

ÓRBITAS DE TRANSFERENCIA LIBRE EN UN SISTEMA TIERRA-  
LUNA

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título de:

Físico

CARLOS ARTURO BASANTE ERAZO

Universidad de Nariño  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física  
Agosto 2013

ÓRBITAS DE TRANSFERENCIA LIBRE EN UN SISTEMA TIERRA-  
LUNA

CARLOS ARTURO BASANTE ERAZO

TRABAJO DE GRADO

Director:

ALBERTO QUIJANO VODNIZA

M.Sc en Física

Universidad de Nariño  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física  
Agosto 2013

©2013 - CARLOS ARTURO BASANTE ERAZO

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

---

---

---

---

---

---

Alberto Quijano Vodniza

Director

Yithsbey Giraldo

Jurado

German Ramos

Jurado

San Juan de Pasto, Agosto 2013

## **Agradecimientos**

A Dios por ayudarme a terminar este proyecto, gracias por darme fuerza y coraje para hacer este sueño realidad. A mis padres y abuelos por todo el apoyo que me han dado y porque siempre han trabajado para darme lo mejor. A mi hermana por el apoyo brindado. A mi familia por toda la confianza depositada en mí. Al profesor Alberto Quijano Vodniza por darme la oportunidad de pertenecer al grupo de investigación en Astrofísica de la Universidad de Nariño y brindarme todas sus valiosas enseñanzas, por todas las correcciones y aportes del trabajo y por enfocarme a trabajar en temas de exploración espacial. A la Universidad de Nariño por formarme como profesional. A mis compañeros y amigos.

*Este trabajo está dedicado a mi padre que es un ejemplo de vida, y a mi madre  
que tiene un amor incondicional.*

# Tabla de Contenido

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Problema de los dos cuerpos</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Problema de los tres cuerpos</b>	<b>25</b>
3.1	Problema restringido de tres cuerpos . . . . .	25
3.2	Ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos . . . . .	26
<b>4</b>	<b>La órbita elíptica en el espacio</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>Solución al problema restringido de tres cuerpos (Tierra-Luna-Nave espacial)</b>	<b>34</b>
<b>6</b>	<b>Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>45</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	45
6.2	Recomendaciones . . . . .	45
	<b>ANEXOS</b> . . . . .	<b>46</b>
<b>A</b>	<b>Código de los programas</b>	<b>46</b>
<b>B</b>	<b>Problema de N-cuerpos</b>	<b>55</b>
<b>C</b>	<b>Método de RUNGE KUTTA</b>	<b>57</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>59</b>

# Lista de Figuras

2.1	Coordenadas para el problema de dos cuerpos . . . . .	3
2.2	Segunda ley de Kepler . . . . .	7
2.3	Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. . . . .	11
2.4	Movimiento ilimitado por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia. . . . .	12
2.5	Órbita $E_1$ correspondiente al movimiento sin límites. . . . .	13
2.6	Equivalente al potencial uno-dimensional para la ley del inverso cuadrado de la fuerza. . . . .	13
2.7	Ilustración esquemática de la naturaleza de las órbitas en el movimiento acotado. . . . .	14
2.8	Equivalente a un potencial unidimensional . . . . .	15
2.9	Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia. . . . .	16
2.10	. . . . .	16
2.11	. . . . .	17
2.12	Extensión de la órbita por reflexión de una porción respecto a los vectores apsidales. . . . .	19
3.1	Problema de tres cuerpos respecto al centro de masa . . . . .	26
4.1	Elementos clásicos . . . . .	28
4.2	Rotación alrededor de $z$ , con ángulo $\omega$ . . . . .	30
4.3	Rotación alrededor de $X_1$ , con ángulo $I$ . . . . .	30
4.4	Rotación alrededor de $Z_2$ , con ángulo $\Omega$ . . . . .	31
5.1	Problema de los tres cuerpos: Tierra - Luna - Nave. . . . .	34
5.2	Condiciones iniciales . . . . .	35
5.3	Trayectoria de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $316^\circ$ y $317^\circ$ . . . . .	37
5.4	Trayectoria de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $318^\circ$ y $319^\circ$ . . . . .	38
5.5	Trayectoria de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $320^\circ$ y $321^\circ$ . . . . .	38
5.6	Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $316^\circ$ y $317^\circ$ . . . . .	41

---

5.7	Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $318^\circ$ . . . . .	42
5.8	Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $319^\circ$ . . . . .	42
5.9	Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $320^\circ$ . . . . .	43
5.10	Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a $321^\circ$ . . . . .	43

# Lista de Tablas

- 5.1 Unidades establecidas para el problema. . . . . 35
- 5.2 Elementos clásicos de la órbita circular y elíptica de la Luna. . . . . 39

# Glosario

**Eclíptica:** Plano definido por la órbita de la Tierra alrededor del Sol, el cual se proyecta como un círculo máximo sobre la esfera celeste inclinado en unos 23,5 grados con relación al ecuador celeste.

**Ecuador celeste:** Proyección del Ecuador terrestre en la esfera celeste. Su plano es perpendicular al eje de rotación de la Tierra.

**Plano de la eclíptica:** Plano que incluye la órbita de la Tierra alrededor del Sol y por tanto visto desde la Tierra incluye la línea de la eclíptica.

**Plano ecuatorial geocéntrico:** Se llama plano ecuatorial geocéntrico a un plano que contiene al eje ecuatorial y es perpendicular al eje polar de tal modo que divide a la tierra en dos partes iguales denominadas hemisferios.

**Caos:** Es un comportamiento determinístico aperiódico muy sensible a las condiciones iniciales.

**LUNIK 1** Nave espacial sin combustible, de forma esférica, tenía 5 antenas e instrumentos como el contador geiger y el detector de micrometeoritos. Se convirtió en el primer objeto construido por el hombre que se estrelló contra la Luna.

**PIONEER:** Fue una de las primeras sondas del programa de exploración espacial de la NASA.

# ÓRBITAS DE TRANSFERENCIA LIBRE EN UN SISTEMA TIERRA- LUNA

## Resumen

*Mediante el desarrollo de un código computacional en el lenguaje C se estudió el problema restringido de los tres cuerpos para el caso del sistema: Luna - Tierra - nave espacial. Para ello se determinaron las condiciones iniciales para que la nave espacial adquiriera una órbita deseada que consiste en ir a la Luna y regresar a la Tierra considerando únicamente fuerzas gravitacionales. Con las condiciones encontradas para el caso de la órbita circular, se buscó determinar el comportamiento de la nave espacial cambiando la excentricidad de la órbita de la Luna, teniendo ahora una órbita elíptica. A continuación se compararon ambos resultados.*

## **FREE TRANSFERENCE ORBITS IN A SYSTEM EARTH-MOON**

### **Abstract**

*The restricted problem of the three bodies for the case of the system: Moon-Earth-spaceship, is studied through the development of a system code in language C. For this purpose, the initial conditions were determined in order that the spaceship acquires the expected orbit, this is go to the moon and return to earth considering only gravitational forces. Once the conditions are set up for the case of the circular orbit, the behavior of the spaceship were determined taking into consideration the excentricity of the orbit of the moon and, in consequence, both results were compared.*

# Capítulo 1

## Introducción

El astrónomo alemán Johannes Kepler fue capaz de describir el movimiento planetario utilizando tres ecuaciones matemáticas, las cuales llegaron a ser conocidas como las leyes de movimiento planetario de Kepler, donde las órbitas planetarias no circulares, sino elípticas, además no solo se aplican a los planetas que orbitan alrededor del Sol, sino a todos los casos de cuerpos celestes que orbitan alrededor de otro, bajo la influencia de la gravedad. Kepler estudió con sus leyes un problema relacionado con dos cuerpos encontrando una solución analítica, sin embargo al analizar el problema de tres cuerpos no obtuvo el mismo resultado, en muchas formas esto, fue afortunado para el desarrollo de la ciencia y la ingeniería.

El primero en encontrar una solución particular al problema de los tres cuerpos fue Lagrange y quedó consignada en su memoria, *ESSAI SUR LE PROBLEME DES TROIS CORPS*. Newton obtuvo algunos resultados aproximados para el problema general de los tres cuerpos, encontrando diferentes aplicaciones, una de las más importantes en la Mecánica Celeste. (J.M.A.Danby, Willmann-Bell, 1997). La mecánica celeste se convirtió en la gran fuerza que impulsó las Matemáticas para encontrar métodos útiles de analizar el movimiento planetario. El problema de los tres cuerpos permite encontrar matemáticamente las condiciones para poder enviar una nave espacial hasta la Luna. No obstante, el problema no es resoluble en general y las trayectorias pueden ser “caóticas” (C.D Murray and S.F Dermot, 2006). Los programas computacionales actualmente desarrollados permiten resolver el problema de los tres cuerpos y obtener las posibles órbitas que realizaría una nave espacial alrededor de la Luna u otro cuerpo celeste (J.M.A.Danby, Willmann-Bell, 1997).

Una nave espacial es un artefacto enviado al espacio y destinado a explorar nuestro sistema solar, específicamente, estudiar un cuerpo celeste: planeta, cometa, asteroide, estrella, etc.

Como la masa de la nave espacial es muy pequeña en comparación con la de la Tierra y la Luna, cae dentro del caso simplificado, conocido como el problema restringido de los tres

cuerpos, en el cual la masa de uno de ellos es despreciable frente a cualquiera de las otras dos. Bajo estas condiciones la masa pequeña no perturba el movimiento de las mayores, moviéndose ésta, en órbitas elípticas en torno a su centro de masa común.

Los estudios teóricos de la transferencia de órbitas que tiene que realizar una nave espacial en un viaje interplanetario son de gran importancia en la investigación de las ciencias planetarias.

En Colombia, el modelaje de órbitas es poco estudiado se constituye así en algo muy significativo para el desarrollo del país, además una simulación permite conocer y determinar cuándo una nave espacial puede salir de su órbita alrededor de la Tierra y de esta manera estudiar su trayectoria a la Luna.

Este estudio por tanto es muy importante y valioso porque es un gran aporte para la parte de la simulación de órbitas e implementación de métodos numéricos en el observatorio de la Universidad de Nariño, y una contribución al desarrollo de la astronomía en Colombia.

# Capítulo 2

## Problema de los dos cuerpos

Consideremos un sistema de dos puntos materiales de masas  $m_1$  y  $m_2$  (Figura 2.1), en el cual las únicas fuerzas son las debidas a un potencial de interacción  $U$ . Supondremos primeramente que  $U$  es una función cualquiera del vector entre las dos partículas,  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ , o de sus velocidades relativas,  $\dot{\vec{r}}_2 - \dot{\vec{r}}_1$ , o de sus derivadas superiores de  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Tal sistema tiene seis grados de libertad y por tanto seis coordenadas generalizadas independientes. Consideremos que éstas sean las tres componentes del vector posición del centro de masa,  $\vec{R}$ , más las tres componentes del vector diferencia  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . La lagrangiana tendrá entonces la forma:

$$L = T(\dot{\vec{R}}, \dot{\vec{r}}) - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots\dots\dots) \quad (2.1)$$

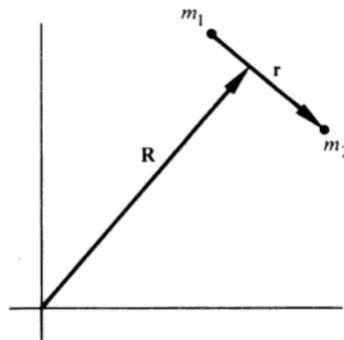


Figura 2.1: Coordenadas para el problema de dos cuerpos

La energía cinética  $T$  es la suma de la energía cinética del movimiento del centro de masa más la energía cinética del movimiento en torno al centro de masa,  $T'$ :

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + T' \quad (2.2)$$

Siendo,

$$T' = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2 \quad (2.3)$$

Aquí,  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores de posición de las dos partículas relativos al centro de masa y están relacionados con  $\vec{r}$  a través de,

$$\begin{aligned} \vec{r}_1' &= -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r}, \\ \vec{r}_2' &= \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Expresada en función de  $\vec{r}$  por medio de (2.4),  $T'$  toma la forma,

$$T' = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 \quad (2.5)$$

Y la lagrangiana total (2.1) es:

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\vec{R}}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, \dots). \quad (2.6)$$

Vemos que las tres coordenadas  $\vec{R}$  son cíclicas, por lo que el centro de masa o estará en reposo o se moverá uniformemente. Ninguna de las ecuaciones del movimiento para  $\vec{r}$  contendrá términos en los que intervenga  $\vec{R}$  o  $\dot{\vec{R}}$ . En consecuencia, en este caso resulta particularmente sencillo el problema. Bastará prescindir del primer término de la lagrangiana en todo el estudio que sigue.

El resto de la lagrangiana es exactamente la que cabía esperar si tuviéramos un centro de fuerzas fijo con una partícula a una distancia  $\vec{r}$  de él, que tuviera una masa,

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.7)$$

Donde a  $\mu$  se le da el nombre de masa reducida. Frecuentemente, (2.7) se escribe de la forma,

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (2.8)$$

Así pues, el movimiento de dos cuerpos en torno a su centro de masa debido a una fuerza central se puede reducir siempre a un problema equivalente de un cuerpo.

Vamos a limitarnos a fuerzas centrales conservativas, en donde el potencial es  $V(\vec{r})$ , función sólo de  $\vec{r}$ , con lo que la fuerza está siempre dirigida a lo largo de  $\vec{r}$ . Por los resultados anteriores, solo necesitamos considerar el problema de una partícula de masa  $m$  que se mueve en torno a su centro de fuerzas fijo que tomaremos por origen del sistema de coordenadas. Como la energía potencial sólo contiene la distancia radial, el problema tiene simetría esférica, es decir, cualquier rotación, en torno a cualquier eje fijo, puede no tener efecto alguno sobre la solución. Por tanto, una coordenada angular que representa rotación alrededor de un eje fijo debe ser cíclica. Estas propiedades de simetría dan lugar a una simplificación considerable del problema.

Como el sistema tiene simetría esférica, el vector momento cinético total,  $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ , se conserva. Se deduce, por tanto, que  $\vec{r}$  es siempre perpendicular a la dirección fija de  $\vec{L}$  en el espacio. Esto sólo puede ser cierto si  $\vec{r}$  se encuentra siempre en un plano cuya normal sea paralela a  $\vec{L}$ . Si bien el razonamiento falla si  $\vec{L}$  es cero, en tal caso el movimiento debe tener lugar a lo largo de una recta que pase por el centro de fuerzas, ya que  $\vec{L} = 0$  exige que  $\vec{r}$  sea paralelo a  $\dot{\vec{r}}$ , cosa que sólo puede cumplirse en un movimiento rectilíneo.<sup>1</sup> Por tanto, el movimiento bajo fuerza central es siempre un movimiento plano. Ahora bien, el movimiento de una partícula en el espacio está descrito por tres coordenadas; en coordenadas polares esféricas son el ángulo azimut  $\theta$ , el ángulo cenital (o colatitud)  $\psi$  y la distancia radial  $\vec{r}$ . Tomando el eje polar en la dirección de  $\vec{L}$ , el movimiento tendrá siempre lugar en un plano normal al eje polar. La coordenada  $\psi$  tendrá entonces sólo el valor constante  $\pi/2$  y podremos prescindir de ella en el estudio que sigue. La conservación del vector momento cinético proporciona tres constantes del movimiento independientes (correspondientes a las tres componentes cartesianas). De hecho, dos de ellas, que expresan la dirección constante del momento cinético, se han utilizado para reducir el problema de tres grados de libertad a dos. La tercera de dichas constantes, correspondiente a la conservación del módulo de  $\vec{L}$ , sigue a nuestra disposición para completar la solución.

