text{RG})$	48
4.1.8. Contribución de la precesión del argumento del pericentro Newtoniana ($\Delta\omega_p(\text{N})$) a la precesión relativista ($\Delta\omega_p(\text{RG})$) en cada paso de la estrella por su pericentro	49
4.1.9. Verificación de las condiciones extremas a las cuales están sometidas las estrellas del sistema tipo S	51
4.2. Análisis de resultados	55
4.2.1. Análisis general	55
4.2.2. Análisis específico	56
4.3. Discusión	61
5. Conclusiones	66
Apéndices	68



A. Marco Teórico	68
A.I. Funcionamiento del integrador IAS15	68
A.I.I. Convergencia del bucle predictor-corrector	69
A.I.II. Control del tamaño de paso	69
A.II. Demostración de la precesión del pericentro 2.1.48	70
B. Metodología	73
B.I. Rutinas asociadas a cálculos numéricos	73
B.I.I. Solución numérica de 2.1.30	73
B.I.II. Integración del problema de N cuerpos	74
B.I.III. Cálculo de 2.1.48 mediante teoría de propagación de errores	100
B.I.IV. Desviación relativa máxima y desviación relativa promedio de cada parámetro orbital de las estrellas de corto período	101
B.II. Rutinas asociadas a creación de gráficas	105
B.II.I. Posición inicial del sistema previo a la integración	105
B.II.II. Dispersión del argumento sobre el pericentro teórico	108
B.II.III. Conservación de la energía total y del momento angular del total del sistema	108
B.II.IV. Evolución temporal de la posición de las estrellas tipo S	109
B.II.V. Perturbaciones en los elementos orbitales de las estrellas tipo S	110
B.II.VI. Contribución de la precesión del argumento sobre el pericentro newtoniano a la precesión del argumento sobre el pericentro relativista luego del paso de la estrella por el pericentro . . .	112
B.II.VII. Comparación entre la precesión del argumento sobre el pericentro newtoniano y el argumen- to sobre el pericentro relativista	113
B.II.VIII. Rapidez de las estrellas en el pericentro en términos de c	114
B.II.IX. Distancia al pericentro de cada estrella en términos del radio de Schwarzschild	115
C. Resultados	117
C.I. Anomalías verdaderas del sistema de estrellas tipo S	117
Bibliografía	118

Índice de figuras

2.1.1. La trayectoria de m_2 con respecto a m_1 se encuentra en un plano donde la normal está definida por $\vec{h}$.	21
2.1.2. Geometría de la elipse.	22
2.1.3. Elementos orbitales de una órbita elíptica.	23
2.1.4. Determinación de una órbita osculante (elipse instantánea) en el punto P a partir de la órbita real en un instante dado de tiempo.	24
2.1.5. Precesión relativista del pericentro (precesión prógrada).	28
2.2.1. Región donde se encuentra el cúmulo tipo S y algunas estrellas vecinas (Imagen tomada por el VLT en 2018).	30
2.2.2. Imágenes de la detección de S4711 con los detectores NACO y SINFONI.	32
2.2.3. Órbita de S4711 alrededor de Sgr A* tomada con NACO en la banda K.	32
2.2.4. Órbita de S4711 dada en términos de declinación (dec) y ascensión recta (R.A.).	33
2.2.5. Evolución temporal de la ascensión recta (R.A.) y la declinación (Dec) de la estrella S4711 entre los años 2002 y 2018.	33
4.1.1. Ubicación de las estrellas del sistema tipo S de acuerdo a las condiciones impuestas.	38
4.1.2. Conservación numérica de la energía total del sistema y de la magnitud del momento angular del sistema.	39
4.1.3. Evolución temporal de las órbitas de las estrellas de corto período tras un tiempo de integración de cien mil años.	40
4.1.4. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S2.	41
4.1.5. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S38.	42
4.1.6. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S55.	43
4.1.7. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S62.	44
4.1.8. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S4711.	45
4.1.9. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S4714.	46
4.1.10. Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S4715.	47
4.1.11. Gráfico de dispersión del argumento del pericentro para cada estrella de corto período.	48
4.1.12. Contribución total a la medición de la desviación del argumento sobre el pericentro $\Delta\omega_p(\text{RG})$ de la estrella S2.	49
4.1.13. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S2.	49
4.1.14. Contribución total a $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para la estrella S38.	49
4.1.15. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S38.	49
4.1.16. Contribución total a $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para la estrella S55.	49
4.1.17. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S55.	49
4.1.18. Contribución total $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para la estrella S62.	50
4.1.19. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S62.	50
4.1.20. Contribución total $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para la estrella S4711.	50
4.1.21. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S4711.	50
4.1.22. Contribución total $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para la estrella S4714.	50
4.1.23. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S4714.	50
4.1.24. Contribución total $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para la estrella S4715.	51



4.1.25. Comparación entre $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y $\Delta\omega_p(\text{N})$ para la estrella S4715.	51
4.1.26. Rapidez de la estrella S2 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	51
4.1.27. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S2 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	51
4.1.28. Rapidez de la estrella S38 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	52
4.1.29. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S38 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	52
4.1.30. Rapidez de la estrella S55 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	52
4.1.31. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S55 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	52
4.1.32. Rapidez de la estrella S62 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	53
4.1.33. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S62 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	53
4.1.34. Rapidez de la estrella S4711 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	53
4.1.35. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S4711 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	53
4.1.36. Rapidez de la estrella S4714 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	54
4.1.37. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S4714 y el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	54
4.1.38. Rapidez de la estrella S4715 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.	54
4.1.39. Comparación entre el radio de precesión de la estrella S4715 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.	54

Índice de tablas

3.0.1.Elementos orbitales (a, e, i, ω, Ω), errores en sus mediciones ($\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \omega, \Delta \Omega$) y tiempo de pasaje por el pericentro (t_{peri}) de estrellas de corto período.	34
3.0.2.Masa estimada, período orbital y error en el período orbital para las estrellas más próximas a Sgr A*. Para las estrellas en cursiva, se calculó tomando la masa de Sgr A* con un valor de $(4.1 \pm 0.2) \times 10^6 M_{\odot}$. Para el resto se tomó como $(4.300 \pm 0.011) \times 10^6 M_{\odot}$	35
4.1.1.Anomalías verdaderas de las estrellas de corto período.	37
4.1.2.Desviaciones relativas máximas en cada elemento orbital del conjunto de estrellas internas.	48
4.1.3.Desviaciones relativas promedio en cada elemento orbital del conjunto de estrellas internas.	48
4.1.4.Desviación del argumento del pericentro para estrellas internas (el valor reportado para S2 fue el medido por [1]).	48
C.I.1.Anomalías verdaderas del sistema de estrellas tipo S calculadas mediante la ecuación de Kepler. El tiempo de referencia (τ) es el tiempo de pasaje por el pericentro de S2 (τ_{S2})	117

Glosario

- Argumento sobre el pericentro (ω):** Es el elemento orbital que está medido desde el nodo ascendente hasta el pericentro de la masa central.
- Cantidades de movimiento:** Se refieren a variables que permiten describir los procesos físicos que sufre un sistema. Para el caso de la dinámica orbital las cantidades de movimiento predominantes son la energía total y el momento angular.
- Centro Galáctico:** Se define como centro Galáctico a la región central de la Vía Láctea. Dentro del centro Galáctico se encuentra el agujero negro supermasivo Sagittarius A*.
- Conservación de cantidades de movimiento:** Es el principio que establece que las cantidades de movimiento de un sistema físico aislado permanecen constantes a lo largo del tiempo.
- Desviación relativa:** Se trata de la diferencia entre el valor teórico que posee un parámetro orbital y el valor obtenido a partir de la simulación de N cuerpos en un instante de tiempo dado.
- Elementos orbitales:** Son un conjunto de 5 variables fundamentales (a, e, i, ω, Ω) que definen la forma y la orientación de una órbita teniendo como referencia el plano orbital y un plano de referencia. Se encuentran relacionadas con las coordenadas en el espacio y con las cantidades de movimiento.
- Estrellas maser:** Son astros que actúan como fuente natural de radiación. La palabra maser proviene del acrónimo en inglés de amplificación de microondas por emisión estimulada de radiación. La emisión del maser ocurre en la atmósfera; las estrellas maser cercanas a Sgr A* emiten en SiO.
- Estrellas tipo S:** Es un cúmulo estelar compuesto por estrellas tipo B tempranas. Su denominación S se debe a la cercanía con el SMBH Sgr A*.
- Excentricidad (e):** Es el elemento orbital asociado con la forma de la órbita, es de carácter adimensional. A su vez, representa la magnitud del vector excentricidad.
- Fluctuación:** Hace referencia a la medida de la estabilidad en la perturbación de un parámetro orbital.
- Formalismo newtoniano:** Se trata de la estructura matemática que describe al problema de N cuerpos. El formalismo newtoniano es de tipo vectorial.
- Inclinación (i):** Es el elemento orbital que mide la separación angular entre el plano orbital y el plano de referencia.
- Integrador:** Se define como la estructura matemática que permite encontrar de forma aproximada las órbitas de los cuerpos involucrados en una simulación de N cuerpos.

- Interacción newtoniana:** Se refiere al mecanismo de interacción de las N masas del problema de N cuerpos. Una interacción newtoniana se da si los N cuerpos se mueven debido a la presencia de un potencial central.
- Longitud del nodo ascendente (Ω):** Es el parámetro orbital que se mide desde la línea de referencia, hasta el punto donde la órbita corta el plano de referencia de sur a norte.
- Movimiento propio:** Es el cambio aparente de posición de un objeto sobre la esfera celeste con el tiempo, una vez descartado el movimiento impropio. Se mide en unidades de ángulo por unidad de tiempo. Se describe en términos de coordenadas ecuatoriales α, δ
- Órbitas:** Representan las soluciones del problema de N cuerpos. Solamente cuando el valor de N en el problema de N cuerpos es igual a 2 (el problema de 2 cuerpos) las órbitas tienen asociada una relación matemática.
- Perturbaciones:** Se refiere a variaciones en el valor de cualquier magnitud física.
- Plano orbital y plano de referencia:** El plano orbital es aquel plano que contiene a la órbita de un cuerpo. El plano de referencia es aquel que se determina de tal manera que el plano orbital lo atraviese. La elección del plano de referencia se hace según conveniencia observacional y matemática.
- Precesión:** Es el cambio que presenta el eje de rotación de la órbita de un cuerpo. Se debe a efectos dinámicos bien sean newtonianos o relativistas. La precesión puede ser prógrada o retrógrada. La precesión prógrada produce un aumento en los parámetros orbitales ω, Ω , la precesión retrógrada hace lo contrario.
- Precesión newtoniana:** Se produce gracias a la interacción newtoniana mutua entre cuerpos.
- Precesión relativista:** Se produce gracias a la acción gravitatoria de un objeto masivo sobre un cuerpo particular. Algunos de los cuerpos que producen precesión relativista pueden ser agujeros negros, estrellas de neutrones o, incluso el Sol.
- Problema de N cuerpos:** Se trata de un problema físico aislado formulado en la mecánica clásica en el cual se formulan las ecuaciones de movimiento de N partículas masivas interactúan entre sí mediante interacciones gravitacionales.
- REBOUND:** Es un software escrito en lenguaje C especializado en ejecutar simulaciones de N cuerpos. Posee implementados varios integradores.
- Resonancia orbital:** Es una configuración dinámica en la que 2 o más cuerpos que orbitan bajo la acción de la gravedad tienen períodos orbitales que se pueden expresar como la razón de 2 números enteros.
- Semieje mayor (a):** Es el elemento orbital relacionado con la distancia media entre la masa central y la masa que orbita a la masa central. Define el tamaño de la órbita, la energía orbital y determina el período orbital.
- Sgr A*:** Es la abreviatura del nombre del SMBH que se ubica en el centro Galáctico Sagittarius A*.
- Simulación de N cuerpos:** Se refiere a el proceso computacional en el cual se solucionan las ecuaciones de movimiento de forma aproximada del problema de N cuerpos usando integradores.



SMBH: Es el acrónimo en inglés de agujero negro supermasivo.

Vector excentricidad: En mecánica celeste se define el vector excentricidad como aquel que define la forma y la orientación de una órbita kepleriana. Los cambios producidos en el vector excentricidad se ven reflejados en los parámetros e, i, ω, Ω .

Velocidad propia: Es la velocidad lineal asociada al movimiento propio. Representa el movimiento sobre el plano del cielo. Se da en coordenadas del tipo v_α, v_δ . Tiene unidades de distancia por unidad de tiempo.

Velocidad radial (v_z): Es la componente de la velocidad a lo largo de la línea de visión entre el observador y el objeto. Se determina por efecto Doppler de las líneas espectrales.

Capítulo 1

Introducción

El bulbo Galáctico es la estructura más interna que posee la Vía Láctea, la cual tiene una estructura esferoidal achatada con un radio que oscila entre los 3 y los 5 kpc. Esta región se caracteriza por la alta densidad de población estelar, con estrellas de distintas edades y diferentes tipos espectrales. El bulbo Galáctico además destaca por la notable presencia tanto de gas como de polvo.

En el centro de la Galaxia (centro Galáctico) se ubica un agujero negro supermasivo (SMBH) denominado Sagittarius A* (Sgr A*), el cual tiene una masa aproximada de $4.3 \times 10^6 M_{\odot}$ [2]. Alrededor de Sgr A* orbita un grupo de aproximadamente 120 estrellas jóvenes de tipo B tempranas (B0-B3), las cuales se denominan estrellas tipo S debido a su cercanía con el SMBH. La proximidad de las estrellas a Sgr A* y el análisis de sus movimientos propios fueron fundamentales para la identificación de Sgr A* [3–5].

Dentro del grupo de estrellas previamente mencionado, destaca la estrella S-02 (S2), ya que su periodo orbital es corto (~ 15 años), lo cual facilita el análisis de su dinámica, logrando de esta manera realizar la verificación observacional de la precesión del argumento sobre el pericentro predicho por la relatividad general de Einstein [1]. Esta verificación ha sido la principal motivación que ha encontrado la comunidad científica para llevar a cabo un estudio periódico y exhaustivo de la dinámica orbital de las estrellas tipo S a través de las mediciones de movimientos propios, velocidades propias, velocidades radiales, elementos orbitales, entre otras propiedades dinámicas de este conjunto de estrellas. Sin embargo, la presencia de medio interestelar entre la Tierra y el sistema de estrellas tipo S hace que el proceso de medición de dichas variables dinámicas sea complejo, de manera que se usan técnicas observacionales avanzadas como interferometría de muy larga base (VLBI) u óptica adaptativa (OA) [6, 7], mientras que en el aspecto teórico se utilizan simulaciones de N cuerpos.

La presencia de Sgr A*, la proximidad de las estrellas tipo S y la cercanía con respecto a la Tierra hacen del centro Galáctico un laboratorio dinámico único en la naturaleza, en el cual se pueden realizar una gran variedad de estudios observacionales y, por consiguiente, verificar aquellos resultados provenientes de la teoría.

Para este trabajo de grado, se desarrolla una simulación de N cuerpos con un grupo de 44 estrellas, de las cuales se toma un grupo conformado por 7 de ellas. Estas estrellas se destacan por tener un periodo orbital cercano al de la estrella S2. Sobre los resultados que arroje la simulación, se cuestiona de manera cuantitativa y cualitativa si la interacción newtoniana mutua entre el sistema conformado por las estrellas tipo S y Sgr A* es capaz de modificar el valor de la precesión del argumento sobre el pericentro predicho por la teoría de la relatividad general a través del análisis de perturbación de los parámetros orbitales. La organización del trabajo es la siguiente.

En el capítulo 2 se desarrollaron las bases físicas en cuanto a la teoría y al marco de antecedentes sobre los cuales se va a sostener el trabajo de grado. Se hizo una revisión del centro Galáctico como objeto de estudio; se contempla la formulación newtoniana del problema de N cuerpos. A partir de dicha formulación, se construye el sistema de referencia, las unidades de referencia y la conservación de las cantidades de movimiento que servirán como verificación física del problema numérico. A partir del problema de N cuerpos, se analiza el problema de 2 cuerpos, el cual define los elementos orbitales y la relación entre el sistema de referencia y dichos elementos. Además, se realizó una diferenciación entre los fenómenos que ocurren en el problema de 2 cuerpos y el problema de N cuerpos. Se hace además una

mencción del trasfondo de la precesión del argumento del pericentro que predice la relatividad general. Finalmente, se hace la revisión de las bases numéricas que sostienen el problema de N cuerpos.

En cuanto al marco de antecedentes, se menciona la manera mediante la cual [6, 7] estima los parámetros orbitales, sus errores en las mediciones, los tiempos de pasaje por el pericentro y las masas de cada una de las estrellas de corto período.

En el capítulo 3 se describe el proceso metodológico mediante el cual se va a regir el desarrollo del presente trabajo de grado, se desarrolla un proceso de preparación de la rutina que soluciona el problema de N cuerpos y se establecen rutinas que a partir de los resultados obtenidos elaboran cálculos numéricos o gráficos según se requiera.

En el capítulo 4 se presentan los resultados obtenidos de las simulaciones y se presentan en forma de tablas y gráficos. Posteriormente, se analizan los resultados obtenidos mediante un análisis general del sistema de 7 estrellas y un análisis específico de cada una de ellas, y se discute acerca de los resultados obtenidos.

En el capítulo 7 se recogen los aspectos más importantes contemplados en el capítulo anterior y se realiza una conclusión en base a los resultados obtenidos, además de realizar sugerencias en cuanto a trabajos futuros.

1.1. Planteamiento del Problema

El centro de la vía Láctea (centro Galáctico) destaca como uno de los lugares más estudiados por la astrofísica debido a su proximidad con la Tierra y a la presencia de cúmulos globulares y de un cúmulo estelar nuclear en cuyo interior se aloja un agujero negro supermasivo (SMBH) denominado Sagittarius A* (Sgr A*).

En las proximidades de Sgr A* ~ 200 miliparsecs (mpc) orbita un grupo de estrellas jóvenes denominado estrellas tipo S. A través del análisis observacional de la dinámica de este grupo de estrellas, fue posible delimitar la presencia de un cuerpo compacto (SMBH) en su interior.

La presencia de Sgr A* sugiere que las órbitas de las estrellas tipo S deben estar perturbadas gravitacionalmente debido a efectos relativistas los cuales dependen tanto de la masa de Sgr A* como de propiedades de la órbita de cada estrella tales como el semieje mayor (a) y la excentricidad (e), tal como se descubrió en [2] para la estrella S-02 (S2). Sin embargo, las estrellas tipo S son muy próximas entre sí; por lo tanto, sus órbitas se ven perturbadas debido a la interacción gravitacional newtoniana mutua. Por lo tanto, se propone investigar si existe una relación entre las perturbaciones en las órbitas provocadas por la interacción gravitacional entre las estrellas y la perturbación debida a la presencia de Sgr A*.

De aquí que surja la pregunta: ¿Como se afecta la perturbación relativista de una estrella tipo S debido a la perturbación gravitacional de la misma?

1.2. Objetivos

General

Analizar la dinámica orbital newtoniana del sistema de 7 estrellas tipo S de corto período que rodean al agujero negro supermasivo Sagittarius A* mediante una simulación de N cuerpos constituida por 44 cuerpos mediante el uso del software REBOUND.

Específicos

- Analizar la perturbación newtoniana sobre los parámetros orbitales de las siete estrellas tipo S más internas al SMBH central (Sgr A*) durante un período de 100 mil años.
- Evaluar la perturbación newtoniana sobre el argumento del pericentro en cada aproximación orbital para el grupo de estrellas previamente mencionado.
- Establecer el efecto producido por la precesión del argumento sobre el pericentro debido a interacciones newtonianas a través de una comparación con la perturbación del argumento sobre el pericentro causada por la relatividad general.

Capítulo 2

Marco conceptual

En esta sección se hace una revisión tanto de los conceptos teóricos sobre los cuales se sostiene el trabajo de grado, como de los referentes tomados para el desarrollo del mismo.

2.1. Desarrollo teórico

El referente teórico está conformado por los siguientes tópicos: la identificación de la región de estudio, el problema de N cuerpos como caso general, el problema de los dos cuerpos como caso específico y la manera en que se resuelven estos problemas a través del software REBOUND; además de los distintos software diseñados para el análisis de datos construidos en Python. Por último, se hace una revisión del cálculo de la precesión del argumento del pericentro relativista y del radio de Schwarzschild.

2.1.1. El centro Galáctico

La Vía Láctea es una galaxia de tipo espiral barrada de tipo Sbc, según la clasificación de Hubble [8]. La cual se encuentra compuesta por las siguientes estructuras:

1. Halo de materia oscura.
2. Discos (delgado y grueso).
3. Brazos espirales.
4. Bulbo Galáctico.
5. Barra Galáctica.

El bulbo Galáctico es una región esferoidal con un radio de $3 \sim 5$ kpc; dicha estructura rodea la región central de la Vía Láctea; en el interior del bulbo se encuentra el centro dinámico (centro Galáctico) de la Galaxia, el cual se ubica a una distancia aproximada de 8.33 ± 0.35 kpc con respecto al sol [9–11]. La región central de la Vía Láctea destaca por la presencia del agujero negro supermasivo (SMBH) Sagittarius A^* (Sgr A^*); este objeto compacto posee una masa aproximada de $4 \times 10^6 M_\odot$ [12]; se denomina así porque se ubica en la constelación de Sagitario. A una distancia comprendida entre 0.1 y 1 pc con respecto al centro Galáctico, se ubican las estrellas tipo S, denominadas así por su cercanía al SMBH [13–15]. En la región entre 0.1 y 1 pc domina el potencial producido por Sgr A^* ; de aquí que a la esfera con radio entre 0.1 y 1 pc se la denomine *esfera de influencia gravitacional de Sgr A^** [5].

La primera evidencia observacional de la existencia de un cuerpo extremadamente compacto en el centro Galáctico se remonta al año 1974, cuando Sgr A^* fue detectado como una fuente de radio brillante y compacta, con una estructura

2.1. DESARROLLO TEÓRICO

de escala sub-arco-segundo en la región interna, a aproximadamente 1 pc del centro Galáctico. Además, se estimó que dicha fuente presenta temperaturas superiores a 10^7 K [16, 17].

Estudios posteriores usando interferometría de muy larga base (VLBI) en longitudes de onda milimétricas a 86 y 215 GHz realizaron una primera estimación de la masa del agujero negro supermasivo [3, 18–20] y limitaron su zona de ubicación en el centro Galáctico. Las observaciones a 86 GHz indican que la fuente de emisión posee una estructura simple, puntual o al menos simétrica, mientras que las observaciones a 215 GHz demostraron que este objeto compacto está contenido en una región comprendida entre $50 \leq \theta \leq 190$ microsegundos de arco (μ as) con una masa estimada de $2.6 \times 10^6 M_{\odot}$ [21–23].

Durante los años 1990 y 2000, la colaboración entre el instituto Max Planck de Física Extraterrestre [4] y la Universidad de California en Berkeley [24], haciendo uso de técnicas avanzadas de óptica adaptativa e interferometría, logró descubrir un conjunto de estrellas jóvenes orbitando muy cerca del centro Galáctico; dichas estrellas fueron denominadas *estrellas tipo S* por su asociación con Sgr A*; a su vez, a partir de estos trabajos y teniendo en cuenta diversos estudios teóricos y observacionales adicionales, se estimó la masa del SMBH con un valor $\sim 4.3 \times 10^6 M_{\odot}$ [1].

El centro de la Vía Láctea es un laboratorio único para estudiar procesos que suceden generalmente en el núcleo galáctico. El segundo de arco más cerca del centro Galáctico contiene un denso cúmulo de estrellas, muy luminosas, jóvenes y masivas [5, 13–15], así como varios componentes de gas extremadamente caliente, neutro e ionizado [5, 25, 26].

2.1.2. El problema de N cuerpos

El problema gravitacional de N cuerpos se formula a partir del estudio de la dinámica de sistemas cerrados; estos sistemas están compuestos por N partículas de masa $m_1, m_2, \dots, m_n$, las cuales poseen posiciones iniciales $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ y velocidades iniciales $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_n}$ dadas, y donde la interacción entre partículas se debe únicamente a efectos gravitacionales Newtonianos.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la formulación del problema gravitacional de N cuerpos viene dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (2.1.1)$$

Una vez formulado el problema, será conveniente elegir un sistema de coordenadas de referencia. Para el desarrollo de este trabajo de grado, se elige el sistema cartesiano, de manera que la posición del i-ésimo cuerpo con respecto al origen ($\vec{r}_i$), la posición del j-ésimo cuerpo ($\vec{r}_j$) y la distancia de separación entre el i-ésimo y j-ésimo cuerpo (r_{ij}) vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \vec{r}_i &= x_i \hat{i} + y_i \hat{j} + z_i \hat{k}. \\ \vec{r}_j &= x_j \hat{i} + y_j \hat{j} + z_j \hat{k}. \\ r_{ij} &= \sqrt{(\vec{r}_j - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}. \end{aligned}$$

En cuanto a las unidades de medida adecuadas, es necesario considerar la naturaleza de los cuerpos con los que se va a trabajar. Para este trabajo se tomarán como unidades de medida la Unidad Astronómica (UA) para medir distancias, la masa solar ($M_{\odot}$) para medir masas, el año juliano (años) para medir tiempos y el grado sexagesimal (grado) para medir ángulos. Una vez que se tienen las unidades de longitud, masa y tiempo, se expresa la constante de gravitación universal en términos de las unidades elegidas: ¹:

$$G = 39.47841760435743 \frac{\text{UA}^3}{M_{\odot} \times \text{años}^2}. \quad (2.1.2)$$

¹ 1 UA $\equiv 1.495978707 \times 10^{11}$ m, 1 $M_{\odot} \equiv 1.98847 \times 10^{30}$ Kg, 1 año $\equiv 3.15576 \times 10^7$ s

Teniendo en cuenta que la ecuación (2.1.1) es vectorial, se puede reconocer que esta da lugar a un sistema de 3N ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) de segundo orden correspondientes a cada cuerpo acopladas entre si.

Constantes de integración

Teniendo en cuenta que se trabaja con sistemas cerrados, se cumple que el sistema no experimenta fuerzas externas, lo cual implica que existen integrales de movimiento o constantes de integración. Para el problema de N cuerpos, existen un total de 10 constantes de integración. Estas son:

1. Conservación del momento lineal: la cual implica que la posición del centro de masa evolucione linealmente y que la velocidad del centro de masa del sistema se conserve, es decir:

$$\vec{r}_{cm} = \vec{c}_1 t + \vec{c}_2. \quad (2.1.3)$$

$$\vec{v}_{cm} = v_{x_{cm}} \hat{i} + v_{y_{cm}} \hat{j} + v_{z_{cm}} \hat{k} = \vec{c}_2; \quad \vec{c}_1, \vec{c}_2 = \overrightarrow{constante}. \quad (2.1.4)$$

2. Conservación del momento angular por unidad de masa: la cual implica que el plano que contiene al vector $\vec{r}_{cm}$ sea invariante durante el movimiento de las partículas. El vector de momento angular es normal a dicho plano y la conservación es tanto en magnitud como en dirección:

$$\vec{h} = h_x \hat{i} + h_y \hat{j} + h_z \hat{k} = \vec{c}_3; \quad \vec{c}_3 = \overrightarrow{constante}. \quad (2.1.5)$$

3. Conservación de la energía total:

$$T - U = E = c_4; \quad c_4 = cte. \quad (2.1.6)$$

La solución de la ecuación (2.1.1) consiste en las *órbitas de los N cuerpos*; para verificar la calidad de la solución numérica de esta ecuación, es necesario que los errores en las constantes de integración (2.1.3),(2.1.4),(2.1.5),(2.1.6) sean menores al orden de 10^{-10} . En este trabajo basta con verificar la conservación de la energía y del momento angular.

2.1.3. El problema de dos cuerpos-elementos orbitales

Para resolver el problema de dos cuerpos, se reemplaza $N = 2$ en (2.1.1) y, dadas las condiciones necesarias de posición y velocidad iniciales, es posible resolver las EDOs obtenidas de manera analítica. Sin embargo, en múltiples ocasiones, se requiere conocer el movimiento de *una masa respecto a la otra*.

La ecuación que describe el movimiento relativo de m_2 con respecto a m_1 está dada por:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = 0; \quad (2.1.7)$$

Donde: $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ representa el vector de posición de m_2 relativo a m_1 y $\mu = G(m_1 + m_2)$.

Calculando $\vec{r} \times$ (2.1.7) se tiene que $\vec{r} \times \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{0}$, integrando, se obtiene que:

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{h}, \vec{h} = \overrightarrow{constante}. \quad (2.1.8)$$

Resultado acorde con la conservación del momento angular por unidad de masa planteado en (2.1.5). La figura 2.1.1 [27] ilustra gráficamente este resultado.

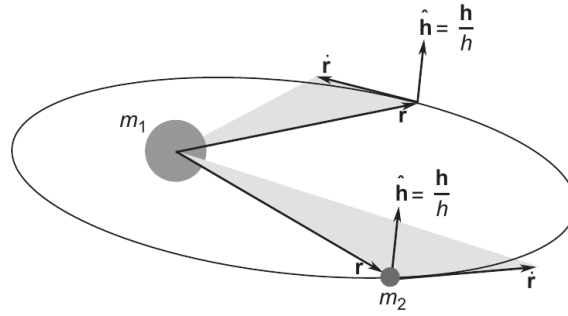


Figura 2.1.1: La trayectoria de m_2 con respecto a m_1 se encuentra en un plano donde la normal está definida por $\vec{h}$.

El problema de 2 cuerpos es de carácter particular debido a que la ecuación que describe su dinámica (2.1.7) posee una solución analítica. La solución se obtiene a partir de manipulaciones vectoriales de la ecuación (2.1.7) usando coordenadas polares (r, θ) centradas en m_1 y los vectores unitarios de la base polar $(\hat{r}, \hat{\theta})$. Así, es posible reescribir los vectores de posición, velocidad y aceleración de la siguiente manera:

$$\vec{r} = r\hat{r}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \hat{\theta}. \quad (2.1.9)$$

Por lo tanto, sustituyendo 2.1.9 en (2.1.7) se obtiene una ecuación para la parte radial:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{\mu}{r^2}. \quad (2.1.10)$$

y una ecuación para la parte angular:

$$h = r^2 \frac{d\theta}{dt}. \quad (2.1.11)$$

Posición orbital

Teniendo en cuenta la ecuación 2.1.10 y realizando la sustitución $u = \frac{1}{r}$ se obtiene:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\bar{\omega})}. \quad (2.1.12)$$

Donde: $p = \frac{h^2}{\mu}$ se denomina *el parámetro*, e la *excentricidad* y $\bar{\omega}$ es la *longitud del pericentro*. La expresión (2.1.12) constituye la ecuación para una cónica en coordenadas polares; existe una relación entre el parámetro y el semieje mayor (a) dada por $p = a(1 - e^2)$.

Las cuatro posibles cónicas son:

- círculo $e = 0, p = a$.
- elipse $0 < e < 1, p = a(1 - e^2)$.
- parábola $e = 1, p = 2q$, q representa la distancia focal.
- hipérbola $e > 1, p = a(e^2 - 1)$.

Si la órbita de m_2 con respecto a m_1 es una elipse, la primera ley de Kepler es una consecuencia de la ley de gravitación universal, tal como se indica en la figura 2.1.2 [28]:

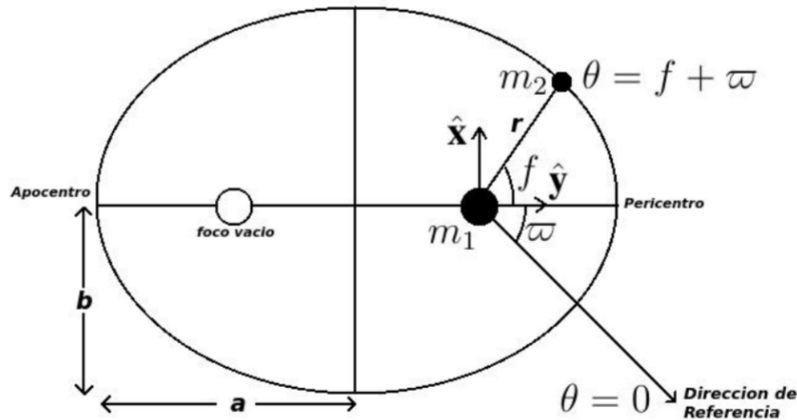


Figura 2.1.2: Geometría de la elipse.

Es común expresar la ecuación 2.1.12 de la siguiente manera:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}, f = \theta - \bar{\omega}. \quad (2.1.13)$$

Donde f se conoce como la *anomalía verdadera*.

A partir de 2.1.13 se obtienen cinco constantes de integración, también conocidas como *elementos o parámetros orbitales*. En el caso de una órbita elíptica ($0 < e < 1$), los elementos orbitales se describen de la siguiente manera:

1. semieje mayor de la órbita (a): define el tamaño de la elipse.
2. excentricidad de la órbita (e): describe cuantitativamente el achatamiento de la elipse.
3. inclinación de la órbita (i): inclinación vertical de la órbita con respecto al plano de referencia.
4. argumento del pericentro (ω): define la orientación de la órbita en el plano que la contiene, como un ángulo medido desde el nodo ascendente hasta la periapsis.
5. longitud del nodo ascendente (Ω): orienta horizontalmente el nodo ascendente de la cónica con respecto al punto vernal; se mide en el plano de referencia.

Los parámetros a y e dan cuenta de la *forma de la órbita*, mientras que los parámetros i, ω, Ω dan cuenta de la *orientación de la órbita*. Además de estos parámetros, se tiene la *anomalía verdadera* (ν o f), la cual permite determinar la posición real de un cuerpo celeste en función del tiempo. En la figura 2.1.3 se ilustra gráficamente cada uno de los parámetros orbitales junto con la anomalía verdadera [12]:

2.1. DESARROLLO TEÓRICO

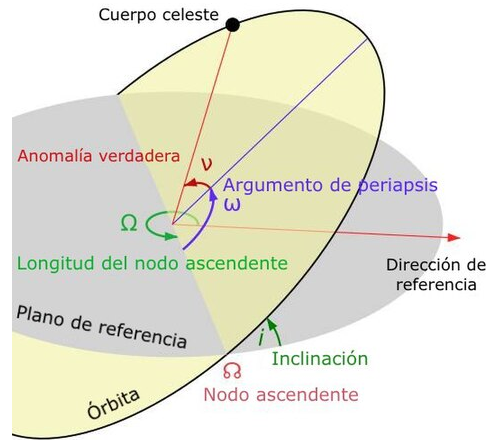


Figura 2.1.3: Elementos orbitales de una órbita elíptica.

A partir de los parámetros orbitales, es posible encontrar las componentes de la posición y la velocidad de la masa m_2 respecto a m_1 en una órbita para cualquier tiempo t a partir de las siguientes expresiones:

Para las componentes cartesianas de la posición:

$$x = r[\cos(\Omega) \cos(\omega + f) - \sin(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(i)]. \quad (2.1.14)$$

$$y = r[\sin(\Omega) \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \sin(\omega + f) \cos(i)]. \quad (2.1.15)$$

$$z = r[\sin(\omega + f) \sin(i)]. \quad (2.1.16)$$

Donde r es posible obtener a través de 2.1.13.

Mientras que para las componentes cartesianas de la velocidad se tienen las siguientes relaciones:

$$v_x = -\frac{\mu}{h}[\cos(\Omega)(\sin(\theta) + e \sin(\omega)) + \sin(\Omega)(\cos(\theta) + e \cos(\omega)) \cos(i)]. \quad (2.1.17)$$

$$v_y = -\frac{\mu}{h}[\sin(\Omega)(\sin(\theta) + e \sin(\omega)) - \cos(\Omega)(\cos(\theta) + e \cos(\omega)) \cos(i)]. \quad (2.1.18)$$

$$v_z = \frac{\mu}{h}[\cos(\theta) + e \cos(\omega)] \sin(i). \quad (2.1.19)$$

Siendo $\theta = \omega + f$, $h = \sqrt{\mu p}$.

A su vez, es posible determinar los elementos orbitales a partir de las posiciones y velocidades de la siguiente manera [12, 27]:

$$a = \left(\frac{2}{r} - \frac{v}{\mu} \right)^{-1}; v = |\vec{v}|. \quad (2.1.20)$$

$$e = |\vec{e}|; \vec{e} = \frac{1}{\mu}(\vec{v} \times \vec{h}) - \frac{\vec{r}}{r}. \quad (2.1.21)$$

$$i = \arccos\left(\frac{h_z}{h}\right). \quad (2.1.22)$$

$$\Omega = \arccos\left(\frac{N_x}{N}\right); \vec{N} = \hat{k} \times \vec{h}; N = |\vec{N}|; \text{ si } N_y < 0 \rightarrow \Omega = 360^\circ - \Omega. \quad (2.1.23)$$

$$\omega = \arccos\left(\frac{\vec{N} \cdot \vec{e}}{Ne}\right); \text{ si } e_z < 0 \rightarrow \omega = 360^\circ - \omega. \quad (2.1.24)$$

$$f = \arccos\left(\frac{\vec{e} \cdot \vec{r}}{er}\right); \text{ si } \vec{r} \cdot \vec{v} < 0 \rightarrow f = 360^\circ - f. \quad (2.1.25)$$

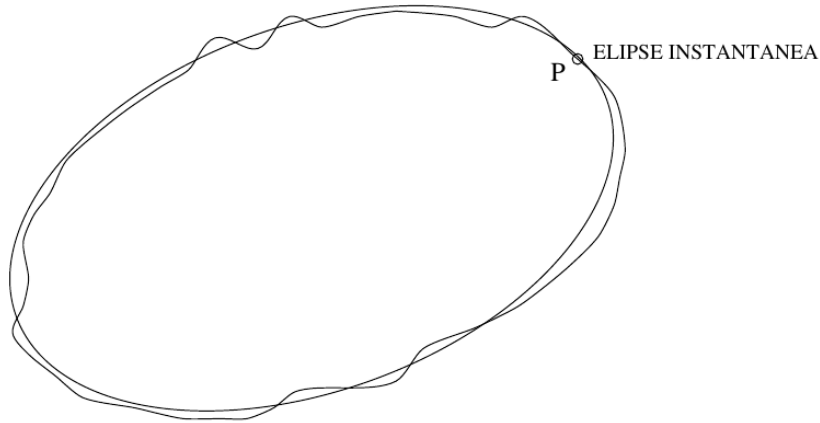


Figura 2.1.4: Determinación de una órbita osculante (elipse instantánea) en el punto P a partir de la órbita real en un instante dado de tiempo.

Quando se incluyen perturbaciones adicionales al problema de los dos cuerpos, los elementos orbitales ya no permanecen constantes, sin embargo, de acuerdo a la teoría de mecánica celeste, instantáneamente, para cada paso de integración, la órbita se considera una cónica instantánea; a esta órbita se le denomina *órbita osculante*. En este trabajo de grado, se estudiará la evolución temporal de los parámetros orbitales del sistema de estrellas tipo S considerando la teoría de órbitas osculadoras (ver figura 2.1.4) [29].

Ecuación de Kepler

La segunda Ley de Kepler en coordenadas polares viene dada por 2.1.11, expresando dicha ecuación en términos de la anomalía verdadera (f):

$$r^2 \frac{df}{dt} = h. \quad (2.1.26)$$

Teniendo en cuenta 2.1.13 entonces:

$$r^2 = \frac{p^2}{1 + e \cos f}. \quad (2.1.27)$$

Reemplazando en 2.1.26 y teniendo en cuenta que $h = \sqrt{\mu p}$:

$$\frac{p^2}{(1 + e \cos f)^2} \frac{df}{dt} = \sqrt{\mu p}. \quad (2.1.28)$$

Aplicando el método de variables separables:

$$\sqrt{\frac{\mu}{p^3}} dt = \frac{df}{(1 + e \cos f)^2}. \quad (2.1.29)$$

La expresión 2.1.29 se denomina *ecuación trascendental de Kepler*, donde su solución es $t = t(f)$ la cual se obtiene mediante métodos numéricos. La constante de integración resultante se denomina *tiempo de pasaje por el pericentro* τ . Un camino análogo a la deducción de dicha ecuación lleva a la siguiente expresión:

$$M = E - e \sin E. \quad (2.1.30)$$

2.1. DESARROLLO TEÓRICO

Donde M es la *anomalía media* y E es la *anomalía excéntrica*. Estos elementos definidos en 2.1.30 se relacionan con los parámetros previamente definidos de la siguiente manera [12]:

$$M = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}(t - \tau). \quad (2.1.31)$$

$$\tan\left(\frac{f}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (2.1.32)$$

2.1.4. Teoría de órbitas osculantes

La mecánica celeste trata convencionalmente con órbitas keplerianas, considerando cualquier efecto no kepleriano como una perturbación a la órbita kepleriana clásica. Sin embargo, una órbita no kepleriana se define como una órbita en la cual actúa una aceleración perturbadora o propulsiva además de la atracción gravitacional del cuerpo primario. Una órbita altamente no kepleriana (NKO) se caracteriza por la magnitud de la aceleración propulsiva promedio a lo largo de una órbita, $\|a_{av}\|$, igual o mayor que la suma de las fuerzas gravitacional y centrípeta experimentadas por el cuerpo en órbita, $\|\nabla U\|$. Es decir, introduciendo un parámetro λ para representar esta razón, una NKO se caracteriza por $\lambda = \frac{\|a_{av}\|}{\|\nabla U\|} \geq 1$ ([30]).

