

ERRORES COMUNES COMETIDOS POR LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO AL  
INICIAR EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA  
DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS MUNICIPALES DE EDUCACIÓN  
BÁSICA: TÉCNICO INDUSTRIAL,  
FRANCISCO DE LA VILLOTA Y CABRERA

Diana Fernanda López Muñoz  
Omar Henry Silva Castro

Universidad de Nariño  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Programa de Licenciatura en Matemáticas  
San Juan de Pasto  
2013

ERRORES COMUNES COMETIDOS POR LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO AL  
INICIAR EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA  
DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS MUNICIPALES DE EDUCACIÓN  
BÁSICA: TÉCNICO INDUSTRIAL,  
FRANCISCO DE LA VILLOTA Y CABRERA

Diana Fernanda López Muñoz  
Omar Henry Silva Castro

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar al título de  
Licenciado en Matemática

Director  
Luis Felipe Martínez  
Magister en Pedagogías Activas y Desarrollo Humano

Universidad de Nariño  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Matemáticas y Estadística  
Programa de Licenciatura en Matemáticas  
San Juan de Pasto  
2013

## NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo 1<sup>ro</sup> del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

---

---

---

---

Luis Felipe Martínez

---

Director

Fernando Soto Agreda

---

Jurado

Oscar Alberto Narváez Guerrero

---

Jurado

San Juan de Pasto, Marzo de 2013

Mi trabajo lo dedico a...

Dios, por darme la oportunidad de pertenecer a este mundo y con ello cumplir metas propuestas en mi vida. Dedico este trabajo con todo mi corazón a mis padres y hermana: Nancy Muñoz, Fernando López, Carolina López; por ellos tengo fuerza para continuar, me dan la vitalidad necesaria para luchar y superarme cada día más, (los amo); mi madre que desde el cielo me acompaña espiritualmente y recuerdo con amor todas sus enseñanzas. Mi padre que se ha esforzado por nosotros; apuro para que tenga la oportunidad de formarme intelectualmente, él es la piedra angular de mi vida. Mi hermana que ha estado conmigo apoyándome en momentos de alegría y tristeza dándome sabios consejos. En general les agradezco su amor y apoyo incondicional para que esta meta sea haga realidad.

Diana Fernanda López Muñoz

Mi trabajo lo dedico a...

A Dios, Quien me dio el honor y el orgullo de formar parte de mi familia. Me brindo dos padres maravillosos que con su cariño y comprensión me enseñaron que lo que más necesitamos en la vida es el amor, a mis hermanos que fueron mis primeros y mejores amigos. Además, me brindó la oportunidad de conocer a gente única que con su forma de ser marcaron mi camino, a mi gran amor.

Omar Henry Silva Castro

## Agradecimientos

Agradecemos a todos los docentes que pertenecieron y pertenecen al Departamento de Matemáticas y Estadística, que aportaron en nuestra formación, tanto profesional como personal, cultivando valores y principios; a parte de su labor de docencia fueron nuestros amigos haciendo de la universidad nuestro segundo hogar. Le agradecemos al profesor Luis Felipe Martínez por su asesoría. De todo corazón agradecemos a todo el departamento de Matemáticas a nuestros compañeros con los que pasamos momentos felices y difíciles en la carrera.

## RESUMEN

Este estudio investigó los errores más comunes que se presentan en el aprendizaje del álgebra. Dichos problemas se rastrearon usando dos cuestionarios aplicados a estudiantes de octavo grado de las Instituciones Educativas: Técnico industrial, Francisco de la Villota y Cabrera de las jornadas mañana y tarde, del Municipio de Pasto. La información se analizó a la luz de las investigaciones en educación matemática, especialmente de álgebra, de Martin Socas, Luis Rico, la investigación realizada por el grupo de álgebra: *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M)* ( Lesley Booth 1984) y el “pensamiento variacional” propuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Finalmente con los resultados obtenidos se plantean algunos aportes metodológicos para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

## ABSTRACT

This study investigated the most common errors that occur in learning algebra. These problems were screened using two questionnaires administered to eighth grade students of educational institutions: Technical industrial and Villota Francisco Cabrera of the morning and afternoon sessions, the Municipality of Pasto. Data was analyzed in the light of research in mathematics education, especially algebra, Socas Martin, Luis Rico, research by the group algebra: Strategies and Errors in Secondary Mathematics (SESM) (Lesley Booth 1984) and "variational thought" proposed in the Math Curriculum Guidelines. Finally with the results raises some methodological contributions to improve the teaching and learning of algebra.

## TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
Introducción	
Capítulo 1. Contextualización y Objetivos del estudio.....	2
Capítulo 2. <i>Marco Teórico</i> .....	10
2.1. <i>Pensamiento variacional</i> .....	11
2.2. <i>Errores en el aprendizaje del álgebra</i> .....	12
Capítulo 3. Metodología.....	14
3.1. Técnicas e instrumentos.....	15
3.1.1. Cuestionario.....	15
3.1.2. Planeación en matemáticas y cuadernos escolares.....	15
3.1.3. Observación.....	16
3.2. Etapas de la investigación.....	16
3.2.1. Etapa 1. Construcción y socialización.....	17
3.2.2. Etapa 2. Construcción de instrumentos.....	19
3.2.3. Etapa 3. Recolección de información.....	26
3.2.4. Etapa 4. Sistematización, análisis e interpretación.....	27
Capítulo 4. Análisis e interpretación de Datos.....	28
4.1. Análisis e interpretación de la programación de álgebra y cuadernos del grado octavo en las instituciones educativas.....	28
4.1.1. Análisis de la programación de álgebra grado octavo.....	28
4.1.2. Análisis cuadernos de álgebra grado octavo.....	33
4.2. Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.....	38
4.2.1. Cambio de la aritmética al álgebra.....	39
4.2.2. Significado de letras y símbolos.....	44
4.2.3. Del lenguaje común al lenguaje algebraico.....	50
4.2.4. Omisión de signos.....	56
4.3. El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en el Álgebra.....	62

4.3.1. Contexto geométrico.....	62
4.3.1.1. Trabajo aritmético.....	63
4.3.1.2. Trabajo algebraico.....	65
4.3.1.3. Trabajo aritmético algebraico.....	69
4.3.2. Operaciones directas con polinomios.....	74
Conclusiones.....	79
Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.....	79
El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las respuestas en álgebra.....	83
Recomendaciones.....	85
Bibliografía.....	87

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Relación de Número de Estudiantes por Curso.....	14
Tabla No 2. Categorías, Subcategorías y Errores.....	15
Tabla No 3. Etapas y fases de la investigación.....	16
Tabla No 4. Relación de cuestionarios y datos de validación.....	21
Tabla No 5. Cuestionario Número1, Naturaleza Y Significado de Símbolos y Letras.....	22
Tabla No 6. Cuestionario Número 2 Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra.....	23
Tabla No 7. Promedio tiempo prueba piloto.....	24
Tabla No 8. Lenguaje algebraico.....	25
Tabla No 9. Análisis comparativo de documentos de planeación por instituciones.....	30
Tabla No 10. Verticalidad estándares del pensamiento variacional, de grados 1°- 9°.....	33
Tabla No 11. Subcategorías en relación a las preguntas.....	39
Tabla No 12. Porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Cambio de la Aritmética al Álgebra” en relación a las preguntas 1a y 1b.....	44
Tabla No 13. Porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Significado de Letras y Símbolos” en relación a las preguntas 2a y 2b.....	50
Tabla No 14, porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Del Lenguaje Común al Lenguaje Algebraico” en relación a las preguntas: 3a, 3b, 3c, 3d.....	56
Tabla No 15. Porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Omisión de Signo” en relación a las preguntas: 4a, 4b, 4c, 4d.....	61
Tabla No 16. Ocurrencia de error (%), Trabajo aritmético.....	65

Tabla No 17. Ocurrencia de error (%), Trabajo algebraico.....	69
Tabla No 18. Procedimiento inicial ejercicios 1 f) y 1 g).....	72
Tabla No 19. Planteamiento inicial opcional de las preguntas.....	72
Tabla No 20. Segundo paso del desarrollo de las preguntas.....	73
Tabla No 21. Resultado final de las dos preguntas planteadas.....	73
Tabla No 22. Ocurrencia de error (%), Trabajo aritmético- algebraico.....	74
Tabla No 23. Respuestas Tipo 1. Preguntas 2. a), b), c) y d).....	75
Tabla No 24. Respuestas Tipo 1. Preguntas 2. b), c) y d).....	76
Tabla No 25. Respuestas finales. Preguntas 2. e) y f).....	76

## LISTA DE GRAFICOS.

	Pág.
Grafico 1. Resultados prueba saber en matemáticas I.E.M. Técnico Industrial Jornada Mañana y Tarde, Francisco de la Villota y Cabrera.....	4
Grafico 2. Porcentaje general de error; Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras; El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra...	77

## LISTA DE ESQUEMAS

	Pág.
Esquema 1. El Error en el Contexto de la Educación Matemática.....	3
Esquema 2. Aspectos Asociados al Error.....	7
Esquema 3. Variables Intervinientes en el Estudio del Error.....	8
Esquema 4. Conclusiones: Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.....	79
Esquema 5. Conclusiones: El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra.....	83

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura No 1. Planeación I.E.M. Técnico Industrial.....	31
Figura No 2. Planeación I.E.M. Cabrera.....	32
Figura No 3. Planeación I.E.M. Francisco De la Villota.....	32
Figura No 4. Cuaderno IEM. Cabrera, conjuntos numéricos.....	34
Figura No 5. Cuaderno IEM. Cabrera, lenguaje algebraico.....	34
Figura No 6. Cuaderno IEM. Cabrera, identificación de expresiones algebraicas.....	35
Figura No 7. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, operaciones con polinomios.....	35
Figura No 8. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, lenguaje algebraico.....	36
Figura No 9. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, actividades.....	36
Figura No 10. Cuaderno IEM. Técnico Industrial, conjuntos numéricos.....	37
Figura No 11. Tipos de respuestas. Lados Visibles.....	40
Figura No 12. Tipos de respuestas. Particularización del ejercicio dando un valor numérico a la variable.....	41
Figura No 13. Tipos de respuestas. Interpretación Incorrecta.....	42
Figura No 14. Tipo de respuestas. A Punto.....	44
Figura No 15. Tipo de respuesta. Apariencia Visible.....	46
Figura No 16. Tipos de respuestas. Diferentes Letras Significan Diferentes Valores.....	47
Figura No 17. Tipos de respuesta. Particularización.....	47
Figura No 18. Tipo de respuesta. Interpretación Incorrecta.....	48
Figura No 19. Tipos de respuestas. Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra.....	49

