EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO APLICADO A ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES SEMI-LINEALES DE SEGUNDO ORDEN DE TIPO PARABÓLICO

Carlos Andrés Cerón Erazo

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO

2012

EL PRINCIPIO DEL MÁXIMO APLICADO A ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES SEMI-LINEALES DE SEGUNDO ORDEN DE TIPO PARABÓLICO

Carlos Andrés Cerón Erazo

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director:
Miller Orlando Cerón Goméz
Magister en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO
2012

Nota de Responsabilidad

“Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo son responsabilidad exclusiva de sus autores”

Artículo 1º de acuerdo 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Nota de Aceptación:

Miller Orlando Cerón Gómez

Presidente de Tesis

Saulo Mosquera López

Jurado 1

Eduardo Ibargüen Mondragón

Jurado 2

San Juan de Pasto, agosto de 2012

Agradecimientos

Quiero agradecer en primera instancia a Dios por haberme dado la oportunidad de seguir mi carrera, poder ingresar a la mejor universidad del departamento de Nariño y formarme profesionalmente. Gracias a él por tenerme con vida para poder llegar hasta este punto y por tener a mi lado a mis padres y hermanos a quienes dedico este trabajo por todo el cariño que me han entregado, los valores que de ellos recibí y el infinito apoyo que en gran parte mi madre me brindó; fue con ella con quien hablé muchas veces cuando estaba tomando la decisión de entrar a Licenciatura en Matemáticas, sin duda que esas discusiones fueron muy importantes para tomar la decisión correcta y estoy seguro que así fue, ahora pues, gracia a ello soy quien soy.

Agradezco con todo el corazón a mi familia quien me poyo y siempre quiso lo mejor para mí, a María quien me ha brindado la compañía perfecta, el apoyo y el amor incondicional que necesité durante todo este tiempo. Desearnos suerte en lo que vendrá para nuestras vidas que, estoy seguro seguirán unidas más fuertemente que nunca.

Quisiera agradecer a mi asesor y amigo Msc. Miller Cerón Gómez por trabajar conmigo y guiar cada una de las etapas del presente trabajo con su conocimiento y trayectoria. Sus valiosos consejos sirvieron de mucho y en verdad que fue un honor el haber trabajado a su lago. Gratificar también a los profesores del Departamento de Matemáticas y Estadística por sus valiosas enseñanzas y todo el apoyo que me brindaron durante mis años en la carrera y por supuesto durante el desarrollo de mi memoria de matemático.

Finalmente es el momento de agradecer a quienes me hicieron pasar unos años espectaculares mientras estudiábamos, mis compañeros, en general a todo el grupo, porque ha sido muy enriquecedor nutrirme de sus diferentes especialidades porque no todos teníamos las mismas habilidades.

Resumen

El principio del máximo es uno de los instrumentos más conocidos y útiles en el campo de las ecuaciones diferenciales; aporta elementos matemáticos valiosos para estudiar ciertas características de las soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas ordinarias y parciales de los tipos elípticas, parabólicas e hiperbólicas y nos ayuda a obtener información del comportamiento de su solución. En este trabajo se pretende, mediante el estudio y análisis de la aplicabilidad del principio a las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias-parciales de segundo orden de tipo parabólico, obtener condiciones iniciales o propiedades de las funciones que intervienen en una ecuación diferencial semi-lineal parcial de segundo orden de tipo parabólico de la forma:

$$u_t + a(u, x, t)u_x + g(u, x, t) = u_{xx}, \tag{1}$$

para aplicar dicho principio en ella y obtener información de su solución.

Abstract

The maximum principle is one of the best known and most useful instruments in the field of differential equations, it provides valuable mathematical elements to study certain features for the solutions of ordinary differential equations and partial elliptic, parabolic and hyperbolic type and it helps in the information of the solution. This paper seeks, through the study and analysis of the applicability principle to ordinary-partial linear differential equations of second order parabolic type, to obtain initial conditions or properties of the functions involved in a semi-linear differential partial equation of the second order of parabolic type of the form:

$$u_t + a(u, x, t)u_x + g(u, x, t) = u_{xx},$$

to apply that principle and obtain information for its solution.

Contenido

Lista de Figuras

Introducción

El campo de las ecuaciones diferenciales resulta ser muy amplio y complejo, de hecho, existen ecuaciones diferenciales que no se pueden resolver explícitamente por lo que se requiere una descripción matemática del problema y un intento por obtener información de la solución a partir de la ecuación diferencial, es por eso que surge la necesidad de desarrollar y manejar herramientas útiles que nos permitan abordar este tipo de problemas, una de estas herramientas es el *principio del máximo*, útil en la aproximación de soluciones; puede ser aplicado tanto a ecuaciones diferenciales ordinarias como a ecuaciones diferenciales parciales; dentro de ésta última clase se encuentran ecuaciones muy particulares que son especiales debido a su aplicabilidad y estudio en la física como lo son *la ecuación del calor* y *la ecuación de onda*. En términos generales, una función f satisface el principio del máximo, si esta cumple una desigualdad diferencial $f'' \geq 0$ en un intervalo (a, b) que alcanza su máximo valor en uno de los extremos ya sea a o b, en otras palabras aún más generales las funciones que satisfacen una desigualdad diferencial en un dominio Ω alcanzan su máximo en la frontera de ese dominio. Concretamente, existen dos tipos de principios: *el principio del máximo fuerte* dice que si una función alcanza su máximo en el interior de su dominio, la función es una constante de manera uniforme, es decir, que el máximo no se alcanza en ningún punto del interior a menos que la función sea constante; análogamente *el principio del máximo débil*, dice que el máximo de la función se encuentra en la frontera del dominio, pero puede volver a ocurrir en el interior.

Suele haber una interpretación física natural del principio del máximo en los problemas de ecuaciones diferenciales que se plantean en la física, por ejemplo, las condiciones de contorno se pueden cambiar de una manera que sugiera intuitivamente que la temperatura resultante deba ser más pequeña, esto puede ser demostrado utilizando el principio del máximo, también se ha utilizado este principio en la teoría de control óptimo, conocida como optimización dinámica, para obtener condiciones necesarias (condiciones iniciales, condiciones de frontera o condiciones de funciones que intervienen)y lograr la optimización de sistemas dinámicos o sistemas que evolucionan con el tiempo, igualmente en soluciones viscosas y otras aplicaciones. Además este principio es una propiedad importante de las ecuaciones parabólicas que se utiliza para deducir la singularidad de sus soluciones. De esta manera nuestro trabajo buscó condiciones iniciales y propiedades de las funciones en la ecuación (1) para obtener información de su solución a través del principio del máximo. Inicialmente hizo un recorrido sobre la teoría de ecuaciones diferenciales tanto ordinarias como parciales para conceptualizar y manejar términos importantes que se utilizaron a lo largo del desarrollo de este trabajo y que fueron de gran ayuda para su comprensión. Luego estudió y analizó la aplicabilidad del principio del máximo en las ecuaciones diferenciales lineales ordinarias de segundo orden mostrando un caso simple de dicho principio y la metodología que se aplico sobre el mismo; esta parte fue importante ya que una buena forma de estudiar esta temática es empezando por ecuaciones sencillas que den una luz al problema. Posteriormente estudió y analizó la aplicabilidad del principio sobre ecuaciones diferenciales lineales parciales de segundo orden de tipo parabólico y enfatizó de manera particular en la aplicabilidad y metodología de dicho principio sobre una ecuación llamada la ecuación del calor; por lo que se había propuesto el estudio de una ecuación diferencial no lineal parcial de tipo parabólico de segundo orden la cual se sometió a un tratamiento y una transformación que hizo de ella una ecuación diferencial lineal parcial de tipo parabólico, prototipo de la ecuación del calor. Finalmente se logró obtener condiciones necesarias, se aplicó el principio y se obtuvo información de la solución de la ecuación (1)

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo se fundamenta en los capítulos $1, 3$ del libro [1] y establece los conceptos generales que se utilizan a lo largo del desarrollo de este trabajo. Al mismo tiempo, se mencionan algunos ejemplos de cada concepto, aplicaciones de la ecuación del calor como una de las Ecuaciones Diferenciales Parciales importantes y de nuestro interés. Se obvia la mayoría de la notación debido a que son estándares manejados en muchos de los libros de Ecuaciones Diferenciales.

Abreviaturas y Notación

- u_x: Primera derivada parcial de u respecto de x.
- u_{tt}: Segunda derivada parcial de u respecto de t.
- ∂E: Frontera del conjunto E.
- L: Operador lineal.
- $\equiv$: Definirse como.
- $E.D.O$: Ecuación Diferencial Ordinaria.
- $E.D.P$: Ecuación Diferencial Parcial.
- $E.D.P.L$: Ecuación Diferencial Parcial Lineal.
- Dominio: conjunto abierto y conexo (en el espacio euclidiano).