<sup>1</sup>Formalmente:  $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{n}_r + r\dot{\theta}\vec{n}_\theta$ , luego  $\vec{r} \times \dot{\vec{r}} = 0$  exige que  $\dot{\theta} = 0$

Expresada ahora en coordenadas polares, la lagrangiana es:

$$\begin{aligned} L &= T - V \\ L &= \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Según ya vimos,  $\theta$  es una coordenada cíclica cuya cantidad de movimiento canónica es el momento cinético del sistema:

$$p_{\theta} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta}. \quad (2.10)$$

Una de las dos ecuaciones del movimiento será, simplemente,

$$\dot{p}_{\theta} = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 \quad (2.11)$$

Con la integral inmediata,

$$mr^2\dot{\theta} = l, \quad (2.12)$$

Donde  $l$  es la magnitud constante del momento cinético. De (2.11) se deduce también que,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} \right) = 0, \quad (2.13)$$

Se introduce el factor  $1/2$  porque  $\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$  es la *velocidad areolar* (área barrida por el vector de posición por unidad de tiempo). Esta interpretación se deduce del diagrama de la Figura (2.2), el área barrida en un tiempo  $dt$  es:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}. \quad (2.14)$$

La conservación del momento cinético es, pues, equivalente a decir que la *velocidad areolar* es constante. Tenemos aquí la demostración de la segunda ley de Kepler del movimiento planetario: el radio vector barre áreas iguales en tiempos iguales. Sin embargo, debemos recalcar que la constancia de la *velocidad areolar* es una propiedad del movimiento debido a una fuerza central y no está limitada a una ley de la fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

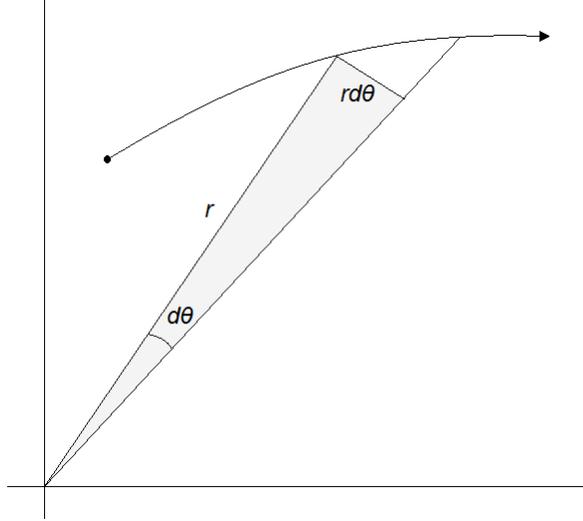


Figura 2.2: Segunda ley de Kepler

La ecuación de Lagrange restante, para la coordenada  $r$ , es,

$$\frac{d}{dt}(m\dot{r}) - mr\dot{\theta}^2 + \frac{\partial V}{\partial r} = 0. \quad (2.15)$$

Designando por  $f(r)$  el valor de la fuerza según  $\vec{r}$ ,  $\partial V/\partial r$ , podemos escribir la ecuación en la forma,

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = f(r). \quad (2.16)$$

Utilizando la primera integral, (2.12), podemos eliminar  $\dot{\theta}$  de la ecuación de movimiento, obteniendo una ecuación diferencial de segundo orden que sólo contiene  $r$ :

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r). \quad (2.17)$$

Disponemos aún de otra primera integral del movimiento, cual es la energía total, ya que las fuerzas son conservativas. Basándonos en el teorema general de la conservación de la energía podemos decir, de manera inmediata, que es constante del movimiento,

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r). \quad (2.18)$$

Donde  $E$  es la energía del sistema. De otra manera, podríamos de nuevo deducir la primera integral directamente de (2.11) y (2.17). La última puede escribirse en la forma,

$$m\ddot{r} = -\frac{d}{dr} \left( V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right). \quad (2.19)$$

Si multiplicamos por  $\dot{r}$  los dos miembros de (2.19), el primer miembro queda en la forma:

$$m\dot{r}\ddot{r} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \right).$$

El segundo miembro puede escribirse análogamente como derivada total respecto al tiempo, ya que si  $g(r)$  es una función cualquiera de  $r$ , la derivada total de  $g$  respecto al tiempo tiene la forma:

$$\frac{d}{dt}g(r) = \frac{dg}{dr} \frac{dr}{dt}.$$

Luego, (2.19) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{r}^2 \right) &= -\frac{d}{dt} \left( V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right), \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.20)$$

Y por tanto,

$$\frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} + V = \text{constante} \quad (2.21)$$

La ecuación (2.21) es la declaración de la conservación de la energía total. Usando (2.12) para  $l$ , el término medio puede ser escrito,

$$\frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2} = \frac{1}{2mr^2} m^2 l^4 \dot{\theta}^2 = \frac{mr^2 \dot{\theta}^2}{2}. \quad (2.22)$$

Y (2.21) se convierte en (2.18). Estas dos primeras integrales en efecto nos dan dos de los cuadraturas necesarias para completar el problema. Hay dos variables,  $r$  y  $\theta$ , y un total de cuatro integraciones se necesita para resolver la ecuación de movimiento. Las primeras dos integraciones han dejado las ecuaciones de Lagrange de primer orden, (2.12) y (2.21); las dos integrales que faltan pueden ser realizadas de distintas maneras. Tal vez el procedimiento más simple comienza en (2.21). Resolviendo  $\dot{r}$ , tenemos,

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}, \quad (2.23)$$

o

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (2.24)$$

Para un tiempo  $t = 0$ ,  $r$  tiene el valor inicial  $r_0$ . Al integrar ambos lados de la ecuación desde el estado inicial hasta el estado en un tiempo  $t$ , (2.24) toma la forma,

$$t = \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (2.25)$$

Tal y como está, (2.25) tiene a  $t$  en función de  $r$  y de las constantes de integración, sin embargo, en la parte derecha de (2.25), también se puede dar  $r$  como función de  $t$  y las constantes. Una vez la solución para  $r$  es encontrada, la solución de  $\theta$  sigue inmediatamente de (2.12), y puede ser escrita como:

$$d\theta = \frac{l}{mr^2} dt \quad (2.26)$$

Si es  $\theta_0$  el valor inicial de  $\theta$ , la integral (2.26) será, simplemente,

$$\theta = l \int \frac{dt}{mr^2(t)} + \theta_0. \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.25) y (2.27) son las dos ecuaciones que quedan y, formalmente, el problema se ha reducido a cuadraturas, con cuatro constantes de integración  $E$ ,  $l$ ,  $r_0$ ,  $\theta_0$ . Estas constantes no son las únicas que pueden considerarse. Podríamos igualmente haber tomado  $r_0$ ,  $\theta_0$ ,  $\dot{r}_0$ ,  $\dot{\theta}_0$ , pero desde luego  $E$  y  $l$  se pueden siempre determinar a partir de este conjunto de valores. Sin embargo, para muchas aplicaciones, el conjunto que contiene la energía y el momento cinético es el natural.

Aun cuando se haya resuelto formalmente el problema, desde un punto de vista práctico (2.25) y (2.27) suelen ser de difícil manejo y en todo caso concreto suele ser más conveniente efectuar la integración de alguna otra manera. Pero antes de obtener la solución para las leyes de fuerza concreta, veamos qué podemos aprender del movimiento en el caso general,

utilizando solamente las ecuaciones del movimiento y los teoremas de conservación, sin exigir soluciones explícitas.

Por ejemplo, en el caso de un sistema de energía y momento cinético conocidos, podemos determinar de manera inmediata la magnitud y dirección de la velocidad de la partícula en función de la distancia  $r$ . La magnitud  $v$  se deduce inmediatamente de la conservación de la energía en la forma,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r)$$

O sea,

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(r))}. \quad (2.28)$$

La velocidad radial (componente de  $\dot{\vec{r}}$  según el vector de posición) se dio ya en (2.23). Combinada con la magnitud  $v$  da suficiente información para obtener la dirección de la velocidad. Estos resultados y otros muchos, se pueden también obtener considerando un problema unidimensional equivalente <sup>2</sup>.

La ecuación de movimiento en  $r$ , con  $\dot{\theta}$  expresada en función de  $l$  (2.17), sólo contiene  $r$  y sus derivadas. Es la misma ecuación que se obtendría para un problema unidimensional ficticio en el cual una partícula de masa  $m$  esté sometida a una fuerza,

$$f' = f + \frac{l^2}{mr^3} \quad (2.29)$$

El significado del término adicional queda claro si se escribe en la forma  $mr\dot{\theta}^2 = mv_{\dot{\theta}}^2/r$ , que es la conocida fuerza centrífuga. Del teorema de la conservación de la energía se puede obtener un enunciado equivalente. Según (2.21), el movimiento de la partícula en  $r$  es el de un problema unidimensional con una energía potencial ficticia:

$$V' = V + \frac{1}{2} \frac{l^2}{mr^2}. \quad (2.30)$$

Para comprobarlo, observamos que,

$$f' = -\frac{\partial V'}{\partial r} = f(r) + \frac{l^2}{mr^3} \quad (2.31)$$

---

<sup>2</sup>Alternativamente, la conservación del momento cinético de la velocidad angular  $\dot{\theta}$  y ésta, junto con  $\dot{r}$  de la magnitud y dirección  $\dot{\vec{r}}$

Que concuerda con (2.29). El teorema de conservación de la energía (2.21) puede, pues, escribirse también en la forma:

$$E = V' + \frac{1}{2}m\dot{r}^2. \quad (2.32)$$

Como ilustración de este método de examen del movimiento, consideremos una gráfica de  $V'$  en función de  $r$  para el caso concreto de una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia:

$$f = -\frac{k}{r^2}.$$

(Para  $k$  positiva, el signo menos asegura que la fuerza esta dirigida hacia el centro de fuerzas ). Para esta fuerza, la energía potencial es:

$$V = -\frac{k}{r}.$$

Y el potencial ficticio correspondiente es,

$$V' = -\frac{k}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}. \quad (2.33)$$

En la Figura (2.3) podemos ver dicha gráfica; las dos líneas de trazos representan las componentes separadas  $-k/r$  y  $l^2/2mr^2$ , y la línea de trazo continuo es la suma  $V'$ .

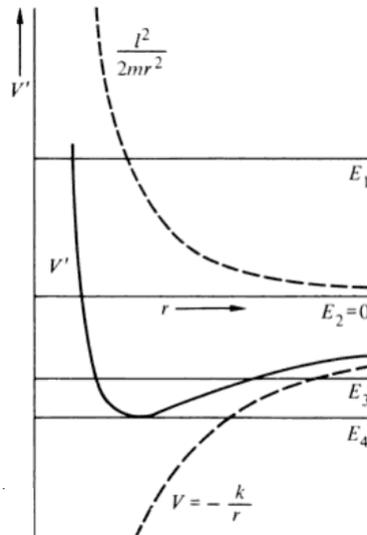


Figura 2.3: Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

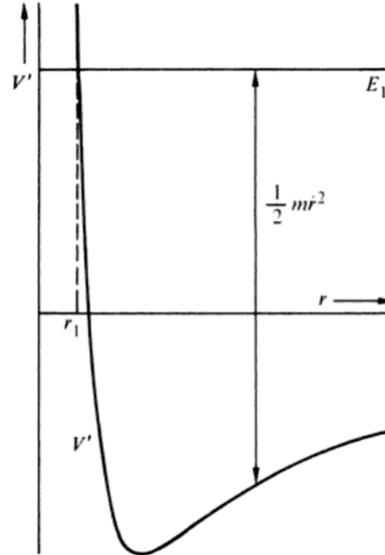


Figura 2.4: Movimiento ilimitado por una fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Consideremos ahora el movimiento de una partícula que tenga la energía  $E_1$  indicada en las Figuras (2.3) y (2.4). Está claro que dicha partícula nunca podrá acercarse a una distancia inferior a  $r_1$  (Figura 2.4). En caso contrario, con  $r < r_1$ ,  $V'$  sería mayor que  $E_1$  y según (2.32) la energía cinética debería ser negativa, lo que correspondería a una velocidad imaginaria. En cambio, no existe límite superior para los valores posibles de  $r$ , por lo que la órbita no está acotada. Una partícula puede venir del infinito, chocar contra la <<barrera centrífuga repulsiva>>, ser repelida y volver a alejarse infinitamente (Figura (2.5)). La distancia entre  $E$  y  $V'$  es  $1/2mr^2$ , es decir, proporcional al cuadrado de la velocidad radial y se anula, naturalmente, en el punto de inversión  $r_1$ . Al mismo tiempo, la distancia entre  $E$  y  $V$  en la gráfica es la energía cinética  $1/2mv^2$  para el valor de  $r$  dado. Por tanto, la distancia entre las curvas  $V$  y  $V'$  es  $1/2mr^2\dot{\theta}^2$ . Estas curvas nos dan, por tanto, la magnitud de la velocidad de la partícula y sus componentes para una distancia  $r$  cualquiera, a la energía y momento cinético dados. Esta información es suficiente para proporcionar una imagen aproximada de la forma de la órbita.

Para la energía  $E_2 = 0$  (Figura 2.3) se obtiene una imagen aproximada parecida del compor-

tamiento de la órbita. Pero para cualquier energía inferior, como la  $E_3$  indicada en la Figura (2.6) , tenemos un resultado muy diferente.

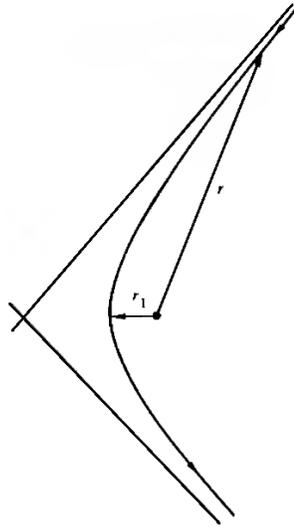


Figura 2.5: Órbita  $E_1$  correspondiente al movimiento sin límites.

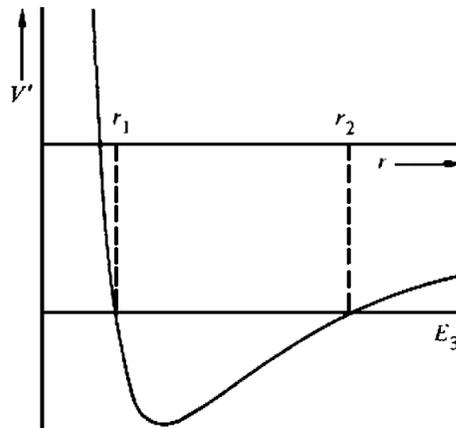


Figura 2.6: Equivalente al potencial uno-dimensional para la ley del inverso cuadrado de la fuerza.

