ENFOQUE DIDÁCTICO PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO INTEGRANDO CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

CLAUDIA ANDREA MONCAYO MICANQUER
JOSÉ LUÍS PANTOJA CABRERA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2012

ENFOQUE DIDÁCTICO PARA LA CONCEPTUALIZACIÓN DE LA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO INTEGRANDO CABRI GÉOMÈTRE II PLUS

CLAUDIA ANDREA MONCAYO MICANQUER
JOSÉ LUÍS PANTOJA CABRERA

Trabajo de Grado para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
MAGISTER EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2012

Las ideas aportadas en el Trabajo de Grado son responsabilidad exclusiva de los autores, artículo 1° acuerdo # 324 del 11 de octubre de 1966 del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

____
____
____
____
____
____
____
____
____

Edinsson Fernández Mosquera

____
Firma del Asesor

Gustavo Quintero Basto

____
Firma de Jurado

Libardo Manuel Jácome

____
Firma de Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2012.

DEDICATORIA

Es poco a poco como se alcanza objetivos, metas y retos, es con sabiduría y consejo como se abre el camino al éxito y sobre todo, es con la mejor motivación con la que se debe llegar al triunfo; gracias por su apoyo incondicional papá y mamá, Fidencio Moncayo y María Deifilia Micanquer

Andrea

DEDICATORIA

Comenzamos un camino, juntos con dolor, me dejaste solo en el trayecto, dejándome una gran responsabilidad de que tu ejemplo de tenacidad sea transmitido; continúo el camino y no voy solo, ellos van conmigo, ahora, de la mano con tu espíritu saldremos adelante.
Gracias Javier

José Luís

AGRADECIMIENTOS

A Dios, quien me dio la fe, la fortaleza necesaria para salir siempre adelante pese a las dificultades, por colocarme en el mejor camino, iluminando cada paso de mi vida.

A mis queridos padres, por su confianza, apoyo y amor en cada instante de mi vida.

A mis hermanos, porque son el estímulo y el impulso para alcanzar mis triunfos.

A mi profesor Edinsson Fernández, asesor de este proyecto, por su dedicación y orientación permanente.

A mi tío José Moncayo, por estar siempre presente en mi vida, brindándome su apoyo.

A todos y cada uno de mis familiares que me brindaron una palabra de apoyo.

A los amigos incondicionales que contribuyeron a que esto se alcanzara.

Andrea

A Dios.

Por haberme permitido llegar hasta este punto y haberme dado salud para lograr mis Objetivos, además de su infinita bondad y amor.

A mi padre Lucho.
Por los ejemplos de perseverancia y constancia que lo caracterizan y que me ha infundado siempre, por el valor mostrado para salir adelante y por su amor.

A mi Gordita.
Por haberme apoyado en todo momento, por sus consejos, sus valores, por la motivación constante que me ha permitido ser una persona de bien, pero más que nada, por su amor.

A mis familiares.
A mi hermano Camilo sé que no hemos sido muy unidos, pero cuando necesitaba un consejo allí estabas y a mi primo Guillermo porque a pesar de todo, me escuchabas.
¡Gracias a ustedes!

A mi maestro.
Profesor Edinsson por su gran apoyo y motivación para la culminación de mis estudios profesionales y para la elaboración de esta tesis

A mis amigos.
Con quienes nos hemos apoyado mutuamente durante esta primera etapa de nuestra formación profesional y cuya amistad aún continua: Claudia Andrea y Mario España.

A Jaime y a Iván, ambos con sus maneras de ver la vida tan diferente, su apoyo de amigos fue incondicional.

A la Universidad de Nariño y en especial al Departamento de Matemáticas por permitirme ser parte de una generación de triunfadores y gente productiva para el país.

José Luís

Contenido

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Figuras

Pág.

Lista de Anexos

Resumen

Hoy por hoy, la enseñanza del concepto de parábola suele restringirse al enfoque de la *Geometría Analítica*. El presente estudio consiste en una propuesta didáctica que acerca a los estudiantes a la comprensión del significado de parábola como lugar geométrico mediante el diseño e implementación de una estrategia didáctica basada en el uso e integración del Ambiente de Geometría Dinámica Cabri Géomètre II Plus.

La propuesta didáctica fue realizada en el Colegio Gimnasio Bet–El, ubicado en la ciudad de Pasto (Colombia), con cuatro estudiantes del grado noveno, divididos en dos grupos. En su diseño, puesta en práctica y sistematización se considera las fases correspondientes a la metodología de investigación denominada *micro-ingeniería didáctica*: *análisis preliminares*, planeación del estudio, diseño de actividades y análisis de resultados.

El estudio de la información recolectada retrata el clima intelectual percibido en clases y permite constatar cómo, el progreso en el desempeño matemático de los estudiantes se hace factible por la mediación tecnológica a partir de diseños planificados.

Palabras clave: micro-ingeniería didáctica, parábola, lugar geométrico, Cabri Géomètre II Plus, Geometría Euclidiana.

Abstract

Today, the teaching of the concept of a parabola is usually restricted to the approach of Analytic Geometry. This study consists of a didactic approach that tries to bring the students to the comprehension of the meaning of a parabola as a locus by means of the design and implementation of a didactic strategy based upon the use and integration of the dynamic geometry environment Cabri Géomètre II Plus.

The didactic approach was made in the Bet-El School Gymnasium, located in the city of Pasto (Colombia), with four ninth grade students, divided into two groups. In its design, implementation and systematization is considered to be the phases corresponding to the research methodology named micro-didactical engineering: preliminary analyses, study design, design of activities y results analysis.

The study of the gathered information portrays the perceived intellectual climate in classes and can see how the progress in students' mathematical performance is made possible by the technological mediation from planned designs.

Keywords: micro-didactical engineering, parabola, locus, Cabri Géomètre II Plus, Euclidean Geometry.

Introducción

Desde el punto de vista didáctico la *geometría elemental*, por su naturaleza intuitiva, es sin duda una de las áreas de mayor provecho para el cultivo y desarrollo de pensamiento espacial así como de diversas formas de argumentación. En las últimas décadas esto se ha visto especialmente potenciado por la emergencia de los llamados *Ambientes de Geometría Dinámica*[1], los cuales suponen un campo de experimentación mucho más conveniente para el estudio de los objetos de la *geometría elemental* y la comprensión de saberes asociados.

Incluso en otro tiempo era impensable estudiar algunos de estos objetos utilizando solo lápiz y papel. Este es el caso, por ejemplo, de los lugares geométricos, y en particular de la parábola, que generalmente en los textos y currículos escolares suele aparecer relacionada a la función cuadrática. Este particular, que se debe en gran parte a la marcada influencia del movimiento de la *Matemática Moderna* (Kline, 1986) que ocasionó que la enseñanza de la parábola como lugar geométrico fuera un campo poco explorado por docentes e investigadores.

Es por eso por lo que el presente trabajo pretende ser un aporte en dicha materia, proponiendo una estrategia didáctica que, en primer lugar, toma como objeto de enseñanza el concepto de parábola definido a partir de la propiedad foco–directriz; y, en segundo lugar, integra el *Ambiente de Geometría Dinámica* Cabri Géomètre II Plus para el diseño de las actividades propuestas. Así, para dar cumplimiento a este propósito, se ha desarrollado un estudio basado en la metodología de investigación conocida como "*micro-ingeniería didáctica*" (Artigue, 1995), la cual se utiliza para analizar situaciones de enseñanza y aprendizaje.

---

[1]Los *Ambientes de Geometría Dinámica* son micromundos diseñados específicamente para el estudio de la *geometría*. Esto quiere decir, como definen Balacheff y Kaput (1996), que son sistemas computacionales compuestos por: (i) objetos primitivos y operaciones formales; y (ii) un dominio fenomenológico que permite relacionar los objetos y operaciones con los fenómenos en pantalla. En cuanto al término "*geometría dinámica*", éste ha sido acuñado por la literatura educativa debido a su idoneidad para referir la principal característica que distingue a este tipo de ambientes de otro software de geometría, a saber: la variación continua en tiempo real, a menudo llamada "*arrastre*" (Cuoco y Goldenberg, 1998, pp. 351).

De esta manera, la estrategia didáctica que se propone ha sido configurada y orquestada en torno de una secuencia de actividades cuyo objeto es facilitar en estudiantes de noveno grado, la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico al interactuar con el ambiente Cabri Géomètre II Plus. Tal interacción se evidencia a través de cuatro actividades específicas, como se enuncia a continuación:

- Construcción geométrica de la Parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta.
- Construcción de una Parábola como una configuración geométrica, analizando después las partes que la componen.
- Construcción geométrica de la Parábola con base en la propiedad de la circunferencia.
- Construcción de una Parábola como lugar geométrico en Cabri Géomètre II Plus.

En lo que respecta al diseño metodológico, es de señalar que éste consta de tres etapas o fases:

En primer lugar, la fase de *análisis preliminares*. En ella se hace un acercamiento histórico y epistemológico al concepto de parábola como lugar geométrico definido a partir de la propiedad foco–directriz. Luego se analizan algunos elementos que atañen al proceso de aprendizaje del referido concepto de parábola. Finalmente se presenta un análisis didáctico que, en cierta medida, indica el estado de la enseñanza actual del concepto de parábola y el panorama que se vislumbra a raíz del impacto de los ambientes de geometría dinámica. Así mismo, se explica el enfoque de las situaciones didácticas propuestas en la secuencia.

En segundo lugar, la fase de *planeación y diseño de actividades*. En esta parte se hace la presentación de la propuesta experimental en sí, abordando aspectos tanto del componente investigativo como de lo relacionado a la instauración de las actividades en el aula. En el diseño de las situaciones didácticas se da a conocer el enunciado de cada una de éstas, los saberes implicados, las dificultades previstas y los diferentes momentos que han sido asignados para la organización y ejecución del trabajo de los estudiantes.

En último lugar, el *análisis de resultados*. Al término de la realización de esta investigación, se analiza los resultados obtenidos a partir de la experimentación con estudiantes de las situaciones didácticas diseñadas. Con esto se busca contrastar las actuaciones adoptadas por los estudiantes durante la etapa experimental con respecto al diseño establecido. Esto se hace a fin de lograr extraer las conclusiones más pertinentes que se derivan del estudio y sugerir algunas recomendaciones.

Se espera, entonces, que la información suministrada haga un aporte en el campo investigativo de la Educación Matemática, en el marco de la compleja integración de las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría escolar.

1. Planteamiento del Problema

En la segunda mitad del siglo XX, debido al contexto socio–político e ideológico global, las potencias occidentales consideraron necesario adecuar la Educación Matemática al desarrollo científico y tecnológico de la sociedad industrializada. Esta situación generó en la mayoría de países, incluido Colombia, una serie de reformas curriculares que buscaban la modernización de los contenidos matemáticos en el nivel escolar, lo que produjo en última instancia el desmantelamiento progresivo de los antiguos programas de geometría.

La *renovación curricular* (Ministerio de Educación Nacional, 1998) que se dio por esta época, estableció que las matemáticas se conciban como una ciencia lógica-deductiva y más aun hizo que la geometría adquiera un nuevo método algebraico que estudia los objetos geométricos como representaciones en el espacio de ciertas ecuaciones polinómicas, que sustituiría al sintético, que consistía en establecer unos axiomas y unas definiciones, deduciendo de ellos los teoremas; este nuevo método deja a un lado el ejercicio de la intuición en el estudio de las propiedades y relaciones espaciales de los objetos geométricos, causando así el declive de los aspectos visuales en la enseñanza de la geometría.

La patente carencia de intuición espacial fue un grave desacierto desde el punto de vista didáctico, puesto que afectó el sentido espacial intuitivo de toda la matemática escolar. Por otra parte, las consecuencias de tal planteamiento ocasionaron daños irreversibles en varias generaciones de profesores, lo cual ha suscitado la tendencia a descuidar la enseñanza de la geometría. En el caso de Colombia, tomando como referencia el estudio TIMSS (Díaz, Álvarez, Torres y Guacaneme, 1998), se puede observar que el rendimiento en geometría es menor que en álgebra.

Esta reforma más particularmente se evidencia en el estudio de la Parábola, que según los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 2006), empieza a aparecer desde una perspectiva del concepto de función cuadrática; inicialmente la enseñanza se centra en el análisis de los parámetros básicos de su ecuación dejando relegado el estudio de sus propiedades intrínsecas para los dos últimos grados de la Educación Media.

En este mismo sentido, el tratamiento que se observa en los libros de texto escolares es analítico, casi exclusivamente usando representaciones algebraicas. Algunas posibles causas de esta elección formalista serían, entre otras, una aparente facilidad en la enseñanza de esta temática manipulando símbolos algebraicos, la inercia tradicional y cultural plasmada en los libros de texto escolares que en Colombia han estado permeados por el movimiento de la *Matemática Moderna* (Kline, 1986) desde mediados del siglo pasado. Esto ha llevado a que el tratamiento de las cónicas, en particular la parábola, se dé a partir del estudio de las ecuaciones polinómicas de segundo grado y desde el punto de vista de las funciones.

Tomando conciencia de esta situación, el enfoque didáctico por el cual se apuesta en el presente trabajo está encaminado a implementar situaciones didácticas, donde se propicie un ámbito intuitivo en el que se privilegie, en estudiantes de noveno grado, el estudio de la propiedad foco–directriz de la parábola, además de enfrentarlos a otras situaciones geométricas que posibiliten la movilización de diversos conocimientos, tanto nuevos como previos; para facilitar las interacciones de los estudiantes con los discernimientos en juego, se ha optado por integrar dentro de la propuesta el Ambiente de Geometría Dinámica Cabri Géomètre II Plus, dado su potencia para el tratamiento de lugares geométricos y estimular la comprensión intuitiva.

En atención a lo expuesto, esta investigación busca responder a la necesidad de desarrollar iniciativas que favorezcan la conceptualización significativa de saberes geométricos, en particular, del concepto de parábola como lugar geométrico.

2. Antecedentes

Diversas investigaciones en Educación Matemática (Río-Sánchez, 1989; Schumann, y Green, 1997; Olmstead, 1998; Arcavi & Hadas, 2000; Santos-Trigo, Espinosa & Reyes, 2005; Fernández, 2009; Planchart, 2009; De la Rosa, 2010), dan cuenta de la compleja red de interacciones que se trenza alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los que se propende por la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico bajo la mediación de Ambientes de Geometría Dinámica.

Al indagar sobre este respecto en dichos estudios, se detectaron cuatro importantes cuestiones cuya relevancia se resalta por estar estrechamente ligadas al propósito que persigue esta investigación. En su orden, éstas son:

- lo sintético en contraposición con lo analítico;
- los ambientes de geometría dinámica;
- lugares geométricos y su relación con las TIC; y
- errores y dificultades en la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

A continuación se esbozan algunas de las ideas generales de cada una de estas cuestiones.

2.1 Lo Sintético en Contraposición con lo Analítico

Contrastando los métodos de la *Geometría Sintética* y la *Geometría Analítica*, se puede apreciar, desde una perspectiva didáctica, cierta ventaja de lo sintético frente a lo analítico, dado que los métodos sintéticos proporcionan pruebas simples e intuitivas, mientras que los métodos analíticos no revelan el sentido de lo que se está haciendo ni de lo que se consigue. Pese a ello, causa curiosidad que a raíz de la controversia derivada de tal confrontación las decisiones curriculares parecen haberse inclinado en favor del enfoque analítico.

Es preciso señalar que el conocimiento de los griegos con relación al concepto de parábola, expuesto en "*Las Cónicas*" de Apolonio y la "*Colección Matemática*" de Pappus utiliza un amplio lenguaje retórico que, posteriormente, requirió el uso formal de un sistema de representación avanzado, como el que desarrollaran por separado Fermat y Descartes, a partir de las primigenias contribuciones de Vieta y Oresme. Sin embargo, la genuina definición de parábola se obtiene con base en relaciones métricas entre puntos y rectas.

Sin desconocer, por supuesto, la importancia fundamental de los métodos analíticos y el arraigo de su tradición curricular, se coincide con Hansen (1998) al afirmar que la descripción algebraica como única vía de acceso al concepto de parábola hace que su tratamiento sea artificial y ajeno al entorno circundante que permite dar sentido a los conceptos elaborados, circunstancia que ha llevado al estudio de la parábola a un estado cercano a la desaparición del currículo.

De igual forma Bartolini Bussi (2005), plantea que no basta con estudiar las cónicas a través de un único enfoque para comprender su significado; en efecto, como ella afirma no es suficiente abordar este tema especial bajo la aproximación más común, la geometría analítica; es decir, las cónicas tratadas como fórmulas algebraicas o representaciones de relaciones en el plano cartesiano que satisfacen ecuaciones de segundo grado obtenidas a partir de algunas relaciones métricas.

Como se ha mencionado en la formulación del problema de investigación, las propuestas curriculares del sistema educativo colombiano tradicionalmente han orientado el tratamiento de la parábola bajo la perspectiva de la *Matemática Moderna* (Kline, 1986). Así pues, en el ámbito escolar el concepto de parábola con frecuencia suele asociarse directamente a su expresión analítica, y en consecuencia, sus propiedades deducidas mediante procedimientos algebraicos.

Esta afirmación se hace con base en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y en la revisión de varios textos escolares, ya que estos dos elementos son los que usualmente se derivan las prácticas escolares. Por ello, se revisaron dos textos escolares de circulación nacional como lo es *Nuevas Matemáticas* 9 de Morales, Torres, Joya, Romero & Salgado (2007) y *Matemática Moderna Estructurada 4* de Wills, Guarín, Londoño y Gómez (1976).

Lo anterior permitió reconocer las causas que suponen dificultades en la enseñanza y aprendizaje tradicional del concepto de parábola: su definición desde una perspectiva funcional y cartesiana; su representación algebraica y gráfica en ambientes estáticos de lápiz y papel; su tratamiento meramente paramétrico y algorítmico; y el papel pasivo del estudiante frente al protagonismo del profesor.

Hoy por hoy, es sabido que una prematura algebrización del estudio de las cónicas, y específicamente de la parábola, elude todo un conjunto de experiencias formativas que solo pueden conseguirse con su tratamiento como lugares geométricos. A propósito de esto, Brousseau (2000) aduce que las situaciones geométricas son las que están más próximas de introducir a los estudiantes en una verdadera actividad matemática.

2.2. Ambientes de Geometría Dinámica

El uso de los *Ambientes de Geometría Dinámica* (AGD) ofrece a los estudiantes la posibilidad de representar objetos matemáticos y examinar sus relaciones desde perspectivas múltiples. En este contexto, Santos-Trigo et al. (2005), habla de un ejemplo en el cual una configuración geométrica simple, construida por el AGD, funciona como una plataforma para generar relaciones matemáticas, que tienen que ser exploradas y presentadas en términos de sus propiedades. En particular, se ha observado que analizando comportamientos de triángulos, rectángulos, líneas, segmentos, mediatrices, se puede dirigir a los estudiantes a buscar propiedades y significados asociados con parábolas. Especialmente parece que las representaciones dinámicas generadas con el uso de los AGD proporcionan condiciones a los estudiantes para plantear preguntas que pueden llevarlos a identificar conjeturas matemáticas o reconocer, construir y unir tipos diferentes de relaciones y propiedades matemáticas.

En otro estudio anterior, Santos-Trigo (2001), plantea que las tecnologías son poderosas herramientas, que facilitan al estudiante mover puntos, segmentos, generar lugares geométricos y que además, posibilitan cuantificar diversas relaciones (longitudes, áreas, ángulos). También respalda la idea de que los estudiantes con la mediación de los AGD podrían ser animados no sólo a participar en el proceso de reconstruir relaciones particulares, sino también proporcionar argumentos matemáticos, para apoyar sus resultados.

Por su parte Planchart (2009), en el estudio ya mencionado, abordó el papel de la tecnología y afirma que:

> A través de dispositivos tecnológicos es posible seguir el proceso de construcción de muchas áreas de la matemática, a través de algunas de sus representaciones, y acercarnos, dentro de lo que plantea un objetivo didáctico, al concepto matemático. (p. 2).

Se puede esperar que el uso de un AGD permita alternativas, de manera que la experiencia de aprendizaje sea además de tipo conceptual y no sólo procedimental. Esto puede ser posible si se proponen estrategias que conduzcan a resultados de aprendizaje de tipo conceptual. Es importante reconocer en este punto que es una tarea compleja lograr que los estudiantes construyan representaciones mentales adecuadas que les permitan predecir y explicar según patrones científicamente aceptados, ya que en ese proceso de construcción intervienen una cantidad de factores entre los cuales se encuentran las características de las representaciones externas empleadas para enseñar y comunicar conocimiento y la manera en que dichas representaciones son utilizadas.

Con relación a lo anterior, Arcavi y Hadas (2000), hacen notar que las representaciones dinámicas con AGD, constituyen una estrategia, para que el estudiante construya su propio conocimiento:

> Los ambientes dinámicos no sólo permiten a los estudiantes construir figuras con ciertas propiedades y visualizarlas, sino que también les permiten transformar esas construcciones en tiempo real. Este dinamismo puede contribuir en la formación de hábitos para transformar (mentalmente o por medio de una herramienta) una instancia particular, para estudiar variaciones, invariantes visuales, y posiblemente proveer bases intuitivas para justificaciones formales de conjeturas y proposiciones.
>
> Esta perspectiva hace alusión al hecho que el estudiante a través de una de las características de los AGD, la dinamización provista por la herramienta de arrastre *(dragging),* evidencia la temporalidad de las figuras gracias al movimiento, lo lleva a reconocer patrones de comportamiento invariantes, por la observación de la conservación de sus propiedades en cada deformación, y le abre la posibilidad de construir conocimiento Matemático. (pp. 25-26).

2.3 Lugares Geométricos y su Relación con las TIC

Si bien es cierto que la capacidad y precisión gráfica junto a la posibilidad de exploración abierta y las retroacciones perceptuales que ofrecen los AGD, son algunas de las cualidades que muy probablemente podrán contribuir a proporcionar entornos favorables a la comprensión del concepto de parábola como lugar geométrico.

Por su parte Santos-Trigo (2001), declara que resulta difícil imaginar el lugar geométrico, que describe un punto, cuando se mueve dentro de una representación, cuando se utiliza un medio estático. De allí la importancia de integrar los AGD, como un instrumento para generar lugares geométricos, ya que admiten fácilmente trazar y visualizar el recorrido que deja un objeto al desplazarse en función de algún punto movible.

El carácter dinámico que imprime este tipo de ambientes a la representación material de lugares geométricos hace que se incremente la expresividad matemática. Al permitir la exteriorización de determinadas funciones cognitivas se hace posible la acción conjunta del estudiante y el ambiente. Ahora bien, los fenómenos perceptivos asociados a esta particular manera de estudiar los lugares geométricos debe traer consigo serias repercusiones cognitivas. Por tanto se debe buscar estrategias para adaptar los antiguos contenidos.

En este sentido, conviene destacar la distinción señalada por Jahn (2002) en relación al uso de las dos herramientas que proporciona Cabri Géomètre II Plus para el estudio de los lugares geométricos:

> La herramienta "Traza" enfatiza en la interpretación dinámica de la representación puntual de la trayectoria de un punto variable, mientras que la herramienta "Lugar" es caracterizada en una manera funcional por una correspondencia biunívoca entre dos puntos P y P', representando, al menos implícitamente, la imagen de un conjunto de puntos para una aplicación dada. (p.79).

2.4. Errores y Dificultades en la Comprensión del Concepto de Parábola como Lugar Geométrico

Desde la perspectiva de Río-Sánchez (1989), el concepto de lugar geométrico está más memorizado que interiorizado, por los estudiantes. Éstos identifican la definición del concepto, más no lo transfieren a una situación nueva, porque no lo comprenden; en su investigación encontró que los estudiantes poseen ideas erróneas de la concepción de parábola, una de ellas es admitirla como un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos. (Ver Figura 1).

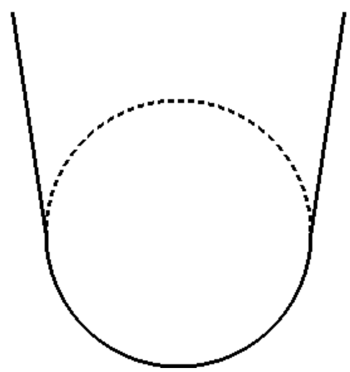

Figura 1. Una concepción de la parábola donde se la imagina como un arco de circunferencia y dos semirrectas tangentes en sus extremos. (Tomada de Río-Sánchez, 1989).

En general un error frecuente en el aprendizaje de la geometría consiste en asociar el concepto de los objetos geométricos tan solo a sus representaciones gráficas, sin tener en cuenta las propiedades geométricas que las gobiernan.

Según Planchart (2009) un error que puede conducir a un obstáculo de orden geométrico, es el no distinguir las variables que dominan los fenómenos. De igual manera, señala que hay algunas dificultades en el proceso de la percepción visual del objeto matemático en pantalla, lo que en ocasiones suele ser un elemento que obstaculiza la comprensión; ya que el estudiante se establece tipos de imágenes mentales incorrectas que provocan respuestas erróneas.

3. Justificación

Según la tradición histórica, el establecimiento de la *Geometría* como primer cuerpo de conocimientos científicos se remonta a la Antigua Grecia; y en los albores de la primitiva ciencia el concepto de lugar geométrico contribuyó decisivamente al desarrollo de las matemáticas y de la ciencia en general. Actualmente, los AGD representan una oportunidad para restaurar esta conexión entre las raíces históricas y geométricas que prácticamente desde la matemática escolar se ha omitido.

Los experimentos mentales que involucran la construcción material de lugares geométricos inscriben a los estudiantes en procesos reflexivos que giran en torno a la articulación de conocimientos conceptuales y procedimentales, los cuales discurren en este estudio alrededor de la definición de parábola a partir de su propiedad foco–directriz. Por su parte, el AGD Cabri Géomètre II Plus, permite dar lugar a experiencias con “puntos móviles” y trayectorias, lo que puede promover la incubación de ideas sobre continuidad.

De otro lado, la construcción de la parábola utilizando solo la definición geométrica que depende de la directriz y su foco, ineludiblemente remite a diversos saberes como lo son: la distancia de un punto a una recta, la mediatriz de un segmento, la construcción de un lugar geométrico en el contexto de un AGD, y otros saberes afines. Cabe anotar que la potencia gráfica y concepción teórica de Cabri Géomètre II Plus permite el estudio de los elementos notables de la parábola y las relaciones existentes entre sí.

Es necesario entonces, desarrollar estrategias didácticas dirigidas al aprovechamiento de las nuevas posibilidades y oportunidades que ofrecen los Ambientes de Geometría Dinámica, y en particular de Cabri Géomètre II Plus, para el estudio de los lugares geométricos, en este caso, de la parábola. Pues como se ha concluido en algunos estudios (Davison y Pratt, 2003; Sinclair, 2003), el potencial didáctico que proviene de las herramientas informáticas no es suficiente para garantizar el aprendizaje. Es indispensable el diseño de estrategias específicas.

La investigación que se presenta en este documento busca ser un aporte en tal sentido, ya que propone una estrategia didáctica para enseñar el concepto geométrico de parábola bajo la mediación del ambiente Cabri Géomètre II Plus. La propuesta incluye una secuencia compuesta por una serie de situaciones que se diseñaron a la luz de la “Teoría de Situaciones Didácticas” (Brousseau, 1997). Asimismo, se optó por la “micro-ingeniería didáctica” (Artigue, 1995) como metodología para la concepción, experimentación y análisis de la secuencia referida.

En el actual esquema de enseñanza del concepto de parábola, se ha descuidado en gran medida el enfoque sintético por enfatizar en la representación algebraica, lo cual produce detrimento en el desarrollo de habilidades espaciales para la construcción de pensamiento matemático. Por esta razón, el presente estudio resulta pertinente, ya que la mediación de un ambiente como Cabri Géomètre II Plus puede favorecer la promoción y potenciación de procesos cognitivos de construcción, visualización y razonamiento discursivo.

4. Pregunta, Hipótesis y Tesis de Investigación

De acuerdo a los planteamientos hasta aquí expuestos, a continuación se procede a formular la pregunta de investigación, las respectivas hipótesis y la tesis de investigación.

4.1. Pregunta de Investigación

¿Es posible que estudiantes de grado noveno puedan lograr una comprensión significativa del concepto de parábola como lugar geométrico cuando sus acciones son mediadas por el uso del Ambiente de Geometría Dinámica Cabri Géomètre II Plus?

4.2 Hipótesis de la Investigación

La visualización de las representaciones dinámicas y la exploración de propiedades y regularidades en las construcciones realizadas, evidencia una riqueza expresiva vinculada con la descripción pragmática y con la conceptualización teórica de la parábola.

4.3 Tesis de la Investigación

La construcción significativa del concepto de parábola como lugar geométrico es posible cuando los estudiantes son inmersos en procesos de visualización y de exploración de regularidades y propiedades de este objeto geométrico por la vía de instrumentos específicos de mediación presentes en Cabri Géomètre II Plus.

5. Objetivo

Con el fin de desarrollar acciones que contribuyan a la consecución del propósito de esta investigación, y en conformidad con los principios que orientan la propuesta, se considera apropiado prescribir los siguientes objetivos.

5.1 Objetivo General

Proponer una estrategia didáctica para la enseñanza del concepto geométrico de parábola integrando herramientas computacionales, en particular, el Ambiente de Geometría dinámica Cabri Géomètre II Plus.

5.2 Objetivos Específicos

- Implementar una secuencia didáctica para la enseñanza y aprendizaje del concepto de parábola como lugar geométrico bajo la metodología de micro-ingeniería didáctica.
- Caracterizar las estrategias de aprendizaje utilizadas por cuatro estudiantes de grado noveno al poner en acto las situaciones didácticas diseñadas.

6. Análisis *Preliminares*: Fundamentación Teórica

En este trabajo los *análisis preliminares*, sustentados en el marco de la metodología de *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995), sirven de base para el diseño de las situaciones didácticas, en la medida en que proporcionan un fundamento teórico basado en tres dimensiones de análisis clásicas en la Didáctica de las Matemáticas de la Escuela Francesa.

Estas tres dimensiones son: la *Histórica – Epistemológica*, *Cognitiva* y *Didáctica*. La primera asociada a las características de la evolución del saber matemático en juego, la segunda relacionada a las características cognitivas de los sujetos que recibirán la enseñanza como por ejemplo: la caracterización de los errores, obstáculos y dificultades, y la última, se refiere a las características del funcionamiento del sistema didáctico y el campo de las restricciones donde se va a situar la investigación.