Para encontrar la forma matemática de estas perturbaciones, es necesario partir de 2.1.1. Ahora, es necesario introducir el vector relativo al cuerpo N $\vec{r}_{in}$, de manera que:

$$\vec{r}_{in} = \vec{r}_i - \vec{r}_n. \quad (2.1.33)$$

Obteniendo la segunda derivada de 2.1.33:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{in}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2}. \quad (2.1.34)$$

La segunda ley de Newton para el cuerpo i y el cuerpo n está dada por:

$$\frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i); \quad \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = G \sum_{\substack{j=1 \\ n \neq j}}^N \frac{m_j}{r_{nj}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_n). \quad (2.1.35)$$

Luego, reemplazando en 2.1.34:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{in}}{dt^2} = G \left[\sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ n \neq j}}^N \frac{m_j}{r_{nj}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_n) \right]. \quad (2.1.36)$$

De 2.1.36, de la primera sumatoria se extrae el término $i = j$ y de la segunda se extrae el término $j = n$, obteniendo:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{in}}{dt^2} = G \left[\sum_{j \neq i, n}^{N-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_n}{r_{nj}^3} \right) + m_n \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_i}{r_{in}^3} - m_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_n}{r_{in}^3} \right]. \quad (2.1.37)$$

Operando los términos independientes, se tiene que: $-G(m_n + m_i) \frac{\vec{r}_{in}}{r_{in}^3}$, despejando la sumatoria:

$$\frac{d^2 \vec{r}_{in}}{dt^2} + G(m_n + m_i) \frac{\vec{r}_{in}}{r_{in}^3} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j, n}}^{N-1} m_j \left(\frac{\vec{r}_j - \vec{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\vec{r}_j - \vec{r}_n}{r_{nj}^3} \right). \quad (2.1.38)$$

Esta última ecuación corresponde a la segunda ley de Newton, en donde se incluyen *perturbaciones del movimiento kepleriano* (lado derecho de la igualdad). Si las perturbaciones se *anulan*, 2.1.38 corresponde al *el problema de los dos cuerpos*, esta afirmación se soporta si se escribe a 2.1.38 así:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3} \vec{r} = \vec{F}. \quad (2.1.39)$$

Donde $\vec{F}$ se interpreta como la acción de los otros cuerpos con $N \geq 3$ [31].

2.1.5. Métodos numéricos

Para $N \geq 3$, el problema de N cuerpos se resuelve a partir de métodos numéricos de integración, también conocidos como integradores; para ello, se deben conocer tanto las posiciones y velocidades iniciales de cada uno de los cuerpos involucrados, así como sus ecuaciones de movimiento. Se denominan numéricos debido a las iteraciones mediante las cuales se obtiene la solución de las ecuaciones.

Para que sea aplicable el método numérico, se debe reducir el orden de las ecuaciones diferenciales (EDO) hasta obtener EDO lineales de primer orden. Para el caso de la ecuación (2.1.1) [32] se obtiene que:

$$\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \frac{d\vec{v}_i}{dt} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (2.1.40)$$

Una vez obtenidas las ecuaciones de las componentes:

$$v_{x_i} = \frac{dx_i}{dt}, v_{y_i} = \frac{dy_i}{dt}, v_{z_i} = \frac{dz_i}{dt}. \quad (2.1.41)$$

$$\frac{dv_{x_i}}{dt} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{x_{ij}^3} (x_j - x_i), \frac{dv_{y_i}}{dt} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{y_{ij}^3} (y_j - y_i), \frac{dv_{z_i}}{dt} = G \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{m_j}{z_{ij}^3} (z_j - z_i). \quad (2.1.42)$$

Se puede decir que la solución en un punto $x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}$ dependerá de factores como la solución en un punto n , la distancia de separación entre los puntos x_n y x_{n+1} , y_n y y_{n+1} , z_n y $z_{n+1}(h)$, y el número de veces (N) que se repita la operación.

La distancia de separación entre dos puntos x_n y x_{n+1} , también conocida como *paso de integración*, juega un papel muy importante en los métodos numéricos, debido a que este parámetro está asociado a la precisión del método.

Con cada iteración, lo que se busca es aproximarse cada vez más a la solución real; sin embargo, cada aproximación cargará con un error de truncamiento local por cada iteración, de manera que, al final del proceso iterativo, se obtiene un error de truncamiento global, el cual será proporcional a h^p . A la cantidad $p - 1$ se le conoce como el *orden del método*, de manera que cuanto más alto sea el orden del método, menor será el error de truncamiento global. Por otra parte, en cuanto a la característica del paso de integración h es posible distinguir dos métodos iterativos; por un lado están los métodos de *paso fijo*, que mantienen el valor de h constante, mientras que, por otro lado, están los métodos de *paso variable*, que adaptan el valor de h según las necesidades de integración.

En la actualidad, existen paquetes de software especializados en resolver problemas de N cuerpos, como REBOUND, el cual tiene incorporados múltiples integradores, tanto de paso constante como de paso variable, ofreciendo resultados de alta calidad en relación con la precisión de los resultados y el gasto computacional.

2.1.6. REBOUND

REBOUND es un paquete de software libre bajo la licencia GNU que integra el problema de N cuerpos, utilizando integradores *simpléticos* tales como WHFast, SEI, LEAPFROG, EOS y otros *no simpléticos con paso del tiempo*

2.1. DESARROLLO TEÓRICO

adaptativo de alta precisión, como IAS15 [33]. Se encuentra escrito en lenguaje C y puede ser ejecutado tanto en Python como en C [34]. REBOUND permite manejar una amplia gama de problemas tanto en mecánica celeste como en dinámica galáctica, por lo cual se adecúa al problema que se busca resolver en este trabajo de grado.

2.1.7. Integrador IAS15

El integrador con control de tamaño de paso adaptativo de orden 15 (IAS15) está diseñado para simular la dinámica gravitacional. Se basa en una cuadratura de Grauß-Radau y puede manejar tanto fuerzas conservativas como no conservativas. Trabaja con un control del tamaño del paso óptimo que puede elegir automáticamente. El algoritmo puede trabajar, además, con interacciones a corta distancia y con órbitas altamente excéntricas. Debido a que IAS15 es de orden muy alto, es posible realizar simulaciones a largo plazo con precisión de máquina (double precision) mantenida al menos a 10^9 escalas de tiempo orbitales usando solo 100 pasos de tiempo por órbita.

Las ecuaciones que integra IAS15 tienen la siguiente estructura ²:

$$y''(h) \approx y_0'' + g_1 h + g_2 h(h - h_1) + g_3 h(h - h_1)(h - h_2) + \dots + g_8 h(h - h_1) \dots (h - h_7). \quad (2.1.43)$$

El error en la posición que usa el integrador IAS15 viene dado por la siguiente expresión [34] ³:

$$E_y = C_8 y^{(16)}(\xi) dt^{16}, \xi \in [0, dt]. \quad (2.1.44)$$

Donde $C_8 \approx 1.15 \times 10^{-21}$.

2.1.8. Verificación de la teoría de la relatividad general

La teoría de la relatividad general (RG) formulada en 1915 [35], buscó reinterpretar la naturaleza de la gravedad; a través de las ecuaciones de campo, se explica que la gravedad se produce por la deformación del espacio-tiempo debido a la presencia de objetos masivos.

La solución de las ecuaciones de campo de Einstein está dada por la métrica $g_{\mu\nu}$; este objeto matemático establece las reglas para medir distancias y ángulos en el espacio-tiempo. La primera solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío fue formulada por Schwarzschild en 1916; para encontrarla, asumió que el espacio-tiempo tenía *simetría esférica*.

El elemento de línea de la solución de Schwarzschild viene dado por (usando signatura $(-, +, +, +)$):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(\frac{dr^2}{1 - 2GM/c^2 r}\right) + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (2.1.45)$$

Teniendo en cuenta que: $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ entonces:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left(- \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2, \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}, r^2, r^2 \sin^2 \theta \right). \quad (2.1.46)$$

Esta métrica posee dos singularidades; una, cuando $r \rightarrow \frac{2GM}{c^2}$ a esta distancia radial, se la conoce como *radio de Schwarzschild* (r_s) o *radio gravitacional de la masa M*

$$r_s = \frac{2GM}{c^2}. \quad (2.1.47)$$

Esta singularidad es de tipo matemático, es decir, que mediante un cambio de coordenadas se elimina. La otra singularidad aparece cuando $r \rightarrow 0$, esta singularidad es de tipo físico y, por lo tanto, no es removible.

² $y^{(16)}$ representa la derivada de orden 16 de y y dt representa el paso de integración

³Para ver la deducción de la ecuación 2.1.43 y la manera en que se determina el tamaño del paso, véase el apéndice §A.I

La región donde $r < r_s$ se denomina *agujero negro* debido a que ningún tipo de señal o partícula puede salir de dicha región e ir hacia una región donde $r > r_s$. La región $r = r_s$ es la frontera o también llamada *horizonte de sucesos de un agujero negro* entre la zona del espacio-tiempo observable para un observador externo y la zona invisible para dicho observador. A pesar que el agujero negro surge como una singularidad física, la comunidad científica concibió a esta singularidad como un cuerpo hipotético debido a su naturaleza. Sin embargo, las distintas soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein que se fueron dando con el paso del tiempo evidenciaban la existencia de este tipo de objetos.

La teoría de la relatividad general logró explicar fenómenos que la física newtoniana no era capaz de explicar, tales como la precesión del perihelio de Mercurio. No obstante, la formulación de la RG postuló la existencia de nuevos fenómenos físicos como, por ejemplo, los agujeros negros, el corrimiento al rojo gravitacional y la precesión de los cuerpos debido a la interacción gravitatoria [36].

La detección de las estrellas tipo S junto [37] a la estimación de sus elementos orbitales, constituyen *evidencia irrefutable de la existencia de un agujero negro supermasivo en el centro de la Vía Láctea* [38,39]. Una vez descubierto Sgr A* y estimada su masa con un valor de $(4.300 \pm 0.011) \times 10^6 M_\odot$ [2], el siguiente fenómeno a estudiar fue medir la precesión producida en las estrellas tipo S debido a la presencia del SMBH. La ecuación para la precesión del pericentro que propone la teoría de la relatividad general viene dada por:^{4, 5}:

$$\Delta\omega = \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2}. \quad (2.1.48)$$

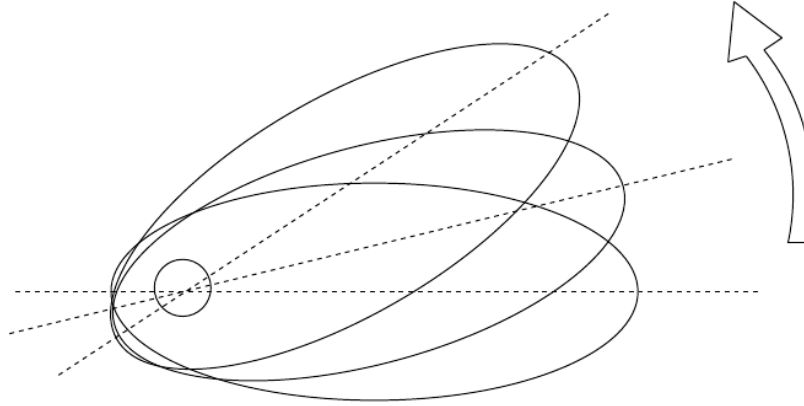


Figura 2.1.5: Precesión relativista del pericentro (precesión prógrada).

La figura 2.1.5 [29] ilustra como la órbita de un cuerpo se deforma en el pericentro de manera sistemática debido a la influencia gravitacional del cuerpo central. La desviación puede ser tanto creciente (en sentido antihorario) como decreciente (en sentido horario); a la desviación creciente se la conoce como *desviación del pericentro prógrada*, mientras que a la desviación decreciente se la conoce como *desviación del pericentro retrógrada*.

De todo el conjunto de estrellas tipo S que se han descubierto [40], las más estudiadas son aquellas que poseen un período orbital corto (~ 20 años), dada la facilidad con la que se pueden determinar sus elementos orbitales experimentalmente. Dentro de este selecto grupo destaca la estrella S2, la cual tiene un período aproximado de 16 años y cuyo pericentro es ≈ 120 UA. Además, mediante observaciones, se ha evidenciado que ha pasado por el pericentro al menos una vez desde su descubrimiento; durante este paso, los equipos de las colaboraciones GRAVITY y Keck/UCLA Galactic Center Group lograron detectar un corrimiento del argumento del pericentro de la órbita de S2 con un valor $\Delta\omega = (0.206 \pm 0.038)$ grados($^\circ$) [1] logrando así verificar experimentalmente 2.1.48.

⁴Para ver la deducción de la ecuación 2.1.48 véase el apéndice §A.II

⁵c representa la rapidez de la luz en el vacío, $c=63284,8579707$ UA/año

2.2. Marco referencial

2.2.1. Estructura cinemática del cúmulo S del centro Galáctico

De acuerdo con [7], se han detectado 112 estrellas tipo S orbitando a Sgr A*. De este conjunto, se han determinado con precisión los elementos orbitales de 39 estrellas, lo cual ha permitido estudiar el cúmulo con profundidad. En general, el centro Galáctico es observable en el infrarrojo cercano debido a la alta presencia de medio interestelar en la región. Sin embargo, existen algunos objetos que pueden ser identificables en longitudes de onda, como el radio.

En el arco segundo central, las estrellas del cúmulo S presentan una distribución en dos discos estelares inclinados a un ángulo de $\pm 45^\circ$ con respecto al plano Galáctico, cuyos miembros orbitan en direcciones opuestas. El polo del disco coincide con la dirección promedio del momento angular de las estrellas; estas estructuras podrían haber sido el resultado de procesos resonantes. A su vez; esto podría indicar la presencia de un perturbador. Este cúmulo está compuesto por estrellas con masas comprendidas entre 3.5 y $20 M_\odot$, predominando estrellas tipo B; estas estrellas pudieron organizarse en estructuras y luego *migrar* hacia el SMBH.

Además de las estrellas tipo S, cerca del centro Galáctico se ubica un grupo de estrellas maser de SiO, tales como IRS 9, IRS 10EE, IRS 12N, IRS 15NE, IRS 17, IRS 19NW, IRS 28 e IRS 9. Esta última es la estrella guía para determinar las posiciones de las estrellas tipo S, la cual se ubica a $5.5''$ al Norte de Sgr A*.

La identificación de las estrellas maser en el arco segundo central es de vital importancia, ya que sirven como referencia para determinar la posición de Sgr A* y de las estrellas tipo S que lo orbitan, ofreciendo un sistema de referencia absoluto en el infrarrojo cercano. Se toma como referencia a estas estrellas debido a que son visibles en el radio (atmósfera de las estrellas) y en el infrarrojo cercano. La comparación entre estas bandas permite localizar exactamente a Sgr A*, además de medir los movimientos propios reales de las estrellas del sistema.

Estudios de espectroscopia en el infrarrojo cercano indican que las estrellas tipo S se encuentran a una temperatura entre 21000 y 28500 K. Asimismo, se han estipulado velocidades rotacionales que oscilan entre 12.66 y 35.9 UA/año. Las estimaciones evolutivas sugieren que sus edades no superan los 15 millones de años; en particular, para la estrella S2 se ha estimado una edad de aproximadamente 6.6 millones de años.

Observaciones y reducción de datos

Las posiciones de las estrellas tipo S fueron calculadas a partir de técnicas de óptica adaptativa aplicadas a la captura de imágenes del centro Galáctico en el período comprendido entre los años 2002 y 2015, con la ayuda del instrumento NAOS-CONICA (NACO) instalado en el primer y cuarto telescopio del Very Large Telescope (VLT). Las imágenes que se usan fueron tomadas por dos cámaras que capturan imágenes en la banda K ($2.18 \mu\text{m}$). Por un lado está la cámara S13, la cual trabaja a escala de 13 milisegundos de arco (mas)/pixel; mientras que, por otro lado, se encuentra la cámara S27 con una escala de 27 mas/pixel. La estrella guía para ubicar la región donde se encuentra el cúmulo de estrellas tipo S es IRS 7, la cual se ubica a 5.5 arco segundos al norte de Sgr A* y está a una magnitud entre 6.5 y 7.0 en la banda K. Para vincular estos datos al sistema de referencia de radio, se utilizaron las posiciones de estrellas MASER de SiO como IRS 9, IRS 10EE, IRS 12N, entre otras. El plano de referencia para la medición de movimientos propios, velocidades propias y velocidad radial es el plano del cielo, mientras que la línea de referencia para medir los ángulos es la línea de los nodos.

Las imágenes a analizar se obtuvieron a través de *dithering* y realizando procesos de *cross-correlation alignment*. Estas imágenes fueron depuradas mediante la implementación de técnicas de flat-fielding, sustracción del cielo y correcciones de píxeles malos. Todo esto para reducir al máximo los efectos instrumentales y del cielo.

Las imágenes de 27 mas/pix se usaron para medir las posiciones de las estrellas maser. Estas estrellas hacen la conexión entre los datos recolectados por NACO y el marco de referencia de radio (ICRF). Para medir la posición de las estrellas tipo S se usaron las imágenes de 13 mas/pix a las cuales se les aplicó el algoritmo de deconvolución de Lucy-Richardson. Para cada época, se incluyeron todos los marcos en la banda K_s disponibles del cúmulo estelar del centro Galáctico que fueron tomados con la mejor calidad del telescopio, de manera que en ellos se evidencie que el

SMBH esté en estado de flare. Adicionalmente, se usaron datos tomados entre 2016 y 2019 para S62, S29, S19, S42, S38 y S60.

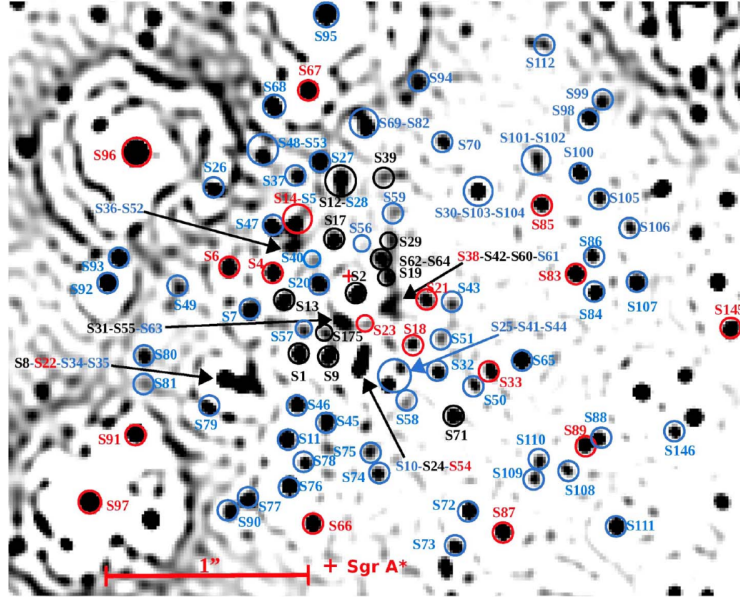


Figura 2.2.1: Región donde se encuentra el cúmulo tipo S y algunas estrellas vecinas (Imagen tomada por el VLT en 2018).

Dado que no es posible observar simultáneamente el sistema de estrellas S y las estrellas MASER en una misma imagen, se empleó un conjunto de 91 estrellas de referencia intermedias, seleccionadas entre 1 y 4 segundos de arco (") de Sgr A* con magnitudes $m_K \leq 14.5$, que aparecen tanto en las imágenes de ambos sistemas, permitiendo así una transformación de coordenadas en dos pasos mediante transformaciones cúbicas de hasta 20 parámetros. El sistema final resulta de la combinación del sistema MASER y el sistema tipo S, y fue construido de manera que la fuente de radio Sgr A* quede en reposo en el origen, con el eje de referencia alineado con el norte celeste hacia arriba y el este hacia la izquierda, siguiendo la convención del marco de referencia celeste internacional (ICRF), el cual utiliza a su vez cuásares lejanos como referencia. En este sistema se establece la línea de referencia al norte celeste y como convención para medir el parámetro Ω , el cual se mide desde la dirección norte en el plano del cielo hacia el este, hasta el punto donde la estrella cruza dicho plano en sentido ascendente [11].

Las estrellas presentes en la figura 2.2.1 poseen un brillo superior a 18.0 en la banda K; en consecuencia, son detectables en todas las épocas y pueden ser claramente distinguidas de otras estrellas del cúmulo durante muchas épocas. Las posiciones fueron comparadas con las estrellas S7, S10, S26, S30 y S65, ya que estas poseen trayectorias aparentes casi rectas.

Como datos adicionales, se incluyeron datos de imágenes de observaciones tomadas en 2016, 2017 y 2018 para todas las estrellas; también se tomaron imágenes de 2019 provenientes de S62, S29, S19, S42, S38 y S60. Por otra parte, se usaron datos de S2 obtenidos entre los años 1995 y 2000 y datos de S38 tomados entre los años 2004 y 2013. Estos datos provienen de observaciones realizadas con el telescopio W.M. Keck.

Para calibrar las imágenes tomadas por el VLT y el Keck, se toma la diferencia media en los movimientos propios de las estrellas tipo S captadas por cada uno de los telescopios. Esto se debe a que cada telescopio tiene su propio marco de referencia en el cual se fijan posiciones (x,y) y se transforman a ascensión recta (α) y declinación (δ). La conversión entre marcos de referencia genera cambios de traslación, rotación, escala y velocidad de las estrellas tipo S.

Para verificar los resultados posicionales se toma a referencia a las estrellas S7, S10, S26, S30 y S65 ya que sus trayectorias aparentes no tienen curvatura detectable. El error acumulado es de 0.1-0.2 mas en una región de 1 segundo

2.2. MARCO REFERENCIAL

de arco. Para las imágenes de 13 mas/pix la incertidumbre es <0.5 mas.

Para las estrellas que poseen secciones orbitales más grandes, se modelaron las órbitas newtonianas integrando las ecuaciones de movimiento 2.1.1 usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4). Para determinar los elementos orbitales de las estrellas, se usaron las posiciones proyectadas α, δ , los movimientos propios ν_α, ν_δ , la velocidad radial ν_z y la aceleración orbital proyectada. Los resultados fueron comparados con rutinas en Python que resuelven la ecuación de Kepler, donde se considera una masa de $4.3 \times 10^6 M_\odot$ a una distancia de $\approx 1.71 \times 10^8$ UA [7]. Al final del proceso, se obtiene una precisión astrométrica de $\sim 300 \mu\text{as}$.

2.2.2. Estrellas de corto período

Se denominan estrellas de corto período a aquellas estrellas del sistema tipo S con períodos orbitales menores al período orbital de la estrella S2 (~ 16 años). Las estrellas de corto período son débiles en brillo en comparación con S2, la cual tiene una magnitud aparente de 14.1 en la banda K.

Entre los años 2004 y 2016, se descubrieron las estrellas S4711, S4712, S4713, S4714 y S4715 en la banda K y en la banda H+K a través de imágenes tomadas con la ayuda de los instrumentos NACO y el espectrógrafo para observaciones de campo integral en el infrarrojo cercano (SINFONI); dichas imágenes fueron procesadas con un filtro pasaaltas. Las imágenes filtradas se basan en la combinación de múltiples datos para mejorar la relación señal/ruido. De este grupo de estrellas, destaca la estrella S4711 debido a su trayectoria altamente excéntrica, con un período orbital de 7.6 años y una distancia al pericentro de 144 UA a Sgr A*. La estrella de guía óptica para SINFONI se ubica a $15.54''$ al norte y $8.85''$ al este de Sgr A*.

Para estimar la masa de las estrellas de este conjunto, se aplica la siguiente fórmula:

$$\log \frac{M_S}{M_\odot} = km_K + b. \quad (2.2.1)$$

Donde M_S representa la *la masa de la estrella* (en $M_\odot$), m_K es la magnitud aparente de la estrella en la banda K cuyos valores se encuentran entre 16.1 y 17.8, mientras que k y b son parámetros; $k = -0.192$, $b = 3.885$ [41].

Para estimar las incertidumbres en los parámetros orbitales, se implementa el muestreador de conjunto invariante afín de Monte Carlo de cadena de Markov (MCMC) en Python [6].

La identificación del tipo espectral de las estrellas tipo S (tipo B temprano) y la cercanía de estas con respecto a Sgr A* contradicen la teoría estándar de la formación estelar debido a que la atracción que ejerce el SMBH desprende las grandes concentraciones de gas y polvo estelar que puede formar las estrellas. A esta anomalía se la conoce como *paradoja de juventud*.

Las teorías de formación estelar que buscan resolver la paradoja de juventud establecen que las estrellas se pudieron haber formado en el parsec central, inclusive en la vecindad de Sgr A*. Una de las teorías más aceptadas que puede resolver la paradoja de juventud en las estrellas tipo S es el mecanismo de Hills.

El mecanismo de Hills describe lo que sucede cuando un sistema estelar binario pasa cerca de un agujero negro, en el que una estrella queda capturada con una órbita muy alta y excéntrica, mientras que la otra es expulsada a una velocidad alta. A pesar de su gran aceptación, no resuelve completamente la paradoja de juventud debido a que precisamente no establece la edad del sistema binario. Las estrellas S2, S55 y S62 podrían ser residuos del mecanismo de Hills.

Reducción de datos

Para depurar las imágenes se usan marcos oscuros, es decir, marcos donde el detector se enciende sin permitir el paso de luz, con el fin de corregir píxeles calientes (hot pixels). Además, se usan marcos linealizados para supervisar la respuesta lineal del detector. Se combinan varias imágenes, las cuales están ligeramente desplazadas (dithered), y con ellas se creó una grilla de 2048×2048 píxeles que sirva como guía general. En adición a los marcos oscuros,

también se agregan marcos de distorsión y longitud de onda. Las figuras 2.2.2 y 2.2.3 son ejemplos del resultado de depuración de imágenes hecho en [6].

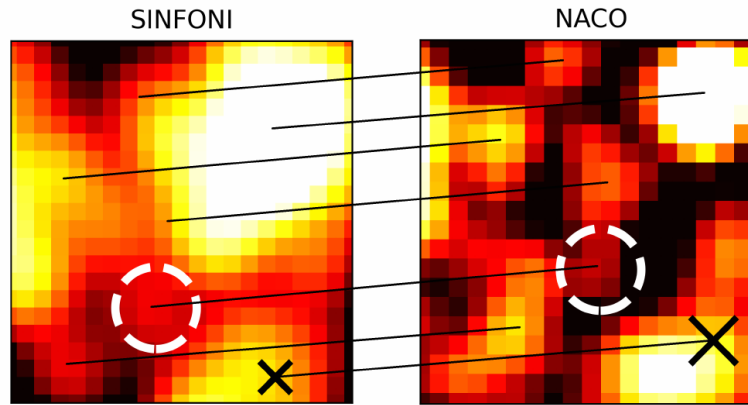


Figura 2.2.2: Imágenes de la detección de S4711 con los detectores NACO y SINFONI.

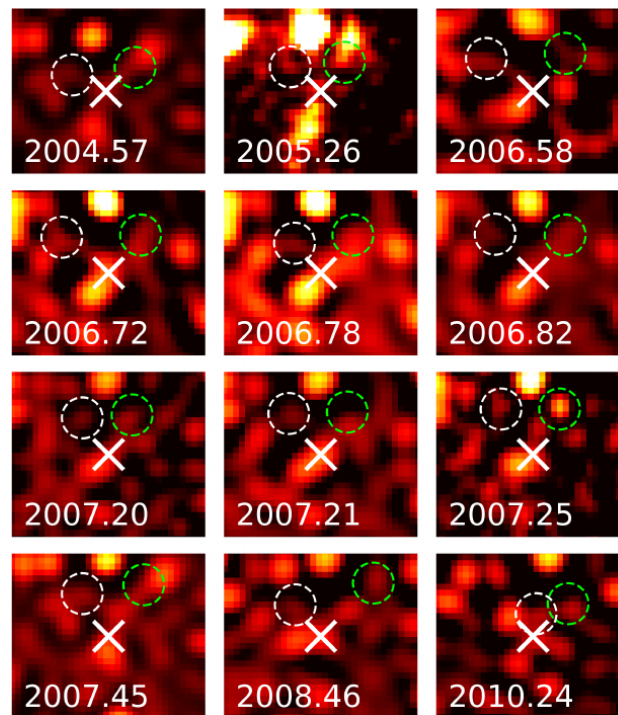


Figura 2.2.3: Órbita de S4711 alrededor de Sgr A* tomada con NACO en la banda K.

En la figura 2.2.2 se muestra la detección de S4711 en 2007. La estrella S2 se ubica en la esquina superior derecha. La cruz negra corresponde al SMBH; el círculo blanco indica la posición de la estrella. Además, se observa una correspondencia en las imágenes obtenidas por cada detector.

La figura 2.2.3 indica la posición de S4711 (círculo blanco punteado) y S62 (círculo verde punteado) con respecto a Sgr A* (cruz blanca) para diferentes épocas tomadas con NACO. El Norte es hacia arriba y el Este hacia la izquierda [6].

Teniendo en cuenta que cada estrella no es un punto perfecto, se asocia una función de dispersión de punto (PSF), la

2.2. MARCO REFERENCIAL

cual se suaviza mediante un filtro gaussiano del mismo tamaño que la PSF (5-6 píxeles $\simeq$ 62-75 mas) para SINFONI. Luego, se vuelven a suavizar las imágenes con tamaños menores a 6 píxeles para probar diferentes opciones y evitar confundir ruido con estrellas.

Para evitar valores atípicos en las posiciones, se utiliza la mediana de las observaciones, ya que las determinaciones posicionales no se encuentran distribuidas de manera uniforme (siguiendo una campana gaussiana).

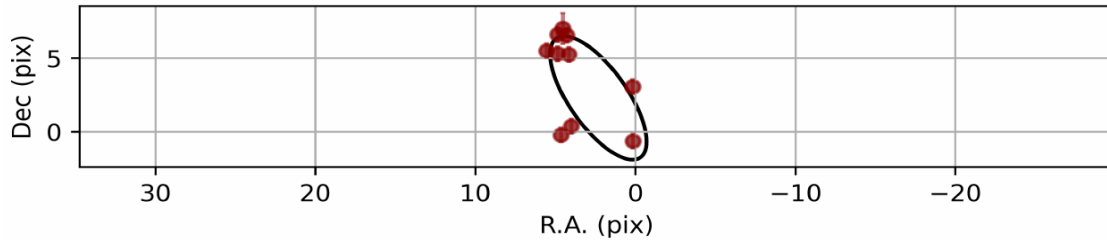


Figura 2.2.4: Órbita de S4711 dada en términos de declinación (dec) y ascensión recta (R.A.).

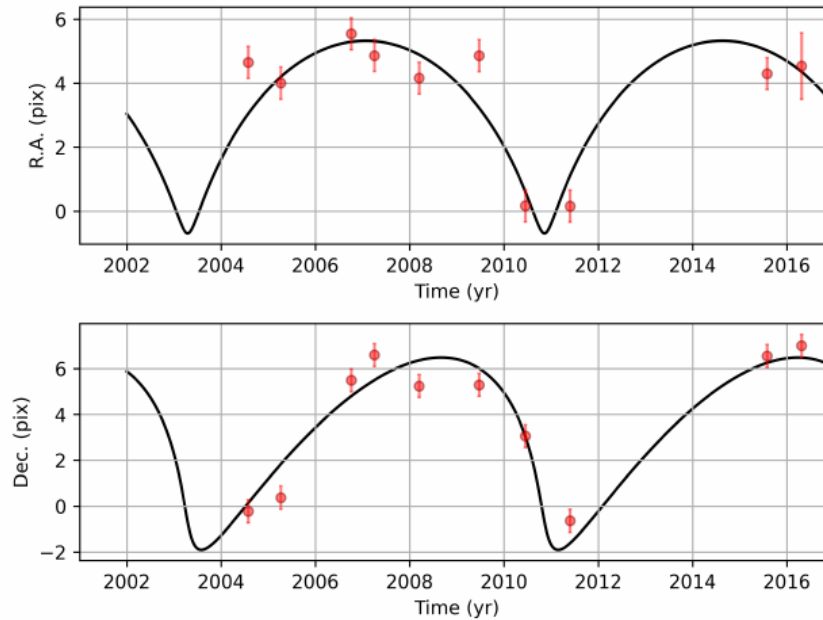


Figura 2.2.5: Evolución temporal de la ascensión recta (R.A.) y la declinación (Dec) de la estrella S4711 entre los años 2002 y 2018.

En la figura 2.2.4 se observa la órbita de la estrella S4711 realizada con los datos obtenidos de NACO, los puntos rojos corresponden a la mediana para todos los años excepto 2004, 2005, 2011, 2015 y 2016. Mientras que en la figura 2.2.5 se muestra la mediana de cada coordenada durante el tiempo mencionado (1 píxel $\equiv$ 13.3 mas) [6].

Capítulo 3

Metodología

En este trabajo de grado se buscó hacer un estudio teórico-computacional mediante la aplicación de la teoría newtoniana sobre la dinámica orbital del sistema de estrellas internas tipo S que orbitan el SMBH Sgr A* a partir de los resultados de una simulación de N cuerpos con 44 estrellas. Esta investigación se adapta a un enfoque tanto cualitativo como cuantitativo, con un diseño de tipo descriptivo, orientado a caracterizar el comportamiento dinámico de dichas estrellas a partir de simulaciones computacionales.

Para iniciar el estudio, se realizó una revisión bibliográfica detallada sobre el problema, procurando referentes recientes tanto en conceptos teóricos como en reportes de medición de magnitudes físicas, tanto del cúmulo de estrellas S como del SMBH Sgr A*; los parámetros orbitales con los cuales se calculan las condiciones iniciales constituyen los datos de entrada para la ejecución de los códigos que se encuentran en [6, 7]. Como siguiente medida, se tomó como herramienta computacional los lenguajes de programación Python y C; en Python se implementó un conjunto de rutinas asociadas a cálculos numéricos y creación de gráficas; mientras que en C se implementó la integración del sistema de N cuerpos.

De acuerdo con lo expuesto en 2.1.2, para resolver el problema de N cuerpos es necesario suministrar los datos de posiciones iniciales y velocidades iniciales de los cuerpos, de acuerdo con las ecuaciones 2.1.16; sin embargo, en los artículos mencionados no se reportan valores de *anomalía verdadera*. No obstante, se reportan los parámetros necesarios para calcular f a través de 2.1.30; en la tabla 3.0.1 se reportan los parámetros orbitales y sus errores absolutos de las estrellas internas ¹. Para encontrar la anomalía verdadera de cada estrella, se implementó un código que resuelve numéricamente la ecuación de Kepler 2.1.30. En el código se estableció como referencia el tiempo de pasaje por el pericentro de la estrella S2 ². Una vez obtenido el valor de f para cada estrella, se creó un gráfico que ilustra la posición inicial de las estrellas en el espacio antes de integrar el sistema ³.

Estrella	a (mpc)	Δa (mpc)	e	Δe	i (grad)	Δi (grad)	ω (grad)	$\Delta \omega$ (grad)	Ω (grad)	$\Delta \Omega$ (grad)	t_{peri} (años)
S2	5.034	0.001	0.887	0.002	137.514	0.401	73.416	0.745	235.634	1.031	2002.390
S38	5.598	0.205	0.812	0.050	157.774	15.011	11.001	9.626	96.375	8.308	2003.406
S55	4.360	0.002	0.740	0.010	141.692	1.604	133.499	3.896	129.890	4.183	2009.310
S62	3.588	0.02	0.976	0.01	72.76	5.15	42.62	2.29	122.61	4.01	2003.33
S4711	3.002	0.06	0.768	0.030	114.71	2.92	131.59	3.09	20.10	3.72	2010.85
S4714	4.079	0.012	0.985	0.011	127.70	0.28	357.25	0.80	129.28	0.63	2017.29
S4715	5.756	0.439	0.247	0.040	129.80	3.72	359.99	5.38	282.15	2.92	2008.05

Tabla 3.0.1: Elementos orbitales (a, e, i, ω, Ω), errores en sus mediciones ($\Delta a, \Delta e, \Delta i, \Delta \omega, \Delta \Omega$) y tiempo de pasaje por el pericentro (t_{peri}) de estrellas de corto período.

¹Diríjase a [6, 7] para observar los elementos orbitales y los errores correspondientes al resto de estrellas involucradas en la simulación de N cuerpos

²En el apéndice §B.I.I se encuentra la implementación de la rutina utilizada

³Para ver la rutina implementada para elaborar el gráfico, ver el apéndice §B.I.I

Por otra parte, el valor de la masa de Sgr A* se tomó de [2], mientras que la masa de las estrellas tipo S más cercanas al SMBH fue extraída de [6]⁴. Una vez determinados los valores correspondientes de f y la masa de Sgr A* de cada una de las estrellas, se procedió a implementar el integrador.

Estrella	Masa [$M_{\odot}$]	$T_{orbital}$ [años]	$\Delta T_{orbital}$ (años)
S2	11.0	16.130	0.020
S38	11.0	18.920	0.020
S55	11.0	13.010	0.020
<i>S62</i>	<i>6.1</i>	<i>9.94</i>	<i>0.30</i>
<i>S4711</i>	<i>2.2</i>	<i>7.61</i>	<i>0.30</i>
<i>S4714</i>	<i>2.0</i>	<i>12.05</i>	<i>0.30</i>
<i>S4715</i>	<i>2.8</i>	<i>20.2</i>	<i>2.4</i>

Tabla 3.0.2: Masa estimada, período orbital y error en el período orbital para las estrellas más próximas a Sgr A*. Para las estrellas en cursiva, se calculó tomando la masa de Sgr A* con un valor de $(4.1 \pm 0.2) \times 10^6 M_{\odot}$. Para el resto se tomó como $(4.300 \pm 0.011) \times 10^6 M_{\odot}$.

Las simulaciones de N cuerpos fueron realizadas en el entorno de REBOUND utilizando el lenguaje de programación C. El software posee una gran variedad de códigos con ejemplos; el código que se usó en este trabajo de grado corresponde a una adaptación del ejemplo *solar system*⁵, en el cual se implementó el integrador IAS15 con una tolerancia $\epsilon = 1 \times 10^{-12}$ y un tiempo de integración de 100000 años (simulación de largo período); como datos de entrada, fueron introducidos los parámetros orbitales de las estrellas tipo S disponibles⁶. Junto a ellos se ingresa el valor de la masa de cada una de las estrellas y la anomalía verdadera calculada previamente (Ver Tabla 3.0.2).

Una vez completado el proceso de integración numérica, se evidenció que dicho proceso arrojó tres tipos de archivos de datos, los cuales corresponden a la conservación de la energía total del sistema y del momento angular del sistema, las posiciones y velocidades de las estrellas durante el tiempo de integración y, por último, la evolución temporal de los elementos orbitales de cada estrella del sistema. Los elementos orbitales los calcula el integrador a partir de la aplicación de las ecuaciones 2.1.25.

El proceso de análisis de resultados estuvo sujeto a la verificación de la conservación de la energía y del momento angular total del sistema; para ello, se crearon rutinas que realizan las gráficas de la evolución temporal de las cantidades $\Delta E/E$ y $\Delta L/L$ (ver apéndice B.II.III). Una vez ejecutada la rutina y analizadas las gráficas obtenidas, se procedió a hacer una selección de estrellas para el análisis de su dinámica; de manera que, de la muestra total de estrellas, solamente fueron consideradas aquellas con período orbital corto, es decir, aquellas estrellas con períodos similares al período de la estrella S2 (~ 16 años).

Con los datos de posición, se implementó un gráfico que evidenciara las trayectorias en el espacio que siguen las estrellas de la muestra alrededor del SMBH, de acuerdo con el tiempo utilizado en la rutina de integración (ver apéndice §B.II.IV).

En relación con los datos de los elementos orbitales, se realizaron gráficas de su evolución temporal, junto con gráficas de la evolución del error absoluto de dichos elementos en función del tiempo⁷. Con el fin de verificar los resultados de las gráficas, se diseñó una rutina que calcule el valor máximo y el valor medio de la variación relativa de las perturbaciones sobre cada elemento orbital. Esta variación relativa se calcula de manera instantánea tomando como referencia el valor introducido en las condiciones iniciales.