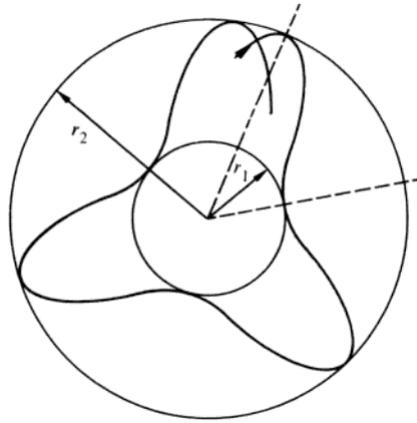


Figura 2.7: Ilustración esquemática de la naturaleza de las órbitas en el movimiento acotado.

Además de un límite inferior de  $r_1$ , hay también un valor máximo en  $r_2$  que no puede superar  $r$  con energía cinética positiva. El movimiento está entonces limitado y hay dos puntos de inversión,  $r_1$  y  $r_2$ , a las llamadas *distancias apsidales*. Esto no significa que las órbitas sean necesariamente cerradas. Todo lo que podemos decir es que están acotadas, contenidas entre dos circunferencias de radios  $r_1$  y  $r_2$  con puntos de inversión que se hallan siempre en dichas circunferencias (Figura (2.7)).

Si la energía es  $E_4$  justo la del mínimo potencial ficticio, como la Figura (2.8), los dos límites coinciden. En tal caso, el movimiento sólo es posible para un radio,  $\dot{r} = 0$ , y la órbita es circular. Recordando que la fuerza efectiva es la pendiente de la curva  $V'$  cambiada de signo, el requisito para órbitas circulares es simplemente que  $f'$  valga cero, o sea,

$$f(r) = -\frac{l^2}{mr^3} = -mr\dot{\theta}^2. \quad (2.34)$$

Tenemos aquí la conocida condición elemental de que la fuerza aplicada sea de igual magnitud opuesta a la fuerza invertida o aceleración centrípeta.

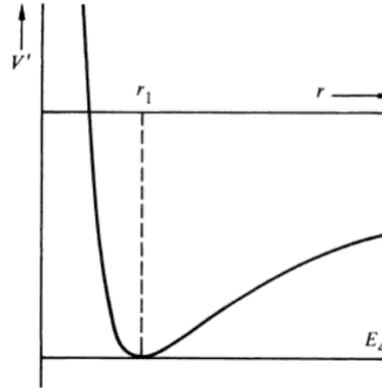


Figura 2.8: Equivalente a un potencial unidimensional

<sup>3</sup> Las propiedades recalcaremos que todo este estudio de las órbitas para las energías diferentes se ha realizado para un valor del momento cinético. Al cambiar  $l$  cambiarán los detalles cuantitativos de la curva  $V'$  pero el no afectará a la clasificación general de los tipos de órbita. En el caso de la ley de fuerza atractiva inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que hemos estudiado, veremos que la órbita correspondiente a  $E_1$  es una hipérbola, la correspondiente a  $E_2$  es una parábola y la correspondiente a  $E_3$ , es una elipse. En el caso de otras fuerzas, las órbitas pueden tener formas no tan sencillas. No obstante, la misma división cualitativa general en órbitas abiertas, limitadas y circulares será cierta para todo potencial atractivo que disminuya más lentamente que  $1/r^2$  cuando  $r \rightarrow \infty$ ; y tienda a infinito más lentamente que  $1/r$  cuando  $r \rightarrow 0$ . La primera condición asegura que el potencial predomina sobre el término centrífugo a las  $r$  grandes, mientras la segunda condición es tal que para  $r$  pequeña el término importante es el centrífugo.

La naturaleza cualitativa del movimiento se verá alterada si el potencial no cumple estos requisitos, si bien podremos aún utilizar el método del potencial equivalente para examinar las características de las órbitas. Por ejemplo, consideremos el potencial atractivo,  $V(r) = -a/r^3$  con  $f = -3a/r^4$ .

<sup>3</sup>El caso de  $E < E_4$  no corresponde a un movimiento físicamente posible, ya que entonces  $r^2$  sería negativa, o sea,  $\dot{r}$  debería ser imaginaria.

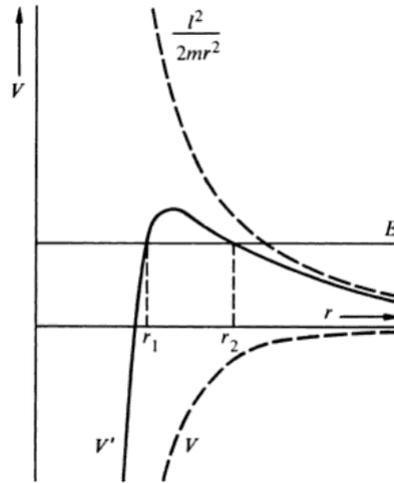


Figura 2.9: Potencial unidimensional equivalente para una fuerza atractiva inversamente proporcional a la cuarta potencia de la distancia.

En tal caso, el diagrama energético es el presentado en la Figura (2.9) . Para una energía  $E$  hay dos tipos posibles de movimiento, según cuál sea el valor inicial de  $r$ . Si es  $r_0$  menor que  $r_1$  el movimiento será limitado,  $r$  se mantendrá siempre inferior a  $r_1$  y la partícula pasará eventualmente por el centro de fuerzas. Si  $r$  es inicialmente mayor que  $r_2$ , se mantendrá siempre en esa condición; el movimiento será limitado y la partícula no podrá nunca penetrar al pozo de potencial. De nuevo, la condición inicial  $r_1 < r_0 < r_2$  no es posible físicamente. Otro ejemplo interesante del método lo tenemos en el caso de una fuerza recuperadora lineal,  $f = -k/r$  y  $V = kr^2/2$ .

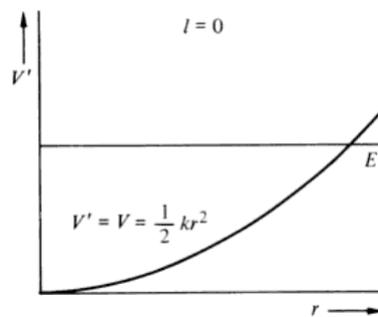


Figura 2.10:

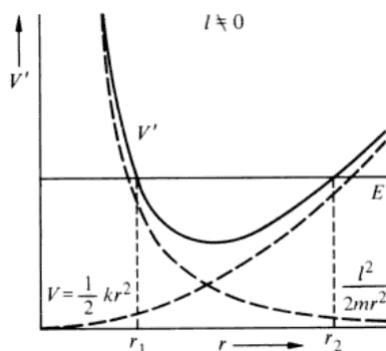


Figura 2.11:

En el caso de momento cinético nulo, que corresponde al movimiento rectilíneo,  $V' = V$  y la situación es la representada en la Figura (2.10). Para toda la energía positiva el movimiento es limitado y según sabemos, armónico simple. Si  $l \neq 0$  tenemos el estado representado en la Figura (2.11). Entonces, el movimiento está siempre limitado para todas las energías físicamente posibles y no pasa por el centro de fuerzas. En este caso particular, se ve fácilmente que la órbita es elíptica, ya que si  $\vec{f} = -k\vec{r}$ , las componentes  $x$  e  $y$  de la fuerzas son:

$$\begin{aligned} f_x &= -kx, \\ f_y &= -ky \end{aligned}$$

El movimiento total es, pues, el resultante de dos movimientos armónicos simples perpendiculares y de igual frecuencia, lo que conduce a una órbita elíptica.

Al tratar detalles concretos de problemas de fuerzas centrales reales, conviene efectuar un cambio de la orientación de nuestro tratamiento. Hasta ahora, resolver un problema significaba hallar  $r$  y  $\theta$  en función del tiempo siendo  $E$ ,  $l$ , etc, constantes de integración. Pero muy a menudo, lo que realmente buscamos es la ecuación de la órbita, es decir, la dependencia entre  $r$  y  $\theta$ , eliminando el parámetro  $t$ . En el caso de problemas de fuerzas centrales esta eliminación es particularmente sencilla, ya que  $t$  sólo figura en las ecuaciones de movimiento en forma de variable respecto a la cual se deriva. En verdad, una ecuación del movimiento, (2.12), no hace sino darnos una relación definida entre una variación infinitesimal  $dt$  y la

variación  $d\theta$  correspondiente,

$$l dt = m r^2 d\theta, \quad (2.35)$$

La relación correspondiente entre las derivadas respecto a  $t$  y respecto a  $\theta$  es:

$$\frac{d}{dt} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (2.36)$$

Estas relaciones se pueden utilizar para convertir la ecuación de movimiento (2.17) en una ecuación diferente para la órbita. Alternativamente, se pueden aplicar a la solución formal de las ecuaciones de movimiento (dadas en 2.24) para proporcionar directamente la ecuación de la órbita. De momento, vamos a seguir la primera de estas posibilidades. A partir de (2.36) podemos escribir una segunda derivada respecto a  $t$ ,

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{m r^2} \frac{d}{d\theta} \right), \quad (2.37)$$

Y la ecuación de Lagrange para  $r$ , (2.17), queda de la forma,

$$\frac{l}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{l}{m r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \frac{l^2}{m r^3} = f(r). \quad (2.38)$$

Para simplificar (2.38), notemos que,

$$\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = - \frac{d(1/r)}{d\theta} \quad (2.39)$$

Luego, si hacemos el cambio de variable  $u = 1/r$ , tenemos,

$$\frac{l^2 u^2}{m} \left( \frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \right) = -f \left( \frac{1}{u} \right). \quad (2.40)$$

Como

$$\frac{d}{du} = \frac{dr}{du} \frac{d}{dr} = - \frac{1}{u^2} \frac{d}{dr}, \quad (2.41)$$

La ecuación (2.40) podrá también escribirse en función del potencial en la forma

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = - \frac{m}{l^2} \frac{d}{du} V \left( \frac{1}{u} \right). \quad (2.42)$$

Una y otra forma (2.42) y (2.40) es, pues, una ecuación diferencial de la órbita si se conoce la ley de la fuerza  $f$  o el potencial  $V$ . Inversamente, si se conoce la ecuación de la órbita, es

decir, si se da  $r$  en función de  $\theta$ , podemos seguir el camino en sentido opuesto y obtener la ley de la fuerza  $f(r)$ .

Queremos, sin embargo, obtener resultados un tanto generales. Por ejemplo, a partir de (2.42) podemos demostrar que la órbita es simétrica respecto a los puntos de inversión del movimiento. Para ello, notaremos que si la órbita es simétrica será posible reflejarla respecto a la dirección del ángulo de inversión sin producir variación alguna. Si se eligen las coordenadas de manera que el punto de inversión corresponda a  $\theta = 0$ , la reflexión podrá hacerse matemáticamente sustituyendo  $\theta$  por  $-\theta$ . La ecuación diferencial de la órbita (2.42) es, evidentemente, invariante ante la sustitución. Además, las condiciones iniciales,

$$u = u(0), \frac{du}{d\theta} = 0, \text{ para } \theta = 0,$$

Tampoco se verán afectadas en este caso. Luego, la ecuación de órbita debe ser la misma tanto si la expresamos en función de  $\theta$  como en función de  $-\theta$ , que es la conclusión que buscábamos. Por tanto, la órbita es invariante ante una reflexión respecto a los vectores apsidales. De hecho, esto significa que se puede trazar la órbita completa si se conoce la porción de la órbita comprendida entre dos puntos de inversión cualesquiera. La reflexión de la porción dada respecto a uno de los vectores apsidales produce una dilatación de la órbita en su proximidad y se puede repetir este proceso indefinidamente hasta completar el resto de la órbita, tal como lo ilustra la Figura (2.12).

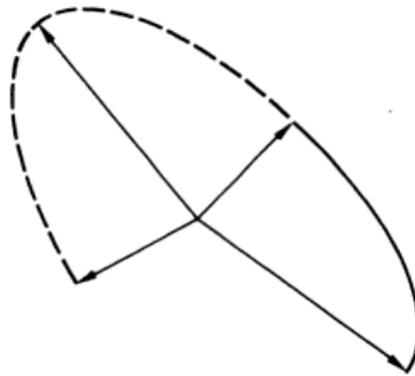


Figura 2.12: Extensión de la órbita por reflexión de una porción respecto a los vectores apsidales.

Para una ley de fuerza particular cualquiera, la ecuación real de la órbita debe obtenerse integrando la ecuación diferencial (2.42) en una u otro forma. No obstante, no es necesario seguir todos los detalles de integración, puesto que ya se ha realizado la mayor parte del trabajo al resolver la ecuación del movimiento (2.11). Sólo queda eliminar  $t$  de la solución (2.24) por medio de (2.35), lo que da

$$d\theta = \frac{l dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2}{m} \left( E - V(r) - \frac{l^2}{2mr^2} \right)}}. \quad (2.43)$$

Con ligeras transformaciones, la integral de (2.43) es

$$\theta = \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - \frac{1}{r^2}}} + \theta_0 \quad (2.44)$$

O bien, si hacemos el cambio de variable  $u = 1/r$ ,

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mV}{l^2} - u^2}} \quad (2.45)$$

Al igual que en el caso de la ecuación de movimiento, la ecuación (2.45), para resolver formalmente el problema, no siempre es una solución ejecutable porque frecuentemente la integral no se puede expresar mediante funciones conocidas. En realidad, sólo se han estudiado ciertos tipos de leyes de fuerza. Las más importantes son las funciones potenciales de  $r$ .

$$V = ar^{n+1} \quad (2.46)$$

Con lo que la fuerza varía como lo hace la potencia  $n$ -ésima de  $r$ . Con este potencial, (2.45) queda de la forma

$$\theta = \theta_0 - \int_{u_0}^u \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2ma}{l^2} u^{-n-1} - u^2}} \quad (2.47)$$

También esta será integrable mediante funciones simples tan sólo en ciertos casos. La ley particular de los exponentes, para los cuales se pueden expresar, son en terminos de funciones trigonometricas,  $n = 1, 2, 3$ , los resultados de la integral para,  $n = 5, 3, 0, -4, -5, -7$ , pueden ser expresados en funciones elípticas.