Figura No 20. Tipo de respuesta. Ignora la Variable.....	51
Figura No 21. Tipos de respuesta. Mal Uso de Signos de Agrupación.....	53
Figura No 22. Tipos de respuesta. No aplica la Ley Distributiva Correctamente.....	54
Figura No 23. Tipo de respuestas. Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra.....	55
Figura No 24. Tipos de respuestas, Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra.....	57
Figura No 25. Tipo de respuesta. Confusión de la Multiplicación con la Potencia.....	58
Figura No 26. Tipo de respuesta. Sustitución de Letras por Valores Numérico con y sin Paréntesis.....	59
Figura No 27. Tipo de respuestas. Incluye la Letra en su Resultado.....	60
Figura No 28. Tipo de respuestas. Apariencia Visible.....	60
Figura No 29. Tipo de errores. Interpretación Incorrecta.....	61
Figura 30.a. Tipos de respuesta. Olvido significado de Perímetro.....	64
Figura. 31. Tipos de respuesta. Suma incorrecta de la medida de los lados.....	64
Figura 32. Tipos de respuesta. Incomprensión de la pregunta.....	64
Figura. 33. Planteamiento inicial del ejercicio 1. c).....	66
Figura. 34. Error pregunta 3.a), Respuesta final asociada a la aritmética.....	67
Figura. 35. Planteamiento del ejercicio 1. d).....	67
Figura. 36. Planteamiento del ejercicio 1. d).....	68
Figura. 37. Error pregunta 1.d. Respuesta final asociada a la aritmética.....	68

Figura. 38. Planteamiento expresión inicial pregunta 1. e).....	70
Figura 39.a. Respuestas de estudiantes.....	70
Figura 40. Respuestas estudiantes.....	71

## LISTA DE ANEXOS.

	Pág.
Anexo A: Cuestionarios de Preguntas.....	88
Anexo B: Constancia no participación I.E.M. Antonio Nariño.....	93
Anexo C: Instrumento Condiciones actuales del desarrollo programación de álgebra.....	94
Anexo D: Instrumento de validación de cuestionarios por parte de profesionales.....	95
Anexo E: Pruebas piloto, promedio tiempo.....	96
Anexo F: Ocurrencia de error en pruebas piloto. Cuestionario 1.....	97
Anexo G: Ocurrencia de error en pruebas piloto. Cuestionario 2.....	98
Anexo H: Número de estudiantes por curso de cada institución en relación al género.....	99
Anexo I: Consolidado de los tipos de errores por categoría de las tres instituciones.....	100
Anexo J: Tipos de errores por categoría según institución y género.....	101
Anexo K: Consolidado de los tipos de errores por categoría según institución y género.....	102
Anexo L: Constancia del grupo de investigación GESCAS del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.	103
Anexo O: Base de datos cuestionario1. Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.....	104
Anexo P: Base de datos cuestionario 2. El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra.....	123

## INTRODUCCIÓN

El estudio de los errores en matemáticas cometidos por los estudiantes es una línea relevante en la educación matemática donde diferentes autores nacionales e internacionales se han preocupado por la temática, obteniendo importantes resultados que sirven de referentes teóricos para este tipo de investigaciones.

En el presente estudio se propuso identificar los errores frecuentes referidos a la naturaleza y significado de símbolos, y el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, que presentan los estudiantes del Grado Octavo de las I.E.M Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera, del municipio de Pasto en el año 2011.

El estudio se organizó de la siguiente manera. En el primer capítulo, con el nombre de “Contextualización y Objetivos del estudio” se describe y formula la pregunta, la justificación y objetivos del estudio. En el segundo capítulo se expone el Marco Teórico, el cual se constituye de dos núcleos: el pensamiento variacional y los errores en el álgebra. En el tercer capítulo se plantea el tipo de investigación, los instrumentos de recolección de información y las etapas. En el cuarto capítulo se organiza el análisis de los resultados obtenidos, de acuerdo a los objetivos propuestos, y finalmente, en un quinto capítulo, se sintetizan las conclusiones obtenidas del estudio.

## CAPITULO 1

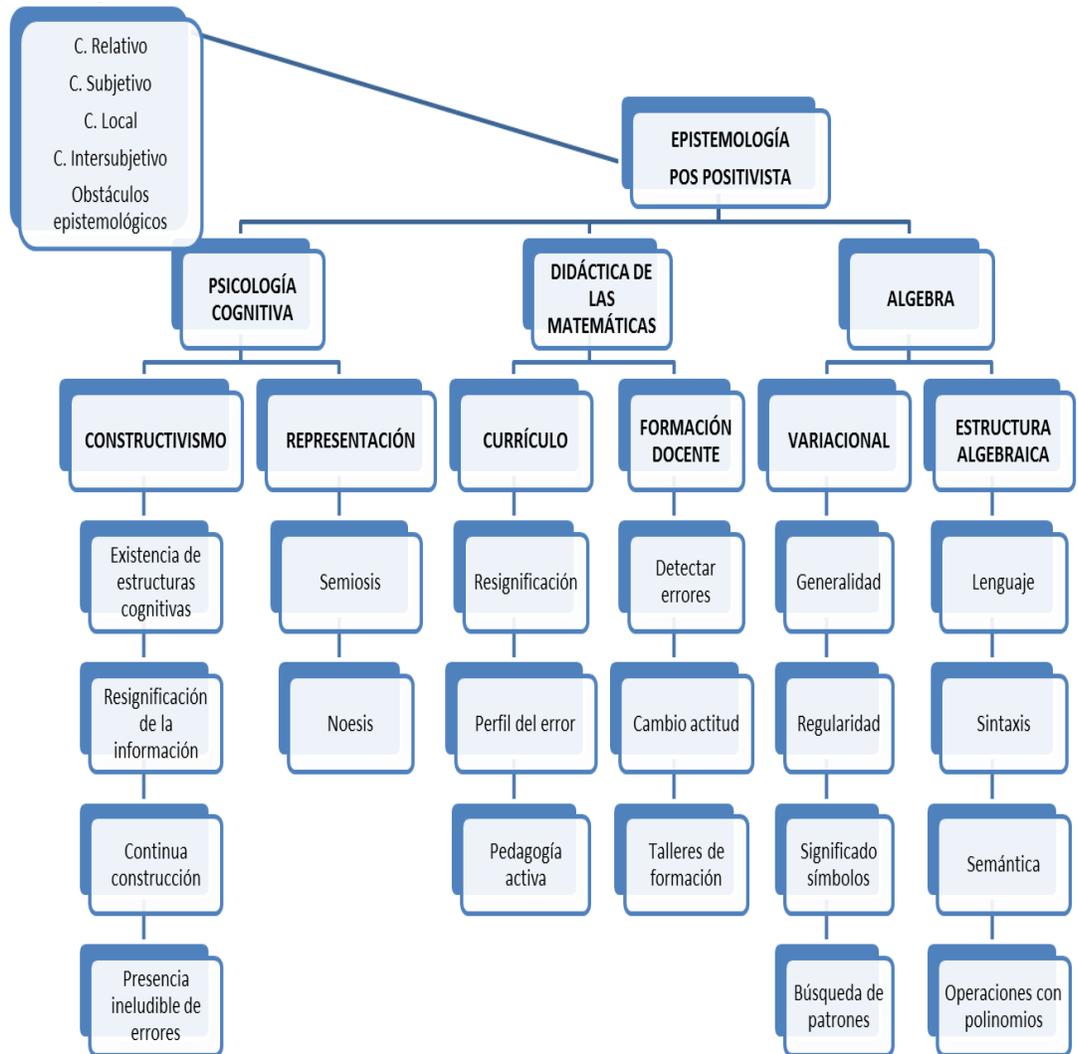
### CONTEXTUALIZACIÓN Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La investigación sobre los errores cometidos por estudiantes en matemáticas, se ubica dentro de la epistemología pos-positivista, quien considera el conocimiento, subjetivo, relativo, no acabado y local, a diferencia de la corriente epistemológica positivista que asume el conocimiento como absoluto, universal y objetivo. En este orden de ideas, se asume el error como parte inherente en la construcción del conocimiento al asumir el enfoque epistemológico pos-positivista, el cual tiene implicaciones en el punto de vista psicológico y didáctico. De ahí que la investigación se fundamenta en los principios de la psicología cognitiva y el constructivismo metodológico, quienes asumen la existencia de estructuras cognitivas capaces de incorporar y resignificar los nuevos conocimientos y la información recibida. En este proceso de construcción constante, es donde se cometen errores, y es también, donde se encuentran barreras, denominadas por Gastón Bachelard, "Obstáculos Epistemológicos". Desde lo didáctico, se deben considerar los errores más comunes cometidos por los estudiantes para la resignificación del currículo de matemáticas, y más específicamente, las planeaciones del álgebra, cuestión que involucra nuevas actitudes y concepciones por parte del docente.

El álgebra, como parte del pensamiento variacional, compromete procesos de pensamiento y demandas intelectuales de mucha exigencia, puesto que la búsqueda de expresiones matemáticas formales invita al uso de la generalización, las regularidades y la abstracción, entre otros procesos. Las estructuras algebraicas debe desarrollárselas en el grado octavo, porque es cuando el estudiante tiene los conceptos básicos y el nivel de pensamiento adecuado para realizar estos procesos de pensamiento requeridos.

Las matemáticas, y en particular el álgebra, son de por sí de naturaleza abstracta y por tanto compleja. Son las representaciones quienes permiten hacerlas entender, y por eso, son un apoyo en esta investigación. Estas representaciones, que son eminentemente semióticas, desde lo didáctico permiten dialécticamente interactuar entre la semiosis y la noesis, Duval (2004). En el esquema 1 se observa una síntesis de lo expuesto anteriormente.

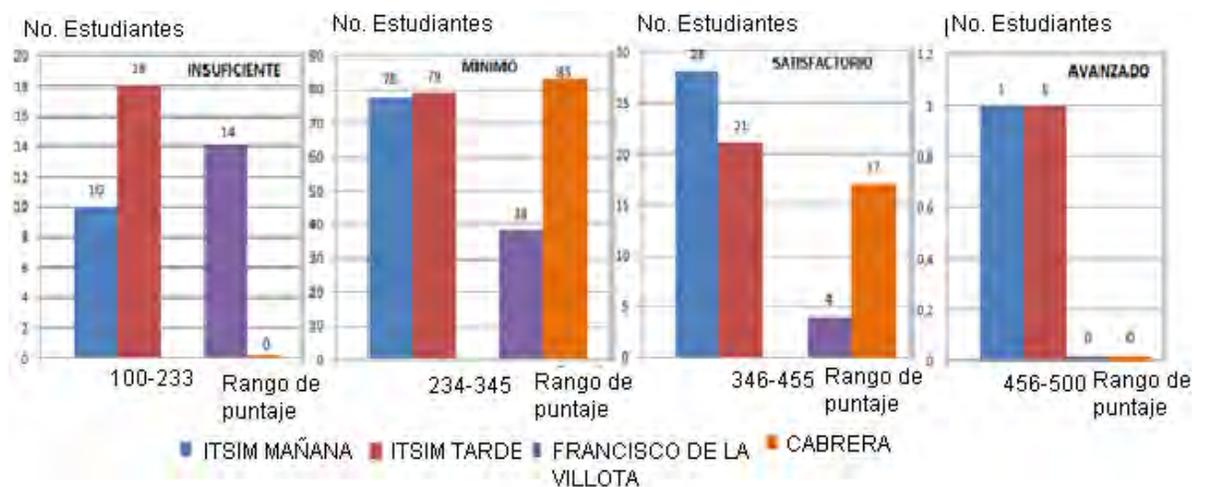
Esquema 1. El Error en el Contexto de la Educación Matemática



Fuente: Esta investigación

Desde el contexto de las instituciones se observa: desconocimiento del “tratamiento de los errores” en el Plan de Área y en las programaciones por grado (Según archivos que muestra cada institución). Dificultades que presentan los estudiantes en los grados superiores (9<sup>o</sup>, 10<sup>o</sup> y 11<sup>o</sup>) para comprender los conceptos matemáticos y de otras áreas del conocimiento por deficiencias conceptuales y procedimentales algebraicas (grado 8<sup>o</sup>), y un atraso en las programaciones de Física, Trigonometría y Cálculo diferencial e integral por dedicarle tiempo a nivelar los conceptos y procedimientos algebraicos.