Conceptos Generales

Ecuación Diferencial

Una ecuación diferencial es una igualdad en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente y *Ecuaciones Diferenciales Parciales*, que contienen derivadas respecto a dos o más variables independiente; estas ultimas serán las que trataremos en este trabajo. La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial, se puede llevar a cabo mediante un método específico si es que existe para la ecuación diferencial en cuestión, o se busca información de la solución a partir de herramientas matemáticas diseñadas o adaptadas para este fin, como lo es el principio del máximo.

1.1. Ecuación Diferencial Ordinaria

Definición 1. *Una E.D.O de variable independiente x y variable dependiente u es una igualdad que puede ser expresada de la forma:*

$$F(x, u, u', u'', u''' \ldots, u^n) = 0,$$

donde n es un entero positivo y F es una función de las $(n+2)$ variables indicadas.

Un ejemplo de este tipo de ecuación es:

$$u' + x^2 u = e^x,$$

$$8u''' + x^2 u'' + u' + 3u = 0.$$

Se ha dedicado mucho estudio a la resolución de este tipo de ecuaciones, estando casi completamente desarrollada la teoría para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales. Son importantes en diversas áreas de estudio como la geometría, mecánica y astronomía, además de muchas otras aplicaciones por ejemplo, el movimiento de un sistema masa-resorte donde el resorte tiene masa despreciable, el cual solo depende de la variable tiempo.

1.2. Ecuación Diferencial Parcial

Definición 2. *Una E.D.P de variables independientes* x,t *y variable dependiente* u *es una igualdad que puede ser expresada de la forma:*

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_x u_t, u_{xxx}, u_{xx} u_t, ...) = 0,$$

donde F *es una función de las variables indicadas y al menos una derivada parcial ocurre.*

Un ejemplo de este tipo de ecuación es:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

$$2xu_{xxtt} + 4u_{xxx} + u_{xx} + u_{tt} = 0.$$

No todas las $E.D.P$ resultan tener el mismo interés; las hay que tienen tan sólo un interés puramente académico, mientras que hay otras cuyo interés reside en tener su origen en problemas de la Física y otras ciencias. Problemas típicos son la propagación del sonido o del calor, la electrostática, la electrodinámica, la dinámica de fluidos, la elasticidad, la mecánica cuántica y muchos más.

1.2.1. Orden de una Ecuación Diferencial

Definición 3. *El orden de una ecuación diferencial se define como la mayor derivada que aparece en la ecuación.*

Por ejemplo:

$$8u''' + x^2 u' + 3u = 0,$$

$$u_x + x^2 u = e^x,$$

la primera es una ecuación diferencial ordinaria de orden tres y la segunda es una ecuación diferencial parcial de primer orden.

1.2.2. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden

Definición 4. *Una E.D.P.L de segundo orden con variable dependiente* u *y variables independientes* x,t *sobre un conjunto* Ω *en el plano es una igualdad que puede ser expresada* *en la forma::*

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu + G = 0,$$

donde A, B, C, D, F, G son funciones lineales de x, t y $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ sobre Ω.

Algunos ejemplos de este tipo de ecuación son:

$$u_{xx} - u_{tt} + u = 0,$$

$$u_{xx} - u_t = 0,$$

ésta ultima se conoce como la *Ecuación del Calor.* Ambos son ejemplos de ecuaciones de segundo orden lineales sobre $\Omega = \mathbb{R}^2$. Observemos que lo que define que una ecuación diferencial sea lineal es que no aparecen productos de la función incógnita consigo misma ni ninguna de sus derivadas, tampoco aparecen en forma de funciones compuestas (por ejemplo, $sin(u)$).

1.2.3. Ecuación Diferencial Parcial Semi-lineal de Segundo Orden

Definición 5. *Una E.D.P de segundo orden con variable dependiente u y variables independientes x, t se dice semi-lineal sobre un conjunto Ω en el plano si y solo si puede ser expresada de la forma:*

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + \Phi(x, t, u, u_x, u_t) = 0,$$

donde A, B, C son funciones de x, t, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ sobre Ω y Φ es una función de algunas de las variables indicadas.

Un ejemplo de este tipo de ecuación es:

$$u_{xx} + xu_{tt} - u_x - e^{xt} \sin u = 0,$$

y la ecuación objeto de estudio

$$u_t + a(u, x, t)u_x + g(u, x, t) = u_{xx},$$

las cuales son *E.D.P* semi-lineal de segundo orden sobre $\Omega = \mathbb{R}^2$. Observemos que en la caracterización de una ecuación diferencial semi-lineal aparecen productos de la función incógnita consigo misma y con sus derivadas, asimismo aparecen funciones compuestas (por ejemplo, $sin(u)$).

1.2.4. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de Segundo Orden de Tipo Parabólico

Definición 6. *Una E.D.P.L de segundo orden sobre un punto* (x_0, t_0) *de un conjunto* Ω *de la forma*

$$Au_{xx} + Bu_{xt} + Cu_{tt} + Du_x + Eu_t + Fu + G = 0,$$

se dice de tipo parabólico en dicho punto, si cumple que

$$B^2(x_0, t_0) - 4A(x_0, t_0)C(x_0, t_0) = 0,$$

y es parabólico en Ω *si para todo punto del dominio se cumple esta condición.*

Nosotros nos vamos a interesar por una de las más clásicas e importantes de este tipo de *E.D.P* de segundo orden, *la ecuación del calor* que mas adelante se define. Además a las Ecuaciones Diferenciales Parciales Semi-lineales de Segundo Orden de Tipo Parabólico les rige la misma definición.

1.2.5. La Ecuación del Calor General

Definición 7. *Es una E.D.P de tipo parabólico de la forma:*

$$u_t(\boldsymbol{x}, t) - \Delta u(\boldsymbol{x}, t) = f(\boldsymbol{x}, t), \tag{1.1}$$

donde Δu *es el laplaciano de* u *en las variables* $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$*, y viene dado por*

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_i x_i}$$

siendo $n \geq 1$*.*

La ecuación (1.1) para $n \leq 3$, describe bajo hipótesis físicas adecuadas la evolución de la temperatura $u(\mathbf{x}, t)$ en cada instante t y en cada punto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, de un cuerpo sometido a una fuente de calor determinada por $f(\mathbf{x}, t)$.

Como se mencionó anteriormente la ecuación sobre la cual nos interesamos es la ecuación de segundo orden homogénea

$$u_{xx} - u_t = 0,$$

en donde la fuente $f(x, t) = 0$, y el laplaciano Δu en la variable $x \in \mathbb{R}$ es u_{xx}.

Para otros ejemplos de EDP que aparecen en las aplicaciones, se pueden consultar los libros [12] y [13].

Capítulo 2

El Principio del Máximo en Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Segundo Orden

Este capítulo se fundamenta en el primer capítulo del libro [7] y presenta una introducción a un caso simple del principio del máximo en ecuaciones diferenciales ordinarias con funciones que satisfacen una desigualdad diferencial no estricta en un dominio, muestra este principio en su forma mas conocida utilizando una función auxiliar diferente y al mismo tiempo exhibe condiciones necesarias para establecer dicho principio. Complementariamente se desarrolla en cada teorema su respectiva prueba, similarmente a como lo presenta el libro, aunque de manera mas detallada para su comprensión.

2.1. El Principio del Máximo en una Dimensión

Una función $u(x)$ que es continua en el intervalo $[a, b]$ toma su valor máximo en un punto de este intervalo. Si $u(x)$ tiene segundas derivadas continuas y un máximo relativo en un punto c entre a y b, entonces del calculo elemental conocemos que:

$$u^{'}(c) = 0 \qquad y \qquad u^{''}(c) \leq 0. \tag{2.1}$$

Ahora bien, suponga que $u(x)$ satisface la desigualdad diferencial estricta

$$L[u] \equiv u^{''} + g(x)u^{'} > 0, \tag{2.2}$$

en el intervalo abierto (a, b), donde $g(x)$ es cualquier función acotada. Es claro que la relación (2.1) no puede establecerse en un punto $c \in (a, b)$ ya que en él, $L[u] \leq 0$ lo cual contradice la desigualdad (2.2). Una característica esencial de este argumento es que la desigualdad (2.2) sea estricta, es decir, se asuma que $u'' + g(x)u'$ nunca es cero, o en pocas palabras que $u \neq constante$.
En conclusión, cada vez que (2.2) se mantenga, $u(x)$ no puede alcanzar su valor máximo en cualquier punto interior $c \in (a, b)$ excepto en los puntos extremos a o b.

Observemos sin embargo, que si $u(x)$ satisface la desigualdad diferencial no estricta

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \tag{2.3}$$

en un intervalo (a, b) con $g(x)$ acotado, se admite la solución $u = constante$, ya que para todo punto, en particular para c se tiene

$$u' = 0 \qquad y \qquad u'' = 0,$$

para lo cual $L[u] = 0$ que satisface la desigualdad (2.3).
En síntesis, cada vez que (2.3) se mantenga, el máximo de $u(x)$ puede ser alcanzado en los punto extremos a, b o en un punto interior c.