La ley inversamente proporcional al cuadrado de la distancia es la más importante de todas las leyes de fuerzas centrales y merece un tratamiento detallado. En este caso, la fuerza y el potencial pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} f &= -K/r^2, \\ V &= -K/r \end{aligned} \quad (2.48)$$

Existen diversas maneras de integrar la ecuación de la órbita, siendo la más sencilla sustituir (2.48) en la ecuación diferencial (2.42):

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{-mf\left(\frac{1}{u}\right)}{l^2u^2} = \frac{mk}{l^2}. \quad (2.49)$$

Efectuando el cambio de variable  $y = u - \frac{mk}{l^2}$ , la ecuación diferencial queda en la forma

$$\frac{d^2y}{d\theta^2} + y = 0,$$

Que tiene solución inmediata  $y = B\cos(\theta - \theta')$ , siendo  $B$  y  $\theta'$  las dos constantes de integración. En función de  $r$ , la solución es

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2}(1 + e\cos(\theta - \theta')), \quad (2.50)$$

Donde,

$$g = B \frac{l^2}{mk}. \quad (2.51)$$

Resulta instructivo obtener la ecuación de la órbita a partir de la solución normal (2.47). Aun cuando este procedimiento es más largo que la integración sencilla de (2.49), tiene la ventaja de que la importante constante de integración  $e$  se evalúa automáticamente en función de la energía  $E$  y el momento cinético  $l$  del sistema. Escribamos (2.47) en la forma,

$$\theta = \theta' - \int \frac{du}{\sqrt{\frac{2mE}{l^2} - \frac{2mku}{l^2} - u^2}} \quad (2.52)$$

Donde ahora se trata de una integral indefinida. La cantidad  $\theta'$  que aparece en (2.52) es una constante de integración determinada por las condiciones iniciales y no tiene por qué ser el ángulo inicial  $\theta_0$  en el instante  $t = 0$ . La integral indefinida es la forma típica,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{\sqrt{-\gamma}} \arccos - \frac{\beta + 2\gamma x}{\sqrt{q}} \quad (2.53)$$

donde  $q = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ . Para aplicar esto a (2.52) debemos hacer.

$$\alpha = \frac{2mE}{l^2}, \beta = \frac{2mk}{l^2}, \gamma = -1, \quad (2.54)$$

Y el discriminante  $q$  será por tanto,

$$q = \left(\frac{2mk}{l^2}\right)^2 \left(1 + \frac{2El^2}{mk^2}\right) \quad (2.55)$$

Con estas sustituciones, (2.52) queda de la forma,

$$\theta = \theta' - \arccos \frac{\frac{l^2 u}{mk} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}}} \quad (2.56)$$

Por último, despejando  $u = 1/r$ , la ecuación de la órbita resulta ser

$$\frac{1}{r} = \frac{mk}{l^2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \cos(\theta - \theta')\right), \quad (2.57)$$

Que concuerda con (2.50), con la diferencia de que  $e$  está expresada en función de  $E$  y  $l$ . A partir de (2.57) podemos ahora identificar la constante de integración  $\theta'$  con uno de los ángulos correspondientes a inversión del movimiento de la órbita. Notemos que en la ecuación de la órbita sólo aparecen tres de las cuatro constantes de integración y es ésta una propiedad característica de la órbita. En efecto, la cuarta constante sitúa la posición inicial de la partícula de la órbita. Si sólo queremos conocer la ecuación de la órbita, tal información carece de interés y por tanto no aparece en la respuesta. Desde luego, cuando se quiera completar la solución hallando  $r$  y  $\theta$  en función del tiempo, deberemos dar la constante que falta. Así pues, si queremos integrar el teorema de conservación del momento cinético  $mr^2 d\theta = l dt$  por medio de (2.57), habrá que especificar además el ángulo inicial  $\theta_0$ . Ahora bien, la ecuación general de una cónica con un foco en el origen es,

$$\frac{1}{r} = C(1 + e \cos(\theta - \theta')), \quad (2.58)$$

Donde  $e$  es la excentricidad de la sección cónica. Por comparación con (2.57) se deduce que la órbita es siempre una sección cónica de excentricidad,

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{mk^2}} \quad (2.59)$$

La naturaleza de la órbita depende del valor de  $e$  según el esquema siguiente:

Hipérbola	$e > 1$	$E > 0$
Parábola	$e = 1$	$E = 0$
Elipse	$e < 1$	$E < 0$
Circunferencia	$e = 0$	$E = -\frac{mk^2}{2l^2}$

Esta clasificación concuerda con el estudio cualitativo de las órbitas basado en el diagrama energético del potencial unidimensional equivalente a  $V'$ . Ahora, la condición de movimiento circular aparece de manera un tanto diferente, pero puede deducirse fácilmente como consecuencia de las condiciones de circularidad anteriores. En el caso de una órbita circular,  $T$  y  $V$  son constantes en el tiempo y según el teorema virial<sup>4</sup>

$$E = T + V = -V/2 + V = V/2$$

Luego,

$$E = -\frac{k}{2r_0}. \quad (2.60)$$

Para el equilibrio entre la fuerza central y la fuerza efectiva, podemos escribir,

$$-\frac{k}{r_0^2} = -\frac{l^2}{mr_0^3} \quad (2.61)$$

O sea,

$$r_0 = \frac{l^2}{mk} \quad (2.62)$$

Con esta fórmula el radio orbital, (2.60) queda de la forma

$$E = -\frac{mk^2}{2l^2} \quad (2.63)$$

Como condición para el movimiento circular.

En el caso de las órbitas elípticas, puede demostrarse que el eje mayor sólo depende de la energía. El semieje mayor es la semisuma de las dos distancias apsidales  $r_1$  y  $r_2$ . En dichos

<sup>4</sup>El teorema virial dice que  $T = -\frac{1}{2}V$ .

puntos, la velocidad radial es nula por definición y la conservación de la energía implica que las distancias apsidales sean en consecuencia, las raíces de la ecuación,

$$E - \frac{l^2}{2mr^2} + \frac{k}{r} = 0 \quad (2.64)$$

O sea de

$$r^2 + \frac{k}{E}r - \frac{l^2}{2mE} = 0 \quad (2.65)$$

Ahora bien, el coeficiente del término lineal de una ecuación de segundo grado es igual a la suma de las raíces cambiada de signo. Luego, el semieje mayor vendrá dado por,

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = -\frac{k}{2E}. \quad (2.66)$$

Notemos que en el límite circular, (2.66) concuerda con (2.60). En función del semieje mayor, la excentricidad de la elipse puede escribirse,

$$e = \sqrt{1 - \frac{l^2}{mka}}, \quad (2.67)$$

Además (2.67) nos da la expresión,

$$\frac{l^2}{mk} = a(1 - e^2) \quad (2.68)$$

En función de la cual podemos escribir (2.50) de la órbita elíptica en la forma:

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(\theta - \theta')} \quad (2.69)$$

De (2.69) se deduce que las dos distancias apsidales (que corresponden a que  $\theta - \theta'$  valga cero y  $\pi$ , respectivamente) son iguales a  $a(1 - e)$  y  $a(1 + e)$ , como era de esperar de las propiedades de la elipse.

Ahora teniendo en cuenta que  $\theta'$  depende de las condiciones iniciales, para el caso de la Luna vale  $\theta' = 0$ , y la variación angular  $\theta$ , en astronomía se llama anomalía verdadera y se la denota por  $f$ . Entonces (2.69), queda de la forma,

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(f)} \quad (2.70)$$

# Capítulo 3

## Problema de los tres cuerpos

### 3.1 Problema restringido de tres cuerpos

La ley de gravitación universal de Newton funciona bien tal como la conocemos entre dos cuerpos que se atraen, pero el problema se complica en las situaciones reales en las que hay más de dos cuerpos, como ocurre en el Sistema Solar.

La simplicidad y la dificultad del problema de los tres cuerpos, en sus diversas formas han atraído la atención de mucho matemáticos en siglos. El problema de los tres cuerpos es enigmática como siempre, y aunque mucho ha sido el descubrimiento ya, la evolución reciente de la dinámica no lineal y el estímulo de nuevos observatorios en el sistema solar tienen mucho significado en el interés del problema y la obtención de nuevos resultados.

El problema restringido de tres cuerpos consiste en que uno de ellos es de masa infinitesimal (masa  $m_3$ ) y que los otros dos (de masas  $m_1$  y  $m_2$ ) se mueven en una órbita circular (dos cuerpos sin perturbación externa separados por una distancia constante) con respecto a su centro de masa. El reto es encontrar, para todo tiempo, el movimiento de la partícula de masa despreciable sometida al campo gravitacional de  $m_1$  y  $m_2$ . Lagrange encontró las ecuaciones de movimiento de la partícula en cuestión, mediante una ingeniosa transformación de coordenadas.

### 3.2 Ecuaciones del problema restringido de tres cuerpos

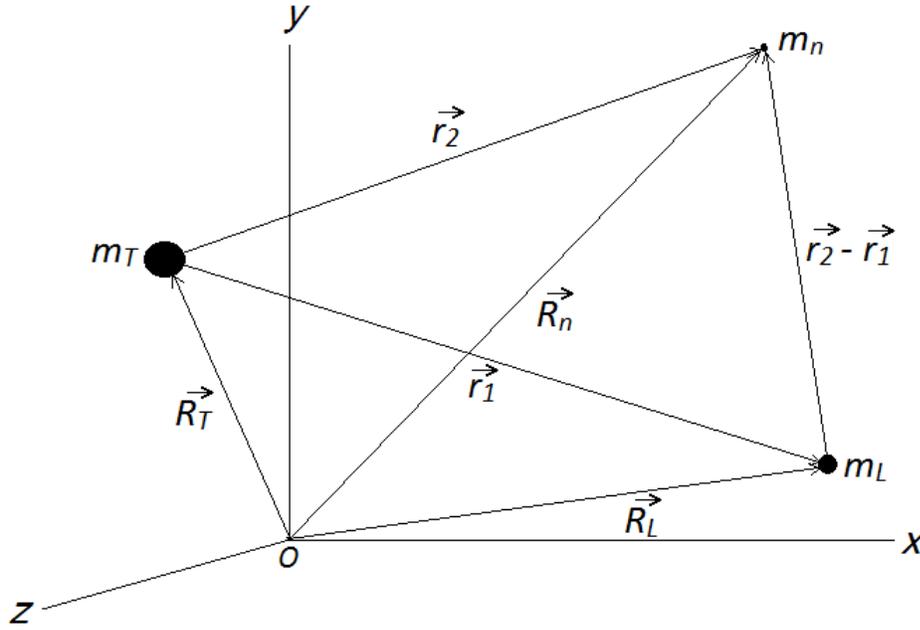


Figura 3.1: Coordenadas plano rotante

Consideremos tres cuerpos Tierra, Luna y nave espacial. Sean los vectores de posición  $\vec{R}_T$ ,  $\vec{R}_L$  y  $\vec{R}_n$  de las tres masas  $m_T$  (masa de la Tierra),  $m_L$  (masa de la Luna) y  $m_n$  (masa de la nave espacial), con respecto al origen fijo  $O$ , respectivamente. Donde  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$  son los vectores posición de los cuerpos secundarios  $m_L$  y  $m_n$  relativos al primario  $m_T$  (Figura 3.1).

De la ley de Newton y la ley de la gravitación obtenemos las ecuaciones de movimiento de las tres masas con respecto al origen:

$$\ddot{\vec{R}}_T = G \frac{m_L}{r_1^3} \vec{r}_1 + G \frac{m_n}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (3.1)$$

$$\ddot{\vec{R}}_L = G \frac{m_n}{(r_2 - r_1)^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) - G \frac{m_T}{r_1^3} \vec{r}_1 \quad (3.2)$$

$$\ddot{\vec{R}}_n = G \frac{m_L}{(r_1 - r_2)^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) - G \frac{m_T}{r_2^3} \vec{r}_2 \quad (3.3)$$

Según la Figura (3.1) observamos que:

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \vec{R}_L - \vec{R}_T \\ \vec{r}_2 &= \vec{R}_n - \vec{R}_T\end{aligned}\quad (3.4)$$

Las aceleraciones de los cuerpos secundarios con respecto al cuerpo primario, están dadas por:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = \ddot{\vec{R}}_L - \ddot{\vec{R}}_T \quad (3.5)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = \ddot{\vec{R}}_n - \ddot{\vec{R}}_T \quad (3.6)$$

Al remplazar (3.1), (3.2) en (3.5) y (3.1), (3.3) en (3.6), obtenemos las ecuaciones de movimiento de la nave espacial y la Luna, si el origen de coordenadas está en el centro de la Tierra:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{r}}_1 + G \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} (m_T + m_L) &= G m_n \left( \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{(r_2 - r_1)^3} - \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} \right) \\ \ddot{\vec{r}}_2 + G \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} (m_T + m_n) &= G m_L \left( \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{(r_1 - r_2)^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right)\end{aligned}\quad (3.7)$$

Si la masa de la nave espacial es despreciable ( $m_n \approx 0$  es decir  $m_n \ll m_T \wedge m_L$ ), las ecuaciones de movimiento de la Luna y nave espacial con respecto a la Tierra son:

$$\ddot{\vec{r}}_1 + G \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} (m_T + m_L) = 0 \quad (3.8)$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 + G \frac{\vec{r}_2}{r_2^3} m_T = G m_L \left( \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{(r_1 - r_2)^3} - \frac{\vec{r}_1}{r_1^3} \right) \quad (3.9)$$

Las ecuaciones (3.8) y (3.9) serán utilizadas en el capítulo 5 para poder encontrar las trayectorias de la Luna y la nave espacial con respecto a la Tierra.

# Capítulo 4

## La órbita elíptica en el espacio

Los componentes de  $\vec{r}$  y  $\dot{\vec{r}}$  tiene una descripción general del movimiento de un cuerpo en su órbita, pero no describe el tamaño, forma, y orientación en el espacio. Para describir la órbita circular o elíptica en el espacio se emplean cinco escalares ( $a, i, \omega, e, \Omega$ ), llamados elementos clásicos, los cuales describen el tamaño, achatamiento y orientación de una órbita [2].

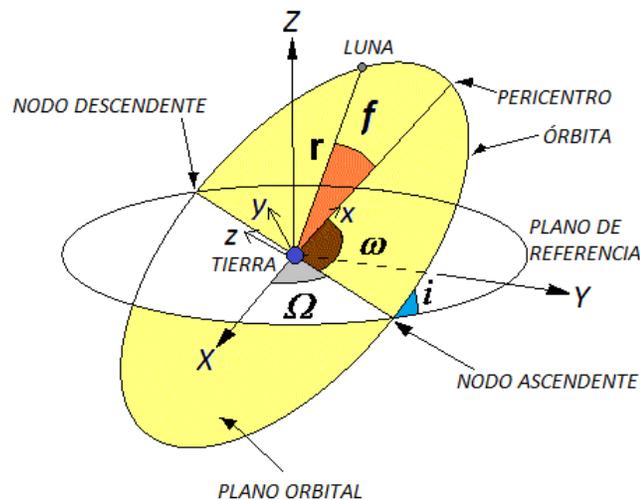


Figura 4.1: Elementos clásicos

Los valores de  $\vec{r} = (x, y)$  y  $\dot{\vec{r}} = (\dot{x}, \dot{y})$  (o alternativamente,  $r, \theta, \dot{r}$  y  $\dot{\theta}$ ) de la masa  $m_2$  con respecto a  $m_1$  en una órbita definida para cualquier tiempo tienen una localización sobre la órbita por tres constantes  $a, e, \omega$  y el ángulo variable  $f$ , el cual indica la posición del cuerpo respecto al pericentro. El análisis se enfoca en el entendimiento del movimiento en el plano orbital. Sin embargo en el sistema lunar se considera una representación tridimensional de la órbita en el espacio (Figura 4.1).