Estas dimensiones se relacionan entre sí dentro de la estructura de la Situaciones Didácticas (Ver Figura 2)[2], que se refieren al conjunto de interacciones entre los tres componentes del sistema didáctico: el saber (a enseñar), el profesor (que quiere enseñar ese saber) y el estudiante (que quiere aprender ese saber).

En esta estructura, se manifiesta la intención de promover un proceso de enseñanza y aprendizaje, mediante situaciones de clase, creadas intencionalmente por el profesor, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por parte del estudiante, quien a su vez debe asumir su responsabilidad (contrato didáctico) de aprender, esta apropiación requieren que el docente haga una transformación y adaptación del saber matemático en un conocimiento a enseñar por medio de las situaciones que implementa (transposición didáctica). En este trabajo, cuando se integra un AGD en las actividades matemáticas del

[2]Adaptación del esquema presentado por De Faria (2006) y adaptado por Quintero (2010) en su proyecto de investigación "De la Conjetura a la Demostración con la Mediación de un Ambiente de Geometría Dinámica". IEP, Universidad del Valle.

estudiante, se debe tener en cuenta también las transformaciones que sufre ese saber cuándo se lleva a un ambiente informático (transposición informática).

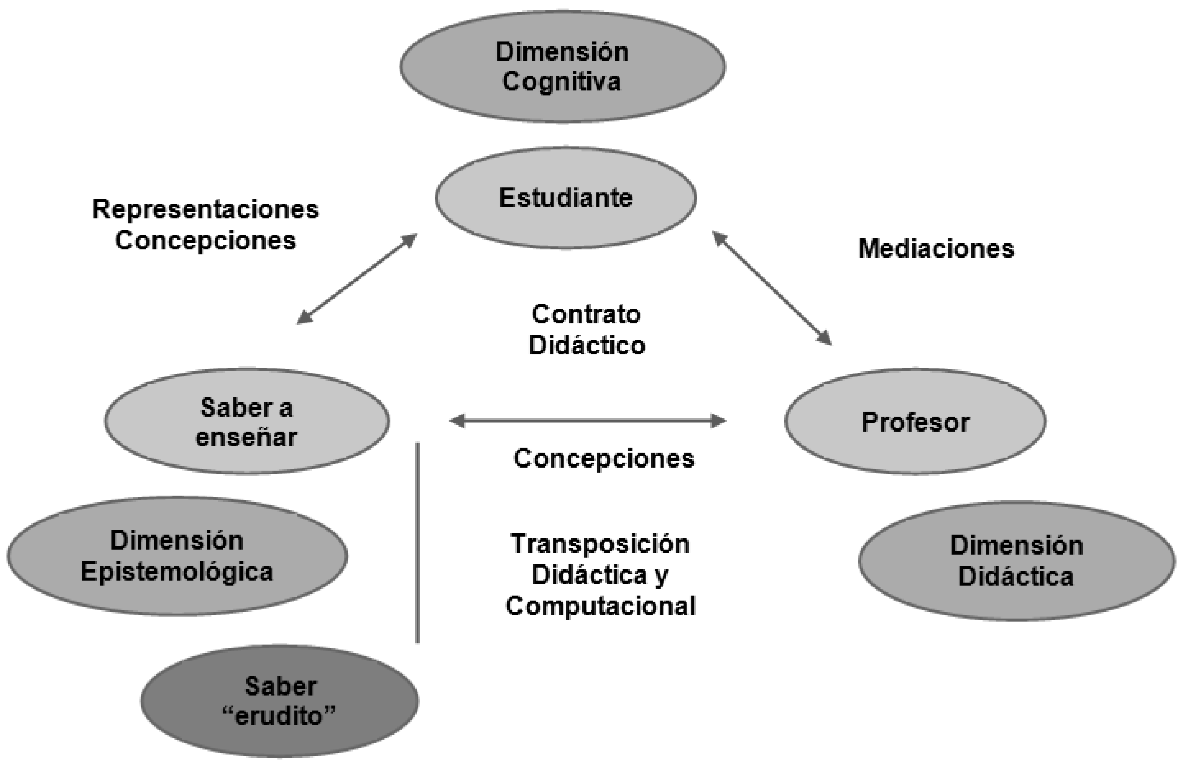

Figura 2. Tres aspectos relativos a los marcos teóricos: la estructura de la Situación Didáctica, las interacciones que se pueden dar entre un saber, el profesor y los estudiantes, la consideración de la transposición informática por la integración de TIC.

A continuación, se desarrollan los aspectos correspondientes a cada una de las dimensiones.

6.1 Dimensión Histórica – Epistemológica

En este estudio histórico – epistemológico, alrededor de la naturaleza de la parábola como saber matemático se trata de responder al siguiente interrogante:

- ¿Cómo se ha concebido históricamente la parábola?

En ese sentido, esta pregunta permitió restringir la búsqueda de la historicidad de la parábola como lugar geométrico, limitándose a los geómetras que la trabajaron desde ese punto de vista.

En consecuencia, se esbozara cómo surgió y desarrolló el concepto de parábola como lugar geométrico caracterizado por la conocida propiedad foco–directriz. Para ello, se revisaron los trabajos de los geómetras Menecmo (375-325 a.C.), Arquímedes (287- 212 a.C.), Apolonio de Perga (262-190 a.C.), Pappus (S. IV d.C.), Al-Kuhi (S. X d.C.), Descartes (1596-1650) y Lebesgue (1875-1941). Todos estos contribuyeron a imprimirles distintos significados a la parábola que a la postre enriquecieron sus representaciones matemáticas.

Así, Menecmo, geómetra griego, se le atribuye el hallazgo de estas curvas (elipse, parábola e hipérbola) en su estudio sobre el problema de la duplicación del cubo[3]; éstas, se obtenían cortando un cono circular recto de una sola hoja por un plano perpendicular a una generatriz. Según el ángulo del vértice del cono circular recto sea agudo, recto u obtuso, se obtienen en su orden, la elipse, la parábola y una rama de la hipérbola.

Es también Arquímedes, quien en la búsqueda de una solución para la cuadratura del círculo[4], hace un gran aporte a la historia con su libro titulado *La Cuadratura de la Parábola*, se especializó en sus propiedades y determinó que el área de un segmento parabólico es a $\frac{4}{3}$ de un triángulo ABC. (Ver Figura 3).

---

[3] El problema de la duplicación del cubo consiste en construir geométricamente, mediante el uso de regla y compás, el lado de un cubo tal que su volumen sea el doble del volumen de otro cubo de lado dado.
[4] El problema de la cuadratura del círculo, consistente en construir geométricamente mediante el uso de regla y compás, un cuadrado que posea un área que sea igual a la de un círculo dado.

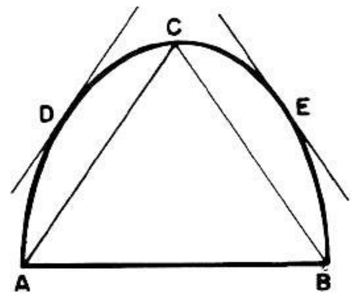

Figura 3. Triángulo ABC inscrito en un segmento parabólico ADCEB, Arquímedes compara por un razonamiento que utiliza el método de exhaución las áreas de estas dos figuras. (Tomada de Río-Sánchez, 1996, p. 18).

Este nuevo concepto permitió obtener por primera vez la cuadratura del espacio comprendido entre una curva y líneas rectas, para su demostración Arquímedes aplica el método, llamado exhaución[5] a la cuadratura de la parábola.

Por otro lado, Apolonio de Perga, quien aportó, en su obra *Las Cónicas*[6], no sólo una gran cantidad de resultados nuevos para la época, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales se puede encontrar el germen lejano de la *Geometría Analítica* del siglo XVII, según Boyer (1996).

El aporte fundamental de Apolonio, fue el hecho de poder obtener las secciones cónicas, a partir de la intersección de un plano con un cono, sin importar el ángulo que forman la generatriz y el eje tal como lo proponía Menecmo. De acuerdo con Apolonio, la sección cónica obtenida dependía fundamentalmente de la inclinación del plano secante con

[5] El método de exhaución empleado por Arquímedes para resolver el problema de la cuadratura de la parábola (aunque con notación más moderna) consiste en lo siguiente: Para cada número natural n se divide el segmento AB de longitud b, [0, b] en n partes iguales de medida b/n. Sobre cada una de esas partes se construye un rectángulo con la altura de la ordenada a la curva (rectángulo superior, por exceso o circunscrito; rectángulo inferior, por defecto o inscrito). Cuanto más grande sea n, mayor es la partición de la región bajo la curva, menor el error en el cálculo y en consecuencia, cada vez más precisa su área. En términos del cálculo moderno la medida exacta del área se da cuando en la partición n tiende al infinito.

[6] *Las Cónicas*, es el nombre que recibe un antiguo tratado geométrico que recopila todo el conocimiento que se tenía acerca de dichas curvas hasta ese entonces. La obra consta de ocho libros o capítulos, donde los cuatro primeros se supone que dan cuenta de los aportes que hicieran Menecmo, Euclides y Aristeo a la teoría de cónicas. Los cuatro restantes son mérito del autor. Sin embargo, solo se conserva tres de ellos, de los cuales dos existen únicamente en su versión árabe.

el eje; inclusive fue más allá de ello, ya que también planteó que la construcción de estas secciones cónicas, era independiente del tipo de cono utilizado, es decir, podría ser un cono circular recto u oblicuo.

Otro aporte importante que realizó Apolonio fue darle el nombre actual a las cónicas. Particularmente, la parábola fue definida como la intersección de un cono circular oblicuo de dos hojas con un plano paralelo a una sola generatriz o arista. (Ver Figura 4).

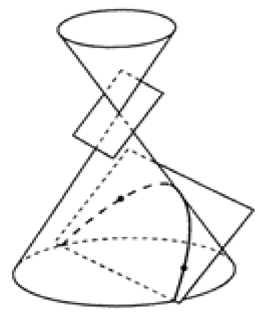

Figura 4. Parábola como la sección cónica generada por el corte que hace el plano paralelo a una de sus generatrices. Tomado de González (2003).

Por otra parte la propiedad fundamental con respecto al diámetro que utiliza Apolonio de Perga en su definición de parábola tuvo mayor difusión y acogida entre los matemáticos, quizá por estar estrechamente relacionada con el sistema de coordenadas cartesiano. Según Boyer (1996), Apolonio consiguió definir las cónicas como lugares geométricos de puntos del plano que satisfacen una condición determinada. Esta definición deja de lado la manera estereométrica de concebirlas como secciones determinadas por un plano al cortar una figura tridimensional. Apolonio, al igual que sus predecesores, obtenía sus curvas a partir de un cono en el espacio tridimensional, pero luego logró prescindir del cono, no sin antes haber deducido una propiedad plana fundamental, que viene a dar una condición necesaria y suficiente para que un punto esté situado sobre la curva.

Con todo, en *Las Cónicas*, la noción de *foco* se refiere de manera indirecta y la de *directriz*, es omitida completamente. A pesar de esto, según los historiadores como Boyer (1996) es muy probable que la propiedad foco–directriz fuese utilizada en ese entonces para el trazado de parábolas.

Ahora bien, al parecer, el primero en teorizar sobre este respecto fue Pappus de Alejandría, quien en su *Colección Matemática* expone la propiedad monofocal[7] de las cónicas, aunque posiblemente está ya era conocida en el tiempo de Euclides. Siglos más tarde, Al-Kuhi, matemático árabe, basándose en la propiedad foco–directriz definió la parábola como el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias tangentes a una recta y que pasan por un punto exterior a ésta.

Los antiguos griegos se ocuparon ampliamente de las propiedades geométricas de las cónicas. Hubo que esperar unos 1900 años hasta siglos XVI y XVII, a que se pusieran de manifiesto las aplicaciones de las cónicas, y se conociera su importante papel en el desarrollo del cálculo. El filósofo y matemático francés René Descartes, desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones y los puntos en el plano con pares de números. Este método es ahora denominado *Geometría Analítica*. En esta *Geometría Cartesiana* las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y. Quizás el resultado más sorprendente de la *Geometría Analítica* es que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan cónicas.

Finalmente, tal como señala Bongiovanni (2007), luego de varios siglos y a raíz de un artículo que publicara en 1933 el matemático francés Henri Léon Lebesgue, cuyo título traducido es *Las Cónicas en la Enseñanza Secundaria*, la propiedad foco–directriz es considerada nuevamente por los matemáticos para el estudio de la parábola, así como de la hipérbola y la elipse.

Para concluir con esta dimensión, se puede inferir a partir de estos diversos estudios sobre historia y didáctica de las cónicas (Bartolini Bussi, 2005; Bongiovanni, 2007; España,

[7] La propiedad monofocal de las cónicas establece que la razón entre las distancias de un punto al foco y a la directriz determina si la curva a la que pertenece dicho punto es una parábola o una hipérbola o una elipse, dependiendo de si tal razón es respectivamente igual, mayor o menor que la unidad. Aquí es pertinente precisar que el término *foco* se debe al alemán Johanes Kepler (S. XVI d.C.), en tanto que la palabra *directriz* fue introducida por el holandés Jan de Witt (S. XVII d.C.).

2010), que la evolución conceptual de la parábola como objeto matemático remite y relaciona variados conceptos y procedimientos que han ido construyéndose paralelamente a la conceptualización de la noción de espacio y al desarrollo de distintos métodos matemáticos — sintético, analítico, proyectivo y algebraico —. Así pues, el foco y la directriz de la parábola, dos objetos matemáticos que se remontan a la antigüedad, son un claro ejemplo de esta evolución. Pues bien, el estudio de la propiedad foco–directriz involucra una serie de conceptos geométricos tales como mediatriz, segmento, circunferencia y recta tangente por citar algunos ejemplos. Además comprende diferentes relaciones espaciales como son simetría, perpendicularidad y paralelismo.

6.2 Dimensión Cognitiva

El objetivo de este estudio es la exploración de aquellos elementos que de una u otra forma pueden incidir en la conceptualización del concepto de parábola como lugar geométrico de parte de los estudiantes en el contexto escolar, en lo referente a fenómenos perceptivos y cognitivos asociados a los procesos de representación y visualización de objetos matemáticos en el contexto de los AGD. Para ello se consideraran los siguientes aspectos: representaciones matemáticas, visualización en AGD y la relación entre figura y dibujo cuando se tienen en cuenta las construcciones geométricas en el ambiente computacional y las estrechas interrelaciones con los niveles espacio – gráfico y teórico.

6.2.1 Representaciones matemáticas.

Las representaciones juegan un papel importante dentro de la Educación Matemática y aún más particularmente en la Didáctica, ya que propician una interacción estudiante-conocimiento, a partir de signos, gráficos, expresiones simbólicas, enunciados y diagramas, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos. Tal interacción, no sólo se limita a los simples sistemas estructurados de codificación mediante signos o gráficas, sino que busca que el estudiante haga una manipulación y procesamiento de estas representaciones que le permitirán distinguir las propiedades y relaciones estructurales entre los conceptos e ideas representados.

Varias investigaciones alrededor del tema parten de que la comprensión de un concepto, se hace cuando el sujeto es capaz de establecer una diferencia entre el concepto y su representación, entre su significado y significante, entre la representación interna y la representación externa. En Fernández y Garzón (2007), se presenta esta terminología, dimensionando la representación interna como el proceso que el individuo trabaja en su mente para significar fenómenos, explicando nociones o ideas matemáticas; en el momento de comunicar tales ideas, entran en juego las representaciones externas.

De la misma manera, Goldin y Kaput (1996), asumen que para explicar los fenómenos relativos al conocimiento y comprensión es necesario recurrir a la noción de representación, y que ésta se inscribe en la dialéctica natural entre operaciones mentales y operaciones físicas, de cuya interacción se estructuran complejos sistemas de representación internos —conceptos y procesos— y sistemas de representación externos —símbolos e íconos—.

A este respecto cabe puntualizar que en el caso de los objetos geométricos, el paso de su representación visual —gráficas— a la representación simbólica —ecuaciones algebraicas— enriquece el significado de los mismos, puesto que el sistema de coordenadas cartesianas hace posible su lectura y manipulación simbólica, permitiendo de la misma manera articular estos dos tipos de representación externa.

No obstante, como indican los estudios adelantados por Río-Sánchez (1989), una introducción prematura del sistema referencial cartesiano puede limitar la conceptualización de la noción de parábola, especialmente con relación al espacio. En este sentido, se coincide con Aubanell (2009) cuando afirma que en el bachillerato parece conveniente iniciar el estudio de las cónicas a partir de sus genuinas propiedades como lugares geométricos, sin tener una prisa excesiva por pasar a su formulación analítica.

Ahora, según Río-Sánchez (1989), el estudio de la parábola a partir de su representación visual no está exento de dificultades, se ha evidenciado que entre estudiantes en edad escolar es común la tendencia a conceptualizar objetos geométricos tan solo de manera perceptual, como es el caso de la parábola.

También se debe considerar que las representaciones internas de los objetos de la *geometría elemental*, como es el caso de la parábola conceptuada como lugar geométrico, son un tipo de entidades mentales que no pueden reducirse a "imágenes absolutas" ni a "conceptos auténticos", dada la naturaleza teórico-empírica de tales objetos (Chevallard & Michel, 1991). Lo idóneo es que figura y concepto confluyan en un objeto mental único (Fischbein, 1993), puesto que en el mundo real domina la intuición.

En el AGD Cabri Géomètre II Plus, las representaciones visuales de los objetos matemáticos son "ejecutables" (Lupiáñez y Moreno 2002), es decir, que tienen la potencia de simular *acciones cognitivas*. Igualmente, la representación en Cabri Géomètre II Plus es controlada por una teoría geométrica en principio euclidiana, lo que puede facilitar la conexión entre concepto y figura (Laborde, 1998a). Dicho en otras palabras, favorece la articulación entre cognición y percepción.

El conocimiento de esta gama de concepciones, alrededor de las representaciones, puede permitir a los docentes generar alternativas para que el estudiante, dinamice y enriquezca sus construcciones mentales, para que sea capaz de significar lo que construye, para que su interacción con las representaciones externas den como resultado la comprensión adecuada de una idea o concepto matemático.

6.2.2 Visualización en Ambientes de Geometría Dinámica.

La visualización, enmarcada desde la perspectiva de Bishop (como se cita en Fernández y Garzón, 2007), tiene que ver con la habilidad de manipular mentalmente, rotar, deformar o invertir un objeto, presentado de manera gráfica; concepción compartida por la investigadora Presmeg (como se cita en Fernández y Garzón, 2007), quien relaciona las representaciones internas y externas con la visualización, ella, hace referencia a los procesos cognitivos ligados al aprendizaje que el sujeto realiza en su mente cuando manipula o transforma, una imagen visual.

En gran medida, esto es lo que se pretende lograr con el estudiante, que él sea capaz de relacionar los fenómenos visuales con los hechos geométricos, para que llegue a reconocer propiedades geométricas, para que pueda interpretar los dibujos en términos geométricos o para que logre construirlos. Estos aprendizajes pueden permitirles, a los estudiantes, usar dibujos o representaciones visuales de objetos geométricos como una ayuda en su razonamiento a un nivel teórico.

Desde la perspectiva de Zimmermann y Cunningham (1991), la visualización en matemáticas tiene que ver con la configuración de imágenes —mentales o físicas— y su uso efectivo en la resolución de problemas y la construcción de concepciones.

Es así como la visualización es un proceso que conjuga la percepción y la cognición, es por eso que la intuición también desempeña un papel importante en la elaboración de concepciones que permiten el acceso a los diferentes conceptos matemáticos[8], en especial de la parábola como lugar geométrico.

[8] Existe una diferencia entre concepto matemático y concepción matemática. A saber, concepto matemático, constructo teórico aceptado oficialmente por la comunidad matemática en una época determinada (Artigue, 1995) y concepción, red de representaciones internas y asociaciones entre ellas evocadas por el concepto a través de sus representaciones internas (Sfard, 1991).

Hilbert & Cohn-Vossen (1952), afirman que la comprensión intuitiva, genera una conexión más inmediata entre los objetos de estudio, favoreciendo así la compenetración entre los mismos, lo que acentúa el significado concreto de sus relaciones[9].

Papert[10] (1980), por su parte, sostiene que el uso de computadores permite la exteriorización de preconceptos intuitivos, lo cual estimula el aprendizaje reflexivo. Asimismo, advierte que las representaciones computacionales deberían ser tomadas como elementos para remodelar la comprensión intuitiva, pues ésta, tal como es señalado por Fischbein (1987), produce un efecto de inmediatez que conduce usualmente a identificarla con el mero proceso de representación visual.

Laborde (1998b), hace alusión a que la visualización, es mucho más importante en la resolución de problemas geométricos, cuando se integran las TIC, ya que la evidencia visual y el análisis geométrico que se generan al implementar un software, demanda nuevas interpretaciones y nuevas experiencias en el ambiente informático.

6.2.3 Construcciones geométricas en los AGD.

La relación entre dibujo y figura tiene un carácter relevante a la hora de las construcciones geométricas en los AGD, pero al llegar al salón de clases se ha evidenciado que muchos de los estudiantes no hacen distinción entre estos dos referentes.

Al trabajar con lápiz y papel, el dibujo no tiene gran relevancia ya que se dejan a un lado las relaciones geométricas existentes en él; de igual manera la figura geométrica no se entiende como un objeto teórico.

Laborde (1998a) afirma que "el dibujo se refiere a una entidad material mientras que la figura se refiere a un objeto de la teoría geométrica" p. 34.

[9] Ver prefacio del libro "Geometry the imagination" de David Hilbert.
[10] El profesor Seymour Papert es el inventor del lenguaje de programación LOGO, que es utilizado con fines educativos.

Se puede decir que la transición del dibujo a la figura geométrica es un paso que da el sujeto cognoscente por medio de su propia interpretación, su propio conocimiento y su propio contexto.

Después de la distinción hecha anteriormente, las construcciones geométricas entran a actuar y se constituyen un medio para articular las representaciones graficas con la representaciones verbales de enunciados geométricos, al hacer explicitas relaciones geométricas en el uso de los instrumentos de construcción.

Hay dos tipos de construcciones utilizadas en la enseñanza de las Matemáticas: las construcciones robustas y las blandas o suaves (Laborde, 2005b).

Las primeras son construcciones geométricas de carácter teórico, hechas en un AGD de una figura que satisface unas condiciones geométricas para las cuales el modo de arrastre preserva sus propiedades y además le sirve como medio de verificación, estas deben ser hechas usando objetos geométricos y relaciones geométricas que caractericen la construcción obtenida.

Las segundas son construcciones de carácter empírico, que se hace de una figura, no satisface todas las propiedades. Éstas, por lo general, se hacen de manera perceptual, sin aludir a la teoría y son invalidadas por el modo de arrastre dado que se hace visible que algunas de las condiciones no son satisfechas.

Cuando el estudiante realiza una determinada construcción con ayuda de un AGD, debe efectuar acciones y seleccionar objetos primitivos que considere apropiados, a lo que el ambiente responde inmediatamente con una o varias retroacciones perceptuales. Las continuas retroacciones generadas por el ambiente pueden contribuir a estimular el "refinamiento gradual" de las estrategias parciales conduciéndolo paso a paso hasta el descubrimiento de la "estrategia óptima". Es decir que detrás de una construcción robusta existen varias construcciones blandas previas.

6.2.4 las interrelaciones con los niveles Espacio – Gráfico y Teórico.

Laborde (2005a) afirma que las figuras en la *Geometría* de dos dimensiones, juegan un papel ambiguo: por un lado, el nivel *espacio – gráfico* que se refiere al dominio donde se hallan los objetos geométricos, por medio de dibujos en el papel, o en una pantalla de computador, o por medio de movimientos producidos por un artefacto mecánico. En estas representaciones externas que son entidades gráficas, se pueden realizar mediciones particulares, en las cuales es posible realizar acciones físicas, y además expresar ideas de ellas, interpretaciones, opiniones y juicios que pueden dar ocasión a la actividad perceptual de un estudiante.

Por otro lado, está el nivel *teórico*, referente o dominio donde se encuentra la teoría geométrica, los objetos teóricos, los teoremas, las reglas de acción, relaciones y operaciones de esos objetos, así como también juicios acerca de estos, que pueden ser expresados en varias representaciones.

A través de las construcciones geométricas se puede llegar a promover problemas donde se relacione propiedades *teóricas* y propiedades *espacio – gráficas,* que pueden dar ocasión a la actividad perceptual de un estudiante, llevándolo a la interacción del nivel grafico al nivel geométrico y viceversa; los AGD favorecen dicha relación, al respecto Laborde (2005a), considera que:

> Lo que es importante es que los problemas en el ámbito escolar requieren del uso de ambos dominios [el espacio – gráfico y teórico] y varios pasos entre ellos. […] Consideramos que este proceso de ida y vuelta entre T [se refiere a lo teórico] y a lo SG [se refiere a lo espacio – gráfico] toma lugar aún entre expertos en la geometría escolar tales como los profesores. (p. 162).

Sin embargo, algunos investigadores (Davison & Pratt, 2003; Sinclair, 2003) han encontrado que a pesar de que los AGD pueden potenciar la visualización, esto no es suficiente para garantizar el desarrollo del pensamiento geométrico, inclusive pueden obstaculizarlo. Es por eso por lo que los mismos investigadores señalan que las tareas propuestas deben buscar el contraste y armonización de los aspectos perceptuales y cognitivos de los conceptos matemáticos en juego.

6.3 Dimensión Didáctica

Esta dimensión aborda los siguientes aspectos: Transposición Didáctica, Transposición Informática y la Teoría de las Situaciones Didácticas como referente para el diseño.

6.3.1 Transposición Didáctica.

De acuerdo con Chevallard (1998), la transposición didáctica es la transformación del saber científico en un saber posible de ser enseñado.

La importancia de este concepto, reside en el quiebre de la ilusión de correspondencia entre el saber que se enseña y el conocimiento específico de la disciplina en el ámbito académico. El saber que forma parte del sistema didáctico no es idéntico al saber científico, y su legitimidad depende de la relación que éste establezca desde el punto intermedio en el que se encuentra respecto de los académicos y del saber banalizado de los padres.

Esta distancia, entre el saber a enseñar y el saber científico, es negada porque de dicha negación depende, en parte, la legitimación. La transformación de los conocimientos en su proceso de adaptación supone la delimitación de conocimientos parciales, la descontextualización y finalmente una despersonalización.

6.3.2 Transposición Informática.

El impacto epistemológico ocasionado por las herramientas computacionales, en especial con referencia a los procesos de reificación[11] que los estudiantes pueden activar en torno de los objetos matemáticos y sus relaciones, ha propiciado un nuevo realismo matemático en el que la relación con el conocimiento puede ser más cercana y profunda. Esto hizo que sea indispensable la extensión de la transposición didáctica al contexto tecnológico actual, dando lugar así a la “transposición informática”.

En el caso de los AGD como Cabri Géomètre II Plus, el cambio en la relación del ser cognoscente con los objetos cognoscibles se da quizá con mayor eficacia, en tanto que el dinamismo de las representaciones gráficas de dichos objetos supone importantes repercusiones en la percepción visual humana, lo que de seguro debe afectar sustancialmente los procesos de cognición. Así, se asume con Balacheff (2000), que la enseñanza de las matemáticas en el contexto computacional requiere nuevos modelos de conocimiento, en particular en lo referente al planteamiento de problemas interesantes.

La potencia de los ambientes como Cabri Géomètre II Plus hace posible el tratamiento de problemas y la experimentación de situaciones inaccesibles por otro medio. Este es el caso, por ejemplo, de los lugares geométricos. Asimismo, abre la posibilidad de adoptar un enfoque más experimental de las matemáticas, lo cual cambia la naturaleza del aprendizaje. Además, Cabri Géomètre II Plus ha sido concebido para permitir la distinción entre relaciones espaciales y propiedades geométricas, una asociación que difícilmente podría adquirir sentido en un ambiente tradicional de lápiz y papel. No obstante, tal asociación no surge espontáneamente y por lo tanto debe considerarse como objeto de aprendizaje.

[11] *Reificación* viene del verbo *Reificar*, el prefijo rei- viene del latín y quiere decir "cosa". Generalmente, "Reificar" significa tratar abstracciones (ideas) como si fueran realidades (cosas).

A propósito de esto, Laborde (1998b) aduce que las razones por las cuales Cabri Géomètre II Plus puede suscitar la emergencia de dicha asociación son las siguientes:

- los fenómenos visuales adquieren especial importancia por la naturaleza dinámica de las representaciones matemáticas;
- estos fenómenos están controlados por una teoría geométrica, ya que son el resultado de una modelización de ciertas propiedades de la *geometría elemental*; y
- el sinnúmero de posibilidades para crear situaciones geométricas que pueden ser visualizadas con varios objetos y en forma precisa. (p.84).

6.3.3 La Teoría de las Situaciones Didácticas como referente para el diseño.

La *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (1986; 1997; 2007) pretende estudiar, modelizar y contrastar empíricamente los *fenómenos didácticos* que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, teorema o procedimiento a sus estudiantes.

Es por tales razones que esta *micro-ingeniería* opta por una propuesta didáctica enmarcada en las TSD y que integra el AGD Cabri Géomètre II Plus, dado que este tipo de ambientes ofrece a los estudiantes un campo de experimentación sin precedentes para el estudio de los lugares geométricos, tal y como afirma Cuoco y Goldenberg (1997).

Así, la propuesta didáctica que se presenta en este documento tiene por objeto implementar cuatro situaciones didácticas que permitan propiciar la producción de conocimientos relativos al concepto de parábola como lugar geométrico, tomando como referencia los supuestos teóricos de la epistemología genética piagetiana (Piaget, 1990), los cuales sostienen que el conocimiento es el producto de la interacción del sujeto con su entorno. Hipótesis que condujo a Brousseau (1986) desde una visión constructivista a postular que el sujeto produce conocimiento como resultado de su adaptación a un medio con el que interactúa:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contraindicaciones, de dificultades, desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta a través de respuestas nuevas que son las pruebas del aprendizaje. (p. 33).

De este modo, la investigación desarrollada busca describir un proceso de producción de conocimiento a partir de dos interacciones:

- Interacción del estudiante con la problemática que plantea la conceptualización de la noción de parábola como lugar geométrico.
- Interacción del docente con los estudiantes.