Estos son casos simples de un principio del máximo. El siguiente teorema muestra la conclusión para cuando se admite el máximo en un punto interior

2.1.1. Teorema del Principio del Máximo en una dimensión

Teorema 1. *Sea u una función que depende de x y satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv u'' + g(x)u' \geq 0, \tag{2.4}$$

sobre un intervalo abierto (a, b), donde $g(x)$ es cualquier función acotada. Si $u(x) \leq M$ en (a, b) y si el máximo M de u se alcanza en un punto interior $c \in (a, b)$, entonces $u \equiv M$, es decir, u es constante.

Demostración. Supongamos que u alcanza su máximo valor M en un punto interior c de (a, b), luego

$$u(c) = M,$$

escojamos un punto $d \in (a, b)$ tal que $d > c$, es decir que

$$u(d) < M,$$

y definamos la función auxiliar

$$z(x) \equiv e^{\alpha(x-c)} - 1,$$

con α una constante positiva a ser elegida,

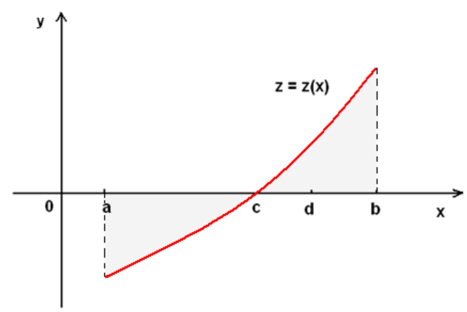

Figura 2.1: Función $z(x) \equiv e^{\alpha(x-c)} - 1$

claramente $z(x) < 0$ en (a, c), $z(c) = 0$ y $z(x) > 0$ en (c, b). Aplicando el operador L a la función $z(x)$ se tiene que:

$$L[z] \equiv z'' + g(x)z',$$
$$L[z] \equiv \alpha^2 e^{\alpha(x-c)} + g(x)\alpha e^{\alpha(x-c)},$$
$$L[z] \equiv \alpha e^{\alpha(x-c)}[\alpha + g(x)],$$

con $\alpha > -g(x)$ de modo que $L[z] > 0$, para $a < x < d$, esto lo podemos hacer puesto que $g(x)$ es acotada.

Además, sea

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x), \tag{2.5}$$

donde ε es una constante positiva que cumple con

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}, \tag{2.6}$$

esto se puede encontrar debido a que $z(d) > 0$ y $u(d) < M$, de este modo

- En (a, c), como $z(x) < 0$ y $u(x) < M$, se tiene en (2.5) que $w(x) < M$.

- En c, como $z(c) = 0$ y $u(c) = M$, se tiene en (2.5) que $w(c) = M$.

- En d, como $u(d) < M$ y $\varepsilon z(d) < M - u(d)$ según (2.6), se tiene en (2.5) que $w(d) < u(d) + M - u(d)$, es decir $w(d) < M$.

De lo anterior se tiene, que w alcanza su máximo en un punto interior c de (a, d).

Sin embargo, por la desigualdad (2.4) y al ser $L[z], \varepsilon > 0$ tenemos que

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[z] > 0,$$

lo cual contradice el hecho de tener un valor máximo M en un punto interior c de (a, d) de acuerdo a (2.2).
Por lo tanto $u \equiv M$, es decir $u = \textit{constante}$. $\square$

Si $d < c$ usamos la función auxiliar

$$z(x) \equiv e^{-\alpha(x-c)} - 1,$$

con $\alpha > g(x)$ y tenemos la misma conclusión.

NOTA. Observe que si el máximo de la función $u(x)$ ocurre en un extremo, entonces

- Si es el extremo izquierdo, la función debe tener el siguiente aspecto

  Figura 2.2: Aspecto de una función con máximo en el extremo izquierdo

  y su pendiente en el punto debe ser negativa.

- Si es el extremo derecho, la función debe tener el siguiente aspecto

Figura 2.3: Aspecto de una función con máximo en el extremo derecho

y su pendiente en el punto debe ser positiva.

El siguiente teorema establece dicho resultado.

Teorema 2. *Supongamos que $u(x)$ es una función no constante que satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv u^{''} + g(x)u^{'} \geq 0,$$

sobre un intervalo abierto (a, b) y tiene derivadas laterales en a y en b, además $g(x)$ es una función acotada en cada sub-intervalo cerrado de (a, b), entonces:

a.) Si el máximo de u ocurre en $x = a$ y $g(x)$ esta acotada a la izquierda de $x = a$, entonces $u^{'}(a) < 0$.

b.) Si el máximo de u ocurre en $x = b$ y $g(x)$ esta acotada a la derecha de $x = b$, entonces $u^{'}(b) > 0$.

Demostración. Supongamos que $u \leq M$ para $a \leq x \leq b$ y que alcanza su máximo valor M en un punto $x = a$, es decir que

$$u(a) = M,$$

escojamos un punto $d \in (a, b)$ tal que $u(d) < M$, y definamos la función auxiliar

$$z(x) \equiv e^{\alpha(x-a)} - 1, \ con \ \alpha > 0.$$

Aplicando el operador L a la función $z(x)$ se tiene que:

$$L[z] \equiv z'' + g(x)z',$$
$$L[z] \equiv \alpha^2 e^{x-a} + g(x)\alpha e^{x-a},$$
$$L[z] \equiv \alpha e^{x-a}[\alpha + g(x)],$$

con $\alpha > -g(x)$ para $a \leq x \leq d$; de modo que $L[z] > 0$.

Ahora, sea

$$w(x) = u(x) + \varepsilon z(x),$$

donde ε es una constante positiva como en (2.6)

$$\varepsilon < \frac{M - u(d)}{z(d)}.$$

Debido a que

$$L[w] \equiv L[u] + L[z] > 0,$$

el máximo de w en el intervalo $[a, d]$ debe ocurrir en uno de lo extremos a o d, en efecto:

- En a, como $z(a) = 0$ y $u(a) = M$, se tiene que $w(a) = M$.
- En d, como $u(d) < M$ y $\varepsilon z(d) < M - u(d)$ se tiene que $w(d) < u(d) - M + u(d)$, es decir $w(d) < M$.

De modo que el máximo de w se alcanza en a. Por consiguiente, la derivada por la derecha de a de la función w no puede ser positiva, es decir que

$$w'(a) \leq 0, \tag{2.7}$$

pero como $u^{'}(a) = 0$, $z'(a) = \alpha > 0$ y $\varepsilon > 0$, entonces:

$$w'(a) = u'(a) + \varepsilon z'(a) > 0, \tag{2.8}$$

lo cual contradice la desigualdad (2.7). Por lo tanto

$$u'(a) < 0.$$

$\square$

Si el máximo ocurre en b el argumento es similar.

NOTA. El requerimiento de que g sea acotado es necesario en los teoremas anteriores, por ejemplo si consideramos el problema:

$$u^{''} - \cot x u' = 0,$$

en el intervalo $(-1,1)$. Claramente su solución esta dada por $u = \cos x$ y su máximo se obtiene en $x = 0$ (0 punto interior de $(-1,1)$), lo cual es una clara violación al teorema (1) como se muestra en la figura (2.4).

Figura 2.4: Solución de la igualdad $u^{''} - \cot x u' = 0$, en el intervalo $(-1,1)$

El mismo problema ocurre para el teorema (2) item a si consideremos

$$u^{''} - \cot x u' = 0,$$

sobre el intervalo $[0,1]$. Claramente su solución está dada por $u = \cos x$ y su máximo se obtiene en $x = 0$ (0 punto extremo de $[0,1]$), para la cual $u'(0) = -\sin(0) = 0$.

Figura 2.5: Solución de la igualdad $u^{''} - \cot x u' = 0$, en el intervalo $[0,1]$

Capítulo 3

EL Principio del Máximo en Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales de Segundo Orden de Tipo Parabólico

Este capítulo se fundamenta en el capítulo 3 del libro [7] y en el articulo [8]. Presenta definiciones y teoremas importantes que son de gran ayuda para la comprensión del principio del máximo en ecuaciones diferenciales lineales parabólicas, tales como: el Teorema de Existencia Local; que argumenta la existencia de la solución u, el operador parabólico unidimensional; que es utilizado para dar la aplicación del principio del máximo a una ecuación particular de tipo parabólico llamada la ecuación del calor y mas adelante nos ayudará en el tratamiento de la ecuación problema. Adicional a esto, se construye la prueba general de algunos Lemas Auxiliares y Teoremas que posteriormente se mencionan en este capítulo.