Vamos a analizar el movimiento de la Luna con respecto a la Tierra en el plano orbital fijo. Se considera un sistema de coordenadas cartesianas en tres dimensiones con respecto a un punto arbitrario que tiene un vector posición  $\vec{r} = (x, y, z) = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ . El eje  $x$  se toma a lo largo del eje mayor de la elipse, (o para el caso de la circunferencia, en dirección desde el centro hasta un punto de está) en dirección del pericentro, el eje  $y$  es perpendicular a  $x$  y está sobre el plano orbital, el eje  $z$  es perpendicular a  $x, y$ .

Ahora vamos a definir este plano orbital con respecto a un plano de referencia estándar. La línea de referencia es el eje  $X$  en el plano de referencia estándar, el eje  $Y$  es perpendicular a  $X$ , toma los ángulos hacia la derecha de  $X$ , el eje  $Z$  es perpendicular a  $X$  y  $Y$ .

En general el plano orbital está inclinado con respecto al plano de referencia con un ángulo  $I$  llamado inclinación de la órbita. La línea de intersección entre el plano orbital y el plano de referencia es llamada línea de nodos. El punto en donde la órbita cruza el plano de referencia moviéndose de abajo hacia arriba es llamada nodo ascendente, el ángulo entre la línea de referencia y el radio vector del nodo ascendente se llama longitud de nodo ascendente,  $\Omega$ , el ángulo entre este mismo radio vector y el pericentro de la órbita se llama argumento de pericentro,  $\omega$ .

La inclinación está en el rango  $0 \leq I \leq 180^\circ$ , si  $I < 90^\circ$  el movimiento es progrado y si es  $I > 90^\circ$  el movimiento es retrogrado.

La Figura (4.1) muestra las relaciones entre el sistema de coordenadas orbitales y el sistema de referencia. Es claramente que las coordenadas en un sistema pueden ser expresadas en términos del otro por medio de tres rotaciones sobre varios ejes.

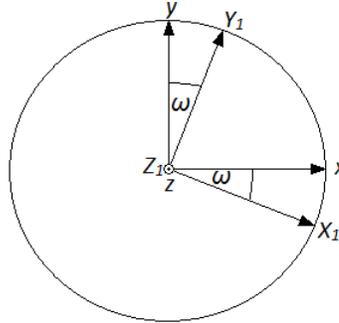


Figura 4.2: Rotación alrededor de  $z$ , con ángulo  $\omega$ .

Para transformar desde el sistema de referencia del plano orbital  $(x, y, z)$ , al sistema de referencia,  $(X, Y, Z)$ , primero se realiza una rotación sobre el eje  $z$  a través de un ángulo  $\omega$ , (Figura 4.2), de modo que el eje  $X_1$  coincida con la línea de nodos, el resultado es un sistema  $(X_1, Y_1, Z_1)$ , donde,

$$\begin{aligned} X_1 &= x \cos(\omega) - y \sin(\omega), \\ Y_1 &= x \sin(\omega) + y \cos(\omega), \\ Z_1 &= z. \end{aligned} \tag{4.1}$$

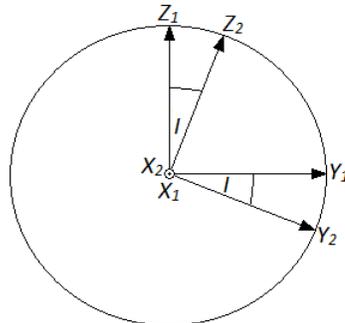


Figura 4.3: Rotación alrededor de  $X_1$ , con ángulo  $I$ .

Luego una rotación del sistema  $(X_1, Y_1, Z_1)$  sobre el eje  $X_1$ , por medio de un ángulo  $I$ , como se muestra en la Figura (4.3), el resultado es un sistema  $(X_2, Y_2, Z_2)$ , el cual es,

$$\begin{aligned} X_2 &= X_1, \\ Y_2 &= Y_1 \cos(I) - Z_1 \sin(I), \\ Z_2 &= Y_1 \sin(I) + Z_1 \cos(I). \end{aligned} \tag{4.2}$$

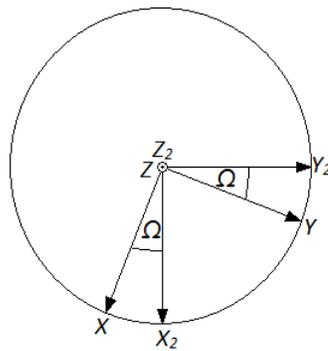


Figura 4.4: Rotación alrededor de  $Z_2$ , con ángulo  $\Omega$ .

Finalmente una rotación sobre el eje  $Z_2$  por medio de un ángulo  $\Omega$ , Figura (4.4), el resultado será el sistema  $X, Y, Z$ ,

$$\begin{aligned} X &= X_2 \cos(\Omega) - Y_2 \sin(\Omega), \\ Y &= X_2 \sin(\Omega) + Y_2 \cos(\Omega), \\ Z &= Z_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ahora remplazamos (4.1), (4.2) en (4.3), obteniendo:

$$\begin{aligned}
 X &= x[\cos(\omega)\cos(\Omega) - \text{sen}(\omega)\text{sen}(\Omega)\cos(I)] - y[\text{sen}(\omega)\cos(\Omega) \\
 &\quad + \cos(\omega)\text{sen}(\Omega)\cos(I)] + z\text{sen}(\Omega)\text{sen}(I), \\
 Y &= x[\cos(\omega)\text{sen}(\Omega) + \text{sen}(\omega)\cos(\Omega)\cos(I)] - y[\text{sen}(\omega)\text{sen}(\Omega) \\
 &\quad - \cos(\omega)\cos(\Omega)\cos(I)] - z\cos(\Omega)\text{sen}(I), \\
 Z &= x\text{sen}(\omega)\text{sen}(I) + y\cos(\omega)\text{sen}(I) + z\cos(I).
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Al conocer los elementos clásicos es posible determinar la posición inicial en el espacio con respecto al plano de referencia, de acuerdo a las ecuaciones de transformación, (4.4). Si se restringe las coordenadas en la línea del plano orbital, donde en este caso las condiciones iniciales para el caso de la Luna son,  $x_{iL} = r\cos f$ ,  $y_{iL} = r\text{sen} f$  y  $z_{iL} = 0$ , entonces, (4.4), para las condiciones iniciales, queda de la forma:

$$\begin{aligned}
 X_{iL} &= r(\cos(\Omega)\cos(\omega + f) - \text{sen}(\Omega)\text{sen}(\omega + f)\cos(I)), \\
 Y_{iL} &= r(\text{sen}(\Omega)\cos(\omega + f) + \cos(\Omega)\text{sen}(\omega + f)\cos(I)), \\
 Z_{iL} &= r(\text{sen}(\omega + f)\text{sen}(I)).
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora, tomamos (4.5) y remplazamos  $r$  el cual esta definido en la ecuación (2.70), las condiciones iniciales en el plano de referencia, son:

$$\begin{aligned}
 X_{iL} &= \left( \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(f)} \right) (\cos(\Omega)\cos(\omega + f) - \text{sen}(\Omega)\text{sen}(\omega + f)\cos(I)), \\
 Y_{iL} &= \left( \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(f)} \right) (\text{sen}(\Omega)\cos(\omega + f) + \cos(\Omega)\text{sen}(\omega + f)\cos(I)), \\
 Z_{iL} &= \left( \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos(f)} \right) (\text{sen}(\omega + f)\text{sen}(I)).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Para obtener las velocidades, se deriva (4.6) o (4.5):

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{iL} &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} [e \operatorname{sen}(f) (\cos \Omega \cos(\omega + f) - \operatorname{sen}(\Omega) \operatorname{sen}(\omega + f) \cos(I)) - \\
 &\quad (1 + e \cos f) (\cos \Omega \operatorname{sen}(\omega + f) + \operatorname{sen}(\Omega) \cos(\omega + f) \cos(I))], \\
 \dot{Y}_{iL} &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} [e \operatorname{sen}(f) (\operatorname{sen} \Omega \cos(\omega + f) + \cos(\Omega) \operatorname{sen}(\omega + f) \cos(I)) + \\
 &\quad (1 + e \cos f) (-\operatorname{sen} \Omega \operatorname{sen}(\omega + f) + \cos(\Omega) \cos(\omega + f) \cos(I))], \\
 \dot{Z}_{iL} &= \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} [e \operatorname{sen}(f) \operatorname{sen}(\omega + f) \operatorname{sen}(I) + (1 + e \cos f) \cos(\omega + f) \operatorname{sen}(I)].
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Donde los valores de  $a$  y  $e$  se pueden cambiar y así considerar una órbita elíptica o circular de la Luna en el sistema de referencia. Estas son las ecuaciones de posición y velocidad inicial de la Luna con respecto a la Tierra.

## Capítulo 5

# Solución al problema restringido de tres cuerpos (Tierra-Luna-Nave espacial)

En este capítulo se pretende dar solución al problema de enviar una nave espacial desde la Tierra a la Luna. La nave espacial se mueve en el plano, de la Tierra - Luna, para así poder ahorrar combustible y tiempo en el viaje, el lanzamiento generalmente se realiza desde lo que se denomina una órbita de parqueo alrededor de la Tierra, en este punto, las naves permanecen durante algún tiempo, después del cual reactivan sus motores para adquirir la trayectoria adecuada con el fin de alcanzar la Luna. Se considerará como origen de coordenadas el centro de la Tierra. Sea  $\vec{r}_N = \vec{r}_2$  el vector desde la Tierra hasta la nave espacial y  $\vec{r}_L = \vec{r}_1$  desde la Tierra hasta la Luna, entonces el vector desde la Luna hasta la nave espacial será  $\vec{r}_N - \vec{r}_L$ , Figura (5.1):

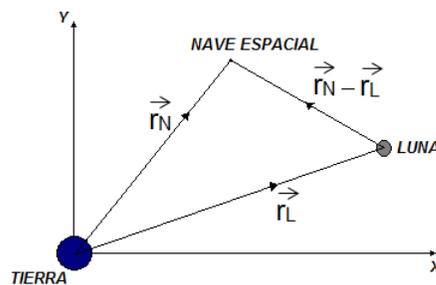


Figura 5.1: Problema de los tres cuerpos: Tierra - Luna - Nave.

En la tabla 5.1 se muestran algunas relaciones que se tendrán en cuenta a lo largo del trabajo<sup>5</sup>:

<sup>5</sup>Donde  $Um$  se refiere a unidades de masa,  $Ul$ , unidades de longitud y  $Uv$  unidades de velocidad

CANTIDADES REQUERIDAS	MAGNITUD REAL	MAGNITUD UTILIZADA
Masa de la Tierra ( $m_T$ )	$5.9722 \times 10^{24} \text{ Kg}$	$1 \text{ Um}$
Radio de la Tierra	$6440 \text{ Km}$	$0.0166 \text{ Ul}$
Velocidad de escape de la Tierra ( $V_0$ )	$10 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$	$10 \text{ Uv}$
Masa de la Luna ( $m_L$ )	$7.3490 \times 10^{22} \text{ Kg}$	$\frac{1}{81.3} \text{ Um}$
Velocidad de la Luna	$1 \frac{\text{Km}}{\text{s}}$	$1 \text{ Uv}$
Razón masas Tierra - Luna	81.3	
Constante Gravitacional	$6.672 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{s}^2 \text{Kg}}$	1
Distancia Tierra - Luna	$384400 \text{ Km}$	$1 \text{ Ul}$

Tabla 5.1: Unidades establecidas para el problema.

La configuración para las condiciones iniciales, es mostrada en la Figura (5.2):

Fuente: Computer Modeling: From spaceflight, to order to chaos: sec 11.2

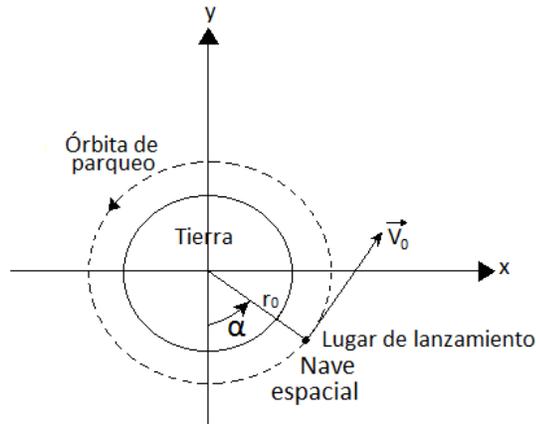


Figura 5.2: Condiciones iniciales

Donde  $r_0$  es el radio de la órbita de parqueo,  $V_0$  es la velocidad inicial cuando la nave es lanzada hacia la Luna (velocidad de escape), y  $\alpha$  es el ángulo de lanzamiento.

Se tiene que las condiciones iniciales para la nave espacial, (plano de la órbita), son [3]:

$$\begin{aligned}
 x_{iN} &= r_0 \sin(\alpha) \\
 y_{iN} &= -r_0 \cos(\alpha) \\
 z_{iN} &= 0 \\
 \dot{x}_{iNx} &= V_0 \cos(\alpha) \\
 \dot{y}_{iNy} &= V_0 \sin(\alpha) \\
 \dot{z}_{iNz} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Si la nave espacial tiene una órbita de parqueo de 100 Km, entonces  $r_0 = 0.0166 \text{ Ul} + 0.000260 \text{ Ul}$ .

En el capítulo 3 ya se dedujeron las ecuaciones de movimiento de la Luna y nave espacial, (3.8) y (3.9), donde  $x_1 = x_L$  y  $x_2 = x_N$ , que describen el movimiento de la Luna y la nave espacial con respecto a la Tierra, ahora en coordenadas cartesianas, éstas son:

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_L &= -(m_T + m_L) \frac{x_L}{r_L^3} \\
 \ddot{y}_L &= -(m_T + m_L) \frac{y_L}{r_L^3},
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
 \ddot{x}_N &= -\frac{x_N}{r_N^3} m_T + m_L \left( \frac{x_L - x_N}{r_{LN}^3} - \frac{x_L}{r_L^3} \right) \\
 \ddot{y}_N &= -\frac{y_N}{r_N^3} m_T + m_L \left( \frac{y_L - y_N}{r_{LN}^3} - \frac{y_L}{r_L^3} \right).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Considerando que la órbita de la Luna es circular, con centro en la Tierra, y que tiene unas condiciones iniciales,  $x_{iL} = 1 \text{ Ul}$ ,  $y_{iL} = 0 \text{ Ul}$ ,  $z_{iL} = 0 \text{ Ul}$ ,  $v_{iLx} = 0 \text{ Uv}$ ,  $v_{iLy} = 1 \text{ Uv}$  y  $v_{iLz} = 0 \text{ Uv}$ , se resuelven (5.2) y (5.3), mediante el programa *Solución del problema restringido de tres cuerpos en el plano orbital (Apéndice A)*. Para la nave espacial se tuvieron en cuenta las condiciones iniciales dadas por (5.1). Un parámetro importante que determina la forma de la órbita es el ángulo de lanzamiento por lo tanto, éste se varió desde  $\alpha = 1^\circ$  hasta  $\alpha = 360^\circ$ .