Gráfico 1. Resultados Pruebas Saber en Matemáticas I.E.M. Técnico Industrial Jornadas mañana y Tarde, Francisco de la Villota y Cabrera.



Fuente: (Ministerio de Educación Nacional. Pruebas Saber de Matemáticas, 2009)

En la gráfica 1 se muestran los resultados de las pruebas saber en matemáticas de las instituciones involucradas en la investigación, clasificados en insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado. Teniendo en cuenta esta clasificación se hace evidente el déficit de estas instituciones en el área de matemáticas, ya que, las tres cuartas partes de los estudiantes se encuentran en el nivel mínimo. Este aspecto fue determinante para escoger a estas instituciones como la población de la investigación. De tal manera que los resultados arrojados al final, sirven como una herramienta útil, para corregir falencias en el desarrollo del álgebra dentro del aula de clase.

Estos errores cometidos, al no ser tratados a tiempo, continúan en grados superiores convirtiéndose en un problema para la asimilación de nuevos conceptos de la matemática y otras áreas del conocimiento, así como para la resolución de problemas que implican el uso de procedimientos algorítmicos más complejos. Este hecho se puede corroborar con la entrevista a docentes de física y matemáticas de la institución Técnico Industrial de los grados superiores, quienes afirman que: “es evidente que existe en los estudiantes de grados

noveno, décimo y once dificultades en cuanto a las operaciones suma y resta de fraccionarios, factorización, cálculo del valor numérico, etc". (Entrevista a docentes de las instituciones en estudio). Los docentes se enfrentan al conflicto entre el desarrollo de la programación de física, la cual requiere de un mínimo de procedimientos básicos del álgebra, frente a la carencia de estos, razón por la cual se ven obligados a hacer un alto en la programación curricular de física para desarrollar los fundamentos básicos del álgebra.

El álgebra es parte del pensamiento variacional, el cual es concebido dentro de los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional como un pensamiento que recorre toda la educación básica y media; sólo que en el desarrollo curricular del álgebra se enfatiza mucho más los aspectos propios del pensamiento variacional, tales como, el manejo de símbolos, el lenguaje común y algebraico, las operaciones con expresiones algebraicas, los casos de factorización, la formulación y resolución de ecuaciones y el manejo de fórmulas y procedimientos. Esta investigación se limita sólo a las operaciones básicas entre polinomios (suma, resta, multiplicación, división).

Los errores que cometen los estudiantes en el álgebra es un problema no sólo de estas instituciones, sino, nacional y mundial. Esto se evidencia con los estudios de muchos investigadores en torno a esta temática; por ejemplo; Davis (1984) elaboró una teoría de esquemas que le permitió tipificar e interpretar los inconvenientes más comunes de los estudiantes, destacando la falta de recuperación de un esquema previo y la inadecuada interpretación de propiedades aritméticas.

Martin Socas, refiriéndose a la investigación elaborada por el "grupo de álgebra del proyecto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M)" llevada a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983 (Booth 1984), clasifica estos errores en cuatro categorías:

"a) La naturaleza y significado de los símbolos y las letras, b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en el álgebra, c) La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes y d) El uso inapropiado de "formulas" o "reglas de procedimientos". (Socas, Martin. Iniciación al álgebra. Ed. Síntesis 1996. pág. 96-97)

Estas cuatro categorías contemplan los diferentes errores que los estudiantes de octavo pueden llegar a cometer, siendo las dos primeras, los criterios de esta investigación para la organización de los mismos.

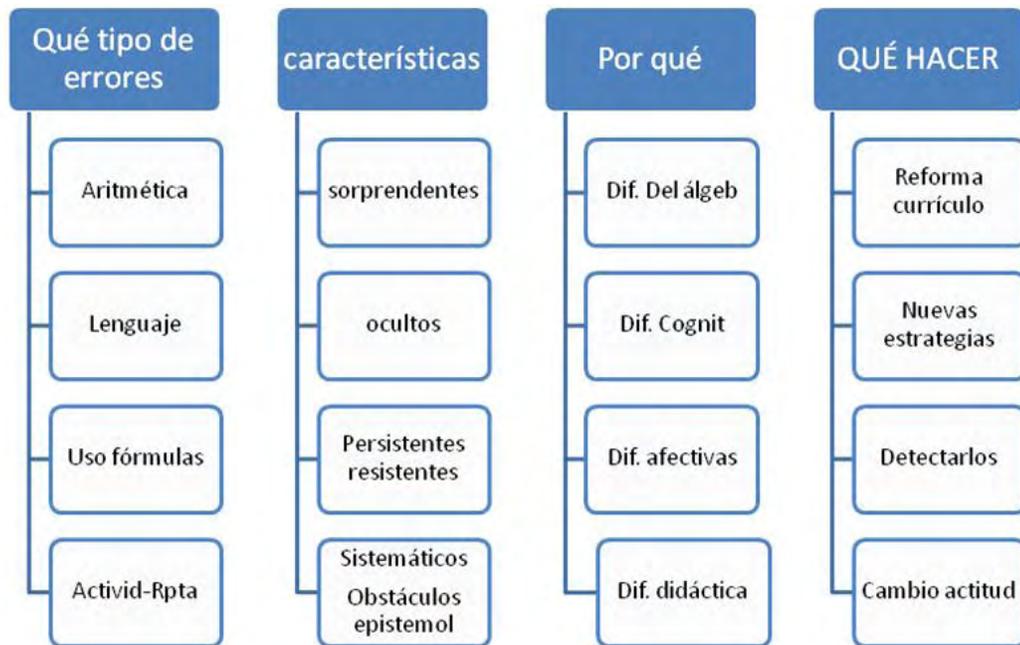
Martín Socas atribuye las causas de los errores ([La educación matemática en la enseñanza secundaria](#) / coord. Por [Luis Rico Romero](#), 1997, ISBN 84-85840-65-8, págs. 125-154) a: La complejidad de los objetos de las matemáticas y procesos de pensamiento como propias de la matemática; las dificultades en los procesos

de enseñanza de las matemáticas; los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Por otro lado, Luis Rico (1995), propone tres líneas de investigación en torno a los errores: “ a). Estudios sobre análisis, causas, elementos y taxonomías de clasificación de los errores; b). Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores; c). Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus estudiantes. Cada una de estas líneas es un campo bastante amplio de investigación, por ejemplo en la primera línea, se pueden contemplar las referidas a los procesos de enseñanza, los procesos de pensamiento matemático, la complejidad de conceptos matemáticos, las asociadas a las actitudes afectivas y emocionales y las asociadas al desarrollo cognitivo del estudiante” (Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.).

El esquema 2 permite visualizar los diferentes aspectos asociados a los errores cometidos por los estudiantes en matemáticas, donde se plantea el tipo de error que puede cometerse en álgebra, las cualidades generales por las que se caracteriza un error, las causas o dificultades que posee un estudiante y unas acciones curriculares que se pueden realizar partiendo del error para enmendarlo.

Esquema 2. Aspectos Asociados al Error



FUENTE: Esta Investigación

Existen diferentes factores que influyen para que un estudiante cometa errores en el álgebra. Unos ya están determinados anteriormente por Martín Socas desde lo didáctico, la complejidad de la misma álgebra, la actitud del estudiante y dificultades cognitivas, pero otros tienen que ver con la familia y el medio sociocultural en el que está inmerso el estudiante. Esta idea se visualiza en el esquema 3.



de investigación en educación matemática, y cobra más relevancia, cuando en estas instituciones no se ha llevado a cabo una investigación sobre esta temática. El objetivo general propuesto para esta investigación fue: Identificar los errores más frecuentes referidos a la naturaleza y significado de símbolos y el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, que presentan los estudiantes del Grado Octavo de las I.E.M Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera, del municipio de Pasto en el año 2011.

Para su consecución, se planteó los siguientes objetivos específicos:

- a) Describir las condiciones actuales del desarrollo de contenidos de álgebra propuestos para grado octavo en las instituciones mencionadas.
- b) Estudiar los errores asociados a:
  - ✓ La naturaleza y significado de símbolos y letras
  - ✓ El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en el álgebra.

## CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

La investigación, “los errores más comunes cometidos por estudiantes del grado octavo al iniciar el estudio del álgebra”, se fundamenta en la epistemología pos-positivista, la psicología cognitiva y el álgebra como pensamiento variacional.

La epistemología pos-positivista permite dilucidar el concepto de error como algo sistemático e inherente a la naturaleza del conocimiento, la psicología cognitiva interviene en la construcción de ese conocimiento matemático por parte del estudiante el cual es dado a través de las representaciones semióticas. Desde esta perspectiva, la semiosis y la noesis juegan un papel importante en el aprendizaje de álgebra debido a la cualidad abstracta que encierra.

Las fuentes de mayor relevancia en esta investigación son: “Los Estándares” y “Lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional”, por el concepto de Pensamiento variacional y sistemas algebraicos que es el punto de vista desde donde se concibe el álgebra; los estudios de Luis Rico, en “Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas”, permite identificar la línea de investigación en esta temática; Martín Socas, en “Dificultades, obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria”, hace una conceptualización desde la educación matemática sobre el error, y, Lesley Booth, en *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M)* llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983, clasifica los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. Estos errores hacen referencia: al significado de los símbolos, la naturaleza de las respuestas en el álgebra, la aritmética como preconcepto y el uso inapropiado de fórmulas.

Existen otras obras, no menos importantes que también son fuentes de consulta. Silvia Mónica del Puerto y Claudia Lilia Minnard, en su libro: “Análisis de los Errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas”, aporta su estudio a la formulación del plan de área de matemáticas basado en el estudio de errores.

Vicente Carrión Miranda, en “Análisis de errores de Estudiantes y Profesores en expresiones Combinadas con números naturales”, enfatiza su estudio con profesores y estudiantes de nivel básico, medio y universitario. El objetivo es clasificar errores en matemáticas, interpretar y analizar las posibles causas que los provocan. Aporta la conceptualización del error desde el punto de vista matemático, sin embargo no enfatiza en el álgebra.