Es así como en esta doble interacción se considera al ambiente Cabri Géomètre II Plus como parte del "medio" material, el cual ha sido pensado y sostenido con una intencionalidad didáctica: "potenciar la cognición de los estudiantes en la construcción del significado vinculado a la conceptualización de la parábola bajo definición de lugar geométrico".

Por consiguiente, se considera pertinente en esta investigación el diseño de situaciones a-didácticas[12], en las cuales el estudiante busca la construcción de su propio conocimiento, sin esperar que el profesor le dé juicios sobre si sus procedimientos son correctos o no.

Brousseau (como se cita en Monroy y Rueda, 2009) distingue tres tipos de situaciones a-didácticas que permiten a los estudiantes el tránsito por las diversas etapas propias de la actividad matemática:

[12]Las situaciones a-didácticas pueden definirse como aquellas en las cuales el profesor se aparta del escenario, dejando que el alumno viva la situación como investigador de un problema matemático, independiente del sistema educativo (Margolinas, 2009).

- Situación a-didáctica de acción, es aquella donde el conocimiento que ya posee el alumno le permite actuar sobre la situación.
- Situación a-didáctica de formulación, en la que los sujetos explicitan verbalmente sus opiniones y sus estrategias.
- Situación a-didáctica de validación, en la que los sujetos utilizan el conocimiento para argumentar a favor o en contra de una afirmación. En la validación, hay la posibilidad de que el mismo estudiante decida sobre sus propias acciones, basado en sus conocimientos y en las retroacciones del medio. (p.22).

Ahora bien, teniendo en cuenta que la fase a-didáctica es insuficiente para que el estudiante adquiera conciencia por sí mismo de la presencia de un nuevo conocimiento, ni mucho menos de que éste corresponde a un saber cultural validado por una comunidad de matemáticos profesionales, se hace necesario entonces la intervención del profesor. Dentro del diseño este proceso se inscribe en la fase didáctica denominada *situación de institucionalización*, "que tiene por objetivo establecer y dar un estatus oficial a un conocimiento surgido durante la actividad en clases" (Brousseau, 2007, p.22).

7. Metodología

El contenido de este capítulo está relacionado con la concepción, el diseño, implementación, seguimiento y el análisis de la secuencia didáctica; para ello, se trataran los siguientes aspectos: generalidades de la Ingeniería Didáctica, presentación y análisis de la obra de ingeniería didáctica propuesta, la *micro-ingeniería didáctica* como metodología de investigación y sus fases.

Es de resaltar que dentro de esta metodología, se distingue dos niveles: uno de *micro-ingeniería* y otro de *macro-ingeniería*. El primero de ellos, que es el que sigue ésta investigación, que fue de tipo local y comprendió principalmente los fenómenos inherentes a las situaciones didácticas diseñadas. En este caso, la *micro-ingeniería* que se ha desarrollado, estuvo encaminada al estudio de la parábola bajo el enfoque de lugar geométrico.

7.1 Generalidades de la Ingeniería Didáctica

Según Artigue (1995), la *ingeniería didáctica* surgió al interior de la Escuela Francesa de la Didáctica de las Matemáticas como una metodología para las realizaciones didácticas de los hallazgos de la teoría de la *transposición didáctica*, desarrollada a principios de la década de 1980 por Chevallard, y la TSD, iniciada por Brousseau a principios de la década de 1970 y desarrollada por diversos investigadores desde entonces.

La expresión "ingeniería didáctica", como explica Artigue (1995), se debe a la analogía que relaciona una parte del trabajo didáctico con el trabajo de un ingeniero. Para llevar a cabo un determinado proyecto, los ingenieros deben fundamentar su labor en el conocimiento científico aplicado a su campo y aceptar someterse a un control de tipo científico. Pero, los esquemas teóricos de la ciencia son insuficientes para abordar los fenómenos del mundo real en toda su complejidad. Por lo tanto, deben afrontarlos con todos los medios posibles.

Esta etiqueta que se da a cierta parte del trabajo didáctico se toma como un medio para acercarse a dos importantes cuestionamientos que fueron puntos clave en su momento:

- la relación entre investigación y acción con respecto al sistema de enseñanza; y
- el lugar ocupado por el "funcionamiento didáctico" dentro de las metodologías de investigación.

Esta doble función es la que determina la ruta que ha de seguir la "ingeniería didáctica" en la búsqueda de nuevas creaciones didácticas; tal como lo mencionó Douady (1995):

> El término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor–ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de estudiantes. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los estudiantes, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los estudiantes en función de las decisiones y elecciones del profesor. […] La ingeniería didáctica designa, de igual forma, una metodología de investigación particularmente interesante por tener en cuenta la complejidad de la clase. (p. 61).

7.2 Presentación y Análisis de la Obra de micro-Ingeniería Didáctica Propuesta

El asunto a tratar en este acápite concierne a la reelaboración de algunos elementos para la enseñanza del concepto de parábola.

> El didacta, bien sea un ingeniero o bien un investigador, debe hacer frente a un objeto de enseñanza que ya ha sido implementado. ¿Por qué debería cambiarlo? ¿Cuáles son las modificaciones que debe incluir la reforma? ¿Qué dificultades

> se prevé y como pueden superarse? ¿Cómo se puede determinar un dominio de validez para las soluciones propuestas? (Artigue, 1994, pp. 30-31).

Por supuesto que esta serie de planteamientos deben ser atendidos y para ello se requiere de un extenso trabajo de campo, cuya realización se efectúa a través de variadas etapas. La primera de ellas consiste en analizar el objeto de enseñanza existente con vista a determinar su grado de pertinencia y establecer algunas directrices que permitan perfilar el componente epistemológico de la propuesta didáctica a desarrollar.

7.2.1 Ambiciones epistemológicas de la propuesta didáctica.

Se pretende una apuesta por lo epistemológico, porque a través de los sucesivos periodos de las matemáticas, se fue cambiando lo intuitivo por razonamientos más abstractos, y con el surgir de los AGD se busca rescatar el estudio de lo sintético, aunque en este trabajo no se consideró que los estudiantes han de seguir exactamente el mismo recorrido histórico, este aspecto iluminó la posibilidad de organización de la propuesta.

En el presente caso, debe tenerse en cuenta que la enseñanza del concepto geométrico de parábola es un tema casi desconocido en el ámbito de la Educación Matemática y menos el de lugar geométrico dentro de un contexto dinámico, por eso se advierte del riesgo de una virtual desaparición del currículo escolar. Las recientes exploraciones que se han hecho de este objeto matemático se deben a la emergencia de los AGD, por lo cual, dada la complejidad de éstos, se requiere mucha más investigación al respecto.

Aunque en la actualidad son varios los libros de texto escolares que discurren en la correspondencia que se establece entre las representaciones simbólica y visual del concepto de parábola, casi siempre llevan a desarrollos teóricos que utilizan dos tipos de representación matemática: la gráfica y la algebraica, demostrando mayor preferencia por ésta última y dejando relegada la primera a una especie de caracterización topológica que simplemente retrata la ecuación que la genera. Esta situación lleva a dejar de lado la naturaleza geométrica de la parábola.

En este sentido, la propuesta tiene por objeto la elaboración de situaciones de enseñanza que sean más provechosas desde el punto de vista epistemológico, principalmente por:

- La apertura de la enseñanza del concepto de parábola a situaciones que no necesitan partir de la definición de un sistema de coordenadas, sino que aprovechan la definición puramente geométrica de ella. Lo cual puede favorecer el estudio de sus propiedades intrínsecas.
- La movilización de diversos saberes geométricos desde una perspectiva distinta a la del enfoque analítico, puesto que los modelos convencionales para la enseñanza de la *geometría* suelen sustentarse únicamente desde el punto algebraico.

7.2.2 Análisis de restricciones.

Con el fin de comprender y hacer una mejor gestión del proceso de adecuación de la enseñanza, el didacta usa la perspectiva sistémica para tener una visión global. Para ello, debe tomar como referente el punto de equilibrio de un sistema dinámico. El estudio de dicho equilibrio permite hacerse a una idea de su estabilidad y analizar, en términos de restricciones, las razones por las cuales ésta se mantiene.

Mediante la modificación de al menos una de las limitaciones detectadas, se busca que el sistema se estabilice en otro punto de equilibrio que se considere más conveniente para la investigación. El análisis inapropiado de las limitaciones puede conducir al fracaso o por el contrario, teniendo en cuenta que entre este tipo de experimentos existe una fuerte tendencia al éxito, ciertamente es posible lograr alcanzar un punto cuyo rendimiento sea más satisfactorio. Con todo, éste apenas podría parecer viable, pues su equilibrio es parcial.

Este análisis debe distinguir entre diferentes tipos de restricciones. Clásicamente se habla de tres tipos de restricciones que pueden diferenciarse:

- *Limitaciones de naturaleza epistemológica*, asociadas a las características del saber en juego, las características de su desarrollo, y su forma de funcionamiento vigente.
- *Limitaciones de naturaleza cognitiva*, asociadas a las características cognitivas de la población de estudiantes a los que se dirige la enseñanza, y
- *Limitaciones de naturaleza didáctica*, relacionadas con el funcionamiento institucional de la enseñanza, especialmente en el ámbito en cuestión o en contextos relacionados. (Artigue, 1994, p.32).

Conforme a las características y exigencias del estudio, la tipología de restricciones aquí se formula en términos de dimensiones, planteando las restricciones a manera de preguntas que orientan la presentación de los aspectos considerados en cada una de estas dimensiones. Particularmente, las cuestiones que se miran en cada una de las dimensiones se puntualizan de la siguiente forma.

Dimensión *epistemológica*: se trató del examen de las limitaciones sujetas a la naturaleza del concepto de parábola como saber matemático que llevo a formularse y a resolver este interrogante en el capítulo anterior:

- ¿Cómo se ha concebido históricamente la parábola?

Dimensión *cognitiva*: el análisis de las dificultades asociadas a las distintas formas tradicionales de representación y conceptualización de la parábola plantea esto:

- ¿Cuáles son las dificultades y los errores más frecuentes que se observan en los estudiantes cuando enfrentan el aprendizaje de la parábola?

Con relación a la mediación de Cabri Géomètre II Plus para la formulación de una conceptualización de parábola se hacen las siguientes formulaciones:

- ¿Cómo potencia la comprensión de la parábola su representación dinámica?
- ¿Qué representaciones internas promueve en el estudiante los procesos de visualización y exploración en el ambiente Cabri Géomètre II Plus por el uso de herramientas asociadas al tratamiento de la parábola bajo el enfoque de lugar geométrico?

Dimensión didáctica: el tratamiento didáctico tradicional de la enseñanza y el aprendizaje de la parábola en contraposición con el enfoque constructivista de la teoría de situaciones didácticas sumado a la integración de herramientas computacionales como el ambiente Cabri Géomètre II Plus, conduce a cuestionarse sobre los siguientes aspectos:

- ¿Qué tipo de conceptualizaciones y representaciones acerca de la parábola ha privilegiado la enseñanza tradicional?
- ¿Cómo se implementa la metodología a nivel de una micro–ingeniería para la concepción, diseño, análisis *a priori*, experimentación y análisis a *posteriori*, propuestas para la enseñanza y el aprendizaje de la parábola bajo el enfoque de lugar geométrico?

La primera fase, los *análisis preliminares*, constituyen un componente esencial de cualquier obra de micro-ingeniería didáctica que seria, aun cuando ésta no suelen aparecer como producto final. De hecho, esta fase fundamental para la ingeniería, pese a que solo abarca la etapa inicial, permanece presente y constantemente en el trasfondo conceptual a través de todo este estudio. En retribución, al análisis de restricciones, el didacta adquiere la facultad de autodeterminación para estimar cuánto espacio tiene para maniobrar. Esto dirige por lo tanto, de una particular manera, las decisiones subsecuentes que se puedan tomar.

7.2.3 Opciones de la ingeniería.

De acuerdo con la sección anterior, la concepción de la obra de ingeniería está sujeta a un cierto número de opciones. En particular, las cuestiones que surgen de las limitaciones que parecen oponerse a la viabilidad del proyecto tienen que ser resueltas a un costo razonable. Estas opciones se pueden distinguir como:

- opciones “macro–didácticas o globales”, que guían la totalidad de la ingeniería; y
- opciones “micro–didácticas o locales”, que orientan la organización local de la ingeniería, es decir, la organización de una sesión o fase.

En el caso de este estudio, las opciones se suscriben en el nivel local son las siguientes:

- Hacer explícita la noción de parábola por medio de construcciones geométricas dinámicas que permitan visualizar la propiedad geométrica foco-punto-directriz, rompiendo así con la práctica habitual del uso de modelos estáticos y cálculos demasiado algorítmicos en la enseñanza del concepto de parábola.

- El uso del AGD Cabri Géomètre II Plus en la producción material de parábolas parece en principio una manera de contrarrestar la prolijidad técnica de su trazado, pero más allá de economizar en el aspecto técnico de la actividad matemática, la acción mediadora del AGD Cabri Géomètre II Plus implica el desarrollo de esquemas conceptuales que solo evolucionan a la par de los esquemas procedimentales, lo que en últimas es una garante de aprendizaje.

7.2.4 Regulación de la micro-ingeniería didáctica.

A esta instancia del proceso se propone un proyecto de enseñanza. Pero su "viabilidad" (Chevallard, 1992) se supone que aún no está garantizada. Inclusive, la experiencia ha demostrado que el producto de una ingeniería es demasiado complejo y un solo intento no es suficiente para su perfeccionamiento. Los ajustes se deben hacer entonces a través de experimentaciones sucesivas hasta que, en el mejor de los casos, se obtenga un producto lo suficientemente estable y adecuado para ser generalizado.

Se precisa anotar que en el presente estudio se ha contemplado experimentar la propuesta didáctica una sola vez, ya que se considera que las experimentaciones posteriores pueden suscitar y sustentar futuras investigaciones o aplicaciones.

7.3 La micro-Ingeniería Didáctica como Metodología de Investigación

La micro-ingeniería didáctica como metodología de investigación se caracteriza, en términos generales, por:

- La experimentación sobre la concepción, realización, observación y análisis de Secuencias Didácticas.
- El registro de los estudios de caso donde se ubican y la validación interna que consiste en una confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori. (Artigue, 1995, pp. 247-249).

Cabe señalar que la ingeniería didáctica es una metodología de investigación relacionada con los estudios de caso, con métodos cualitativos que ponen de manifiesto fenómenos didácticos que no son considerados en los tratamientos que utilizan métodos cuantitativos.

7.4 Fases de la Metodología

Teniendo en cuenta las diferentes fases que comprende el proceso experimental de una ingeniería didáctica (Artigue, 1994; 1996), el diseño metodológico de ésta *micro-ingeniería* fue pensado para realizarse en tres fases:

1ª FASE: *Análisis preliminares*.

2ª FASE: Planeación del estudio y diseño de actividades.

3ª FASE: Experimentación y análisis de resultados.

En la siguiente tabla se describe brevemente cada una de estas fases:

Tabla 1. *Fases del Proceso Experimental de la Micro-ingeniería*.

Fase	Descripción
Primera	▪ Dimensión histórico-epistemológico ▪ Dimensión Cognitiva ▪ Dimensión Didáctica
Segunda	▪ Análisis del campo de restricciones. ▪ Plan de actuación en el aula. ▪ Hipótesis de trabajo. ▪ Unidades de análisis. ▪ Diseño y análisis *a priori* de las actividades.
Tercera	▪ Experimentación. ▪ Análisis *a posteriori*.

En los siguientes capítulos se desarrolla las fases segunda y tercera.

8. Planeación del Estudio y Diseño de Actividades

Una vez terminados los análisis *preliminares* se procedió a realizar el montaje de la intervención en el aula y el diseño investigativo en el que se basa la fase experimental de la propuesta.

8.1 Análisis del Campo de Restricciones

El estudio se realizó con un grupo de estudiantes de un colegio privado de Pasto (Nariño), pensando en el aula de clases como el campo investigativo. Debido a que entre los dos investigadores uno de ellos es el profesor titular del área de matemáticas en dicha institución, se estimó conveniente que esta misma persona fuera la encargada de implementar la propuesta didáctica, cuyo desarrollo se llevó a cabo durante las jornadas regulares. A continuación se describen los aspectos particulares que determinaron el campo de restricciones donde se sitúa la realización didáctica. Para ello se considera tanto las restricciones del diseño como las restricciones de favorabilidad del sistema educativo.

8.1.1 Restricciones en el diseño.

- La secuencia de situaciones propuesta hace énfasis en las fases a-didácticas. Ellas llevan a los estudiantes a investigar un concepto asociado con una configuración geométrica particular: la Parábola como lugar geométrico.

- El AGD que se ha seleccionado es Cabri Géomètre II Plus. Este contiene una serie de herramientas diferentes que los estudiantes pueden usar para afrontar las situaciones propuestas. Particularmente, el trabajo del estudiante con este artefacto se concentra sobre las herramientas que permiten realizar configuraciones en las cuales puedan, explorar regularidades y propiedades relacionadas con la parábola.

8.1.2 Restricciones de favorabilidad del sistema educativo.

- Los cuatro estudiantes incluidos en el proyecto de investigación, fueron estudiantes de grado noveno del Colegio Gimnasio Bet-El, que recibieron una inducción en el manejo del ambiente Cabri Géomètre II Plus y trabajaron situaciones de construcción geométrica sencillas.

- Las directivas del Colegio Gimnasio Bet-El dieron viabilidad para que se implementara este proyecto en su Institución, bajo la responsabilidad de la docente del área de Matemáticas Claudia Andrea Moncayo, colocando a disposición, el aula de Informática dotada de seis computadores, con Cabri Géomètre II Plus instalado.

8.2 Plan de Actuación en el Aula

El concepto del plan de actuación en el aula se pensó para ser efectuado en torno de cuatro situaciones diseñadas a partir de los análisis *preliminares*, las cuales se explican y detallan en secciones subsiguientes. La siguiente tabla recoge las especificidades de la planeación realizada en esta etapa de la micro-ingeniería.

Tabla 2. *Planificación de la Actuación en el Aula*.

Actividades	Tiempo	Instrumentos
Aplicación de la situación didáctica Nº 1: se propone una situación que lleve a los estudiantes a conceptuar la noción de Parábola mediante la utilización de los conceptos mediatriz y equidistancia.	2 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.
Aplicación de la situación didáctica Nº 2: se propone a los estudiantes la construcción de una configuración geométrica que les lleve a encontrar el foco y la directriz de una parábola.	2 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.
Aplicación de la situación didáctica Nº 3: se propone una situación que lleve a los estudiantes a construir la Parábola con base en la propiedad de la	2 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.

circunferencia.		
Aplicación de la situación didáctica Nº 4: se propone una situación que lleve a los estudiantes a identificar y comprobar que un lugar geométrico dado es una parábola, utilizando la propiedad foco–directriz.	2 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.

Fuente: Esta tabla ha sido adaptada para este trabajo y fue tomada de como plan de actuación en el aula, propuesta en Camargo & Guzmán (2005).

Las fuentes de recolección de información fueron:

- Observaciones escritas de la secuencia didáctica propuesta. En dichos apuntes se recoge las reflexiones del profesor con respecto al plan previsto, los sucesos en clases y algunas apreciaciones posteriores de los investigadores.

- Producciones escritas de los estudiantes correspondientes a los reportes de trabajo de cada uno de ellos.

- Producciones verbales de los estudiantes procedentes de videograbaciones, que corresponden a las cuatro sesiones principales, con el fin de ilustrar el curso de la acción y disponer de información sobre la interacción didáctica.

8.3 Hipótesis de Trabajo

La comprensión del concepto de Parábola como lugar geométrico se logrará si se propone una secuencia didáctica que permita a los estudiantes movilizar diversos conceptos y relaciones geométricas desde una perspectiva dinámica que posibilite visualizar, relacionar y contrastar la trayectoria de un punto móvil que varía continuamente conservando su equidistancia respecto al foco y la directriz con el conjunto de los puntos que equidistan de dicho foco y dicha recta. De esta manera, las situaciones deben tener las siguientes características:

- Estar inmersas en contextos geométricos en donde exista la necesidad de estudiar la variación de posición de un punto y de las distancias desde tal punto al foco y la directriz, utilizando representaciones ejecutables para la producción material de su trayectoria y del lugar geométrico que describe.

- Organizar la enseñanza alrededor de situaciones didácticas que involucren configuraciones geométricas donde sea posible la visualización de la propiedad foco–directriz en la construcción y verificación de parábolas.

8.4 Unidades de Análisis

Se adoptaron las siguientes unidades de análisis, propuestas por Romero (Como se cita en Camargo & Guzmán, 2005)

- Unidades de análisis para el estudio del contenido.
- Unidades de análisis para el estudio de la comprensión.
- Unidades de análisis para el estudio de la interacción didáctica (p.64).

8.4.1 Unidades de análisis para el estudio del contenido.

Estas unidades están basadas en el análisis histórico epistemológico del concepto de Parábola como lugar geométrico caracterizado a partir de la propiedad foco–directriz. Aunque la escasa documentación que existe sobre este respecto hace que no sea posible establecer con exactitud un contexto problemático, puesto que esta caracterización de la Parábola se conoce ante todo de una reciente tradición escolar. Así, las unidades para el análisis de la organización del contenido son las siguientes:

- La Parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de una recta d llamada directriz y de un punto fijo F llamado foco.

- La Parábola es el lugar geométrico determinado por el conjunto de posiciones que asume un punto móvil P en función de un punto Q que se mueve sobre una recta *d* llamada directriz, de manera tal que P equidista de la recta directriz *d* y de un punto fijo F llamado foco para cualquiera de sus posiciones.

8.4.2 Unidades de análisis para el estudio de la comprensión.

Sobre la base de la caracterización de comprensión que se presentó en el análisis cognitivo, se determinaron las unidades de análisis de comprensión de la relación entre concepto y figura en el caso de la parábola. Con esto se busca centrar la atención en la comprensión de los estudiantes frente a la noción de Parábola como una entidad que por un lado refiere relaciones geométricas y por otro, ofrece propiedades espaciales que dan lugar a la actividad perceptual a través del análisis de sus actuaciones respecto a:

- La interpretación de los fenómenos observados en pantalla cuando se hace variar la posición de algún objeto primitivo de una configuración determinada que represente una parábola.

- La descripción de la relación entre el foco y la directriz con respecto a cualquier punto de una parábola.

- La construcción de parábolas utilizando la propiedad foco–directriz.

- La validación de parábolas utilizando la propiedad foco–directriz.

8.4.3 Unidades de análisis para el estudio de la interacción didáctica.

Estas unidades dan cuenta de los aspectos más relevantes respecto de las etapas en que se desarrolló la realización didáctica con referencia al papel desempeñado por el profesor y los estudiantes y los momentos más destacados en los que puede apreciarse cómo sucede:

- la gestión del trabajo en clases;
- el tratamiento del contenido matemático a enseñar; y
- la producción de conocimientos en el aula.

8.5 Diseño y Análisis *A Priori* de las Actividades

8.5.1 Situación didáctica Nº 1.

Construcción geométrica de la Parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta.

- Enunciado:

Dada una recta *d* un punto cualquiera F que no pertenezca a *d*; encontrar el conjunto de puntos equidistantes a la recta *d* y al punto exterior a ella F.

- Variables micro-didácticas:

  - ✓ Variación de posición del punto Q sobre la recta directriz *d*.
  - ✓ Variaciones de la distancia del punto F llamado foco a la recta directriz *d*.

- Propósitos de la situación dentro de la secuencia:

A. Propósito matemático:

Formar el concepto de Parábola partiendo de la situación problema que se presenta en el enunciado.

B. Propósito didáctico:

- ✓ Generalizar acerca de cómo a cada posición del punto Q sobre la recta *d* se aporta un punto, con la propiedad buscada con la mediación del ambiente Cabri Géomètre II Plus.
- ✓ Visualizar y conjeturar sobre el comportamiento del punto P, al mover el punto Q sobre la recta *d*, con la mediación del ambiente Cabri Géomètre II Plus.

- Saberes que moviliza la situación didáctica Nº 1:

Los conceptos preliminares empleados en esta primera situación serán:

- ✓ Mediatriz de un Segmento: definida en términos de lugar geométrico como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento.
- ✓ Distancia de un Punto a una Recta, entendida como la longitud —más corta— del segmento de recta comprendido entre un punto y el pie de la perpendicular trazada desde él a una recta.

- Momentos de la realización didáctica:

Se asigna una sesión de clase de dos horas para resolver la situación Nº 1, en la cual el estudiante debe leer el contenido y realizar paso a paso las construcciones que se presenta. Con otro compañero de grupo cada estudiante deberá realizar las respectivas discusiones sobre las estrategias adoptadas para responder las preguntas. No se puede consultar al profesor sobre cómo responder a tales cuestiones; la intervención del docente sólo es de manera indirecta, durante la puesta en acto de la situación, al final él va a intervenir en la socialización del conocimiento de manera formal.

Esta situación pasa por tres tipos de situación a-didáctica: Acción, Formulación, Validación y una situación didáctica de Institucionalización; como se expone a continuación.

Primera parte, se brinda al estudiante una serie de construcciones que debe realizar en Cabri Géomètre II Plus. Este proceso aunque es la base para resolver el problema no es suficiente, el estudiante partiendo de la construcción realizada, debe seguir interactuando por sí sólo con el "medio" y con el dominio de los conceptos anteriores para que le permitan resolver las siguientes preguntas:

A. Si P es un punto que equidista tanto de la recta *d* como del punto F ¿estará en la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta.

El estudiante realizará varias acciones que le permitan obtener una estrategia válida para resolver esta pregunta, una de ellas sería aplicar la herramienta "distancia longitud" para medir las respectivas distancias entre: el punto P y el punto Q sobre la recta *d* y entre el punto P y el punto F y poder así comprobar que conservan la misma distancia, pero esto no resuelve por completo el interrogante, ¿estará el punto P en la mediatriz del segmento QF?

En este momento los estudiantes empiezan a formular y a darle paso a sus estrategias; si ya comprobó que P es un punto equidistante de la recta *d* y del punto F, concluirá que P en realidad si está en la mediatriz del segmento QF, porque asocia seguramente el concepto de equidistancia con el de mediatriz —si P es un punto equidistante entonces es uno de los puntos de la recta mediatriz—.

B. ¿Cómo podrías determinar otros puntos equidistantes de la recta *d* y del punto F?

Algunas de las dificultades previstas con los estudiantes al resolver esta pregunta es que sin la interacción con el medio podrían optar por retomar la construcción ya elaborada y en ella tomar otros puntos $Q_{1,}$ $Q_{2,}$ sobre la misma recta *d*, y seguir así con los pasos dados en la situación, desde el numeral 5 hasta el 8, para de esta forma obtener los respectivos puntos $P_{1,}$ $P_{2,}$ (Ver Figura 5).

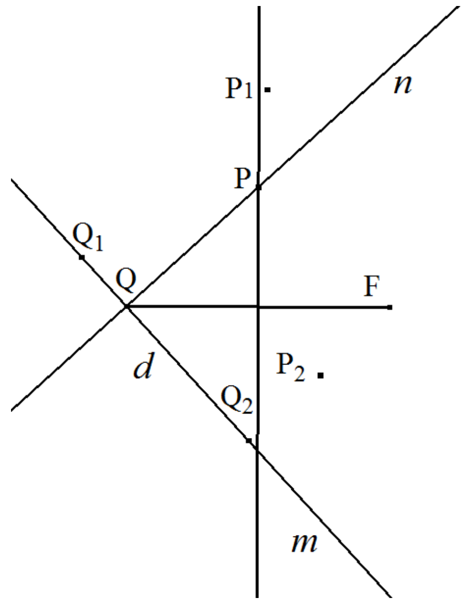

Figura 5. Puntos $P_{1,}$ $P_{2,}$ obtenidos a partir de puntos arbitrarios $Q_{1,}$ $Q_{2.}$

Con esta construcción el estudiante debe evidenciar que al escoger un punto Q_1, en la recta d, este tendrá otra mediatriz y en consecuencia otro punto que se intercepta con la perpendicular *n*, el punto P_1, que es un punto que equidista de la recta *d* y del punto F.

Los estudiantes que se van por lo planteado en la situación, crearán un punto P_1, fuera de la recta y medirán sus respectivas distancias con los puntos Q y F y por medio del arrastre lo moverán hasta sobreponerlo en la recta mediatriz *m*.

En ese momento se darían cuenta que todo punto que esté sobre dicha recta mediatriz *m*, cumple con la propiedad de equidistar de la recta *d* y del punto F, siempre y cuando el punto Q sea fijo. Esta construcción solo promueve la idea de puntos equidistantes, mediatriz de un segmento; posiblemente más adelante se promoverá en el estudiante procesos de visualización y formulación que le permitan darse cuenta de que el ambiente Cabri Géomètre II Plus, permite mover el punto Q sobre la recta *d*, y así observar que el punto P, se mueve generando una trayectoria de puntos equidistantes, utilizando la herramienta “Lugar”. (Ver Figura 6).

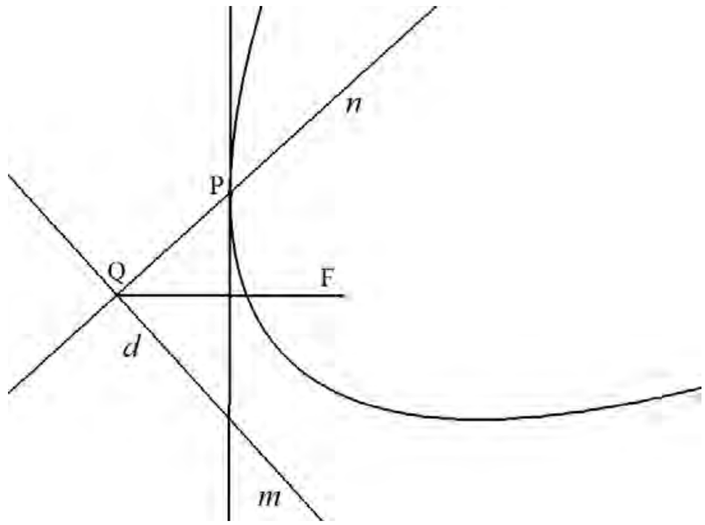

Figura 6. Trayectoria descrita por el punto P, cuando el punto Q se mueve sobre la recta *d.*

C. Si la recta *d* y el punto F, se mantienen fijos —no se pueden arrastrar—, ¿A cada posición del punto Q sobre la recta *d*, le corresponde un punto P equidistante del punto F, y la recta *d*?