Del conjunto de elementos orbitales obtenidos, se realizó un análisis particular del argumento del pericentro(ω) a través del cálculo de dicho parámetro orbital luego del paso de la estrella por su pericentro, debido a que la medición de $\Delta\omega$ sobre S2 se realizó mientras dicho astro pasó por el punto mencionado. Con esta medición se comprobó la predicción de la teoría de la relatividad General dada por la ecuación 2.1.48. Como punto de partida, se calculó la

⁴ [7] no reporta la masa de las estrellas; no obstante, hace una estimación del rango de valores para la masa. Para las simulaciones, se toma como valor estándar $15.0 M_{\odot}$

⁵Para ver la rutina, dirigirse al apéndice §B.I.II

⁶se usa la conversión de distancia $1 \text{ mpc} \equiv 206.264806247 \text{ UA}$ y de ángulo $180 \text{ grados} \equiv \pi \text{ rad}$

⁷Ver apéndice §B.II.V para observar a detalle la rutina implementada

desviación estándar ($\Delta\omega_p(RG)$) con los datos de semieje mayor (a) y excentricidad (e) disponibles en la tabla 3.0.1, el valor de la constante de gravitación universal reportada en 2.1.2 y el valor de la masa de Sgr A* reportada en [1]. Con estos valores, se implementó una rutina en la cual se aplicó la teoría de propagación de errores a la ecuación 2.1.48⁸; una vez ejecutado el programa, se procedió a realizar un gráfico de dispersión de $\Delta\omega_p$ para cada una de las estrellas de corto período orbital⁹. Posteriormente, se tomaron los datos calculados durante la integración y se calculó el valor de $\Delta\omega$ por cada paso por el pericentro; estos valores corresponden a la desviación Newtoniana $\Delta\omega_p(N)$. Con el fin de analizar si la desviación en el argumento del pericentro $\Delta\omega(N)$ modificó la desviación teórica $\Delta\omega_p(RG)$, se implementaron dos rutinas; por un lado, una rutina en la cual se adiciona la perturbación Newtoniana con la perturbación relativista, y por otro lado, una rutina que realiza una comparación entre cada tipo de perturbación a través del cociente¹⁰ y establecer si la perturbación newtoniana contribuyó o disminuyó la perturbación relativista a través de $\Delta\omega$ prógrado o retrógrado, respectivamente:

$$\frac{|\Delta\omega_p(N)|}{\Delta\omega_p(RG)}. \quad (3.0.1)$$

Cabe destacar que el único valor para $\Delta\omega_p(RG)$ que se ha medido es para la estrella S2; por lo tanto, sólo para esta estrella se pudo buscar una posible modificación de la medida relativista a causa de efectos newtonianos. Para el resto de las estrellas, se realizó un análisis de modificación netamente teórico, el cual está sujeto a los errores instrumentales en las mediciones de los parámetros orbitales disponibles en la literatura.

Finalmente, con el fin de evidenciar las condiciones extremas bajo las cuales Sgr A* influye en la dinámica de las estrellas de corto período, se elaboraron gráficos de la rapidez de cada estrella en cada paso por el pericentro, expresada como porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c), así como del pericentro de cada órbita en términos del radio de Schwarzschild (2.1.47) de Sgr A*¹¹ a su vez, con la elaboración de estas gráficas se buscó encontrar posibles procesos de migración estelar que puedan surgir en el futuro.

⁸ ver apéndice §B.I.III

⁹ para observar la rutina implementada. Diríjase a §B.II.II

¹⁰ Ver apéndices §B.II.VI y §B.II.VII, respectivamente para ver las rutinas implementadas

¹¹ ver apéndices §B.II.VIII y §B.II.IX respectivamente

Capítulo 4

Resultados

4.1. Resultados generales obtenidos

En este capítulo se reportan los resultados requeridos para la implementación de la simulación de N cuerpos en REBOUND y, posteriormente, los resultados derivados de su ejecución.

Así, en la subsección 4.1.1 se muestra, a través de la tabla 4.1.1, las anomalías verdaderas de las estrellas de corto período calculadas mediante la solución de la ecuación de Kepler. En la subsección 4.1.2 se ilustra, a través del gráfico de la figura 4.1.1, la ubicación en el espacio de cada una de las 44 estrellas tipo S que fueron introducidas en el simulador.

A partir de la subsección 4.1.3, se ilustran los resultados derivados de la ejecución del simulador de N cuerpos. En la subsección mencionada se ilustran los gráficos de conservación de la energía total del sistema de estrellas y de la magnitud del momento angular del sistema arrojados por el integrador IAS 15. En la subsección 4.1.4 se ilustran las órbitas en el espacio que describen las estrellas de corto período luego del tiempo de interacción. En la subsección 4.1.5 se ilustran los gráficos de perturbación de los elementos orbitales y los gráficos de la perturbación de las desviaciones relativas con respecto al valor teórico correspondientes a cada una de las estrellas de corto período. En la sección 4.1.2, a través de las tablas 4.1.2 y 4.1.3, se determinan las desviaciones relativas máximas y promedio en cada parámetro orbital para cada estrella. En la subsección 4.1.7, a través de la tabla 4.1.4, se reportan los valores nominales y las desviaciones estándar del valor $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para cada estrella de corto período. Estos valores se ilustran en el gráfico 4.1.11. En la subsección 4.1.8, se ilustra de manera gráfica la contribución de $\Delta\omega_p(\text{N})$ a $\Delta\omega_p(\text{RG})$ y la comparación entre las cantidades mencionadas. Finalmente, en la subsección 4.1.9 se presentan gráficos de la rapidez de cada una de las estrellas de corto período durante cada paso por el pericentro en términos de la rapidez de la luz, y se presentan además las gráficas de la distancia del radio de precesión de cada estrella en términos del radio de Schwarzschild de Sgr A*.

4.1.1. Anomalías verdaderas de las estrellas del sistema S

Estrella	Anomalía verdadera (grad)
S2	0.00000
S38	-121.0507
S55	-182.5697
S62	-167.5883
S4711	217.4636
S4714	184.0836
S4715	-128.1390

Tabla 4.1.1: Anomalías verdaderas de las estrellas de corto período.

4.1.2. Condiciones iniciales

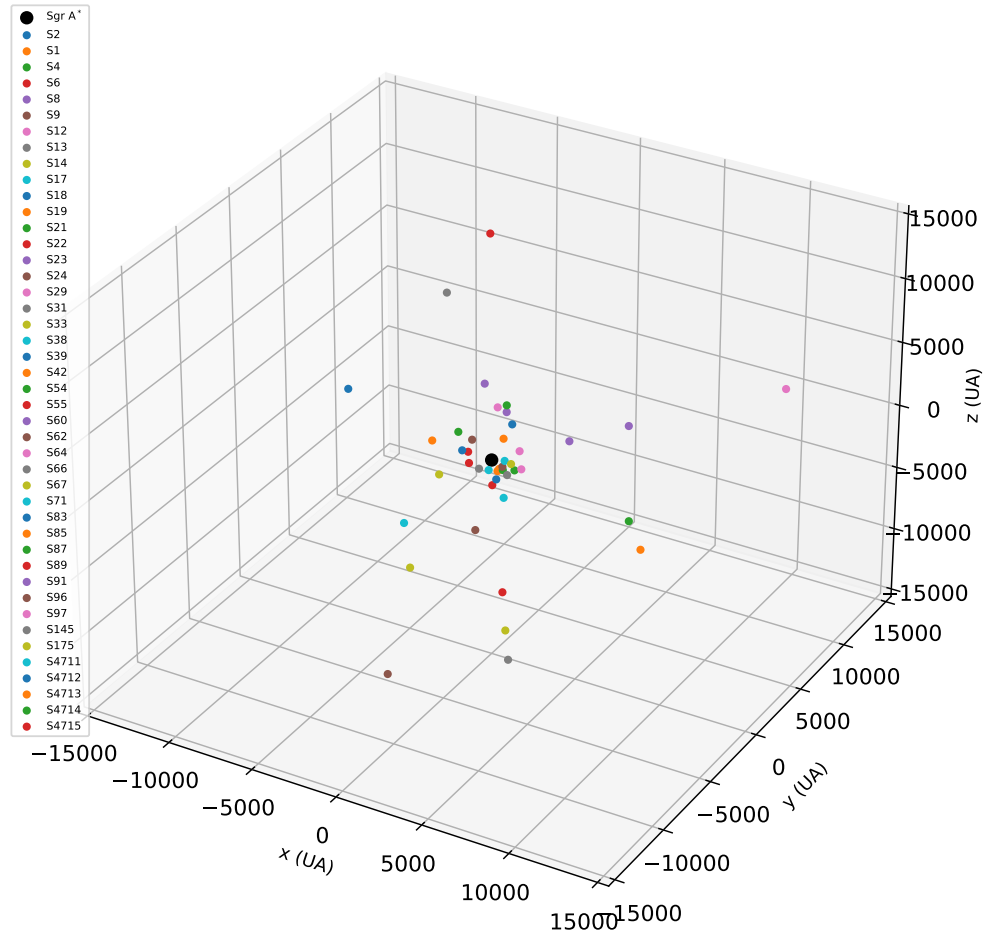


Figura 4.1.1: Ubicación de las estrellas del sistema tipo S de acuerdo a las condiciones impuestas.

⁰Para ver las anomalías verdaderas resultantes del resto de estrellas diríjase al apéndice §C.I

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

4.1.3. Conservación de las cantidades de movimiento del sistema

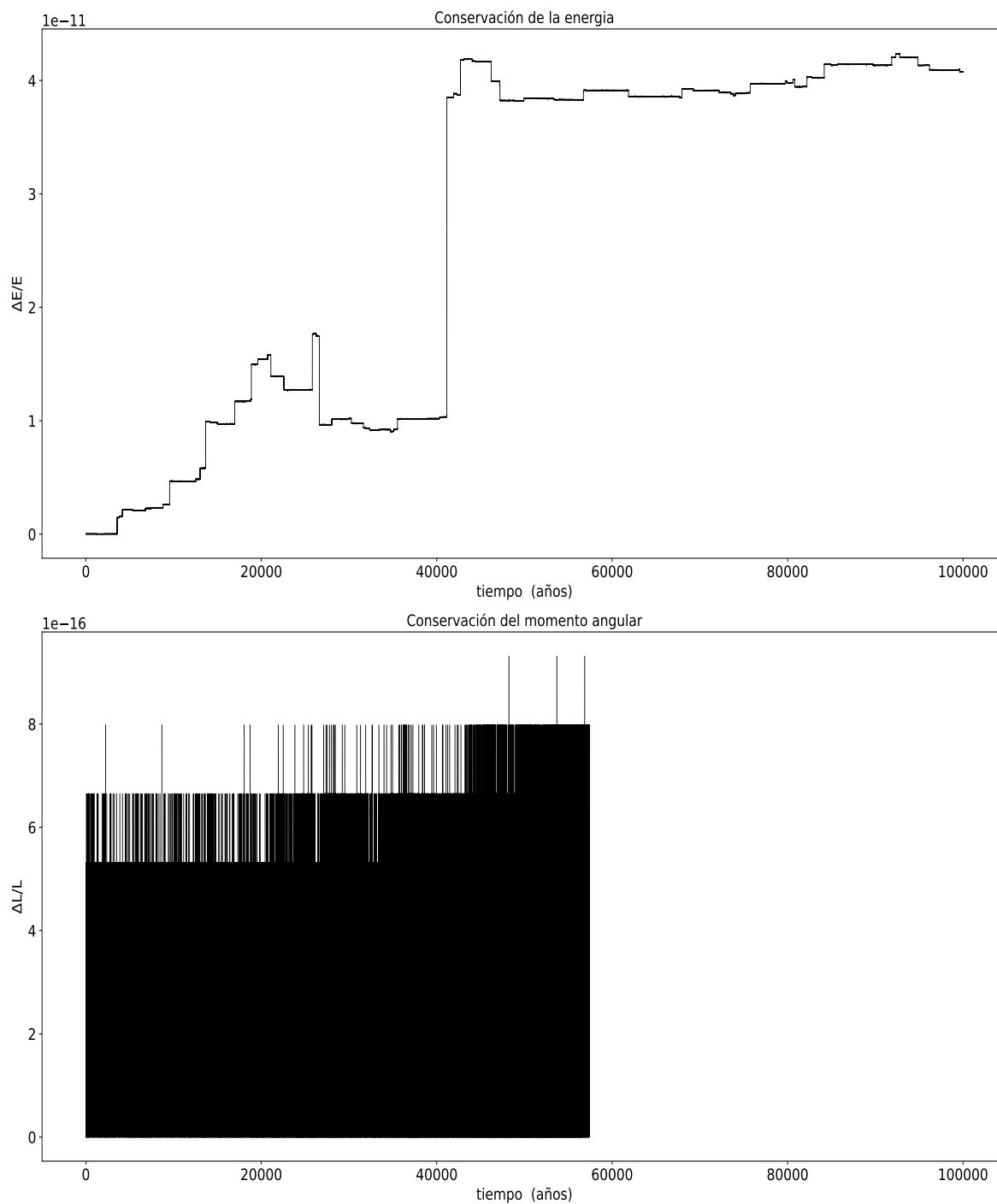


Figura 4.1.2: Conservación numérica de la energía total del sistema y de la magnitud del momento angular del sistema.

4.1.4. Órbitas de las estrellas de corto período

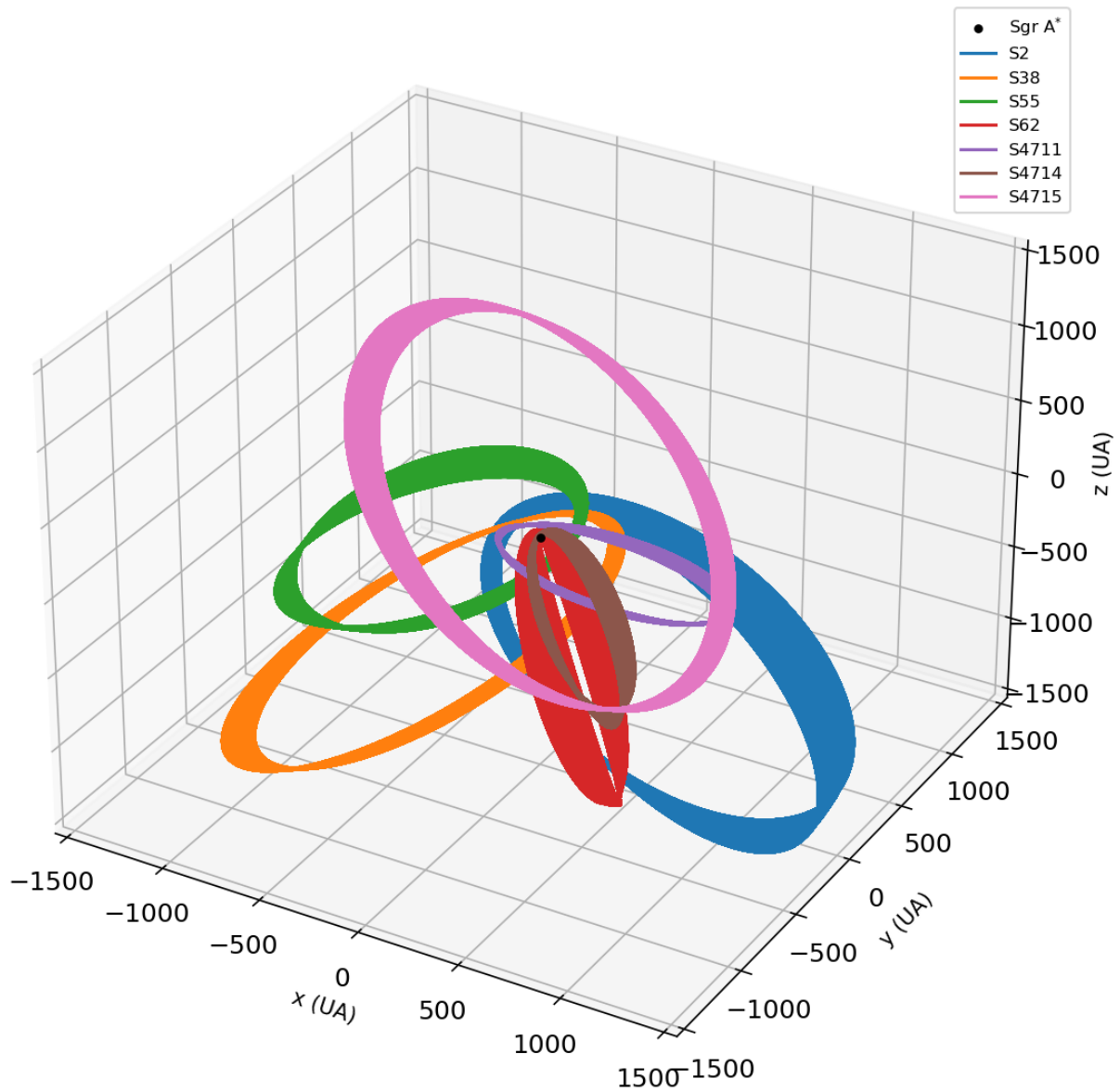


Figura 4.1.3: Evolución temporal de las órbitas de las estrellas de corto período tras un tiempo de integración de cien mil años.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

4.1.5. Perturbaciones en los parámetros orbitales

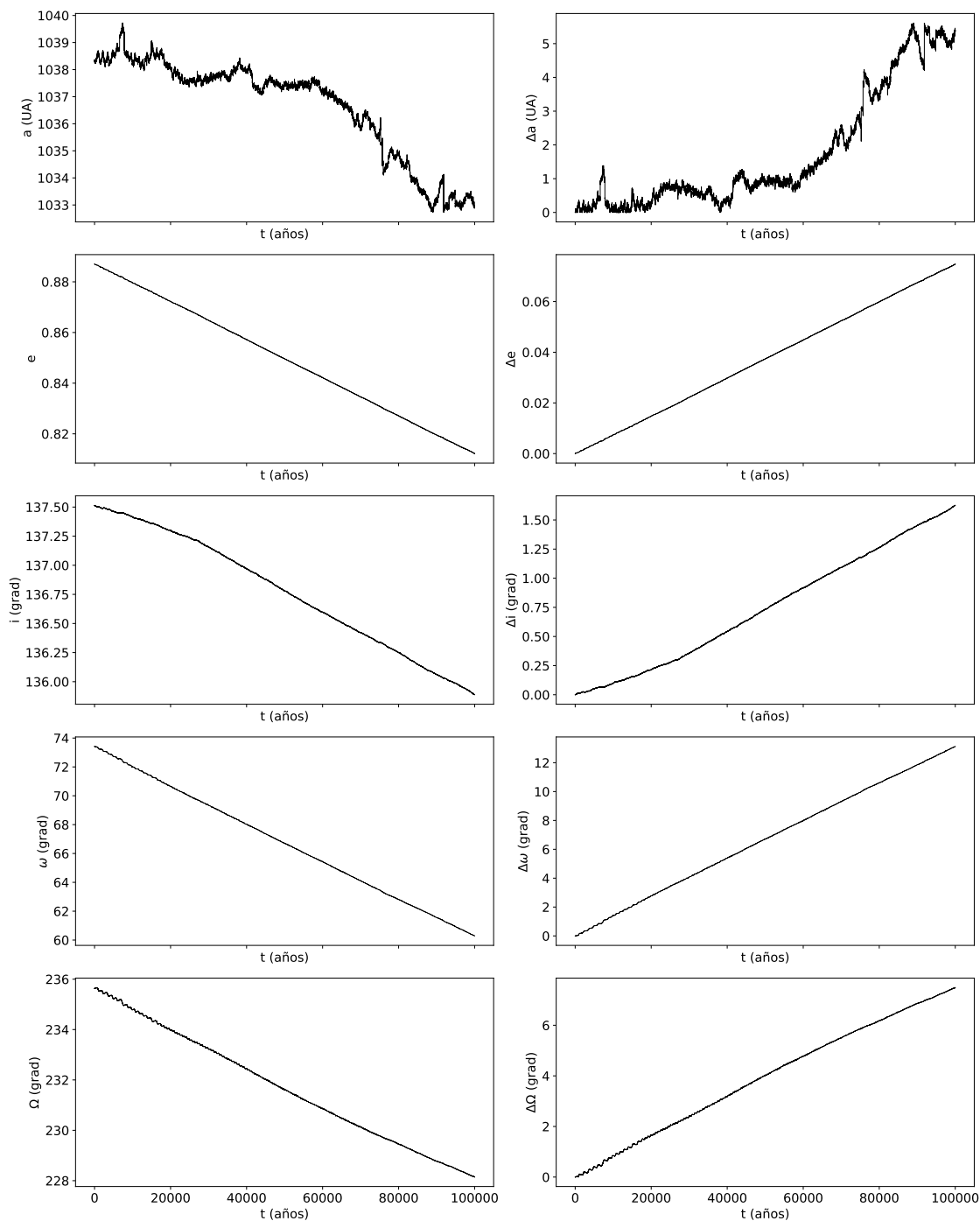


Figura 4.1.4: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S2.

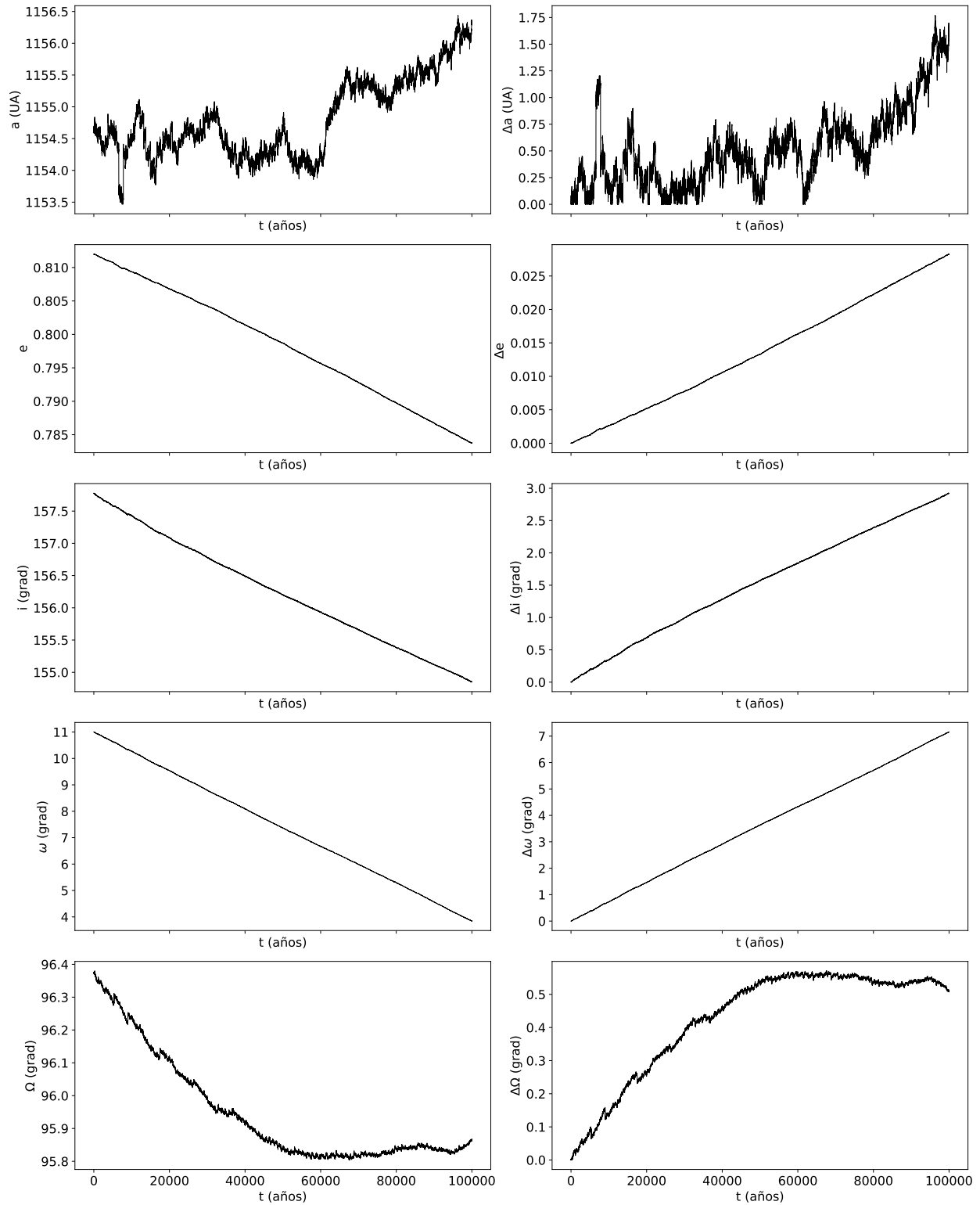


Figura 4.1.5: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S38.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

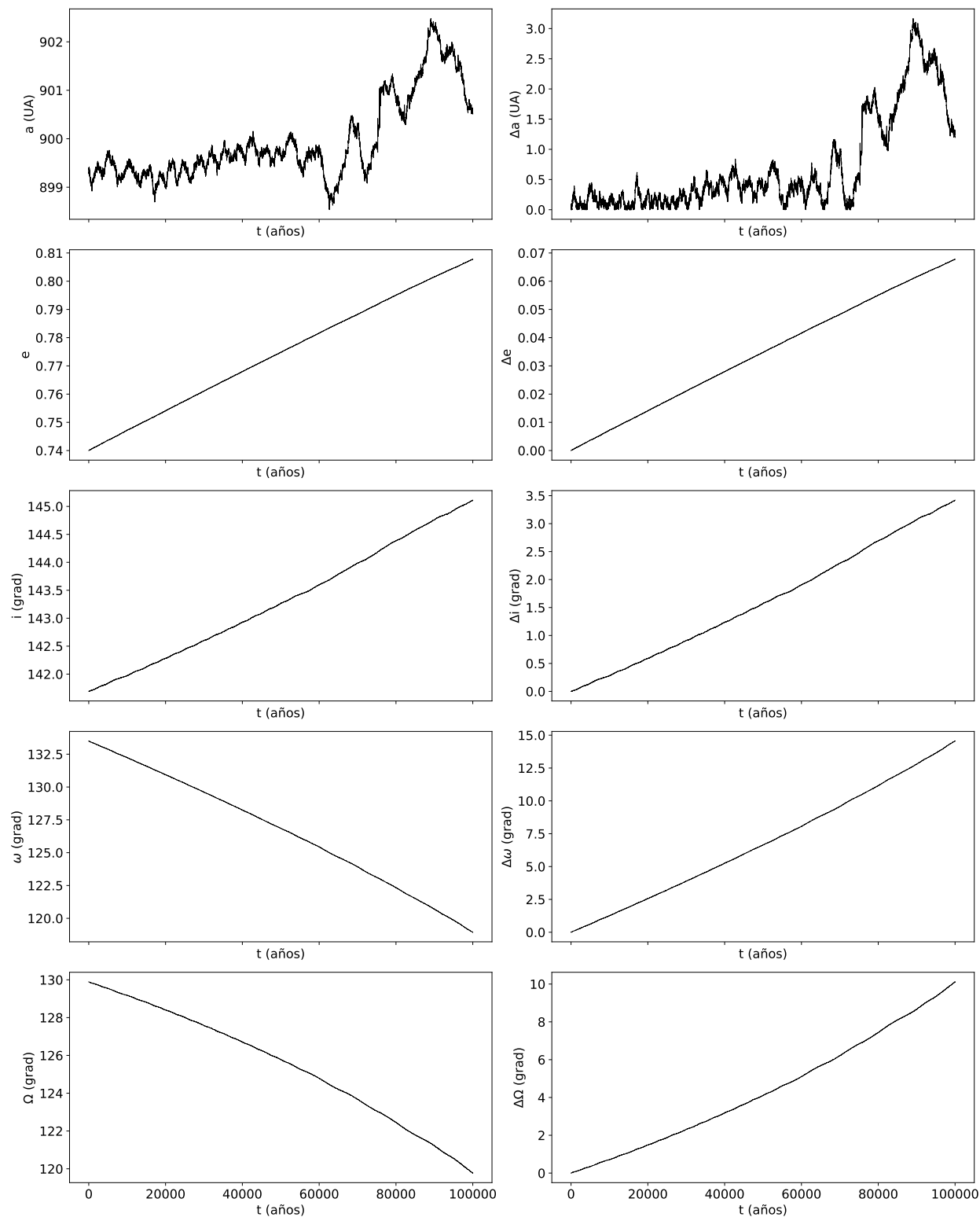


Figura 4.1.6: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S55.

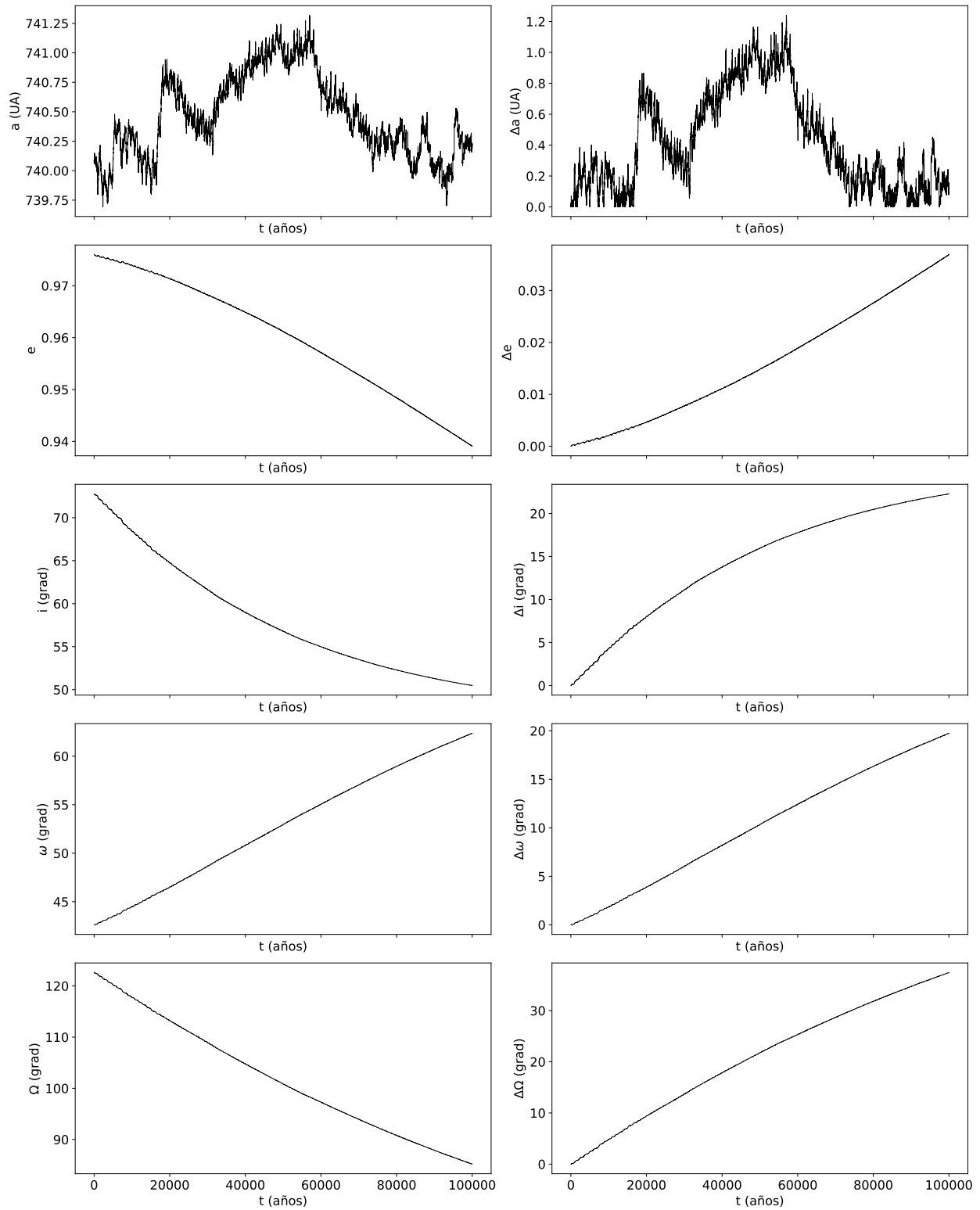


Figura 4.1.7: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S62.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

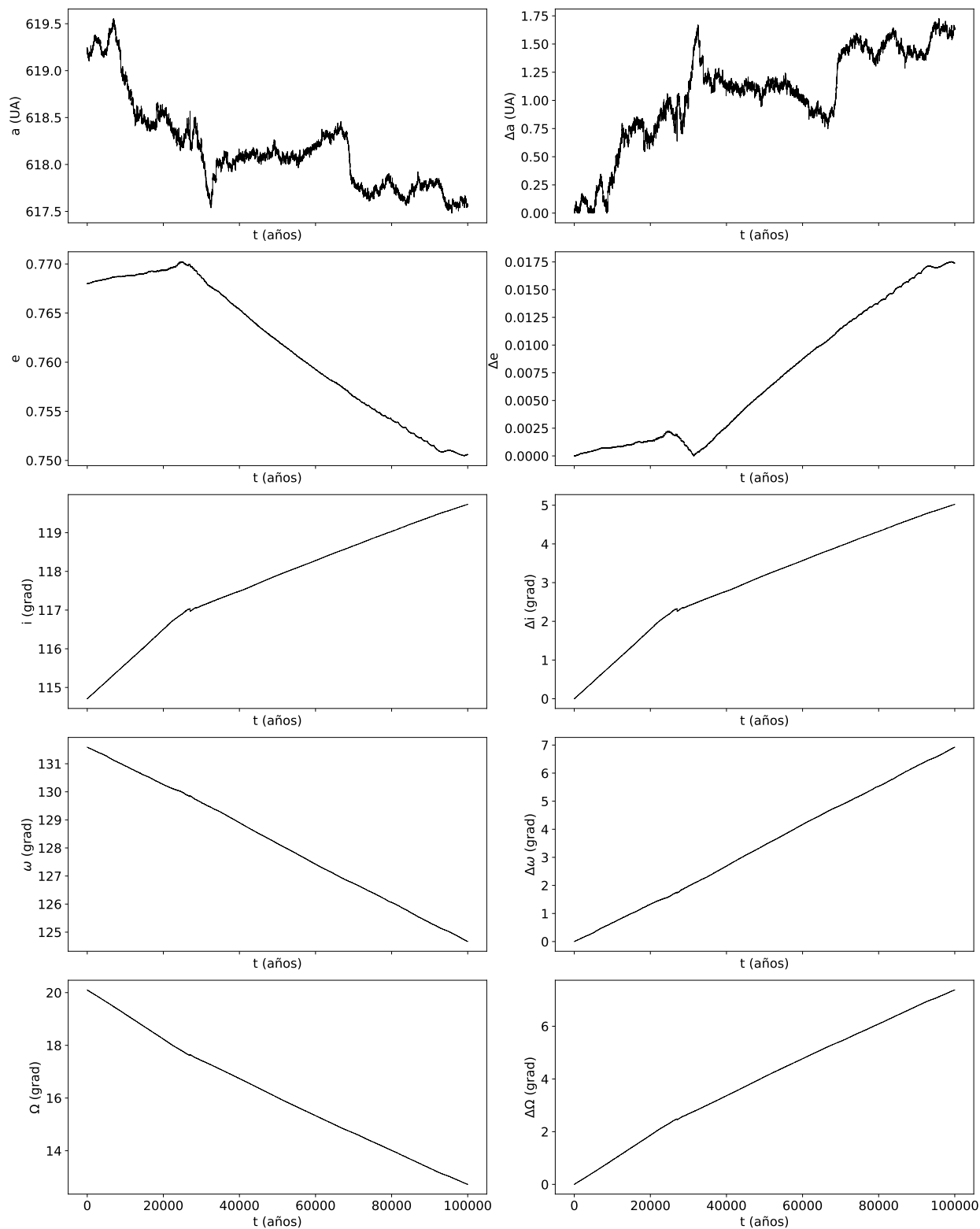


Figura 4.1.8: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S4711.

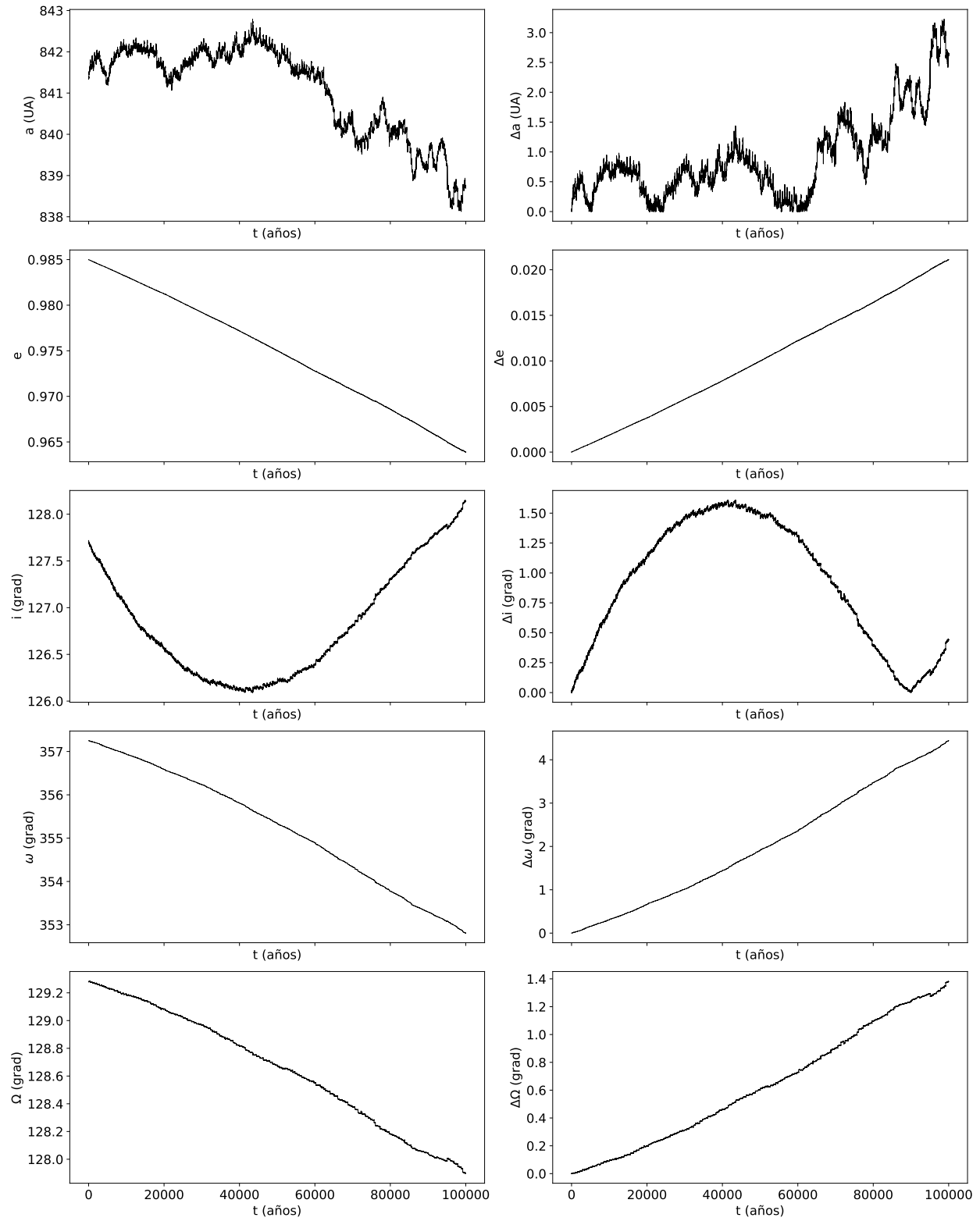


Figura 4.1.9: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S4714.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

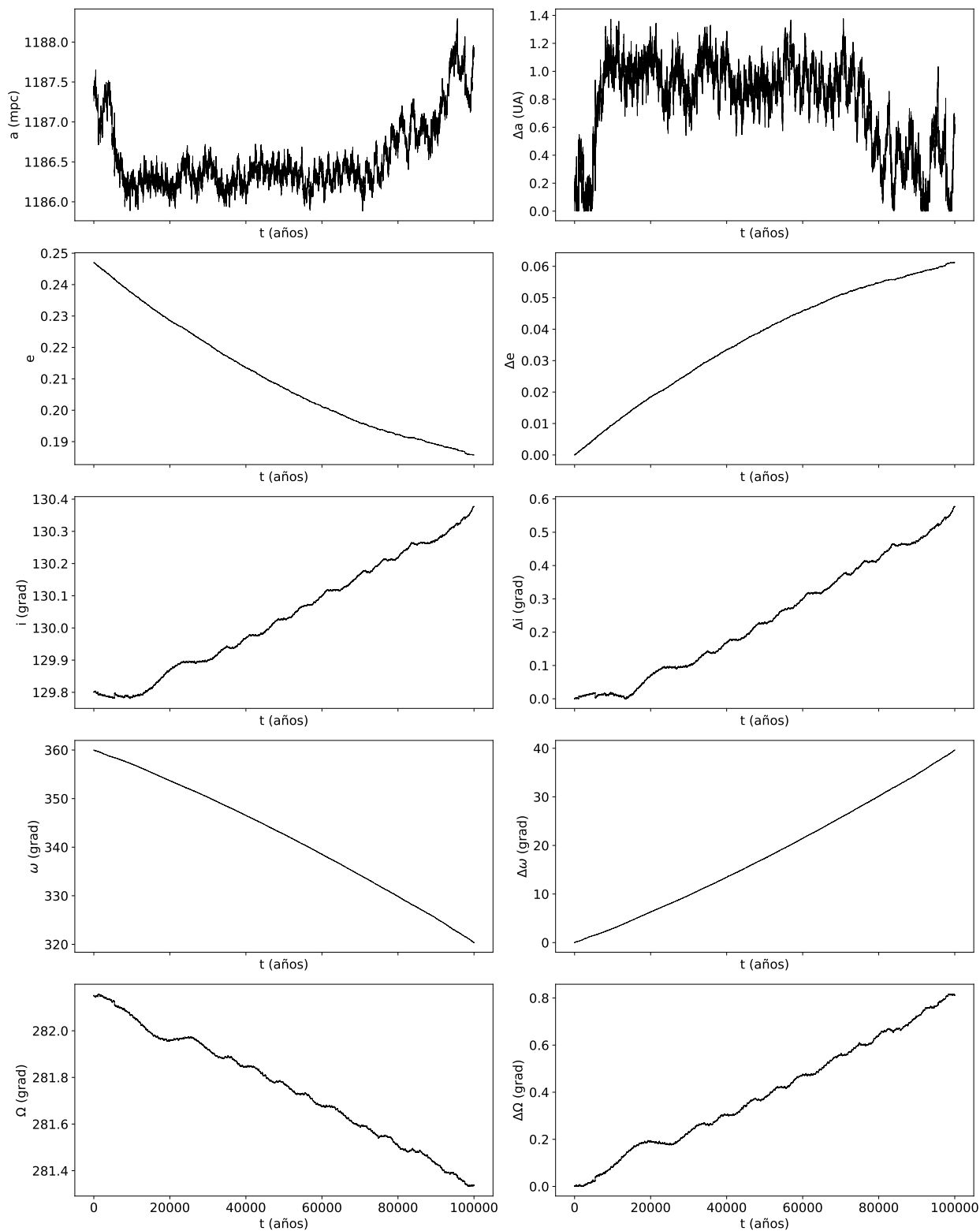


Figura 4.1.10: Perturbación en los elementos orbitales de la estrella S4715.