Raquel M. Ruano, Martín Socas y M. Mercedes Palarea, en “Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos

de Sustitución formal, Generalización y Modelización en Álgebra”, hace un estudio sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico a partir de las respuestas a un cuestionario. Se realiza una clasificación de los errores cometidos y sus posibles causas. Finalmente se formulan algunas recomendaciones didácticas a partir de estos errores. Es un estudio bastante afín a la presente investigación.

## 2.1. Pensamiento variacional

Desde la concepción de los lineamientos curriculares, el pensamiento variacional es uno de los cinco pensamientos que presupone superar la enseñanza por contenidos y fragmentada de la matemática a una concepción holística que permita analizar, organizar, y modelar matemáticamente situaciones de variación de su entorno, de las ciencias y de las mismas matemáticas a través de expresiones algebraicas.

En este sentido, para formar al estudiante dentro de este pensamiento, debe ampliarse su desarrollo a toda la educación básica y media. Es más, históricamente, el estudio de la variación se remonta a las tablas babilónicas, luego continúa en el renacimiento con las fórmulas algebraicas y posteriormente, con el estudio del movimiento, se configura el cálculo diferencial e integral como uno de los estadios más altos del pensamiento variacional.

Según el MEN algunos núcleos conceptuales donde hace presencia la variación, son:

- “Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- la función como dependencia y modelos de función;
- las magnitudes;
- el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, para medir el cambio absoluto y el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado.”(minieducación.gov.co.lineamientos-).
- En los contextos de la vida cotidiana, la variación se presenta en su interdependencia de unas medidas con otras: precio versus artículos, lado del cuadrado versus área, velocidad versus tiempo, etc.

Si se abordan los contenidos antes mencionados en contextos de variación, con seguridad que se desarrolla el pensamiento variacional desde los grados inferiores. Sin embargo, el pensamiento variacional es expresado mediante los sistemas de representación. De esta manera tenemos los enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las

representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las expresiones analíticas.

## 2.2. Errores en el aprendizaje del álgebra

En el diccionario Larousse se define error como opinión o juicio falso. Según Vicente Carrión “se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido. Siempre existe la posibilidad de la presencia, la permanencia y la persistencia de errores en la adquisición, desarrollo y consolidación del conocimiento científico”. (Carrión, 2007)

En esta investigación se asume el error como una falencia cometida de forma sistemática, frecuente y no ocasional (a diferencia de un error momentáneo, ocasional, no frecuente), que hace presencia al resolver problemas o situaciones que involucran procesos algebraicos en el contexto del pensamiento variacional.

Se considera como algo inherente al proceso de aprendizaje; son sorprendentes, resistentes y se ocultan a la vista de los docentes. Según Socas (1997), es un esquema cognitivo inadecuado.

Asumir los procesos algebraicos desde el pensamiento variacional significa asumir las expresiones algebraicas que involucren situaciones de cambio y generalización. Sin embargo, estas sólo tienen sentido cuando se interrelaciona con los lenguajes icónico, gráfico y simbólico. Por tanto, el punto de llegada es la sintaxis de las reglas del álgebra y no su punto de partida. Así, el álgebra se convierte en una nueva forma de pensar la matemática, es la expresión de la generalidad.

*“La expresión de la generalidad forma la raíz básica del álgebra porque ésta les da significado a los símbolos que después hay que manipular. Expresar la generalidad que uno percibe es tanto un placer como un esfuerzo”.*  
(Manson, 1999)

La cita anterior invita a los docentes de álgebra a crear espacios y situaciones contextuales que permitan determinar las cantidades constantes y variables y establecer las relaciones entre ellas a partir de las expresiones algebraicas. Es en este contexto del álgebra donde se analizarán las dos categorías de errores:

a) En cuanto a la “Naturaleza y significado de los símbolos”, la matemática tiene una notación que le es propia y que hace posible la aplicación formal de las reglas de la aritmética o del álgebra. Esta notación formal en matemáticas es esencial en el desarrollo de la misma y es causa de gran confusión en los estudiantes. Esto proviene en general, de la separación entre la apariencia visible de la notación y el

significado subyacente de la misma. Una gran parte de los estudiantes intentan ver el significado de una notación, sobre la base de su apariencia visible. El uso de la notación formal puede conducirnos a reglas irracionales o manipulaciones sin sentido y, no obstante, tal manipulación formal es un rasgo esencial de las matemáticas. Dentro del significado de los símbolos es conveniente hacer la diferencia entre variable e incógnita.

El concepto es tan importante que su invención constituye un punto de partida en la historia de las matemáticas convirtiéndose en una de las ideas fundamentales desde la escuela elemental hasta la universidad. La comprensión del concepto de variable proporciona la base para la transición de la aritmética al álgebra y es necesario para el uso significativo de toda la matemática avanzada; para llegar a su concepto se necesita una experiencia introductoria que pudiera servir como base en la cual la idea de variable pueda desarrollarse en sus diferentes significados. Para poder trabajar exitosamente con la variable es necesario poder interpretar de distintas maneras los símbolos que se usan para representarla, así como poder pasar de una interpretación a otra. En resumen, la variable puede tomar infinitos valores a diferencia de la incógnita que asume sólo determinados.

b) El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra. La diferencia de la tarea mental para el estudiante entre la aritmética y el álgebra es que, en aritmética se obtienen soluciones concretas, numéricas, en cambio en álgebra, es la obtención de relaciones entre cantidades expresadas mediante símbolos y la aplicación de fórmulas mediante procedimientos algebraicos adecuados, previa interpretación de esos símbolos. No necesariamente la actividad mental que exige el problema desemboca en la obtención de un resultado numérico, también puede ser otra expresión algebraica. En este sentido, esta es otra clase de errores que se cometen en el álgebra. El paso de la aritmética al álgebra es uno de los tránsitos más difíciles dentro del desarrollo gradual de los contenidos matemáticos, pues en el paso hacia el álgebra, surgen dificultades asociadas al nivel de abstracción de los objetos matemáticos.

### CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA.

Esta investigación es de tipo cuantitativa por cuanto el tratamiento a la información recolectada de los 355 estudiantes de octavo fue a través de tablas de frecuencias y gráficas estadísticas. También tiene elementos cualitativos en cuanto a que se hace una interpretación y comprensión de sentido a las justificaciones expresadas en lenguaje escrito por parte de los estudiantes a cada una de las preguntas del cuestionario.

La población en estudio son los 335 estudiantes pertenecientes a las instituciones Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera, equivalente al 100%. Ver tabla 1.

Tabla No 1. Relación de Número de Estudiantes por Curso

INSTITUCION EDUCATIVA MUNICIPAL	NUMERO DE CURSOS	NUMERO ESTUDIANTES JORNADA MAÑANA	NUMERO ESTUDIANTES JORNADA TARDE	TOTAL NUMERO DE ESTUDIANTES
Técnico Industrial	8	165	132	249
Francisco de la Villota	2	69	0	60
Sede Cabrera	1	28	0	26
TOTAL				335

Fuente: Secretaría de Educación Municipal de Pasto

Tabla No 2. Categorías, Subcategorías y Errores.

CATEGORIA	NATURALEZA Y SIGNIFICADO DE SIMBOLOS Y LETEAS			
SUCATEGORIAS	CAMBIO DE LA ARITMETICA AL ÁLGEBRA	SGNIFICADO DE LETRAS Y SIMBOLOS	DEL LENGUAJE COMUN AL LEGUAJE ALGEBRAICO	OMISION DE SIGNOS
ERRORES	<i>Lados visible, Particularización, Interpretación Incorrecta</i>	<i>Apariencia visible, Diferentes letras significan diferentes valores</i>	<i>Ignora la variable, Mal uso de signos de agrupación, No aplica la ley distributiva correctamente</i>	<i>Desconocimiento del significado de concatenación en álgebra, Confusión de la multiplicación con la potenciación, Sustitución de letras por valores numéricos con y sin paréntesis, Incluye la letra en su resultado</i>
CATEGORIA	EL OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y LA NATURALEZA DE LAS RESPUESTAS			
SUCATEGORIAS	TRABAJO ARITMETICO		TRABAJO ALGEBRAICO	
ERRORES	<i>Olvido del significado de perímetro, Suma incorrecta se la medida de los lados, Incomprensión de la pregunta.</i>		<i>Clausura en el álgebra, Particulariza, Interpretación errónea de la pregunta.</i>	

Fuente: Esta Investigación

### 3.1. Técnicas e instrumentos.

Las técnicas usadas en esta investigación son: el cuestionario de preguntas, las planeaciones de matemáticas del grado octavo por cada institución, los cuadernos estudiantiles y la observación.

#### 3.1.1. Cuestionarios.

Teniendo en cuenta las dos categorías de análisis que se plantean para desarrollar esta investigación: “Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras”, y “El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra”, se elaboró un cuestionario para cada una de ellas, ver (Anexo1). Dicho cuestionario plantea preguntas abiertas y semi-abiertas. Cada cuestionario se aplicó a 335 estudiantes pertenecientes a las instituciones ya mencionadas.

#### 3.1.2. Planeación en matemáticas y cuadernos escolares

El trabajo con estos dos instrumentos permitió dar una visión más amplia de la situación académica en cuanto a contenidos para cada institución, contrastando las planeaciones de matemáticas con los contenidos registrados en los cuadernos

de los estudiantes, con el fin de diseñar cuestionarios acordes a los conceptos trabajados en el aula de clase.

### 3.1.3. Observación

La observación permitió no sólo describir lo evidente sino desenmarañar la red oculta de relaciones que subyacen a las acciones y situaciones humanas. (Alvarado, 1997). Se trata de prestar atención y tomar nota del proceso estudiantil en el aula de clase, cuando el estudiante se enfrenta a situaciones algebraicas que se refiere a operaciones con polinomios, para lo cual se llevó un diario en el que se consignó dicho proceso.

### 3.2. Etapas de la investigación.

Tabla No 3. Etapas y Fases de la Investigación

ETAPAS	FASES
ETAPA 1. CONSTRUCCIÓN Y SOCIALIZACIÓN DEL PROYECTO	a) Revisión bibliográfica.
	b) Estructuración y sensibilización del anteproyecto.
	c) Reajuste y elaboración del Proyecto
	d) Socialización del Proyecto.
ETAPA 2. CONSTRUCCIÓN DE INSTRUMENTOS	a) Revisión Bibliográfica
	b) Condiciones actuales del desarrollo de la programación de álgebra
	c) Diseño de los cuestionarios
	d) Validación de los cuestionarios
ETAPA 3. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	a) Revisión de los cuestionarios
	b) Aplicación de los cuestionarios
	c) Instrumentos de sistematización.
ETAPA 4. SISTEMATIZACIÓN, ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN	a) Revisión bibliográfica
	a) Análisis e interpretación de resultados a las programaciones
	b) Análisis e interpretación de resultados a los cuestionarios
	c) Elaboración del informe final y socialización.