Los estudiantes que ya hubieran logrado familiarizarse con el ambiente y hayan contestado de manera correcta la pregunta anterior, formularán una respuesta afirmativa ya que al mover el punto Q sobre la recta *d* se puede observar que junto con el punto se mueve la perpendicular a la recta *d* que pasa por el punto Q. De igual manera el segmento QF, se mueve y con él su propia mediatriz *m*. Así, cabe suponer que resulte evidente darse cuenta que la intersección P de la perpendicular *n* y la mediatriz *m* es variable y que el punto P genera una trayectoria de puntos que son los buscados.

D. Representa la trayectoria que genera el punto P, para ello con la herramienta “Traza” del submenú de textos y símbolos, da un clic sobre el punto P, y después del punto Q, mueve con clic sostenido el punto Q sobre la recta *d*. Describe con tus palabras las características que tienen los puntos de la trayectoria del punto P.

Los estudiantes observarán que al usar la herramienta traza sobre el punto P, esta deja una huella al mover el punto Q. Ésta acción les permitirá a los estudiantes visualizar y concluir que tal huella describe una curva.

Segunda parte: se fundamenta en tres acciones: experimentar, concluir y validar. Después del proceso que los estudiantes realizaron para resolver el problema inicial, la situación didáctica les ofrece los elementos constitutivos de la Parábola que son foco y directriz. Hasta este punto los estudiantes deberían estar en capacidad de definir con sus propias palabras qué es la Parábola desde el punto de vista de lugar geométrico

E. Con tus propias palabras expresa lo que es Parábola.

Algunos estudiantes podrían expresarla como la trayectoria que describe el punto P, otros de seguro la verán como la curva que representa esa trayectoria. Los estudiantes que van más a fondo quizá concluyan diciendo, es el conjunto de puntos equidistantes de una recta *d* llamada Directriz y del punto fijo F, exterior a ella, llamado Foco.

Una vez construido el concepto parábola, conviene someterlo a pruebas de reconocimiento que pueden contribuir al afianzamiento de éste por parte de los estudiantes. Para ello se introducirán algunas variaciones a las condiciones iníciales sobre la representación.

Una primera variación es la que tiene que ver con la consideración de la distancia del foco a la directriz. Para este fin se han formulado las siguientes preguntas que buscan la experimentación y validación de parte de los estudiantes, apoyados en la utilización de la herramienta “modo arrastre”.

F. Si el punto F se acerca o se aleja de la recta *d*. ¿Qué pasa con la parábola?

Para resolver esta pregunta los estudiantes deben realizar acciones de interacción con el medio: tomar, arrastrar, experimentar; para luego darle paso a sus conclusiones y validación. Si se arrastra el foco hacia la directriz la Parábola se cierra (Ver Figura 7) y en contraposición cuando el foco se aleja de la directriz la curva se abre (Ver Figura 8).

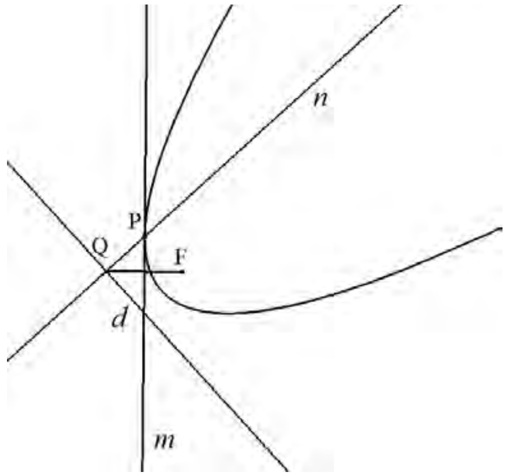

Figura 7. Foco cercano a la directriz.

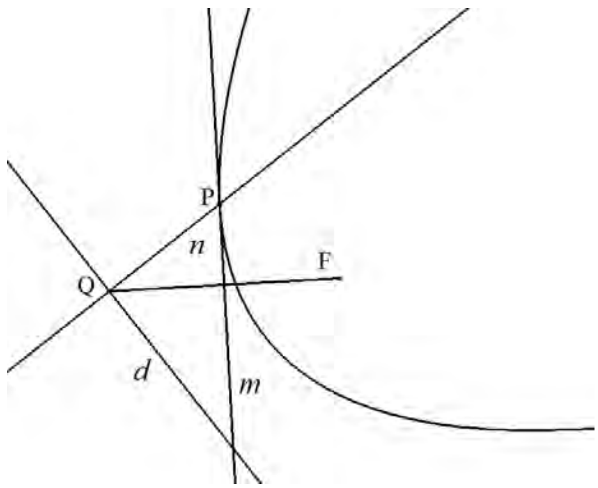

Figura 8. Foco alejado de la directriz.

G. Si se mueve el punto F hasta sobreponerlo en la recta *d*. ¿Qué pasa con la parábola? ¿A qué se debe este comportamiento?

Los estudiantes se podrán dar cuenta que a medida que mueven F y lo acercan a la directriz *d*, se forma un triángulo FPQ donde FP y QP son iguales (Ver Figura 9), y que al superponer F sobre la directriz *d*, la mediatriz *m* se hace paralela con la perpendicular *n*, siendo imposible la identificación por parte de la construcción, del punto P de intersección entre la mediatriz *m* y la perpendicular *n*. Esta última es la causa de la desaparición de la parábola. (Ver Figura 10).

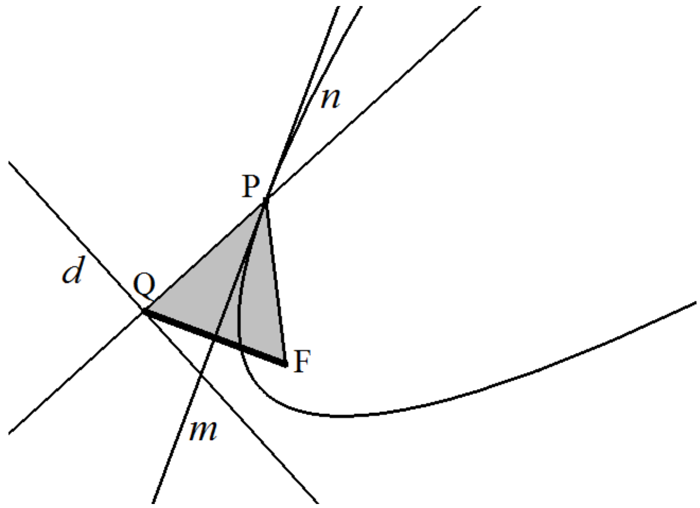

Figura 9. Triángulo FPQ, formado a medida que se acerca el punto F sobre la directriz d.

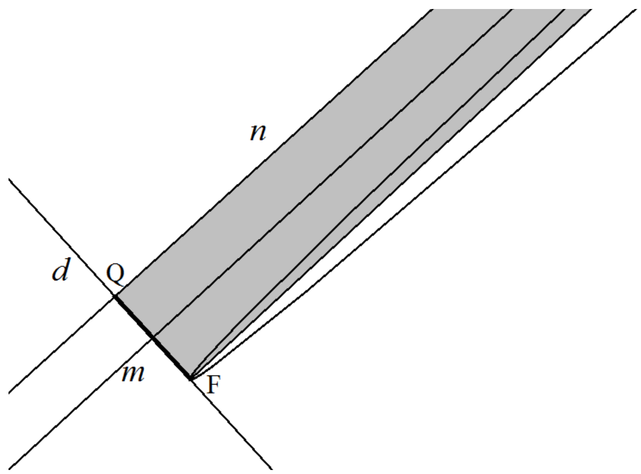

Figura 10. Situación extrema de indeterminación donde la propiedad de la parábola es indecidible.

H. Si el punto F se coloca del otro lado de la recta *d*. ¿Qué pasa con la parábola?

Cuando el estudiante cambie la posición del punto F al otro lado de la recta *d*, es natural que se percate de que el sentido de la Parábola varía, sin alterar sus propiedades intrínsecas (Ver Figura 11).

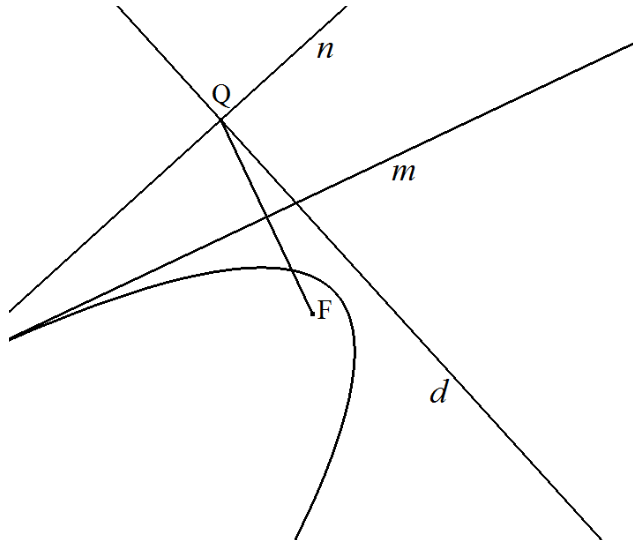

Figura 11. Parábola cambiada de sentido.

I. ¿Cuál es el punto de la Parábola cuya distancia a la directriz es la menor de todas?

Para abordar esta pregunta los estudiantes seguramente trazarán una recta perpendicular a la recta *d* que pase por el punto F. Al punto de intersección entre la curva y la recta perpendicular lo nombraran V; a partir de allí se pretende que se realicen mediciones de distancias y que, inclusive, se hagan comparaciones con las distancias tomando como referencia al punto P y a otro punto de la Parábola (Ver Figura 12).

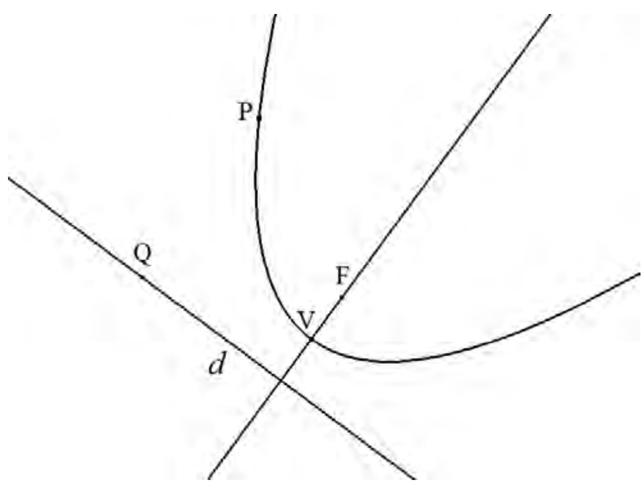

Figura 12. Comparación de las distancias de P y V con respeto a la recta directriz d.

J. Mide la distancia entre el punto V y el punto F, con la herramienta "Distancia o

longitud" del submenú de medidas, de la misma manera mide la distancia entre el punto F y el punto de intersección I, compare dichas distancias y establezca una conclusión.

Para finalizar con la segunda parte, se le hace saber al estudiante que:

- ✓ El punto que encontró se llama Vértice de la Parábola.
- ✓ La distancia del vértice al foco (que es la igual a la del vértice a la directriz) se llama distancia focal de la Parábola.
- ✓ La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco se llama Eje Focal de la Parábola.

- Validación:

Al término de esta situación se asigna un intervalo de tiempo a cada grupo de trabajo para que exponga las diferentes estrategias adoptadas en la resolución de cada uno de los interrogantes planteados, para ello se tomarán las evidencias en videograbaciones que se encontrarán al final del trabajo, en el anexo Nº 8.

- Institucionalización:

Mediante la socialización se expondrá en primer lugar el concepto de Parábola desde el enfoque de lugar geométrico, como el conjunto de todos los puntos equidistantes de una recta dada d llamada directriz y un punto fijo F llamado foco que está fuera de dicha recta. A continuación se nombrarán cada uno de los elementos notables de la parábola. (Ver figura 13).

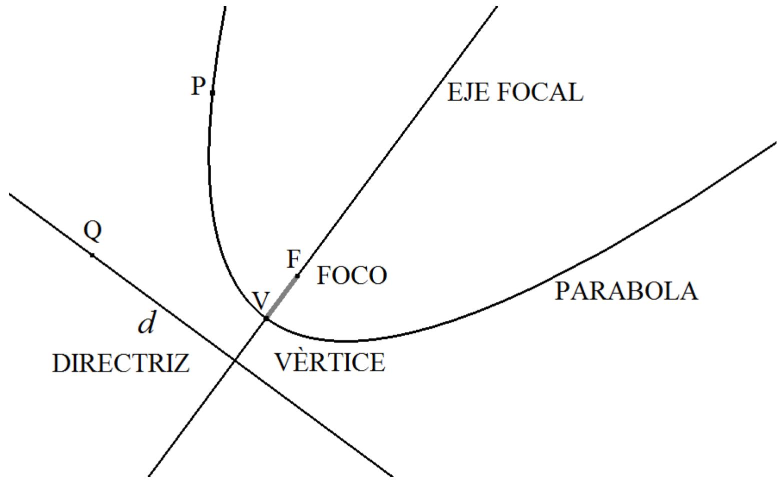

Figura 13. Elementos notables de la parábola

- ✓ Foco: es el punto fijo F
- ✓ Directriz: es la recta fija *d*
- ✓ Eje Focal de la Parábola: es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco.
- ✓ Vértice de la Parábola: punto de intersección de la Parábola con su eje.
- ✓ Distancia Focal de la Parábola: es la distancia del vértice al foco.

8.5.2 Situación didáctica Nº 2.

Construcción de una Parábola como una configuración geométrica, analizando después las partes que la componen.

- Enunciado:

Dada una parábola, encuentra el foco y la directriz.

- Variables micro-didácticas:

  - ✓ Ubicación exacta del punto que representa el foco en la parábola dada.
  - ✓ Identificación de la recta directriz d.

- Propósitos de la situación dentro de la secuencia.

A. Propósito matemático:

  - ✓ Determinar el foco y la directriz de la parábola dada.

B. Propósito didáctico:

  - ✓ Argumentar por medio de la propiedad foco-punto-directriz y con la mediación del ambiente Cabri Géomètre II Plus, que el punto F es el foco de la parábola y la recta *d* es la directriz.

- Saberes que moviliza la situación didáctica Nº 2:

Los conceptos preliminares empleados en esta segunda situación serán:

Parábola como lugar geométrico, mediatriz, circunferencia, propiedad foco-punto-directriz.

- Momentos de la realización didáctica:

Al igual que en la primera situación diseñada se tendrá una sesión de clase de dos horas para resolver la situación Nº. 2; donde los estudiantes leerán el contenido, realizando paso a paso las construcciones que se les proporciona. Con su compañero de grupo discutirán las respectivas estrategias que adopten para solucionar el cuestionario. No podrán hacer consultas al profesor encargado, sobre cómo responder; la intervención del docente solo es de manera indirecta, durante la puesta en acto de la situación, al final él va a intervenir en la socialización del conocimiento de manera formal.

Esta situación pasa por tres tipos de situación a-didáctica: Acción, Formulación, Validación y una situación didáctica de Institucionalización; como se expone a continuación.

Primera parte: se presenta al estudiante una serie de construcciones que debe realizar en Cabri. Este proceso aunque es necesario para resolver el problema no es suficiente, el estudiante partiendo de la construcción realizada debe seguir interactuando por sí sólo con el medio y con el dominio de los conceptos anteriores para que le permitan resolver las siguientes preguntas:

A. Empieza a arrastrar lo que se deja mover, observa qué permanece invariante y que no; con la construcción realizada, cambia de posición la recta *l*, con el mouse mueve y llévala a una posición similar a la figura presentada ¿Qué sucede con la construcción si volvemos y arrastramos el punto Q, sobre la recta *l*?

El estudiante al interactuar con Cabri, por medio del arrastre se dará cuenta que los puntos V, R y las rectas *t* y *a* no se mueven, pero si es posible mover la posición de la recta *l* y el punto Q. Una vez se disponga la configuración como se requiere, se busca que el estudiante mueva el punto Q y logre visualizar que la configuración se conserva (Ver Figura 14).

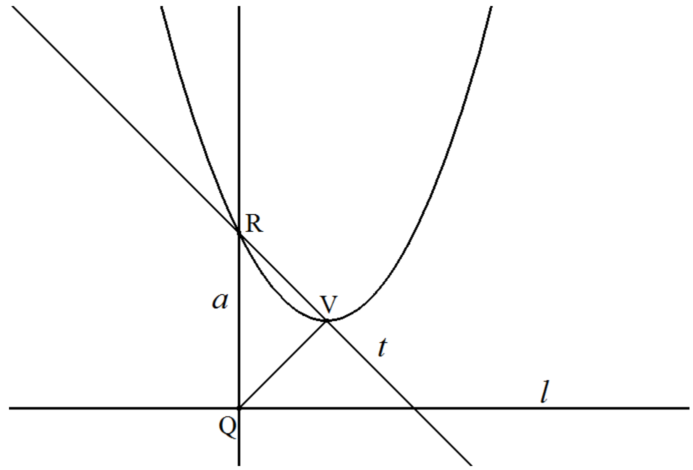

Figura 14. Imagen de la configuración presentada en Cabri para desarrollar el literal A de la situación didáctica Nº 2.

Segunda parte: teniendo en cuenta los elementos realizados en la primera parte, el estudiante debe realizar otra serie de pasos que le ayudaran a determinar el foco y la directriz de la parábola.

A. ¿Qué puedes suponer del punto F con respecto al punto V?

El estudiante podrá suponer varias cosas entre ellas está, que el punto F se puede mover, acercándolo o alejándolo del punto V, haciendo achicar o agrandar la circunferencia; otros por su parte posiblemente no tomarán en cuenta la construcción y la definición de parábola como lugar geométrico, dando por hecho que F representa el foco de la parábola y que el punto V es el vértice , por el contrario los estudiantes que sí tienen en cuenta estos dos aspectos, podrían conjeturar que el punto F puede ser el foco, pero todavía no se ha encontrado su ubicación exacta, ya que por construcción este punto es movible, ¿acaso el foco no es un punto fijo?

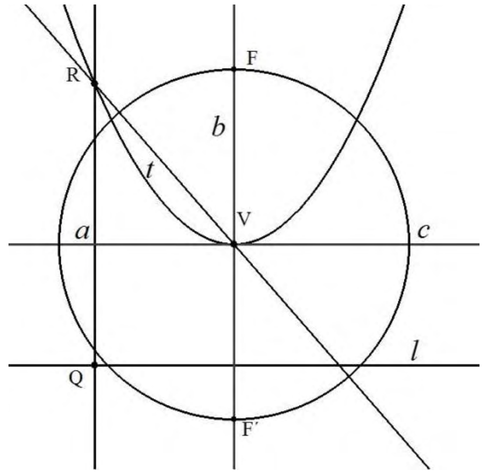

Figura 15. El punto F posible foco de la parábola

B. ¿Si dibujas también una perpendicular que llamaremos *d* a la recta *b* que pasa por el punto F’, en qué vendría a convertirse esta recta con respecto a la parábola? Explica tu respuesta.

Seguramente algunos de los estudiantes concluirán que la recta *d* es la recta directriz, tal vez asociándola a una notación anterior, o solo porque se dejan llevar por su percepción visual; se espera que el estudiante realice algunas mediciones para explicar su respuesta, entre ellas puede estar que se mida la distancia del punto F’ al punto V y la distancia del punto F al punto V, logrando visualizar una relación de equidistancia entre dichos puntos, pero lo anterior no asegura que la recta *d* sea la directriz. (Ver Figura 16).

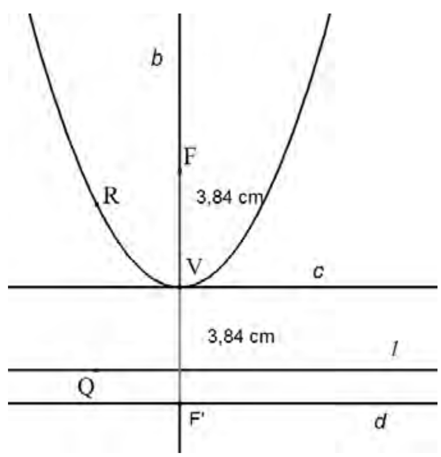

Figura 16. Recta *d* posible directriz de la parábola

C. Las rectas *a* y *d*, se interceptan en un punto el cual llamaremos U. ¿Qué figura forma los puntos U, F y R?

Resulta evidente que los estudiantes respondan, la figura que forman los puntos UFR es un triángulo, unos lo harán por percepción y otros porque utilizaron las herramientas tales como “segmento”, “polígono” o “triángulo” (Ver Figura 17).

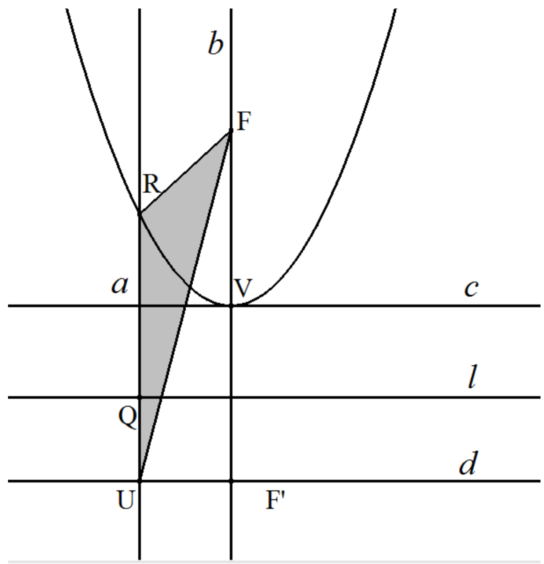

Figura 17. Construcción del triángulo UFR

Al brindarle al estudiante la definición de parábola como lugar geométrico, se espera que este pueda contestar de manera clara, la pregunta, ¿Qué clase de triángulo debería ser UFR para que cumpla con la definición de parábola como lugar geométrico?

En este punto de la situación se evidenciará que tanto el estudiante es capaz de conjeturar ya que la construcción no le será suficiente para responder ese cuestionamiento, empezará tal vez por realizar mediciones a los tres lados del triángulo y a mover el punto F a lo largo de la recta *b*, con esto se dará cuenta que estas medidas cambian, pero cómo asociar estas acciones con la definición dada; si la distancia de un punto de la parábola hasta un punto de la directriz debe ser igual a la distancia del foco hasta el punto de la parábola, se necesitará de dos distancias iguales, propiedad que se cumple un triángulo isósceles.

D. ¿Cómo encontrarías el foco y la directriz de la parábola?

Para encontrar el foco y la directriz de la parábola, muy seguramente el estudiante seguirá moviendo el punto F, tratando que las distancias entre los segmentos UF y FR coincidan, en el momento en que estas tengan una misma medida, se ha hallado el foco y la directriz de la parábola.

E. ¿Presentar un argumento válido para demostrar que son el foco y la directriz de esta parábola?

Es posible que con solo arrastrar el punto F, no se encuentre que las medidas coincidan, para ello la situación ofrece otra serie de pasos que el estudiante debe realizar como ocultar la circunferencia, dibujar el segmento MR y trazar una recta perpendicular a MR que pase por el punto M, esta perpendicular intercepta a la recta *a* en un punto, el cual se constituirá como un punto sobre la directriz y a la recta *b* en un punto donde debería estar el Foco, como se quiere que el punto F sea el foco, el estudiante debe arrastrar este punto hasta hacerlo coincidir con el punto de intersección de la recta *b* y la perpendicular que pasa por el punto M, de esta manera se tendrá que el punto F representa el foco de la parábola dada y la recta *d* es la recta directriz, como lo demuestran por medio de la medición de los segmentos UR y FR (Ver Figura 18).

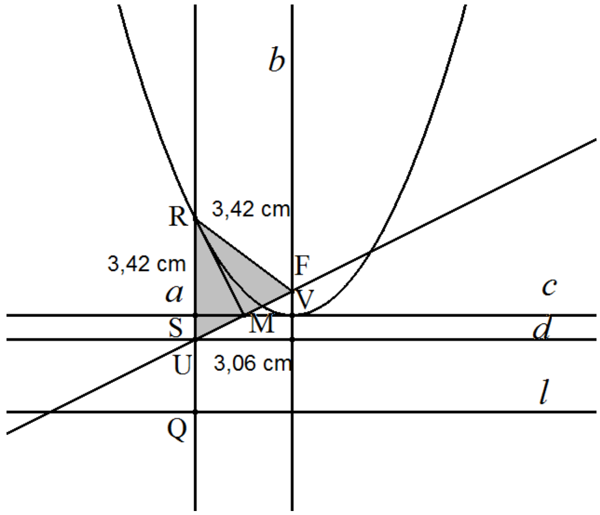

Figura 18. Determinación del punto F como el foco y de la recta d como directriz de la parábola

- Validación:

Después de realizada la actividad, se pide a los estudiantes expongan sus ideas a través de una socialización, para ello se tomarán las evidencias en videograbaciones que se encontrarán al final del trabajo, en el anexo Nº 8.

- Institucionalización:

✓ FOCO: punto F (punto de intersección entre la recta perpendicular al segmento MR que pasa por M y la recta b).

✓ DIRECTRIZ: recta d (perpendicular a la recta b que pasa por el punto F’).

✓ EJE FOCAL DE LA PARÁBOLA: recta b (recta perpendicular a l que pasa por V).

Si se toma cualquier otro punto R’ sobre la parábola, se podrá verificar que cumple la definición de parábola como lugar geométrico (Ver Figura 19)

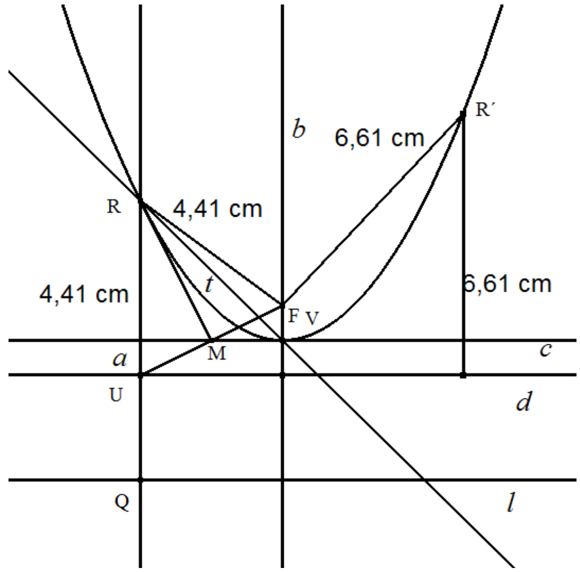

Figura 19. Verificación de la definición de parábola como lugar geométrico con un punto arbitrario R´.

8.5.3 Situación didáctica N° 3.

Construcción geométrica de la Parábola con base en la propiedad de la circunferencia.

- Enunciado:

Dados una recta *d*, un punto A exterior a ella cualesquiera, y un punto B que pertenezca a la recta *d*, encontrar una circunferencia C, que pase por A y pase por B, simultáneamente, pero B debe ser un punto de tangencia a la recta *d*, es decir, la recta *d* debe ser tangente a la circunferencia C en el punto B. Luego de que haya encontrado la circunferencia C que cumple con dichas condiciones, entonces encuentre el lugar geométrico generado por el centro de la circunferencia C, a dicho centro, denomínelo O.

- Variable micro–didáctica:

  - ✓ Tipo de configuración geométrica que presenta la construcción.
  - ✓ Propósitos de la situación dentro de la secuencia.

A. Propósito matemático:

Formar el concepto de Parábola partiendo de la situación problema que se plantea en el enunciado de la misma.

B. Propósito didáctico:

- ✓ Generalizar acerca de cómo con dos puntos y una recta se construye una circunferencia que pase por ellos, siendo tangente a uno de los puntos.
- ✓ Visualizar y conjeturar sobre el comportamiento del lugar geométrico que genera el punto O, al mover el punto B sobre la recta d, con la mediación del AGD Cabri Géomètre II Plus.

- Saberes que moviliza la situación didáctica N° 3:

Los conceptos preliminares empleados en esta tercera situación son: la circunferencia, recta tangente y una de las propiedades de las tangentes bajo las siguientes definiciones.

- ✓ Circunferencia: es el lugar de puntos del plano que están a igual distancia de otro llamado centro. La distancia común es el radio de la circunferencia.
- ✓ Recta Tangente: una recta es tangente si tiene en común uno y sólo un punto de la circunferencia. Dicho punto se conoce como punto de tangencia.
- ✓ Propiedad de la Tangente: toda recta perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia, es una recta tangente a la circunferencia.

- Momentos de la realización didáctica:

Se tendrá una sesión de clase de una hora y treinta minutos, para resolver la situación No.3; el estudiante debe leer minuciosamente el enunciado del problema y luego empezar a interactuar con el medio para resolverlo, después con su compañero de grupo realizará las respectivas discusiones sobre las estrategias que adoptarán para responder las preguntas, no podrán hacer consultas al profesor encargado sobre cómo responder; la intervención del docente solo es de manera indirecta, durante la puesta en acto de la situación, al final él va a intervenir en la socialización del conocimiento de manera formal.

Esta situación que se constituye básicamente como un problema de tangencia, pasa por tres tipos de situación a-didáctica: Acción, Formulación, Validación y una situación didáctica de Institucionalización; como se expone a continuación.

Al igual que en las situaciones anteriores a los estudiantes se le proporciona algunos puntos de partida, que a criterio de los investigadores, les podrían ser de utilidad para empezar el abordaje del problema. Después de esto, la actividad propuesta busca promover en los estudiantes procesos de exploración y formulación de conjeturas, a través de preguntas planteadas como se indica a continuación.

A. Encuentre el centro O de la circunferencia C y describa paso a paso cómo determinó el punto exacto donde está ubicado dicho centro. Tenga en cuenta las características que le pide el enunciado para construir la circunferencia C.

El estudiante debe empezar por establecer la ubicación del centro O y para ello debe trazar una recta perpendicular *n* la recta *d* que pase por B y conjeturar que al ser *n* recta perpendicular a la recta *d*, ésta debe contener al radio y en su defecto al centro O de la circunferencia.