Se graficó la solución de las ecuaciones anteriores mediante *Gnuplot*. A continuación se presentan los casos en los cuales la nave espacial se acerca a la Luna, donde la trayectoria de la Luna esta descrita por el color rojo y la trayectoria de la nave espacial esta descrita por el color azul o verde. El tiempo se tomó desde  $t_0 = 0$  días.

La gráfica 5.3 muestra el caso en el cual el ángulo de lanzamiento es de  $316^\circ$  y  $317^\circ$ . Se observa que la nave espacial se acerca a la Luna, cuando han transcurrido aproximadamente 3 días de vuelo, pero luego escapa de la misma sin retornar a la Tierra. Por lo tanto estas condiciones no son óptimas para el lanzamiento de una nave espacial.

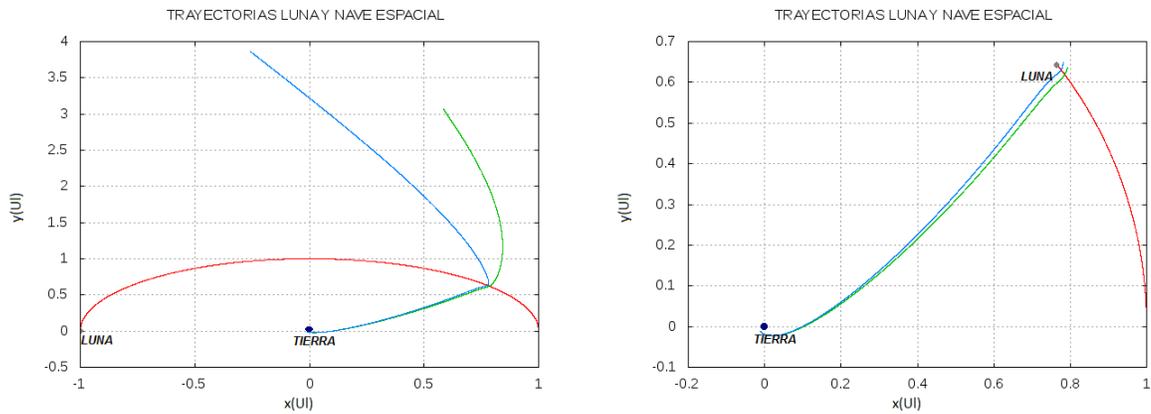


Figura 5.3: Trayectoria de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $316^\circ$  y  $317^\circ$ .

A continuación se presenta un caso particular para el cual la nave espacial impactaría la Luna. Ésto ocurre para cuando los ángulos de lanzamiento son iguales a  $318^\circ$  y  $319^\circ$ , y han transcurrido 3.06 días.

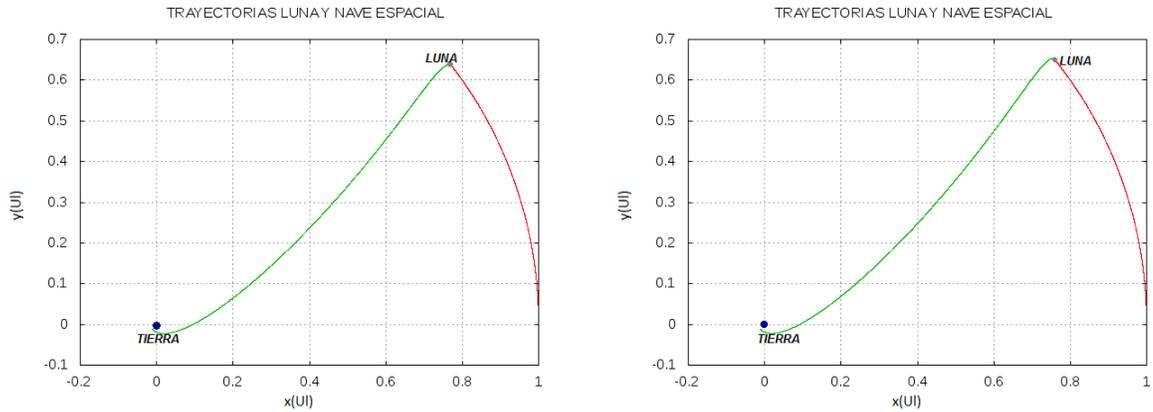


Figura 5.4: Trayectoria de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $318^\circ$  y  $319^\circ$ .

Las gráfica 5.5 muestra el caso muy especial en el cual los ángulos de lanzamiento son de  $320^\circ$  y  $321^\circ$ . Se observa que la nave espacial se acerca a la Luna, cuando han transcurrido 3.17 días de vuelo, para luego regresar a la Tierra en 7.18 días. La trayectoria recorrida por la nave espacial es en forma de ocho y cabe resaltar que se ha modelado una órbita exitosa para ir a la Luna y volver utilizando únicamente el impulso gravitacional lo que resulta en un ahorro en el costo de combustible ya que no hay necesidad de realizar correcciones de trayectoria.

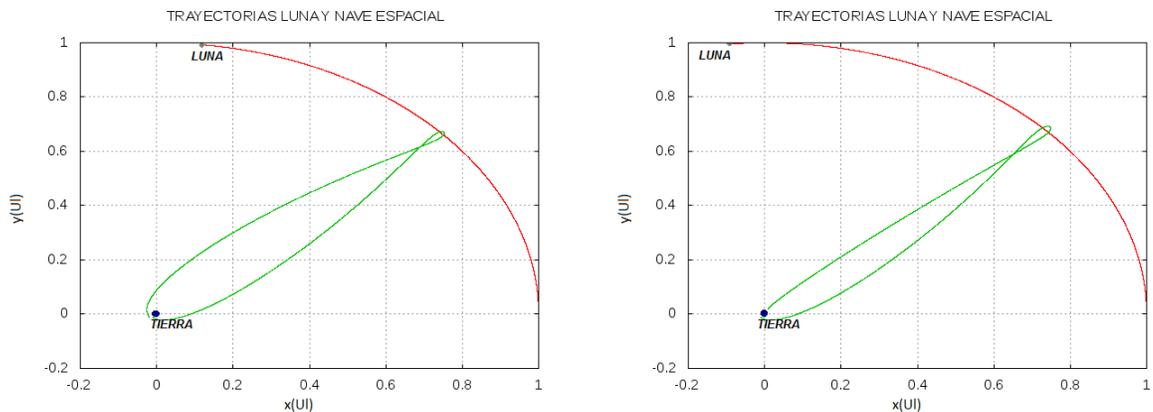


Figura 5.5: Trayectoria de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $320^\circ$  y  $321^\circ$

Las graficas anteriores están en el plano de la órbita, para poder considerar la excentricidad de la órbita de la Luna, se cambia el sistema de coordenadas del plano orbital  $(x, y, 0)$  al plano de referencia  $(X, Y, Z)$ . Para el caso de la Luna se resuelve (3.8), en coordenadas cartesianas  $(X, Y, Z)$ ,

$$\begin{aligned}\ddot{X}_L &= -(m_T + m_L) \frac{X_L}{r_L^3} \\ \ddot{Y}_L &= -(m_T + m_L) \frac{Y_L}{r_L^3} \\ \ddot{Z}_L &= -(m_T + m_L) \frac{Z_L}{r_L^3}\end{aligned}\tag{5.4}$$

Se debe utilizar las condiciones iniciales de posición (4.6) y de velocidad (4.7). Se consideran los siguientes parametros orbitales<sup>6</sup>, mostrados en la tabla 5.2, con el fin de analizar como afecta la órbita circular y elíptica a la nave espacial,

ELEMENTOS CLÁSICOS	$a$	$e$	$\omega$	$I$	$\Omega$
ÓRBITA CIRCULAR	384400 Km	0	318.15°	5.16°	125.08
ÓRBITA ELÍPTICA	384399.1 Km	0.0549	318.15°	5.16°	125.08

Tabla 5.2: Elementos clásicos de la órbita circular y elíptica de la Luna.

Ahora para cambiar el plano orbital de la nave espacial, al plano de referencia, se aplica la ecuación (4.4), teniendo en cuenta las condiciones iniciales de la nave espacial, las cuales están dadas en (5.1):

$$\begin{aligned}X_{iN} &= (\cos(\Omega)\cos(\omega) - \sin(\Omega)\cos(I)\sin(\omega))(r_0\sin\alpha) - \\ &\quad (\cos(\Omega)\sin(\omega) + \sin(\Omega)\cos(I)\cos(\omega))(-r_0\cos\alpha) \\ Y_{iN} &= (\sin(\Omega)\cos(\omega) + \cos(\Omega)\cos(I)\sin(\omega))(r_0\sin\alpha) - \\ &\quad (\sin(\Omega)\sin(\omega) - \cos(\Omega)\cos(I)\cos(\omega))(-r_0\cos\alpha) \\ Z_{iN} &= \sin(I)\sin(\omega)(r_0\sin\alpha) + \sin(I)\cos(\omega)(-r_0\cos\alpha)\end{aligned}\tag{5.5}$$

<sup>6</sup>Los elementos clásicos para la órbita circular y elíptica se pueden buscar en la pagina [http : ssd.jpl.nasa.gov/satelem](http://ssd.jpl.nasa.gov/satelem)

Al derivar (4.4) se encuentra las condiciones iniciales de la velocidad:

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \dot{x}[\cos(\omega)\cos(\Omega) - \text{sen}(\omega)\text{sen}(\Omega)\cos(I)] - \dot{y}[\text{sen}(\omega)\cos(\Omega) \\
 &\quad + \cos(\omega)\text{sen}(\Omega)\cos(I)] + \dot{z}\text{sen}(\Omega)\text{sen}(I), \\
 \dot{Y} &= \dot{x}[\cos(\omega)\text{sen}(\Omega) + \text{sen}(\omega)\cos(\Omega)\cos(I)] - \dot{y}[\text{sen}(\omega)\text{sen}(\Omega) \\
 &\quad - \cos(\omega)\cos(\Omega)\cos(I)] - \dot{z}\cos(\Omega)\text{sen}(I), \\
 \dot{Z} &= \dot{x}\text{sen}(\omega)\text{sen}(I) + \dot{y}\cos(\omega)\text{sen}(I) + \dot{z}\cos(I).
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Al remplazar las condiciones iniciales de velocidad, (5.1), en (5.6), obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \dot{X}_{iXN} &= (\cos(\Omega)\cos(\omega) - \text{sen}(\Omega)\cos(I)\text{sen}(\omega))(V_0\cos\alpha) - \\
 &\quad (\cos(\Omega)\text{sen}(\omega) + \text{sen}(\Omega)\cos(I)\cos(\omega))(V_0\text{sen}\alpha) \\
 \dot{Y}_{iYN} &= (\text{sen}(\Omega)\cos(\omega) + \cos(\Omega)\cos(I)\text{sen}(\omega))(V_0\cos\alpha) - \\
 &\quad (\text{sen}(\Omega)\text{sen}(\omega) - \cos(\Omega)\cos(I)\cos(\omega))(V_0\text{sen}\alpha) \\
 \dot{Z}_{iZN} &= \text{sen}(I)\text{sen}(\omega)(V_0\cos\alpha) + \text{sen}(I)\cos(\omega)(V_0\text{sen}\alpha)
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Teniendo en cuenta los valores de los elementos clásicos para la órbita circular y elíptica según el caso, en las condiciones iniciales, se resuelve (3.9) para el sistema de coordenadas del plano de referencia:

$$\begin{aligned}
 \ddot{X}_N &= -\frac{X_N}{r_N^3}m_T + m_L \left( \frac{X_L - X_N}{r_{LN}^3} - \frac{X_L}{r_L^3} \right) \\
 \ddot{Y}_N &= -\frac{Y_N}{r_N^3}m_T + m_L \left( \frac{Y_L - Y_N}{r_{LN}^3} - \frac{Y_L}{r_L^3} \right) \\
 \ddot{Z}_N &= -\frac{Z_N}{r_N^3}m_T + m_L \left( \frac{Z_L - Z_N}{r_{LN}^3} - \frac{Z_L}{r_L^3} \right)
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Al resolver (5.8) se encuentra la órbita de la nave espacial, con condiciones iniciales (5.5) para la posición y (5.7) para velocidad.

Se graficó la solución de las ecuaciones de la Luna y nave espacial para el caso circular y elíptico en el plano de referencia, mediante el programa *Solución del problema restringido de tres cuerpos en el plano de referencia (Apéndice B)*, a continuación se presentan los casos en los cuales la nave espacial se acerca a la Luna.

La gráfica 5.6 muestra el caso en el cual el ángulo de lanzamiento es de  $316^\circ$  y  $317^\circ$ . Se observa que hay un pequeño cambio en el camino de la nave espacial en el caso circular y elíptico de la Luna, donde estas condiciones no son óptimas para el lanzamiento de una nave espacial.

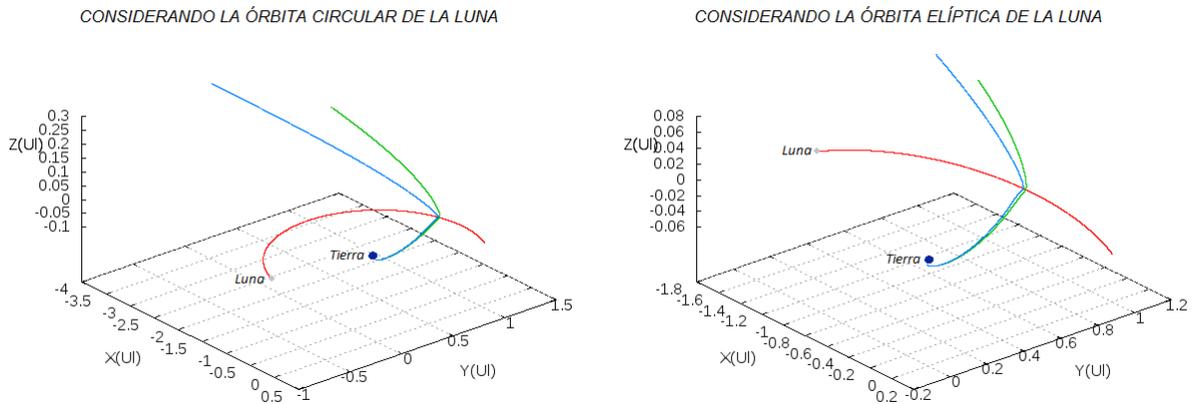


Figura 5.6: Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $316^\circ$  y  $317^\circ$

A continuación se presenta un caso particular para el cual, la nave espacial impacataría la Luna en el caso circular, mientras en el caso elíptico la nave espacial sale del sistema Tierra-Luna (Figura 5.7), ésto ocurre para cuando el ángulo de lanzamiento es  $318^\circ$ , mientras para  $319^\circ$  la nave espacial choca en la Luna sin importar si la órbita de la Luna es circular o elíptica (Figura 5.8).