4.1.6. Perturbaciones de las desviaciones relativas de cada parámetro orbital

Estrella	Δa (UA)	Δe	Δi (grad)	$\Delta \omega$ (grad)	$\Delta \Omega$ (grad)
S2	5.613	0.075	1.626	13.130	7.490
S38	1.772	0.028	2.927	7.159	0.571
S55	3.168	0.068	3.420	14.560	10.120
S62	1.240	0.037	22.280	19.750	37.430
S4711	1.725	0.018	5.023	6.925	7.376
S4714	3.227	0.021	1.609	4.442	1.384
S4715	1.377	0.061	0.578	39.630	0.817

Tabla 4.1.2: Desviaciones relativas máximas en cada elemento orbital del conjunto de estrellas internas.

Estrella	Δa (UA)	Δe	Δi (grad)	$\Delta \omega$ (grad)	$\Delta \Omega$ (grad)
S2	1.760	0.037	0.746	6.654	3.907
S38	0.517	0.014	1.535	3.596	0.428
S55	0.702	0.034	1.620	6.838	4.418
S62	0.419	0.016	14.340	10.130	20.660
S4711	1.059	0.007	3.013	3.426	3.961
S4714	0.896	0.010	0.925	2.020	0.630
S4715	0.772	0.037	0.241	18.100	0.395

Tabla 4.1.3: Desviaciones relativas promedio en cada elemento orbital del conjunto de estrellas internas.

4.1.7. Determinación de la precesión del argumento sobre el pericentro debido a la relatividad general $\Delta \omega_p(\text{RG})$

Estrella	$\Delta \omega_p(\text{RG})$ (grad)	σ (grad)
S2	0.207	0.035
S38	0.116	0.028
S55	0.1125	0.0037
S62	1.30	0.54
S4711	0.014	0.021
S4714	1.8	1.3
S4715	0.0411	0.0032

Tabla 4.1.4: Desviación del argumento del pericentro para estrellas internas (el valor reportado para S2 fue el medido por [1]).

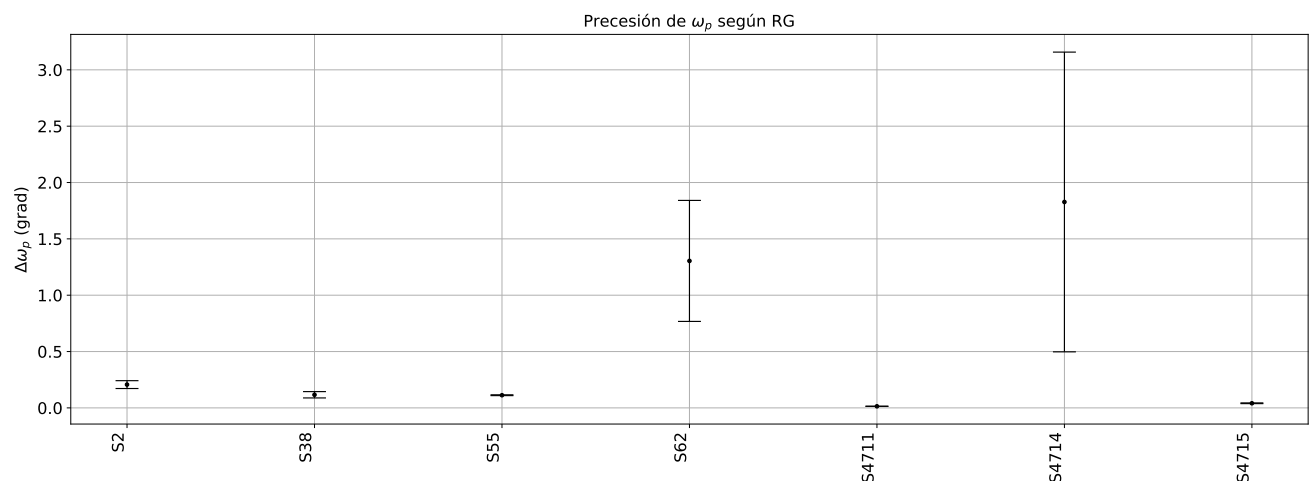


Figura 4.1.11: Gráfico de dispersión del argumento del pericentro para cada estrella de corto período.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

4.1.8. Contribución de la precesión del argumento del pericentro Newtoniana ($\Delta\omega_p(N)$) a la precesión relativista ($\Delta\omega_p(RG)$) en cada paso de la estrella por su pericentro

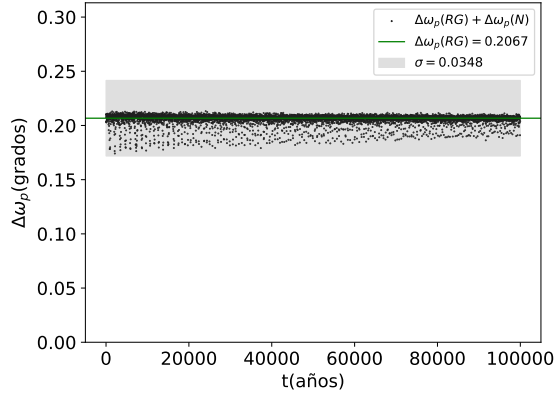


Figura 4.1.12: Contribución total a la medición de la desviación del argumento sobre el pericentro $\Delta\omega_p(RG)$ de la estrella S2.

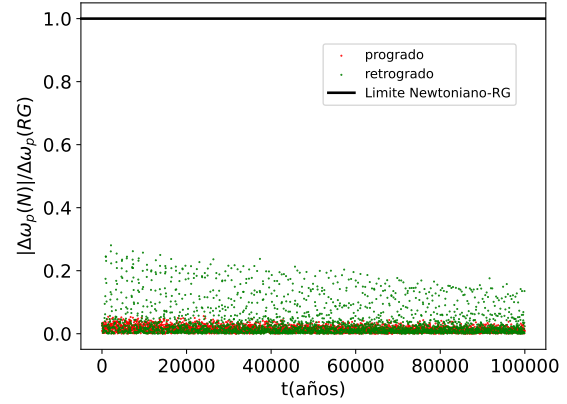


Figura 4.1.13: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S2.

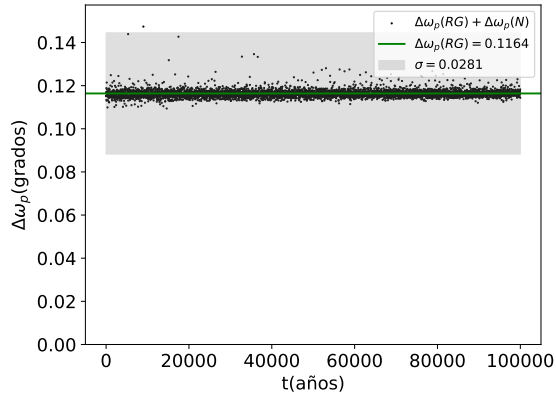


Figura 4.1.14: Contribución total a $\Delta\omega_p(RG)$ para la estrella S38.

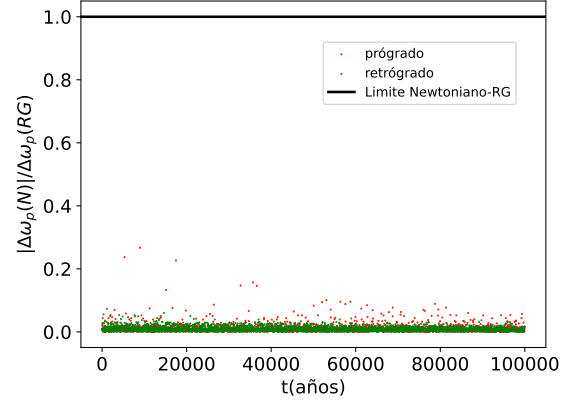


Figura 4.1.15: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S38.

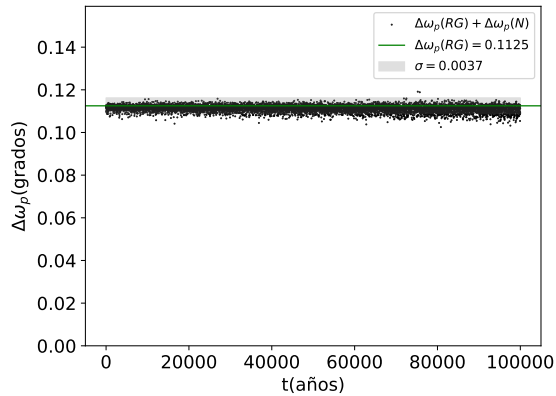


Figura 4.1.16: Contribución total a $\Delta\omega_p(RG)$ para la estrella S55.

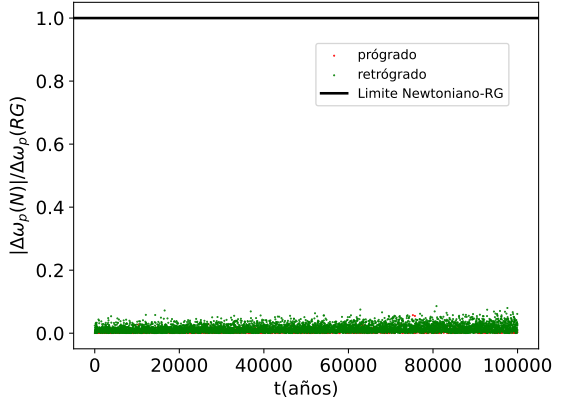


Figura 4.1.17: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S55.

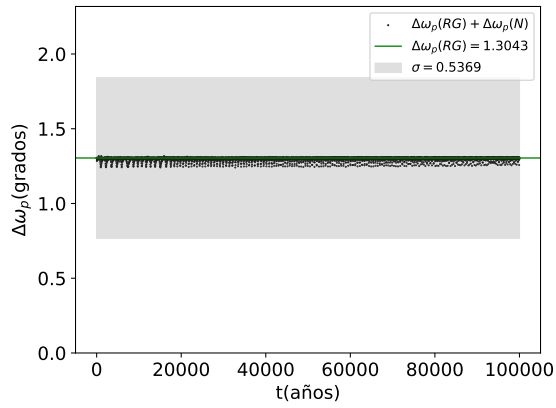


Figura 4.1.18: Contribución total $\Delta\omega_p(RG)$ para la estrella S62.

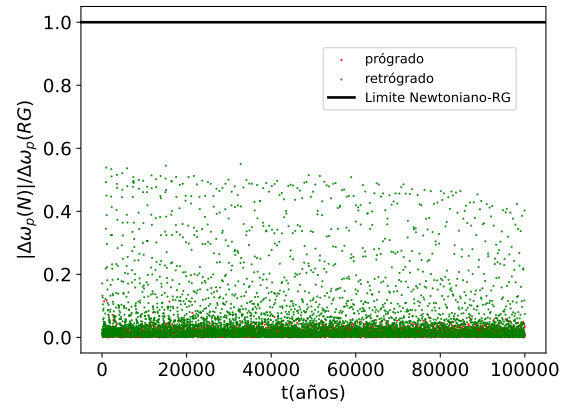


Figura 4.1.19: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S62.

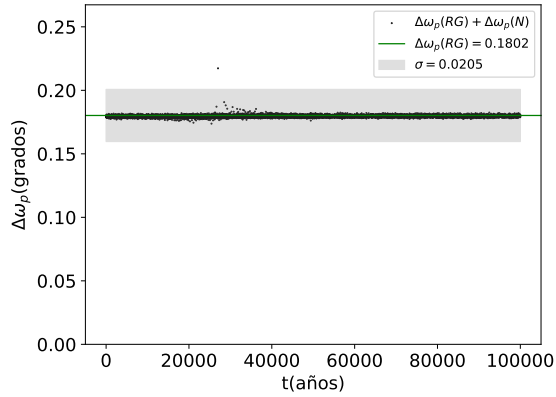


Figura 4.1.20: Contribución total $\Delta\omega_p(RG)$ para la estrella S4711.

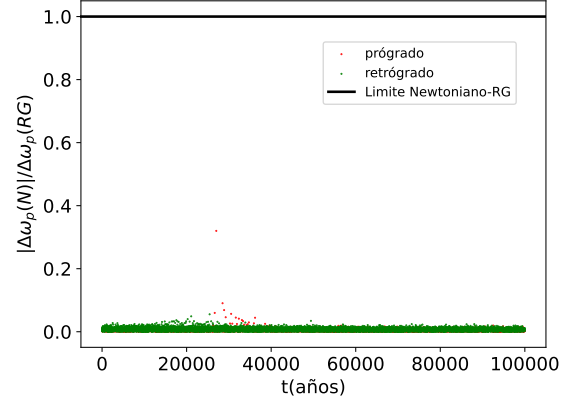


Figura 4.1.21: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S4711.

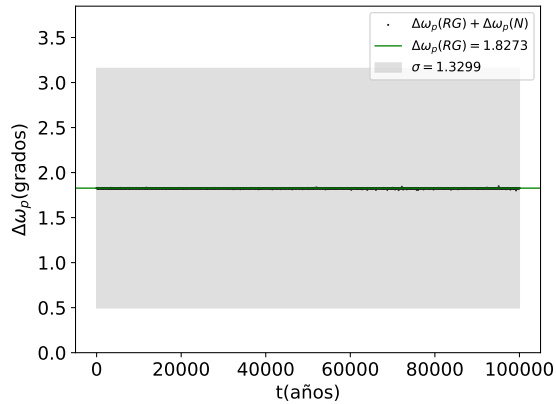


Figura 4.1.22: Contribución total $\Delta\omega_p(RG)$ para la estrella S4714.

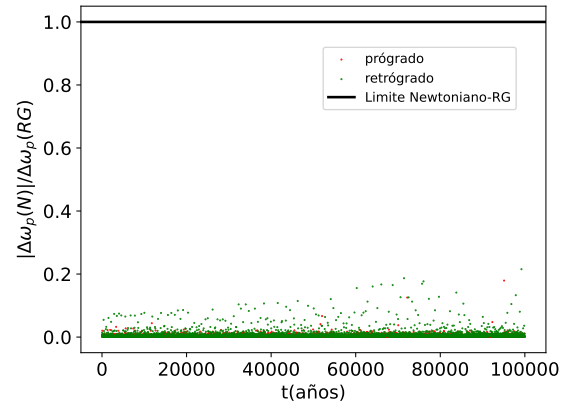


Figura 4.1.23: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S4714.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

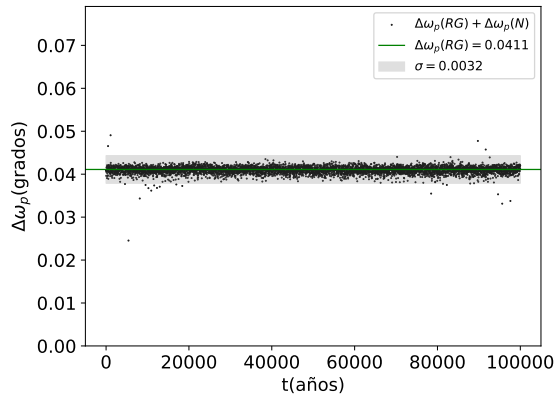


Figura 4.1.24: Contribución total $\Delta\omega_p(RG)$ para la estrella S4715.

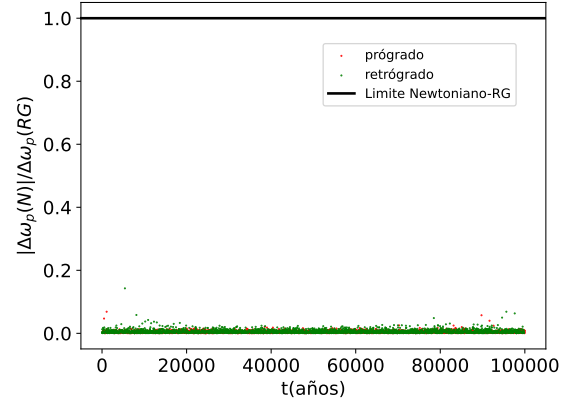


Figura 4.1.25: Comparación entre $\Delta\omega_p(RG)$ y $\Delta\omega_p(N)$ para la estrella S4715.

4.1.9. Verificación de las condiciones extremas a las cuales están sometidas las estrellas del sistema tipo S

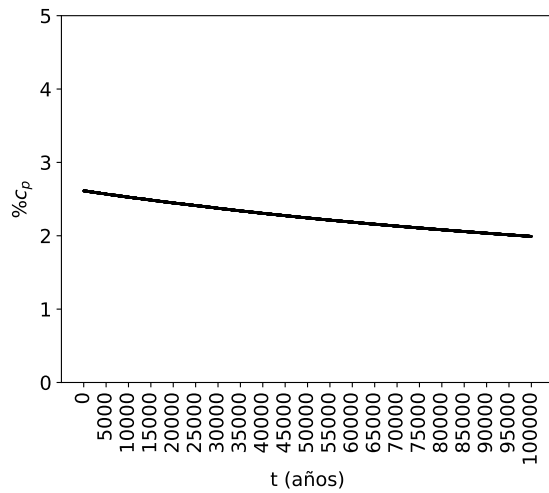


Figura 4.1.26: Rapidez de la estrella S2 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

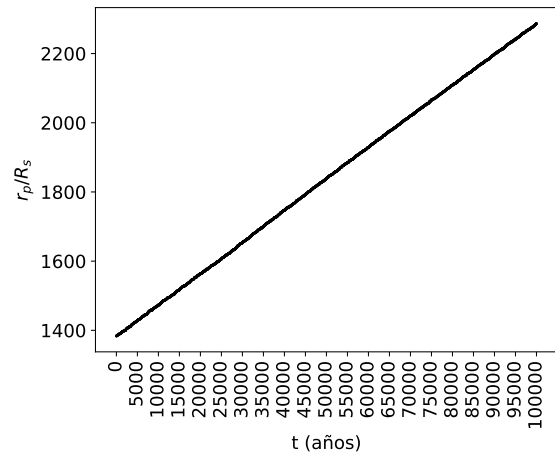


Figura 4.1.27: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S2 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

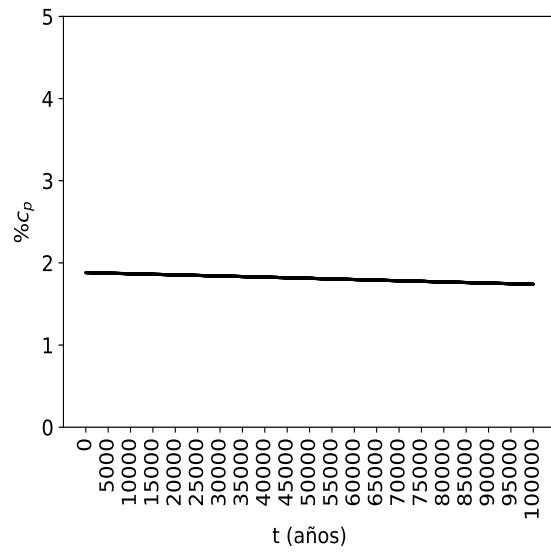


Figura 4.1.28: Rapidez de la estrella S38 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

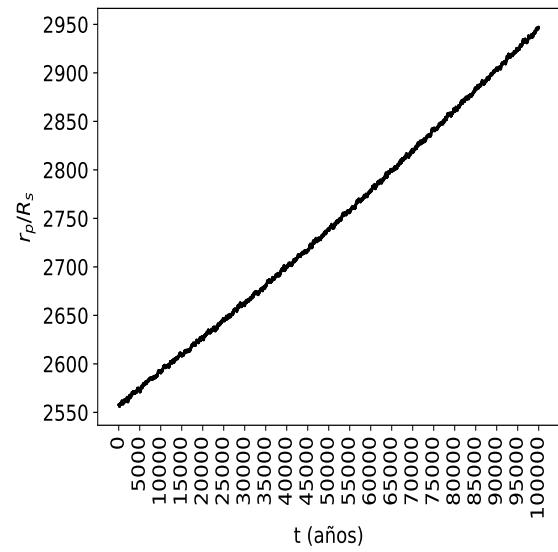


Figura 4.1.29: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S38 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

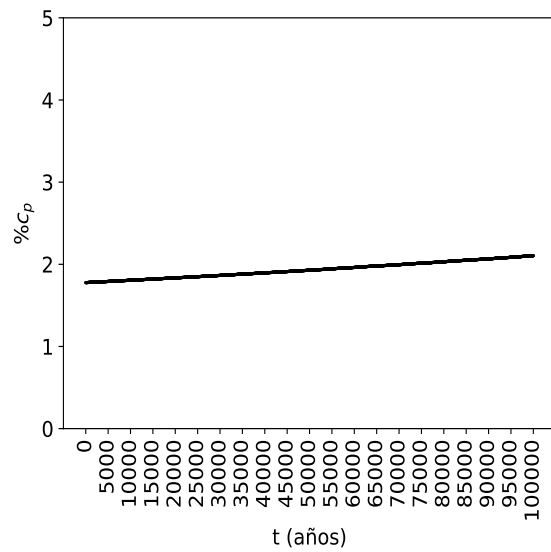


Figura 4.1.30: Rapidez de la estrella S55 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

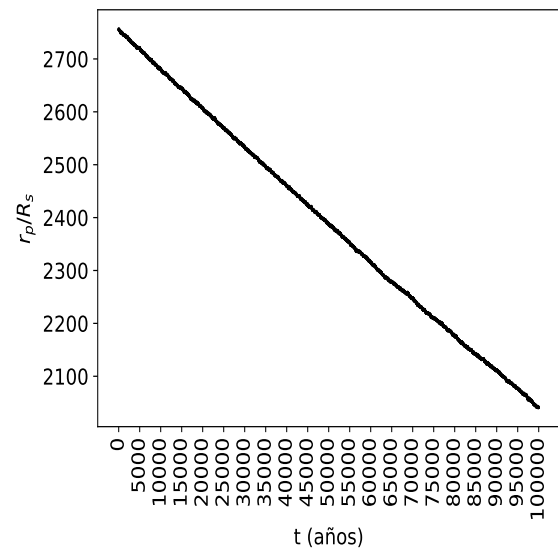


Figura 4.1.31: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S55 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

4.1. RESULTADOS GENERALES OBTENIDOS

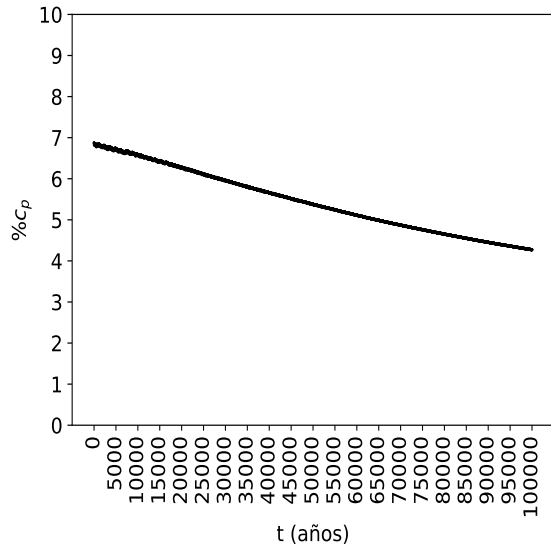


Figura 4.1.32: Rapidez de la estrella S62 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

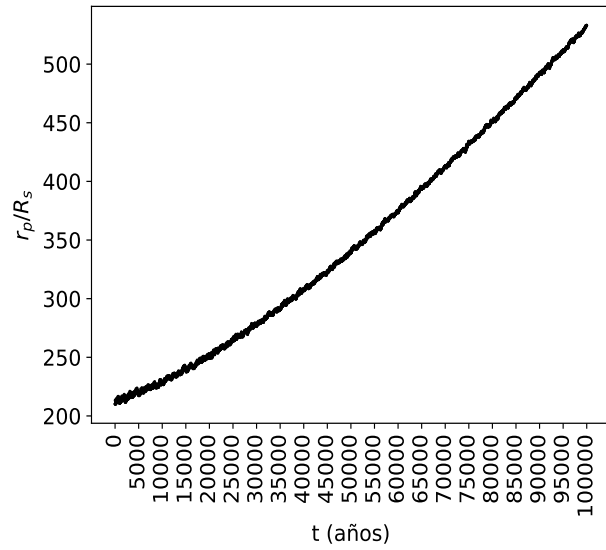


Figura 4.1.33: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S62 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

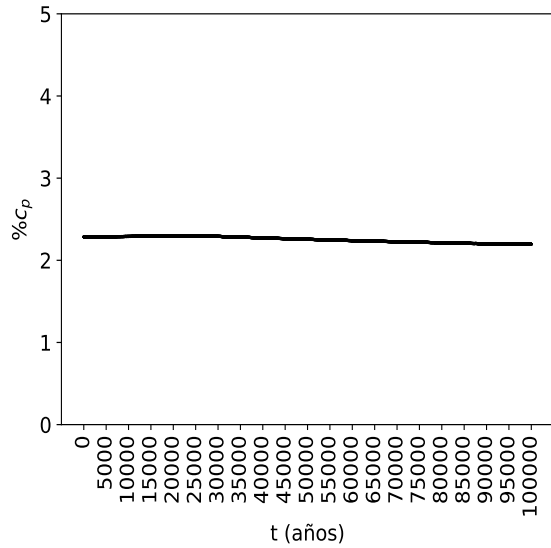


Figura 4.1.34: Rapidez de la estrella S4711 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

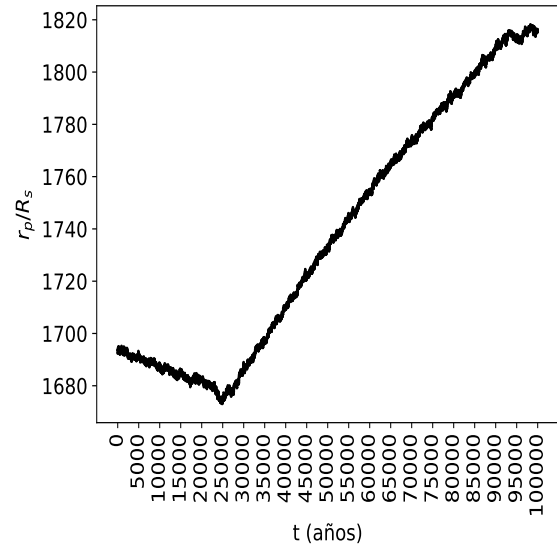


Figura 4.1.35: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S4711 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

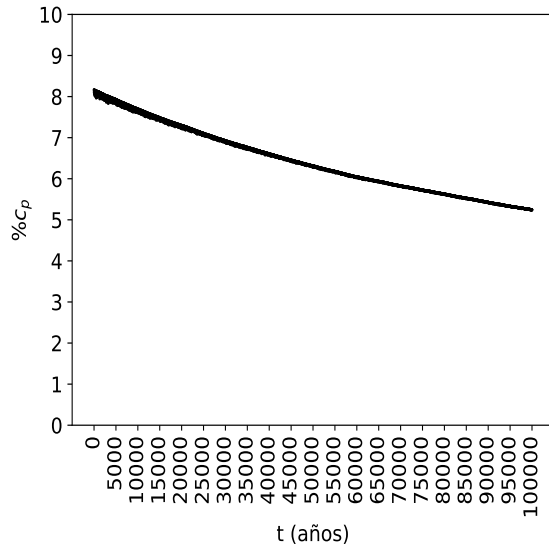


Figura 4.1.36: Rapidez de la estrella S4714 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

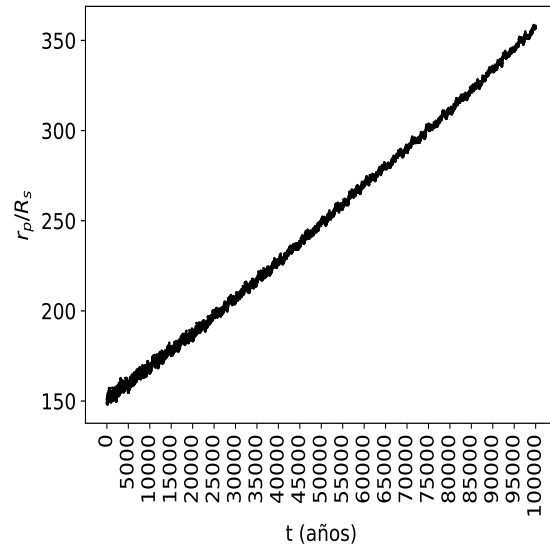


Figura 4.1.37: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S4714 y el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

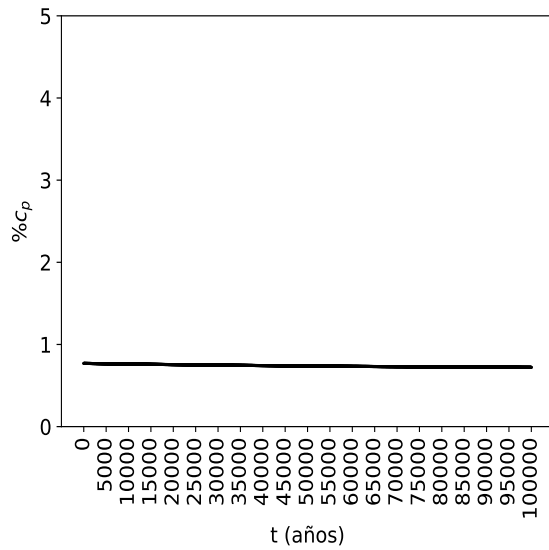


Figura 4.1.38: Rapidez de la estrella S4715 en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) durante cada paso por el pericentro.

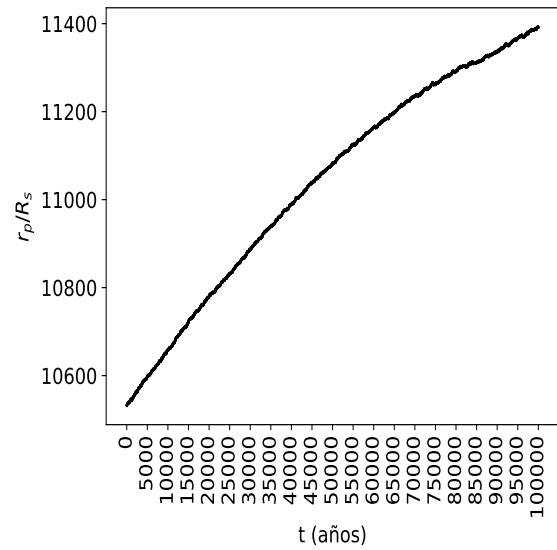


Figura 4.1.39: Comparación entre el radio de precesión de la estrella S4715 con el radio de Schwarzschild de Sgr A*.

4.2. Análisis de resultados

En esta sección del trabajo de grado se hace un estudio de los resultados obtenidos, específicamente de aquellos que arrojó el simulador de N cuerpos. El análisis se divide en dos grandes partes: por un lado, se realiza una evaluación de los resultados globales del sistema de estrellas tipo S y, por otro lado, se realiza una evaluación de los resultados de cada una de las estrellas internas.

4.2.1. Análisis general

La ejecución del programa integrador de N cuerpos se realizó considerando los parámetros orbitales de las estrellas tipo S presentadas en [6, 7], conformando un sistema global de 44 estrellas que orbitan Sgr A*. De este grupo de estrellas, se seleccionó una muestra de 7 de ellas para realizar un análisis detallado de su dinámica en términos de evolución temporal de los parámetros orbitales y distanciamiento con respecto al objeto compacto perturbador. Las estrellas tipo S seleccionadas para el análisis se caracterizan por tener un período orbital similar al período orbital de la estrella S2 (~ 16 años). A estas estrellas se les denomina *estrellas de corto período o estrellas internas del centro Galáctico*.

Cabe destacar que la fiabilidad del análisis de las estrellas de corto período está sujeta a la conservación de cantidades de movimiento del sistema global. Para este trabajo de grado se hará un análisis de la conservación de la energía total y la conservación de la magnitud del momento angular; las cuales se evalúan a través de la evolución temporal de las cantidades $\Delta E/E$ y $\Delta L/L$, tal como se indica en la figura 4.1.2.

En primer lugar, el gráfico de conservación de la energía total del sistema de estrellas (ver gráfica superior de la figura 4.1.2) se encuentra en un orden de -11 . Esta gráfica indica cambios significativos en el orden de la conservación a medida que el tiempo transcurre; en el intervalo entre 20 mil y 30 mil años ocurre el primer gran cambio en el orden de la conservación. Mientras que en un tiempo ~ 43 mil años se evidencia el cambio más fuerte en el orden de la conservación de la energía. A partir de este momento, la conservación de la energía se estabilizó hasta llegar a su valor final.

En segundo lugar, el gráfico de conservación de la magnitud del momento angular total (ver gráfica inferior de la figura 4.1.2) indica que el sistema de estrellas conservó su magnitud de momento angular en el orden de -16 . En este gráfico, destaca la presencia de picos aislados.

De acuerdo con el gráfico 4.1.3, la interacción newtoniana entre las estrellas más internas del sistema tipo S del centro Galáctico y el SMBH Sgr A* durante los cien mil años posteriores al último paso de S2 por el pericentro produjeron perturbaciones notorias en cuanto a la orientación de las órbitas de cada estrella del sistema; mientras que, en cuanto a la forma de dichas órbitas, la perturbación fue mínima.

Para el análisis de la perturbación de los elementos orbitales de las estrellas de corto período, se utilizará la siguiente convención: una fluctuación hará referencia a la medida de la estabilidad de la variación relativa respecto al valor teórico durante el tiempo de integración. Así, una fluctuación alta hará referencia a fluctuaciones evidentes en las gráficas; una fluctuación media hará referencia a fluctuaciones apenas visibles, y una fluctuación baja hará referencia a fluctuaciones no evidentes. Se tomará como desviación de la fluctuación (σ) al valor de la variación relativa obtenido al restar el valor final de la desviación del parámetro orbital del valor inicial del mismo. Una desviación alta será aquella que tenga un orden de magnitud $\sigma < 1$; una desviación media será si el orden de magnitud se encuentra en el intervalo $0 \leq \sigma \leq 1$, y una desviación baja será si el orden de magnitud $\sigma < 0$.

De acuerdo con los gráficos de evolución temporal de los parámetros orbitales (ver figuras 4.1.4, 4.1.5, 4.1.6, 4.1.7, 4.1.8, 4.1.9, 4.1.10), es posible interpretar que las variaciones relativas fueron mínimas en los primeros años de interacción, y que, con el paso del tiempo, la mayoría de las perturbaciones fueron aumentando durante todo el tiempo. Sin embargo, existen perturbaciones en algunos parámetros orbitales que aumentaron solamente hasta la mitad del tiempo de integración. A su vez, se puede notar que la desviación en el parámetro a posee una fluctuación alta, mientras que para el resto de los parámetros, las fluctuaciones, en términos generales, fueron bajas o como mucho medias. Los parámetros orbitales que más se perturban durante la interacción newtoniana entre el sistema de estrellas tipo S considerados en este trabajo de grado fueron la inclinación (i), la longitud del nodo ascendente (Ω) y

el argumento sobre el pericentro (ω), siendo este último el parámetro orbital que más se perturba. Por otra parte, el parámetro que menos se perturba es la excentricidad (e). Las perturbaciones en el semieje mayor (a) de las órbitas de las estrellas de corto período se pueden considerar intermedias.

La tabla de desviación máxima (ver tabla 4.1.2) establece cual es la estrella del sistema con la máxima perturbación en cada parámetro orbital en algún momento durante los cien mil años posteriores al último paso por el pericentro de la estrella S2. A su vez, S2 fue la estrella que experimentó la máxima perturbación en el semieje mayor del sistema, con un valor de 5.613 UA.

En la excentricidad, la estrella con mayor perturbación fue la estrella S2 con un valor de 0.075; S62 fue la estrella con la mayor perturbación en la inclinación, con un valor de 22.280 grados.

S4715 tuvo el argumento sobre el pericentro más perturbado con un valor de 39.630 grados y, finalmente, la estrella con la longitud del nodo ascendente más perturbado fue S62 con un valor de 37.430 grados.

La tabla de desviación promedio (ver tabla 4.1.3) permite identificar que estrella presenta la mayor perturbación en cada elemento orbital durante el tiempo de interacción considerado. En este sentido, la estrella S2 fue la que más perturbado tenga su semieje mayor, con un valor de 1.760 UA, mientras que S62 fue la estrella con el semieje mayor menos perturbado, con un valor de 0.419 UA.

En cuanto a la excentricidad, las mayores perturbaciones corresponden a las estrellas S2 y S4715, ambas con un valor de 0.037; mientras que, con un valor de 0.007, la menor perturbación la tuvo la estrella S4711.

La estrella S62 exhibe la mayor perturbación en su inclinación, con un valor de 14.340 grados; mientras tanto, S4715 tuvo la menor perturbación en dicho parámetro, con un valor de 0.241.

S4715 tuvo la mayor perturbación en su argumento sobre el pericentro, con un valor de 18.100 grados, mientras que S4714, con 2.020 grados, tuvo su parámetro orbital ω menos perturbado.

Finalmente, la mayor perturbación en la longitud del nodo ascendente la tuvo la estrella S62 con un valor de 20.660 grados, y la menor perturbación la tuvo la estrella S4715 con un valor de 0.395 grados.

En este punto del análisis, cabe hacer una distinción entre las cantidades ω y ω_p ; si bien ambas se refieren al elemento orbital denominado argumento sobre el pericentro, la cantidad ω hace referencia al argumento sobre el pericentro que evoluciona instantáneamente con la órbita de cada estrella alrededor de Sgr A*, mientras que el valor ω_p hace referencia al valor que toma el argumento sobre el pericentro mientras la estrella pasa por su pericentro. Es decir, el análisis de ω es de carácter global, mientras que el análisis de ω_p es particular.

En cuanto al valor de la precesión del argumento sobre el pericentro teórico $\Delta\omega_p(\text{RG})$ (ver figura 4.1.11), las estrellas con mayor desviación con respecto al valor teórico fueron las estrellas S62 y S4714; dichas desviaciones destacan por su notable diferencia con respecto a las desviaciones del resto de las estrellas de corto período.