Una vez encontrado el lugar, el estudiante debe encontrar el punto exacto donde se encuentra situado el centro. Para ello tendrá que recurrir a la herramienta “mediatriz” de los puntos A y B y nombrar a dicha recta *m*, luego señalará el punto de intersección entre la recta perpendicular *n* y la recta mediatriz *m*; tal punto es el centro de la circunferencia y deberá nombrarlo O. (Ver figura 20)

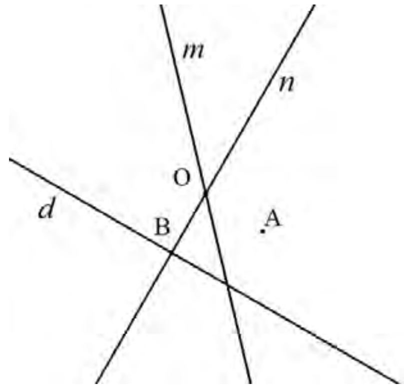

Figura 20. Construcción para determinar el centro O de la circunferencia C.

B. Indique de cuáles puntos equidista el centro O de la circunferencia C.

Se pretende que el estudiante logre conjeturar a partir de la construcción y a través de la definición que tiene de circunferencia, que al ser O el centro, éste será un punto que equidista de la recta tangente *d* en el punto B y del punto A. Por otra parte, se da por supuesto que otros estudiantes, con el fin de comprobar tal equidistancia, seguramente recurrirán a la medición de distancias (Ver Figura 21).

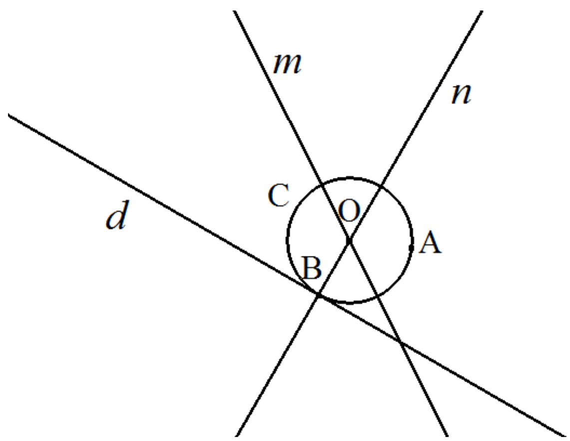

Figura 21. Circunferencia C con centro en el punto O.

C. Si la recta *d* es tangente a la circunferencia c en el punto de tangencia B como se requería en el enunciado, ¿qué propiedad cumple con relación al radio OB? Verifique tal propiedad.

Los estudiantes que hicieran una buena lectura de la situación podrían percatarse de cómo la respuesta al interrogante se encuentra inmersa en la propiedad de la tangente—

enunciada anteriormente—.Es solo cuestión de una buena interpretación: si la recta *d* es tangente a la circunferencia C en el punto de tangencia B, entonces dicha recta *d* es perpendicular al radio OB.

Para verificar dicha propiedad se puede recurrir a ciertas herramientas del ambiente Cabri Géomètre II Plus. Entre ellas es viable la utilización de la herramienta "¿Perpendicular?". Con ella basta dar clic en la recta *d* y luego en el segmento OB para determinar si los dos objetos geométricos son o no en realidad perpendiculares. Otros tal vez se decidan por la herramienta "Medida de ángulo", para determinar si la recta d y el segmento OB forman un ángulo de recto (Ver Figura 22).

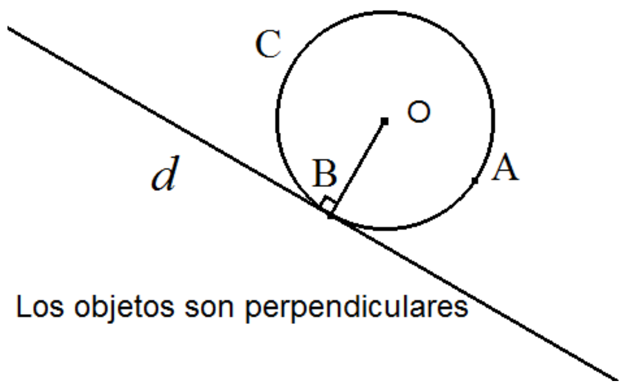

Figura 22. Verificación de la propiedad de perpendicularidad entre la recta tangente *d* y el radio OB.

D. Encuentre el lugar geométrico generado por el centro O de la circunferencia c. ¿Qué nombre recibe la curva generada? Describa algunas características de esta curva.

Encontrar el lugar geométrico generado por el centro O de la circunferencia c con ayuda de la herramienta "Lugar" se asume como una acción de nivel elemental para los estudiantes (Ver Figura 23).

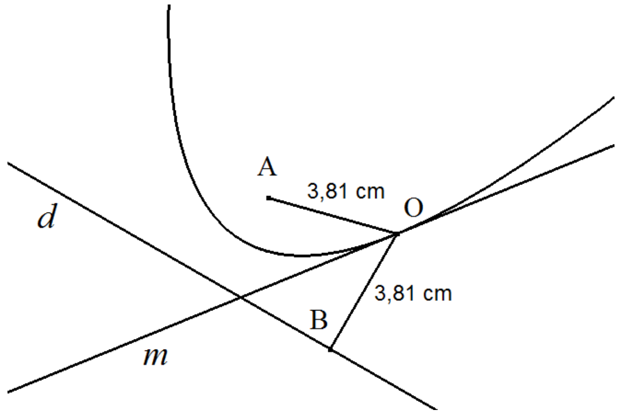

Figura 23. Lugar geométrico descrito por el centro O de la circunferencia c.

Al ejecutar dicha acción la curva que se genera es una Parábola. Para describir algunas características los estudiantes recurrirán tal vez al arrastre del punto B sobre la recta *d* para evidenciar que el punto O va adquiriendo diferentes posiciones que se constituyen en un conjunto de puntos que equidistan siempre del punto A y de la recta fija *d*. Además según la construcción se puede decir que la recta *m* es tangente a la Parábola en el punto de tangencia O.

E. Nombre y describa los elementos de ese lugar geométrico que usted ya conoce (directriz, foco, vértice, eje focal). Si no están en la construcción que usted realizo, encuéntrelos.

Se asume que la noción de Parábola adquirida por los estudiantes hasta este punto junto a la observación de su construcción, podría facilitarles, en buena parte, la determinación de los respectivos elementos de la curva en cuestión. Estos elementos son: la recta directriz *d*; el punto A, foco; el eje focal *e;* y el vértice V. (Ver Figura 24).

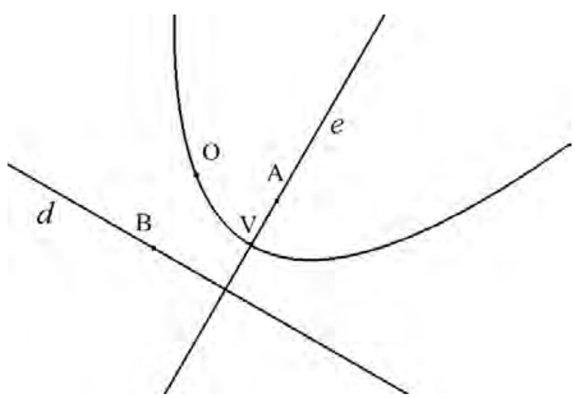

Figura 24. Elementos de la Parábola construida.

F. Describa que pasa con la circunferencia cuando se arrastra el punto B ¿A qué cree usted que se deba esto?

Si el punto B es arrastrado hasta hacer coincidir el punto O con el vértice V de la parábola, la circunferencia toma un radio mínimo (Ver Figura 25). Ahora, si la posición de B se continúa moviendo, la longitud del radio puede aumentar o disminuir dependiendo de la dirección que tome el punto B. Esto se debe a que el segmento OB es un radio de la circunferencia C.

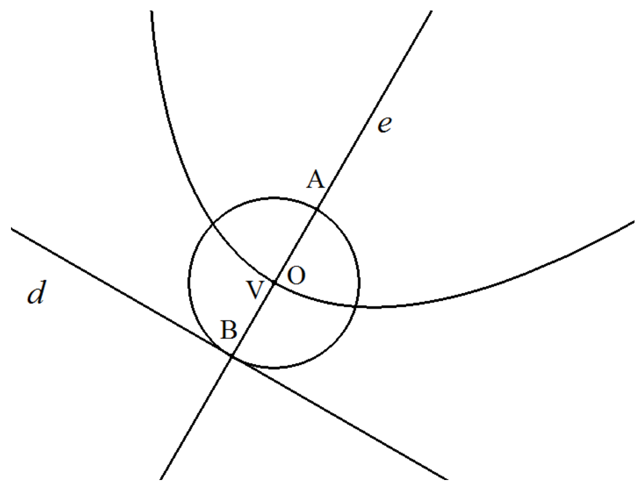

Figura 25. Radio mínimo obtenido al mover el punto B sobre la recta *d.*

G. ¿Qué pasa con la Parábola y la circunferencia cuando se arrastra el punto A ¿Qué puede concluir acerca de esto?

Se puede anticipar, de una manera intuitiva, que al arrastrar el punto A intentando hacer coincidir su posición con la del punto B, sucede que la circunferencia C se hace más pequeña y la Parábola se cierra. (Ver Figura 26). Pero si el punto A se acerca a cualquier otro punto de la recta, hace que la circunferencia C se agrande aunque la Parábola tienda a cerrarse.

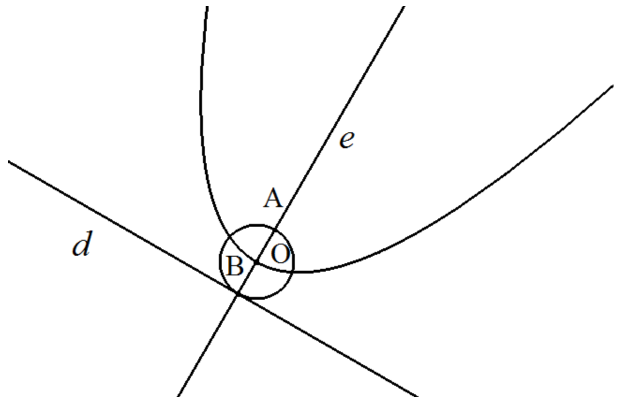

Figura 26. Relación entre el tamaño de la circunferencia y la abertura de la parábola: la circunferencia se achica y la parábola se cierra.

En contraste, cuando el punto A se aleja de la recta d, la Parábola se abre y la circunferencia C se agranda (Ver Figura 27).

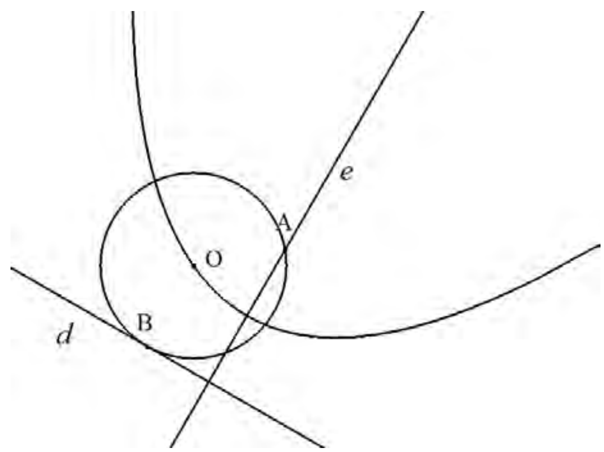

Figura 27. Relación entre el tamaño de la circunferencia y la abertura de la parábola: la circunferencia se agranda y la parábola se abre.

- Validación:

Al término de esta situación se asigna un intervalo de tiempo a cada grupo de trabajo para que exponga las diferentes estrategias adoptadas en la resolución de cada uno de los interrogantes planteados, para ello se tomarán las evidencias en videograbaciones que se encontrarán al final del trabajo, en el anexo Nº 8.

- Institucionalización:

- ✓ El punto A se constituye con el Foco de la parábola.
- ✓ El punto B es el punto móvil sobre la recta directriz *d*.
- ✓ La circunferencia c es la circunferencia buscada que pasa por los puntos A y B.
- ✓ La recta *d* se constituye como la recta tangente a la circunferencia C en el punto B.

Por *Geometría Euclidiana* se sabe que el radio de la circunferencia OB es perpendicular a la recta tangente *d* en el punto B, la construcción de una recta perpendicular a la directriz que pase por el punto B, llamada *n*, permite considerar que el centro O de la circunferencia se encuentra en dicha recta, para determinar la posición exacta del centro O, se recurre a la mediatriz de los puntos A y B.

El punto O es el centro de la circunferencia, demarcado por el punto de intersección entre la recta perpendicular *n* y la recta mediatriz *m*.

El lugar geométrico generado por el centro O de la circunferencia es una parábola, lugar geométrico que equidista siempre del punto fijo A (Foco) y de la recta fija *d* (Directriz).

8.5.4 Situación didáctica N° 4.

Construcción de una Parábola como lugar geométrico en Cabri Géomètre II Plus.

- Enunciado:

Dados una recta *d*, dos puntos M y F, donde M pertenece a la recta, y el otro es exterior a ella, encontrar el lugar geométrico descrito por el punto de intersección P entre la mediatriz del segmento MF y la recta perpendicular a *d* por M. Identifique de qué lugar geométrico se trata.

- Variables micro–didácticas:

✓ Variación de posición del punto M, para determinar la trayectoria del punto P.

✓ Verificación de la propiedad foco-punto-directriz.

- Propósitos de la situación dentro de la secuencia:

A. Propósito matemático:

✓ Afianzar y concluir la noción de parábola desde su enfoque de lugar geométrico.

B. Propósito didáctico:

✓ Conducir al reconocimiento del carácter dinámico y de dependencia lógica de los puntos del lugar geométrico respecto del foco y de los puntos sobre la directriz.

- Saberes que moviliza la situación didáctica N° 4

✓ La Mediatriz de un Segmento: como lugar geométrico se define como el conjunto de puntos que equidistan de los extremos de un segmento.

- ✓ La Distancia de un Punto a una Recta: es la longitud (más corta) del segmento de recta comprendido entre un punto y el pie de la perpendicular trazada desde él a una recta.

- ✓ Puntos Colineales, los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos.
- ✓ Definición de Parábola como Lugar Geométrico: es el conjunto de puntos que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto fijo llamado foco.

- Momentos de la realización didáctica:

La situación didáctica que se presenta en este apartado está diseñada para que el estudiante trabaje de manera individual o grupal. Es posible que los estudiantes, por los conocimientos adquiridos de las actividades previas, demuestren mayor capacidad en la realización de las actividades encomendadas. Asimismo, se espera de ellos una mayor objetividad en las discusiones, debido a que hasta el momento se ha buscado focalizar su producción intelectual haciendo énfasis en la conceptualización de un lugar geométrico específico.

Se dispondrá del mismo tiempo que en las anteriores actividades, esperando que éste sea suficiente para que los estudiantes logren alcanzar la meta de aprendizaje consistente en explicar utilizando sus métodos el carácter del lugar geométrico buscado.

Esta situación pasa por tres tipos de situación a-didáctica: Acción, Formulación, Validación y una situación didáctica de Institucionalización; como se expone a continuación.

La primera etapa es de construcción e incluye una serie de pasos que los estudiantes deben realizar en Cabri Géomètre II Plus. En esta parte cada estudiante interactúa con el “medio” material que representa dicho ambiente para conseguir el aprendizaje esperado. Luego, mediante el trabajo colaborativo en parejas, se buscará la manera de seguir avanzando en los numerales provistos. La expectativa final es que los estudiantes por su cuenta logren visualizar algunos fenómenos que orienten su accionar.

La segunda etapa contiene preguntas pensadas para intentar afianzar en los estudiantes el conocimiento conseguido hasta el momento, como se presenta a continuación.

A. Mueve repetidamente el punto M y examina detenidamente la trayectoria que describe el punto P, también ten en cuenta lo que pasa con la recta mediatriz de los puntos F y M. ¿Qué logras observar?

En primera instancia la herramienta "traza", permitirá al estudiante visualizar que la huella que deja el punto P al mover el punto M sobre la recta directriz describe una parábola, además se podrá observar que la recta mediatriz de los puntos F y M es quien a medida que se mueve el punto M aporta un punto diferente de intersección con la recta perpendicular que pasa por ese el punto, dicho conjunto de puntos constituyen el lugar geométrico ya mencionado. En segunda instancia el medir la distancias de los segmentos FP y MP, garantizan la propiedad foco-directriz, ratificando así lo concluido (Ver Figura 28).

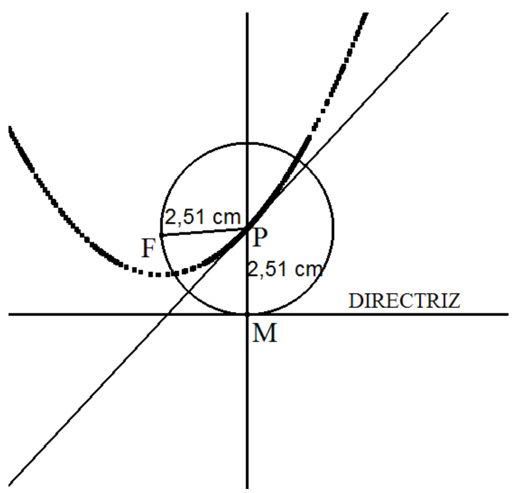

Figura 28. Huella descrita por el punto P cuando se mueve el punto M sobre la recta directriz

B. ¿Se puede afirmar que la Parábola es la unión de puntos colineales? ¿Por qué?

El estudiante para poder contestar esta pregunta debe tener claro que “los puntos de un conjunto están alineados o son colineales, si hay una recta que los contiene a todos”, en principio el rastro dejado por el punto P a través del plano parece muy cercano a la definición del término colineal, pero a medida que se va moviendo el punto M, la huella producida por el punto P corresponde a una curva y no a una recta.

C. ¿La Parábola se formará mediante la unión de pequeños segmentos de recta?

El estudiante hasta este punto ya podrá afirmar que la Parábola es una curva plana y abierta, determinada por una línea continua, y no por segmentos de recta.

La visualización del comportamiento de la directriz le ofrecerá una justificación experimental. En efecto, su cambio de dirección sucede de manera suave y continua, hecho no sería observable si en un momento dado el punto P estuviera trazando un pequeño segmento.

D. ¿Cómo expresarías ahora el concepto de parábola?

Se espera que el estudiante exprese que una Parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz.

E. ¿Qué procedimiento utilizarías para representar la ecuación de la Parábola que obtuviste? ¿Podrás elaborar un plan para encontrarla? Descríbelo.

Algunos estudiantes relacionarán tal vez la ecuación de la parábola con función cuadrática, ya que para ellos no es ajeno que la representación gráfica de esta función es un curva llamada parábola; otros por su parte trazarán el lugar geométrico del punto P cuando se mueve el punto M, para que por medio de esta herramienta “Coordenadas o ecuación”, se determine la ecuación de la parábola construida (Ver Figura 29).

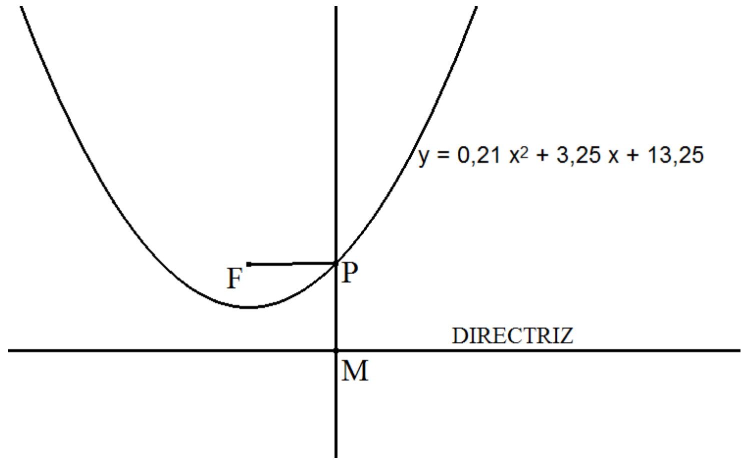

Figura 29. Ecuación de la parábola

F. ¿Cómo describes tu experiencia al trabajar con este recurso tecnológico?

Aquí se consideró que los medios tecnológicos deben conducir a una redefinición de las fronteras entre la acción individual y la acción social. El estudiante, auxiliado por sus instrumentos computacionales, construye una versión del conocimiento. Como es sabido, el conocimiento y el aprendizaje son, por su naturaleza, producto de la mediación de instrumentos tanto materiales como simbólicos (Moreno, 2001). Por lo tanto, se hace necesaria la intervención permanente del profesor, quien a través de sus propuestas debe procurar conducir al estudiante a la construcción de los esquemas cognitivos conceptuales que emergen de su interacción con tales instrumentos.

- Validación:

Al término de esta situación se asigna un intervalo de tiempo a cada grupo de trabajo para que exponga las diferentes estrategias adoptadas en la resolución de cada uno de los interrogantes planteados, para ello se tomarán las evidencias en videograbaciones que se encontrarán al final del trabajo, en el anexo Nº 8.

- Institucionalización:

Se definirá a los estudiantes nuevamente el concepto de Parábola como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F llamado foco y de una recta fija *d* llamada directriz. También se enfatizará en el punto de vista dinámico: La Parábola es el lugar geométrico determinado por el conjunto de posiciones que asume un punto móvil P en función de un punto M que se mueve sobre una recta *d* llamada directriz, de manera tal que P equidista de la recta directriz *d* y de un punto fijo F llamado foco para cualquiera de sus posiciones.

9. Análisis de Resultados

En atención al esquema del diseño metodológico, se procede a describir la secuencia observada durante la experimentación y se efectúa su respectivo análisis a *posteriori*[13].

9.1 Experimentación

9.1.1 Balance entre la planificación y la acción.

En la tabla 3 se compara el plan con su realización en términos de actividades, tiempo e instrumentos de observación.

Tabla 3. *Esquema General del Desarrollo de la Experimentación.*

Lo Planificado		Lo Implementado		Instrumentos
Actividad	Tiempo	Actividad	Tiempo	
Situación didáctica N° 1	2 horas	Situación didáctica N° 1	2 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.
Situación didáctica N° 2	2 horas	Situación didáctica N° 2	1.5 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.
Situación didáctica N° 3	2 horas	Situación didáctica N° 3	1.5 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.
Situación didáctica N° 4	2 horas	Situación didáctica N° 4	1.3 horas	Diario de la sesión. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.

Fuente: Esta tabla ha sido adaptada para este trabajo y fue tomada del esquema general de desarrollo de la experimentación, propuesta en Camargo & Guzmán (2005).

[13] En el capítulo "Anexos", se incluye los cuestionarios de cada una de las situaciones didácticas, los respectivos registros escritos de las producciones matemáticas de los estudiantes, y algunas fotografías que retratan, a criterio personal de los investigadores, los pasajes más representativos de la puesta en acto de la secuencia didáctica propuesta (p. 90).

9.1.2 Descripción de las sesiones.

Debido a que en el momento de la fase experimental la institución educativa donde se llevó a cabo la realización didáctica se encontraba finalizando las actividades correspondientes al año escolar, la experimentación se tuvo que adelantar en una semana. Por tal razón, la puesta en acto de las cuatro situaciones didácticas propuestas se hizo durante los días 16 y 17 de febrero de 2011, es decir, dos sesiones por día.

En la experimentación se trabajó con cuatro estudiantes del grado noveno del Colegio Bet-El, una institución educativa de carácter privado ubicada en la ciudad de San Juan de Pasto. Para hacer la descripción de las sesiones se tuvo en cuenta los apuntes consignados en los diarios de campo y los registros de las videograbaciones.

Sesión N° 1 (16 de febrero de 2011 / 2 horas). Gracias a que la profesora encargada de la realización didáctica es también la profesora titular del grupo experimental, no fue necesario hacer un acercamiento a los estudiantes. Por otra parte, hasta ese momento ellos ya habían recibido una inducción acerca del manejo básico de Cabri Géomètre II Plus a través de la realización de actividades sencillas donde se encuentra lugares geométricos como la mediatriz de un segmento y el círculo, también se hizo un repaso de los elementos de la circunferencia y algunas propiedades. Además, se les había comunicado de manera breve las condiciones de resolución de las situaciones a –didácticas.

A pesar de esto último, se hizo bastante notorio el asombro de los estudiantes en cuanto a la escasa intervención de los profesores en el desarrollo de la clase, la cual se redujo solo a dos instancias: en la exposición de las “reglas de juego” y en la institucionalización de los saberes generados. Con todo, ninguno de los estudiantes manifestó serias dificultades que afectaran de una u otra forma el normal desarrollo de la clase.

Esta sesión, al igual que las demás, se trabajó en grupos de dos estudiantes. El tema que se tenía previsto era la construcción geométrica de la Parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta; en la primera parte, el estudiante realizó unas serie de construcciones que le permitieron favorecer procesos de exploración y medición hasta llegar a un razonamiento visual que permitiera la generalización del concepto de Parábola como el lugar geométrico de un punto móvil que equidista continuamente de una recta y un punto externo a ésta. En la segunda parte, se da a conocer al estudiante las partes de la parábola, buscando que éste las identifique.

Sesión N° 2 (16 de febrero de 2011 / 1.5 horas). Siguiendo el plan previsto, se tomó la primera parte de la sesión para la ejecución de las instrucciones que condujeron a la construcción de una Parábola en Cabri Géomètre II Plus. Luego, mediante la aplicación de preguntas orientadoras y otras construcciones auxiliares, se llevó a los estudiantes a que formularan conjeturas respecto a la naturaleza de la curva representada visualmente en pantalla. La que, como es de esperar correspondía efectivamente a una Parábola.

En la segunda parte, asumiendo la hipótesis de que la curva era una Parábola, la actividad de los estudiantes se orientó a la identificación de elementos notables y la verificación de la propiedad foco–directriz para su validación. El resultado fue positivo ya que todos lograron determinar cuál era el foco y la directriz de la curva, y por lo tanto, establecer de manera concluyente que se trataba de una Parábola.

Sesión N° 3 (17 de febrero de 2011 / 1.5 horas). En esta sesión los dos grupos de estudiantes siguieron parciamente las indicaciones de la guía de trabajo, ya que en primera medida construyeron la circunferencia utilizando punto medio entre los puntos dados A y B, en segunda instancia, utilizaron una construcción blanda de lo que se les pedía en el enunciado, al mover la circunferencia se podía notar que esta dejaba de ser tangente a la recta *d*, un grupo hizo coincidir la circunferencia en el punto de tangencia B, mientras que el otro no; esto les permitió que contestaran de forma correcta algunas de las cuestiones planteadas, pero al llegar a la construcción del lugar geométrico, ninguno de los grupos llegó a la construcción de la Parábola como lugar geométrico, obtuvieron una recta paralela a la recta *d*; esta construcción válida en cierta medida no estaba contemplada en el análisis *a priori*.

Sesión N° 4 (17 de febrero de 2011 / 1.3 horas). Esta sesión hizo énfasis en la construcción de la Parábola como lugar geométrico, utilizando el conocimiento emergido previamente. El dominio aquí demostrado por los estudiantes con relación al manejo de términos, conceptos y operaciones propios de la temática tratada, puso en evidencia la conceptualización efectiva de la noción de Parábola como lugar geométrico. Además, ellos manifestaron la satisfacción que sentían por la potencia que les ofreciera el ambiente Cabri Géomètre II Plus para la construcción y exploración de objetos geométricos.

Es preciso señalar que el ambiente de clases, a pesar de que las sesiones se hicieran de manera tan seguida, fue el mejor para la aplicación de las situaciones didácticas, ya que los estudiantes en aquel momento no recibían ninguna otra clase, tan solo debían presentar las pruebas finales del cuarto periodo. Esto generó una atmosfera de mayor tranquilidad que redundó positivamente en la dinámica de las actividades.

Dicha peculiaridad se estimó especialmente relevante en esta última situación, donde se esperaba que, por efectos de la natural consunción acumulada por los estudiantes a causa de la actividad intelectual previa, el ambiente académico se tornara tenso, la falta de interés emergiera, y se presentara algún conato de indisciplina.

9.2 Análisis a *Posteriori*

Con el objeto de dar cuenta de los resultados obtenidos se considera las unidades de análisis elaboradas para el estudio del contenido, comprensión e interacción didáctica. Los datos se obtuvieron de las producciones escritas de los estudiantes, extraídas de los reportes que entregaron. Los análisis del contenido e interacción didáctica se condensan en un solo apartado para las cuatro situaciones, en tanto que el análisis de la comprensión se hace separadamente para cada situación.

9.2.1 Análisis del contenido trabajado.

En la primera situación, como era previsible, se observó que todos los estudiantes movilizaron por igual algunos conocimientos previos, sin que su génesis tenga incidencia alguna, bien sea que hayan sido obtenidos a partir de sus experiencias escolares o bien cotidianas. Es por eso que se puede afirmar que, la totalidad de estudiantes entendían lo que es un punto, un segmento pero no tenían en claro el concepto de mediatriz de un segmento.

Esta primera situación puso también en juego algunos saberes nuevos que los estudiantes fueron asimilando en la medida en que avanzaba la secuencia, lo que permitió apropiarse progresivamente de los conceptos movilizados así como de las herramientas de Cabri Géomètre II Plus en la resolución de los problemas a los que se enfrentaron. Principalmente éstos fueron dos:

- Lugar geométrico de un punto móvil. Los estudiantes hacían lecturas puntuales de la curva visualizada en pantalla, identificándola como un conjunto de puntos sucesivos no colineales relacionados por una propiedad en común y cuya posición dependía de otro punto que se movía sobre un objeto rectilíneo.

- Trayectoria de un punto móvil. La herramienta "Traza" fue de gran importancia para la conceptualización de la noción de lugar geométrico de un punto en el contexto de una situación dinámica de variación.

En la segunda situación, aparte de los conocimientos previos a la realización didáctica, los estudiantes hicieron uso de los saberes movilizados en la situación precedente. Se notó una evolución conceptual que permitió superar la pre–concepción que ellos tenían inicialmente de la noción de parábola, la cual había sido predominantemente visual. Incluso, en adelante, la Parábola empezó a identificarse esencialmente por la propiedad que establece el foco y la directriz antes que por sus relaciones espacio–gráficas.