### 3.2.1. Etapa 1. Construcción y socialización

Esta etapa comprendió la búsqueda de información en diferentes fuentes y referentes bibliográficos sobre la temática y la creación de las primeras ideas que permitieron un acercamiento al problema de investigación y los objetivos, así como la estructuración de un marco teórico y metodológico. Bajo esta primera concepción, como hilo conductor del proyecto, los representantes de las entidades oferentes: Subsecretaría de Calidad Educativa del Municipio de Pasto, el Departamentos de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño y la I.E.M Técnico Industrial, en constantes reuniones de trabajo, procedieron a la selección de cuatro Instituciones Educativas Municipales para aplicar el Estudio, atendiendo a los resultados del nivel de bajo logro obtenido por los estudiantes en el área de matemáticas en las pruebas Saber 9 aplicadas en el año 2009. Estas instituciones Educativas Municipales fueron: Francisco de la Villota, Cabrera, Antonio Nariño y la Institución Técnico Industrial. Seguidamente se procedió a sensibilizar a los directivos de cada una de ellas para que faciliten las diferentes actividades investigativas. Como resultado final, la I.E.M Antonio Nariño desistió del Proyecto arguyendo el escaso tiempo para el desarrollo de las actividades curriculares por una gran cantidad de Proyectos de otro tipo que se están ejecutando en la misma. Por esta razón, la investigación mencionada sólo se llevará a cabo con estudiantes del grado octavo en las tres instituciones restantes. Esta etapa tuvo las siguientes fases:

a) Revisión bibliográfica. Es una fase presente en todo el proceso de construcción y desarrollo del Proyecto, puesto que el papel que juega la teoría en la investigación permite identificar el problema, construir el enfoque metodológico y contribuir al análisis de los resultados.

b) Estructuración y sensibilización del anteproyecto. En esta fase, una vez estructurado el anteproyecto, se procedió a presentarlo a la Subsecretaría de Calidad de la Educación del Municipio de Pasto, para su revisión y aceptación. Seguidamente se acordaron reuniones de trabajo para la selección de las Instituciones Educativas, objetos de estudio. Posteriormente se programó una reunión en la I.E.M Técnico Industrial donde se realizó la fase de sensibilización. A ella asistieron: Maricel Cabrera Rosero, como subsecretaria de Calidad Educativa del Municipio de Pasto; Nelson Achicaiza, como Rector de la Institución Técnico Industrial; Alberto Moncayo, como coordinar académico de la Institución Técnico Industrial, los profesores del área de matemáticas de la jornada de la mañana de la Institución Técnico Industrial y los tres investigadores en calidad de presentadores del anteproyecto. Las observaciones pertinentes se retomaron para su perfeccionamiento y posterior redacción del Proyecto.

c) Reajuste y elaboración del Proyecto. Bajo la lectura juiciosa de los libros: “Iniciación al álgebra” de Martín M. Socas Robayna y “Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas” de Luis Rico R. Y las observaciones realizadas

en la reunión de sensibilización, permitieron la redacción del Proyecto, el cual fue socializado en la siguiente fase.

d) Socialización del Proyecto. Ya estructurado y teniendo en cuenta las observaciones, el proyecto se socializó en la Biblioteca de la Institución Técnico Industrial, con participación de la subsecretaria de Calidad del Municipio, La universidad de Nariño, los Rectores de las Instituciones Técnico Industrial y Francisco de la Villota, algunos coordinadores y docentes del área de matemáticas y humanidades. En esta reunión se acordó que la IEM Técnico Industrial sea la sede del Proyecto para lo cual se asignó una oficina.

*FOTO 2. Tomando apuntes y Escuchando con atención de izquierda a derecha: Fernanda López Muñoz (investigadora, Nelson Achicaiza (rector de la Institución Itsim), Maricel Cabrera (Subsecretaria de calidad Educativa) y Alberto Moncayo (Coordinador Pedagógico).*



Fuente: Esta Investigación

En la Institución Educativa Cabrera se llevó a cabo la socialización con participación de todos los docentes en el salón de actos. En la Institución Francisco de la Villota se llevó a cabo con participación de los docentes de matemáticas y el rector de la institución. La institución Antonio Nariño desistió de participar en el Proyecto a pesar de que se insistió en repetidas ocasiones a través de visitas a la institución o a través de vía telefónica, en busca de un diálogo con las directivas de la institución; sin embargo fueron infructuosos los intentos, tal como quedó constancia por escrito. (Anexo B).

### 3.2.2. Etapa 2. Construcción de instrumentos.

Esta etapa hace referencia a la construcción de instrumentos de recolección de información, la cual se clasifica en dos partes: la información que caracteriza la situación del álgebra en cuanto a su programación y desarrollo hasta el Segundo Periodo, y la información que permite identificar los errores cometidos por los estudiantes al iniciar el aprendizaje del álgebra. En este sentido, la etapa comprende tres fases:

a) Revisión bibliográfica. En esta fase son fundamentales las lecturas de los libros: “*Álgebra: Children’s Strategies and Errors*”, de Lesley Booth (1984). “Análisis y Clasificación de errores” de Martín Socas (1996), «La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años» de María de las Mercedes Palarea Medina (1998), puesto que proporcionan pautas para elegir criterios de clasificación de errores.

b) Condiciones actuales del desarrollo de la programación de álgebra del grado octavo. En esta fase se construyó un instrumento que cruza las variables: institución, contenidos algebraicos programados para el año 2011, avance en el desarrollo de la Programación, enfoque del área y tipo de problemas (Anexo C). El conocimiento de estas categorías permitió el diseño de los cuestionarios.

c) Diseño de los cuestionarios de preguntas en relación a las siguientes categorías: La naturaleza y significado de los símbolos y el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra. Se formularon dos cuestionarios, uno por categoría, cada cuestionario está compuesto de 12 y 14 preguntas respectivamente, cada pregunta se elaboro teniendo en cuenta los cuestionarios de la investigación *Álgebra: Children’s Strategies and Errors* (Booth, 1984), adecuando al contexto local.

d) Validación de los cuestionarios. Teniendo en cuenta que en el proceso de enseñanza aprendizaje hay esencialmente dos partes constitutivas, que mediante actividades de conocimiento comparten saberes, para el estudio de los errores más comunes cometidos por estudiantes de grado octavo al iniciar el aprendizaje del álgebra, se hace necesario validar la información de los cuestionarios desde

dos perspectivas, la de los docentes y profesionales a fines, y desde la perspectiva de los estudiantes. Para cada caso se han determinado instrumentos y aspectos de validación en relación con la experiencia cognitiva con el álgebra escolar, que contribuyen a verificar la validez a través de la triangulación de las técnicas empleadas.

- Validación por parte de los docentes y profesionales afines.

Por una parte, para la validación desde la primera perspectiva, se seleccionó a cinco (5) profesionales, con conocimientos y experiencia de gran aporte para la investigación, estos colaboradores son: la psicóloga Alejandra Ordoñez López, especialista en gerencia de la salud pública; el ingeniero de sistemas Fidel Alfonso Zambrano y los docentes de matemáticas: Laura Karola Salazar Paz, German Alberto Mesías y Rafael Bastidas, con experiencia en secundaria y educación superior, quienes evaluaron la información presentada en los dos cuestionarios. Para llevar a cabo el proceso de validación de los cuestionarios elaborados, se consideró adecuado diseñar un formato cerrado con *seis aspectos* a evaluar por parte de los profesionales, estos aspectos son: 1) *redacción*, con el fin de verificar las instrucciones estipuladas como preguntas y literales de cada uno de los cuestionarios. 2) *la claridad de los datos de la pregunta*, aspecto que conjuntamente permite unificar el grado de comprensión de la información suministrada. En cada cuestionario se delimitaron ciertas temáticas consideradas como imprescindibles en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra inicial que se trabaja en el grado octavo, esencialmente en el manejo del lenguaje algebraico, operaciones básicas con expresiones algebraicas, monomios, binomios y algunos polinomios. Teniendo en cuenta los estudios realizados por Socas (1995), existen algunas variables en cada categoría de análisis que se denominan para la presente investigación como subcategorías y que encierran un grupo de preguntas alusivas a las mismas. De esta manera, se pretende que los colaboradores profesionales evalúen también; 3) *pertinencia de las preguntas en relación a la temática* (subcategoría) y 4) *la pertinencia de las mismas en relación con la categoría*.

Por otra parte, es importante que los profesionales valoren el grado de; 5) *contextualización de la pregunta*, teniendo en cuenta que los cuestionarios fueron elaborados con base en los ya existentes en el Reino Unido aplicados en el estudio “*Álgebra: Children’s Strategies and Errors*” de Lesley Booth (1984) y fueron adecuados al contexto de la educación colombiana y en especial al micr (Miranda V. C., 2007) (Silvia Monica del Puerto) (Raimund Olfos, 2001) o contexto del aula que se desarrolla en las instituciones de estudio.

Considerando que los profesionales seleccionados para validar los cuestionarios conocen el campo algebraico, su lenguaje, sus procesos de solución, los profesionales evalúan también, 6) *el tiempo estipulado* para cada cuestionario verificando si es apropiado y acorde con el grado de dificultad y la edad de los

estudiantes que desarrollan los mismos. Todos los aspectos mencionados se evalúan de acuerdo a una escala de puntuación de 1 a 5, siendo 1 el menor grado de medición y 5, el mayor. Una vez diligenciados los formatos de validación se procedió a sistematizar las puntuaciones para determinar si cada pregunta cumple con el ochenta por ciento (80%) de aprobación para ser aplicada y si en conjunto el cuestionario es validado con un promedio de puntuación igual o superior a cuatro (4.0). (Anexo D.). Los resultados generales se presentan a continuación:

Tabla No 4. Relación de cuestionarios y datos de validación.

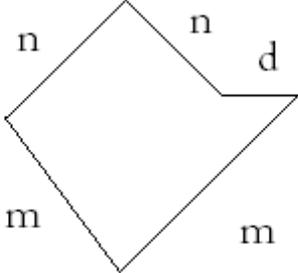
CUESTIONARIO	PROMEDIO GENERAL	PORCENTAJE	VALIDADO
1	4,18	84%	SI
2	4,06	81%	SI

Como se observa en la Tabla 4, cada cuestionario cumple las condiciones de validación, razón por la cual dichos formatos de preguntas se consideran apropiados para el presente estudio. Adicionalmente, se realizaron sugerencias por parte de los profesionales (ver tablas 5 y 6). Para la reestructuración de los cuestionarios, la información se describe para cada cuestionario en el siguiente cuadro comparativo en el que se observa la recomendación a la respectiva pregunta (Los cambios se subrayan en cada pregunta):

Tabla No 5. Cuestionario Número1, Naturaleza Y Significado de Símbolos y Letras.