3.1. Existencia Local

3.1.1. Localidad Lipschitz

Sea E un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y $F : E \to \mathbb{R}^n$, se dice que f es localmente lipschitz en E si para cada punto $x_0 \in E$, existe una vecindad de x_0, $N_\varepsilon(x_0) \subset E$ y una constante $L_0 > 0$ tal que para todo $x, y \in N_\varepsilon(x_0)$

$$|f(x) - f(y)| \leq L_0|x - y|.$$

3.1.2. Teorema de Existencia Local

Supongamos que g es una función localmente lipschitz para u, acotada para $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ y $f \in C^1(\mathbb{R})$, entonces

$$u_t + f(u)_x + g(u,x,t) = u_{xx}$$

con dato inicial

$$|u(x,0)| \leq M$$

tiene única solución $u^\varepsilon(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,\tau_0))$ para τ_0 pequeño el cual depende únicamente de la norma L^∞ del dato inicial y,

$$|u^\varepsilon(x,t)| \leq 2M \ \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,\tau_0).$$

3.2. El Operador Parabólico Unidimensional

Definición 8. *El operador diferencial*

$$L[u] \equiv a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x - u_t,$$

se dice parabólico en un punto (x,t) si

$$a(x,t) > 0$$

y se dice uniformemente parabólico en un dominio Ω del plano xt si existe una constante positiva η tal que

$$a(x,t) \geq \eta \textit{ para todo } (x,t) \in \Omega.$$

3.2.1. El Principio del Máximo Aplicado a la Ecuación del Calor

Teorema 3. *Sea $u(x,t)$ una función que satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv u_{xx} - u_t \geq 0, \tag{3.1}$$

en la región rectangular $E = \{0 < x < l; 0 < t \leq T\}$ del plano xt y sean S_1,S_2,S_3 y S_4 los lados de dicha región, definidos por:

$$S_1 : \{x = 0, 0 \leq t \leq T\} \qquad S_2 : \{0 \leq x \leq l, t = 0\},$$
$$S_3 : \{x = l, 0 \leq t \leq T\} \qquad S_4 : \{0 < x < l, t = T\}.$$

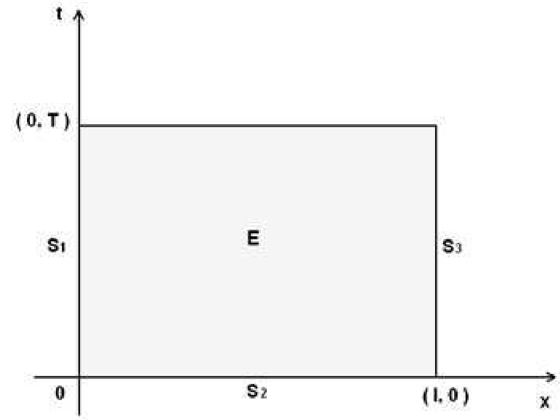

Figura 3.1: Región $E \cup \partial E$ del calor

Entonces, el máximo de u sobre $E \cup \partial E$ debe ocurrir en uno de los tres lados S_1, S_2 o S_3.

Demostración. Supongamos que M es el máximo de los valores de u que ocurren sobre S_1, S_2, S_3 y además que existe un punto $P(x_0, y_0)$ de E donde u tiene un valor $M_1 > M$.
Definamos la función auxiliar

$$w(x) \equiv \frac{M_1 - M}{2l^2}(x - x_0)^2, \tag{3.2}$$

si tomamos a $x - x_0$ como la longitud l se tendría:

$$w(l) = \frac{M_1 - M}{2l^2}(l)^2,$$

$$w(l) = \frac{M_1 - M}{2},$$

entonces, ya que $u \leq M$ para todos los puntos de S_1, S_2 y S_3 tenemos que

$$v(x,t) \equiv u(x,t) + w(x) \leq M + \frac{M_1 - M}{2} < \frac{M + M_1}{2}$$

y por la suposición $M < M_1$

$$M + M_1 < M_1 + M_1,$$

$$M + M_1 < 2M_1,$$

$$\frac{M + M_1}{2} < M_1,$$

por lo cual

$$v(x,t) < M_1 \tag{3.3}$$

para todos los puntos de S_1, S_2 y S_3. Además

$$v(x_0, y_0) \equiv u(x_0, t_0) + w(x_0) = u(x_0, t_0) = M_1. \tag{3.4}$$

Aplicando el operador L a la función $w(x)$ se tiene que:

$$L[w] \equiv w_{xx} - w_t = \frac{M_1 - M}{l^2} > 0. \tag{3.5}$$

Por otra parte, según (3.5) y la desigualdad (3.1)

$$L[v] \equiv L[u] + L[w] = L[u] + \frac{M_1 - M}{l^2} > 0,$$

de allí que

$$L[v] = v_{xx} - v_t > 0, \tag{3.6}$$

a través de E. Las condiciones (3.3) y (3.4) muestran que v debe asumir su máximo ya sea en un punto interior de E o a lo largo del intervalo abierto

$$S_4 : \{0 < x < l, t = T\},$$

Sin embargo, debido a la desigualdad (3.6) la función v no puede tener un máximo interior. Entonces si el máximo ocurriera sobre S_4 se tendría que

$$v_{xx} \leq 0, \tag{3.7}$$

además, como $w_t = 0$ según (3.2), se tiene que

$$v_t = u_t + w_t = u_t, \tag{3.8}$$

así, de la desigualdad (3.6)

$$v_{xx} > v_t, \tag{3.9}$$

luego, debido a (3.7) y (3.9)

$$v_t < 0$$

entonces, podemos decir según (3.8), que $u_t < 0$ y el máximo no puede ocurrir sobre S_4.
En síntesis, la asunción de que existe un punto $P(x_0, t_0)$ de E donde u tiene un valor $M_1 > M$ nos lleva a una contradicción. Por lo tanto M es el valor máximo de u y ocurre sobre $\partial E : S_1, S_2$ *o* S_3.

□

NOTA. El operador del calor unidimensional (3.1) es uniformemente parabólico en todo el plano xt ya que en este caso se ha establecido que

$$a(x,t) \equiv 1, \qquad b(x,t) \equiv 0,$$

y existe una constante positiva η donde

$$a(x,t) \equiv 1 \geq \eta \text{ para todo } (x,t) \text{ del plano.}$$

3.3. El Operador Parabólico General

Definición 9. *El operador diferencial*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x},t)u_{x_i} - u_t$$

se dice parabólico a $(\boldsymbol{x},t) \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ *si existe un número positivo* η *tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t)\varepsilon_i\varepsilon_j \geq \eta \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2$$

para todas las n*-uplas de numeros reales* $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$*. Además el operador* L *es uniformemente parabólico en una región* E_T *si*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t)\varepsilon_i\varepsilon_j \geq \eta \sum_{i=1}^{n} {\varepsilon_i}^2$$

se cumple con el mismo número positivo η *para todo* $(\boldsymbol{x},t)$ *en* E_T*.*

3.3.1. Lemas Auxiliares Generales

Lema General 1. *Supongamos que* $u(\boldsymbol{x},t)$ *satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t)u_{x_ix_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x},t)u_{x_i} - u_t \geq 0$$

en un dominio E *del plano* $\boldsymbol{x}t$*, donde* $(\boldsymbol{x},t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$*,* $a_{ij}(\boldsymbol{x},t), b_i(\boldsymbol{x},t)$ *son acotados y* $L[u]$ *es uniformemente parabólico. Si el máximo* M *de* $u(\boldsymbol{x},t)$ *en* E *ocurre en un punto* $P(\boldsymbol{x^o}, t_0)$ *de la frontera de una bola* $(n+1)$*-dimensional* K *cualquiera, contenido en* E *y* $u < M$ *en el interior de* K*, entonces la tangente a* K *en* P *es paralela al eje* x*.* (es decir, P está arriba o abajo de K).

Demostración. Construyamos una bola $(n+1)$-dimensional K contenida en E, centrada en $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t})$ y de radio R

$$K_R(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) = \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}; d[(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}), (\mathbf{x}, t)] < R\}$$

donde $(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n, \overline{t})$, luego

$$d[(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}), (\mathbf{x}, t)] = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathbf{x}}_i - x_i)^2 + (\overline{t} - t)^2]} < R. \tag{3.10}$$

Supongamos que $P(\mathbf{x^o}, t_0) = P({x^o}_1, {x^o}_2, \ldots, {x^o}_n, t_0)$ no está en la parte superior o inferior de K, es decir $\mathbf{x^o} \neq \overline{\mathbf{x}}$, ahora construyamos otra bola $(n+1)$-dimensional K_1 centrada en P y radio $R_1 < d[\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{x^o}]$, tal que K_1 se encuentre completamente en E. Luego la frontera de K_1 consiste de dos regiones:

- C', es la intersección de ∂K_1 con la bola cerrada $K \cup \partial K$ (incluye extremos).
- C'', es el complemento de C' con respecto a ∂K_1.