A diferencia de las situaciones anteriores, en la tercera situación, se buscaba introducir los conceptos de foco y directriz mediante un problema de tangencia que incluía la construcción del centro de una circunferencia, este centro fue construido por los estudiantes con punto medio, lo cual generó la dificultad para seguir con el resto de la situación, esto no había sido previsto en el análisis *a priori*, tal como se mencionó algunos párrafos atrás; la mayor parte de conocimientos que se esperaba que fueran movilizados no lo fueron, en adelante sus construcciones solo fueron visuales, tal es el caso de que la recta *d* debía ser tangente a la circunferencia en el punto B, el estudiante sabía que era “ser recta tangente a una circunferencia”, pero no la pudo construir, al mover la recta o la circunferencia esta dejaba de ser tangente, se esperaba una construcción basada en relaciones geométricas. Laborde (2005b), dice al respecto que los estudiantes piensan que se puede hacer una construcción geométrica solo con señales visuales y no ponen en práctica sus conocimientos.

> la tarea de dibujar una tangente a una circunferencia que pasa por un punto dado es con frecuencia vista por estudiantes como la tarea física de hacer girar un borde directo que pasa por el punto dado y lo ajusta a fin "de tocar" la circunferencia. (p. 159).

Se subraya el hecho de que, en la última situación, los estudiantes hicieron uso de los contenidos trabajados hasta el momento en las situaciones anteriores, refiriéndose a ellos con suficiente propiedad, tanto en las construcciones como en la elaboración de conjeturas y validación de las mismas. Se observó finalmente que la propiedad foco–directriz se constituyó en una herramienta conceptual para la validación de parábolas y la identificación de sus elementos más representativos, en especial, el foco y la directriz.

9.2.2 Análisis de la comprensión.

Como ya se mencionó, esta sección se aborda, tal como se indica a continuación, de forma individual para cada situación.

- Situación didáctica N° 1. Construcción geométrica de la parábola, a través de los conceptos de mediatriz y distancia de un punto a una recta.

El análisis de la comprensión de la situación didáctica N° 1 versa en el estudio del conocimiento de la relación métrica que existe entre la distancia comprendida por un punto que pertenece a una parábola y la directriz, con la distancia entre el mismo punto y el foco, para luego avanzar hacia la generalización de la propiedad que se establece a partir de dicha relación. En este sentido, la herramienta "Distancia o longitud" junto al "modo arrastre" se hicieron indispensables para visualizar la relación métrica existente entre el foco y la directriz con respecto a los puntos que definen una parábola, propiedad que a su vez caracteriza a dicha curva como un lugar geométrico.

De otra parte, la conexión entre el enunciado verbal y la representación visual en Cabri Géomètre II Plus, en el sentido de que ésta daba cuenta de la equidistancia de un punto móvil con respecto a una recta y un punto fijo, fue inmediata. Lo que permitió de entrada percatarse de la noción de propiedad foco–directriz. Para ilustrar esto, se presenta a continuación las conversaciones surgidas entre estudiantes a partir de la reflexión que hicieran sobre el literal A del cuestionario.

Si P es un punto que equidista tanto de la recta *d* como del punto F ¿estará en la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta.

- Grupo de Cristian y Sebastián:

  - Cristian: sí, está porque P equidista de los dos extremos del segmento $\overline{QF}$.
  - Sebastián: si medimos el segmento $\overline{PQ}$ se tiene que es igual a $\overline{QF}$. Ambos miden 7.71 cm.
  - Cristian: Si movemos el punto Q las distancias cambian, aunque siguen siendo iguales entre sí.

En la respuesta que da Sebastián hay una imprecisión, los segmentos que se midieron fueron PQ y PF, dato que está consignado en la videograbación.

- Grupo de Mario y Camilo:

  - Mario: P está sobre la mediatriz del segmento $\overline{QF}$ porque la distancia de P a Q siempre será la misma distancia de P a F.
  - Camilo: Aunque se muevan los puntos siempre será la misma distancia y longitud.

Una vez que los estudiantes hubieran tomado conciencia de la relación métrica en cuestión, se continuó con la siguiente pregunta que tenía por objeto producir una perturbación cognitiva que condujera, aunque de manera no formal, a comprender que dicha relación era una propiedad que se cumplía únicamente para un cierto conjunto de puntos.

¿Cómo podrías determinar otros puntos equidistantes de la recta *d* y del punto F?

Para ello se pidió a los estudiantes que intentaran construir un punto hipotético P_1 que pudiera cumplir con la condición que le permita equidistar de la recta *d* y el punto F. Y esto es lo que respondieron los estudiantes.

- Grupo de Cristian y Sebastián:
  - Cristian: no es posible porque el punto P1 no pertenece a la mediatriz de $\overline{QF}$.
  - Sebastián: si P1 estuviera sobre la mediatriz si se pudiera, pero en este caso sería entonces el mismo punto P.

- Grupo de Mario y Camilo:
  - Mario: no podemos encontrar otros puntos equidistantes.
  - Camilo: si P1 es diferente de P nunca van a ser iguales las distancias QP1 y P1F.
  - Mario: no equidistan.

Las respuestas dadas por el primer grupo, evidencian que los estudiantes piensan una cosa y escriben otra, Cristian escribe que el punto P_1 no pertenece a la mediatriz solo por el hecho de que cuando lo arrastró y lo hizo coincidir con la recta *m*, las medidas de los segmentos no fueron iguales, esto se dio porque la construcción no estaba bien alineada (rectas y algunos segmentos torcidos). Sebastián por su parte tiene una idea puntual, ve que solo en la posición del punto P, se conservan equidistancias a la recta *d* y al punto F, desechando los demás puntos.

Por otra parte el grupo número dos, solo se fue por lo visual no aplicó ningún conocimiento de *geometría* en este caso el de mediatriz, los estudiantes comprenden este concepto como un solo punto y no lo relacionan como el conjunto de puntos.

Si la recta *d* y el punto F, se mantienen fijos —no se pueden arrastrar—, ¿A cada posición del punto Q sobre la recta *d*, le corresponde un punto P equidistantes del punto F, y la recta *d*?

- Grupo de Cristian y Sebastián:
    - Cristian: si, porque si movemos Q sobre la recta le corresponde un punto P de igual distancia
    - Sebastián: Si se arrastra el punto Q la distancia hasta el punto P es igual que la distancia que se mide del punto P al punto F.

- Grupo de Mario y Camilo:
    - Mario: al mover el punto Q también se mueve el punto P.

Estas respuestas fueron satisfactorias parcialmente, todos los cuatro estudiantes, por medio de la herramienta “medir”, evidenciaron a cada posición del punto Q, le corresponden un punto equidistante de la recta *d* y del punto F, pero no llegaron a la explicación de características que se quería, todavía se está en el plano espacio- grafico.

Con estas primeras herramientas conceptuales, los estudiantes estuvieron en capacidad de conjeturar que la trayectoria del punto P correspondía a una parábola.

Representa la trayectoria que genera el punto P, para ello con la herramienta “Traza” del submenú de textos y símbolos, da un clic sobre el punto P, y después del punto Q, mueve con clic sostenido el punto Q sobre la recta *d*.

- Grupo de Cristian y Sebastián:
    - Profesora: ¿qué curva describe la trayectoria de P?

- Sebastián: la trayectoria del punto P forma una parábola.
- Cristian: está hecha a partir del punto F.
- Sebastián: el punto F está por fuera de la recta d.

▪ Grupo de Mario y Camilo:

  - Profesora: ¿qué curva describe la trayectoria de P?
  - Mario: se observa que al mover el punto Q la trayectoria del punto P toma la forma de una parábola.
  - Camilo: la parábola es correspondiente a la recta d.

Luego, cuando se pidió a los estudiantes que expresarán con sus propias palabras lo que es parábola, esto fue lo que ellos contestaron:

▪ Grupo de Cristian y Sebastián. Es un conjunto de puntos que guardan la misma distancia de la recta d y del punto F, y que pertenece a una mediatriz.
▪ Grupo de Mario y Camilo. Es la curva que hace el punto P que equidista del punto Q que está sobre una recta directriz y del punto F que es llamado foco.

Después de que los estudiantes exploraran correctamente algunas relaciones espacio–gráficas, donde se involucra el punto F llamado foco se pidió que trazaran una recta perpendicular que pasara por ese punto y se especificó que se trataba del eje focal. Para empezar la conceptualización de la noción de vértice se formuló la siguiente pregunta.

¿Cuál es el punto de la parábola cuya distancia a la directriz es la menor de todas?

Antes de contestar la pregunta, los estudiantes encontraron el punto de intersección entre el eje focal y la parábola, al cual llamaron V. Al punto hipotético que debía cumplir con la condición pedida se le nombró con la letra I. Así, los estudiantes procedieron a responder lo siguiente.

▪ Grupo de Cristian y Sebastián: es el punto donde el eje focal corta a la parábola.

- Grupo de Mario y Camilo: la menor distancia se alcanza cuando I coincide con V, ya que ésta mide solo 1.25 cm, que es la mínima distancia registrada.

Finalmente se logró que los estudiantes llegaran a concluir que el vértice equidista del foco y de la directriz y que por tanto era un punto de la parábola.

- Situación didáctica N° 2. Construcción de una configuración geométrica para encontrar el foco y la directriz de una parábola.

En la situación didáctica Nº 2, el análisis de la comprensión está centrado en el estudio de la articulación entre los componentes empírico y teórico del concepto de parábola a partir de la construcción material del foco y la directriz de una parábola dada. Al igual que en la mayoría de situaciones, el estudio se preocupa por las conexiones que establecen los estudiantes entre los aspectos geométrico y espacio–gráfico de la noción de parábola, partiendo de las estrategias heurísticas que salen a relucir durante los procesos resolutivos.

Así pues, se pudo observar que, hasta este punto, en la conceptualización que hacen los estudiantes de la noción de parábola se mantiene el predominio perceptual sobre lo conceptual. Por ejemplo, luego de que los estudiantes siguieran las instrucciones para realizar en Cabri Géomètre II Plus la construcción que se ilustra en la Figura 11, se les formula la pregunta:

Empieza a arrastrar lo que se deja mover, observa qué permanece invariante y que no; con la construcción realizada, cambia de posición la recta *l*, con el mouse mueve y llévala a una posición similar a la figura presentada ¿Qué sucede con la construcción si volvemos y arrastramos el punto Q sobre la recta *l*?

Y esto fue lo que respondieron:

- Grupo de Cristian y Sebastián. La mayoría de las partes de la construcción se mueven pero la parábola no cambia.

- Grupo de Mario y Camilo. Al arrastrar el punto Q, el punto de intersección R se mueve formando una parábola.

Como puede juzgarse a partir de estas respuestas, los estudiantes aún no han llegado al concepto geométrico de parábola, puesto que hacen una afirmación *a priori* de la naturaleza de la curva que aparece en pantalla, refiriéndose a ella como una parábola sin que esto tenga otro fundamento que la mera forma captada perceptualmente, además los dos grupos no contestaron la primera parte de lo que se les preguntaba, que permanece invariante y que objetos permiten que se los muevan.

Cuando la actividad conduce a los estudiantes a construir, sin que tengan conciencia de ello, un foco y una directriz hipotéticos, ambos grupos coinciden en afirmar que dichos elementos podrían de alguna manera llegar a ser el foco y la directriz reales de la curva que *a priori* habían aceptado como una parábola. No obstante, la estrategia que utilizan para resolver el problema de hallar el foco y la directriz consiste simplemente en un ajuste de tipo perceptual, lo que confirma la tesis expuesta.

- Grupo de Cristian y Sebastián. Medimos las distancias UR y RF, luego movimos el punto F hasta que nos dieran las mismas distancias.
- Grupo de Mario y Camilo. Obtuvimos el foco arrastrando F hasta que los catetos del triángulo URF tuvieran la misma medida.

El concepto de parábola como lugar geométrico yace todavía imperceptible a la respuesta de los estudiantes que intuitivamente con la ayuda del arrastre, tratan de dar una explicación del por qué la figura que se forma efectivamente los dos puntos encontrados, se podrían catalogar como el foco y la directriz de esa configuración geométrica; a la pregunta

Presenta un argumento válido para demostrar que son el foco y la directriz de esta parábola.

- Grupo de Cristian y Sebastián. Al tratar que el triángulo URF sea un triángulo que tenga dos lados iguales, les damos distancia y longitud a los segmentos RU y RF, luego arrastramos Q, hasta que esas 2 distancias sean iguales. Por el punto M hacemos trazar una perpendicular a MR y esa recta corta a la recta b y también a la recta a, construimos un nuevo triángulo, y volvemos a dar distancia y longitud, los valores son exactamente iguales. Creemos que F es el foco porque está a una misma distancia de R con respecto a d que sería la directriz.

- Grupo de Mario y Camilo. Siguiendo las indicaciones, el triángulo seria isósceles, ya que tendría UR y RF el mismo valor, pero se nos dificulta encontrarlo moviéndolo, así que según las indicaciones, construimos un nuevo triángulo con una recta que sea perpendicular a MR que pase por M, encontramos el nuevo F en la recta b, y en la recta a el punto U, es decir que F seria el foco porque la distancia es igual que de RU, por U pasa la nueva d que sería la directriz.

Es de destacar que, por lo menos, la noción de foco y directriz en la determinación de la propiedad que define la parábola como lugar geométrico ha sido bien efectuada, los estudiantes realizaron las mediciones de los lados del triángulo isósceles URF y luego establecieron una relación de equidistancias entre los dos lados de dicho triángulo y las distancias correspondientes que hay entre un punto U de la directriz *d* a un punto R de la parábola y del punto R al punto F, concluyendo que el punto F es el foco y la recta *d* es la directriz, como se había previsto en el análisis *a priori*.

En este caso, se observa que moviendo un punto a lo largo de una línea, un camino particular dejado por otro punto puede ser visualmente identificado como posiblemente una parábola. Sin embargo, se hace importante proporcionar un argumento para mostrar realmente que el lugar geométrico equivale a esta cónica; Parece que el movimiento de objetos, observando comportamientos, formulando conjeturas, presentando argumentos y comunicando resultados son actividades importantes que los estudiantes pueden practicar sistemáticamente con la ayuda del ambiente Cabri a fin de descubrir y explorar propiedades matemáticas.

- Situación didáctica Nº 3. Construcción geométrica de la parábola con base en la propiedad de la circunferencia.

En el caso de la situación didáctica Nº 3 se evidencia una gran dificultad, la cual no había sido prevista, con respecto al conocimiento previo del concepto de tangencia en un contexto de variación, lo que repercutió negativamente en la construcción que se pedía para lograr el aprendizaje esperado.

Si la recta *d* es tangente a la circunferencia C en el punto de tangencia B como se requería en el enunciado, ¿qué propiedad cumple con relación al radio OB? Verifique tal propiedad.

- Grupo de Cristian y Sebastián. Por la propiedad de las tangentes sabemos que las rectas tangentes en un punto de tangencia son perpendiculares al radio, lo verificamos con la pregunta ¿es perpendicular?

En las videograbaciones se evidencia que cuando el estudiante utiliza esta herramienta, la respuesta es los objetos no son perpendiculares.

- Grupo de Mario y Camilo. Que es una recta y pasa por B.

De acuerdo con lo que se había concebido en el diseño de esta tercera situación, se daba por supuesto que los estudiantes estarían en capacidad de realizar la construcción geométrica de una circunferencia que sea tangente a una recta (directriz) y pase por punto fijo externo a ésta (foco). Esto significa que al aplicar el "arrastre de test" (Azarollo, y otros, 2002), la configuración se debía preservar, es decir, que al hacer variar la posición del punto de tangencia de la circunferencia sobre la recta tangente dicha propiedad se conservaría.

Sin embargo, no fue así, puesto que los estudiantes en su totalidad se limitaron a construir una solución particular, esto es, para el caso en el que el punto externo a la recta tangente se sitúa sobre la recta perpendicular a ésta y cuyo pie es precisamente el punto de tangencia de la circunferencia. Este hecho tan peculiar da cuenta de los problemas presentes en los estudiantes, por un lado, con relación a la interpretación de enunciados, y por otro, en lo referente a la validación de sus propias construcciones.

Encuentre el centro O de la circunferencia C y describa paso a paso cómo determinó el punto exacto donde está ubicado dicho centro. Tenga en cuenta las características que le pide el enunciado para construir la circunferencia C.

- Grupo de Cristian y Sebastián. Determinamos el punto exacto de la circunferencia C, con punto medio y lo llamamos O.
- Grupo de Mario y Camilo. Como nos dan 2 puntos A y B, le doy punto medio y me sale el centro y le doy circunferencia del centro hasta A y B.

En efecto, los estudiantes en lugar de utilizar la propiedad foco–directriz para construir el centro de la circunferencia requerida, hicieron uso de la herramienta "Punto medio", solución qué, como ya se explicó arriba, era satisfactoria para un solo caso.

Indique de cuáles puntos equidista el centro O de la circunferencia C.

Este literal fue respondido de manera favorable, los estudiantes nombran con propiedad los puntos equidistantes del centro de la circunferencia.

- Grupo de Cristian y Sebastián. El centro O de la circunferencia equidista de los puntos A y B porque el segmento OA es un radio de la circunferencia al igual que BO.

- Grupo de Mario y Camilo. Como el centro es el punto medio de A y B tiene la misma distancia.

Encuentre el lugar geométrico generado por el centro O de la circunferencia C. ¿Qué nombre recibe la curva generada? Describa algunas características de esta curva.

- Grupo de Cristian y Sebastián. El lugar geométrico generado por el centro O es una recta, no es una curva, las características que encontramos es que esa recta es paralela a la recta d.
- Grupo de Mario y Camilo. La curva se llama recta.

Para los dos grupos se generalizo el mismo lugar geométrico, dadas las dificultades planteadas desde el principio no se llegó a la parábola.

- Situación didáctica Nº 4. Construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri.

En la situación didáctica Nº 4, para estudiar la unidad de comprensión es preciso dirigir la atención hacia la manera en que relacionan los estudiantes los aspectos funcional y geométrico del concepto de parábola como lugar geométrico en Cabri Géomètre II Plus.

Tomando como referencia la caracterización que hace Jahn (2002) de dos aspectos de los lugares geométricos en relación al uso de dos herramientas de Cabri: “Traza” y “Lugar”, en general, se establece las siguientes definiciones de parábola:

Geométrica: es el conjunto de puntos que equidistan de una recta llamada directriz y de un punto fijo llamado foco.

Funcional: es el conjunto de posiciones asumidas por un punto P’ en función de un punto P que varía sobre una recta *d*, tal que si F es un punto exterior a *d*, entonces PP’ = FP’. Por lo cual se establece una relación biunívoca en la que P’ es la imagen de P para cualquier posición que éste asuma.

Ahora bien, para empezar con este análisis es oportuno señalar que a los estudiantes en primera instancia se les facilitó las instrucciones para que realizaran la construcción de la circunferencia tangente que se pedía en la situación anterior y que no se hizo como se esperaba. Una vez elaborada la construcción se condujo a los estudiantes a reflexionar sobre la naturaleza del lugar geométrico descrito por la circunferencia cuando un punto M variaba sobre la presunta recta directriz.

Mueve repetidamente el punto M y examina detenidamente la trayectoria que describe el punto P, también ten en cuenta lo que pasa con la recta mediatriz de los puntos F y M. ¿Qué logras observar?

A esto los estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- Grupo de Cristian y Sebastián. Se puede observar que el centro P forma una parábola cuando M se mueve porque la longitud de los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{PF}$ son siempre iguales a pesar de que su longitud puede aumentar o disminuir dependiendo de la posición de M.
- Grupo de Mario y Camilo. Encontramos que los segmentos $\overline{MP}$ y $\overline{PF}$ son siempre iguales por ser radios de una misma circunferencia, por lo tanto, observamos que al mover M el punto P describe una parábola.

Estas respuestas ponen de manifiesto que los estudiantes han comprendido el concepto de parábola desde el enfoque geométrico pero les falta argumentar aun mas, no se dio ninguna opinión acerca de que pasaba con la recta mediatriz de los puntos F y M cuando se mueve M.

Ahora, para indagar sobre el segundo enfoque se formularon las siguientes preguntas:

¿Podrías afirmar que la parábola es la unión de puntos colineales? ¿Por qué?

A lo cual contestaron así:

- Grupo de Cristian y Sebastián. No se puede afirmar que sea la unión de puntos colineales porque no todos los puntos tienen la misma dirección. Pero de todas formas si se puede hablar de una sucesión de puntos.
- Grupo de Mario y Camilo. La parábola no es un conjunto de puntos colineales aunque todos están sobre una misma curva.

Como puede notarse, estas respuestas indican cierto grado de acercamiento por parte de los estudiantes hacia la concepción geométrica de la noción de parábola, concepción que se iría cerniendo en la medida en que ellos reflexionaban en torno de las cuestiones que se les iba planteando, tal como puede apreciarse a continuación:

¿La parábola se formará mediante la unión de pequeños segmentos de recta?

- Grupo de Cristian y Sebastián. Quizás pueda ser que sí puesto que la curva está formada por infinitos puntos y no se sabría con certeza.
- Grupo de Mario y Camilo. No se formaría con segmentos de recta porque de ser así sería una recta y no una parábola.

Si bien es cierto que hacer una lectura objetiva de estas respuestas podría resultar algo ambiguo, es de destacar que se discierne la existencia de un elemento en común: la noción de continuidad en la comprensión del concepto de lugar geométrico. Este hecho particular puede entenderse entonces como un claro indicio de avance en la conceptualización del concepto de parábola como lugar geométrico desde la perspectiva funcional, lo que más adelante se vería ratificado por las contestaciones que se tejieron en torno a la discusión promovida por la pregunta subsiguiente.

¿Cómo expresaría ahora el concepto de parábola?

- Grupo de Cristian y Sebastián. Es una sucesión de puntos a cada uno de los cuales le corresponde un único punto de la directriz, equidistando de ésta y de un punto fijo.
- Grupo de Mario y Camilo. Es un conjunto de puntos sucesivos que se relacionan con los puntos de una recta llamada directriz y además equidistan de ésta y de un punto llamado foco.

Como es natural, estas definiciones no emplean un lenguaje matemático lo suficientemente apropiado para comunicar la idea que al parecer se quiere expresar, pues hay que entender que se trata de estudiantes escolares y no de profesionales en matemáticas. Con todo, es cierto que estas consideraciones de los estudiantes les permitió inferir sobre la relación geométrica y funcional de la parábola, al ver que para un punto M existe una construcción geométrica que relaciona a un punto P, que es un punto de intersección y va generando un lugar geométrico con la herramienta de Cabri: “Lugar”. Por lo tanto, es también observable el engranaje cognitivo–perceptivo que supone la articulación entre lo espacio - gráfico y lo teórico en la acomodación del concepto de parábola.

¿Qué procedimiento utilizarías para representar la ecuación de la Parábola que obtuviste? ¿Podrás elaborar un plan para encontrarla? Descríbelo.

El primer grupo como se había previsto, se fueron por el camino de utilizar la herramienta “Coordenados o ecuación”

- Grupo de Cristian y Sebastián. La ecuación $ax^2 + bx + c$, con la herramienta ecuación, dio: $y = 0{,}10x^2 + 0{,}89x + 1{,}42$

- Grupo de Mario y Camilo. La ecuación nos dio fue $ax^2 + bx + c$, porque es el dibujo de la función cuadrática.

En los dos grupos se mantiene la idea de asociar parábola como la representación de una función cuadrática, resultado positivo porque los estudiantes de noveno ya tendrán dos enfoques del concepto de parábola, uno el adquirido en esta investigación y el otro algebraico.

9.2.3 Análisis de la interacción didáctica.

En esta sección se ha pensado conveniente desarrollar un sistema de categorías que faciliten el análisis de la interacción didáctica experimentada durante la puesta en escena de la secuencia didáctica propuesta. A saber, éstas son:

- Gestión del trabajo en clases. Es posible aseverar que la organización que se planeó para el desarrollo de la *micro-ingeniería didáctica* fue exitosa, aun cuando la tercera situación no sucedió de la manera en que se había pensado en el análisis *a priori*. Se analizan como aspectos positivos de la gestión del trabajo en clases, los siguientes:

- Las situaciones propuestas lograron el elemento motivador esperado, constituyéndose así en un reto para los estudiantes y produciendo la movilización de diversos saberes alrededor de la temática estudiada. Así pues, fue posible propiciar las condiciones necesarias para el desarrollo de una dinámica en la que la interacción del estudiante con el ambiente Cabri Géomètre II Plus y la puesta en común de sus ideas favorecieron la eclosión del conocimiento esperado.

- La metodología de trabajo, pues, pese a que los estudiantes no estaban lo suficientemente familiarizados con situaciones de enseñanza donde la intervención directa del profesor sea tan exigua, ni mucho menos interactuar con un “medio” material que les proveyera un campo de experimentación tan amplio, ellos se involucraron convenientemente en los procesos de análisis, conjeturación, validación y elaboración de estrategias o heurísticas.

- La integración del ambiente Cabri Géomètre II Plus al sistema didáctico además de suponer una oportunidad novedosa para estudiar la parábola como lugar geométrico, produjo un alto grado de motivación entre los estudiantes, como ellos mismos lo manifestaran al término de la secuencia. Esto permitió generar un clima de participación activa en el que se facilitó la comunicación de las producciones individuales y colectivas de los estudiantes.

Dado el reducido número de estudiantes con los que se trabajó en esta *micro-ingeniería didáctica*, se puede afirmar que ninguna de las decisiones organizativas tomadas por los investigadores ocasionó mayores inconvenientes.

- Gestión frente al tratamiento del contenido matemático en juego. El tratamiento del contenido estuvo condicionado por el diseño de las situaciones, la comprensión de los enunciados, instrucciones y preguntas por parte de los estudiantes y las estrategias que propusieron.

La gestión del contenido matemático correspondiente a la situación didáctica Nº 1 se vio perturbada por la preconcepción que tenían los estudiantes de la parábola, quienes en ese momento asociaban su concepto con la mera representación visual. Las posibilidades y oportunidades de investigación ofrecidas por Cabri Géomètre II Plus permitieron a los estudiantes la comprensión de que la parábola aparte de tener una forma curva se caracteriza por estar constituida por una serie de puntos sucesivos cuya posición en el plano está determinada por una propiedad que los relaciona de forma métrica con una recta —directriz— y un punto fijo exterior a ésta —foco—.

En el caso de la situación didáctica Nº 2, la gestión del contenido se vio perturbada por las estrategias utilizadas por los estudiantes para la construcción del foco y la directriz de una parábola con la mediación de Cabri Géomètre II Plus, las cuales eran esencialmente de carácter perceptual. Por tal razón, la atención de la profesora se enfocó en el análisis que hicieran los estudiantes de los objetos primitivos utilizados para la construcción de la configuración geométrica requerida, para así contar con algunos elementos que permitieran hacerse a una idea de la evolución de las estrategias de los estudiantes.

En la situación didáctica Nº 3, la gestión del contenido estuvo restringida por la evidente carencia de herramientas técnicas y conceptuales de parte de los estudiantes para elaborar la construcción de una circunferencia tangente a una recta y que pase por un punto fijo, de tal manera que la variación de su centro permitiera visualizar una familia de circunferencias tangentes a dicha recta y que pasen por un mismo punto fijo. Debido a que la solución particular que coincidieron en proponer todos los estudiantes no había sido prevista, la intervención de la profesora se vio mermada considerablemente.

Con respecto a la situación didáctica Nº 4, la clave que posibilitó el tratamiento eficaz del contenido matemático y que posteriormente conduciría al logro del aprendizaje esperado, fue la cuidadosa presentación de las instrucciones para la construcción de la configuración geométrica inicial y la adecuada combinación de construcciones auxiliares y la formulación de preguntas orientadoras que llevaron a los estudiantes gradualmente a conceptualizar el concepto de parábola como lugar geométrico en Cabri Géomètre II Plus a partir de la caracterización de la propiedad foco–directriz.

- Producción de conocimientos en clases. Se considera que el análisis de la emergencia de nuevos conocimientos en el desarrollo de las clases es suficiente para afirmar que los acercamientos de tipo visual que los estudiantes demostraron en gran parte de las estrategias o heurísticas concebidas antes de obtener una estrategia óptima, confirman la bien difundida premisa de que la intuición desempeña un papel determinante en el aprendizaje de las matemáticas.

En el caso de la presente secuencia didáctica la premisa enunciada aplica no solo por la naturaleza intuitiva del ambiente Cabri Géomètre II Plus, sino también por el lugar destacado que aquí ocupa la percepción visual en la comprensión de conceptos y relaciones geométricas. Sin embargo, como el aprovechamiento didáctico de la potencia que ofrece el referido ambiente requiere de la apropiación conceptual e instrumental por parte de los estudiantes en lo que respecta al uso de las herramientas provistas por Cabri Géomètre II Plus, lo cual implica un complejo proceso de instrumentación (Laborde, 2001), se debió insistir mucho en la elaboración de construcciones elementales.

10. Conclusiones

Esta investigación llevada a cabo en el colegio Gimnasio Bet-El en grado noveno, implementó una secuencia didáctica de cuatro situaciones para la enseñanza y aprendizaje del concepto de parábola como lugar geométrico bajo la metodología de *micro-ingeniería didáctica*.

La recolección de información y análisis de resultados de cada una de las situaciones permitió caracterizar las estrategias de aprendizaje utilizadas por los cuatro estudiantes, pudiéndose concluir que:

- La *primera situación*: construcción geométrica de la parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta, se situó en el nivel espacio - gráfico donde las heurísticas de tipo exploratorio dominaron las acciones de los estudiantes, satisfaciendo únicamente las restricciones visuales y deduciendo la propiedad foco - directriz empíricamente al verificar el dibujo de la parábola; esto favoreció los procesos de medición y razonamiento visual sobre las representaciones en la pantalla.

- La *segunda situación*: construcción de una parábola como una configuración geométrica analizando después las partes que la componen, se situó en el nivel empírico - teórico, favoreciendo las conexiones que se establecen entre los aspectos geométricos de la teoría y el espacio–gráfico de la noción de parábola.

- La *tercera situación*: construcción geométrica de la parábola con base en la propiedad de la circunferencia, se situó en un plano transitorio entre lo experimental y teórico. Su puesta en acto aunque permitió relacionar los procesos experimentales con los conceptos sobre equidistancia de los radios de una misma circunferencia, la relación de perpendicularidad entre radios y tangentes, no permitió la relación entre lo experimental y lo teórico de la relación geométrica que guardan los puntos de la mediatriz a un segmento.

- La *cuarta situación*: construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri, se situó en la concepción funcional, porque propició el reconocimiento del carácter dinámico y de dependencia lógica de los puntos del lugar geométrico respecto del foco y de los puntos sobre la directriz.