PREGUNTA	SUGERENCIA
1. a) La figura <u>tapa</u> $B$ algunos lados de la figura $A$ , calcule el perímetro de la figura $A$ si tiene $p$ – <u>numerodelados</u> y cada uno mide 5 unidades	En general se sugirió realizar cambios acordes a la contextualización empleando términos de mayor comprensión como: 1. a) La figura $B$ <u> cubre</u> algunos...
b) El profesor de educación física tiene $M$ – <u>numerodebalones</u> de vóleibol para jugar en grupos. Si <u>hace</u> 5 grupos, <u>¿cuál es la expresión para</u> el número de balones en cada grupo?	b) El profesor de educación física tiene $M$ – <u>numerodebalones</u> de vóleibol para jugar en grupos. Si <u>forma</u> 5 grupos, <u>Determinar o calcular</u> el número de balones en cada grupo.
2. a) Si el Real Madrid anoto $W$ goles y el Barcelona anoto $Z$ goles, <u>¿qué puedes escribir</u> del número total de goles anotados en el partido?	3. a) Si el Real Madrid anoto $W$ goles y el Barcelona anoto $Z$ goles, <u>¿qué puedes afirmar</u> del número total de goles anotados en el partido? La pregunta debe ser más clara, respecto a la relación de las variables para conformar una expresión que indique el número total de goles anotados.
b) La siguiente expresión $W + V = W + Z$ • Nunca es <u>cierta</u> ___ Es <u>cierta</u> ¿cuándo?	b) La siguiente expresión $W + V = W + Z$ • Nunca es <u>verdadera</u> ___ • Es <u>verdadera</u> ¿cuándo?
a) ¿Cómo escribes 3 aumentado $5W$ ?	En la redacción de la pregunta se debe especificar <u>En lenguaje matemático</u> a) ¿Cómo escribes 3 aumentado $5W$ ? 3 aumentado en $5W$ ? ¿3 aumentado $5W$ veces?
a) $5\frac{2}{7}$ Es un número mixto, donde $a = 2$ $b = 7$ $c = 5$ cómo quedará expresado algebraicamente este número mixto.	¿Cuál es la expresión algebraica del número mixto? Contextualizar y dar claridad sobre el resultado esperado, la pregunta queda abierta

Tabla No 6. Cuestionario Número 2 Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra.

PREGUNTA	SUGERENCIA
<p>d)</p> 	<p>A pesar de que la pregunta es clara, la imagen no es coherente con las cantidades presentadas gráficamente en los segmentos que aparentemente son iguales <math>(m,n)</math>.</p>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <u>Escribir de forma más simplificada</u> (si es posible) las siguientes expresiones...</li> </ul>	<p>En redacción:  <u>Simplificar</u> (si es posible) las siguientes expresiones...  <u>Reducir</u> (si es posible) las siguientes expresiones...</p>

- Validación por parte de los estudiantes

Para validar los cuestionarios desde las perspectiva de los estudiantes, el 9 de septiembre del 2011 se aplicaron, a manera de prueba piloto, 83 cuestionarios en los grados octavos de la jornada de la mañana de la Institución Educativa Municipal INEM de Pasto; así: cuestionario número uno, grado 8-1 con 22 estudiantes; cuestionario número dos, en el grado 8-3 con 26 estudiantes; cabe anotar que los cuestionarios se aplicaron en horas de clase, con la orientación del grupo investigador y el acompañamiento de los docentes de matemáticas de la institución INEM.

Los aspectos que se tuvieron en cuenta en la validación de los cuestionarios son:

- El tiempo estimado para el desarrollo de cada cuestionario confrontado con el tiempo real de ejecución en la prueba piloto.
- El lenguaje. Si la redacción de la pregunta es adecuada para la comprensión de los estudiantes.
- La ocurrencia de error por pregunta. Número de estudiantes con respuestas correctas y respuestas incorrectas.

Para determinar el tiempo empleado en la solución de los cuestionarios se tuvo en cuenta los siguientes datos:

- La hora de inicio de la prueba.

- La hora de entrega por parte del estudiante, la cual se subraya en la parte superior de cada cuestionario.

Posteriormente se registra esta información en una tabla de frecuencias, (Anexo E) del cual se sintetiza la siguiente información.

Tabla No 7. Promedio tiempo prueba piloto.

Cuestionario	Hora de inicio	Promedio tiempo empleado en minutos
1	07:00 a.m.	63,91
2	08:20 a.m.	39,58
	Promedio general	51,75

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se determinó que el tiempo para que el estudiante desarrolle cada cuestionario de la presente investigación, sea de una hora y quince minutos (1:15).

Para determinar si el lenguaje empleado en los cuestionarios es el adecuado, es decir, que las instrucciones y simbología sean claras y comprensibles para los estudiantes, se usó la técnica de observación, en la cual, se consignó en un cuaderno de observaciones las inquietudes de algunos estudiantes. Se evidenció algunos errores de redacción que conducían a faltas de comprensión de la pregunta; en consecuencia se reformularon algunos términos utilizados en las preguntas. Estos cambios se presentan en la tabla No 8.

Tabla No 8. Lenguaje algebraico

CUESTIONARIO NUMERO 1			
	PREGUNTA	ESTADO	
		OBSERVACIONES ESTUDIANTE	PREGUNTA MODIFICADA
Cambio de la aritmética al álgebra	1.a) La figura B tapa algunos lados de la figura A, calcule el perímetro de la figura A si tiene p-lados y cada uno mide 5 unidades. 	"¿QUE ES P-LADOS?"	1. a) La figura B tapa algunos lados de la figura A, calcule el perímetro de la figura A si tiene <b>p número de lados</b> y cada uno mide 5 unidades 
	1.b) El profesor de educación física tiene P balones de voleibol para jugar en grupos. Si hace 5 grupos. ¿ cual es la expresión para el numero de balones en cada grupo?	Se considera la misma observación del ítem anterior	b)El profesor de educación física tiene <b>m número de balones</b> de vóleibol para jugar en grupos. Si hace 5 grupos, ¿cuál es la expresión para el número de balones en cada grupo?
Significado de las letras	2.a) X goles tiene el equipo Real Madrid, Y tiene el equipo Barcelona, ¿qué puedes escribir del número total de goles anotados?	"¿como así X goles tiene el real Madrid y tiene el equipo Barcelona?"	2. a) <b>Si el Real Madrid anoto W goles y el Barcelona anoto Z goles</b> , ¿qué puedes escribir del número total de goles anotados en el partido?
Del lenguaje común al lenguaje algebraico	3.a) ¿Cómo escribes <b>3 añadido 5Y?</b>	"¿Qué es añadido? ¿es elevado?"	3.a) ¿Cómo escribes <b>3 aumentado 5Y?</b>
	3.C) Añadir 3 a 5m	Se considera la misma observación del ítem anterior	3.C) <b>Aumentar</b> 3 a 5m
CUESTIONARIO NUMERO 2			
EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA	1) ¿Qué puedes escribir sobre los siguientes perímetros?:	"¿Debo escribir que es el perímetro para cada figura?"	1) <b>Calcula</b> los siguientes perímetros:
EN EL CONTEXTO DE OPERACIONES CON POLINOMIOS	2) Escribir de forma más simplificada las siguientes expresiones	"¿Profe, si la primera expresión queda igual que escribo como respuesta?"	2) Escribir de forma más simplificada ( <b>si es posible</b> ) las siguientes expresiones

A continuación, se presenta la síntesis del análisis realizado a las pruebas piloto (Anexo F y G), en relación con el porcentaje de error, para cada subcategoría:

### 3.2.3. Etapa 3. Recolección de información

En esta etapa distinguen las siguientes fases:

a) Revisión Bibliográfica. En esta fase se destacan las lecturas de “Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales” de Vicente Carrión Miranda; “Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas” de Silvia Mónica del Puerto y Claudia Lilia Minnard, puesto que permiten una guía en la construcción de los instrumentos para la sistematización de los datos.

b) Aplicación de los cuestionarios a los estudiantes de grado octavo de cada una de las instituciones en estudio. La aplicación se realizó en horas de clase, facilitadas por los docentes de matemáticas de grado octavo y quienes acompañaron durante la prueba. Hay dos momentos, la presentación del cuestionario por parte de los investigadores y el desarrollo del cuestionario. En la presentación, se resaltan aspectos que los estudiantes deben tener en cuenta para la resolución del cuestionario, estos aspectos se enumeran a continuación:

1. El cuestionario no tiene calificación, se resalta que el cuestionario no es un examen, se realiza con el fin de observar los procesos usados para llegar a la respuesta.

2. Todas las preguntas deben ser resueltas y argumentadas, se pide a los estudiantes explicar cada respuesta, de acuerdo a conceptos adquiridos en clase.

3. El cuestionario es personal, se solicita resolver de forma individual. El grupo de investigación, supervisó el desarrollo del cuestionario, en consecuencia no existió ningún tipo de copia.

4. Resaltar el objetivo del cuestionario, explicando la finalidad de la investigación, la cual es encontrar los errores más comunes del álgebra, para mejorar el aprendizaje de la misma.

c) Instrumentos de sistematización. Paralelamente a la elaboración de los cuestionarios, se construyeron los instrumentos estadísticos para el procesamiento de la información.

d) Informe a las Entidades Oferentes sobre los avances de la investigación.

#### 3.2.4. Etapa 4. Sistematización, análisis e interpretación.

Consiste en pasar la información recolectada a las tablas elaboradas en la última fase de la Etapa 3, con el fin de observar la frecuencia de error; esta información permite el análisis y la interpretación de resultados. Las fases de esta etapa son:

a) Revisión bibliográfica.

b) Análisis e interpretación a los resultados de las programaciones del área para el año 2011 y los cuadernos de los estudiantes.

## CAPÍTULO 4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

Este capítulo contiene tres partes: en la primera se realiza el análisis de archivos, tanto de las programaciones como de los cuadernos de matemáticas del grado octavo. La segunda y tercera parte hacen referencia al análisis de las dos categorías, las cuales se estructuran mediante la descripción de los cuestionarios aplicados a la población, el planteamiento de las subcategorías, las preguntas y la descripción de los errores encontrados en cada una de las respuestas dada por los estudiantes y sus respectivas evidencias.

### 4.1 Análisis e interpretación de los contenidos de álgebra propuestos y cuadernos del grado octavo en las instituciones educativas.

Mediante la triangulación de las programaciones y los cuadernos de trabajo del estudiante se realizó el análisis y la interpretación de los datos, con base en algunos criterios, que permitieron obtener los resultados adecuados para la construcción de las preguntas de los cuestionarios.

#### 4.1.1. Análisis de contenidos de álgebra propuestos para grado octavo

Teniendo en cuenta los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el área de Matemáticas, se propone estructurar el currículo de matemáticas de acuerdo a tres dimensiones o aspectos dinámicos que se relacionan y deben estar presentes en todo acto educativo; estos son: los conocimientos básicos, relacionados con procesos específicos que desarrollan el pensamiento y sistemas propios de la matemática, como: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; los procesos generales, ligados al aprendizaje en las matemáticas, como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, y por último, el contexto, enmarcado en la solución de situaciones problemáticas que se generan en los ambientes de aprendizaje del estudiante para dar sentido a las matemáticas y está relacionado con el diseño y ejecución de experiencias que pueden involucrar situaciones originadas desde las mismas matemáticas, desde la vida diaria y a partir de otras ciencias.