Como podemos apreciar en el caso unidimensional en la figura (3.2)

Figura 3.2: Ilustración Lema General 1

Por hipótesis $u < M$ sobre C', luego existe una constante positiva η pequeña tal que

$$u + \eta \leq M sobre\ C', \tag{3.11}$$

y dado que $u \leq M$ a través de E se tiene

$$u \leq M sobre\ C''. \tag{3.12}$$

En principio, definamos la función auxiliar

$$v(\mathbf{x}, t) \equiv e^{-\alpha \left[\sum_{i=1}^{n} (\overline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i)^2 + (\overline{t} - t)^2 \right]} - e^{-\alpha R^2}, \tag{3.13}$$

entonces para valores positivos de α

$$v > 0\ en\ K, \quad v = 0\ en\ \partial K, \quad v < 0\ en\ el\ exterior\ de\ K, \tag{3.14}$$

luego

$$L[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}, t) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}, t) v_{x_i} - v_t,$$

de donde

$$v_{x_i} = e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[-2\alpha(\overline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i)],$$

$$v_{x_jx_i} = e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[-2\alpha(\overline{\mathbf{x}}_j - \mathbf{x}_j)][-2\alpha(\overline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i)],$$

$$v_{x_jx_i} = e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[4\alpha^2(\overline{\mathbf{x}}_i - x_i)(\overline{\mathbf{x}}_j - x_j)],$$

$$v_t = e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[-2\alpha(\overline{t} - t)],$$

entonces

$$L[v] \equiv \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[4\alpha^2(\overline{\mathbf{x}}_i - x_i)(\overline{\mathbf{x}}_j - x_j)]$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[2\alpha(\overline{\mathbf{x}}_i - \mathbf{x}_i)] + \ e^{-\alpha\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i-\mathbf{x}_i)^2+(\overline{t}-t)^2\right]}[2\alpha(\overline{t} - t)].$$

La bola K_1 y su frontera cumple con que $d[\overline{\mathbf{x}}, \mathbf{x}] \geq d[\mathbf{x^o}, \overline{\mathbf{x}}] - R_1 > 0$, por lo que es posible escoger α tan grande que

$$L[v] > 0 \ \textit{para} \ (x,t) \ \textit{en} \ K_1 \cup \partial K_1. \tag{3.15}$$

NOTA. Como se supone que u es solución, entonces implícitamente u es de clase C^2 con respecto a la variable x, por tanto sus derivadas mixtas son iguales.

Ahora, sea

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon v(\mathbf{x}, t),$$

donde ε es una constante positiva.
Observe que

- En C':
  Por la desigualdad (3.11) podemos seleccionar ε tan pequeño que

$$w = u + \varepsilon v < M sobre\ C'.$$

- En C'':
  Debido a (3.12)y (3.14),

$$w = u + \varepsilon v < M sobre\ C''.$$

De esto $w < M$ sobre ∂K_1. Por otra parte

- En P:

$$w(\mathbf{x^o}, t_0) = u(\mathbf{x^o}, t_0) + \varepsilon v(\mathbf{x^o}, t_0),$$

y como $P \in \partial K$ se tiene que

$$w(\mathbf{x^o}, t_0) = u(\mathbf{x^o}, t_0),$$

luego, por hipótesis

$$w(\mathbf{x^o}, t_0) = M.$$

Así que el máximo de w ocurre en el punto interior P de K_1, sin embargo

- En K_1:

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v],$$

y por hipótesis y (3.15)

$$L[w] > 0.$$

En síntesis, la asunción de que $P(\mathbf{x^o}, t_0) = P(x^o{}_1, x^o{}_2, \ldots, x^o{}_n, t_0)$ no está en la parte superior o inferior de K nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $P(\mathbf{x^o}, t_0)$ está en la parte superior o inferior de K. *(es decir, P está arriba o abajo de K).*

$\square$

Lema General 2. *Supongamos que $u(\boldsymbol{x}, t)$ satisface la desigualdad diferencial $L[u] \geq 0$ como en el lema anterior en un dominio E del plano $\boldsymbol{x}t$. Si $u(\boldsymbol{x}, t) \leq M$ a través de E y en algún punto interior $P(\boldsymbol{x^o}, t_0)$ de E se tiene que $u(P) < M$, entonces para cualquier $\boldsymbol{x}$ sobre el segmento horizontal l del interior de E que contiene a P se cumple que $u(\boldsymbol{x}, t_0) < M$.*

De la misma manera, si $u(\boldsymbol{x}, t) \leq M$ a través de E y en algún punto interior $P(\boldsymbol{x^o}, t_0)$ de E se tiene que $u(P) = M$, entonces para cualquier $\boldsymbol{x}$ sobre el segmento horizontal l del interior de E que contiene a P se cumple que $u(\boldsymbol{x}, t_0) = M$.

Figura 3.3: Ilustración Lema General 2

Lema General 3. *Supongamos que* $u(\boldsymbol{x}, t)$ *satisface la desigualdad diferencial* $L[u] \geq 0$ *como en el* lema 1 *en la mitad inferior*

$$K_{\overline{t}} = \{(\boldsymbol{x}, t); d[(\boldsymbol{x}, t), (\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{t})] < R^2, \ con \ t \leq \overline{t}\},$$

de una bola K *centrada en* $P(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{t})$ *y radio* R*,* $(K_R(\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{t}))$*. Si* $u(\boldsymbol{x}, t) < M$ *en la parte de* K *donde* $t < \overline{t}$*, entonces* $u(P) < M$*.*

Demostración. Definamos la función

$$v(\mathbf{x}, t) \equiv e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(t - \overline{t})\right]} - 1, \tag{3.16}$$

luego

$$L[v] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{x}, t) v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathbf{x}, t) v_{x_i} - v_t,$$

de donde

$$v_{x_i} = e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(t - \overline{t})\right]}[-2(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)],$$

$$v_{x_j x_i} = e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(t - \overline{t})\right]}[-2(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}}_j)][-2(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)],$$

$$v_{x_j x_i} = e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(t - \overline{t})\right]}[4(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}}_j)],$$

$$v_t = e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(t - \overline{t})\right]}[-\alpha],$$

entonces

$$L[v] \equiv \sum_{ij=1}^{n} a_{ij} e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(t - \overline{t})\right]}[4(\mathbf{x}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)(\mathbf{x}_j - \overline{\mathbf{x}}_j)]$$

$$-\sum_{i=1}^{n} b_i e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}_i)^2+\alpha(t-\overline{t})\right]}[2(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}_i)]+\ e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathbf{x}_i-\overline{\mathbf{x}}_i)^2+\alpha(t-\overline{t})\right]}[\alpha].$$

NOTA. De la misma manera al suponer que u es solución, entonces implícitamente u es de clase C^2 con respecto a la variable x, por tanto sus derivadas mixtas son iguales.

Elegimos α positivo y tan grande que

$$L[v] > 0 \ para \ (x,t) \ en \ K \ para \ t \leq \overline{t}. \tag{3.17}$$

Por otra parte, el hiperparaboloide

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{\mathbf{x}}_i)^2+\alpha(t-\overline{t})\big] = 0, \tag{3.18}$$

es tangente a la linea $t = \overline{t}$ en el punto $P(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t})$.

- Denotemos por C' a la parte de ∂K que esta debajo del hiperparaboloide (incluyendo los extremos).
- Denotemos por C'' a la parte del hiperparaboloide contenida en la bola $(n+1)$ dimensional K.
- Y D será la región encerrada por C' y C''.

Como se muestra en la figura (3.4) para el caso unidimensional

Figura 3.4: Ilustración Lema General 3

Por hipótesis $u < M$ sobre C', luego existe una constante positiva η pequeña tal que

$$u + \eta \leq M sobre \ C'. \tag{3.19}$$

Ahora, sea

$$w(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) + \varepsilon v(\mathbf{x}, t),$$

donde ε es una constante positiva. Debido a (3.18) $v(\mathbf{x}, t) = 0$ sobre C'' y observe que si tomamos ε pequeño:

- En D

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v],$$

por hipótesis y (3.17)

$$L[w] > 0.$$

De esto, w no puede alcanzar su máximo en D, además

- En C'

  Debido a que v es acotado

$$w = u + \varepsilon v < M sobre\ C'$$

- En C''

  por la igualdad (3.18)

$$w = u + \varepsilon v = u,$$

o sea que

$$w \leq M sobre\ C''.$$

Por lo que w tampoco puede alcanzar su máximo en C', pero sí puede alcanzarlo en el punto P de C'', así que

$$w_t \geq 0\ en\ P.$$

De este modo, como

$$w_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) = u_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) + \varepsilon v_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}),$$

se tiene

$$u_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) + \varepsilon v_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) \geq 0,\ en\ P$$

luego,

$$u_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) \geq -\varepsilon v_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}). \tag{3.20}$$

Por otro lado

$$v_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) = e^{-\left[\sum_{i=1}^{n}(\overline{\mathbf{x}}_i - \overline{\mathbf{x}}_i)^2 + \alpha(\overline{t} - \overline{t})\right]}[-\alpha] = -\alpha,$$

es decir que

$$v_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) < 0,$$

y reemplazando en (3.20),

$$u_t(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) > 0.$$

Además, las desigualdades

$$u_{x_i}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) = 0, \quad u_{x_i x_j}(\overline{\mathbf{x}}, \overline{t}) \leq 0.$$

llevan a que

$$L[u] \leq 0$$

lo cual contradice la hipótesis.

□

Con la tenencia de estos lemas, podemos establecer la demostración de los siguientes resultados:

3.3.2. Teoremas Generales

Teorema 4. *Suponga que $u(x,t)$ satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x},t)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x},t)u_{x_i} - u_t \geq 0$$

en

$$E_{t_1} = \{(\boldsymbol{x},t) \in E;\ t \leq t_1\}$$

del dominio E donde $(\boldsymbol{x},t) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$, $a_{ij}(\boldsymbol{x},t), b_i(\boldsymbol{x},t)$ son acotados y L es uniformemente parabólico en E_{t_1}. Si el máximo de u ocurre en un punto $P(\boldsymbol{x}^1, t_1)$ de E_{t_1} y si $Q(\boldsymbol{x}^1, t_0)$ es un punto de E que se puede conectar mediante segmentos horizontales y verticales, entonces $u(\boldsymbol{x}^1, t_0) = M$.