- Desde los análisis del contenido e interacción didáctica se puede concluir que:

  - El estudiante fue avanzando paulatinamente en la comprensión de parábola como lugar geométrico, pasó de la simple visualización del nivel espacio - gráfico, a la utilización de la propiedad foco - directriz y más tarde la constituyó como una herramienta conceptual para la validación de parábolas y la identificación de sus elementos más representativos.

  - Las actividades propuestas permitieron a los estudiantes identificar fenómenos visuales, donde se observó un punto moviéndose bajo las condiciones pedidas, al tiempo que pudo ir dibujando su trayectoria, identificándola como un conjunto de puntos sucesivos no colineales relacionados por la propiedad foco - directriz y cuya posición dependía de otro punto que se movía sobre una recta; esto permitió al estudiante llegar a la noción de parábola como lugar geométrico desde un perspectiva dinámica.

- La implementación de las cuatro situaciones, indujo a que el estudiante interactué con relaciones geométricas y otros conceptos, desde una perspectiva dinámica, permitiéndole la transición del nivel de percepción visual al nivel teórico. Cabe destacar que durante la aplicación de la *micro–ingeniería*, en la etapa experimental, se presentaron dificultades para que los estudiantes verbalizaran por escrito las relaciones y propiedades visualizadas.

- El presente trabajo también representa una contribución al componente curricular del pensamiento espacial. En este sentido, se puede señalar, sobre la base de los diversos análisis aquí realizados, que éstos muestran cómo la utilización de métodos sintéticos para el estudio del concepto de parábola puede incidir positivamente en la consecución de aprendizajes significativos, en contraste con los resultados obtenidos usualmente por la sola aplicación de métodos analíticos.

- De otra parte, integrar Cabri Géomètre II Plus en la enseñanza de la parábola resultó beneficioso para:

  - Crear un campo de experimentación gráfica donde el estudiante pudo manipular, mover, medir, trazar, diferentes elementos geométricos que le permitieron llegar a la construcción de parábola.

  - Explorar, observar, conjeturar y verificar diversas propiedades como equidistancia, perpendicularidad, rectas tangentes, propiedad foco - directriz entre otras, que permitieron llegar al estudiante a la conceptualización de parábola como lugar geométrico.

  - Permitir una libertad para realizar construcciones que podían ser manipuladas en la pantalla de computador, por medio de la herramienta "arrastre" convirtiéndose así en un medio de reconocimiento y verificación.

  - Conectar las representaciones numéricas y graficas a las representaciones geométricas.

  - Servir como *medio* que reacciona a las acciones y retroacciones de los estudiantes para que pudieran corregir algunas de sus estrategias incorrectas, evitando la necesidad de evaluación por parte del profesor.

  - Las situaciones a-didácticas con ayuda de Cabri son un paso hacia un futuro en el que la gestión del profesor, va a estar más centrada en aspectos como la motivación de los estudiantes o el establecimiento del contenido de los programas, y no en la mera transmisión de conocimientos. De modo que si antes el profesor asumía el papel de actor y era principalmente un almacén y transmisor de conocimiento, en un futuro inmediato debe convertirse en el orientador, es decir, debe ser un guía en la formación y la construcción del conocimiento de los estudiantes, y debe ser un estímulo en el auto aprendizaje del estudiantado, proporcionándole los recursos necesarios para aprender a aprender por sí mismos.

- La experiencia ha demostrado que el producto de una micro- ingeniería es demasiado complejo y un solo intento no es suficiente para su perfeccionamiento; los ajustes que se proponen serian importantes para considerar el rediseño de las secuencias para una próxima investigación, las cuales son:

  - Dar un enunciado más preciso, usar una misma notación geométrica para todas las situaciones.
  - No ser tan explicativos en el desarrollo de las tareas ya que restringe la autonomía de los estudiantes.
  - El orden de la puesta en acto de las situaciones debe tener en cuenta la jerarquización y coherencia de los procesos de intuición-experiencia-teoría, así:

    - Situación No. 1, situada en el nivel espacio - grafico, construcción geométrica de la Parábola a través de los conceptos de mediatriz y de distancia de un punto a la recta.
    - Situación No. 2, situada en el plano experimental - teórico, construcción geométrica de la Parábola con base en la propiedad de la circunferencia.
    - Situación No. 3, situada en el plano de concepción funcional, construcción de una parábola como lugar geométrico en Cabri.
    - Situación No. 4, situado en el plano teórico, construcción de una configuración geométrica para encontrar foco y directriz, demarcada en un plano netamente teórico.

- A manera de hipótesis, se puede afirmar que al tomar esta secuencia en este nuevo orden, se evitaría las dificultades presentadas por los estudiantes al abordar la Situación No. 3, ya que seguirían un proceso usual de pasar del nivel espacio-grafico, al experimental y concluirían con el arribo al nivel teórico. Este posible ordenamiento podría pensarse como un proceso optimo de enseñanza para que los estudiantes se involucren en esta secuencia.

- Este trabajo de grado constituye un aporte en el campo investigativo de la Educación Matemática, ya que dio a conocer que por medio de una secuencia didáctica de situaciones, se puede encaminar al estudiante en la construcción de su propio conocimiento desarrollando nuevas habilidades que faciliten el aprendizaje de la parábola, desde un enfoque diferente al algebraico, integrando las TIC en el aula.

- Esta investigación pretende abrir el camino a otros trabajos de grado posteriores, que sigan esta misma línea de estudio y que adopten la *micro-ingeniería didáctica* como una metodología que permite al docente ser parte activa de la actividad en el aula, construyendo, implementando y analizando situaciones que favorecen el aprendizaje. Otros problemas de investigación que podrían estudiarse son:

  - ¿Es posible lograr la conceptualización significativa de la elipse y la hipérbola bajo el enfoque de lugar geométrico en estudiantes de grado decimo integrando otro ambiente de geometría dinámica?

  - ¿Es posible contrastar, a nivel escolar lo geométrico y analítico en la enseñanza aprendizaje de las cónicas bajo una metodología de ingeniería didáctica?

Bibliografía

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5, 25-55.*

Artigue, M. (1994). Didactical Engineering as a Framework for the Conception of Teaching Products. En R. Biehler, R. Scholz, R. Straber, B. Winkelmann (Eds.). *Didactics of mathematics as a scientific discipline*. (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*. (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D., & Robutti, O. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, ZDM,* 34 (3), 66-72.

Aubanell, A. (2009). Estudio de cónicas a través de actividades manipulativas. En N. Planas y A. Alsina (Coords.). (pp. 197-203). *Educación matemática y buenas prácticas*: *infantil, primaria, secundaria y educación superior*. Barcelona: Graó.

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas. En N. Gorgorió, J. Deulofeu & A. Bishop. (Eds.), *Matemáticas y Educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional*. (pp. 93-108). Barcelona, España: Graó.

Balacheff, N. (1994). La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique. En Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France*. (pp.364-370). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environment in Mathematics. En A. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 469 – 501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bartolini Bussi, M. G. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En C. Hoyles, J. Kilpatrick & O. Skovsmose (Eds.), *The meaning of Mathematics Education* (Vol. 37, pp. 39 – 60). Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.

Bishop, A. (1983). Space and Geometry. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquicitions of matemathics concepts and processes*. Nueva York : Academic Press.

Bongiovanni, V. (2007, Diciembre). Etude historique des premières caractérisations des coniques. *Revista Brasileira de História da Matemática*, RBHM, Especial No. 1– Festschrift Ubiratan D'Ambrosio–, 7 (14), 439-462.

Boyer, C. (1996). *Historia de las Matemáticas*. (Trads. M. Martinez). Madrid. España: Alianza Editorial (Trabajo original publicado en 1968).

Brousseau, G. (1986). Fondaments et methodes de la didactique des mathematiques. *Recherches en didactique des mathematiques*, 7(2), 33-115.

Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Universidad Nacional de cordoba. Facultad de Matemáticas, astronomia y fisica , Serie B. Trabajos de Matemáticas, Nº 19, versión castellana.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (2000). *Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaie: l'étude de l'espace et de la géométrie.* (pp. 67-83). Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques (Ed.). M. Kourkoulos, G. Troulis y C. Tzanakis. Rétino: Universidad de Creta.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (1era. ed.). (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Camargo, L. & Guzmán, A. (2005). Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. *Relaciones entre la pendiente y la razón*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Chevallard, Y. & Michel, J. (1991). *Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège 2* Petit X.- Marsella. 27 (1), 41-76.: IREM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (1998). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. (3ra Ed.). Buenos Aires, Argentina: Aique.

Chevallard, Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques, le problème de l'ingénierie didactique. En: B. Cornu (Dir.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques.* (pp. 183-203), PUF, Paris.

Cuoco, A. & Goldenberg, P. (1997). Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis. En J. King & D. Schattschneider. (Eds.). Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research. (pp. 33-44). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America.

Goldenberg, P. & Cuoco, A. (1998). What is dynamic geometry. En R. Lehrer y D. Chazan (Eds.), Designing learning environments for developing understanding of geometry and space. (pp. 351–368). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Davison, I. & Pratt, D. (2003). An investigation into the visual and kinaesthetic affordances of interactive whiteboards. En: *British Educational Communications and Technology Agency, ICT research bursaries: a compendium of research reports ; a report on the ICT Research Bursaries 2002-03*. No. 16, 29–33. Recuperado de: http://www.becta.org.uk/page_documents/research/bursaries_report.pdf

De la Rosa, L. (2010). *Una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando un procesador geométrico*. Escuela Nacional Preparatoria Plantel "Pedro de Alba" UNAM, México D.F. Recuperado de http://geometriadinamica.org/actividad/Actividades/Construyendoalaparabola.pdf

Díaz, C.; Álvarez, J.; Torres, L. & Guacaneme, E. (1998). *Tercer Estudio Internacional de Matemáticas y Ciencias. Análisis y Resultados Prueba de Matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional. Serie Publicaciones para Maestros. Bogotá: Creamos Alternativas.

Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

España, M. (2010). *Aproximación didáctica al proceso de diseño de un módulo para la formación docente en el conocimiento matemático de las cónicas en un ambiente de aprendizaje informático*. (Tesis de pregrado). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

Fernández, E. (Abril – Septiembre 2009b). Un enfoque al estudio de las cónicas: el caso de la parábola como lugar geométrico en el ambiente de geometría dinámica Cabri Géomètre II. *Cuadernos del Maestro. Revista de Educación y Pedagogía*, 3 (4), 9-28.

Fernández, E. y Garzón, D. (2007). *Módulo 3: Pensamiento Geométrico y Métrico. Unidad 2: La Geometría en el Ámbito Escolar. 2.1. Las Representaciones en Matemáticas*. En: Programa de Formación Permanente de Educadores en Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali. [En línea y en CD-ROM]. Disponible en línea en: En las memorias electrónicas en CD y En el sitio Web del Campus Virtual Universidad del Valle. Cali, Colombia: https://proxse13.univalle.edu.co/campus/moodle/file.php/1290/pensamiento/Unidad2/versionpdf/matematicas_modulo3_unidad2.pdf. [Consultado 17 de marzo, 2010].

Fischbein, E.(1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24 (1), 139-162.

Godino, J.(1991). Hacia una teoria de la didactica de las matematicas. En A. Guitierrez (Ed.). *Area de conocimiento Didactica de las matematicas*. Madrid: Sintesis. Disponible en Internet en: http://www.profepavez.cl/4didactica/masdidactica/1_Hacia_teoria_didactica_matematica_Godino.pdf

Goldin, G. & Kaput, J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. En L. P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin & B. Greer. (Eds.), *Theories of Mathematical Learning*. (pp. 397-431). Mahwah, New Jersey, E.U.: Lawrence Erlbaum Associates.

González, P. M. (2003). Apolonio, ¿Perga 262 a.C. -Alejandría 190 a.C.? En: *Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas. DivulgaMAT*. Universidad del País Vasco (Bilbao). Disponible en Internet en: http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&task=view&id=3320&Itemid=33

Hansen, V. L. (1998). Everlasting Geometry. En C. Mammana & V. Villani (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study*. (pp. 9-18). Netherlands: Kluwer Academic Publishers. Recuperado en: http://fractus.mat.uson.mx/Papers/ICMI/Geometria.htm

Healy, L. (2000) Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft cabri construction. En T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 103 – 117). Hiroshima, Japón: Hiroshima University and PME.

Hilbert, D. & Cohn-Vossen, S. (1952). Geometry and Imagination. (2da. Ed.). (Trad. P. Nemenyi). Nueva York: Chelsea Publishing Company.

Jahn, A. P. (2002, Junio): "Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 78 – 84.

King, J. & Schattschneider, D. (Eds.). (1997). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. Washington D.C. E.U.: The Mathematical Association of America Service Center.

Kline, M. (1986). *El fracaso de la matemática moderna: ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* (11ma. ed.). Madrid, España: Siglo XXI.

Laborde, C. (1998a). Cabri-Géomètre o una nueva relación con la geometría. En L. Puig & J. Calderón (Eds.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemática*. (pp. 33-48). Bogotá: Una Empresa Docente.

Laborde, C. (1998b). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer – based environment. En C. Mammana & C. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. An ICMI Study* (pp. 113 – 121). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (1998a). Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer – based environment. En C. Mammana & C. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century.* An ICMI Study. (pp. 113 – 121). Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with Cabri-Geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, (3), 283-317.

Laborde, C. (2005a). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, & O. Skovsmose (Eds.), *The meaning of Mathematics Education*. (Vol. 37. pp. 159– 179). Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.

Laborde, C. (2005b, 12-16 de Diciembre). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. En *10th Asian Technology Conference in Mathematics*. Cheong-Ju: Korea National University of Education.

Lupiañez, J. L. & Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. En P. Gómez, & L. Rico, (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas* (M. Acosta & J. Fiallo Trads.). Bucaramanga, Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1993).

Monroy, L. A. & Rueda, K. L. (2009). *Conceptualización de la simetría axial y la translación con mediación del programa Cabri Geometry II.* (Tesis de pregrado no publicada). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia. Disponible en Internet en: http://matematicas.uis.edu.co/~martin/TrabajoGradoTransfCabri.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: http://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf

Morales, M.; W.; Torres, Joya, A.; Romero, J. & Salgado, D. (2007). *Nuevas Matemáticas 9*. Bogotá: Santillana.

Moreno, L. (2001). Cognición, Mediación y Tecnología. En: *Avance y Perspectiva*, 20 (1), 65-68.

Olmstead, E. (1998). Exploring the locus definitions of the conic sections. En: *Mathematics Teacher*. 91, (5), 428-435.
Papert, S. (1980). *Mindstorms: Children, Computers, and Powerful Ideas*. Brighton: Harvester Press.
Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas: problema central del desarrollo.* (2da Ed.). Madrid: Siglo XXI.
Piaget, J. & García, R. (1982). Desarrollo Histórico de la Geometría. En *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* (1era. Ed.). México D.F.: Siglo Veintiuno Editores.
Planchart, O. (2009). Estudio de un problema: El gato en la escalera. El lugar geométrico. *Revista 360º*, 4, 1-2.
Presmeg, N. (1986). Visualisation in high school mathematics. *For the learning of mathematics*, 6 (3), 42-46.
Río-Sánchez, J. del. (1989, Enero-Diciembre). Ideas previas en Matemáticas: una investigación sobre las cónicas. *Studia Paedagogia, revista de Ciencias de la Educación*, (21), 61-81.
Río-Sánchez, J. del. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Síntesis.
Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación – acción*. (Tesis de doctorado no publicada). Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, Granada. España
Santos-Trigo, L. M. (2001, Julio - Agosto). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y Perspectiva*, 20, 247-258.
Santos-Trigo, L. M., Espinosa, H. & Reyes, A. (2005). Constructing a Parabolas' World Using Dynamic Software to Explore Properties and Meanings. *The International Journal for Technology in Mathematics Education*, 3(12), 125-134.
Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and using Loci with Dynamic Geometry Software. En J. King & D. Schattschneider. (Eds.). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research*. (pp. 79-87). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. En: *Educational Studies in Mathematics*. 22 (1), 1-36.
Sinclair, M. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches y accompanying materials. En: *Educational Studies in Mathematic.* 52(1), 289-317.
Wills, H.; Guarín, H.; Londoño, N.; & Gómez, R. (1976). *Matemáticas Moderna Estructurada 4*. Bogotá: Norma.
Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization?. En Zimmerman, W. & Cunningham, S. (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. (pp. 1-8). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.

ANEXOS

ANEXO A. SITUACIÓN DIDÁCTICA Nº. 1

CONSTRUCCIÓN GEOMETRICA DE LA PARÁBOLA, A TRAVES DE LOS CONCEPTOS DE MEDIATRIZ Y DE DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA.

ENUNCIADO:

Dada una recta *d* y un punto cualquiera F que no pertenezca a *d*; encontrar el conjunto de puntos equidistantes de la recta *d* y del punto fuera de ella F.

PARTE I

Realice la siguiente construcción geométrica en Cabri.

1. Abre el AGD Cabri.

2. Construye una recta, recuerda que para ello hay dos maneras de hacerlo, partiendo de dos puntos previamente creados ó partiendo de un punto y una dirección, en esta construcción se trabajará con la segunda opción así:

Parte de un punto y una dirección para esto, construye una recta, para ello, dirígete al submenú líneas, selecciona la herramienta “Recta”, y luego mueve el cursor convertido en lápiz al lugar que deseas situar la recta, para construirla, ubica un punto con el cual se define y luego mueve el mouse para dar la dirección y da otro clic para fijar la posición de la recta, luego nómbrala con la letra *d* si aun no cambias de herramienta, puedes oprimir directamente en el teclado la letra minúscula *d* o en caso contrario, elige la herramienta “Nombrar” del submenú de textos y símbolos y luego dirige el cursor sobre la recta para nombrarla. Para ocultar el punto que apareció con la recta *d*, dirígete al submenú de atributos y escoge la herramienta “Ocultar/Mostrar”, y da clic sobre dicho punto.

3. Ubique un punto fuera de la recta *d*, con la herramienta “Punto”; del submenú puntos, y nómbrelo F.

4. Crea un punto sobre la recta *d* con la herramienta “Punto sobre objeto”, del submenú puntos y nómbrelo Q.

5. Trace una recta perpendicular a la recta *d* que pase por el punto Q. Para ello seleccione la herramienta “Recta perpendicular” del submenú de construcciones. Observe que en este submenú las construcciones requieren de objetos previos para efectuar su acción; nombre a esta nueva recta con la letra *n*.

6. Trace el segmento QF, tomando en el submenú líneas, la herramienta “Segmento”.

7. Construye una mediatriz del segmento QF. Para ello seleccione la herramienta “Mediatriz”, del submenú de construcciones; nombre a esa nueva recta con la letra *m.*

8. Crea el punto de intersección entre la recta perpendicular *n*, con la recta mediatriz *m*. Para ello seleccione la herramienta “Puntos de intersección” del submenú de puntos; nombre a ese nuevo punto con la letra P.

Continuando con el procedimiento de construcción en Cabri, obtendrás una representación similar a la figura 1.

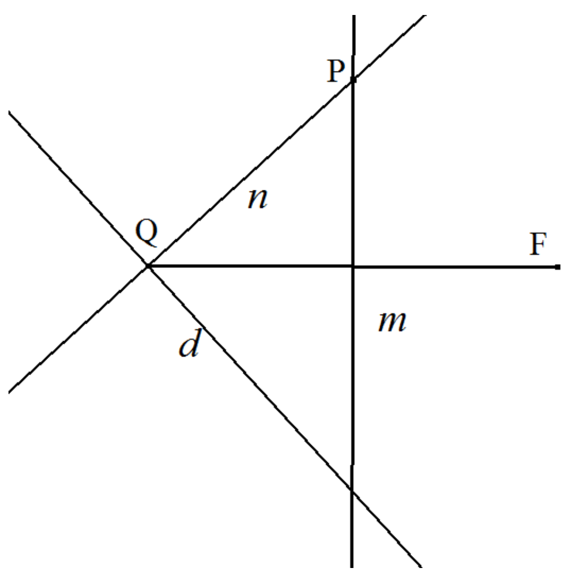

Figura 1

Lee las preguntas que se presentan a continuación con tu compañero(a) y luego discute y ponte de acuerdo las posibles respuestas que puedas encontrar para escribirlas en la hoja de respuesta.

A. Si P es un punto que equidista[14] tanto de la recta *d* como del punto F ¿estará en la mediatriz del segmento QF? Justifique su respuesta. Complementa tu respuesta realizando lo siguiente:

Empieza a experimentar con la construcción realizada, mide la distancia del punto P al punto Q que esta sobre la recta *d* y luego la distancia del punto P al punto F, para esta acción aplique la herramienta "Distancia longitud" del submenú de medidas. ¿Cómo son esas distancias? En segunda instancia mueva el punto F y observe que pasa con las distancias que encontró, para ello aplique la herramienta "Apuntador" del submenú punteros, del mismo modo ahora mueve el punto Q y escribe que pasa con las distancias.

B. ¿Cómo podrías determinar otros puntos equidistantes de la recta *d* y del punto F? Complementa tu respuesta realizando lo siguiente:

Ubique otro punto fuera de la recta, seleccionando la herramienta "Punto" del submenú de puntos, nombre a ese nuevo punto $P_{1;}$ luego mide la distancia de P_1 a Q y de P_1 a F y en seguida arrastre el punto P_1. ¿Qué observas?, esto te ayudará a resolver la pregunta B.

Para contestar la pregunta que sigue a continuación realiza lo siguiente:

Fije la recta *d*: para esto coloque otro punto sobre objeto en la recta *d* con la herramienta "punto sobre objeto" del submenú de puntos y luego escoge la herramienta "Fijar/Liberar" del sub menú de textos y símbolos para poder fijar dicho punto, da clic sobre el punto y aparecerá una tachuela que significa que el punto ya está fijado, después elige la herramienta "Ocultar/Mostrar", del submenú de atributos y da clic sobre el punto sobre objeto que hiciste para ocultarlo, después dirígete al submenú manipulación, herramienta "Apuntador" dale clic para que se oculte el punto. También es necesario fijar el

[14] Equidistar quiere decir en el argot geométrico, hallarse a igual distancia de un punto, de una recta, de un plano o de un sólido.

punto F, para ello, elige la herramienta “Fijar/Liberar” del sub menú de textos y símbolos para poder fijar el punto, da clic sobre el punto F y aparecerá una tachuela que significa que el punto ya está fijado.

C. Si la recta *d* y el punto F, se mantienen fijos (no se los puede arrastrar), ¿A cada posición del punto Q sobre la recta *d*, le corresponde un punto P equidistantes del punto F y la recta *d*? Complementa tu respuesta realizando lo siguiente:

Arrastre el punto Q que está sobre la recta *d* con la herramienta “Apuntador” del submenú punteros, con clic sostenido arrastre el punto Q a lo largo de la recta *d* y observe que sucede con el punto P.

D. Representa la trayectoria que genera el punto P, para ello con la herramienta “Traza” del submenú de textos y símbolos, da un clic sobre el punto P, y después del punto Q, mueve con clic sostenido el punto Q sobre la recta *d*. Describe con tus palabras las características que tienen los puntos de la trayectoria del punto P?

PARTE II

Representa de otra manera la trayectoria que genera el punto P, elige la herramienta “Lugar geométrico” del submenú de construcción, da clic en el punto P y después en el punto Q.

Ten en cuenta los siguientes elementos:

- Una curva como la trayectoria del punto P se llama PARÁBOLA.
- El punto F se llama FOCO DE LA PARÁBOLA.
- La recta d se llama DIRECTRIZ.

E. Con tus propias palabras define lo que es Parábola.

F. Si el punto F se acerca o se aleja de la recta *d.* ¿Qué pasa con la parábola? Complementa tu respuesta realizando lo siguiente:

Antes de empezar a experimentar, recuerda que anteriormente se fijaron la recta *d* y el punto F, para que puedas resolver esta pregunta, debes liberar el punto F, para ello elige la herramienta “Fijar/Liberar” del submenú de textos y símbolos y dale clic al punto F para que se libere. Inmediatamente después escoge la herramienta “Apuntador” del submenú de manipulación y con clic sostenido arrastra el punto F.

G. Si se mueve el punto F hasta sobreponerlo en la recta *d*. ¿Qué pasa con la parábola? ¿A qué se debe este comportamiento?

H. Si el punto F se coloca del otro lado de la recta *d.* ¿Qué pasa con la parábola?

I. ¿Cuál es el punto de la parábola cuya distancia a la recta directriz *d* es la menor de todas?, Complementa tu respuesta realizando lo siguiente:

Antes de contestar, trace una recta perpendicular a la recta *d* que pase por el punto F. Para ello seleccione la herramienta “Recta perpendicular” del submenú de construcciones. Nómbrela e Después marque el punto de intersección entre la recta perpendicular y la recta *d*. Para ello seleccione la herramienta “Puntos de intersección” del submenú de puntos; nombre a ese nuevo punto con la letra I. Ahora ubique un punto sobre objeto sobre la Parábola, con la herramienta “Punto sobre objeto” del menú de puntos y nombre a ese punto con la letra R, luego mide la distancia entre el punto I y el punto R, arrastre dicho punto sobre la parábola y observe que sucede a la distancia mínima entre el punto R y el punto I, nómbrelo V.

El punto que hallaste con las características anteriores se llama VÉRTICE DE LA PARÁBOLA.

La recta perpendicular a la directriz que pasa por el foco, se llama EJE FOCAL O TAMBIEN DENOMINADO EJE DE SIMETRÍA DE LA PARÁBOLA.

J. Mide la distancia entre el punto V y el punto F, con la herramienta “Distancia o longitud” del submenú de medidas, de la misma manera mide la distancia entre el punto F y el punto de intersección I, compare dichas distancias y establezca una conclusión.

La distancia del vértice al foco de llama DISTANCIA FOCAL DE LA PARÁBOLA.

ANEXO B. SITUACIÓN DIDÁCTICA Nº. 2

CONSTRUCCION DE UNA CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA PARA ENCONTRAR FOCO Y DIRECTRIZ.

ENUNCIADO:

Dada una parábola, encuentra el foco y la directriz.

PARTE I

Realice la siguiente construcción geométrica en Cabri.

1. Abre el AGD Cabri.

2. Construye una recta, partiendo de un punto y una dirección, nombra a dicha recta con la letra *l*; y oculta el punto que apareció con ella.

3. Construya un punto cualquiera fuera de la recta *l*, y nómbrelo V.

4. Crea un punto sobre la recta *l* y nómbrelo Q.

5. Construye el segmento QV.

6. Trace una recta perpendicular a la recta *l* que pase por el punto Q y nómbrala *a*.

7. Construya una recta perpendicular al segmento QV que pasa por V, y denomínela *t*

8. Determina el punto de intersección entre la recta *t* y la recta *a* y nómbrelo con la letra R.

9. Fije con la herramienta "Fijar/Liberar" que está en el submenú de textos y símbolos, el punto V y represente el lugar geométrico generado por los puntos R cuando se arrastra Q.

Continuando con el procedimiento de construcción en Cabri, obtendrás una representación similar a la figura 1.

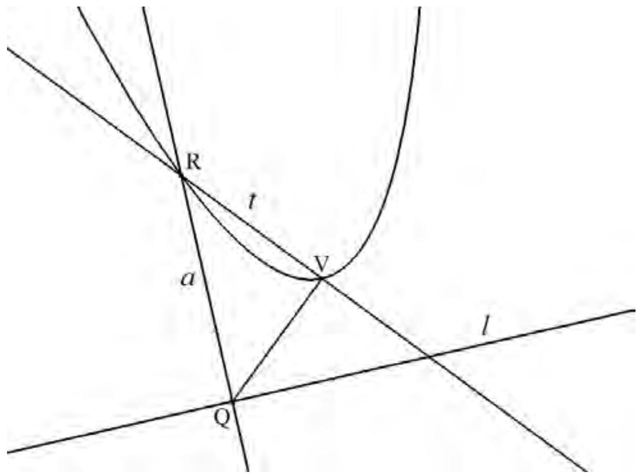

Figura 1

A. Empieza a arrastrar lo que se deja mover, observa qué permanece invariante y que no; con la construcción realizada, cambia de posición la recta *l*, con el mouse mueve y llévala a una posición similar a la figura 2 ¿Qué sucede con la construcción si volvemos y arrastramos el punto Q sobre la recta *l*? Ver figura 2.

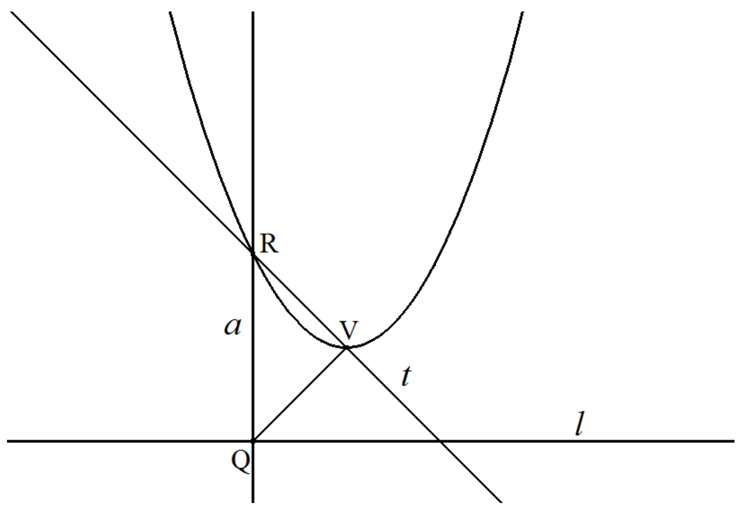

Figura 2

PARTE II

Usar Cabri puede ayudarte a localizar la posición del foco y directriz.