4.2.2. Análisis específico

Estrella S2

La gráfica 4.1.3 sugiere que los cambios en la órbita de la estrella S2, debido a la interacción newtoniana de dicha estrella con los demás astros del sistema S y el SMBH Sgr A*, estuvieron asociados a modificaciones en la orientación de la órbita en los parámetros orbitales ω y Ω , mientras que los cambios en la forma de la órbita fueron menos dominantes, siendo muy bajos en el parámetro e .

De acuerdo con la figura 4.1.4, la perturbación en el parámetro a de esta estrella presentó una alta fluctuación, llegando en varias ocasiones durante los primeros 20 mil años de interacción a ser nula. En términos generales, la desviación fue media; el valor final del parámetro fue menor en comparación con el valor inicial.

La perturbación tanto en el parámetro e como en el parámetro orbital i fue pequeña; sin embargo, el comportamiento en las fluctuaciones varía. Por un lado, la fluctuación en i fue baja, mientras que el parámetro i presentó una fluctuación

4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

media durante el tiempo de interacción entre las estrellas del sistema. Las perturbaciones en estos dos parámetros se caracterizaron por ser crecientes durante todo el tiempo de interacción considerado, y en ambos casos se debió a la disminución del respectivo valor inicial. Se evidenció una ligera estabilización de la variación relativa en i entre los 20 mil y 40 mil años.

El parámetro orbital que más se perturba para esta estrella es ω ; esta desviación presentó una baja fluctuación. El crecimiento en $\Delta\omega$ fue prácticamente lineal con el tiempo. Un comportamiento similar al seguido por la perturbación del parámetro ω lo siguió el parámetro Ω , con la salvedad de que, durante los primeros 20 mil años, este último parámetro presentó una perturbación media. Estos parámetros se vieron reducidos respecto al valor de partida durante todo el tiempo de interacción.

Por otra parte, se observa que, durante el tiempo de interacción, la perturbación total sobre el parámetro ω ($\Delta\omega_p$) se encontró dentro de los límites definidos por la desviación estándar reportada por [1] (ver figura 4.1.12), con una proporción aproximadamente igual entre los puntos que superaron la medida reportada y los puntos que estuvieron por debajo de dicho valor. Por otra parte, de acuerdo con la figura 4.1.13, la interacción relativista predominó sobre la interacción newtoniana. Se pudo observar además que los puntos que correspondieron a desviaciones retrógradas se encuentran más dispersos que aquellos que correspondieron a desviaciones prógradas.

Las gráficas 4.1.26 y 4.1.27 evidencian que la estrella S2 se alejó con el paso del tiempo de Sgr A*. En primer lugar, porque su rapidez en cada paso por el pericentro 4.1.26 disminuyó continuamente y, en segundo lugar, el radio de precesión, en términos del radio de Schwarzschild de Sgr A*, aumentó de manera uniforme con el paso del tiempo. Este desplazamiento es violento porque se evidencia una disminución de 0.005c durante todo el tiempo de interacción.

Estrella S38

La gráfica 4.1.3 sugiere que la estrella S38 modificó medianamente la orientación de su órbita en parámetros como i u ω . Estos efectos fueron producidos gracias a la interacción newtoniana con el resto de los cuerpos involucrados en la simulación. En tanto que la forma de la órbita no se vio fuertemente modificada con respecto al valor inicial, ya que la perturbación en a fue del orden de décimas de UA y la perturbación en e fue aún más baja.

Teniendo en cuenta la gráfica 4.1.5, es posible observar que la perturbación en el semieje mayor de la órbita posee una alta fluctuación; sin embargo, la desviación en dicha perturbación es baja ~ 2 UA. El valor del semieje mayor inicial es mayor que el valor que toma dicho parámetro al final del tiempo de interacción.

Las perturbaciones en los parámetros e e i fueron estrictamente crecientes durante el tiempo de interacción entre las estrellas; las fluctuaciones son bajas. No obstante, la fluctuación en la excentricidad fue baja, mientras que la fluctuación en la inclinación fue media en relación con el valor teórico elegido en los artículos de referencia. En ambos parámetros, los valores finales fueron mayores que los valores iniciales.

La perturbación en el parámetro ω posee una fluctuación baja, fue estrictamente creciente durante todo el tiempo y se debió a una disminución con respecto al valor inicial. La desviación en el argumento sobre el pericentro fue media.

El comportamiento de la perturbación en la longitud del nodo ascendente es un tanto particular; posee una fluctuación media y alcanzó su valor máximo debido a una disminución a los 70 mil años. A partir de este tiempo, la desviación disminuyó con una fluctuación baja debido a que experimentó una ligera alza en el tiempo restante.

Se observa que, en general, la contribución total al valor $\Delta\omega_p(\text{RG})$ se encontró dentro del valor de desviación estándar propuesto por la relatividad general (ver figura 4.1.14); aunque existen algunos puntos que están fuera de este intervalo, estos no son representativos dentro de la muestra total, incluso podrían considerarse puntos aislados. Ahora bien, existe una superioridad en la cantidad de puntos por debajo de la medida que predice la relatividad general; de aquí que en la figura 4.1.15 sean más evidentes los puntos correspondientes a desviaciones retrógradas y más significativos al valor relativista. A su vez, este último gráfico sugiere que la desviación de este parámetro se debió exclusivamente a efectos relativistas.

A través de las gráficas 4.1.28 y 4.1.29 se puede observar que la estrella S38 se alejó del SMBH Sgr A*. Sin embargo, este desplazamiento fue paulatino y con una fluctuación media, puesto que la disminución en la rapidez de la estrella es relativamente baja.

Estrella S55

De acuerdo con la figura 4.1.3, la modificación más fuerte que pueda sufrir la órbita de la estrella S55 estuvo relacionada con la orientación de la misma en los parámetros orbitales ω y Ω . Mientras que la forma de la órbita de la estrella previamente mencionada no se vio fuertemente alterada tanto en el parámetro a como en el parámetro e .

Considerando 4.1.6, se puede ver que el semieje mayor de la órbita de la estrella S55 presentó una alta fluctuación con tendencia a aumentar su valor en comparación con el valor teórico a partir de la segunda mitad del tiempo de integración; la desviación de este parámetro orbital fue media.

La perturbación en la excentricidad tuvo una fluctuación baja y el valor con el que terminó, según las simulaciones efectuadas; fue mayor en comparación con el valor inicial; la desviación en la perturbación de este elemento orbital fue baja.

La perturbación en la inclinación de la órbita de la estrella S55 presentó una fluctuación baja y su valor aumentó durante cada momento de la interacción; la desviación de este parámetro fue media.

Las perturbaciones en los parámetros ω y Ω siguen un comportamiento similar, de manera que ambos parámetros tomaron valores inferiores a los valores de partida. Las desviaciones presentan fluctuaciones bajas y fueron elevadas.

Haciendo un análisis más exhaustivo del parámetro ω_p , se considera la figura 4.1.16; en ella se observa que la cantidad de puntos correspondientes a la contribución total de la desviación del argumento sobre el pericentro se encuentra por debajo de la predicción realizada por la relatividad general. Incluso, muchos de estos puntos se encuentran fuera del margen definido por la desviación predicha por dicha teoría. La figura 4.1.17 evidencia que la perturbación en el parámetro ω_p se debió en gran medida a efectos relativistas. Debido al bajo margen establecido por el valor de σ , se puede decir que todos los puntos de precesión contribuyen a la medición relativista.

La gráfica 4.1.31 evidencia que la estrella S55 se está aproximando a Sgr A*. Por lo tanto, se espera que los efectos relativistas que pueda causar el SMBH sean más fuertes con el paso del tiempo. Uno de estos efectos es el aumento de la rapidez de la estrella luego de cada paso por el pericentro, como se puede evidenciar en la figura 4.1.30. Este aumento será paulatino, y con una fluctuación media, ya que varía en un porcentaje bajo de la rapidez de la luz en el vacío ($\sim 0.3\%$).

Estrella S62

Considerando la gráfica de la figura 4.1.3 la órbita de la estrella S62 se vio altamente afectada en todos los parámetros orbitales relacionados su orientación, específicamente en los valores de ω y Ω , los cuales son los parámetros más perturbados para cualquier estrella del sistema de corto período. Los parámetros orbitales asociados a la forma de la órbita se perturbaron poco.

Tomando en consideración la figura 4.1.7, se puede observar la evolución temporal de los parámetros orbitales de la estrella S62 al interactuar con el sistema de estrellas tipo S y el SMBH Sgr A*, considerando únicamente efectos newtonianos. Del comportamiento de los elementos orbitales, cabe destacar el comportamiento que describe el semieje mayor de la órbita, puesto que presentó una alta fluctuación y los demás parámetros no fluctuaron de manera similar. Durante los primeros 20 mil años y los últimos 20 mil años, la perturbación fue nula; mientras que, en el tiempo correspondiente a la mitad del tiempo de interacción, la perturbación alcanzó su valor máximo. El valor final del parámetro fue ligeramente superior al valor inicial.

La excentricidad de la órbita se redujo de manera relativamente uniforme durante mucho tiempo; en algunos pasajes, esta disminución se estabilizó con una baja fluctuación. La desviación de este parámetro fue pequeña y el valor final del parámetro orbital e fue menor que el valor inicial.

La inclinación de la órbita presentó una fluctuación baja durante todo el tiempo en consideración. Durante la primera mitad de este período, el parámetro i decayó de manera paulatina; luego de este tiempo, el descenso se acrecentó más. La desviación en la perturbación fue alta.

4.2. ANÁLISIS DE RESULTADOS

El argumento sobre el pericentro de la estrella S62 aumentó su valor durante todo el tiempo de interacción previamente mencionado; la fluctuación que presentó fue baja durante los primeros 50 mil años; una vez superado este tiempo, el crecimiento en el valor del parámetro se hizo más notorio.

La longitud del nodo ascendente de la estrella S62 exhibió una baja fluctuación y una disminución uniforme durante el tiempo de interacción, la fluctuación en este parámetro fue alta ~ 20 grados.

De acuerdo con la figura 4.1.18, todos los puntos de perturbación total sobre el argumento del pericentro se encuentran dentro de la incertidumbre predicha por la relatividad general. La cantidad de puntos que está por debajo del valor nominal es aproximadamente el doble en comparación con los puntos que superan dicho umbral. La mayoría de estos puntos se encuentran más dispersos con respecto al valor predicho por la relatividad general. En la figura 4.1.19 se puede ver que, en la mayoría de los pasos por el pericentro, la perturbación newtoniana podría reducir la medición relativista en un grado considerable.

La leve dominación de los efectos relativistas sobre los newtonianos se evidencia en los gráficos 4.1.32 y 4.1.33. Por una parte, gracias a la disminución abrupta de la rapidez de la estrella tras el paso por el pericentro ($\sim 0.03c$), durante los primeros 20 mil años de interacción, la rapidez presentó una fluctuación media; luego de este tiempo, la disminución se estabilizó; además, es en este período de tiempo donde el pericentro de la estrella S62 se alejó más del horizonte de sucesos del SMBH Sgr A*, proceso que continuó con una fluctuación baja hasta el final del tiempo de interacción.

Estrella S4711

De acuerdo con la figura 4.1.3, la deformación en la órbita de la estrella S4711 alrededor de Sgr A* no será tan abrupta; los principales cambios están relacionados con perturbaciones de los parámetros i , ω y Ω . La perturbación en el parámetro orbital a se puede considerar media o baja, mientras que la perturbación en el parámetro e es baja; de aquí que la órbita no se vea tan perturbada en su forma.

La figura 4.1.8 indica como se perturban los elementos orbitales de la estrella S4711. Así, la perturbación en el semieje mayor de la órbita presenta una alta fluctuación y una desviación media durante todo el tiempo de interacción considerado. Durante los primeros diez mil años, el parámetro a se perturba a un orden muy bajo ~ 0.5 UA. Pasado este tiempo, se presenta una discontinuidad considerable, y es en este punto donde disminuye considerablemente el valor de a terminando con un valor final respecto al inicial.

En el parámetro e se observa, en general, una desviación baja en la perturbación y una fluctuación baja. Durante los primeros treinta mil años, la perturbación se debe a un aumento en la excentricidad de la órbita; posteriormente, este parámetro decae sostenidamente de tal manera que el valor final de e es menor que el valor inicial.

La inclinación de la órbita de la estrella S4711 aumenta en todo momento respecto al valor inicial; en los primeros treinta mil años, este crecimiento es mayor; después de este tiempo, se reduce un poco la velocidad con la que aumenta el valor del parámetro i . Se evidencia que la inclinación presenta una fluctuación baja y la desviación de la perturbación es media.

El comportamiento de la perturbación en los parámetros ω y Ω es similar, puesto que en todo momento el valor de ambos disminuye respecto a sus valores iniciales y lo hacen con baja fluctuación; por otra parte, las respectivas perturbaciones poseen una desviación media.

Las figuras 4.1.20 y 4.1.21 permiten establecer si, para la estrella S4711, la perturbación en el parámetro ω_p reportada anteriormente modifica el valor predicho por la relatividad general. Analizando la figura 4.1.20, se puede observar que la gran mayoría de los puntos correspondientes a la contribución total están cercanos al valor predicho por la relatividad general, con algunos puntos que superan la incertidumbre predicha por dicha teoría. Al mismo tiempo, la proporción entre puntos inferiores es superior, por un gran margen, a los puntos que superan la línea correspondiente al valor nominal. La gráfica 4.1.21 permite identificar que la perturbación en el parámetro ω en esta estrella se debe exclusivamente a efectos relativistas, debido a que la mayoría de los puntos se encuentran entre 0 y 0.1; de manera que la disminución en la medida en que pueden efectuar las interacciones newtonianas es mínima.

La gráfica 4.1.34 evidencia que la rapidez de la estrella S4711 en cada paso por el pericentro aumenta en los primeros veinticinco mil años de interacción; transcurrido este tiempo, la rapidez disminuye paulatinamente hasta llegar a un valor inferior al inicial. La gráfica 4.1.35 indica que en los primeros años el pericentro de la estrella S4711 se acerca al radio de Schwarzschild de Sgr A*, este acercamiento es de carácter fluctuante por cada aproximación. Pasados los primeros años, la estrella S4711 se empieza a alejar del horizonte de sucesos de manera continua y fluctuante.

Estrella S4714

De acuerdo con la figura 4.1.3, la órbita de la estrella S4714 fue modificada en su orientación luego de 100000 años de interacción newtoniana con las demás estrellas tipo S y el SMBH Sgr A*, principalmente en el parámetro ω , donde la perturbación fue media; mientras que en el resto de los parámetros la perturbación fue baja. La estrella S4714 fue la que menos perturbaciones sufrirá en comparación con el resto de las estrellas de corto período.

Considerando la figura 4.1.9, es posible observar que el parámetro a destaca sobre el resto de los parámetros orbitales debido a la alta fluctuación que presentó.

Durante los primeros 60 mil años, el valor de a tiende a crecer; es de notar que en algunos intervalos de tiempo la perturbación se anuló; a partir de este momento, se nota un decrecimiento hasta los casi 80 mil años, y en los últimos 20 mil años, el valor de a retomó el decrecimiento. La desviación en este parámetro orbital fue media.

La excentricidad de la órbita de la estrella S4714 decreció en todo momento con una baja fluctuación y de manera uniforme. La desviación en la perturbación fue baja.

La inclinación de la órbita decreció continuamente en los primeros 40 mil años de manera paulatina y con una fluctuación media. Luego de este tiempo, empezó un crecimiento en el parámetro i hasta el tiempo final de interacción. La fluctuación en este parámetro fue baja.

El parámetro orbital ω de la estrella S4714 decreció en todo momento de la interacción; lo hizo con una baja fluctuación y la desviación de dicho parámetro fue media.

La evolución temporal del parámetro Ω fue estrictamente decreciente; entre los 50 mil y los 70 mil años, esta disminución se estabilizó. La fluctuación del parámetro fue baja y la perturbación tuvo una desviación media.

Para enfatizar el comportamiento de la perturbación del argumento sobre el pericentro ω_p , luego de cada paso de la estrella S4714 por su pericentro, se utiliza la gráfica 4.1.22. En este gráfico se puede observar que los puntos correspondientes a la contribución total están muy próximos al valor nominal predicho por la relatividad general, y la totalidad de ellos se encuentran dentro de la desviación definida por dicha teoría. La relación entre la cantidad de puntos que superan el valor nominal es ligeramente superior a la cantidad de puntos que están por debajo de dicho valor teórico. De acuerdo con la gráfica 4.1.23, la contribución relativista de la desviación del argumento relativista fue mayor que la contribución newtoniana; los valores más altos de este último tipo correspondieron a desviaciones retrógradas.

La gráfica 4.1.36 indica una disminución abrupta de la rapidez de la estrella S4714 cada vez que pasa por el pericentro; esta disminución está caracterizada por la presencia de una alta fluctuación. A su vez, la gráfica 4.1.37 indica que la estrella S4714 se aleja de manera constante del horizonte de sucesos de Sgr A*; este alejamiento también presenta una fluctuación alta.

Estrella S4715

Considerando la órbita presentada en la gráfica de la figura 4.1.3, en la cual se indica la evolución temporal de la órbita de la estrella S4715 cuando el astro interactúa, debido a efectos newtonianos, con Sgr A* y las otras estrellas tipo S presentadas en [6, 7]. En ella se observa que la órbita estuvo predominantemente modificada en cuanto a su orientación, especialmente en el parámetro orbital ω . Por el contrario, las modificaciones en la forma de la órbita no predominan mucho, especialmente en el parámetro orbital e , donde la modificación fue del orden -3.

4.3. DISCUSIÓN

De acuerdo con la figura 4.1.10, el semieje mayor fue el parámetro con la fluctuación más alta del conjunto de parámetros de la estrella S4715. En los primeros años de evolución temporal, la desviación del valor del parámetro a se anuló; transcurrido este tiempo, se evidenció una disminución abrupta en dicho valor. Dicha disminución se prolongó con el tiempo hasta prácticamente los últimos 10 mil años de interacción. La desviación del semieje mayor fue baja.

La excentricidad de la órbita disminuyó con el paso del tiempo de manera sostenida; presentó una baja fluctuación y, finalmente, la desviación en este parámetro fue baja.

La perturbación en la inclinación de la órbita de la estrella S4715 aumentó con una fluctuación media a lo largo del tiempo de interacción. La desviación en el parámetro i fue baja.

El parámetro ω decrece en todo momento durante los 100000 años de interacción entre las estrellas tipo S; la desviación que presentó fue baja y la desviación del parámetro con respecto al valor inicial fue alta.

El parámetro Ω presentó, en general, una perturbación media. En los primeros años ($\sim$ veinte mil años), la tasa de decrecimiento aumentó considerablemente. Una vez superado este tiempo, decreció de manera más pausada el tiempo restante. La desviación del nodo ascendente fue baja.

A partir de los gráficos 4.1.24 y 4.1.25 es posible realizar un análisis más detallado de la desviación del parámetro ω_p . Así, de acuerdo con la figura 4.1.24, la mayoría de los puntos que correspondieron a la contribución total de la desviación de ω en su paso por el pericentro se encontraron dentro de la desviación predicha por la teoría de la relatividad general; de los cuales, una muestra aislada de estos puntos está fuera de dicho margen. En cuanto a la distribución de puntos con respecto al valor nominal, se puede decir que existe la misma cantidad de puntos que superan el umbral y de puntos que están por debajo de dicho límite. Los efectos relativistas en la desviación del parámetro ω fueron superiores a la contribución newtoniana.

La gráfica 4.1.38 evidencia que la rapidez de la estrella S4715 disminuyó de manera uniforme después de cada paso por el pericentro, con una fluctuación baja. Mientras que la gráfica 4.1.39 indica que el pericentro de la estrella se alejó uniformemente del horizonte de sucesos de Sgr A*.

4.3. Discusión

En esta sección del trabajo de grado se discute el análisis de resultados realizado. La discusión busca principalmente asociar los resultados numéricos a fenómenos físicos. Para este trabajo de grado, se presentan los resultados obtenidos al resolver un problema de N cuerpos en el entorno de REBOUND, el cual está escrito en lenguaje C, para solucionar las EDOs correspondientes se usó el integrador de paso variable IAS 15. REBOUND tiene integrado tanto el sistema de EDOs a resolver como integradores numéricos que pueden ser simplécticos, como WHfast, o no simplécticos, como el propio IAS 15.

La elección de REBOUND y del integrador IAS 15 no fue arbitraria, de manera que el código de N cuerpos no se puede considerar un *sistema de funcionamiento interno no observable*, ya que previamente se han desarrollado códigos de N cuerpos en lenguajes como FORTRAN o Python, en los cuales se ha escrito de manera explícita el sistema de ecuaciones a resolver. De igual manera, en esos códigos se probaron diferentes integradores numéricos, tales como el integrador Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) o el integrador Runge-Kutta-Fehlberg de orden 7 y 8 (RKF78).

La decisión de elegir REBOUND en C sobre las otras alternativas previamente mencionadas se basó en obtener un código con una estructura simplificada; mientras que la elección del integrador IAS 15 se hizo con el fin de reducir el tiempo de cómputo y mejorar el orden de la conservación de la energía total del sistema y de la conservación de la magnitud del momento angular del sistema. En cuanto a los tiempos de cómputo, se realizaron simulaciones de corto período (5 mil años) y de largo período (100 mil años). En las simulaciones de corto período, los integradores son eficientes en términos de tiempo de ejecución; sin embargo, en las simulaciones de largo período, el integrador IAS 15 se destacó sobre el resto de los integradores numéricos. En tanto que en el orden de la conservación de las cantidades de movimiento, tanto los integradores RK4 y RKF78 conservan muy bien la energía al orden de precisión de máquina (-16), mientras que el integrador IAS 15 lo hace al orden -11 en la energía y -16 en la magnitud del momento angular,

tal como se evidencia en la figura 4.1.2; en contraposición, el integrador WHfast conservó mal ambas cantidades de movimiento. La principal causa del retraso en el tiempo de cómputo y variaciones en el orden de magnitud de las conservaciones podría ser consecuencia de la alta excentricidad de las estrellas tipo S y la frecuencia con la que se presentan encuentros cercanos entre ellas [33].

La gráfica de conservación de la energía total del sistema (ver la primera gráfica de la figura 4.1.2), ilustra con más detalle la evolución temporal de la conservación de la energía total del sistema. Si bien el orden en el que se conserva la cantidad de movimiento mencionada es aceptado en el contexto del análisis de problemas de N cuerpos, la gráfica en sí requiere una discusión a fondo debido a la alta presencia de discontinuidades.

Desde el punto de vista matemático, al ser el integrador de paso variable, se espera que, en algunos momentos del proceso de integración, se acumule más error de truncamiento en algunos instantes específicos de tiempo; sin embargo, no se espera que la acumulación sea tan marcada como se observa en el gráfico. Ahora bien, es necesario preguntarse como trabajo futuro si dichas discontinuidades tan marcadas están asociadas a procesos físicos o a procesos matemáticos, como se sugiere en [42].

En tanto que el gráfico de conservación de la magnitud del momento angular (ver la segunda gráfica de la figura 4.1.2) alcanza el orden de conservación más bajo que se puede lograr en el contexto de la resolución de un problema de N cuerpos. La coloración negra en la misma corresponde a la superposición de puntos, mientras que los picos aislados corresponden a errores aleatorios.

La diferencia marcada entre los ordenes de magnitud de la energía total y la magnitud del momento angular del sistema puede deberse a ruido numérico, puesto que mediante el cálculo de estas dos conservaciones no se garantiza la presencia o ausencia de este tipo de ruido. Esto se deja como sugerencia adicional para trabajos futuros.

Se hace énfasis en la conservación de la energía total y la magnitud del momento angular, ya que con la energía total se garantiza el tipo de órbita. En este caso, todas las órbitas de las estrellas de corto período son elípticas y se mantienen así a lo largo del tiempo de interacción, como se observa en la figura 4.1.3. Con la conservación de la magnitud del momento angular se asegura que el sistema no puede perder ni ganar momento angular globalmente en módulo. No es estrictamente necesario calcular la conservación de la dirección del vector momento angular del sistema porque se trata de un sistema donde sólo se consideran interacciones newtonianas y la masa del SMBH predomina sobre la masa de las demás estrellas; por lo tanto, el vector $\vec{L}$ no debería rotar significativamente, de manera que se garantiza que se conserve de alguna manera la orientación de la órbita en parámetros orbitales como i y Ω .

Podría pensarse que disminuir la tolerancia del integrador podría mejorar el orden con el que se conserva la energía total del sistema sin embargo, hacer esto conlleva a un mayor gasto computacional que no asegura del todo dicha disminución ya que la conservación de la magnitud del momento angular está al orden mínimo. De manera que se descarta totalmente la posibilidad mencionada.

El análisis de la dinámica orbital de las estrellas tipo S cuyos parámetros se reportan en [6, 7] se restringe a las estrellas más internas debido a su corto período orbital y al precedente que sentó para la física la verificación de efectos relativistas a través del reporte de la medición de la desviación del parámetro orbital ω luego de que la estrella S2 pasó por su pericentro, el cual fue realizado por [1]. Adicionalmente, en [6] se recomienda analizar, mediante observación, el comportamiento de estrellas internas como S62 y S4711, en el sentido de que estas estrellas también pueden servir como objetos de prueba de la relatividad general, como lo fue S2.

En cuanto a las gráficas de perturbación de los elementos orbitales, el comportamiento con alta fluctuación del parámetro a arrojado por las simulaciones realizadas se asocia con intercambios espontáneos de la energía de enlace de cada una de las estrellas con el SMBH, debido a la interacción entre estrellas, lo cual implica un intercambio sistemático de la energía total del sistema.

Así, la disminución a experimentada por las estrellas S2, S4711 y S4714 implica un aumento en la energía de enlace orbital. En contraposición, las estrellas S38, S55, S62 y S4715; las cuales, de acuerdo con las simulaciones realizadas, verán aumentar el valor del parámetro orbital, a lo que conlleva a una pérdida en la energía de enlace orbital de cada una de ellas.

En tanto que los cambios pequeños y con baja fluctuación que, en general, siguen las estrellas de corto período en el parámetro e están asociados al balance en el cambio de energía y el cambio de momento angular que se produce

4.3. DISCUSIÓN

en la estrella. De aquí se espera que la órbita elíptica de las estrellas se mantenga, tal como se evidencia en 4.1.3 y, además, que exista poca transferencia neta de energía y momento angular entre cada una de las estrellas. Así, las estrellas S38, S62 y S4715 compensan, de alguna manera, la ganancia de energía de enlace orbital con la pérdida de momento angular. En cambio, la estrella S55 se comporta de manera opuesta, de modo que pierde energía de enlace orbital y gana momento angular.

Por lo cual, las estrellas S2, S4714 y S4711; al ganar energía de enlace orbital y momento angular, exhiben un intercambio independiente de energía de enlace y momento angular, el cual se evidencia claramente en la evolución temporal de la excentricidad de la estrella S4711.

Ahora, la variación en los parámetros ω y Ω está asociada a cambios en la dirección del vector excentricidad, mientras que las variaciones en el parámetro i están asociadas a cambios en la dirección del vector momento angular. De acuerdo con las simulaciones, se presentan 2 combinaciones en cuanto al comportamiento de los parámetros de las estrellas y un comportamiento particular, distinto de los presentados anteriormente. Por un lado, se presenta el caso en el cual los 3 parámetros orbitales disminuyen; este comportamiento lo exhiben las estrellas S2, S38 y S4715. El otro comportamiento consiste en el aumento del parámetro orbital i y la disminución tanto de ω como de Ω ; este patrón lo describen las estrellas S55, S4711 y S4714. Finalmente, la estrella S62 muestra un comportamiento particular, puesto que aumentan tanto i como Ω , mientras que ω disminuye. A continuación, se discute acerca de una interpretación física de cada uno de estos fenómenos.

Para el primer caso, en el cual disminuyen i , ω y Ω , se puede afirmar que existe una rotación en el plano orbital y, a su vez, que la misma elipse que determina la órbita gira dentro del plano. Lo cual implica un cambio coherente en la órbita. En cuanto al segundo caso, se puede detectar un cambio en la dirección del momento angular, mientras que el plano orbital, además de rotar, se inclina de forma diferente, indicando una interacción más compleja. Por último, en el caso particular se nota un desacople debido a que el plano orbital y la orientación de la órbita van en sentido opuesto, lo cual implica una rotación opuesta en el vector excentricidad y el vector momento angular.

Los comportamientos que describen las perturbaciones en los elementos orbitales de cada una de las estrellas internas tipo S podrían ser análogos a resonancias celestes, debido a que las órbitas de cuerpos celestes que presentan alta excentricidad suelen estar en resonancia y, como se evidencia en las simulaciones, las excentricidades de las estrellas tipo S más internas se mantienen con un valor alto.

En este punto, se puede decir que, en general, las órbitas de las estrellas tipo S internas tienden a rotar antes que a inclinarse con respecto al plano de referencia, gracias a que las variaciones de ω y Ω predominan sobre las variaciones en i . El dominio entre $\Delta\omega$ y $\Delta\Omega$ no es definitivo; así, se presentan casos como los evidenciados en S2, S38, S55, S4714 y S4715; en estas estrellas $\Delta\omega > \Delta\Omega$ y en casos en los que se invierte la desigualdad, es decir, $\Delta\omega < \Delta\Omega$; estas situaciones se presentan en S62 y S4711.

Adicionalmente, las variaciones en los parámetros orbitales a y e de las estrellas tipo S ofrecen información acerca de su rapidez y la distancia al pericentro con respecto al radio de Schwarzschild de Sgr A*. En este orden de ideas, todas las estrellas, salvo S55, ven reducida su rapidez durante cada paso por el pericentro, tal como se observa en las figuras 4.1.26, 4.1.28, 4.1.30, 4.1.32, 4.1.34, 4.1.37 y 4.1.38. Al expresar la rapidez en términos de porcentaje de la rapidez de la luz en el vacío (c) y el radio de precesión en términos del radio de Schwarzschild, se cuantifican las condiciones de gravedad extrema a las cuales están sometidas cada una de las estrellas debido a la presencia de Sgr A*.

De esta manera, la alta fluctuación que sufre la rapidez de cada una de las estrellas durante cada paso por el pericentro se explica con la fluctuación de los parámetros a y e , y la desviación relativa de cada uno de estos parámetros; siendo, en el caso de la simulación realizada, el semieje mayor el parámetro orbital dominante, salvo en la estrella S4711, debido a que fluctúa y se desvía más que la excentricidad.

El comportamiento de la rapidez de la estrella S62 es particular, ya que esta estrella presenta el cambio de rapidez más grande del sistema de estrellas tipo S internas que se está discutiendo en este trabajo de grado. Si bien la fluctuación con la que disminuye su rapidez es coherente con la fluctuación presentada en el parámetro orbital a , la disminución en la rapidez no se logra explicar con el comportamiento de a , ya que la variación relativa de a es pequeña en contraposición con la disminución de la rapidez, la cual es grande.

En cuanto a la tendencia de las estrellas tipo S a alejarse del horizonte de sucesos de Sgr A* con el paso del tiempo,

se puede decir que éste fenómeno es análogo al proceso de migración protagonizado por Júpiter, conocido como *el Grand Tack scenario* [43].

Pasando a otro aspecto, la diferencia tan marcada en las variaciones relativas de $\Delta\omega(\text{RG})$ de las estrellas S62 y S4714 (ver figura 4.1.11) se puede asociar con la discrepancia entre las desviaciones relativas de los parámetros orbitales reportadas tanto en [7] como en [6]. También se podría determinar que la discrepancia mencionada se deba a la ausencia del reporte de la masa estelar de las estrellas de tipo S en [7]. Esto puede provocar que el error se propague mucho más en S62 y S4711 que en el resto de las estrellas internas. Sin embargo, la masa de Sgr A* ($4.3 \times 10^6 M_{\odot}$) predomina sobre las estimaciones de la masa de las estrellas que se hacen en [7] de acuerdo con su categoría espectral ($8 M_{\odot}$ - $11 M_{\odot}$); por lo tanto, no debería ser una fuente de error.

Es de vital importancia discutir acerca de los valores de $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para cada estrella interna, los cuales se ilustran en el gráfico 4.1.11, dado que los valores resultantes que modifican fuertemente el valor de $\Delta\omega_p(\text{RG})$ serán aquellos puntos provenientes del cálculo de $\Delta\omega_p(\text{N}) + \Delta\omega_p(\text{N})$ que estén más próximos al valor nominal de $\Delta\omega_p(\text{RG})$, tal como se indica en las figuras 4.1.12, 4.1.14, 4.1.16, 4.1.18, 4.1.20, 4.1.22, 4.1.24. Dichas figuras establecen una herramienta de análisis cualitativo del valor de $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para cada estrella y la modificación que sufra debido a perturbaciones newtonianas.

De esta manera, se espera que en todas las estrellas del sistema, la precesión newtoniana modifique el valor relativista, salvo en la estrella S55, donde una cantidad considerable de puntos se encuentra fuera del límite determinado por la desviación estándar de $\Delta\omega_p(\text{RG})$. De aquí que, de acuerdo con las simulaciones realizadas, se espera que los valores de $\Delta\omega_p(\text{RG})$ para las estrellas S38, S55, S62, S4711 y S4715 disminuyan a causa de la interacción newtoniana, ya que la mayoría de los puntos se encuentra debajo del umbral determinado por el valor nominal de $\Delta\omega_p(\text{RG})$. Mientras que para las estrellas S2 y S4711, los puntos de $\Delta\omega_p(\text{N}) + \Delta\omega_p(\text{N})$ superan el umbral, por lo que se espera que, con el paso del tiempo, aumente el valor de $\Delta\omega_p(\text{RG})$ de cada estrella.

Para la estrella S2, la discusión toma una connotación distinta, ya que se está comparando el efecto que pueden provocar los efectos newtonianos obtenidos de la simulación con la medición experimental reportada por [1]. En este sentido, se presentan dos situaciones: por un lado, la diferencia entre los puntos superiores e inferiores es prácticamente despreciable y, por otro lado, se puede entender que esta diferencia se contrarresta en la medida en que los puntos superiores, al estar más cercanos al umbral, ponderan la modificación de dicho límite. Por lo tanto, se espera que los efectos newtonianos no modifiquen de manera significativa el valor de $\Delta\omega_p(\text{RG})$. Debido a la equipartición de puntos respecto al umbral de $\Delta\omega_p(\text{RG})$, se espera además que la estrella S4715 tampoco vea afectado de manera significativa el valor predicho por la relatividad general de la precesión del argumento sobre el pericentro de su órbita. En contraposición a lo expuesto anteriormente, se espera que las estrellas S62 y S4711 vean fuertemente reducido el valor de $\Delta\omega_p(\text{RG})$.

No obstante, el criterio de la cercanía de $\Delta\omega_p(\text{N})$ a $\Delta\omega_p$ es de tipo cualitativo matemático, por lo tanto, las gráficas mencionadas no ofrecen argumentos físicos que puedan servir como foco de análisis en cuanto a la modificación que pueda sufrir $\Delta\omega_p(\text{RG})$ gracias a la contribución de efectos newtonianos. De aquí que los gráficos presentados en las figuras 4.1.13, 4.1.15, 4.1.17, 4.1.19, 4.1.21, 4.1.23, 4.1.25 cobren importancia, ya que dichos gráficos ofrecen un criterio físico cuantitativo de la manera en que la interacción newtoniana afecta a la predicción relativista de la precesión del parámetro orbital ω a través de la comparación entre $|\Delta\omega_p(\text{N})|$ y $\Delta\omega_p(\text{RG})$.

De manera que los gráficos de comparación previamente mencionada permiten, en primera instancia, determinar cual es la causa que provoca la precesión del parámetro orbital ω para cada estrella, luego de que esta pase por el pericentro; es decir, si la desviación en ω se debe a efectos newtonianos o, por el contrario, se debe a efectos relativistas. Teniendo esto en cuenta, se puede ver que el efecto que domina en $\Delta\omega_p$ es el efecto relativista, es en general, el efecto dominante sobre todas las estrellas internas tipo S. En segunda instancia, determinar si la contribución newtoniana a la precesión de ω aumenta o disminuye el valor predicho por la relatividad general a partir de determinar si la precesión newtoniana de cada estrella, luego del paso por el pericentro es prógrada o retrógrada. Así, si la precesión es prógrada, se espera que el valor de $\Delta\omega_p$ aumente con el paso del tiempo; por el contrario, si la precesión es retrógrada, el valor de $\Delta\omega_p$ se verá disminuido con el tiempo. Así, todo el conjunto de estrellas internas de tipo S verán como se disminuye paulatina la precesión en el parámetro angular ω debido a la interacción newtoniana del sistema.

Un caso particular surge con la estrella S62, gracias a que en dicha estrella los valores que toma $\Delta\omega_p(\text{N})$ son muy intensos en comparación con los valores de $\Delta\omega_p(\text{N})$ para el resto de estrellas internas del sistema; incluso, llegan a

4.3. DISCUSIÓN

tener una intensidad aproximada a la mitad de la precesión debido a efectos relativistas. Lo cual indica que, por un lado, dicha estrella es susceptible a modificaciones en sus parámetros orbitales ante la presencia de las demás estrellas tipo S involucradas en la simulación de N cuerpos; por otro lado, indica que el valor de la predicción relativista se verá fuertemente reducido con el paso del tiempo. Sin embargo, como se mencionó anteriormente, los resultados que se pueden discutir de esta estrella están sujetos a la veracidad de la desviación estándar que se calculó con los elementos orbitales presentados en [6].

Capítulo 5

Conclusiones

- El hecho de que, de las 7 estrellas internas tipo S analizadas en este trabajo de grado, 4 experimenten un aumento en el parámetro orbital a , mientras que las 3 restantes exhiban una disminución, implica redistribución de la energía, lo cual implica un equilibrio en la energía del sistema, lo cual a su vez, es consistente con el gráfico de conservación de la energía producido por el integrador IAS 15. Esta correlación es fundamental para la exclusión de ruido numérico dentro de los resultados sin embargo, no es suficiente para descartar su presencia.
- La manera en que varían los parámetros orbitales asociados a la orientación de la órbita de cada una de las estrellas indica también una redistribución del momento angular; sin embargo, este intercambio es independiente del intercambio de la energía total del sistema, gracias a que las modificaciones en i , ω y Ω no siguen un patrón específico. De aquí que el sistema favorezca la precesión.
- Las grandes modificaciones que sufren las estrellas internas en los parámetros orbitales relacionados con la orientación de la órbita (parámetros i , ω , Ω) y las pequeñas modificaciones que sufren los parámetros orbitales relacionados con la forma de la órbita (parámetros a y e) son consistentes con la teoría, ya que las interacciones mutuas entre las estrellas tienden a generar torques que modifican la dirección del momento angular.
- La simulación de N cuerpos realizada para este trabajo de grado es muy exacta, en el sentido de que no solo arroja resultados confiables en el cálculo de conservación de cantidades de movimiento, tales como la energía total del sistema o la magnitud del momento angular del sistema. Esta precisión se evidencia también en el cálculo de $\Delta\omega_p(N)$, ya que para la estrella S2 se tiene un valor de 0.2 grados, muy cercano al valor reportado por [1] (~ 0.2067).
- La abundante presencia de precesiones retrógradas en las estrellas tipo S implica que las interacciones newtonianas entre las estrellas tipo S tienden a oponerse sistemáticamente a las interacciones relativistas que pueda efectuar Sgr A* sobre cada una de las estrellas mencionadas.
- Al obtener resultados con un alto grado de exactitud se propone estudiar observacionalmente a la estrella S62, ya que esta estrella presenta distintos fenómenos los cuales hacen que destaque sobre el resto de estrellas que se analizan en este trabajo de grado. Como primera medida, la simulación de N cuerpos predice que esta estrella será la más perturbada del sistema dentro de los 100 mil años siguientes al último paso de S2 por el pericentro; se espera que los parámetros relacionados a la orientación de la órbita crezcan más de 20 grados.
- En segundo lugar, se debe considerar que el periodo orbital (~ 10 años) de S62 es más pequeño que el período orbital de S2 (~ 16 años) y que la desviación que presenta el valor $\Delta\omega_p(RG)$ es muy grande en comparación al valor correspondiente a la estrella S2, de esta manera, S62 puede servir como cuerpo de referencia para probar los efectos predichos por la relatividad general, tal como se sugiere en [6]. El análisis observacional que se pueda realizar tras el paso por el pericentro de S62 será muy significativo, ya que por un lado, puede verificarse si efectivamente los efectos producidos por efectos newtonianos son tan fuertes de manera que reduzcan de manera significativa el valor de $\Delta\omega_p(RG)$; mientras que, por otro lado se logra verificar si la disminución de la rapidez de la estrella se reduce de manera tan abrupta.