Para realizar el análisis comparativo de las planeaciones de matemáticas de grado octavo presentadas por las tres instituciones participantes, se hacen las observaciones abordando las tres dimensiones, dando privilegio a la relación entre los “conocimientos básicos” y “los procesos generales” planteados en los lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de educación Nacional. La

interrelación existente entre los “pensamientos” y “sistemas” en matemáticas, se observaron en las programaciones la relación entre los pensamientos variacional, geométrico y métrico. Paralelamente, en los procesos generales, por el carácter del presente estudio se da relevancia al análisis de la comunicación matemática, ofreciendo la posibilidad de adentrarse en el estudio del lenguaje algebraico.

Finalmente, dentro del contexto, se tiene en cuenta el micro mundo del aprendizaje que se establece en cada institución y centra la atención en la solución de situaciones problemáticas relacionadas exclusivamente con la geometría como contexto de múltiples aplicaciones.

En la tabla 9 se expone la información suministrada por las instituciones, Técnico Industrial, Cabrera y Francisco de la Villota, relacionada con las programaciones de matemáticas para el primer periodo académico, interpretando el desarrollo de las tres dimensiones mencionadas anteriormente, con el fin de visualizar el estado actual de las condiciones curriculares en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de las instituciones en estudio.

Tabla No 9. Análisis comparativo de documentos de planeación por instituciones.

DIMENSIONES	IT SIM	CABRERA	FRANCISCO DE LA VILLOTA
CONOCIMIENTOS BÁSICOS	<p>Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.</p> <p>UNIDAD UNO:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conjuntos numéricos <ul style="list-style-type: none"> <li>Números naturales</li> <li>Números enteros</li> <li>Números racionales</li> <li>Números Irracionales</li> <li>Números Reales</li> </ul> </li> </ul> <p>Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.</p> <p>UNIDAD DOS:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Expresiones algebraicas <ul style="list-style-type: none"> <li>Lenguaje algebraico</li> <li>Monomios</li> <li>Polinomios</li> </ul> </li> </ul> <p>UNIDAD TRES:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Operaciones con expresiones algebraicas <ul style="list-style-type: none"> <li>Suma y resta de polinomios</li> <li>Multiplicación de polinomios</li> <li>División de polinomios</li> </ul> </li> </ul>	<p>Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Conjuntos numéricos <ul style="list-style-type: none"> <li>Números naturales</li> <li>Números enteros</li> <li>Números racionales</li> <li>Números Irracionales</li> <li>Números Reales</li> </ul> </li> </ul> <p>Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Expresiones algebraicas <ul style="list-style-type: none"> <li>Valor numérico</li> <li>Operaciones con monomios</li> <li>Suma y resta de polinomios</li> <li>Producto de polinomios</li> <li>Aplicación del álgebra a la geometría.</li> </ul> </li> </ul> <p>Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Polígonos <ul style="list-style-type: none"> <li>Clasificación de polígonos</li> <li>Construcción de polígonos</li> </ul> </li> </ul>	<ol style="list-style-type: none"> <li>Números reales <ol style="list-style-type: none"> <li>Expresiones decimales</li> <li>Números irracionales</li> <li>Operaciones con números reales</li> <li>Notación científica</li> <li>Ecuaciones con más operaciones.</li> <li>Problemas de aplicación</li> </ol> </li> <li>Polinomios <ol style="list-style-type: none"> <li>Expresiones algebraicas</li> <li>Polinomios</li> <li>Adición de polinomios</li> <li>Sustracción de polinomios</li> <li>Multiplicación de polinomios</li> <li>Cuadrado de un binomio</li> <li>Suma por diferencia de un binomio</li> <li>Producto de dos binomios con término común</li> <li>Cubo de la suma y la diferencia de un binomio</li> <li>Triángulo de Pascal</li> <li>División de polinomios</li> <li>División sintética</li> <li>Cocientes notables</li> </ol> </li> </ol>
PROCESOS	<p>Se contempla la comunicación matemática, específicamente el lenguaje algebraico porque se proponen competencias, logros e indicadores de logro que permiten evidenciar el interés por desarrollar este importante proceso.</p> <p>Se describen las estrategias metodológicas propuestas para desarrollar los conocimientos básicos, el razonamiento, entre otros procesos a través del juego y la manipulación de materiales con el fin de enriquecer el pensamiento algebraico en los estudiantes.</p>	<p>Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.</p>	<p>Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.</p>
CONTEXTO	<p>Se presentan competencias relacionadas con el saber hacer, en las cuales se proponen actividades de aplicación en los campos geométrico, variacional y métrico como también situaciones de la cotidianidad en las que se desarrollan tipos de pensamiento matemáticos.</p> <p>A través de los indicadores de logro se especifica la evaluación que se planea.</p>	<p>Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.</p>	<p>Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.</p>

Teniendo en cuenta que la estructura de las programaciones de matemáticas es diferente en cada institución, en los conocimientos básicos se toma textualmente los contenidos temáticos propuestos. Las instituciones Técnico Industrial y Cabrera conservan un grado de similitud al presentar los conocimientos básicos en el marco de los pensamientos numérico y variacional con sus respectivos sistemas numéricos, algebraicos y analíticos. En la institución educativa Francisco de la Villota, no se especifican dichos pensamientos, sin embargo, se puede intuir que parte del numeral 1 hace alusión al pensamiento numérico y sistemas numéricos y que el numeral 2 contempla tópicos que pertenecen al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Por otra parte, en lo que hace relación a los procesos generales y el contexto, no se tiene una información que permita comparar el desarrollo de los mismos, debido a que únicamente la institución educativa Técnico Industrial posee una programación en la que se relacionan aspectos como, objetivos, estándares, competencias con el saber, saber hacer y ser; estrategias metodológicas, recursos, la evaluación a través de logros e indicadores de logros, como elementos constitutivos del currículo, que permiten dar una visión global de los procesos y el contexto, como se puede observar en la siguiente figura.

Figura No 1. Planeación I.E.M. Técnico Industrial.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL TÉCNICO INDUSTRIAL DE PASTO PLANEAMIENTO INSTITUCIONAL. AÑO LECTIVO 2011							
ÁREA: MATEMÁTICAS				PERIODO 1 UNIDAD 1 2 y 3	GRADO: OCTAVO		
ESTANDAR	COMPETENCIAS			ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS	RECURSOS	EVALUACIÓN	
	SABER	SABER HACER	SER			LOGROS	INDICADORES DE LOGRO
<b>PENSAMIENTO NUMÉRICO</b>  Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.  Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de	<b>UNIDAD 1 CONJUNTOS NUMERICOS</b>  * Números naturales * Números enteros * Números racionales * Números irracionales * Números reales	<b>INTERPRETATIVA</b> 1. Identificar la función de las variables dentro del contexto algebraico (como número generalizado, como objeto concreto, como elemento cambiante). 2. Reconocer, en situaciones concretas, el concepto de variación entre objetos matemáticos. 3. Establecer	Autoestima Persistencia Solidaridad. Competencia ciudadana. Tolerancia. Competencia ciudadana. Tolerancia. Competencia ciudadana. Respeto por las ideas ajenas. Competencia ciudadana. Persistencia.	Las estrategias metodológicas utilizadas para esta unidad son: La exposición magistral clara, motivada por historias y anécdotas en la construcción de los sistemas de numeración. Los estudiantes realizarán un mapa conceptual cada	Los recursos utilizados para esta unidad son: a) los utilizados por el estudiante como el cuaderno, las escuadras, el compás para representar los irracionales en la recta. b) los utilizados por el docente, como los	Identifica las características de un número dado. Representa números en la recta numérica.	Determina la pertenencia de un número a un conjunto numérico. Reconoce las diferencias entre números que pertenecen a un otro conjunto numérico. Identifica entre qué números racionales se puede encontrar otro número dado. Realiza correctamente la construcción de un número irracional. Establece relaciones de orden entre los elementos de un determinado conjunto numérico.

Las instituciones educativas Cabrera y Francisco de la Villota sólo presentan ejes temáticos y contenidos. Esta información se considera insuficiente frente a la institución Técnico Industrial en lo que concierne a las planeaciones. Dichas listas temáticas se distribuyen en periodos o numerales, que sirven como herramienta orientadora para los docentes y estudiantes, quienes consignan en sus cuadernos dichas programaciones al inicio del año escolar. En la figura 2 y 3 no se observan logros, indicadores de logros o estándares, sin embargo estos contenidos conservan una relación que permite comparar el avance en las tres instituciones en estudio.

Figura No 2. Planeación I.E.M. Cabrera

EJES TEMATICOS Y CONTENIDOS ASIGNATURA: MATEMATICAS OCTAVO			
PENSAMIENTO	CONTENIDO	PERIODO	
NUMERICO SISTEMAS NUMERICOS	Y Conjuntos numéricos: Números naturales. Los números enteros. ✓ Números racionales. Números irracionales. Números reales.	1º. 1º.	
	VARIACIONAL SISTEMAS ALGEBRAICOS ANALITICOS	Y Expresiones algebraicas. ✓ Valor numérico. ✓ Operaciones con monomios. ✓ Suma y resta de polinomios. ✓ Producto de polinomios. ✓	1º. 1º. 1º. 1º.
Y Productos notables. ✓ División de polinomios.		2º.	
Y Cocientes notables. Factorización de polinomios.		2º. 2º.	
Fraciones algebraicas. Operaciones con fracciones algebraicas.		3º. 3º.	
Ecuaciones de primer grado con una incógnita. Inecuaciones.		3º. 3º.	
Función lineal. Aplicación del álgebra a la geometría		1º. 2º. 3º. 4º.	
ESPACIAL SISTEMAS GEOMETRICOS		Y Ángulos. Generalidades Triángulos. Clasificación de los triángulos. Construcción de triángulos rectángulos. Polígonos. Clasificación de polígonos. Construcción de polígonos.	3º. 3º. 3º. 3º. 1º. 1º.-2º.

Figura No 3. Planeación I.E.M. Francisco De la Villota

Programación grado octavo		
1. Números reales	1.1	1.1
Expresiones decimales	1.2	1.2
Números irracionales	1.3	1.3
Operaciones con números reales	1.4	1.4
Notación científica	1.5	1.5
Ecuaciones con más operaciones	1.6	1.6
Problemas de aplicación		
2. Polinomios		
2.1		
Expresiones algebraicas	2.2	2.2
Polinomios	2.3	2.3
Adición de polinomio	2.4	2.4
Substracción de polinomios	2.5	2.5
Multiplicación de polinomios	2.6	2.6
Cuadrado de un binomio	2.7	2.7
Suma por diferencia de un binomio	2.8	2.8
Producto de dos binomios que tienen un término común		

En la historia del álgebra, se puede observar que no sólo los símbolos forman parte de ella. Han sido, la geometría y la aritmética, quienes los utilizaron para dar respuesta a la necesidad de trascender de lo concreto a la generalización, constituyéndose en una piedra angular para el desarrollo del álgebra. Estos aspectos deben tenerse en cuenta para desarrollar el "pensamiento variacional" en las instituciones de educación básica, puesto que no son las estructuras algebraicas la pretensión de su enseñanza en los grados anteriores al grado octavo sin una preparación desde el sistema variacional, permitiendo una mejor comprensión a la intencionalidad de la verticalidad de los estándares.