1. Trace una recta perpendicular a la recta *l* que pase por el punto V nómbrela a esta recta *b*.

2. Dibuje una recta perpendicular a la recta *a* que pase por el punto V, a esta nueva recta nómbrela recta *c*.

3. Crea un "punto sobre objeto" cualquiera sobre la recta *b* en la parte superior de la parábola, nómbralo F.

4. Dibuje una circunferencia con centro V y radio VF, esta corta la recta *b* en un punto, llámalo F' (Ver figura 3).

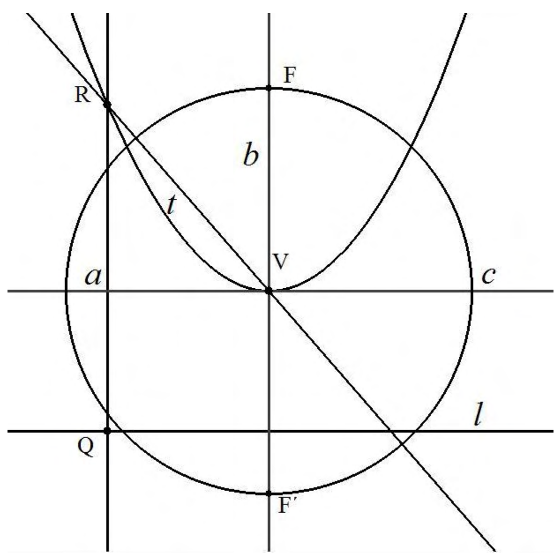

Figura 3

Lee las preguntas que se presentan a continuación con tú compañero, discútelas y luego ponte de acuerdo con las posibles respuestas que puedas encontrar para escribirlas en la hoja de respuesta.

A. ¿Qué puedes suponer del punto F con respecto al punto V?

B. ¿Si dibujas también una perpendicular que llamaremos *d* a la recta *b* que pasa por el punto F' en qué vendría a convertirse esta recta con respecto a la parábola? Explica tu respuesta.

C. Las rectas *a* y *d*, se interceptan en un punto el cual llamaremos U. ¿Que figura forma los puntos U, F y R?

Continúa las siguientes preguntas con base en la figura 4.

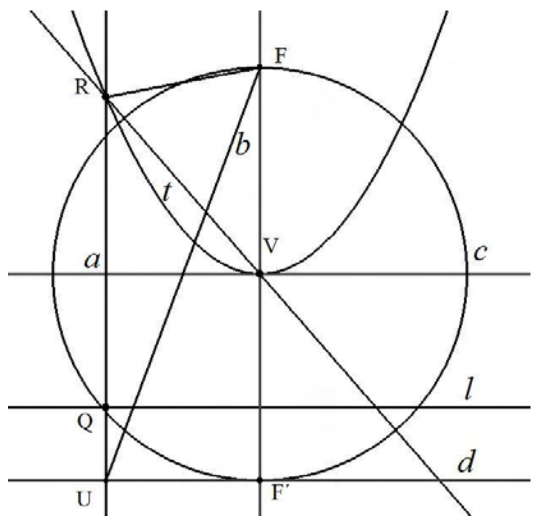

Figura 4

Ten en cuenta, que la parábola es el lugar geométrico de los puntos equidistantes a una recta dada, llamada directriz, y a un punto fijo que se denomina foco.

Según la definición anterior, ¿Qué clase de triángulo debería ser UFR para que cumpla la definición de parábola como lugar geométrico? Explica tu respuesta

D. ¿Cómo encontrarías el foco y la directriz de esta parábola?

Arrastra F, realiza algunas mediciones.

E. Presenta un argumento válido para demostrar que son el foco y la directriz de esta parábola.

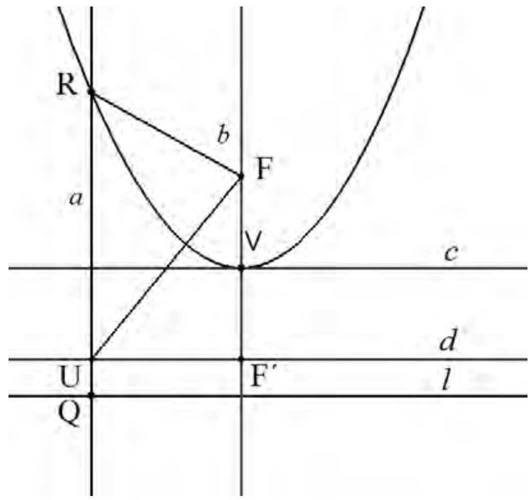

Figura 5

Trata con esto: marca el punto de intersección entre la recta *c* y segmento UF, llámalo M. Observa la posición del punto M, cuando mueves el punto F a lo largo de la recta *b*, ¿No te parece que es un punto fijo?

Ahora marca el punto de intersección entre la recta *c* y la recta *a*, llámalo S. Con Cabri, puedes verificar que el punto M es o no un punto fijo y además si es el punto medio de los segmentos SV y UF. (Figura 6)

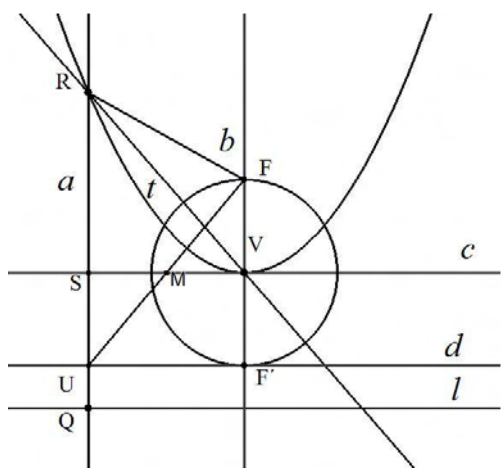

Figura 6

Oculta la circunferencia, dibuja un segmento MR y traza una recta perpendicular a MR que pase por el punto M, esta perpendicular intercepta a la recta *a* en un punto, el cual se constituirá como un punto sobre la directriz y a la recta *b* en un punto donde debería estar el Foco.

¿Qué harías si se quiere que el foco sea el punto F?

¿Cómo se llama la recta directriz, según la construcción?

ANEXO C. SITUACION DIDACTICA Nº. 3

CONTRUCCIÓN GEOMETRICA DE LA PARÁBOLA CON BASE EN LA PROPIEDAD DE LA CIRCUNFERENCIA

ENUNCIADO:

> Dados una recta *d*, un punto A exterior a ella cualesquiera, y un punto B que pertenezca a la recta *d*, encontrar una circunferencia C que pase por A y pase por B simultáneamente, pero B debe ser un punto de tangencia a la recta *d*, es decir, la recta *d* debe ser tangente a la circunferencia C en el punto B. Luego de que haya encontrado la circunferencia C que cumple con dichas condiciones, entonces encuentre el lugar geométrico generado por el centro de la circunferencia C, a dicho centro, denomínelo O.

PARTE I

Realice la siguiente construcción geométrica en Cabri.

1. Abre el AGD Cabri.

2. Construye una recta, partiendo de un punto y una dirección, nombra a dicha recta con la letra *d*; y oculta el punto que apareció con ella.

3. Ubique un punto exterior (fuera de la recta *d*) cualquiera, y nómbrelo A.

4. Crea un punto sobre la recta *d* y nómbrelo B.

Se obtendrá una representación similar a la figura 1

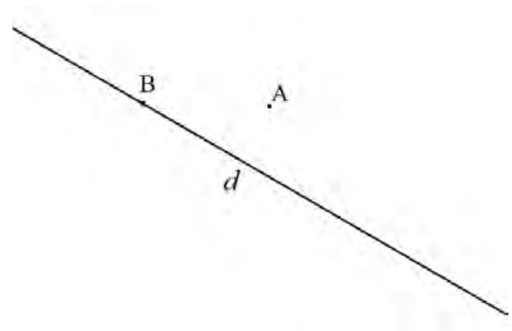

Figura 1

PARTE II

Lee las preguntas que se presentan a continuación con tu compañero(a), discútelas y luego ponte de acuerdo con las posibles respuestas que puedas encontrar para escribirlas en la hoja de respuesta.

Antes de empezar ten en cuenta lo siguiente:

CIRCUNFERENCIA: es el lugar geométrico de los puntos del plano equidistantes de otro fijo, llamado centro; a esta distancia se la denomina radio.

PROPIEDAD DE LA TANGENTE: toda recta perpendicular a un radio en un punto de la circunferencia, es una recta tangente a la circunferencia.

A. Encuentre el centro O de la circunferencia C y describa paso a paso ¿Cómo determinó el punto exacto donde está ubicado dicho centro? Tenga en cuenta las características que le pide el enunciado para construir la circunferencia C.

B. Nombre, ¿De qué puntos equidista el centro O de la circunferencia C?

C. Si la recta *d* es tangente a la circunferencia C en el punto de tangencia B como se requería en el enunciado ¿Qué propiedad cumple con relación al radio OB?; verifique tal propiedad.

D. Encuentre el lugar geométrico generado por el centro O de la circunferencia C ¿Cómo se llama la curva que se generó?, describa algunas características de esta curva.

E. Nombre y describa los elementos de ese lugar geométrico que usted ya conoce (directriz, foco, vértice, eje focal), si no están en la construcción que usted realizo, encuéntrelos.

F. Describa que pasa con la circunferencia cuando se arrastra el punto B ¿A qué se debe esto?

G. Qué pasa con la parábola y la circunferencia cuando se arrastra el punto A ¿Qué puedes concluir?

ANEXO D. SITUACIÓN DIDÁCTICA Nº. 4

CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO EN CABRI

ENUNCIADO:

> Dados una recta *d*, dos puntos M y F, donde M pertenece a la recta, y el otro es exterior a ella, encontrar el lugar geométrico descrito por el punto de intersección P entre la mediatriz del segmento MF y la recta perpendicular a *d* por M. Identifique de qué lugar geométrico se trata.

APOYÁNDOTE EN CABRI REALIZA LAS ACTIVIDADES SIGUIENTES PARA QUE OBTENGAS TU PROPIA DEFINICIÓN DE PARÁBOLA.

1. Con la opción “Rectas”, en el tercer icono de la barra de herramientas, traza una recta que pase por un punto cualquiera. Llama a esa recta directriz (usar la opción de texto que puedes encontrar en el icono marcado con la letra "A" de la barra de herramientas).

2. Con la opción “Punto” coloca un punto por arriba de la recta y etiquétalo con la letra F.

3. Con la opción “punto sobre objeto”, en el segundo icono de la barra de herramientas, marca un punto sobre la recta directriz y etiquétalo M.

4. Con la opción “recta perpendicular” que aparece en el quinto icono de la barra de herramientas, traza una recta perpendicular a la recta directriz que pase por M.

5. Con la opción “mediatriz” en el quinto icono de la barra de herramientas, traza la mediatriz entre el punto F y M. Nombra P al punto de intersección entre la mediatriz y la recta perpendicular a la directriz. Hasta aquí te deberá resultar un gráfico como el siguiente:

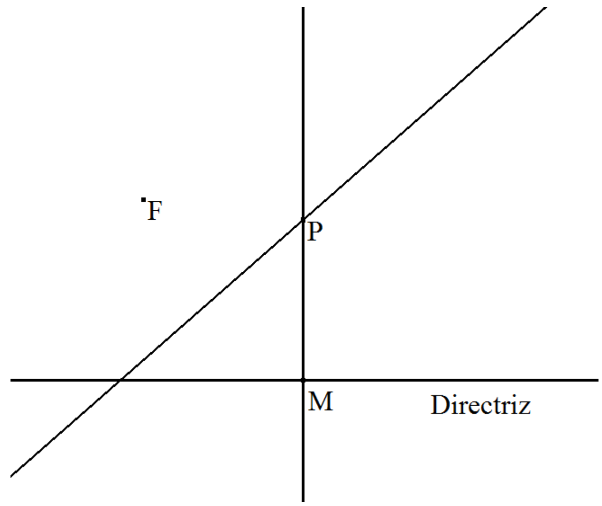

Figura 1

6. Si no has logrado una figura similar a la que se te presenta en la acción anterior, revisa nuevamente los trazos realizados; encuentra y corrige los errores que cometiste. Si la gráfica que obtuviste es similar a la de la acción 4, continúa con lo siguiente. Recuerda que la recta que pasa por el punto P debe ser la mediatriz de los puntos F y M.

7. Traza una circunferencia con centro en P y tocando a los puntos F y M. Usa la opción del cuarto icono “círculo”.

8. Traza los segmentos FP y MP para ello, ve a la barra de herramientas en el tercer icono y selecciona segmento.

9. En el noveno icono de la barra de herramientas, con la opción “Distancia y longitud”, determina las distancias entre el segmento FP y MP. ¿Qué encontraste?

10. Selecciona el punto P y usa la opción “traza” en el décimo icono para activar el punto P.

11. Ahora, mueve el punto M hacia la derecha e izquierda. ¿Qué observas?

12. El gráfico resultante deberá ser algo como esto:

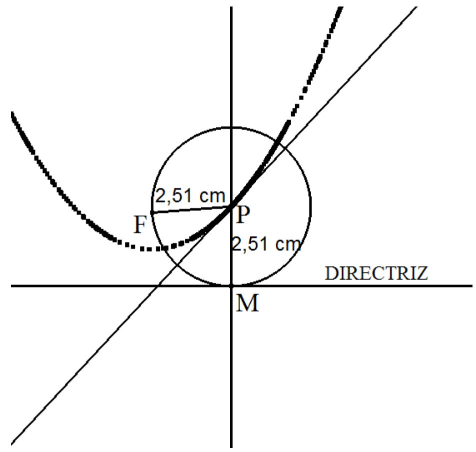

Figura 2

APLICACIONES DEL CABRÍ-GÉOMETRE II

13. En consideración a las acciones anteriores contesta las preguntas siguientes.

A. Mueve repetidamente el punto M y examina detenidamente la trayectoria que describe el punto P, también ten en cuenta lo que pasa con la recta mediatriz de los puntos F y M. ¿Qué logras observar?

B. ¿Podrás afirmar que la parábola es la unión de puntos colineales? ¿Por qué?

C. ¿La parábola se formará mediante la unión de pequeños segmentos de recta?

D. ¿Cómo definirías ahora el concepto de parábola?

E. ¿Qué procedimiento utilizarías para representar la ecuación de la parábola que obtuviste? ¿Podrás elaborar un plan para encontrarla? Descríbelo.

F. ¿Cómo te sentiste al trabajar con este recurso tecnológico?

ANEXO E. ILUSTRACIONES

Figura 30. Camilo y Mario desarrollando las instrucciones de la guía de trabajo de la secuencia didáctica Nº 1

Figura 31. Sebastián y Cristian desarrollando las instrucciones de la guía de trabajo de la secuencia didáctica Nº 1

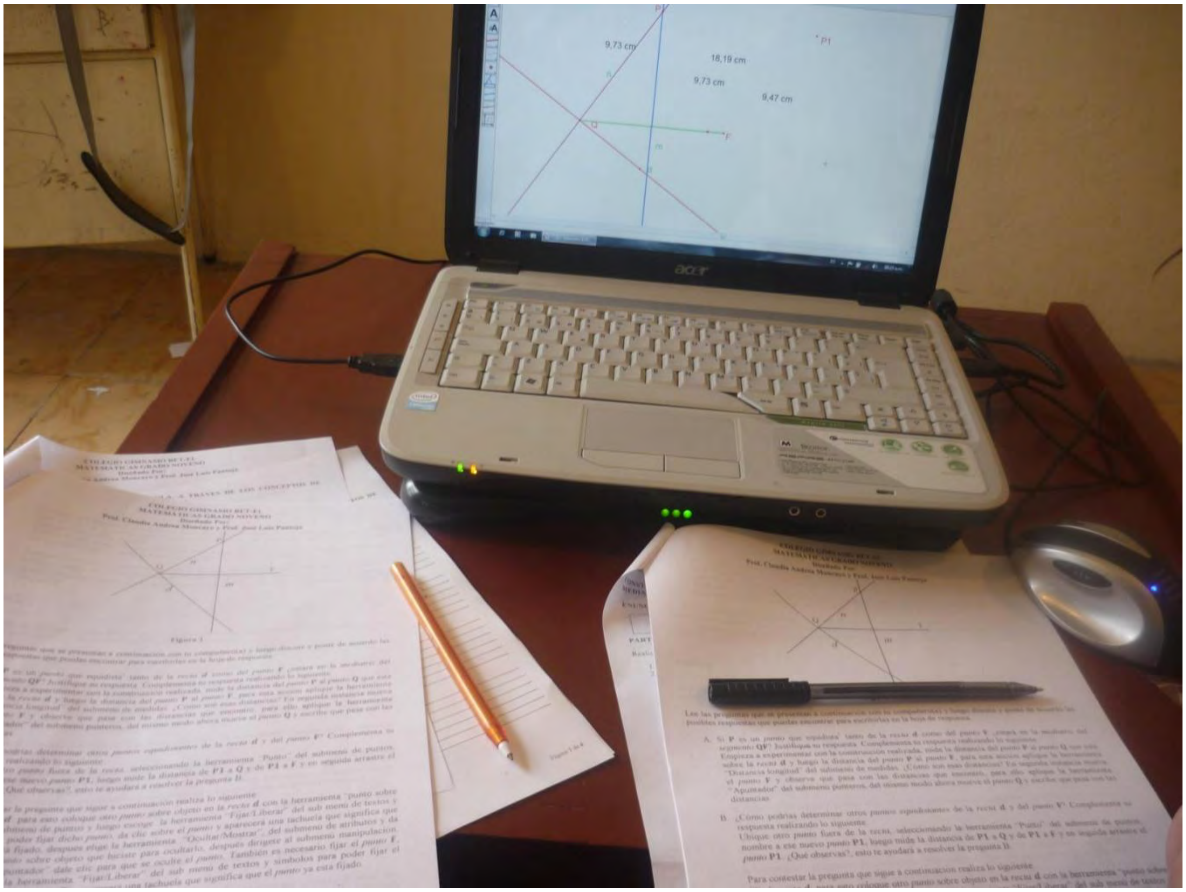

Figura 32. Construcción en Cabri Géomètre II Plus por Sebastián y Cristian

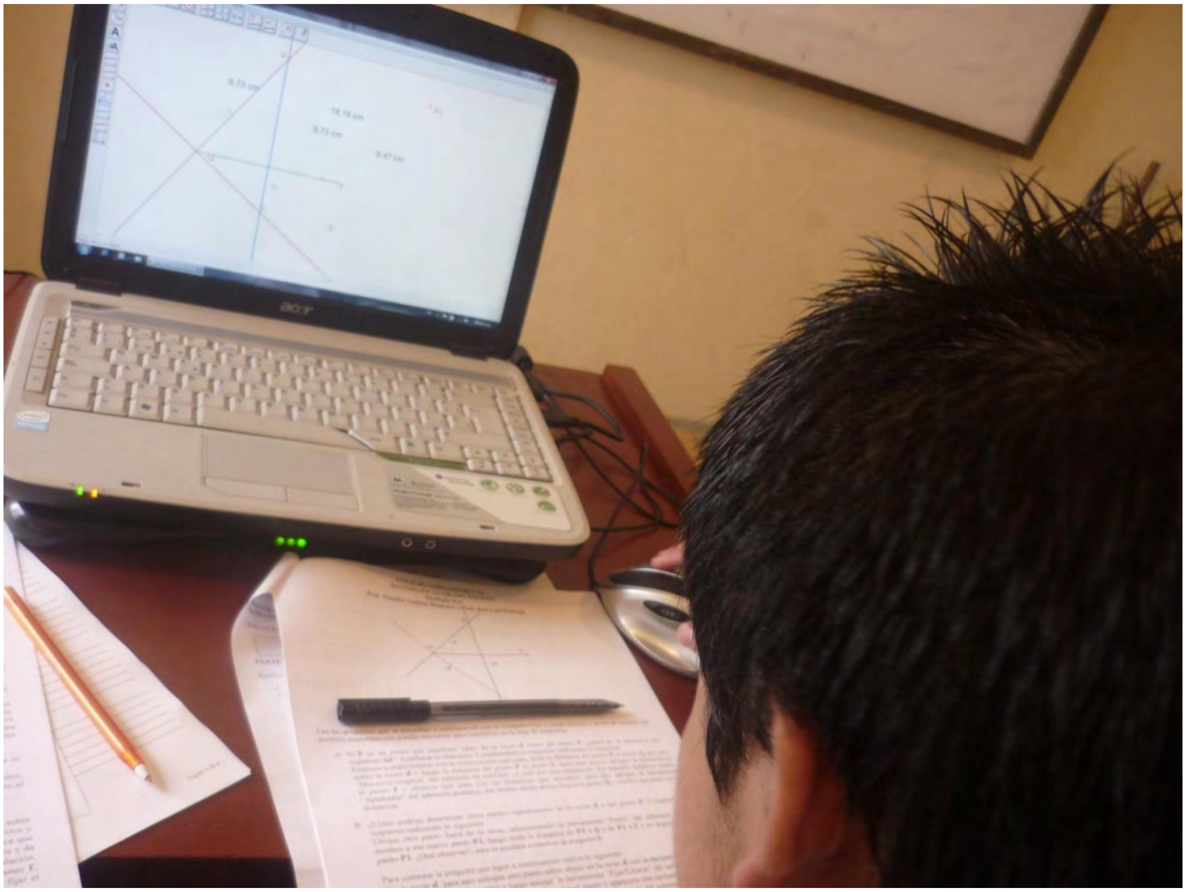

Figura 33. Arrastre de tipo exploratorio sobre un objeto primitivo de la primera configuración geométrica requerida

Figura 34. Registro de la descripción verbal de un fenómeno observado en pantalla

ANEXO F. LISTA DE REGISTROS ESCRITOS DE CRISTIAN Y SEBASTIÁN

Pág.

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

HOJA DE REPUESTAS
SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 1:

CONSTRUCCIÓN GEOMETRICA DE LA PARÁBOLA, A TRAVES DE LOS CONCEPTOS DE MEDIATRIZ Y DE DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA.

NOMBRES. CRISTIAN ERAZO Y SEBASTIAN FERNANDEZ

PARTE 1

A. Si, esta porque P equidista de los dos extremos del segmento $\overline{QF}$

- Si medimos el segmento $\overline{PQ}$ se tiene que es igual $\overline{QF}$ ambos miden (7,5) 7,71 cm.

- Si movemos el punto Q las distancias cambian, aunque siguen siendo iguales entre si

B. No es posible porque el punto P1 no pertenece a la mediatriz de $\overline{QF}$

- Si P1 estuviera sobre la mediatriz, si se podria pero en este caso seria entonces el mismo punto P

C. Si porque si movemos Q sobre la recta le corresponde un punto P de igual distancia

- Si se arrastra el punto Q la distancia hasta el punto P es igual que la distancia que se mide del punto P al punto F

D. la trayectoria del punto P forma una curva que se llama Parabola

- Esta hecha apartir del punto F

- El punto F esta fuera de la recta d

PARTE 2

E. Es un conjunto de puntos que guardan la misma distancia de la recta d y del punto F y que pertenece a una mediatriz

F. Si F se acerca a la recta d la parabola se achica y si el punto F se aleja d la parabola se agranda

G. Al arrastrar el punto F hasta d la parabola desaparece

H. Al colocar F al otro lado de la recta d la parabola cambia de posicion

I. Es el punto donde el eje focal corta a la parabola

J.

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

HOJA DE REPUESTAS
SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 2:

CONSTRUCCION DE UNA CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA PARA ENCONTRAR FOCO Y DIRECTRIZ.

NOMBRES. Cristian Erazo y Sebastian Fernandez

PARTE 1

A. la mayoría de los partes de la Construccion se mueven pero la parábola no Cambia

PARTE 2

A. Suponemos q' el punto F esta a una distancia del punto b q este punto b esta a la misma distancia del punto F prima, si pasara una recta por F prima F vendría a ser el foco por respecto a V

B. Si hacemos pasar la recta d por F' esta recta vendría a ser la directriz y el punto F Sería el foco de la parabola

C. los puntos v, F, R Serian un triangulo.

D. Medimos las distancias de Rv y RF, luego movimos el punto F hasta q' nos dieran las mismas distancias

E. al tratar que el triangulo V, R, F sea un triangulo el tenga dos lados iguales tomamos distancia y longitud a los segmentos R, V y R, F, luego arastramos G, hasta el esos 2 distancias sean iguales, por el punto en hacemos traser una perpendicular a, V, R y eso recta corta la recta b en un punto, tambien construimos un nuevo triangulo, y volvimos a dar distanci y longitud y los valores son exactamente iguales, creemos el F es el foco por el esta a una misma distancia de R con respecto a d el seria la directriz.

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja
HOJA DE RESPUESTA
SITUACION DIDACTICA No. 3
CONTRUCCIÓN GEOMETRICA DE LA PARÁBOLA CON BASE EN LA PROPIEDAD DE LA CIRCUNFERENCIA

NOMBRES CRISTIAN ERAZO Y SEBASTIAN FERNANDEZ

PARTEII

A. Determinamos el punto exacto de la circunferencia ~~la~~ ~~se~~ C con punto medio y lo llamamos O

B. El centro O de la circunferencia equidista de los puntos A y B porque el segmento $\overline{OA}$ es un radio de la circunferencia al igual que $\overline{BO}$

C. Por la propiedad de las tangentes sabemos que las rectas tangentes en un punto de tangencia son perpendiculares al radio, lo verificamos con la pregunta ¿es perpendicular?

D. El lugar geometrico generado por el centro O es una recta, no es una curva, las caracteristicas que encontramos es que esa recta es paralela a la recta d

E. No hay esos elementos o no los podemos encontrar

F.

G.

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

HOJA DE REPUESTAS
SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 4:

CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO EN CABRI

NOMBRES. Cristian Eraso y Sebastian Fernandes

A. Podemos observar q el centro P forma una parabola cuando M se mueve por q la longitud de los Segmentos MP y PF Son Siempre iguales a pesar de q su longitud puede aumentar o disminuir dependiendo de la poscision de M.

B. No se puede afirmar q se la union de puntos colineales por q no todos los puntos tienen la misma direccion, pero de todas formas se puede hablar de una Sucesion de puntos.

C. quiza pueda ser q si puesto q la curva esta formada por infinitos puntos y no se sabria con certeza.

D. es una Sucesion de puntos a cada uno de los cuales le corresponde un unico punto de directriz equidistante de esto y un punto fijo.

E. La Ecuasión ax^2+bx+c con la herramienta Ecuacion, dio:
$y = 0,10x^2 + 0,89x + 1,42$

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

F. nos parecieron muy buenos hacemos cosas si nos aburrian en el cuaderno y nos tomaba mucho tiempo ahora en muy poco tiempo deberian darnos clases de mate de esta Forma.

ANEXO G. LISTA DE REGISTROS ESCRITOS DE MARIO Y CAMILO

Pág.

/

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

HOJA DE REPUESTAS
SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 1:

CONSTRUCCIÓN GEOMETRICA DE LA PARÁBOLA, A TRAVES DE LOS CONCEPTOS DE MEDIATRIZ Y DE DISTANCIA DE UN PUNTO A LA RECTA.

NOMBRES. Mario Diaz y Camilo Mora

PARTE 1

A. P esta sobre la mediatriz del segmento $\overline{QF}$ porque la distancia de P a Q siempre será la misma distancia de P a F

- Aunque se muevan los puntos siempre sera

B. No podemos encontrar otros puntos equidistantes

-Si P_1 es diferente de P nunca van a ser Iguales las distancias QP_1 y P_1F

- No equidistan

C. Al mover el punto Q también se mueve el punto P

D. Se observa que al mover el punto Q la trayectoria del punto P toma la forma de una parabola

La parabola es correspondiente a la recta d

PARTE 2

E. Es la curva que hace que el punto P que equidista de Q que esta sobre la recta directriz y del punto F que es llamado Foco.

F. La parabola se contrae y luego la parabola se ensancha al mover el punto F

G. la porobola se desoporecio porque F toco a d.

H. la parabola se muere de su sitio normal a otro lado

I. La menor distancia se alcasa cuando I coincide con V ya que, esta mida solo 1,25 cm que es la minima distancia registrada

J. alli esta

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

HOJA DE REPUESTAS
SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 2:

CONSTRUCCION DE UNA CONFIGURACIÓN GEOMÉTRICA PARA ENCONTRAR FOCO Y DIRECTRIZ.

NOMBRES. Mario Diaz y camilo mola

PARTE 1

A. al arrastrar el punto Q, el punto de intersección R se mueve formando una parabola

PARTE 2

A. creemos que F con respecto al punto V es el Foco de Esa parabola que construimos

B. si F hasta el punto V tiene la misma medida que desde el punto V hasta esa nueva recta d, d vendria a ser la directriz de Esa parabola

C. La Figura que Forma los puntos Q, F, y R Forman un triangulo.

D. obtuvimos el Foco, arrastrando F hasta que los catetos del triangulo QRF tuvieran la misma medida

Página 1 de 2

E. siguiendo las indicaciones, el triangulo salia isosceles, ya que tendria UR y RF el mismo valor, pero si nos dificulta encontrarlo moviendolo, así que según las indicaciones construimos un nuevo triangulo con una recta que sea perpendicular a MR que pasa por M, encontramos el nuevo F en la recta b, y en la recta a el punto U, es decir que F salia el foco porque la distancia es igual que de RU, por U pasa la nueva recta d que sería la directriz

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja
HOJA DE RESPUESTA
SITUACION DIDACTICA No. 3
CONTRUCCIÓN GEOMETRICA DE LA PARÁBOLA CON BASE EN LA PROPIEDAD DE LA CIRCUNFERENCIA

NOMBRES Mario Diaz Camilo Mora

PARTEII

A. Como nos dan 2 puntos A y B, le doy punto medio y me sale el centro y le doy Circunferencia del centro hasta A y B

B. Como el centro es punto medio de A y B tiene la misma distancia

C. que es una recta y pasa por B

D. la curva se llama recta

E. no hay

F. Ya no es punto tangencial por que se movio

G.

Página 1 de 1

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

HOJA DE REPUESTAS
SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 4:

CONSTRUCCIÓN DE UNA PARÁBOLA COMO LUGAR GEOMÉTRICO EN CABRI

NOMBRES. Mario Diaz y camilo mora

A. encontramos que los segmentos Mp y pF son siempre iguales por ser radios de una misma circonferencia por lo tanto observamos que al mover M el punto p describe una parabola

B. la parabola no es un conjunto de puntos colinealos aunque todos estan sobre una misma curva

C. no se Forman con segmentos de recta porque de ser asi seria una recta y no una parabola

D. es un conjunto de puntos sucesivos que se relacionan con los puntos de un recta directrix y ademas equidistan de Esta y de un punto llamado Foco

E. La Ecuacion que nos dio Fue ax^2+bx+c porque Es el dibujo de la Funcion cuadratica

Página **1** de **2**

COLEGIO GIMNASIO BET-EL
MATEMÁTICAS GRADO NOVENO
Diseñado Por:
Prof. Claudia Andrea Moncayo y Prof. José Luis Pantoja

F. gracias por enseñarnos este metodo ya que la parabola, la conocimos en matematicas en las cuadraticas y esta forma de verlas nos resulta muy buena

Página 2 de 2