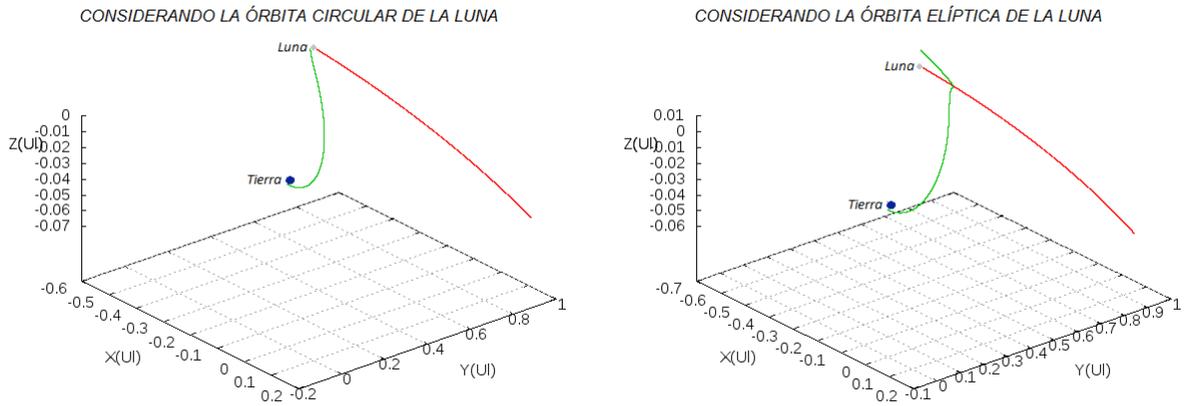


Figura 5.7: Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $318^\circ$

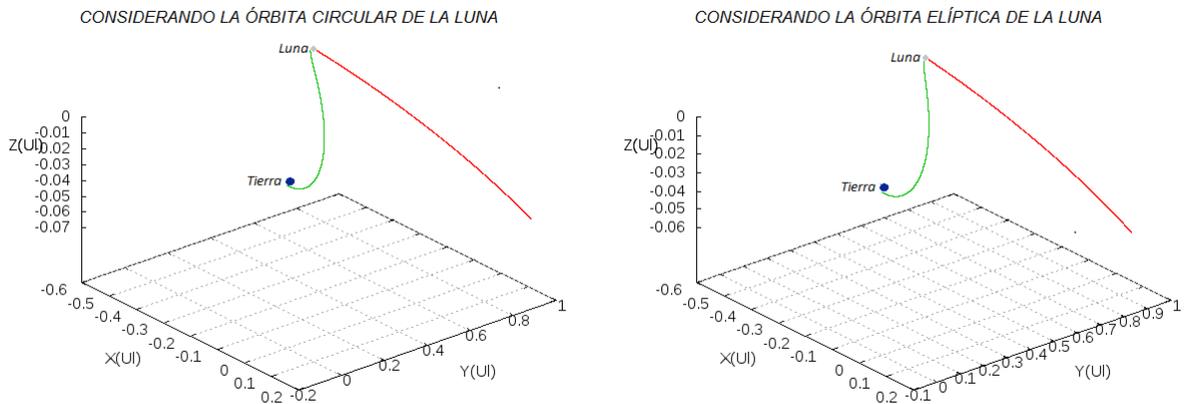


Figura 5.8: Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $319^\circ$

Las gráficas 5.9 muestran el caso en el cual el ángulo de lanzamiento es de  $320^\circ$ . Se observa que la nave espacial se acerca a la Luna, para luego regresar a la Tierra, en el caso circular, para el caso elíptico la nave espacial golpea a la Luna, en tanto que para el ángulo de lanzamiento  $321^\circ$  se observa que la trayectoria de la nave espacial es muy parecida para el caso circular y elíptico (Figura 5.10).

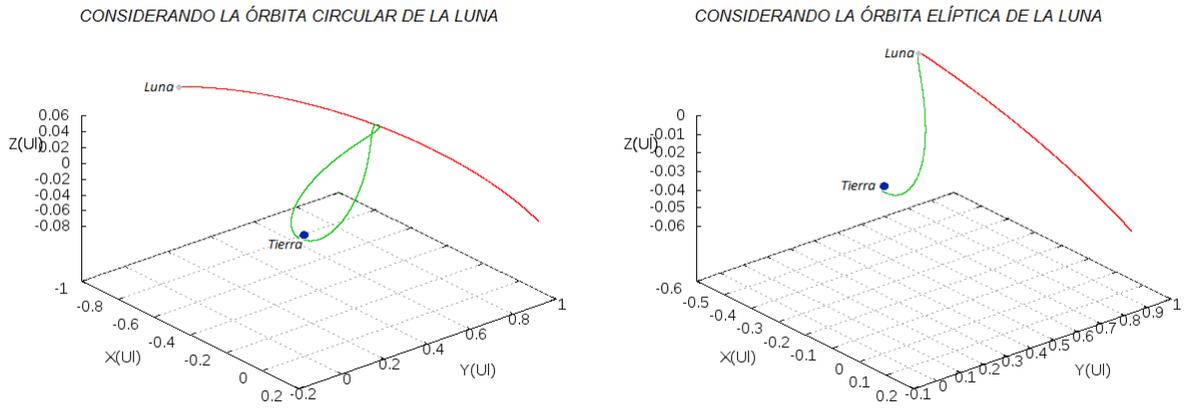


Figura 5.9: Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $320^\circ$

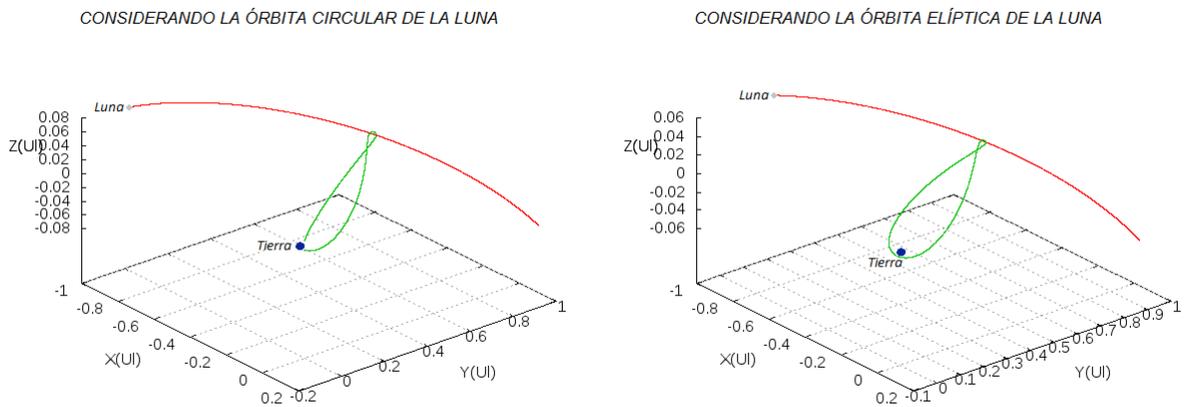


Figura 5.10: Trayectoria circular y elíptica de la nave espacial para cuando el ángulo de lanzamiento es igual a  $321^\circ$

A partir de los resultados obtenidos anteriormente, se ha encontrado que el ángulo de lanzamiento de  $321^\circ$  es óptimo, debido a que con este, se logra enviar la nave espacial a la Luna, para que después pueda regresar a la Tierra, sin importar la consideración, de si la órbita es elíptica o circular.

También cabe resaltar que la búsqueda de dicho ángulo fue bastante difícil de lograr, ya que variaciones muy pequeñas, llevan a órbitas alejadas de la requerida. Un barrido de paso de  $1^\circ$ , entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  llevó a que la única solución posible del problema es el ya mencionado  $321^\circ$ .

Finalmente, es muy importante poder enviar una nave espacial a la Luna ya que se pueden hacer muchos estudios los cuales servirían para el desarrollo de la humanidad.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Recomendaciones

### 6.1 Conclusiones

- Al variar el ángulo en pequeñas cantidades se observa que la órbita de la nave espacial lleva situaciones totalmente diferentes. Variando tan sólo un grado la nave espacial puede quedarse orbitando la Tierra, chocar con la Luna o escapar del sistema.
- La excentricidad de la Luna es 0 para la órbita circular y 0.0549 para la órbita elíptica, a pesar que el cambio es pequeño, afecta notablemente el comportamiento de la nave espacial, donde lo importante es que la nave espacial llega a la Luna y regresa a la Tierra, solo con las fuerzas gravitacionales y un impulso para las condiciones iniciales de posición y velocidad, ahorrando combustible y energía.
- El ángulo de lanzamiento de  $321^\circ$  es óptimo, por que con este, se logra enviar la nave espacial a la Luna, para que después regrese a la Tierra, sin importar la consideración, de si la órbita es elíptica o circular.

### 6.2 Recomendaciones

- Estudiar el problema restringido de tres cuerpos teniendo en cuenta que la nave espacial parte de la Luna y su destino final sea Marte.
- Desarrollar simulaciones numéricas para analizar el comportamiento caótico en el sistema Tierra-Luna-nave, con un metodo distinto al *ode45* para mirar si tiene una mejor exactitud.
- Analizar las órbitas de la nave espacial teniendo en cuenta maniobras orbitales originadas por propulsión.

# Apéndice A

## Código de los programas

### Solución del problema restringido de tres cuerpos en el plano orbital

#### include.h

```
#include<iostream>
#include<cstdio>
#include<cstdlib>
#include<cmath>
#include<string.h>
#include<gsl/gsl_errno.h>
#include<gsl/gsl_odeiv.h>
#include<gsl/gsl_matrix.h>
#define Integration_Method gsl_odeiv_step_type
#define Runge_Kuta45 gsl_odeiv_step_rkf45
#define M 0.012300123
```

#### ODE.cpp

```
int ODE(double t, const double X[], double X_dot[], void *param)
{
    double G = *(double *) param;
    double rm, r, D;

    rm=sqrt(X[0]*X[0]+X[1]*X[1]); //posicion luna
    r=sqrt(X[2]*X[2]+X[3]*X[3]); //posicion de la nave
    D=sqrt((X[0]-X[2])*(X[0]-X[2])+(X[1]-X[3])*(X[1]-X[3]));
    \\distancia nave y Luna
    X_dot[0]=X[4];
    X_dot[1]=X[5];
    X_dot[2]=X[6];
    X_dot[3]=X[7];
    X_dot[4]=-(1+M)*X[0]/pow(rm,3);
    X_dot[5]=-(1+M)*X[1]/pow(rm,3);
    X_dot[6]=-X[2]/pow(r,3)+M*((X[0]-X[2])/pow(D,3)-X[0]/pow(rm,3));
```

```
X_dot[7]=-X[3]/pow(r,3)+M*((X[1]-X[3])/pow(D,3)-X[1]/pow(rm,3));

return 0;
}
```

### Solución PTC2.cpp

```
#include "include.h"
#include "ODE.cpp"

int main(void)

{
double G,xm,ym,vxm,vym;
double r0,v0,alpha,x,y,vx,vy;
double ti,tf,P,h,xc,xt;

//Condiciones iniciales de la Luna
P=2*M_PI*sqrt(1/(1+M));
xm=1;
ym=0;
vxm=0;
vym=sqrt(1+M);
printf("=====\n");
printf("CONDICIONES INICIALES DE LA LUNA:\n");
printf("Posicion: xm = %lf U1, ym = %lf U1\n",xm, ym);
printf("Velocidad: vxm = %lf Uv, vym = %lf Uv\n",vxm, vym);
printf("Periodo de la Luna = %lf Ut\n",P);

//Condiciones iniciales de la nave espacial
const char *nomfile[50]={"trayectoria1.dat","trayectoria2.dat",
"trayectoria3.dat","trayectoria4.dat","trayectoria5.dat",
"trayectoria6.dat","trayectoria7.dat","trayectoria8.dat",
"trayectoria9.dat","trayectoria10.dat","trayectoria11.dat",
"trayectoria12.dat","trayectoria13.dat","trayectoria14.dat",
"trayectoria15.dat","trayectoria16.dat","trayectoria17.dat",
"trayectoria18.dat","trayectoria19.dat","trayectoria20.dat",
"trayectoria21.dat","trayectoria22.dat","trayectoria23.dat",
"trayectoria24.dat","trayectoria25.dat","trayectoria26.dat",
"trayectoria27.dat","trayectoria28.dat","trayectoria29.dat",
"trayectoria30.dat","trayectoria31.dat","trayectoria32.dat",
```

```

"trayectoria33.dat", "trayectoria34.dat", "trayectoria35.dat",
"trayectoria36.dat", "trayectoria37.dat", "trayectoria38.dat",
"trayectoria39.dat", "trayectoria40.dat", "trayectoria41.dat",
"trayectoria42.dat", "trayectoria43.dat", "trayectoria44.dat",
"trayectoria45.dat", "trayectoria46.dat", "trayectoria47.dat",
"trayectoria48.dat", "trayectoria49.dat", "trayectoria50.dat"};

int i=0;
for(alpha=0;alpha<=50;alpha=alpha+1){
G= 1;
r0= 0.01686;
v0= 11;
x=r0*sin(alpha*M_PI/180);
y=-r0*cos(alpha*M_PI/180);
vx=v0*cos(alpha*M_PI/180);
vy=v0*sin(alpha*M_PI/180);
printf("=====\n");
printf("CONDICIONES INICIALES DE LA NAVE ESPACIAL:\n");
printf("Posicion: x = %lf U1, y = %lf U1\n",x, y);
printf("Velocidad: vx = %lf Uv, vy = %lf Uv\n",vx, vy);
printf("El ángulo de salida es = %lf grados\n",alpha);

//Vector inicial entrar las condiciones al sistema
double X[8]={xm,ym,x,y,vxm,vym,vx,vy};

//LLamando al inegrador
const Integration_Method *T = Runge_Kuta45;
gsl_odeiv_step * s = gsl_odeiv_step_alloc (T,8);
gsl_odeiv_control * c = gsl_odeiv_control_y_new(1e-18, 1e-18);
gsl_odeiv_evolve * e = gsl_odeiv_evolve_alloc (8);
gsl_odeiv_system sys = {ODE, NULL, 8, &G};

//Tiempo de inicio
P=2*M_PI*sqrt(1/(1+M));
ti=0;
tf=P;
h=1e-18;

//Datos de la solución de ecuaciones
FILE *datos,*graph=NULL;