- La riqueza dinámica que posee el centro Galáctico, en especial la región más próxima a Sgr A*, permite desarrollar estudios que abarcan distintos niveles de complejidad, tanto experimental como conceptual; de aquí que sea posible realizar trabajos de nivel de pregrado como de posgrado.

Apéndice A

Marco Teórico

A.I. Funcionamiento del integrador IAS15

la ecuación fundamental a resolver es:

$$y'' = F(y', y, t). \quad (\text{A.I.1})$$

Donde y'' representa la aceleración de la partícula y F es una función que describe la fuerza específica, la cual depende de la posición de la partícula (y), la velocidad de la partícula (y') y el tiempo (t). En principio, en esta ecuación pueden estar involucradas fuerzas no conservativas.

Expandiendo A.I.1 en una serie de McLaurin truncada, se obtiene la siguiente expresión:

$$y''(t) \approx y_0'' + a_0 t + a_1 t^2 + \dots + a_6 t^7. \quad (\text{A.I.2})$$

Donde $y_0'' \equiv y''(0) = F(t=0)$. Introduciendo el tamaño de paso dt , que en términos de h se expresa como $h \equiv \frac{t}{dt}$ y el coeficiente b_k que se define como $b_k = a_k dt^{k+1}$ es posible reescribir A.I.2 como:

$$y''(h) \approx y_0'' + b_0 h + b_1 h^2 + \dots + b_6 h^7. \quad (\text{A.I.3})$$

Dadas las definiciones de h y b_k , se puede deducir que h es adimensional y b_k tiene dimensiones de aceleración. Reescribiendo A.I.2 se tiene que:

$$y''(h) \approx y_0'' + g_1 h + g_2 h(h - h_1) + g_3 h(h - h_1)(h - h_2) + \dots + g_8 h(h - h_1) \dots (h - h_7). \quad (\text{A.I.4})$$

Los coeficientes $h_1 \dots h_7$ de A.I.4 están en el intervalo $[0, 1]$; a estos coeficientes se los denomina *subpasos* dentro de un paso de tiempo. Ahora, un coeficiente g_k depende solo de la evaluación de la fuerza en subpasos h_n con $n \leq k$ y, por lo tanto, los coeficientes b_k también dependerán de la evaluación de la fuerza en todos los subpasos por ejemplo:

$$h = h_1 \rightarrow g_1 = \frac{y_1'' - y_0''}{h_1}. \quad (\text{A.I.5})$$

$$h = h_2 \rightarrow g_2 = \frac{y_2'' - y_0'' - g_1 h_2}{h_2(h_2 - h_1)}. \quad (\text{A.I.6})$$

$$\dots \quad (\text{A.I.7})$$

Para obtener la velocidad, se integra la ecuación A.I.3 obteniendo:

$$y'(h) \approx y_0' + h \, dt \left(y_0'' + \frac{h}{2} \left(b_0 + \frac{2h}{3} (b_1 + \dots) \right) \right). \quad (\text{A.I.8})$$

Integrando A.I.8:

$$y(h) \approx y_0 + y_0' h + \frac{h^2}{2} \left(y_0'' + \frac{h}{3} \left(b_0 + \frac{h}{2} (b_1 + \dots) \right) \right). \quad (\text{A.I.9})$$

En teoría, a partir de las ecuaciones A.I.8, A.I.9 es posible resolver el sistema propuesto en A.I.1. Para ello, se estima la fuerza durante el paso de tiempo que se toma en los subpasos h_n . Las estimaciones de la fuerza producen los coeficientes g_k mediante A.I.7, que luego se pueden convertir a los coeficientes b_k comparando A.I.3 con A.I.4. No obstante, las fuerzas dependen de las posiciones y las velocidades, que en principio son desconocidas.

Para solucionar este inconveniente, se usa un esquema predictor-corrector: primero, se elabora una estimación aproximada de las posiciones y velocidades para calcular las fuerzas (predictor). En la primera iteración se toma $b_k = 0$, luego se usan las fuerzas para calcular mejores estimaciones para las posiciones y velocidades (corrector). Este proceso se repite hasta alcanzar una convergencia de precisión de máquina. Con solo 2 iteraciones del bucle corrector-predictor se alcanza precisión de máquina.

A.I.I. Convergencia del bucle predictor-corrector

El cambio hecho al coeficiente b_6 relativo a la aceleración y'' . Se presentan dos maneras de calcular la estimación del error, la primera viene dada por:

$$\tilde{\delta}b_6 = \begin{cases} \frac{\max_i |\delta b_{6,i}|}{\max_i |y_i''|} & \text{estimación de error global.} \\ \max_i \left| \frac{\delta b_{6,i}}{y_i''} \right| & \text{estimación de error local.} \end{cases}$$

Donde $i = 1, 2, 3$. Cuando las series han convergido a precisión de máquina, el cambio a b_6 es insignificante en comparación con y'' ; es decir, $\tilde{\delta}b_6 < \epsilon_{\delta b}$ donde $\epsilon_{\delta b} \equiv 10^{-16}$. Para prevenir bucles infinitos, se itera el bucle predictor-corrector 12 veces.

A.I.II. Control del tamaño de paso

El parámetro ϵ_b controla el tamaño de paso, procurando que la función $y(t)$ sea suave dentro de un paso de tiempo.

Para un paso de tamaño dt , el error en la expansión de y'' será más pequeño que el último término de la serie evaluado en $t = dt$ o $h = 1$, es decir, el error no será *mas grande que* b_6 . Un límite superior en la aceleración será $\tilde{b}_6 = b_6/y''$. La segunda de calcular la estimación del error viene dada por:

$$\tilde{b}_6 = \begin{cases} \frac{\max_i |b_{6,i}|}{\max_i |y_i''|} & \text{estimación de error global.} \\ \max_i \left| \frac{b_{6,i}}{y_i''} \right| & \text{estimación de error local.} \end{cases}$$

Para dos pasos de tiempo de prueba dt_a y dt_B se cumple que:

$$\tilde{b}_{6A} dt_B^7 = \tilde{b}_{6B} dt_A^7. \quad (\text{A.I.10})$$

Para aceptar un paso de integración, se realiza el siguiente proceso. Se asume un paso de tiempo de prueba dt_{prueba} . Se usa el valor de dt dado por el usuario en el primer paso de tiempo. En los pasos subsiguientes, se usa el paso de tiempo del paso anterior. Después de integrar en el paso de tiempo y convergiendo la iteración predictor-corrector, se calcula $\tilde{b}_6$. El parámetro de precisión ϵ_b se usa para calcular el paso de tiempo requerido de la siguiente manera:

$$dt_{requerido} = dt_{prueba} (\epsilon_b / \tilde{b}_6)^{1/7}. \quad (\text{A.I.11})$$

De tal manera que si $dt_{prueba} > dt_{requerido}$ el paso es *rechazado* y se repite con un paso de tiempo más pequeño. Por el contrario, si el paso del tiempo es aceptado, en la siguiente iteración, este será el próximo $dt_{requerido}$. Este proceso hace que la integración sea *independiente de la escala física del problema*.

A.II. Demostración de la precesión del pericentro 2.1.48

Se realiza un estudio relativista del problema de dos cuerpos, en donde un cuerpo de masa m_2 orbita a un cuerpo de masa m_1 (cuerpo central) donde $m_1 \gg m_2$. Asumiendo que el cuerpo central produce un *campo gravitacional esféricamente simétrico*, entonces la solución de las ecuaciones de campo de Einstein está dada por la métrica de Schwarzschild. Además, una partícula de prueba se mueve en una geodésica temporal, por lo cual es lógico estudiar algunas de las geodésicas de la solución de Schwarzschild.

Por lo tanto, el elemento de línea (usando unidades naturales y signatura $(+, -, -, -)$) viene dado por 2.1.45 y, derivando con respecto al tiempo propio τ ($\equiv \frac{d}{d\tau}$), se obtiene:

$$2K = (1 - 2m/r)\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2. \quad (\text{A.II.1})$$

Donde $K = \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu \equiv \frac{ds^2}{d\tau^2}$, $\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$, $\dot{x}^\nu = \frac{dx^\nu}{d\tau}$, para geodésicas temporales, $ds^2 = d\tau^2 \rightarrow \frac{ds^2}{d\tau^2} = 1$ por lo tanto, A.II.1 toma la siguiente forma:

$$2K = (1 - 2m/r)\dot{t}^2 - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\theta}^2 - r^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 1. \quad (\text{A.II.2})$$

Ahora, teniendo en cuenta las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial K}{\partial x^\mu} - \frac{d}{du} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0. \quad (\text{A.II.3})$$

Dado que la geodésica es temporal, entonces $\tau = u$. De A.II.3 se tendrán en cuenta las componentes $\mu = 0, 2, 3$. De manera que se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{d}{d\tau}[(1 - 2m/r)\dot{t}] = 0. \quad (\text{A.II.4})$$

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\dot{\theta}) - r^2\sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0. \quad (\text{A.II.5})$$

$$\frac{d}{d\tau}(r^2\sin^2\theta\dot{\phi}) = 0. \quad (\text{A.II.6})$$

El conjunto de ecuaciones A.II.3 y A.II.2 ofrece una solución relativista al problema. Sin embargo, el propósito de la relatividad general es verificar los resultados de la mecánica newtoniana; en consecuencia, se busca validar estos resultados. Considerando una partícula con posición inicial $x^\mu(0)$ y velocidad inicial $\dot{x}^\mu(0)$ en las coordenadas de Schwarzschild. Bajo esta restricción, es posible elegir coordenadas en las cuales $\theta(0) = \pi/2$ y $\dot{\theta}(0) = 0$.

Bajo estas condiciones, se puede ver de A.II.5 que $\ddot{\theta}(0) = 0$; de aquí que el movimiento se realice en un *plano ecuatorial*. Mientras que integrando A.II.6 se obtiene:

$$r^2\dot{\phi} = h, h = \text{cte}. \quad (\text{A.II.7})$$

En cuanto a A.II.4, se tiene que:

$$(1 - 2m/r)\dot{t} = \kappa, \kappa = \text{cte}. \quad (\text{A.II.8})$$

Reemplazando los resultados de $\dot{\theta}$ y $\dot{t}$ en A.II.2:

$$\kappa^2(1 - 2m/r)^{-1} - (1 - 2m/r)^{-1}\dot{r}^2 - r^2\dot{\phi}^2 = 1. \quad (\text{A.II.9})$$

A.II. DEMOSTRACIÓN DE LA PRECESIÓN DEL PERICENTRO 2.1.48

Haciendo la sustitución $u = r^{-1}$, se obtiene que $\dot{r} = -h \frac{du}{d\phi}$. Tomando en consideración esta última expresión además de A.II.7 y reemplazando en A.II.9:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = \frac{\kappa^2 - 1}{h^2} + \frac{2m}{h^2}u + 2mu^3. \quad (\text{A.II.10})$$

Derivando A.II.10:

$$\frac{d^2u}{d\phi^2} + u = \frac{m}{h^2} + 3mu^2. \quad (\text{A.II.11})$$

La ecuación A.II.11 es la versión relativista de la ecuación de Binet. Tomando el término $3mu^2$ como una perturbación y teniendo en cuenta que para la ecuación de Binet clásica $u \sim m/h^2$ se define la variable adimensional $\tilde{u} = h^2u/m$, la cual para el caso newtoniano es aproximadamente 1, reescribiendo A.II.11 en términos de $\tilde{u}$

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\phi^2} + \tilde{u} = 1 + \frac{3m^2}{h^2}\tilde{u}^2. \quad (\text{A.II.12})$$

Introduciendo la cantidad adimensional:

$$\epsilon = 3m^2/h^2. \quad (\text{A.II.13})$$

De manera que A.II.12 queda de la siguiente forma:

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\phi^2} + \tilde{u} = 1 + \epsilon\tilde{u}^2. \quad (\text{A.II.14})$$

Para órbitas planetarias $\epsilon \ll 1$, ya que $\tilde{u} \sim 1$, en el caso newtoniano el término de perturbación adicional producirá un cambio $O(\epsilon)$ en la solución. Luego, es posible asumir la siguiente solución para A.II.14:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_0 + \epsilon\tilde{u}_1 + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.II.15})$$

Reemplazando esta última expresión en A.II.14:

$$\tilde{u}_0'' + \tilde{u}_0 - 1 + \epsilon(\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 - u_0^2) + O(\epsilon^2) = 0. \quad (\text{A.II.16})$$

Dado que los polinomios $\epsilon^0, \epsilon^1, \dots, \epsilon^n$ son linealmente independientes, la única manera de que se cumpla la igualdad es haciendo que todos los coeficientes que acompañan a las potencias se anulen por separado; de aquí que:

$$\tilde{u}_0'' + \tilde{u}_0 - 1 = 0. \quad (\text{A.II.17})$$

$$\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 - u_0^2 = 0. \quad (\text{A.II.18})$$

La ecuación A.II.17 corresponde a la *ecuación de Binet clásica* cuya solución está en términos de $\tilde{u}_0$ y tomando el movimiento en el eje x (ϕ_0) es:

$$\tilde{u}_0 = (1 + e \cos \phi). \quad (\text{A.II.19})$$

Con este resultado, es posible manipular la ecuación A.II.18:

$$\tilde{u}_1'' + \tilde{u}_1 = (1 + e \cos \phi)^2. \quad (\text{A.II.20})$$

$$= (1 + 2e \cos \phi + e^2 \cos^2 \phi). \quad (\text{A.II.21})$$

$$= \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + 2e \cos \phi + \frac{1}{2}e^2 \cos 2\phi. \quad (\text{A.II.22})$$

Una solución particular de A.II.22 presenta la siguiente estructura:

$$\tilde{u}_1 = \left(1 + \frac{1}{2}e^2\right) + e\phi \sin \phi - \frac{e^2}{6} \cos 2\phi. \quad (\text{A.II.23})$$

Por consiguiente, la solución general para A.II.14 es:

$$\tilde{u} = (1 + e \cos \phi) + \epsilon \left[1 + e\phi \sin \phi + e^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cos 2\phi\right)\right]. \quad (\text{A.II.24})$$

Considerando una aproximación de primer orden en ϵ y multiplicando por m/h^2 :

$$u \simeq \frac{m}{h^2} [1 + e \cos \phi + \epsilon e\phi \sin \phi] = \frac{m}{h^2} [1 + e \cos (\phi(1 - \epsilon))]. \quad (\text{A.II.25})$$

Ahora, el período de la órbita viene dado por:

$$\frac{2\pi}{1 - \epsilon} \simeq 2\pi(1 + \epsilon). \quad (\text{A.II.26})$$

Luego, un cuerpo describirá una trayectoria elíptica, pero el eje de la elipse rotará una cantidad $\Delta\phi = 2\pi\epsilon$. Usando que para el caso newtoniano $h^2 = ma(1 - e^2)$ y teniendo en cuenta la definición de ϵ (A.II.13) $m = GM/c^2$ entonces

$$\Delta\phi \simeq \frac{6\pi GM}{c^2(1 - e^2)a}. \quad (\text{A.II.27})$$

Apéndice B

Metodología

B.I. Rutinas asociadas a cálculos numéricos

B.I.I. Solución numérica de 2.1.30

```
1 #Este programa calcula la ecuacion trascendental de Kepler a partir de
  elementos orbitales , se toma como referencia el tiempo de paso por
  el pericentro de la estrella S2
2
3 import numpy as np
4 from scipy.optimize import fsolve
5
6 data = np.loadtxt("t_anomaly.txt") # datos de semieje mayor,
  excentricidad , tiempo de pasaje por el pericentro , masa de las
  estrellas (Ali 2020,Peibker,2020)
7 a = data[:,0]*3.0857e10/1.49597871e8      # semieje mayor en UA
8 e = data[:,1]      # excentricidad
9 Tp = data[:,2]      # tiempo de pasaje por el pericentro en anios
10 m_stars = data[:,3] # masa de las estrellas
11 a_ver = []
12
13 G = 39.47841760435743 #en AU^3/(M_sol*yr^2)
14 m_sgr = 4.3e6 #en M_sol
15
16 mu = G*(m_sgr + m_stars[0])
17 t = 2002.390      # tiempo de pasaje por el pericentro de S2
18
19 # Calculo de delta(t)
20 for i in range(len(a)):
21     delta_t = t - Tp[i]
22     k = np.sqrt(mu)
23     # Funcion para la ecuacion a resolver
24     def func(E):
```

```
25         return E - e[i]*np.sin(E) - k*delta_t/np.sqrt(a[i]**3.)
26
27     # Suposicion inicial para E
28     E_guess = -1.1 if delta_t < 0 else 1.1
29
30     # Resolvemos la ecuacion
31     E_solution = fsolve(func, E_guess)[0]
32
33     E_solution = E_solution
34
35     #calculo de atan a traves de atan2(x,y)
36     y = np.sqrt(1+e[i])*np.sin(E_solution/2.)
37     x = np.sqrt(1-e[i])*np.cos(E_solution/2.)
38     nu = 2.*np.arctan2(y,x)
39     E_real = 2.*np.arctan2(np.sqrt(1-e[i])*np.sin(nu/2.),np.sqrt(1+
        e[i])*np.cos(nu/2.))
40     sol = func(E_real)
41     r = a[i]*(1.-e[i]**2)/(1.+e[i]*np.cos(nu))
42     a_ver.append(nu)
43 print(a_ver)
```

Listing B.1: rutina para resolver numéricamente la ecuacion de Kepler

B.I.II. Integración del problema de N cuerpos

```
1  /**
2   * Este codigo integra el sistema de estrellas tipo S obtenido de Ali
   * et al 2020, y Peibker et al 2022
3   * Se basa en el ejemplo solar_system disponible en REBOUND
4   * Adaptado por Florez , Chaves-Velasquez Universidad de Narinio 2025
5   *
6   */
7  #include <stdio.h>
8  #include <stdlib.h>
9  #include <math.h>
10 #include "rebound.h"
11
12 // declaracion de variables
13 #define nb 44 //numero de cuerpos (sin incluir el IMBH)
14 double a[nb], ec[nb], inc[nb], omega[nb], Omega[nb], nu[nb], ss_mass[nb
    ],par,h,theta; //elementos orbitales , parametro , momento angular por
    unidad de masa, angulo variable
15 void heartbeat(struct reb_simulation* r);
16 double e_init; //declaracion de variable de energia del sistema inicial
17 struct reb_vec3d L_init; //declaracion de variable de energia del
    momento angular inicil
18 double tmax; //declaracion del tiempo de integracion
```

```

19
20 //lectura de datos de entrada
21 int main(int argc, char* argv[]){
22     FILE *datos;
23     datos = fopen("o_elements_prueba.txt","r"); //contenido del archivo
        por columnas: a(UA),e,i(rad),omega(rad),Omega(rad),nu(rad),masa(
        masa solar)
24
25     struct reb_simulation* r = reb_simulation_create(); //creacion de la
        simulacion
26     struct reb_particle bh = {0}; //declaracion del SMBH
27     bh.m = 4.3e6; //masa de Sgr A* en masas solares
28     reb_simulation_add(r,bh); //se adiciona el SMBH a la simulacion
29
30     //bucle de vectorizacion del archivo .txt
31     for (int i = 0;i<nb;i++) {
32         if(fscanf(datos,"%lf %lf %lf %lf %lf %lf %lf\n",&a[i],&e[i],&
            inc[i],&omega[i],&Omega[i],&nu[i],&ss_mass[i]) !=7) {
33             printf("Error %d\n",i);
34             fclose(datos);
35             return 1;
36         }
37     }
38 }

```

Listing B.2: programa integrador (sección de declaración de variables)

```

40     // inicio de integracion
41
42
43     // configuracion de constantes
44     tmax = 5000.; //tiempo de integracion
45     r->G = 39.47841760435743; //constante de
        gravitacion en UA^3 / (M_sol* anios^2)
46     r->heartbeat = heartbeat; //configuracion de heartbeat
47     r->exact_finish_time = 1; // tiempo de finalizacion de la
        integracion.
48     r->integrator = REB_INTEGRATOR_IAS15; //integrador
        no symplectico de paso variable
49     r->ri_ias15.epsilon = 1e-12; //tolerancia
50
51     double um = r->G*(bh.m + ss_mass[0]); //masa reducida del sistema
52
53     //calculo de las condiciones iniciales en terminos de los elementos
        orbitales de entrada
54     double radio;
55     struct reb_particle star = {0};
56     for (int i=0;i<nb;i++){

```

```
57     par = a[i]*(1.0 - ec[i]*ec[i]); //parametro
58     radio = par/ (1.0 + ec[i]*cos(nu[i])); //coordenada radial
59     theta = omega[i]+nu[i]; //angulo variable
60     h = sqrt(um*par); //magnitud del momento angular por unidad de
        masa
61
62     //posiciones iniciales
63     star.x = radio*(cos(Omega[i])*cos(theta)-sin(Omega[i])*cos(inc[
        i])*sin(theta));
64     star.y = radio*(sin(Omega[i])*cos(theta)+cos(Omega[i])*cos(inc[
        i])*sin(theta));
65     star.z = radio*(sin(inc[i])*sin(theta));
66
67     //velocidades iniciales
68     star.vx = -(um/h)*(cos(Omega[i])*(sin(theta)+ec[i]*sin(omega[i]
        )))+sin(Omega[i])*(cos(theta)+ec[i]*cos(omega[i]))*cos(inc[i]
        ));
69     star.vy = -(um/h)*(sin(Omega[i])*(sin(theta)+ec[i]*sin(omega[i]
        )))-cos(Omega[i])*(cos(theta)+ec[i]*cos(omega[i]))*cos(inc[i]
        ));
70     star.vz = (um/h)*(cos(theta)+ec[i]*cos(omega[i]))*sin(inc[i]);
71
72     star.m = ss_mass[i]; //masa de las estrellas
73     reb_simulation_add(r, star);
74
75 }
76 reb_simulation_move_to_com(r);
77 e_init = reb_simulation_energy(r); //energia inicial del sistema
78 L_init = reb_simulation_angular_momentum(r); //momento angular
        inicial del sistema
79
80 //eliminacion de archivos de texto
81 remove("orbit_s2_006.txt");
82 remove("orbit_s1_006.txt");
83 remove("orbit_s4_006.txt");
84 remove("orbit_s6_006.txt");
85 remove("orbit_s8_006.txt");
86 remove("orbit_s9_006.txt");
87 remove("orbit_s12_006.txt");
88 remove("orbit_s13_006.txt");
89 remove("orbit_s14_006.txt");
90 remove("orbit_s17_006.txt");
91 remove("orbit_s18_006.txt");
92 remove("orbit_s19_006.txt");
93 remove("orbit_s21_006.txt");
94 remove("orbit_s22_006.txt");
95 remove("orbit_s23_006.txt");
96 remove("orbit_s24_006.txt");
```

```

97     remove("orbit_s29_006.txt");
98     remove("orbit_s31_006.txt");
99     remove("orbit_s33_006.txt");
100    remove("orbit_s38_006.txt");
101    remove("orbit_s39_006.txt");
102    remove("orbit_s42_006.txt");
103    remove("orbit_s54_006.txt");
104    remove("orbit_s55_006.txt");
105    remove("orbit_s60_006.txt");
106    remove("orbit_s62_006.txt");
107    remove("orbit_s64_006.txt");
108    remove("orbit_s66_006.txt");
109    remove("orbit_s67_006.txt");
110    remove("orbit_s71_006.txt");
111    remove("orbit_s83_006.txt");
112    remove("orbit_s85_006.txt");
113    remove("orbit_s87_006.txt");
114    remove("orbit_s89_006.txt");
115    remove("orbit_s91_006.txt");
116    remove("orbit_s96_006.txt");
117    remove("orbit_s97_006.txt");
118    remove("orbit_s145_006.txt");
119    remove("orbit_s175_006.txt");
120    remove("orbit_s4711_006.txt");
121    remove("orbit_s4712_006.txt");
122    remove("orbit_s4713_006.txt");
123    remove("orbit_s4714_006.txt");
124    remove("orbit_s4715_006.txt");
125    remove("angular_momentum_system_p5k.txt");
126    remove("orbital_elements_s2_006.txt");
127    reb_simulation_integrate(r, tmax);
128 }

```

Listing B.3: programa integrador (sección de configuración del integrador y cálculo de condiciones iniciales)

```

130 // programa integrador
131 void heartbeat(struct reb_simulation* r){
132     if (reb_simulation_output_check(r, 0.001)){
133         reb_simulation_output_timing(r, tmax);
134         reb_simulation_synchronize(r);
135
136         //calculo de la conservacion de las cantidades de movimiento
137         FILE* f_ang = fopen("angular_momentum_system_p5k.txt","ab");
138         struct reb_vec3d L_final = reb_simulation_angular_momentum(r);
139         double r_vec,x,y,z;
140         double e_fin = reb_simulation_energy(r);
141         double L_mag_ini = sqrt(L_init.x*L_init.x + L_init.y*L_init.y +
            L_init.z*L_init.z);

```

```
142     double L_mag_fin = sqrt(L_final.x*L_final.x + L_final.y*L_final
      .y + L_final.z*L_final.z);
143     fprintf(f_ang, "%e %e %e\n", r->t, fabs((e_fin-e_init)/e_init),
      fabs((L_mag_fin-L_mag_ini)/L_mag_ini));
144     fclose(f_ang);
```

Listing B.4: programa integrador (sección de inicio de la integración y cálculo de la conservación de las cantidades de movimiento del sistema)

```
146     // orbitas de las estrellas
147     FILE* orb = fopen("orbit_s2_006.txt", "ab");
148     struct reb_particle* s2 = &r->particles[1];
149     x = s2->x;
150     y = s2->y;
151     z = s2->z;
152     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
153     fprintf(orb, "%f %f %f %f %f %f %f %f\n", r->t, s2->x, s2->y, s2->
      z, s2->vx, s2->vy, s2->vz, r_vec);
154     fclose(orb);
155
156     FILE* orb2 = fopen("orbit_s1_006.txt", "ab");
157     struct reb_particle* s1 = &r->particles[2];
158     x = s1->x;
159     y = s1->y;
160     z = s1->z;
161     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
162     fprintf(orb2, "%f %f %f %f %f %f %f %f\n", r->t, s1->x, s1->y, s1
      ->z, s1->vx, s1->vy, s1->vz, r_vec);
163     fclose(orb2);
164
165     FILE* orb3 = fopen("orbit_s4_006.txt", "ab");
166     struct reb_particle* s4 = &r->particles[3];
167     x = s4->x;
168     y = s4->y;
169     z = s4->z;
170     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
171     fprintf(orb3, "%f %f %f %f %f %f %f %f\n", r->t, s4->x, s4->y, s4
      ->z, s4->vx, s4->vy, s4->vz, r_vec);
172     fclose(orb3);
173
174     FILE* orb4 = fopen("orbit_s6_006.txt", "ab");
175     struct reb_particle* s6 = &r->particles[4];
176     x = s6->x;
177     y = s6->y;
178     z = s6->z;
179     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
180     fprintf(orb4, "%f %f %f %f %f %f %f %f\n", r->t, s6->x, s6->y, s6
      ->z, s6->vx, s6->vy, s6->vz, r_vec);
```

```
181         fclose(orb4);
182
183         FILE* orb5 = fopen("orbit_s8_006.txt","ab");
184         struct reb_particle* s8 = &r->particles[5];
185         x = s8->x;
186         y = s8->y;
187         z = s8->z;
188         r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
189         fprintf(orb5,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s8->x, s8->y,s8
            ->z,s8->vx,s8->vy,s8->vz,r_vec);
190         fclose(orb5);
191
192         FILE* orb6 = fopen("orbit_s9_006.txt","ab");
193         struct reb_particle* s9 = &r->particles[6];
194         x = s9->x;
195         y = s9->y;
196         z = s9->z;
197         r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
198         fprintf(orb6,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s9->x, s9->y,s9
            ->z,s9->vx,s9->vy,s9->vz,r_vec);
199         fclose(orb6);
200
201         FILE* orb7 = fopen("orbit_s12_006.txt","ab");
202         struct reb_particle* s12 = &r->particles[7];
203         x = s12->x;
204         y = s12->y;
205         z = s12->z;
206         r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
207         fprintf(orb7,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s12->x, s12->y,
            s12->z,s12->vx,s12->vy,s12->vz,r_vec);
208         fclose(orb7);
209
210         FILE* orb8 = fopen("orbit_s13_006.txt","ab");
211         struct reb_particle* s13 = &r->particles[8];
212         x = s13->x;
213         y = s13->y;
214         z = s13->z;
215         r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
216         fprintf(orb8,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s13->x, s13->y,
            s13->z,s13->vx,s13->vy,s13->vz,r_vec);
217         fclose(orb8);
218
219         FILE* orb9 = fopen("orbit_s14_006.txt","ab");
220         struct reb_particle* s14 = &r->particles[9];
221         x = s14->x;
222         y = s14->y;
223         z = s14->z;
224         r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
```

```
225     fprintf(orb9,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s14->x, s14->y,
226           s14->z,s14->vx,s14->vy,s14->vz,r_vec);
227     fclose(orb9);
228     FILE* orb10 = fopen("orbit_s17_006.txt","ab");
229     struct reb_particle* s17 = &r->particles[10];
230     x = s17->x;
231     y = s17->y;
232     z = s17->z;
233     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
234     fprintf(orb10,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s17->x, s17->y,
235           s17->z,s17->vx,s17->vy,s17->vz,r_vec);
236     fclose(orb10);
237     FILE* orb11 = fopen("orbit_s18_006.txt","ab");
238     struct reb_particle* s18 = &r->particles[11];
239     x = s18->x;
240     y = s18->y;
241     z = s18->z;
242     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
243     fprintf(orb11,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s18->x, s18->y,
244           s18->z,s18->vx,s18->vy,s18->vz,r_vec);
245     fclose(orb11);
246     FILE* orb12 = fopen("orbit_s19_006.txt","ab");
247     struct reb_particle* s19 = &r->particles[12];
248     x = s19->x;
249     y = s19->y;
250     z = s19->z;
251     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
252     fprintf(orb12,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s19->x, s19->y,
253           s19->z,s19->vx,s19->vy,s19->vz,r_vec);
254     fclose(orb12);
255     FILE* orb13 = fopen("orbit_s21_006.txt","ab");
256     struct reb_particle* s21 = &r->particles[13];
257     x = s21->x;
258     y = s21->y;
259     z = s21->z;
260     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
261     fprintf(orb13,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s21->x, s21->y,
262           s21->z,s21->vx,s21->vy,s21->vz,r_vec);
263     fclose(orb13);
264     FILE* orb14 = fopen("orbit_s22_006.txt","ab");
265     struct reb_particle* s22 = &r->particles[14];
266     x = s22->x;
267     y = s22->y;
```

```
268     z = s22->z;
269     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
270     fprintf(orb14,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s22->x, s22->y,
        s22->z,s22->vx,s22->vy,s22->vz,r_vec);
271     fclose(orb14);
272
273     FILE* orb15 = fopen("orbit_s23_006.txt","ab");
274     struct reb_particle* s23 = &r->particles[15];
275     x = s23->x;
276     y = s23->y;
277     z = s23->z;
278     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
279     fprintf(orb15,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s23->x, s23->y,
        s23->z,s23->vx,s23->vy,s23->vz,r_vec);
280     fclose(orb15);
281
282     FILE* orb16 = fopen("orbit_s24_006.txt","ab");
283     struct reb_particle* s24 = &r->particles[16];
284     x = s24->x;
285     y = s24->y;
286     z = s24->z;
287     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
288     fprintf(orb16,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s24->x, s24->y,
        s24->z,s24->vx,s24->vy,s24->vz,r_vec);
289     fclose(orb16);
290
291     FILE* orb17 = fopen("orbit_s29_006.txt","ab");
292     struct reb_particle* s29 = &r->particles[17];
293     x = s29->x;
294     y = s29->y;
295     z = s29->z;
296     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
297     fprintf(orb17,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s29->x, s29->y,
        s29->z,s29->vx,s29->vy,s29->vz,r_vec);
298     fclose(orb17);
299
300     FILE* orb18 = fopen("orbit_s31_006.txt","ab");
301     struct reb_particle* s31 = &r->particles[18];
302     x = s31->x;
303     y = s31->y;
304     z = s31->z;
305     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
306     fprintf(orb18,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s31->x, s31->y,
        s31->z,s31->vx,s31->vy,s31->vz,r_vec);
307     fclose(orb18);
308
309     FILE* orb19 = fopen("orbit_s33_006.txt","ab");
310     struct reb_particle* s33 = &r->particles[19];
```

```
311     x = s33->x;
312     y = s33->y;
313     z = s33->z;
314     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
315     fprintf(orb19,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s33->x, s33->y,
        s33->z, s33->vx, s33->vy, s33->vz, r_vec);
316     fclose(orb19);
317
318     FILE* orb20 = fopen("orbit_s38_006.txt","ab");
319     struct reb_particle* s38 = &r->particles[20];
320     x = s38->x;
321     y = s38->y;
322     z = s38->z;
323     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
324     fprintf(orb20,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s38->x, s38->y,
        s38->z, s38->vx, s38->vy, s38->vz, r_vec);
325     fclose(orb20);
326
327     FILE* orb21 = fopen("orbit_s39_006.txt","ab");
328     struct reb_particle* s39 = &r->particles[21];
329     x = s39->x;
330     y = s39->y;
331     z = s39->z;
332     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
333     fprintf(orb21,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s39->x, s39->y,
        s39->z, s39->vx, s39->vy, s39->vz, r_vec);
334     fclose(orb21);
335
336     FILE* orb22 = fopen("orbit_s42_006.txt","ab");
337     struct reb_particle* s42 = &r->particles[22];
338     x = s42->x;
339     y = s42->y;
340     z = s42->z;
341     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
342     fprintf(orb22,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s42->x, s42->y,
        s42->z, s42->vx, s42->vy, s42->vz, r_vec);
343     fclose(orb22);
344
345     FILE* orb23 = fopen("orbit_s54_006.txt","ab");
346     struct reb_particle* s54 = &r->particles[23];
347     x = s54->x;
348     y = s54->y;
349     z = s54->z;
350     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
351     fprintf(orb23,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s54->x, s54->y,
        s54->z, s54->vx, s54->vy, s54->vz, r_vec);
352     fclose(orb23);
353
```

```
354 FILE* orb24 = fopen("orbit_s55_006.txt","ab");
355 struct reb_particle* s55 = &r->particles[24];
356 x = s55->x;
357 y = s55->y;
358 z = s55->z;
359 r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
360 fprintf(orb24,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s55->x, s55->y,
    s55->z,s55->vx,s55->vy,s55->vz,r_vec);
361 fclose(orb24);
362
363 FILE* orb25 = fopen("orbit_s60_006.txt","ab");
364 struct reb_particle* s60 = &r->particles[25];
365 x = s60->x;
366 y = s60->y;
367 z = s60->z;
368 r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
369 fprintf(orb25,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s60->x, s60->y,
    s60->z,s60->vx,s60->vy,s60->vz,r_vec);
370 fclose(orb25);
371
372 FILE* orb26 = fopen("orbit_s62_006.txt","ab");
373 struct reb_particle* s62 = &r->particles[26];
374 x = s62->x;
375 y = s62->y;
376 z = s62->z;
377 r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
378 fprintf(orb26,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s62->x, s62->y,
    s62->z,s62->vx,s62->vy,s62->vz,r_vec);
379 fclose(orb26);
380
381 FILE* orb27 = fopen("orbit_s64_006.txt","ab");
382 struct reb_particle* s64 = &r->particles[27];
383 x = s64->x;
384 y = s64->y;
385 z = s64->z;
386 r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
387 fprintf(orb27,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s64->x, s64->y,
    s64->z,s64->vx,s64->vy,s64->vz,r_vec);
388 fclose(orb27);
389
390 FILE* orb28 = fopen("orbit_s66_006.txt","ab");
391 struct reb_particle* s66 = &r->particles[28];
392 x = s66->x;
393 y = s66->y;
394 z = s66->z;
395 r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
396 fprintf(orb28,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s66->x, s66->y,
    s66->z,s66->vx,s66->vy,s66->vz,r_vec);
```

```
397     fclose(orb28);
398
399     FILE* orb29 = fopen("orbit_s67_006.txt","ab");
400     struct reb_particle* s67 = &r->particles[29];
401     x = s67->x;
402     y = s67->y;
403     z = s67->z;
404     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
405     fprintf(orb29,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s67->x, s67->y,
        s67->z,s67->vx,s67->vy,s67->vz,r_vec);
406     fclose(orb29);
407
408     FILE* orb30 = fopen("orbit_s71_006.txt","ab");
409     struct reb_particle* s71 = &r->particles[30];
410     x = s71->x;
411     y = s71->y;
412     z = s71->z;
413     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
414     fprintf(orb30,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s71->x, s71->y,
        s71->z,s71->vx,s71->vy,s71->vz,r_vec);
415     fclose(orb30);
416
417     FILE* orb31 = fopen("orbit_s83_006.txt","ab");
418     struct reb_particle* s83 = &r->particles[31];
419     x = s83->x;
420     y = s83->y;
421     z = s83->z;
422     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
423     fprintf(orb31,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s83->x, s83->y,
        s83->z,s83->vx,s83->vy,s83->vz,r_vec);
424     fclose(orb31);
425
426     FILE* orb32 = fopen("orbit_s85_006.txt","ab");
427     struct reb_particle* s85 = &r->particles[32];
428     x = s85->x;
429     y = s85->y;
430     z = s85->z;
431     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
432     fprintf(orb32,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s85->x, s85->y,
        s85->z,s85->vx,s85->vy,s85->vz,r_vec);
433     fclose(orb32);
434
435     FILE* orb33 = fopen("orbit_s87_006.txt","ab");
436     struct reb_particle* s87 = &r->particles[33];
437     x = s87->x;
438     y = s87->y;
439     z = s87->z;
440     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
```

```
441     fprintf(orb33,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s87->x, s87->y,
      s87->z,s87->vx,s87->vy,s87->vz,r_vec);
442     fclose(orb33);
443
444     FILE* orb34 = fopen("orbit_s89_006.txt","ab");
445     struct reb_particle* s89 = &r->particles[34];
446     x = s89->x;
447     y = s89->y;
448     z = s89->z;
449     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
450     fprintf(orb34,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s89->x, s89->y,
      s89->z,s89->vx,s89->vy,s89->vz,r_vec);
451     fclose(orb34);
452
453     FILE* orb35 = fopen("orbit_s91_006.txt","ab");
454     struct reb_particle* s91 = &r->particles[35];
455     x = s91->x;
456     y = s91->y;
457     z = s91->z;
458     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
459     fprintf(orb35,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s91->x, s91->y,
      s91->z,s91->vx,s91->vy,s91->vz,r_vec);
460     fclose(orb35);
461
462     FILE* orb36 = fopen("orbit_s96_006.txt","ab");
463     struct reb_particle* s96 = &r->particles[36];
464     x = s96->x;
465     y = s96->y;
466     z = s96->z;
467     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
468     fprintf(orb36,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s96->x, s96->y,
      s96->z,s96->vx,s96->vy,s96->vz,r_vec);
469     fclose(orb36);
470
471     FILE* orb37 = fopen("orbit_s97_006.txt","ab");
472     struct reb_particle* s97 = &r->particles[37];
473     x = s97->x;
474     y = s97->y;
475     z = s97->z;
476     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
477     fprintf(orb37,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s97->x, s97->y,
      s97->z,s97->vx,s97->vy,s97->vz,r_vec);
478     fclose(orb37);
479
480     FILE* orb38 = fopen("orbit_s145_006.txt","ab");
481     struct reb_particle* s145 = &r->particles[38];
482     x = s145->x;
483     y = s145->y;
```

```
484     z = s145->z;
485     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
486     fprintf(orb38,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s145->x, s145->
        y,s145->z,s145->vx,s145->vy,s145->vz,r_vec);
487     fclose(orb38);
488
489     FILE* orb39 = fopen("orbit_s175_006.txt","ab");
490     struct reb_particle* s175 = &r->particles[39];
491     x = s175->x;
492     y = s175->y;
493     z = s175->z;
494     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
495     fprintf(orb39,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s175->x, s175->
        y,s175->z,s175->vx,s175->vy,s175->vz,r_vec);
496     fclose(orb39);
497
498     FILE* orb40 = fopen("orbit_s4711_006.txt","ab");
499     struct reb_particle* s4711 = &r->particles[40];
500     x = s4711->x;
501     y = s4711->y;
502     z = s4711->z;
503     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
504     fprintf(orb40,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s4711->x, s4711
        ->y,s4711->z,s4711->vx,s4711->vy,s4711->vz,r_vec);
505     fclose(orb40);
506
507     FILE* orb41 = fopen("orbit_s4712_006.txt","ab");
508     struct reb_particle* s4712 = &r->particles[41];
509     x = s4712->x;
510     y = s4712->y;
511     z = s4712->z;
512     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
513     fprintf(orb41,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s4712->x, s4712
        ->y,s4712->z,s4712->vx,s4712->vy,s4712->vz,r_vec);
514     fclose(orb41);
515
516     FILE* orb42 = fopen("orbit_s4713_006.txt","ab");
517     struct reb_particle* s4713 = &r->particles[42];
518     x = s4713->x;
519     y = s4713->y;
520     z = s4713->z;
521     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
522     fprintf(orb42,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s4713->x, s4713
        ->y,s4713->z,s4713->vx,s4713->vy,s4713->vz,r_vec);
523     fclose(orb42);
524
525     FILE* orb43 = fopen("orbit_s4714_006.txt","ab");
526     struct reb_particle* s4714 = &r->particles[43];
```

```

527     x = s4714->x;
528     y = s4714->y;
529     z = s4714->z;
530     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
531     fprintf(orb43,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s4714->x, s4714
        ->y,s4714->z,s4714->vx,s4714->vy,s4714->vz,r_vec);
532     fclose(orb43);
533
534     FILE* orb44 = fopen("orbit_s4715_006.txt","ab");
535     struct reb_particle* s4715 = &r->particles[44];
536     x = s4715->x;
537     y = s4715->y;
538     z = s4715->z;
539     r_vec = sqrt(x*x+y*y+z*z);
540     fprintf(orb44,"%f %f %f %f %f %f %f %f\n",r->t, s4715->x, s4715
        ->y,s4715->z,s4715->vx,s4715->vy,s4715->vz,r_vec);
541     fclose(orb44);