Demostración. Supongamos que $u(\mathbf{x}^1, t_0) < M$ y que el segmento

$$l = \{(\mathbf{x}, t) : \mathbf{x} = \mathbf{x}^1; t_0 \leq t \leq t_1\},$$

se encuentra en E.
Sea r la cota superior de los valores de u sobre l tal que

$$u(\mathbf{x}^1, t) < M;\ t_0 \leq t < r.$$

Así por el lema General 2 tendríamos que $t_0 \leq t < r$ y $u < M$, en cada punto de los segmentos horizontales del interior de E que contienen a $(\mathbf{x}^1, t)$, como se muestra para el caso unidimensional en la figura (10). Luego, existe un radio $R > 0$ tal que $u < M$ para $d[\mathbf{x}, \mathbf{x}^1] < R$, $t_0 \leq t < r$.

Por continuidad

$$u(\mathbf{x}^1, r) = M,$$

de lo contrario, el ser discontinua en el punto $(\mathbf{x}^1, r)$ implicaría que u no es diferenciable y de esta manera, no cumpliría con la desigualdad diferencial en este punto. Ahora construyamos la bola $(n+1)$-dimensional K centrada en $(\mathbf{x}^1, r)$ y radio R, $(K_R(\mathbf{x}^1, r))$,

Figura 3.5: Ilustración de la demostración, teorema 4

debido a que $u < M$ en la porción de K donde $t < r$ se concluye por el lema General 3 que

$$u(\mathbf{x}^1, r) < M,$$

lo cual lleva a una contradicción.

$\square$

Teorema 5. *Suponga que $u(\boldsymbol{x}, t)$ satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}, t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}, t) u_{x_i} - u_t \geq 0$$

en un dominio E, donde $a(\boldsymbol{x}, t), b(\boldsymbol{x}, t)$ son acotados y L es uniformemente parabólico y sea

$$E_{t_0} = \{(\boldsymbol{x}, t) \in E; t \leq t_0\}.$$

Además suponga que u es continuamente diferenciable en el punto frontera $P(\boldsymbol{x^o}, t_0)$, que $u(P) = M$, que $u(\boldsymbol{x}, t) < M$ para $(\boldsymbol{x}, t) \in E_{t_0}$, que K es una bola $(n+1)$-dimensional centrado en $(\boldsymbol{x}^1, t_1)$ con $\boldsymbol{x}^1 \neq \boldsymbol{x^o}$ y es tangente a ∂E en el punto P, además que la porción de K por debajo de $t = t_0$ se encuentra en E_{t_0}. Si $\frac{\partial}{\partial \nu}$ se refiere a cualquier derivada direccional exterior desde E_{t_0} a P, entonces $u_\nu > 0$ en P.

A continuación se presentará el caso unidimensional para los lemas y teoremas.

3.4. Lemas Auxiliares

Lema 1. *Supongamos que $u(x,t)$ satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x - u_t \geq 0$$

en un dominio E del plano xt, donde $a(x,t), b(x,t)$ son acotados y $L[u]$ es uniformemente parabólico. Si el máximo M de $u(x,t)$ en E ocurre en un punto $P(x_0,t_0)$ de la frontera de un disco K cualquiera, contenido en E y $u < M$ en el interior de K, entonces la tangente a K en P es paralela al eje x. (es decir, P está arriba o abajo de K).

Lema 2. *Supongamos que $u(x,t)$ satisface la desigualdad diferencial $L[u] \geq 0$ como en el lema anterior en un dominio E del plano xt. Si $u(x,t) \leq M$ a través de E y en algún punto interior $P(x_0,t_0)$ de E se tiene que $u(P) < M$, entonces para cualquier x sobre el segmento horizontal l del interior de E que contiene a P se cumple que $u(x,t_0) < M$.*

De la misma manera, si $u(x,t) \leq M$ a través de E y en algún punto interior $P(x_0,t_0)$ de E se tiene que $u(P) = M$, entonces para cualquier x sobre el segmento horizontal l del interior de E que contiene a P se cumple que $u(x,t_0) = M$.

Lema 3. *Supongamos que $u(x,t)$ satisface la desigualdad diferencial $L[u] \geq 0$ como en el* lema 1 *en la mitad inferior*

$$K_{\overline{t}} = \{(x,t); d[(x,t),(\overline{x},\overline{t})] < R^2, \ con \ t \leq \overline{t} \ \}$$

de un disco K centrado en $P(\overline{x},\overline{t})$ y radio R, ($K_R(\overline{x},\overline{t})$). Si $u(x,t) < M$ en la parte de K donde $t < \overline{t}$, entonces $u(P) < M$.

Con la tenencia de estos lemas, podemos establecer los siguientes resultados algunos de los cuales se mostraron anteriormente en forma general.

3.5. Teoremas

Teorema 6. *Suponga que $u(x,t)$ satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x - u_t \geq 0,$$

en

$$E_{t_1} = \{(x,t) \in E; t \leq t_1\},$$

del dominio E donde $a(x,t), b(x,t)$ son acotados y L es uniformemente parabólico en E_{t_1}. Si $u \leq M$ en E_{t_1} y $u(x_1,t_1) = M$, entonces $u = M$ en todo punto de E_{t_1} que se puede conectar con (x_1,t_1) mediante segmentos horizontales y verticales que se encuentran en E_{t_1}.

Teorema 7. *Suponga que $u(x,t)$ satisface la desigualdad diferencial*

$$L[u] \equiv a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x - u_t \geq 0,$$

en una región E, donde $a(x,t), b(x,t)$ son acotados y L es uniformemente parabólico y sea

$$E_{t_0} = \{(x,t) \in E; t \leq t_0\}.$$

Además suponga que u es continuamente diferenciable en el punto frontera $P(x_0,t_0)$, que $u(P) = M$, que $u(x,t) < M$ para $(x,t) \in E_{t_0}$, que K es un disco centrado en (x_1,t_1) con $x_1 \neq x_0$ y es tangente a ∂E en el punto P, además que la porción de K por debajo de $t = t_0$ se encuentra en E_{t_0}. Si $\frac{\partial}{\partial \nu}$ se refiere a cualquier derivada direccional en una dirección exterior desde E_{t_0} en P, entonces $u_\nu > 0$ en P.

Demostración. Construyamos un disco K_1 centrado en P y radio $R_1 < d[x_0, x_1]$.

- Llamemos C' a la porción de ∂K_1 contenida en E_{t_0} junto con los extremos.
- Llamemos C'' al arco de ∂K que está en $K_1 \cap E_{t_0}$.
- y llamemos D a la región formada por C', C'' y el segmento $t = t_0$.

Como se muestra en la figura (3.6).

Al elegir K_1 mas pequeño que K podemos hacer que $u < M$ *sobre* C'' excepto en P, además $u < M$ *sobre* C' y podemos afirmar los siguientes tres hechos

1.)

$$u < M \text{ sobre } C'' \text{ excepto en } P. \tag{3.21}$$

2.)

$$u = M \text{ en } P. \tag{3.22}$$

3.) Existe una constante positiva η suficientemente pequeña tal que

$$u + \eta \leq M \ sobre \ C'. \tag{3.23}$$

Figura 3.6: Ilustración de la demostración, teorema 7

Ahora definamos la función

$$v(x,t) \equiv e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]} - e^{-\alpha R^2}, \tag{3.24}$$

luego, aplicando el operador L a la función $v(x,t)$ se tiene que:

$$L[v] \equiv a(x,t)v_{xx} + b(x,t)v_x - v_t,$$

de donde

$$v_x = e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[-2\alpha(x-x_1)],$$

$$v_{xx} = e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[-2\alpha(x-x_1)][-2\alpha(x-x_1)] + e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[-2\alpha],$$

$$v_{xx} = e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[4\alpha^2(x-x_1)^2] - e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha],$$

$$v_t = e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[-2\alpha(t-t_1)],$$

entonces

$$L[v] \equiv a\big[e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[4\alpha^2(x-x_1)^2] - e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha]\big]$$

$$+be^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[-2\alpha(x-x_1)] - e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[-2\alpha(t-t_1)],$$

$$L[v] \equiv ae^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[4\alpha^2(x-x_1)^2 - 2\alpha]$$
$$-be^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha(x-x_1)] + e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha(t-t_1)],$$

de aquí

$$L[u] \equiv 2\alpha e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]}[2\alpha a(x-x_1)^2 - a - b(x-x_1) + (t-t_1)],$$

y si escogemos α lo suficientemente grande tenemos que

$$L[v] > 0 \; para \; (x,t) \in D \cup \partial D. \tag{3.25}$$

Además, sea

$$w(x,t) = u(x,t) + \varepsilon v(x,t),$$

donde ε es una constante positiva tan pequeña que

$$u < M \; sobre \; C', \tag{3.26}$$

luego

- En D

$$L[w] = L[u] + \varepsilon L[v],$$

  por hipótesis y (3.25)

$$L[w] > 0.$$

De esto, w no puede alcanzar su máximo en D, ahora

- En ∂K

$$v = e^{-\alpha R^2} - e^{-\alpha R^2},$$

$$v = 0,$$

  por lo tanto

$$w = u + \varepsilon v = u,$$

  y de acuerdo a (3.21)

$$w < M sobre \; C'' \; excepto \; en \; P.$$

- En P

$$w(x_0,t_0) = u(x_0,t_0) + \varepsilon v(x_0,t_0),$$

  como $P \in \partial K$, entonces

$$w(x_0,t_0) = u(x_0,t_0),$$

y por (3.22)

$$w(x_0, t_0) = M \ en \ P.$$

Si centramos nuestra atención en la región D, por hipótesis además de (3.21) y (3.26), podemos concluir que el máximo de w sobre $D \cup \partial D$ ocurre en el único punto P