```

```
datos = fopen(nomfile[i], "w");
i++;

do{
    xc=sqrt((X[2]-X[0])*(X[2]-X[0])+(X[3]-X[1])*(X[3]-X[1]));
    if (xc<=0.0045){printf("La nave se choco\n");}
    if (xc<=0.0045){break;}
    int status=gsl_odeiv_evolve_apply(e, c, s, &sys, &ti, tf,&h, X);
    fprintf(datos,"%lf %lf %lf %lf %lf\n",X[0],X[1],X[2],X[3],alpha);

}
while(ti<tf);
fclose(datos);

\\Guardando el gráfico
graph = popen("gnuplot", "w");
fprintf(graph, "set title 'TRAYECTORIAS LUNA Y NAVE ESPACIAL '\n");
fprintf(graph, "set xlabel 'X(U1)'\n");
fprintf(graph, "set ylabel 'Y(U1)'\n");
fprintf(graph, "set grid\n");
fprintf(graph, "set autoscale\n");
fprintf(graph, "unset key\n");
fprintf(graph, "set terminal png\n");
fprintf(graph, "set output 'grafica de 0 a 100.png'\n");
fprintf(graph, "plot 'trayectoria1.dat' u 1:2 w l,
'trayectoria1.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria2.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria3.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria4.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria5.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria6.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria7.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria8.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria9.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria10.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria11.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria12.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria13.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria14.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria15.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria16.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria17.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria18.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria19.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria20.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria21.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria22.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria23.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria24.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria25.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria26.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria27.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria28.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria29.dat' u 3:4 w l, 'trayectoria30.dat' u 3:4 w l,
```

```
'trayectoria31.dat' u 3:4 w l,'trayectoria32.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria33.dat' u 3:4 w l,'trayectoria34.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria35.dat' u 3:4 w l,'trayectoria36.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria37.dat' u 3:4 w l,'trayectoria38.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria39.dat' u 3:4 w l,'trayectoria40.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria41.dat' u 3:4 w l,'trayectoria42.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria43.dat' u 3:4 w l,'trayectoria44.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria45.dat' u 3:4 w l,'trayectoria46.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria47.dat' u 3:4 w l,'trayectoria48.dat' u 3:4 w l,
'trayectoria49.dat' u 3:4 w l,'trayectoria50.dat' u 3:4 w l,\n");
fclose(graph);
}
return 0;
}
```

### Solución del problema restringido de tres cuerpos en el plano de referencia.

#### include.h

```
#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <cstdlib>
#include <cmath>
#include <string.h>
#include <gsl/gsl_errno.h>
#include <gsl/gsl_odeiv.h>
#include <gsl/gsl_matrix.h>
#define Integration_Method gsl_odeiv_step_type
#define Runge_Kuta45 gsl_odeiv_step_rkf45
#define new_vector gsl_vector_alloc
#define read_vector gsl_vector_fscanf
#define print_vector(frm,vec) gsl_vector_fprintf(stdout,vec,frm)
#define get gsl_vector_get
#define set gsl_vector_set
#define ala gsl_pow_int
#define M 0.012300123
```

#### ODE.cpp

```
int ODE(double t, const double X[], double X_dot[],void *param)
{
```

```

double G = *(double *) param;
double rm, r, D;

rm=sqrt(X[0]*X[0]+X[1]*X[1]+X[2]*X[2]);\\Posición Luna
r=sqrt(X[3]*X[3]+X[4]*X[4]+X[5]*X[5]);\\Posición de la nave
D=sqrt((X[0]-X[3])*(X[0]-X[3])+(X[1]-X[4])*(X[1]-X[4])+
      (X[2]-X[5])*(X[2]-X[5]));\\Distancia nave y Luna

X_dot[0]=X[6];
X_dot[1]=X[7];
X_dot[2]=X[8];
X_dot[3]=X[9];
X_dot[4]=X[10];
X_dot[5]=X[11];
X_dot[6]=-(1+M)*X[0]/pow(rm,3);
X_dot[7]=-(1+M)*X[1]/pow(rm,3);
X_dot[8]=-(1+M)*X[2]/pow(rm,3);
X_dot[9]=-X[3]/pow(r,3)+M*((X[0]-X[3])/pow(D,3)-X[0]/pow(rm,3));
X_dot[10]=-X[4]/pow(r,3)+M*((X[1]-X[4])/pow(D,3)-X[1]/pow(rm,3));
X_dot[11]=-X[5]/pow(r,3)+M*((X[2]-X[5])/pow(D,3)-X[2]/pow(rm,3));

return 0;
}

```

### Solución PTC3.cpp

```

#include "include.h"
#include "ODE.cpp"

int main(void)

{

double G, xm, ym, zm, vxm, vym, vzm;
double r0, v0, alpha, x, y, z, vx, vy, vz, xc;
double ti, tf, P, h;
double f, oma, w, I, e, a, r, fp, rp, n;

//Parámetros orbitales de la Luna órbita circular

e=0.0;

```

```

a=1;
f=0;
oma=125.08*M_PI/180;
w=318.15*M_PI/180;
I=5.16*M_PI/180;
n=sqrt((1+M)/(a*a*a));

//Parámetros orbitales de la Luna órbita eliptica

e=0.0549;
a=384399.1/384400;
f=0;
oma=125.08*M_PI/180;
w=318.15*M_PI/180;
I=5.16*M_PI/180;
n=sqrt((1+M)/(a*a*a));

//Condiciones iniciales de la Luna
xm=(a*(1-e*e)/(1+e*cos(f)))*(cos(oma)*cos(w+f)-
    sin(oma)*sin(w+f)*cos(I));
ym=(a*(1-e*e)/(1+e*cos(f))*(sin(oma)*cos(w+f)+
    cos(oma)*sin(w+f)*cos(I));
zm=(a*(1-e*e)/(1+e*cos(f))*sin(w+f)*sin(I);
vxm=(n*a*e*sin(f)/(sqrt(1-e*e)))*(cos(oma)*cos(w+f)-
    sin(oma)*sin(w+f)*cos(I)-(n*a*(1+e*cos(f))/(sqrt(1-e*e)))*(cos(oma)*
    sin(w+f)+sin(oma)*cos(w+f)*cos(I));
vym=(n*a*e*sin(f)/(sqrt(1-e*e))*(sin(oma)*cos(w+f)+
    cos(oma)*sin(w+f)*cos(I)+(n*a*(1+e*cos(f))/(sqrt(1-e*e)))*(-sin(oma)*
    sin(w+f)+cos(oma)*cos(w+f)*cos(I));
vzm=(n*a*e*sin(f)/(sqrt(1-e*e))*sin(w+f)*sin(I)+
    (n*a*(1+e*cos(f))/(sqrt(1-e*e)))*cos(w+f)*sin(I);

printf("=====\n");
printf("CONDICIONES INICIALES DE LA LUNA:\n");
printf("Posicion:xm=%lf Ul, ym=%lf Ul, zm=%lf Ul\n",xm,ym,zm);
printf("Velocidad:vxm=%lf Uv, vym=%lf Uv, vzm=%lf Uv\n",vxm,vym,vzm);
printf("El angulo de salida es = %lf grados\n",alpha);

//Condiciones iniciales de la nave espacial

```

```

G= 1;
r0= 0.01686;
v0=11;
alpha=322;

x=(cos(oma)*cos(w)-sin(oma)*cos(I)*sin(w))*(r0*sin(alpha*M_PI/180))-
(cos(oma)*sin(w)+sin(oma)*cos(I)*cos(w))*(-r0*cos(alpha*M_PI/180));
y=(sin(oma)*cos(w)+cos(oma)*cos(I)*sin(w))*(r0*sin(alpha*M_PI/180))+
(-sin(oma)*sin(w)+cos(oma)*cos(I)*cos(w))*(-r0*cos(alpha*M_PI/180));
z=sin(I)*sin(w)*(r0*sin(alpha*M_PI/180))+
sin(I)*cos(w)*(-r0*cos(alpha*M_PI/180));
vx=(cos(oma)*cos(w)-sin(oma)*cos(I)*sin(w))*
(v0*cos(alpha*M_PI/180)*0.9834)-(cos(oma)*sin(w)+
sin(oma)*cos(I)*cos(w))*(v0*sin(alpha*M_PI/180));
vy=(sin(oma)*cos(w)+cos(oma)*cos(I)*sin(w))*
(v0*cos(alpha*M_PI/180)*0.9834)+(-sin(oma)*sin(w)+
cos(oma)*cos(I)*cos(w))*(v0*sin(alpha*M_PI/180));
vz=sin(I)*sin(w)*(v0*cos(alpha*M_PI/180))+
sin(I)*cos(w)*(v0*sin(alpha*M_PI/180));

printf("=====\n");
printf("CONDICIONES INICIALES DE LA NAVE ESPACIAL:\n");
printf("Posicion: x = %lf U1, y = %lf U1, z = %lf U1\n",x, y, z);
printf("Velocidad:vx = %lf Uv,vy = %lf Uv, vz = %lf Uv\n",vx,vy,vz);
printf("El angulo de salida es = %lf grados\n",alpha);

//Vector inicial entrar las condiciones al sistema
double X[12]={xm,ym,zm,x,y,z,vxm,vym,vzm,vx,vy,vz};

//LLamando al integrador
const Integration_Method *T = Runge_Kuta45;
gsl_odeiv_step * s = gsl_odeiv_step_alloc (T,12);
gsl_odeiv_control * c = gsl_odeiv_control_y_new (1e-18, 1e-18);
gsl_odeiv_evolve * es = gsl_odeiv_evolve_alloc (12);
gsl_odeiv_system sys = {ODE, NULL, 12, &G};

//Tiempo de inicio

P=2*M_PI*sqrt(1/(1+M));
ti=0;

```

```
tf=P;
h=1e-18;

//Datos de la solución de ecuaciones
FILE *datos,*graph=NULL;
datos = fopen("trayectorias.dat","w");

do{

xc=sqrt((X[3]-X[0])*(X[3]-X[0])+(X[4]-X[1])*(X[4]-X[1])+
        (X[5]-X[2])*(X[5]-X[2]));
if (xc<=0.0045){break;}
int status = gsl_odeiv_evolve_apply (es, c, s, &sys, &ti, tf,&h, X);
fprintf(datos,"%le%le%le%le%le%le\n",X[0],X[1],X[2],X[3],X[4],X[5]);
}
while(ti<tf);
fclose(datos);

\\Guardando la gráfica
graph = popen("gnuplot","w");
fprintf(graph,"set title 'ORBITAS LUNA Y NAVE ESPACIAL '\n");
fprintf(graph,"set xlabel 'X(U1)'\n");
fprintf(graph,"set ylabel 'Y(U1)'\n");
fprintf(graph,"set zlabel 'Z(U1)'\n");
fprintf(graph,"set grid\n");
fprintf(graph,"set autoscale\n");
fprintf(graph,"unset key\n");
fprintf(graph,"set view 81, 21, 1, 1\n");
fprintf(graph,"set terminal png\n");
fprintf(graph,"set output '322inclinada.png'\n");
fprintf(graph," splot 'trayectorias.dat' using 1:2:3 w l,
        'trayectorias.dat' using 4:5:6 w l ");
fclose(graph);

return 0;
}
```

# Apéndice B

## Problema de N-cuerpos

De acuerdo con la ley gravitacional de Newton, dos partículas se atraen una a otra con una fuerza, sobre una línea recta entre ellas, la cual es proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia. Para el propósito de encontrar una descripción analítica de las interacciones y resultados del movimiento de un sistema de  $n$  partículas cuyas masas son  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$ , definimos que :

$$\vec{r}_i = x_i\hat{x} + y_i\hat{y} + z_i\hat{z}. \quad (\text{B.1})$$

$$\vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i = \dot{x}_i\hat{x} + \dot{y}_i\hat{y} + \dot{z}_i\hat{z}. \quad (\text{B.2})$$

Además la distancia entre  $m_i$  y  $m_j$  sería:

$$r_{ij} = (r_j - r_i) = \sqrt{(r_j - r_i)(r_j - r_i)}. \quad (\text{B.3})$$

Y la magnitud de la fuerza de atracción entre  $i$ -ésima y  $j$ -ésima partícula sería:

$$F = G \frac{m_i m_j}{r_{ij}^2}. \quad (\text{B.4})$$

Donde  $G$  es el factor de proporcionalidad llamado constante de gravitación universal.

La dirección de la fuerza es expresada en términos de los vectores unitarios. La fuerza que actúa sobre  $m_i$  de  $m_j$  tiene la dirección de  $(\vec{r}_j - \vec{r}_i)/r_{ji}$ , mientras la fuerza de  $m_j$  sobre  $m_i$  es la misma pero en dirección opuesta. La fuerza total  $f_i$  sobre  $m_i$ , con la presencia de  $n-1$  masas será:

$$\vec{f}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_i m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (\text{B.5})$$

Lo principal de la sumatoria indica que los términos para los cuales  $i=j$  pueden ser omitidos. En concordancia con la segunda ley de Newton:

$$\vec{f}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i \quad (\text{B.6})$$

Ahora para  $n$  ecuaciones diferenciales, se tiene:

$$\ddot{\vec{r}}_i = G \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{r_{ij}^3} (\vec{r}_j - \vec{r}_i). \quad (\text{B.7})$$

Con apropiadas condiciones iniciales, se realiza una completa descripción matemática del movimiento del sistema de  $n$  partículas.

# Apéndice C

## Método de RUNGE KUTTA

Para la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias, primero se debe describir al problema como un sistema de ecuaciones de primer orden (Representación en ecuaciones de estado), sea una ecuación diferencial ordinaria:

$$y^{(n)} = f(t, y', y'', \dots, y^{n-1}). \quad (\text{C.1})$$

Se realiza las siguientes sustituciones:

$$y_1 = y, y_2 = y', y_3 = y'', \dots, y_n = y^{n-1}$$

Se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = y_3$$

.....

$$y_n' = f(t, y_1, y_2, \dots, y_n)$$

El problema del valor inicial de este sistema queda descrito (en forma vectorial) como:

$$Y' = F(t, Y); Y(0) = y_0. \quad (\text{C.2})$$

Donde:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Al resolver la ecuación diferenciales en C, se debe crear la función F del sistema de ecuaciones. Luego se puede usar el método *ode45* para la resolución de la ecuación diferencial, cuya sintáxis general es:

$$[T, Y] = \text{ode45}(F, \text{rangodetiempo}, Y0)$$

F es el nombre de la función vectorial de estado, de la forma  $Y' = F(t, Y)$ , (*rangodetiempo*) es un vector de dos elementos, cuyos valores son el tiempo inicial y el tiempo final. *Y0* es el vector de valores iniciales. El método devolverá un vector columna de tiempo T con tantos elementos como intervalos.

# Bibliografía

- [1] C.D Murray and S.F Dermot, Solar System Dynamics, 4ed, 2006, pag 850.p.
- [2] Dan L. Boulet, Willmann-Bell, Methods of orbit determination for the microcomputer, 1ed, 1991, pag 780.p.
- [3] J.M.A.Danby, Willmann-Bell, Computer Modeling:From Order to Chaos, 1ed, 1997, pag 880.p.
- [4] A.E.Roy, Orbital Motion, 4ed, pag 390.p.
- [5] George W, The Foundations of celestial mechanics, 3ed, pag 2004.p.
- [6] Bert Janssen, Mecánica Analítica para matemáticos, 2ed, 2005.
- [7] Charles Poole Jhon Safko and Herbert Goldstein, Classical Mechanics, 7ed, 1990, pag 780.p.
- [8] Jerry B. Marion-Stephen T. Thorton, Classical dynamics of particles and systems, 4ed , 1995, pag 830.p.