```

Listing B.5: programa integrador (sección de cálculo de las posiciones y velocidades de las estrellas del cúmulo S)

```

542
543     //calculo de los parametros orbitales de cada estrella
544     struct reb_particle* imbh = &r->particles[0];
545     struct reb_particle* par_s2 = &r->particles[1];
546     struct reb_orbit o_s2 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s2,*
        imbh);
547     FILE* oe_s2 = fopen("orbital_elements_s2_006.txt","ab");
548     if(o_s2.Omega < 0.){
549         o_s2.Omega = 2.*M_PI+o_s2.Omega;
550     }
551     if(o_s2.omega < 0.){
552         o_s2.omega = 2.*M_PI+o_s2.omega;
553     }
554     fprintf(oe_s2,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s2.a,o_s2.e, o_s2.
        inc, o_s2.omega, o_s2.Omega);
555     fclose(oe_s2);
556
557     struct reb_particle* par_s1 = &r->particles[2];
558     struct reb_orbit o_s1 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s1,*
        imbh);
559     FILE* oe_s1 = fopen("orbital_elements_s1_006.txt","ab");
560     if(o_s1.Omega < 0.){
561         o_s1.Omega = 2.*M_PI+o_s1.Omega;
562     }
563     if(o_s1.omega < 0.){
564         o_s1.omega = 2.*M_PI+o_s1.omega;
565     }

```

```
566     fprintf(oe_s1,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s1.a,o_s1.e, o_s1.
      inc, o_s1.omega, o_s1.Omega);
567     fclose(oe_s1);
568
569     struct reb_particle* par_s4 = &r->particles[3];
570     struct reb_orbit o_s4 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s4,*
      imbh);
571     FILE* oe_s4 = fopen("orbital_elements_s4_006.txt","ab");
572     if(o_s4.Omega < 0.){
573         o_s4.Omega = 2.*M_PI+o_s4.Omega;
574     }
575     if(o_s4.omega < 0.){
576         o_s4.omega = 2.*M_PI+o_s4.omega;
577     }
578     fprintf(oe_s4,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s4.a,o_s4.e, o_s4.
      inc, o_s4.omega, o_s4.Omega);
579     fclose(oe_s4);
580
581     struct reb_particle* par_s6 = &r->particles[4];
582     struct reb_orbit o_s6 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s6,*
      imbh);
583     FILE* oe_s6 = fopen("orbital_elements_s6_006.txt","ab");
584     if(o_s6.Omega < 0.){
585         o_s6.Omega = 2.*M_PI+o_s6.Omega;
586     }
587     if(o_s6.omega < 0.){
588         o_s6.omega = 2.*M_PI+o_s6.omega;
589     }
590     fprintf(oe_s6,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s6.a,o_s6.e, o_s6.
      inc, o_s6.omega, o_s6.Omega);
591     fclose(oe_s6);
592
593     struct reb_particle* par_s8 = &r->particles[5];
594     struct reb_orbit o_s8 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s8,*
      imbh);
595     FILE* oe_s8 = fopen("orbital_elements_s8_006.txt","ab");
596     if(o_s8.Omega < 0.){
597         o_s8.Omega = 2.*M_PI+o_s8.Omega;
598     }
599     if(o_s8.omega < 0.){
600         o_s8.omega = 2.*M_PI+o_s8.omega;
601     }
602     fprintf(oe_s8,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s8.a,o_s8.e, o_s8.
      inc, o_s8.omega, o_s8.Omega);
603     fclose(oe_s8);
604
605     struct reb_particle* par_s9 = &r->particles[6];
606     struct reb_orbit o_s9 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s9,*
```

```

        imbh);
607 FILE* oe_s9 = fopen("orbital_elements_s9_006.txt","ab");
608 if(o_s9.Omega < 0.){
609     o_s9.Omega = 2.*M_PI+o_s9.Omega;
610 }
611 if(o_s9.omega < 0.){
612     o_s9.omega = 2.*M_PI+o_s9.omega;
613 }
614 fprintf(oe_s9,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s9.a,o_s9.e, o_s9.
        inc, o_s9.omega, o_s9.Omega);
615 fclose(oe_s9);
616
617 struct reb_particle* par_s12 = &r->particles[7];
618 struct reb_orbit o_s12 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s12
        ,*imbh);
619 FILE* oe_s12 = fopen("orbital_elements_s12_006.txt","ab");
620 if(o_s12.Omega < 0.){
621     o_s12.Omega = 2.*M_PI+o_s12.Omega;
622 }
623 if(o_s12.omega < 0.){
624     o_s12.omega = 2.*M_PI+o_s12.omega;
625 }
626 fprintf(oe_s12,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s12.a,o_s12.e,
        o_s12.inc, o_s12.omega, o_s12.Omega);
627 fclose(oe_s12);
628
629 struct reb_particle* par_s13 = &r->particles[8];
630 struct reb_orbit o_s13 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s13
        ,*imbh);
631 FILE* oe_s13 = fopen("orbital_elements_s13_006.txt","ab");
632 if(o_s13.Omega < 0.){
633     o_s13.Omega = 2.*M_PI+o_s13.Omega;
634 }
635 if(o_s13.omega < 0.){
636     o_s13.omega = 2.*M_PI+o_s13.omega;
637 }
638 fprintf(oe_s13,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s13.a,o_s13.e,
        o_s13.inc, o_s13.omega, o_s13.Omega);
639 fclose(oe_s13);
640
641 struct reb_particle* par_s14 = &r->particles[9];
642 struct reb_orbit o_s14 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s14
        ,*imbh);
643 FILE* oe_s14 = fopen("orbital_elements_s14_006.txt","ab");
644 if(o_s14.Omega < 0.){
645     o_s14.Omega = 2.*M_PI+o_s14.Omega;
646 }
647 if(o_s14.omega < 0.){

```

```
648     o_s14.omega = 2.*M_PI+o_s14.omega;
649 }
650 fprintf(oe_s14,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s14.a,o_s14.e,
        o_s14.inc, o_s14.omega, o_s14.Omega);
651 fclose(oe_s14);
652
653 struct reb_particle* par_s17 = &r->particles[10];
654 struct reb_orbit o_s17 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s17
        ,*imbh);
655 FILE* oe_s17 = fopen("orbital_elements_s17_006.txt","ab");
656 if(o_s17.Omega < 0.){
657     o_s17.Omega = 2.*M_PI+o_s17.Omega;
658 }
659 if(o_s17.omega < 0.){
660     o_s17.omega = 2.*M_PI+o_s17.omega;
661 }
662 fprintf(oe_s17,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s17.a,o_s17.e,
        o_s17.inc, o_s17.omega, o_s17.Omega);
663 fclose(oe_s17);
664
665 struct reb_particle* par_s18 = &r->particles[11];
666 struct reb_orbit o_s18 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s18
        ,*imbh);
667 FILE* oe_s18 = fopen("orbital_elements_s18_006.txt","ab");
668 if(o_s18.Omega < 0.){
669     o_s18.Omega = 2.*M_PI+o_s18.Omega;
670 }
671 if(o_s18.omega < 0.){
672     o_s18.omega = 2.*M_PI+o_s18.omega;
673 }
674 fprintf(oe_s18,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s18.a,o_s18.e,
        o_s18.inc, o_s18.omega, o_s18.Omega);
675 fclose(oe_s18);
676
677 struct reb_particle* par_s19 = &r->particles[12];
678 struct reb_orbit o_s19 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s19
        ,*imbh);
679 FILE* oe_s19 = fopen("orbital_elements_s19_006.txt","ab");
680 if(o_s19.Omega < 0.){
681     o_s19.Omega = 2.*M_PI+o_s19.Omega;
682 }
683 if(o_s19.omega < 0.){
684     o_s19.omega = 2.*M_PI+o_s19.omega;
685 }
686 fprintf(oe_s19,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s19.a,o_s19.e,
        o_s19.inc, o_s19.omega, o_s19.Omega);
687 fclose(oe_s19);
688
```

```
689     struct reb_particle* par_s21 = &r->particles[13];
690     struct reb_orbit o_s21 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s21
        ,*imbh);
691     FILE* oe_s21 = fopen("orbital_elements_s21_006.txt","ab");
692     if(o_s21.Omega < 0.){
693         o_s21.Omega = 2.*M_PI+o_s21.Omega;
694     }
695     if(o_s21.omega < 0.){
696         o_s21.omega = 2.*M_PI+o_s21.omega;
697     }
698     fprintf(oe_s21,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s21.a,o_s21.e,
        o_s21.inc, o_s21.omega, o_s21.Omega);
699     fclose(oe_s21);
700
701     struct reb_particle* par_s22 = &r->particles[14];
702     struct reb_orbit o_s22 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s22
        ,*imbh);
703     FILE* oe_s22 = fopen("orbital_elements_s22_006.txt","ab");
704     if(o_s22.Omega < 0.){
705         o_s22.Omega = 2.*M_PI+o_s22.Omega;
706     }
707     if(o_s22.omega < 0.){
708         o_s22.omega = 2.*M_PI+o_s22.omega;
709     }
710     fprintf(oe_s22,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s22.a,o_s22.e,
        o_s22.inc, o_s22.omega, o_s22.Omega);
711     fclose(oe_s22);
712
713     struct reb_particle* par_s23 = &r->particles[15];
714     struct reb_orbit o_s23 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s23
        ,*imbh);
715     FILE* oe_s23 = fopen("orbital_elements_s23_006.txt","ab");
716     if(o_s23.Omega < 0.){
717         o_s23.Omega = 2.*M_PI+o_s23.Omega;
718     }
719     if(o_s23.omega < 0.){
720         o_s23.omega = 2.*M_PI+o_s23.omega;
721     }
722     fprintf(oe_s23,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s23.a,o_s23.e,
        o_s23.inc, o_s23.omega, o_s23.Omega);
723     fclose(oe_s23);
724
725     struct reb_particle* par_s24 = &r->particles[16];
726     struct reb_orbit o_s24 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s24
        ,*imbh);
727     FILE* oe_s24 = fopen("orbital_elements_s24_006.txt","ab");
728     if(o_s24.Omega < 0.){
729         o_s24.Omega = 2.*M_PI+o_s24.Omega;
```

```
730     }
731     if(o_s24.omega < 0.){
732         o_s24.omega = 2.*M_PI+o_s24.omega;
733     }
734     fprintf(oe_s24,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s24.a,o_s24.e,
735         o_s24.inc, o_s24.omega, o_s24.Omega);
736     fclose(oe_s24);
737
738     struct reb_particle* par_s29 = &r->particles[17];
739     struct reb_orbit o_s29 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s29
740         ,*imbh);
741     FILE* oe_s29 = fopen("orbital_elements_s29_006.txt","ab");
742     if(o_s29.Omega < 0.){
743         o_s29.Omega = 2.*M_PI+o_s29.Omega;
744     }
745     if(o_s29.omega < 0.){
746         o_s29.omega = 2.*M_PI+o_s29.omega;
747     }
748     fprintf(oe_s29,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s29.a,o_s29.e,
749         o_s29.inc, o_s29.omega, o_s29.Omega);
750     fclose(oe_s29);
751
752     struct reb_particle* par_s31 = &r->particles[18];
753     struct reb_orbit o_s31 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s31
754         ,*imbh);
755     FILE* oe_s31 = fopen("orbital_elements_s31_006.txt","ab");
756     if(o_s31.Omega < 0.){
757         o_s31.Omega = 2.*M_PI+o_s31.Omega;
758     }
759     if(o_s31.omega < 0.){
760         o_s31.omega = 2.*M_PI+o_s31.omega;
761     }
762     fprintf(oe_s31,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s31.a,o_s31.e,
763         o_s31.inc, o_s31.omega, o_s31.Omega);
764     fclose(oe_s31);
765
766     struct reb_particle* par_s33 = &r->particles[19];
767     struct reb_orbit o_s33 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s33
768         ,*imbh);
769     FILE* oe_s33 = fopen("orbital_elements_s33_006.txt","ab");
770     if(o_s33.Omega < 0.){
771         o_s33.Omega = 2.*M_PI+o_s33.Omega;
772     }
773     if(o_s33.omega < 0.){
774         o_s33.omega = 2.*M_PI+o_s33.omega;
775     }
776     fprintf(oe_s33,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s33.a,o_s33.e,
777         o_s33.inc, o_s33.omega, o_s33.Omega);
```

```
771         fclose(oe_s33);
772
773         struct reb_particle* par_s38 = &r->particles[20];
774         struct reb_orbit o_s38 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s38
775             ,*imbh);
775         FILE* oe_s38 = fopen("orbital_elements_s38_006.txt","ab");
776         if(o_s38.Omega < 0.){
777             o_s38.Omega = 2.*M_PI+o_s38.Omega;
778         }
779         if(o_s38.omega < 0.){
780             o_s38.omega = 2.*M_PI+o_s38.omega;
781         }
782         fprintf(oe_s38,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s38.a,o_s38.e,
783             o_s38.inc, o_s38.omega, o_s38.Omega);
784         fclose(oe_s38);
785
786         struct reb_particle* par_s39 = &r->particles[21];
787         struct reb_orbit o_s39 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s39
788             ,*imbh);
789         FILE* oe_s39 = fopen("orbital_elements_s39_006.txt","ab");
790         if(o_s39.Omega < 0.){
791             o_s39.Omega = 2.*M_PI+o_s39.Omega;
792         }
793         if(o_s39.omega < 0.){
794             o_s39.omega = 2.*M_PI+o_s39.omega;
795         }
796         fprintf(oe_s39,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s39.a,o_s39.e,
797             o_s39.inc, o_s39.omega, o_s39.Omega);
798         fclose(oe_s39);
799
800         struct reb_particle* par_s42 = &r->particles[22];
801         struct reb_orbit o_s42 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s42
802             ,*imbh);
803         FILE* oe_s42 = fopen("orbital_elements_s42_006.txt","ab");
804         if(o_s42.Omega < 0.){
805             o_s42.Omega = 2.*M_PI+o_s42.Omega;
806         }
807         if(o_s42.omega < 0.){
808             o_s42.omega = 2.*M_PI+o_s42.omega;
809         }
810         fprintf(oe_s42,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s42.a,o_s42.e,
811             o_s42.inc, o_s42.omega, o_s42.Omega);
812         fclose(oe_s42);
813
814         struct reb_particle* par_s54 = &r->particles[23];
815         struct reb_orbit o_s54 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s54
816             ,*imbh);
817         FILE* oe_s54 = fopen("orbital_elements_s54_006.txt","ab");
```

```
812     if(o_s54.Omega < 0.){
813         o_s54.Omega = 2.*M_PI+o_s54.Omega;
814     }
815     if(o_s54.omega < 0.){
816         o_s54.omega = 2.*M_PI+o_s54.omega;
817     }
818     fprintf(oe_s54,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s54.a,o_s54.e,
        o_s54.inc, o_s54.omega, o_s54.Omega);
819     fclose(oe_s54);
820
821     struct reb_particle* par_s55 = &r->particles[24];
822     struct reb_orbit o_s55 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s55
        ,*imbh);
823     FILE* oe_s55 = fopen("orbital_elements_s55_006.txt","ab");
824     if(o_s55.Omega < 0.){
825         o_s55.Omega = 2.*M_PI+o_s55.Omega;
826     }
827     if(o_s55.omega < 0.){
828         o_s55.omega = 2.*M_PI+o_s55.omega;
829     }
830     fprintf(oe_s55,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s55.a,o_s55.e,
        o_s55.inc, o_s55.omega, o_s55.Omega);
831     fclose(oe_s55);
832
833     struct reb_particle* par_s60 = &r->particles[25];
834     struct reb_orbit o_s60 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s60
        ,*imbh);
835     FILE* oe_s60 = fopen("orbital_elements_s60_006.txt","ab");
836     if(o_s60.Omega < 0.){
837         o_s60.Omega = 2.*M_PI+o_s60.Omega;
838     }
839     if(o_s60.omega < 0.){
840         o_s60.omega = 2.*M_PI+o_s60.omega;
841     }
842     fprintf(oe_s60,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s60.a,o_s60.e,
        o_s60.inc, o_s60.omega, o_s60.Omega);
843     fclose(oe_s60);
844
845     struct reb_particle* par_s62 = &r->particles[26];
846     struct reb_orbit o_s62 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s62
        ,*imbh);
847     FILE* oe_s62 = fopen("orbital_elements_s62_006.txt","ab");
848     if(o_s62.Omega < 0.){
849         o_s62.Omega = 2.*M_PI+o_s62.Omega;
850     }
851     if(o_s62.omega < 0.){
852         o_s62.omega = 2.*M_PI+o_s62.omega;
853     }
```

```
854     fprintf(oe_s62, "%f %f %f %f %f %f\n", r->t, o_s62.a, o_s62.e,
855           o_s62.inc, o_s62.omega, o_s62.Omega);
856
857     struct reb_particle* par_s64 = &r->particles[27];
858     struct reb_orbit o_s64 = reb_orbit_from_particle(r->G, *par_s64,
859           *imbh);
859     FILE* oe_s64 = fopen("orbital_elements_s64_006.txt", "ab");
860     if(o_s64.Omega < 0.){
861         o_s64.Omega = 2.*M_PI+o_s64.Omega;
862     }
863     if(o_s64.omega < 0.){
864         o_s64.omega = 2.*M_PI+o_s64.omega;
865     }
866     fprintf(oe_s64, "%f %f %f %f %f %f\n", r->t, o_s64.a, o_s64.e,
867           o_s64.inc, o_s64.omega, o_s64.Omega);
868
869     struct reb_particle* par_s66 = &r->particles[28];
870     struct reb_orbit o_s66 = reb_orbit_from_particle(r->G, *par_s66,
871           *imbh);
871     FILE* oe_s66 = fopen("orbital_elements_s66_006.txt", "ab");
872     if(o_s66.Omega < 0.){
873         o_s66.Omega = 2.*M_PI+o_s66.Omega;
874     }
875     if(o_s66.omega < 0.){
876         o_s66.omega = 2.*M_PI+o_s66.omega;
877     }
878     fprintf(oe_s66, "%f %f %f %f %f %f\n", r->t, o_s66.a, o_s66.e,
879           o_s66.inc, o_s66.omega, o_s66.Omega);
880
881     struct reb_particle* par_s67 = &r->particles[29];
882     struct reb_orbit o_s67 = reb_orbit_from_particle(r->G, *par_s67,
883           *imbh);
883     FILE* oe_s67 = fopen("orbital_elements_s67_006.txt", "ab");
884     if(o_s67.Omega < 0.){
885         o_s67.Omega = 2.*M_PI+o_s67.Omega;
886     }
887     if(o_s67.omega < 0.){
888         o_s67.omega = 2.*M_PI+o_s67.omega;
889     }
890     fprintf(oe_s67, "%f %f %f %f %f %f\n", r->t, o_s67.a, o_s67.e,
891           o_s67.inc, o_s67.omega, o_s67.Omega);
892
893     struct reb_particle* par_s71 = &r->particles[30];
894     struct reb_orbit o_s71 = reb_orbit_from_particle(r->G, *par_s71
```

```

    ,*imbh);
895 FILE* oe_s71 = fopen("orbital_elements_s71_006.txt","ab");
896 if(o_s71.Omega < 0.){
897     o_s71.Omega = 2.*M_PI+o_s71.Omega;
898 }
899 if(o_s71.omega < 0.){
900     o_s71.omega = 2.*M_PI+o_s71.omega;
901 }
902 fprintf(oe_s71,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s71.a,o_s71.e,
    o_s71.inc, o_s71.omega, o_s71.Omega);
903 fclose(oe_s71);
904
905 struct reb_particle* par_s83 = &r->particles[31];
906 struct reb_orbit o_s83 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s83
    ,*imbh);
907 FILE* oe_s83 = fopen("orbital_elements_s83_006.txt","ab");
908 if(o_s83.Omega < 0.){
909     o_s83.Omega = 2.*M_PI+o_s83.Omega;
910 }
911 if(o_s83.omega < 0.){
912     o_s83.omega = 2.*M_PI+o_s83.omega;
913 }
914 fprintf(oe_s83,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s83.a,o_s83.e,
    o_s83.inc, o_s83.omega, o_s83.Omega);
915 fclose(oe_s83);
916
917 struct reb_particle* par_s85 = &r->particles[32];
918 struct reb_orbit o_s85 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s85
    ,*imbh);
919 FILE* oe_s85 = fopen("orbital_elements_s85_006.txt","ab");
920 if(o_s85.Omega < 0.){
921     o_s85.Omega = 2.*M_PI+o_s85.Omega;
922 }
923 if(o_s85.omega < 0.){
924     o_s85.omega = 2.*M_PI+o_s85.omega;
925 }
926 fprintf(oe_s85,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s85.a,o_s85.e,
    o_s85.inc, o_s85.omega, o_s85.Omega);
927 fclose(oe_s85);
928
929 struct reb_particle* par_s87 = &r->particles[33];
930 struct reb_orbit o_s87 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s87
    ,*imbh);
931 FILE* oe_s87 = fopen("orbital_elements_s87_006.txt","ab");
932 if(o_s87.Omega < 0.){
933     o_s87.Omega = 2.*M_PI+o_s87.Omega;
934 }
935 if(o_s87.omega < 0.){
```

```
936     o_s87.omega = 2.*M_PI+o_s87.omega;
937 }
938 fprintf(oe_s87,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s87.a,o_s87.e,
939         o_s87.inc, o_s87.omega, o_s87.Omega);
940 fclose(oe_s87);
941
942 struct reb_particle* par_s89 = &r->particles[34];
943 struct reb_orbit o_s89 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s89
944         ,*imbh);
945 FILE* oe_s89 = fopen("orbital_elements_s89_006.txt","ab");
946 if(o_s89.Omega < 0.){
947     o_s89.Omega = 2.*M_PI+o_s89.Omega;
948 }
949 if(o_s89.omega < 0.){
950     o_s89.omega = 2.*M_PI+o_s89.omega;
951 }
952 fprintf(oe_s89,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s89.a,o_s89.e,
953         o_s89.inc, o_s89.omega, o_s89.Omega);
954 fclose(oe_s89);
955
956 struct reb_particle* par_s91 = &r->particles[35];
957 struct reb_orbit o_s91 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s91
958         ,*imbh);
959 FILE* oe_s91 = fopen("orbital_elements_s91_006.txt","ab");
960 if(o_s91.Omega < 0.){
961     o_s91.Omega = 2.*M_PI+o_s91.Omega;
962 }
963 if(o_s91.omega < 0.){
964     o_s91.omega = 2.*M_PI+o_s91.omega;
965 }
966 fprintf(oe_s91,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s91.a,o_s91.e,
967         o_s91.inc, o_s91.omega, o_s91.Omega);
968 fclose(oe_s91);
969
970 struct reb_particle* par_s96 = &r->particles[36];
971 struct reb_orbit o_s96 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s96
972         ,*imbh);
973 FILE* oe_s96 = fopen("orbital_elements_s96_006.txt","ab");
974 if(o_s96.Omega < 0.){
975     o_s96.Omega = 2.*M_PI+o_s96.Omega;
976 }
977 if(o_s96.omega < 0.){
978     o_s96.omega = 2.*M_PI+o_s96.omega;
979 }
980 fprintf(oe_s96,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s96.a,o_s96.e,
981         o_s96.inc, o_s96.omega, o_s96.Omega);
982 fclose(oe_s96);
```

```
977 struct reb_particle* par_s97 = &r->particles[37];
978 struct reb_orbit o_s97 = reb_orbit_from_particle(r->G,*par_s97
    ,*imbh);
979 FILE* oe_s97 = fopen("orbital_elements_s97_006.txt","ab");
980 if(o_s97.Omega < 0.){
981     o_s97.Omega = 2.*M_PI+o_s97.Omega;
982 }
983 if(o_s97.omega < 0.){
984     o_s97.omega = 2.*M_PI+o_s97.omega;
985 }
986 fprintf(oe_s97,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s97.a,o_s97.e,
    o_s97.inc, o_s97.omega, o_s97.Omega);
987 fclose(oe_s97);
988
989 struct reb_particle* par_s145 = &r->particles[38];
990 struct reb_orbit o_s145 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
    par_s145,*imbh);
991 FILE* oe_s145 = fopen("orbital_elements_s145_006.txt","ab");
992 if(o_s145.Omega < 0.){
993     o_s145.Omega = 2.*M_PI+o_s145.Omega;
994 }
995 if(o_s145.omega < 0.){
996     o_s145.omega = 2.*M_PI+o_s145.omega;
997 }
998 fprintf(oe_s145,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s145.a,o_s145.e,
    o_s145.inc, o_s145.omega, o_s145.Omega);
999 fclose(oe_s145);
1000
1001 struct reb_particle* par_s175 = &r->particles[39];
1002 struct reb_orbit o_s175 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
    par_s175,*imbh);
1003 FILE* oe_s175 = fopen("orbital_elements_s175_006.txt","ab");
1004 if(o_s175.Omega < 0.){
1005     o_s175.Omega = 2.*M_PI+o_s175.Omega;
1006 }
1007 if(o_s175.omega < 0.){
1008     o_s175.omega = 2.*M_PI+o_s175.omega;
1009 }
1010 fprintf(oe_s175,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s175.a,o_s175.e,
    o_s175.inc, o_s175.omega, o_s175.Omega);
1011 fclose(oe_s175);
1012
1013 struct reb_particle* par_s4711 = &r->particles[40];
1014 struct reb_orbit o_s4711 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
    par_s4711,*imbh);
1015 FILE* oe_s4711 = fopen("orbital_elements_s4711_006.txt","ab");
1016 if(o_s4711.Omega < 0.){
1017     o_s4711.Omega = 2.*M_PI+o_s4711.Omega;
```

```
1018     }
1019     if(o_s4711.omega < 0.){
1020         o_s4711.omega = 2.*M_PI+o_s4711.omega;
1021     }
1022     fprintf(oe_s4711,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s4711.a,o_s4711.e
        , o_s4711.inc , o_s4711.omega , o_s4711.Omega);
1023     fclose(oe_s4711);
1024
1025     struct reb_particle* par_s4712 = &r->particles[41];
1026     struct reb_orbit o_s4712 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
        par_s4712,*imbh);
1027     FILE* oe_s4712 = fopen("orbital_elements_s4712_006.txt","ab");
1028     if(o_s4712.Omega < 0.){
1029         o_s4712.Omega = 2.*M_PI+o_s4712.Omega;
1030     }
1031     if(o_s4712.omega < 0.){
1032         o_s4712.omega = 2.*M_PI+o_s4712.omega;
1033     }
1034     fprintf(oe_s4712,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s4712.a,o_s4712.e
        , o_s4712.inc , o_s4712.omega , o_s4712.Omega);
1035     fclose(oe_s4712);
1036
1037     struct reb_particle* par_s4713 = &r->particles[42];
1038     struct reb_orbit o_s4713 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
        par_s4713,*imbh);
1039     FILE* oe_s4713 = fopen("orbital_elements_s4713_006.txt","ab");
1040     if(o_s4713.Omega < 0.){
1041         o_s4713.Omega = 2.*M_PI+o_s4713.Omega;
1042     }
1043     if(o_s4713.omega < 0.){
1044         o_s4713.omega = 2.*M_PI+o_s4713.omega;
1045     }
1046     fprintf(oe_s4713,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s4713.a,o_s4713.e
        , o_s4713.inc , o_s4713.omega , o_s4713.Omega);
1047     fclose(oe_s4713);
1048
1049     struct reb_particle* par_s4714 = &r->particles[43];
1050     struct reb_orbit o_s4714 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
        par_s4714,*imbh);
1051     FILE* oe_s4714 = fopen("orbital_elements_s4714_006.txt","ab");
1052     if(o_s4714.Omega < 0.){
1053         o_s4714.Omega = 2.*M_PI+o_s4714.Omega;
1054     }
1055     if(o_s4714.omega < 0.){
1056         o_s4714.omega = 2.*M_PI+o_s4714.omega;
1057     }
1058     fprintf(oe_s4714,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s4714.a,o_s4714.e
        , o_s4714.inc , o_s4714.omega , o_s4714.Omega);
```

```

1059         fclose(oe_s4714);
1060
1061         struct reb_particle* par_s4715 = &r->particles[44];
1062         struct reb_orbit o_s4715 = reb_orbit_from_particle(r->G,*
            par_s4715,*imbh);
1063         FILE* oe_s4715 = fopen("orbital_elements_s4715_006.txt","ab");
1064         if(o_s4715.Omega < 0.){
1065             o_s4715.Omega = 2.*M_PI+o_s4715.Omega;
1066         }
1067         if(o_s4715.omega < 0.){
1068             o_s4715.omega = 2.*M_PI+o_s4715.omega;
1069         }
1070         fprintf(oe_s4715,"%f %f %f %f %f %f\n",r->t,o_s4715.a,o_s4715.e
            , o_s4715.inc, o_s4715.omega, o_s4715.Omega);
1071         fclose(oe_s4715);
1072
1073
1074
1075     }}

```

Listing B.6: programa integrador (sección de cálculo de los elementos orbitales de las estrellas del cúmulo)

B.I.III. Cálculo de 2.1.48 mediante teoría de propagación de errores

```

1  import numpy as np
2  from uncertainties import ufloat
3  from uncertainties.unumpy import nominal_values, std_devs
4  data = np.loadtxt("graf_disp.txt")#contiene a,delta_a,e,delta_e(Ali y
    Peibker),delta_a,delta_e(calculados en python),omega_nominal,
    omega_error en grados
5
6  a = data[:,0]*206.26480624709636 #en UA
7  G = 39.47841760435743 #constante de gravitacion universal (tiene
    unidades de UA,yr,masa_solar)
8  c = 3e5*0.210949526569 #en UA/yr
9  e = data[:,2]
10 M = 4.3e6 #en M_sol
11
12 da = data[:,1]*206.26480624709636 #error en a en UA
13 de = data[:,3] #error en e
14 dM = 1.074e4 #error en M en M_sol
15
16 M_e = ufloat(M,dM) #valor de la masa nominal mas error
17 pr = [] #valor de delta omega nominal mas error
18 a_err = []
19 e_err = []
20

```

```

21 for i in range(len(a)):
22     e_e = ufloat(e[i],de[i]) #valor de e nominal mas error
23     a_e = ufloat(a[i],da[i]) #valor de a nominal mas error
24     dw = (6.0*np.pi*G*M_e)/(a_e*c**2*(1.-e_e**2))*180./np.pi #delta
        omega en radianes nominal mas error
25     a_err.append(a_e)
26     e_err.append(e_e)
27     pr.append(dw)
28
29 dw_teo = nominal_values(pr) #valor nominal de delta omega
30 dw_err = std_devs(pr) #error en delta omega
31 a_err = std_devs(a_err) #error en a
32 e_err = std_devs(e_err) #error en e
33
34
35 for l in range(len(pr)):
36     print(a_err[l],e_err[l],dw_teo[l],dw_err[l])

```

Listing B.7: implementación en Python de la teoría de propagación de errores

B.I.IV. Desviación relativa máxima y desviación relativa promedio de cada parámetro orbital de las estrellas de corto período

```

1 import numpy as np
2 t2,a2,e2,i2,w2,OMG2 = np.loadtxt("orbital_elements_s2_009.txt",unpack=
    True) #elementos orbitales estrella S2
3 t38,a38,e38,i38,w38,OMG38 = np.loadtxt("orbital_elements_s38_009.txt",
    unpack=True) #elementos orbitales estrella S38
4 t55,a55,e55,i55,w55,OMG55 = np.loadtxt("orbital_elements_s55_009.txt",
    unpack=True) #elementos orbitales estrella S55
5 t62,a62,e62,i62,w62,OMG62 = np.loadtxt("orbital_elements_s62_009.txt",
    unpack=True) #elementos orbitales estrella S4711
6 t4711,a4711,e4711,i4711,w4711,OMG4711 = np.loadtxt("
    orbital_elements_s4711_009.txt",unpack=True) #elementos orbitales
    estrella S4714
7 t4714,a4714,e4714,i4714,w4714,OMG4714 = np.loadtxt("
    orbital_elements_s4714_009.txt",unpack=True) #elementos orbitales
    estrella S4715
8 t4715,a4715,e4715,i4715,w4715,OMG4715 = np.loadtxt("
    orbital_elements_s4715_009.txt",unpack=True) #elementos orbitales
    teoricos de cada estrella
9 a0, e0, i0, w0, OMG0, f0, m = np.loadtxt("o_elements_prueba.txt",unpack
    =True)
10
11
12 #conversion de grados a radianes
13 i0 = np.rad2deg(i0)

```

```
14 w0 = np.rad2deg(w0)
15 OMG0 = np.rad2deg(OMG0)
16
17 i2 = np.rad2deg(i2)
18 w2 = np.rad2deg(w2)
19 OMG2 = np.rad2deg(OMG2)
20
21 i38 = np.rad2deg(i38)
22 w38 = np.rad2deg(w38)
23 OMG38 = np.rad2deg(OMG38)
24
25 i55 = np.rad2deg(i55)
26 w55 = np.rad2deg(w55)
27 OMG55 = np.rad2deg(OMG55)
28
29 i62 = np.rad2deg(i62)
30 w62 = np.rad2deg(w62)
31 OMG62 = np.rad2deg(OMG62)
32
33 i4711 = np.rad2deg(i4711)
34 w4711 = np.rad2deg(w4711)
35 OMG4711 = np.rad2deg(OMG4711)
36
37 i4714 = np.rad2deg(i4714)
38 w4714 = np.rad2deg(w4714)
39 OMG4714 = np.rad2deg(OMG4714)
40
41 i4715 = np.rad2deg(i4715)
42 w4715 = np.unwrap(w4715)
43 w4715_def = np.rad2deg(w4715)
44 OMG4715 = np.rad2deg(OMG4715)
45
46 #calculo de valores maximos de la desviacion relativa porcentual en
   cada uno delos elementos orbitales
47 max_a2 = np.max(abs((a0[0]-a2)))
48 max_e2 = np.max(abs((e0[0]-e2)))
49 max_i2 = np.max(abs((i0[0]-i2)))
50 max_w2 = np.max(abs((w0[0]-w2)))
51 max_OMG2 = np.max(abs((OMG0[0]-OMG2)))
52
53 max_a38 = np.max(abs((a0[19]-a38)))
54 max_e38 = np.max(abs((e0[19]-e38)))
55 max_i38 = np.max(abs((i0[19]-i38)))
56 max_w38 = np.max(abs((w0[19]-w38)))
57 max_OMG38 = np.max(abs((OMG0[19]-OMG38)))
58
59 max_a55 = np.max(abs((a0[23]-a55)))
60 max_e55 = np.max(abs((e0[23]-e55)))
```

```
61 max_i55 = np.max(abs((i0[23]-i55)))
62 max_w55 = np.max(abs((w0[23]-w55)))
63 max_OMG55 = np.max(abs((OMG0[23]-OMG55)))
64
65 max_a62 = np.max(abs((a0[25]-a62)))
66 max_e62 = np.max(abs((e0[25]-e62)))
67 max_i62 = np.max(abs((i0[25]-i62)))
68 max_w62 = np.max(abs((w0[25]-w62)))
69 max_OMG62 = np.max(abs((OMG0[25]-OMG62)))
70
71 max_a4711 = np.max(abs((a0[39]-a4711)))
72 max_e4711 = np.max(abs((e0[39]-e4711)))
73 max_i4711 = np.max(abs((i0[39]-i4711)))
74 max_w4711 = np.max(abs((w0[39]-w4711)))
75 max_OMG4711 = np.max(abs((OMG0[39]-OMG4711)))
76
77 max_a4714 = np.max(abs((a0[42]-a4714)))
78 max_e4714 = np.max(abs((e0[42]-e4714)))
79 max_i4714 = np.max(abs((i0[42]-i4714)))
80 max_w4714 = np.max(abs((w0[42]-w4714)))
81 max_OMG4714 = np.max(abs((OMG0[42]-OMG4714)))
82
83 max_a4715 = np.max(abs((a0[43]-a4715)))
84 max_e4715 = np.max(abs((e0[43]-e4715)))
85 max_i4715 = np.max(abs((i0[43]-i4715)))
86 max_w4715 = np.max(abs((w0[43]-w4715_def)))
87 max_OMG4715 = np.max(abs((OMG0[43]-OMG4715)))
88
89 #calculo de valores promedio de la desviacion relativa porcentual en
    cada uno de los elementos orbitales
90 mean_a2 = np.mean(abs((a0[0]-a2)))
91 mean_e2 = np.mean(abs((e0[0]-e2)))
92 mean_i2 = np.mean(abs((i0[0]-i2)))
93 mean_w2 = np.mean(abs((w0[0]-w2)))
94 mean_OMG2 = np.mean(abs((OMG0[0]-OMG2)))
95
96 mean_a38 = np.mean(abs((a0[19]-a38)))
97 mean_e38 = np.mean(abs((e0[19]-e38)))
98 mean_i38 = np.mean(abs((i0[19]-i38)))
99 mean_w38 = np.mean(abs((w0[19]-w38)))
100 mean_OMG38 = np.mean(abs((OMG0[19]-OMG38)))
101
102 mean_a55 = np.mean(abs((a0[23]-a55)))
103 mean_e55 = np.mean(abs((e0[23]-e55)))
104 mean_i55 = np.mean(abs((i0[23]-i55)))
105 mean_w55 = np.mean(abs((w0[23]-w55)))
106 mean_OMG55 = np.mean(abs((OMG0[23]-OMG55)))
107
```

```
108 mean_a62 = np.mean(abs((a0[25]-a62)))
109 mean_e62 = np.mean(abs((e0[25]-e62)))
110 mean_i62 = np.mean(abs((i0[25]-i62)))
111 mean_w62 = np.mean(abs((w0[25]-w62)))
112 mean_OMG62 = np.mean(abs((OMG0[25]-OMG62)))
113
114 mean_a4711 = np.mean(abs((a0[39]-a4711)))
115 mean_e4711 = np.mean(abs((e0[39]-e4711)))
116 mean_i4711 = np.mean(abs((i0[39]-i4711)))
117 mean_w4711 = np.mean(abs((w0[39]-w4711)))
118 mean_OMG4711 = np.mean(abs((OMG0[39]-OMG4711)))
119
120 mean_a4714 = np.mean(abs((a0[42]-a4714)))
121 mean_e4714 = np.mean(abs((e0[42]-e4714)))
122 mean_i4714 = np.mean(abs((i0[42]-i4714)))
123 mean_w4714 = np.mean(abs((w0[42]-w4714)))
124 mean_OMG4714 = np.mean(abs((OMG0[42]-OMG4714)))
125
126 mean_a4715 = np.mean(abs((a0[43]-a4715)))
127 mean_e4715 = np.mean(abs((e0[43]-e4715)))
128 mean_i4715 = np.mean(abs((i0[43]-i4715)))
129 mean_w4715 = np.mean(abs((w0[43]-w4715_def)))
130 mean_OMG4715 = np.mean(abs((OMG0[43]-OMG4715)))
131
132 output_file = "max_perturbations_percentage_100k_d.txt"
133 with open(output_file,"w") as f:
134     f.write("=====\n")
135     f.write("Max perturbations:\n")
136     f.write("-----\n")
137     f.write(f"{'S2':<10}{max_a2:>14.3e}{max_e2:>14.3e}{max_i2:>14.3e}{max_w2:>14.3e}{max_OMG2:>14.3e}\n")
138     f.write(f"{'S38':<10}{max_a38:>14.3e}{max_e38:>14.3e}{max_i38:>14.3e}{max_w38:>14.3e}{max_OMG38:>14.3e}\n")
139     f.write(f"{'S55':<10}{max_a55:>14.3e}{max_e55:>14.3e}{max_i55:>14.3e}{max_w55:>14.3e}{max_OMG55:>14.3e}\n")
140     f.write(f"{'S62':<10}{max_a62:>14.3e}{max_e62:>14.3e}{max_i62:>14.3e}{max_w62:>14.3e}{max_OMG62:>14.3e}\n")
141     f.write(f"{'S4711':<10}{max_a4711:>14.3e}{max_e4711:>14.3e}{max_i4711:>14.3e}{max_w4711:>14.3e}{max_OMG4711:>14.3e}\n")
142     f.write(f"{'S4714':<10}{max_a4714:>14.3e}{max_e4714:>14.3e}{max_i4714:>14.3e}{max_w4714:>14.3e}{max_OMG4714:>14.3e}\n")
143     f.write(f"{'S4715':<10}{max_a4715:>14.3e}{max_e4715:>14.3e}{max_i4715:>14.3e}{max_w4715:>14.3e}{max_OMG4715:>14.3e}\n")
144     f.write("=====\n")
145
146 output_file = "mean_perturbations_percentage_100k_d.txt"
147 with open(output_file,"w") as f:
148     f.write("=====\n")
```

```

149 f.write("Mean perturbations:\n")
150 f.write("-----\n")
151 f.write(f"{'S2:':<10}{mean_a2:>14.3e}{mean_e2:>14.3e}{mean_i2:>14.3e}{mean_w2:>14.3e}{mean_OMG2:>14.3e}\n")
152 f.write(f"{'S38:':<10}{mean_a38:>14.3e}{mean_e38:>14.3e}{mean_i38:>14.3e}{mean_w38:>14.3e}{mean_OMG38:>14.3e}\n")
153 f.write(f"{'S55:':<10}{mean_a55:>14.3e}{mean_e55:>14.3e}{mean_i55:>14.3e}{mean_w55:>14.3e}{mean_OMG55:>14.3e}\n")
154 f.write(f"{'S62:':<10}{mean_a62:>14.3e}{mean_e62:>14.3e}{mean_i62:>14.3e}{mean_w62:>14.3e}{mean_OMG62:>14.3e}\n")
155 f.write(f"{'S4711:':<10}{mean_a4711:>14.3e}{mean_e4711:>14.3e}{mean_i4711:>14.3e}{mean_w4711:>14.3e}{mean_OMG4711:>14.3e}\n")
156 f.write(f"{'S4714:':<10}{mean_a4714:>14.3e}{mean_e4714:>14.3e}{mean_i4714:>14.3e}{mean_w4714:>14.3e}{mean_OMG4714:>14.3e}\n")
157 f.write(f"{'S4715:':<10}{mean_a4715:>14.3e}{mean_e4715:>14.3e}{mean_i4715:>14.3e}{mean_w4715:>14.3e}{mean_OMG4715:>14.3e}\n")
158 f.write("=====\n")