Por lo tanto en P:

$$w_\nu = u_\nu + \varepsilon v_\nu \geq 0, \tag{3.27}$$

Figura 3.7: Derivada direccional en una dirección exterior desde E_{t_0} en P

ahora,

$$v_\nu = \nu \cdot grad(v),$$

$$v_\nu = \nu \cdot \langle -2\alpha(x - x_1)e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]} \ , \ -2\alpha(t - t_1)e^{-\alpha[(x-x_1)^2+(t-t_1)^2]} \rangle,$$

o sea que

$$v_\nu(x_0, t_0) = \nu \cdot \langle -2\alpha(x_0 - x_1)e^{-\alpha R^2} \ , \ -2\alpha(t_0 - t_1)e^{-\alpha R^2} \rangle,$$

$$v_\nu(x_0, t_0) = \nu \cdot -2\alpha e^{-\alpha R^2} \langle (x_0 - x_1) \ , \ (t_0 - t_1) \rangle,$$

$$v_\nu(x_0, t_0) = -2\nu \cdot n\alpha e^{-\alpha R^2},$$

de donde

$$v_\nu(x_0, t_0) < 0,$$

Es decir, de acuerdo a (3.27) se concluye que $u_\nu > 0$ en P. $\square$

Capítulo 4

EL Principio del Máximo Aplicado a Ecuaciones Diferenciales Parciales Semi-lineales de Segundo Orden de Tipo Parabólico

Este capítulo se fundamenta en los libros [10], [11] y en el articulo [9] citados en la bibliografía. Muestra un principio del máximo mas general aplicado a la ecuación (1)

$$u_t + a(u,x,t)u_x + g(u,x,t) = u_{xx},$$

en una región $E = \mathbb{R} \times [0,T]$. Inicialmente determina condiciones necesarias mediante la teoría desarrollada en los capítulos 2 y 3 y crea una transformación que linealiza el problema, para en adelante aprovechar la teoría antes mencionada (*lineal*), aplicar dicho principio y establecer su comportamiento.

El siguiente teorema constituye el resultado

Teorema 8. *Sea u(x,t) una solución de la ecuación diferencial parcial semi-lineal de tipo parabólico*

$$u_t + a(u,x,t)u_x + g(u,x,t) = u_{xx}, \tag{4.1}$$

con dato inicial $|u(x,0)| \leq M$ *definida en una región* $E = \mathbb{R} \times [0,T]$*;* $0 < T < \infty$*, además* $|g(u,x,t)| \leq c|u| + \widetilde{c}$*; con* $c, \widetilde{c} > 0$ *y* $a(u,x,t)$ *localmente acotada. Entonces para todo* $T > 0$*, existe* $M(T) > 0$ *tal que* $|u(x,t)| \leq M(T)$ *sobre* $\mathbb{R} \times [0,T]$*.*

Figura 4.1: Región de estudio $E = \mathbb{R} \times [0, T]$; $0 < T < \infty$ de la ecuación (1)

Demostración. Multiplicando la ecuación (4.1) por $2u$, tenemos que

$$2uu_t + 2ua(u, x, t)u_x + 2ug(u, x, t) = 2uu_{xx},$$

$$2uu_t + a(u, x, t)2uu_x = 2uu_{xx} - 2ug(u, x, t),$$

y sumando y restando el termino $2(u_x)^2$,

$$2uu_t + a(u, x, t)2uu_x = 2(u_x)^2 + 2uu_{xx} - 2(u_x)^2 - 2ug(u, x, t),$$

$$(u^2)_t + a(u, x, t)(u^2)_x = (2uu_x)_x - 2(u_x)^2 - 2ug(u, x, t),$$

$$(u^2)_t + a(u, x, t)(u^2)_x \leq (2uu_x)_x - 2(u_x)^2 + 2|u|(c|u| + \widetilde{c}),$$

o sea que

$$(u^2)_t + a(u, x, t)(u^2)_x \leq (u^2)_{xx} + (2c + 1)u^2 + \widetilde{c}^2. \tag{4.2}$$

Sea

$$v = u^2 e^{-(2c+1)t}, \tag{4.3}$$

entonces $u^2 = \frac{v}{e^{-(2c+1)t}} = ve^{(2c+1)t}$, de donde

$$(u^2)_t = v_t e^{(2c+1)t} + ve^{(2c+1)t}(2c + 1), \quad (u^2)_x = v_x e^{(2c+1)t}, \quad (u^2)_{xx} = v_{xx} e^{(2c+1)t},$$

así, reemplazando estos términos en (4.2) se tiene que

$$v_t e^{(2c+1)t} + ve^{(2c+1)t}(2c + 1) + a(u, x, t)v_x e^{(2c+1)t} \leq v_{xx} e^{(2c+1)t} + (2c + 1)e^{(2c+1)t} + \widetilde{c}^2,$$

$$e^{(2c+1)t}[v_t + (2c + 1)v + a(u, x, t)v_x] \leq e^{(2c+1)t}[v_{xx} + (2c + 1)v + \frac{\widetilde{c}^2}{e^{(2c+1)t}}],$$

$$v_t + (2c+1)v + a(u,x,t)v_x \leq v_{xx} + (2c+1)v + \frac{\widetilde{c}^2}{e^{(2c+1)t}},$$

$$v_t + a(u,x,t)v_x \leq v_{xx} + \widetilde{c}^2 e^{-(2c+1)t}. \tag{4.4}$$

Ahora haciendo

$$w = v + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)t}, \tag{4.5}$$

tenemos $v = w - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)t}$, de donde

$$v_t = w_t + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)t}(2c+1), \quad v_x = w_x, \quad v_{xx} = w_{xx},$$

por lo que (4.4) se transforma en

$$w_t + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)t}(2c+1) + a(u,x,t)w_x \leq w_{xx} + \widetilde{c}^2 e^{-(2c+1)t},$$

$$w_t + a(u,x,t)w_x \leq w_{xx} + \widetilde{c}^2 e^{-(2c+1)t} - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)t}(2c+1),$$

$$w_t + a(u,x,t)w_x \leq w_{xx} + \widetilde{c}^2 e^{-(2c+1)t} - \widetilde{c}^2 e^{-(2c+1)t},$$

$$w_t + a(u,x,t)w_x \leq w_{xx}. \tag{4.6}$$

Además,

$$w(x,0) = v(x,0) + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)0},$$

que de acuerdo a (4.3),

$$w(x,0) = u^2(x,0)e^{-(2c+1)0} + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)0},$$

$$w(x,0) = u^2(x,0) + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1},$$

luego, por hipótesis

$$w(x,0) \leq M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}. \tag{4.7}$$

Aplicamos a (4.6) la siguiente transformación

$$w = r + M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} + \frac{N(x^2 + cLe^t)}{L^2},$$

donde L, c, N son constantes positivas y además N es la cota superior de w sobre $\mathbb{R} \times [0, T]$; (N puede ser obtenido por la existencia local). Entonces reemplazando w en (4.6), tenemos

$$r_t + \frac{NcLe^t}{L^2} + a(u,x,t)[r_x + \frac{2Nx}{L^2}] = r_{xx} + \frac{2N}{L^2},$$

$$r_t + \frac{NcLe^t}{L^2} + a(u,x,t)r_x + a(u,x,t)\frac{2Nx}{L^2} = r_{xx} + \frac{2N}{L^2},$$

$$r_t + \frac{NcLe^t}{L^2} + a(u,x,t)r_x + a(u,x,t)\frac{2Nx}{L^2} - \frac{2N}{L^2} = r_{xx},$$

$$r_t + a(u,x,t)r_x + \frac{NcLe^t}{L^2} + a(u,x,t)\frac{2Nx}{L^2} - \frac{2N}{L^2} = r_{xx},$$

$$r_t + a(u,x,t)r_x + [cLe^t + a(u,x,t)2x - 2]\frac{N}{L^2} = r_{xx}. \tag{4.8}$$

Ahora,

$$w(x,0) = r(x,0) + M^2 + \frac{\tilde{c}^2}{2c+1} + \frac{N(x^2 + cLe^0)}{L^2},$$

$$r(x,0) = w(x,0) - M^2 - \frac{\tilde{c}^2}{2c+1} - \frac{N(x^2 + cL)}{L^2},$$

que de acuerdo a la desigualdad (4.7)

$$r(x,0) \leq M^2 + \frac{\tilde{c}^2}{2c+1} - M^2 - \frac{\tilde{c}^2}{2c+1} - \frac{N(x^2 + cL)}{L^2},$$

$$r(x,0) \leq -\frac{N(x^2 + cL)}{L^2},$$

y debido a que $N, c, L > 0$

$$r(x,0) < 0. \tag{4.9}$$

De allí, si tomamos una franja $(-L, L) \times (0, T)$

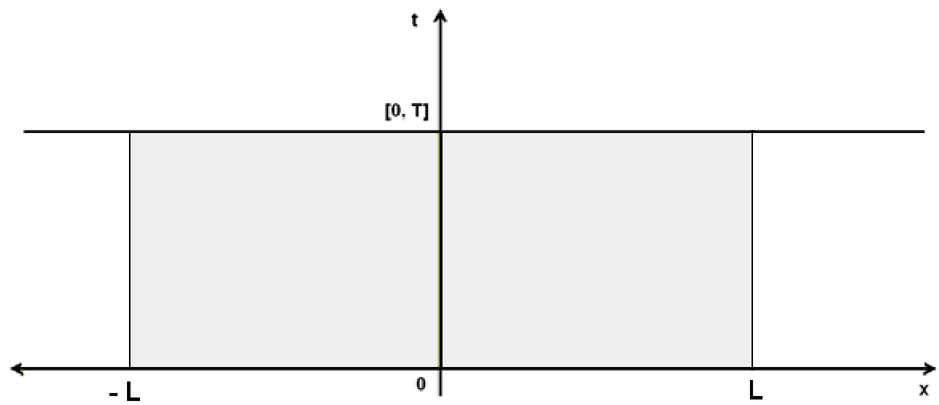

Figura 4.2: Franja $(-L, L) \times (0, T)$

entonces

$$w(L,t) = r(L,t) + M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} + \frac{N(L^2 + cLe^t)}{L^2},$$

$$r(L,t) = w(L,t) - M^2 - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} - \frac{N(L^2 + cLe^t)}{L^2},$$

y por ser N la cota superior de w,

$$w(L,t) \leq N sobre\ (-L, L) \times (0, T),$$

es decir que

$$r(L,t) \leq N - M^2 - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} - \frac{N(L^2 + cLe^t)}{L^2},$$

$$r(L,t) \leq N - M^2 - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} - \frac{NL^2}{L^2} - \frac{NcLe^t}{L^2},$$

$$r(L,t) \leq N - M^2 - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} - N - \frac{Nce^t}{L},$$

$$r(L,t) \leq -M^2 - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} - \frac{Nce^t}{L},$$

y como $N, c, L, \widetilde{c} > 0$

$$r(L,t) < 0. \tag{4.10}$$

De la misma manera se obtiene que

$$r(-L,t) < 0. \tag{4.11}$$

Así desde (4.8)-(4.11) y aplicando el principio del máximo podemos concluir que

$$r(x,t) < 0\ sobre\ (-L, L) \times (0, T). \tag{4.12}$$

En efecto,

supongamos que (4.12) no se cumple, es decir que

$$r(x,t) \geq 0,$$

luego, sea $\overline{t}$ la cota superior de los valores de t donde $r < 0$, entonces por continuidad

$$r_t \geq 0 \qquad r_x = 0 \qquad r_{xx} \leq 0 \; en \; (\overline{x}, \overline{t}). \tag{4.13}$$

Por otro lado, si escogemos c lo suficientemente grande tal que $cLe^t + a(u,x,t)2x - 2 > 0$ en $(-L, L) \times (0, T)$ tendríamos que la ecuación (4.8) se contradice, así que

$$r(x,t) < 0 \; sobre \; (-L, L) \times (0, T),$$

de esta manera se prueba (4.12). No obstante, para un punto $(x_0, t_0) \in (-L, L) \times (0, T)$ se tiene que

$$w(x_0, t_0) = r(x_0, t_0) + M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} + \frac{N(x_0^2 + cLe^{t_0})}{L^2},$$

o sea que

$$w(x_0, t_0) \leq M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} + \frac{N(x_0^2 + cLe^{t_0})}{L^2},$$

para lo cual $w \leq M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}$ si hacemos que L vaya a infinito.

Finalmente, por como se había definido v en (4.3) y w en (4.5) se tiene que

$$u^2 e^{-(2c+1)t} + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} e^{-(2c+1)t} \leq M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1},$$

$$e^{-(2c+1)t}\Big(u^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}\Big) \leq M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1},$$

$$u^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1} \leq \Big(M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}\Big)e^{(2c+1)t},$$

$$u^2 \leq \Big(M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}\Big)e^{(2c+1)t} - \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1},$$

y como $c, \widetilde{c} > 0$

$$u^2 \leq \Big(M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}\Big)e^{(2c+1)t},$$

de allí que,

$$|u| \leq \Big[\Big(M^2 + \frac{\widetilde{c}^2}{2c+1}\Big)e^{(2c+1)t}\Big]^{\frac{1}{2}},$$

por tanto

$$|u| \leq M(T).$$

$\square$

Conclusiones

- El desarrollo de la teoría lineal, el estudio y análisis de la aplicabilidad del principio del máximo en ecuaciones lineales tanto ordinarias como parciales de tipo parabólico ha sido determinante y ha permitido abordar un nuevo problema de estudio sobre teoría no lineal, es decir, sobre la ecuación (1). Hemos podido utilizar el resultado y la metodología que tiene la aplicabilidad del principio del máximo sobre ecuaciones parciales de tipo parabólico como la ecuación del calor, en una ecuación más general (resultado de una transformación, de la cual la ecuación del calor es el prototipo) y en un dominio más general para lograr el objetivo propuesto que es obtener información del comportamiento de su solución.

- Una buena forma de estudiar este tipo de problemática, es empezando por abordar teorías y ecuaciones mas sencillas que den luz al problema y que nos ayuden a determinar condiciones o propiedades para la misma

- La dificultad del problema expuesto aquí radica en que la teoría no lineal es muy escasa y en este tipo de problema se ha recurrido a linealizarlo mediante una transformación, para en adelante abordar y utilizar la aplicabilidad del principio del máximo sobre la teoría lineal que ya ha sido expuesta.

- Aunque el trabajo expuesto aquí es de tipo monográfico, permite al lector comprender de una mejor manera la metodología y aplicabilidad del principio del máximo sobre ecuaciones lineales ya que se ha profundizado en ella, se han dado los detalles de las pruebas de una manera minuciosa para finalmente entender el tratamiento que se ha hecho sobre la ecuación de estudio.

- Se sugiere estudiar o indagar, si el principio del máximo podría ser aplicado a otra ecuación o modificación de la ecuación (1), asimismo podría pensarse en estudiarla en mas dimensiones, deducir la singularidad de su solución o pensar en un sistema de ecuaciones.

Bibliografía

[1] Greenspan, Donald. *Introduction to Partial Differential Equations.* Dover Edition. Mineola, New york: Dover Publications, Inc. (2000), 204.p

[2] Lawrence C, Evans. *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society. Rhode Island: (1998), 662.p

[3] Friedman, Avner. *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J: (1964), 347.p

[4] Bers L., F. John, y M. Schechter. *Partial Differential Equations.* New York: Interscience Publishers. (1964), 343.p

[5] Garabedian. P. *Partial Differential Equations.* New York: Interscience Publishers. (1964), 672.p

[6] O.A, Ladyzenskaja; V.A. Solonnikov; N.N. Ural´ceva. *Linear and Quasilinear Equations of parabolic Type.* American Math. Society, (1968), 648.p

[7] Protter, Murray y Weinberger, Hans. *Maximun Principles in Differential Equations.* New York: Springer-Verlag. (1984), 261.p

[8] Cerón, Miller. O. *El Principio del Máximo.* Revita Sigma, Departamento de Matemáticas. Univeridad de Nariño. Vol VII (2008), p. 28-34

[9] Klingenberg, Christian, Lu, Yunguang y Rendón Leonardo. *On Global Lipschitz-continuous Solutions of Isentropic Gas Dynamics.* Taylor & Francis Group. Vol 82 (2003), p. 35-43

[10] Cerón, Miller. O. *Soluciones Viscosas para un Sistema de Leyes de Conservación.* Tesis de Maestría para la obtención del titulo de Académico de Magister en Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.(2007), p. 15-25

[11] Aronson D. G y Serrin James. *A Maximum Principle for Nonlinear Parabolic Equations*, University of Minnesota. Tomo 21, N°2 (1967), p. 291-305

[12] R. Dautray, J.L. Lions. *Analyse Mathematique et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques*, Masson, (1985), 1062.p

[13] I. Peral Alonso *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison Wesley. Universidad Autónoma de Madrid, (1993), 326.p