```

Listing B.8: rutina implementada para el cálculo de los errores relativos porcentuales máximos

B.II. Rutinas asociadas a creación de gráficas

B.II.I. Posición inicial del sistema previo a la integración

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 data = np.loadtxt("o_elements_prueba.txt") #contiene datos de a(UA),e,i
      (rad),omega(rad),Omega(rad),nu(rad)
5
6 #parametros orbitales
7 a = data[:,0] #medido en UA
8 e = data[:,1]
9 i = data[:,2] #medido en radianes
10 Omega = data[:,3] #medido en radianes
11 omega = data[:,4] #medido en radianes
12 nu = data[:,5] #medido en radianes
13 m_stars = data[:,6]
14
15 #condiciones iniciales
16 G = 39.47841760435743 #unidades de UA/(yr*M_sun)
17 m_sgr = 4.3e6
18 mu = G*(m_sgr + m_stars[0])
19 x = []
20 y = []
21 z = []

```

```

22 vx = []
23 vy = []
24 vz = []
25
26 for j in range(len(a)):
27     par = a[j]*(1-e[j]**2)
28     r = par/(1+e[j]*np.cos(nu[j]))
29     theta = omega[j]+nu[j]
30     h = np.sqrt(mu*par)
31
32     #componentes de la posicion inicial
33     x_ini = r*(np.cos(Omega[j])*np.cos(theta)-np.sin(Omega[j])*np.cos(i
        [j])*np.sin(theta))
34     x.append(x_ini)
35     y_ini = r*(np.sin(Omega[j])*np.cos(theta)+np.cos(Omega[j])*np.cos(i
        [j])*np.sin(theta))
36     y.append(y_ini)
37     z_ini = r*(np.sin(i[j])*np.sin(theta))
38     z.append(z_ini)
39
40     #componentes de la velocidad inicial
41     vx_ini = -(mu/h)*(np.cos(Omega[j])*(np.sin(theta)+e[j]*np.sin(omega
        [j]))+np.sin(Omega[j])*(np.cos(theta)+e[j]*np.cos(omega[j]))*np.
        cos(i[j]))
42     vx.append(vx_ini)
43     vy_ini = -(mu/h)*(np.sin(Omega[j])*(np.sin(theta)+e[j]*np.sin(omega
        [j]))-np.cos(Omega[j])*(np.cos(theta)+e[j]*np.cos(omega[j]))*np.
        cos(i[j]))
44     vy.append(vy_ini)
45     vz_ini = (mu/h)*(np.cos(theta)+e[j]*np.cos(omega[j]))*np.sin(i[j])
46     vz.append(vz_ini)
47 fig = plt.figure(figsize=(9,9))
48 ax = fig.add_subplot(111,projection='3d')
49 ax.scatter(0,0,0,s=40,color="black",label = r"Sgr A$^*")
50 ax.scatter(x[0],y[0],z[0],s=12,label = "S2")
51 ax.scatter(x[1],y[1],z[1],s=12,label = "S1")
52 ax.scatter(x[2],y[2],z[2],s=12,label = "S4")
53 ax.scatter(x[3],y[3],z[3],s=12,label = "S6")
54 ax.scatter(x[4],y[4],z[4],s=12,label = "S8")
55 ax.scatter(x[5],y[5],z[5],s=12,label = "S9")
56 ax.scatter(x[6],y[6],z[6],s=12,label = "S12")
57 ax.scatter(x[7],y[7],z[7],s=12,label = "S13")
58 ax.scatter(x[8],y[8],z[8],s=12,label = "S14")
59 ax.scatter(x[9],y[9],z[9],s=12,label = "S17")
60 ax.scatter(x[10],y[10],z[10],s=12,label = "S18")
61 ax.scatter(x[11],y[11],z[11],s=12,label = "S19")
62 ax.scatter(x[12],y[12],z[12],s=12,label = "S21")
63 ax.scatter(x[13],y[13],z[13],s=12,label = "S22")

```

```

64 ax.scatter(x[14],y[14],z[14],s=12,label = "S23")
65 ax.scatter(x[15],y[15],z[15],s=12,label = "S24")
66 ax.scatter(x[16],y[16],z[16],s=12,label = "S29")
67 ax.scatter(x[17],y[17],z[17],s=12,label = "S31")
68 ax.scatter(x[18],y[18],z[18],s=12,label = "S33")
69 ax.scatter(x[19],y[19],z[19],s=12,label = "S38")
70 ax.scatter(x[20],y[20],z[20],s=12,label = "S39")
71 ax.scatter(x[21],y[21],z[21],s=12,label = "S42")
72 ax.scatter(x[22],y[22],z[22],s=12,label = "S54")
73 ax.scatter(x[23],y[23],z[23],s=12,label = "S55")
74 ax.scatter(x[24],y[24],z[24],s=12,label = "S60")
75 ax.scatter(x[25],y[25],z[25],s=12,label = "S62")
76 ax.scatter(x[26],y[26],z[26],s=12,label = "S64")
77 ax.scatter(x[27],y[27],z[27],s=12,label = "S66")
78 ax.scatter(x[28],y[28],z[28],s=12,label = "S67")
79 ax.scatter(x[29],y[29],z[29],s=12,label = "S71")
80 ax.scatter(x[30],y[30],z[30],s=12,label = "S83")
81 ax.scatter(x[31],y[31],z[31],s=12,label = "S85")
82 ax.scatter(x[32],y[32],z[32],s=12,label = "S87")
83 ax.scatter(x[33],y[33],z[33],s=12,label = "S89")
84 ax.scatter(x[34],y[34],z[34],s=12,label = "S91")
85 ax.scatter(x[35],y[35],z[35],s=12,label = "S96")
86 ax.scatter(x[36],y[36],z[36],s=12,label = "S97")
87 ax.scatter(x[37],y[37],z[37],s=12,label = "S145")
88 ax.scatter(x[38],y[38],z[38],s=12,label = "S175")
89 ax.scatter(x[39],y[39],z[39],s=12,label = "S4711")
90 ax.scatter(x[40],y[40],z[40],s=12,label = "S4712")
91 ax.scatter(x[41],y[41],z[41],s=12,label = "S4713")
92 ax.scatter(x[42],y[42],z[42],s=12,label = "S4714")
93 ax.scatter(x[43],y[43],z[43],s=12,label = "S4715")
94 ax.set_xlim([-15000,15000])
95 ax.set_ylim([-15000,15000])
96 ax.set_zlim([-15000,15000])
97 ax.set_xlabel("x (UA)", fontsize=9)
98 ax.set_ylabel("y (UA)", fontsize=9)
99 ax.set_zlabel("z (UA)", fontsize=9)
100
101 ax.tick_params(axis='both', labels=10)
102 ax.tick_params(axis='z', labels=10)
103
104 plt.legend(loc="upper left",font=5)
105 plt.tight_layout()
106 fig.subplots_adjust(left=0, right=1, bottom=0, top=0.8)
107 plt.savefig("pos_ini_Peibker.pdf", dpi=300, bbox_inches='tight')
108 plt.show()

```

Listing B.9: Rutina de creación de gráfica teniendo en cuenta τ_{S2}

B.II.II. Dispersión del argumento sobre el pericentro teórico

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 data = np.loadtxt("graf_disp.txt")#tiene como columnas a,delta_a,e,
    delta_e (dadas por Ali y Peibker) delta_a,delta_e,omega,delta_omega
    (calculadas por teoria de errores
5
6 data1 = data[:,6]
7 data2 = data[:,7]
8 delta_w_nom = [data1[0],data1[19],data1[23],data1[25],data1[39],data1
    [41],data1[42]] #valores nominales de delta omega
9 delta_w_err = [data2[0],data2[19],data2[23],data2[25],data2[39],data2
    [41],data2[42]] #errores de delta omega
10 x = np.arange(len(delta_w_err))
11
12 fig, ax = plt.subplots(
13     figsize=(16, 6),
14     constrained_layout=True
15 )
16
17 ax.errorbar(x,delta_w_nom,delta_w_err,fmt='o',color='black',ecolor='
    black',capsize=10,elinewidth=1,markersize=3)
18 ax.set_title(r"precesion de $\omega$ segun RG")
19 ax.set_ylabel(r'$\Delta \omega$ (grad)')
20 plt.xticks(x,['s2','s38','s55','s62','s4711','s4714','s4715'],rotation
    =90,ha='right',fontsize=10)
21 plt.tight_layout()
22 plt.grid(True)
23 plt.savefig("precesion_teorica_p100k.pdf",bbox_inches='tight')
24 plt.show()
```

Listing B.10: dispersion en el error del argumento del pericentro $\Delta\omega$ para estrellas de corto período orbital**B.II.III. Conservación de la energía total y del momento angular del total del sistema**

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 data = np.loadtxt("angular_momentum_system_p100k.txt") #contiene datos
    de tiempo, conservacion de la energia y conservacion del momento
    angular
5 x = data[:,0]
6 y1 = data[:,1]
7 y2 = data[:,2]
8
```

```

9 fig, (ax1, ax2) = plt.subplots(1, 2, figsize=(10,4))
10
11 ax1.plot(x, y1,color='black',lw=0.6)
12 ax1.set_title("Conservacion de la energia")
13 ax1.set_ylabel(r"$\Delta E/E$")
14 ax1.set_xlabel("tiempo (anios)")
15
16 ax2.plot(x, y2,color='black',lw=0.6)
17 ax2.set_title("Conservacion del momento angular")
18 ax2.set_ylabel(r"$\Delta L/L$")
19 ax2.set_xlabel("tiempo (anios)")
20
21 plt.tight_layout()
22 plt.savefig("cons_mov_100k.pdf", dpi=300)
23 plt.show()

```

Listing B.11: rutina de gráfica de la energía total y del momento angular total del sistema luego de la integración del sistema

B.II.IV. Evolución temporal de la posición de las estrellas tipo S

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
4
5 data1 = np.loadtxt("orbit_s2_005.txt")
6 data19 = np.loadtxt("orbit_s38_005.txt")
7 data23 = np.loadtxt("orbit_s55_005.txt")
8 data25 = np.loadtxt("orbit_s62_005.txt")
9 data39 = np.loadtxt("orbit_s4711_005.txt")
10 data42 = np.loadtxt("orbit_s4714_005.txt")
11 data43 = np.loadtxt("orbit_s4715_005.txt")
12
13 fig = plt.figure(figsize=(9,9))
14 ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
15
16 ax.scatter(0, 0, 0, s=10, color='black', label=r"Sgr A$^{*}$")
17 ax.plot(data1[:,1], data1[:,2], data1[:,3], label="S2")
18 ax.plot(data19[:,1], data19[:,2], data19[:,3], label="S38")
19 ax.plot(data23[:,1], data23[:,2], data23[:,3], label="S55")
20 ax.plot(data25[:,1], data25[:,2], data25[:,3], label="S62")
21 ax.plot(data39[:,1], data39[:,2], data39[:,3], label="S4711")
22 ax.plot(data42[:,1], data42[:,2], data42[:,3], label="S4714")
23 ax.plot(data43[:,1], data43[:,2], data43[:,3], label="S4715")
24
25 ax.set_xlim([-1500, 1500])
26 ax.set_ylim([-1500, 1500])

```

```
27 ax.set_zlim([-1500, 1500])
28
29 ax.set_xlabel("x (UA)", fontsize=10)
30 ax.set_ylabel("y (UA)", fontsize=10)
31 ax.set_zlabel("z (UA)", fontsize=10)
32
33 ax.tick_params(axis='both', labels=12)
34 ax.tick_params(axis='z', labels=12)
35 ax.legend(loc="best", fontsize=8)
36 plt.tight_layout()
37 fig.subplots_adjust(left=0, right=1, bottom=0, top=0.8)
38 plt.savefig("orbitas_precesion_p100k.pdf", dpi=300, bbox_inches='tight')
39 plt.show()
```

Listing B.12: rutina en Python que grafica las posiciones de las estrellas tipo S luego de un tiempo de integración de cien mil años

B.II.V. Perturbaciones en los elementos orbitales de las estrellas tipo S

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from matplotlib.ticker import ScalarFormatter
4
5 data = np.loadtxt("o_elements_prueba.txt") #contiene los datos
        recolectados en (Ali,2020) y (Peibker,2020)
6 data1 = np.loadtxt("orbital_elements_s2_005.txt") #contiene datos de
        tiempo de integracion ,a(UA),e,i(rad),omega(rad),Omega(rad)
7
8 t = data1[:,0] #en años
9 a = data1[:,1] #en UA
10 delta_a = abs((data[0,0]-a)/data[0,0])*100. #en UA
11 e = data1[:,2]
12 delta_e = abs((data[0,1]-e)/data[0,1])*100.
13 i = np.rad2deg(data1[:,3])
14 delta_i = abs((np.rad2deg(data[0,2])-i)/np.rad2deg(data[0,2]))*100.
15 omega = np.rad2deg(data1[:,4])
16 delta_omega = abs((np.rad2deg(data[0,3])-omega)/np.rad2deg(data[0,3]))
        *100.
17 """omega = data[:,4]
18 omega_u = np.unwrap(omega)
19 omega_def = np.rad2deg(omega_u)+360. #omega_def en el caso de s18
20 delta_omega = abs(omega_def-np.rad2deg(data1[1,3]))"""
21 Omega = np.rad2deg(data1[:,5])
22 delta_Omega = abs((np.rad2deg(data[0,4])-Omega)/np.rad2deg(data[0,4]))
        *100.
23
```

```

24 fig, axs = plt.subplots(5, 2, figsize=(16, 16), sharex=True)
25
26 lw = 0.6
27 title_fs = 12
28 label_fs = 11
29 tick_fs = 10
30
31 axs[0,0].plot(t,a,lw=lw,color='black')
32 axs[0,0].set_ylabel("a (UA)",fontsize=label_fs)
33 axs[0,0].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
34
35 axs[0,1].plot(t,delta_a,lw=lw,color='black')
36 axs[0,1].set_ylabel(r"$\Delta a$ (%)",fontsize=label_fs)
37 axs[0,1].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
38
39 axs[1,0].plot(t,e,lw=lw,color='black')
40 axs[1,0].set_ylabel("e",fontsize=label_fs)
41 axs[1,0].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
42
43 axs[1,1].plot(t,delta_e,lw=lw,color='black')
44 axs[1,1].set_ylabel(r"$\Delta e$ (%)",fontsize=label_fs)
45 axs[1,1].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
46
47 axs[2,0].plot(t,i,lw=lw,color='black')
48 axs[2,0].set_ylabel("i (grad)",fontsize=label_fs)
49 axs[2,0].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
50
51 axs[2,1].plot(t,delta_i,lw=lw,color='black')
52 axs[2,1].set_ylabel(r"$\Delta i$ (%)",fontsize=label_fs)
53 axs[2,1].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
54
55 axs[3,0].plot(t,omega,lw=lw,color='black')
56 #axs[3,0].plot(t,omega_def,lw=lw,color='black') omega_def en el caso de
    s18
57 axs[3,0].set_ylabel(r"$\omega$ (grad)",fontsize=label_fs)
58 axs[3,0].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
59
60 axs[3,1].plot(t,delta_omega,lw=lw,color='black')
61 axs[3,1].set_ylabel(r"$\Delta \omega$ (%)",fontsize=label_fs)
62 axs[3,1].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
63
64 axs[4,0].plot(t,Omega,lw=lw,color='black')
65 axs[4,0].set_ylabel(r"$\Omega$ (grad)",fontsize=label_fs)
66 axs[4,0].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)
67
68 axs[4,1].plot(t,delta_Omega,lw=lw,color='black')
69 axs[4,1].set_ylabel(r"$\Delta \Omega$ (%)",fontsize=label_fs)
70 axs[4,1].set_xlabel("t (años)",fontsize=label_fs)

```

```
71
72 for ax in axs.flatten():
73     ax.ticklabel_format(axis='y', style='plain', useOffset=False)
74
75 plt.tight_layout(rect=[0.05, 0.05, 1, 1])
76 plt.savefig("orbital_elements_s2_005.pdf", bbox_inches='tight')
77 plt.show()
```

Listing B.13: rutina de graficación correspondiente a los elementos orbitales de las estrellas de corto periodo

B.II.VI. Contribución de la precesión del argumento sobre el pericentro newtoniano a la precesión del argumento sobre el pericentro relativista luego del paso de la estrella por el pericentro

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 t, a, e, i, OMG, w = np.loadtxt("orbital_elements_s2_005.txt", unpack=
    True) #archivo con elementos orbitales calculados mediante
    simulacion
6 ts, x, y, z, vx, vy, vz, r = np.loadtxt("orbit_s2_005.txt", unpack=True) #
    archivo con posiciones y velocidades calculados mediante simulacion
7
8 w_unwrap = np.unwrap(w)
9 w_unwrap = np.rad2deg(w_unwrap)
10
11 rvec = np.column_stack((x, y, z)) #vector posicion
12 vvec = np.column_stack((vx, vy, vz)) #vector velocidad
13
14 r = np.linalg.norm(rvec, axis=1) #norma vector posicion
15 rdot = np.sum(rvec * vvec, axis=1) / r #rapidez
16
17 idx_peri = np.where((rdot[:-1] < 0) & (rdot[1:] > 0))[0] + 1 #condicion
    de paso por el pericentro
18
19 w_peri = w_unwrap[idx_peri] #argumento del pericentro
20 t_peri = t[idx_peri] #tiempo de pasaje por el pericentro
21
22
23 delta_w = np.diff(w_peri) #desviacion del argumento del pericentro
24 t_mid = 0.5*(t_peri[1:]+t_peri[:-1])
25
26 pos_1 = np.where(delta_w > 0)
27 neg_1 = np.where(delta_w < 0)
28 pos_w = delta_w[pos_1] #desviacion prograda
29 neg_w = delta_w[neg_1] #desviacion retrograda
```

```

30 pos_t = t_peri[pos_l]
31 neg_t = t_peri[neg_l]
32
33 Dwr = 0.116 #valor nominal de delta omega teorico
34 sigma = 0.028 #error de delta omega teorico
35 plt.scatter(pos_t, pos_w/Dwr, s=0.3, color='red', label=r'progrado')
36 plt.scatter(neg_t, abs(neg_w)/Dwr, s=0.3, color='green', label=r'
    retrogrado')
37 plt.axhline(y=1, color='black', linestyle='--', linewidth=2, label='
    Limite Newtoniano-RG')
38
39 plt.xlabel('t(anios)')
40 plt.ylabel(r'$\Delta\omega_{p}(N) / \Delta\omega_{p}(RG)$')
41 plt.legend(loc='upper right', bbox_to_anchor=(0.95,0.9))
42 plt.savefig("Dw_s2_relative_def.pdf", bbox_inches='tight')
43 plt.show()

```

Listing B.14: rutina implementada en Python en la cual se grafica la contribución relativista más la contribución newtoniana a la medida relativista de la desviación del argumento sobre el pericentro

B.II.VII. Comparación entre la precesión del argumento sobre el pericentro newtoniano y el argumento sobre el pericentro relativista

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 t, a, e, i, OMG, w = np.loadtxt("orbital_elements_s2_005.txt", unpack=
    True) #datos de elementos orbitales obtenidos de la integracion del
    sistema
5 ts, x, y, z, vx, vy, vz, r = np.loadtxt("orbit_s2_005.txt", unpack=True) #
    datos de posiciones y velocidades obtenidos de la integracion del
    sistema
6
7 w_unwrap = np.unwrap(w)
8 w_unwrap = np.rad2deg(w_unwrap)
9
10 rvec = np.column_stack((x, y, z)) #vector posicion de la estrella
11 vvec = np.column_stack((vx, vy, vz)) #vector velocidad de la estrella
12
13 r = np.linalg.norm(rvec, axis=1) #magnitud de la posicion
14 rdot = np.sum(rvec * vvec, axis=1) / r
15
16 idx_peri = np.where((rdot[:-1] < 0) & (rdot[1:] > 0))[0] + 1 #condicion
    de paso por el pericentro
17
18 w_peri = w_unwrap[idx_peri]
19 t_peri = t[idx_peri]

```

```

20
21 delta_w = np.diff(w_peri) #desviacion del argumento sobre el pericentro
22 t_mid = 0.5*(t_peri[1:]+t_peri[:-1])
23
24 pos_l = np.where(delta_w>0)
25 neg_l = np.where(delta_w<0)
26 pos_w = delta_w[pos_l] #desviacion prograda
27 neg_w = delta_w[neg_l] #desviacion retrograda
28 pos_t = t_peri[pos_l]
29 neg_t = t_peri[neg_l]
30
31 Dwr = 0.206 #valor nominal de delta omega calculado con propagacion de
    errores
32 sigma = 0.038 #error en delta omega
33
34 plt.scatter(pos_t, Dwr+pos_w, s=0.3, color='black')
35 plt.scatter(neg_t, Dwr+neg_w, s=0.3, color='black', label=r'$\Delta\omega_{p}(RG) + \Delta\omega_{p}(N)$')
36 plt.axhline(y=Dwr, color='green', linestyle='--', linewidth=1.0, label=r'$\Delta\omega_{p}(RG) = 0.0206$')
37
38 plt.fill_between(t_mid, Dwr - sigma, Dwr + sigma, color='gray', alpha=0.25,
    label=r'$\sigma=0.038$')
39
40 plt.ylim(0, max(Dwr+pos_w)+0.1)
41 plt.xlabel('t(anios)')
42 plt.ylabel(r'$\Delta\omega_{p}$(grados)')
43 plt.legend(loc='upper right', bbox_to_anchor=(1,1))
44 plt.savefig("Dw_s2_all_def.pdf", bbox_inches='tight')
45 plt.show()

```

Listing B.15: gráfico de comparación entre la desviacion del argumento sobre el pericentro (newtoniana vs relativista)

B.II.VIII. Rapidez de las estrellas en el pericentro en términos de c

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4
5 t, a, e, i, w, OMG = np.loadtxt("orbital_elements_s4715_005.txt",
    unpack=True) #elementos orbitales de las estrellas
6 ts, x, y, z, vx, vy, vz, r = np.loadtxt("orbit_s4715_005.txt", unpack=True)
    #posicion y velocidad de las estrellas
7
8 c = 63241.077084266 #rapidez de la luz en unidades de UA/yr
9

```

```

10 #determinacion de los vectores posicion y velocidad
11 rvec = np.column_stack((x, y, z))
12 vvec = np.column_stack((vx, vy, vz))
13
14 #determinacion de las magnitudes de la posicion y la velocidad
15 r = np.linalg.norm(rvec, axis=1)
16 v = np.linalg.norm(vvec, axis=1)
17 rdot = np.sum(rvec * vvec, axis=1) / r
18
19 v_prec = (v/c)*100.
20 v_prec = np.array(v_prec) #determinacion de la rapidez de las estrellas
    en terminos de la rapidez de la luz
21 idx_peri = np.where((rdot[:-1] < 0) & (rdot[1:] > 0))[0] + 1 #condicion
    de paso por el pericentro
22
23 v_graf = v_prec[idx_peri] #rapidez en el pericentro
24 t_peri = t[idx_peri] #tiempo de paso por el pericentro
25
26 plt.scatter(t_peri, v_graf, color='black', s=1)
27 plt.yticks([n for n in range(6)])
28 plt.xticks(np.arange(0, max(t_peri)+100, 5000), rotation=90)
29 plt.xlabel('t (anios)')
30 plt.ylabel(r'%$c_{p}$')
31 plt.savefig("rap_prec_s4715_all.pdf", bbox_inches='tight')
32 plt.show()

```

Listing B.16: Rutina implementada para graficar la rapidez de cada estrella en términos de la rapidez de la luz en el vacío

B.II.IX. Distancia al pericentro de cada estrella en términos del radio de Schwarzschild

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 ts, x, y, z, vx, vy, vz, r = np.loadtxt("orbit_s4715_005.txt", unpack=True)
5
6 c = 63241.077084266 #en unidades de UA/yr
7 G = 39.47841760435743 #en unidades de UA**3/(Masa_solar*anios)
8 m = 4.3e6 #en masas solares
9
10 r_sch = 2.*G*m/c**2 #radio de Schwarzschild
11 rvec = np.column_stack((x, y, z)) #vector velocidad
12 vvec = np.column_stack((vx, vy, vz)) #vector posicion
13
14 r = np.linalg.norm(rvec, axis=1) #magnitud de la posicion
15 v = np.linalg.norm(vvec, axis=1) #rapidez
16 rdot = np.sum(rvec * vvec, axis=1) / r

```

```
17
18 r_prec = (r/r_sch) #razon entre el pericentro de la estrella y el radio
    de Schwarzschild
19 r_prec = np.array(r_prec)
20 idx_peri = np.where((rdot[:-1] < 0) & (rdot[1:] > 0))[0] + 1 #condicion
    de paso por el pericentro
21
22 r_graf = r_prec[idx_peri] #posicion en el pericentro
23 t_peri = ts[idx_peri] #tiempo de paso por el pericentro
24
25 plt.scatter(t_peri, r_graf, color='black', s=1)
26 plt.xticks(np.arange(0, max(t_peri)+100, 5000), rotation=90)
27 plt.xlabel('t (anios)')
28 plt.ylabel(r'$r_{p}/R_{s}$')
29 plt.savefig("r_prec_s4715_all.pdf", bbox_inches='tight')
30 plt.show()
```

Listing B.17: rutina implementada para graficar el pericentro de cada estrella en términos del radio de Schwarzschild

Apéndice C

Resultados

C.I. Anomalías verdaderas del sistema de estrellas tipo S

Estrella	Anomalía verdadera (grad)	Estrella	Anomalía verdadera (grad)
S1	31.7192	S42	-53.4514
S4	196.4688	S54	2.0061
S6	174.5885	S60	-151.6460
S8	157.7333	S64	-29.8767
S9	183.8573	S66	124.1018
S12	155.6014	S67	197.6349
S13	-35.3570	S71	203.9256
S14	115.2953	S83	-57.6246
S17	105.3507	S85	70.0891
S18	101.2032	S87	284.2276
S19	-61.0845	S89	186.3550
S21	-194.3037	S91	301.8167
S22	12.0098	S96	189.5397
S23	-174.5788	S97	-86.7794
S24	-88.7500	S145	179.0934
S29	-103.2409	S175	-175.7810
S31	-123.5591	S4712	-34.6675
S33	160.5416	S4713	53.8793
S39	119.3182		

Tabla C.I.1: Anomalías verdaderas del sistema de estrellas tipo S calculadas mediante la ecuación de Kepler. El tiempo de referencia (τ) es el tiempo de pasaje por el pericentro de S2 (τ_{S2})

Bibliografía

- [1] R. Abuter, A. Amorim, M. Bauböck, J. P. Berger, H. Bonnet, W. Brandner, V. Cardoso, Y. Clénet, P. T. De Zeeuw, J. Dexter, A. Eckart, F. Eisenhauer, N. M. Förster Schreiber, P. Garcia, F. Gao, E. Gendron, R. Genzel, S. Gillessen, M. Habibi, X. Haubois, T. Henning, S. Hippler, M. Horrobin, A. Jiménez-Rosales, L. Jochum, L. Jocou, A. Kaufer, P. Kervella, S. Lacour, V. Lapeyrère, J. B. Le Bouquin, P. Léna, M. Nowak, T. Ott, T. Paumard, K. Perraut, G. Perrin, O. Pfuhl, G. Rodríguez-Coira, J. Shangguan, S. Scheithauer, J. Stadler, O. Straub, C. Straubmeier, E. Sturm, L. J. Tacconi, F. Vincent, S. Von Fellenberg, I. Waisberg, F. Widmann, E. Wieprecht, E. Wiezorrek, J. Woillez, S. Yazici, and G. Zins. Detection of the schwarzschild precession in the orbit of the star s2 near the galactic centre massive black hole. *Astronomy and Astrophysics*, 636, 4 2020.
- [2] GRAVITY Collaboration, R. Abuter, N. Aimar, A. Amorim, J. Ball, M. Bauböck, J. P. Berger, H. Bonnet, G. Bourdarot, W. Brandner, V. Cardoso, Y. Clénet, Y. Dallilar, R. Davies, P. T. de Zeeuw, J. Dexter, A. Drescher, F. Eisenhauer, N. M. Förster Schreiber, A. Foschi, P. Garcia, F. Gao, E. Gendron, R. Genzel, S. Gillessen, M. Habibi, X. Haubois, G. Heißel, T. Henning, S. Hippler, M. Horrobin, L. Jochum, L. Jocou, A. Kaufer, P. Kervella, S. Lacour, V. Lapeyrère, J. B. Le Bouquin, P. Léna, D. Lutz, T. Ott, T. Paumard, K. Perraut, G. Perrin, O. Pfuhl, S. Rabien, J. Shangguan, T. Shimizu, S. Scheithauer, J. Stadler, A. W. Stephens, O. Straub, C. Straubmeier, E. Sturm, L. J. Tacconi, K. R. W. Tristram, F. Vincent, S. von Fellenberg, F. Widmann, E. Wieprecht, E. Wiezorrek, J. Woillez, S. Yazici, A. Young, and G. Zins. The mass distribution in the galactic centre from interferometric astrometry of multiple stellar orbits. 12 2021.
- [3] A. Eckart and R. Genzel. Observations of stellar proper motions near the galactic centre. *Nature*, 383:415–417, 10 1996.
- [4] R Genzel, N Thatte, A Krabbe, H Kroker, and L E Tacconi-Garman. The dark mass concentration in the central parsec of the milky way1. Technical report, 1996.
- [5] R. Genzel, C. Pichon, A. Eckart, O. E. Gerhard, and T. Ott. Stellar dynamics in the galactic centre: proper motions and anisotropy. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 317:348–374, 9 2000.
- [6] Florian Peißker, Andreas Eckart, Michal Zajaček, Basel Ali, and Marzieh Parsa. S62 and s4711: Indications of a population of faint fast moving stars inside the s2 orbit – s4711 on a 7.6 year orbit around sgr a*. 8 2020.
- [7] Basel Ali, Daria Paul, Andreas Eckart, Marzieh Parsa, Michal Zajacek, Florian Peißker, Matthias Subroweit, Monica Valencia-S., Lauritz Thomkins, and Gunther Witzel. Kinematic structure of the galactic center s cluster. *The Astrophysical Journal*, 896:100, 6 2020.
- [8] James. Binney and Scott. Tremaine. *Galactic Dynamics : (Second Edition)*. Princeton University Press, 2011.
- [9] F. Eisenhauer, R. Genzel, T. Alexander, R. Abuter, T. Paumard, T. Ott, A. Gilbert, S. Gillessen, M. Horrobin, S. Trippe, H. Bonnet, C. Dumas, N. Hubin, A. Kaufer, M. Kissler-Patig, G. Monnet, S. Strobele, T. Szeifert, A. Eckart, R. Schodel, and S. Zucker. Sinfoni in the galactic center: Young stars and infrared flares in the central light-month. *The Astrophysical Journal*, 628:246–259, 7 2005.
- [10] Richard de Grijs and Giuseppe Bono. Clustering of local group distances: publication bias or correlated measurements? iv. the galactic center. 10 2016.
- [11] S. Gillessen, F. Eisenhauer, S. Trippe, T. Alexander, R. Genzel, F. Martins, and T. Ott. Monitoring stellar orbits around the massive black hole in the galactic center. 10 2008.

- [12] Richard H. Battin. *An introduction to the mathematics and methods of astrodynamics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1999.
- [13] David A Allen, A R Hyland, and D J Hillierf. 70 6a mon. Technical report, 1990.
- [14] A. Krabbe , R. Genzel , A. Eckart , F. Najarro , D. Lutz , M. Cameron , H. Kroker , L. E. Tacconi-Garman , N. Thatte , L. Weitzel , S. Drapatz , T. Geballe , A. Sternberg , and R. Kudritzki. The nuclear cluster of the milky way: Star formation and velocity dispersion in the central 0.5 parsec. *The Astrophysical Journal*, 447, 7 1995.
- [15] T. Paumard, R. Genzel, F. Martins, S. Nayakshin, A. M. Beloborodov, Y. Levin, S. Trippe, F. Eisenhauer, T. Ott, S. Gillessen, R. Abuter, J. Cuadra, T. Alexander, and A. Sternberg. The two young star disks in the central parsec of the galaxy: Properties, dynamics, and formation. *The Astrophysical Journal*, 643:1011–1035, 6 2006.
- [16] B. Balick and R. L. Brown. Intense sub-arcsecond structure in the galactic center. *The Astrophysical Journal*, 194:265, 12 1974.
- [17] Thomas Beckert. 1996aspc..102..389d. 1996.
- [18] A. M. Ghez, S. Salim, S. D. Hornstein, A. Tanner, J. R. Lu, M. Morris, E. E. Becklin, and G. Duchene. Stellar orbits around the galactic center black hole. *The Astrophysical Journal*, 620:744–757, 2 2005.
- [19] R. Schödel, T. Ott, R. Genzel, R. Hofmann, M. Lehnert, A. Eckart, N. Mouawad, T. Alexander, M. J. Reid, R. Lenzen, M. Hartung, F. Lacombe, D. Rouan, E. Gendron, G. Rousset, A.-M. Lagrange, W. Brandner, N. Ageorges, C. Lidman, A. F. M. Moorwood, J. Spyromilio, N. Hubin, and K. M. Menten. A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the milky way. *Nature*, 419:694–696, 10 2002.
- [20] R. Schodel, T. Ott, R. Genzel, A. Eckart, N. Mouawad, and T. Alexander. Stellar dynamics in the central arcsecond of our galaxy. *The Astrophysical Journal*, 596:1015–1034, 10 2003.
- [21] T P Krichbaum, A Witzel, and J A Zensus. VLBI observations of the galactic center source sgr a* at 86 ghz and 215 ghz. Technical report, 1998.
- [22] Sheperd Doeleman, Jonathan Weintroub, Alan E. E. Rogers, Richard Plambeck, Robert Freund, Remo P. J. Tilanus, Per Friberg, Lucy M. Ziurys, James M. Moran, Brian Corey, Ken H. Young, Daniel L. Smythe, Michael Titus, Daniel P. Marrone, Roger J. Cappallo, Douglas C. J. Bock, Geoffrey C. Bower, Richard Chamberlin, Gary R. Davis, Thomas P. Krichbaum, James Lamb, Holly Maness, Arthur E. Niell, Alan Roy, Peter Strittmatter, Daniel Werthimer, Alan R. Whitney, and David Woody. Event-horizon-scale structure in the supermassive black hole candidate at the galactic centre. 9 2008.
- [23] Stefan. Deiters. *Dynamics of star clusters and the Milky Way : proceedings of the international spring Meeting of Astronomische Gesellschaft to celebrate the 300th anniversary of the Calendar Edict"foundation document of Astronomisches Rechen-Institut held in Heidelberg, Germany, 20-24 March 2000*. Astronomical Society of the Pacific, 2001.
- [24] E E Ghez and B Ecklin. High proper-motion stars in the vicinity of sagittarius a* : Evidence for a supermassive black hole at the center of our galaxy. Technical report, 1998.
- [25] Peter G. Mezger, Wolfgang J. Duschl, and Robert Zylka. The galactic center: a laboratory for agn? *Astronomy and Astrophysics Review*, 7:289–388, 12 1996.
- [26] Mark Morris and Eugene Serabyn. The galactic center environment. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 34:645–701, 9 1996.
- [27] Howard D.. Curtis. *Orbital mechanics for engineering students*. Butterworth-Heinemann, 2010.
- [28] Físico Hernán Darío Ordoñez Bacca. Dinámica de la estrella s2 alrededor del agujero negro supermasivo galáctico sagitario a* (una aproximación newtoniana) trabajo de grado para optar el título profesional de. Technical report, 2017.
- [29] José Gregorio and Portilla Barbosa. Elementos de astronomía de posición. Technical report.
- [30] Alessandro Peloni, Colin R. McInnes, and Matteo Ceriotti. Osculating keplerian elements for highly non-keplerian orbits. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 41:2489–2498, 11 2018.

- [31] J. M. A.. Danby. *Fundamentals of celestial mechanics*. Willmann-Bell, 1992.
- [32] J. M. A.. Danby. *Computer modeling : from sports to spaceflight—from order to chaos*. Willmann-Bell, 1997.
- [33] Hanno Rein and David S. Spiegel. Ias15: A fast, adaptive, high-order integrator for gravitational dynamics, accurate to machine precision over a billion orbits. 10 2014.
- [34] Hanno Rein, Daniel Tamayo, and Garrett Brown. High-order symplectic integrators for planetary dynamics and their implementation in rebound. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 489:4632–4640, 11 2019.
- [35] Vladimir P Vizgin. On the discovery of the gravitational field equations by einstein and hilbert: new materials. *Physics-Uspekhi*, 44:1283–1298, 12 2001.
- [36] Ray d’Inverno and James Vickers. *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford University PressOxford, 6 2022.
- [37] Donald F. Figer, R. Michael Rich, Sungsoo S. Kim, Mark Morris, and Eugene Serabyn. An extended star formation history for the galactic center from <i>hubble space telescope</i>nicmos observations. *The Astrophysical Journal*, 601:319–339, 1 2004.
- [38] R Genzel, A Eckart, T Ott, and F Eisenhauer. On the nature of the dark mass in the centre of the milky way. Technical report, 1997.
- [39] A M Ghez, M Morris, E E Becklin, A Tanner, and T Kremenek. The accelerations of stars orbiting the milky way’s central black hole. Technical report, 2000.
- [40] David Merritt, Alessia Gualandris, and Seppo Mikkola. Explaining the orbits of the galactic center s-stars. *The Astrophysical Journal*, 693:L35–L38, 3 2009.
- [41] Rong-Gen Cai, Tong-Bo Liu, and Shao-Jiang Wang. The GWs from the S-stars revolving around the SMBH at Sgr A*. 8 2018.
- [42] Dang Pham, Hanno Rein, and David S. Spiegel. A new timestep criterion for n-body simulations. 1 2024.
- [43] Sean N. Raymond and Alessandro Morbidelli. The grand tack model: a critical review. 11 2014.