En la tabla 10 que se presenta a continuación se puede apreciar cómo un estándar del pensamiento variacional del grado primero a tercero es continuado verticalmente hasta el grado noveno.

Tabla No 10. Verticalidad estándares del pensamiento variacional, de grados 1°- 9°.

	PRIMERO A TERCERO	CUARTO A QUINTO	SEXTO A SEPTIMO	OCTAVO A NOVENO
REGULARIDADES Y SECUENCIAS	Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical entre otros)	Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
SECUENCIAS	Construir secuencias numéricas y geométricas, utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.	
RAZONES Y PROPORCIONES	Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráfica.	Describir e interpretar variaciones representadas en gráficas.  Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.	Analizar las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.  Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación).	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
ECUACIONES	Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas.	Construir igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.	Utilizar métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.	Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

#### 4.1.2. Análisis cuadernos de álgebra grado octavo.

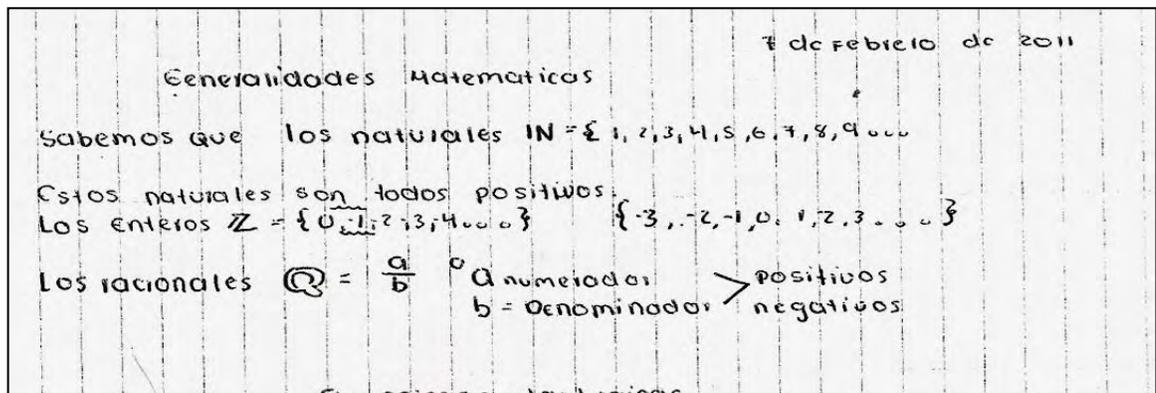
El análisis detallado de los cuadernos de matemáticas de estudiantes de grado octavo, describe el progreso en cuanto a contenidos, actividades y recursos que el docente emplea en el desarrollo de sus clases de matemáticas. Estos cuadernos fueron facilitados por estudiantes de cada institución, quien a criterio del docente, se destaca por su puntualidad, organización y responsabilidad. Este instrumento se adquirió en una misma fecha (16/08/2011) para las tres instituciones.

A continuación se realiza el estudio de dichos cuadernos de acuerdo a tres aspectos: Descripción de contenidos, procesos generales ligados al aprendizaje

de las matemáticas y el contexto enmarcado en la solución de situaciones problemáticas que se generan en los ambientes de aprendizaje del estudiante. Estos aspectos fueron tomados de la propuesta realizada por el Ministerio de Educación Nacional en los lineamientos de matemáticas y aparecen en el enlace [minieducación.gov.co/lineamientos-](http://minieducación.gov.co/lineamientos-).

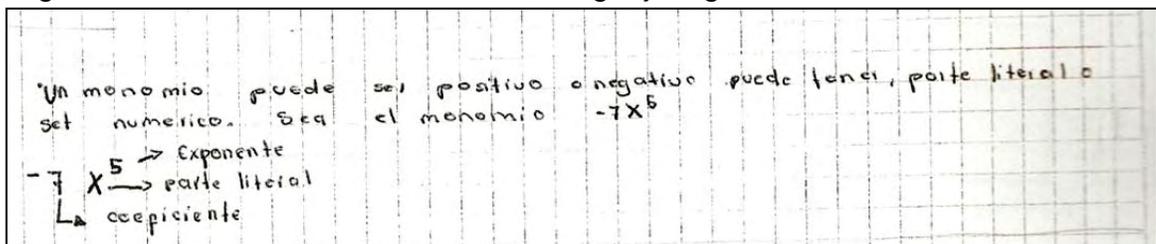
En el cuaderno de la I.E.M. Cabrera, se encuentran los contenidos como: conjuntos numéricos; se describe brevemente algunos conjuntos como los números naturales y enteros, (fig. 4), no se profundiza como se tenía estipulado en la programación, en la cual se planteaba trabajar además con los números racionales, irracionales y reales. Expresiones algebraicas: monomios, tipo de monomios, suma y resta de monomios, polinomios, suma y resta de polinomios, multiplicación y productos notables; estos contenidos se trabajaron de acuerdo a la programación, se hace un estudio detallado y completo para cada uno de ellos.

Figura No 4. Cuaderno IEM. Cabrera, conjuntos numéricos.



El lenguaje algebraico se aborda mediante definiciones relacionadas a conceptos de álgebra, y luego, explicadas con ejemplos. Realiza descripción de las partes constitutivas de las expresiones algebraicas pertinentes. (Fig.5). No se encontraron registrados ejercicios metodológicos que ayuden en la comprensión del significado de variable para la construcción futura de su concepto; sólo la denomina como letra o parte literal.

Figura No 5. Cuaderno IEM. Cabrera, lenguaje algebraico.



El docente plantea actividades de tipo geométrico, en la cual se pone en práctica la suma, resta y producto de polinomios; por ejemplo, hallar el área y perímetro de figuras planas. Mediante tablas, identifica las partes de expresiones algebraicas y desarrolla ejercicios mecánicos con polinomios. fig. 6.

Figura No 6. Cuaderno IEM. Cabrera, identificación de expresiones algebraicas.

1 completa la siguiente tabla

Monomio	coeficiente	parte literal	grado absoluto	grado con respecto a =
$5m^2np^2$	5	mnp	6	a m = 2
$\frac{4a^2bc^{10}}{5}$	$\frac{4}{5}$	abc	13	ab = 1
$m^3n^6p^2$	1	mnp	14	ar = 5
$-4^3r^2p$	1	yrp	6	ap = 1
$13a^4b^6c$	13	abc	11	ab = 4
$-p^2r^5a^3$	1	pra	10	aa = 3
$\frac{-3mno^6}{4}$	$-\frac{3}{4}$	mno	8	ao = 6
$\frac{x^2y^3m^6}{2}$	$\frac{1}{2}$	xym	11	ay = 3

En la I:E:M: Francisco de la Villota, se trabajó los siguientes contenidos: números reales: operaciones y propiedades de los números naturales, enteros y racionales; función generatriz de un decimal, números irracionales, expresiones algebraicas: polinomios, orden en los polinomios, tipo de polinomios, valor numérico, operaciones con polinomios. (fig. 7)

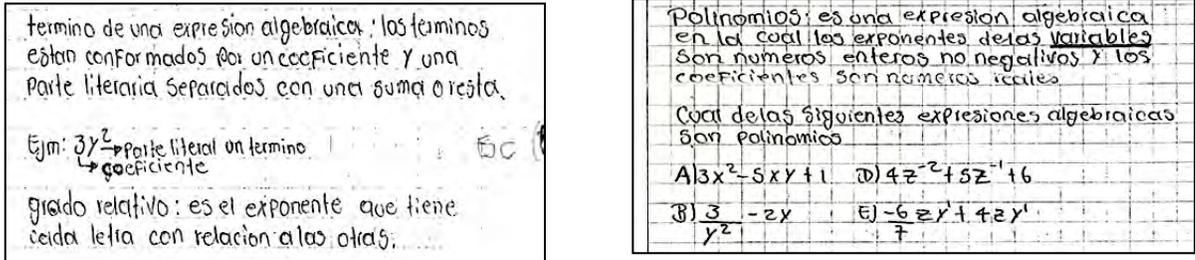
Figura No 7. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, operaciones con polinomios.

Operaciones con polinomios	
Adición y sustracción	
terminos semejantes: dos o mas terminos son semejantes si tienen la misma parte literal con los mismos exponentes	
Ejm: Reducir los terminos semejantes	
$3ab - 5ab - ab = -3ab$	$+x = +$ $-x = -$ $-x = -$

En el proceso de comunicación, da una definición aproximada de conceptos de álgebra y luego lo explica con ejemplos; realiza una descripción de las partes constitutivas de las expresiones algebraicas pertinentes. Tampoco se encontró

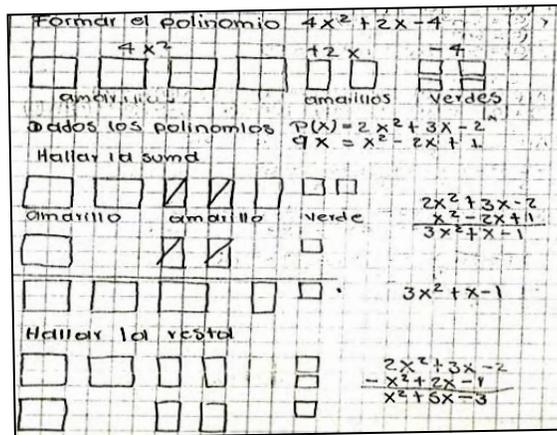
registrado situaciones que permitan acercarse a la noción de variable para una construcción futura de su concepto. Lo denomina como letra, pero se observa que en algunos conceptos matemáticos realiza definiciones utilizando la palabra variable. (Fig. 8)

Figura No 8. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, lenguaje algebraico.



Realiza actividades de tipo geométrico para poner en práctica conceptos algebraicos. Por ejemplo: hallar el área y el perímetro de figuras planas. Realiza ejercicios mecánicos con polinomios. (fig.9)

Figura No 9. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, actividades.



En la I.E.M. Técnico Industrial, se desarrolló los contenidos: conjuntos numéricos (números naturales, números racionales y propiedades, números irracionales y propiedades), relación entre los tres conjuntos, (Fig. 10); expresiones algebraicas: lenguaje algebraico, definición e identificación de partes de expresiones algebraicas, propiedades y tipos de monomios, polinomios, características y propiedades, y operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación de polinomios. Todos los contenidos se trabajaron de acuerdo a la programación establecida, se profundizó y se ejercitó cada uno de ellos.

Figura No 10. Cuaderno IEM. Técnico Industrial, conjuntos numéricos.

Conjuntos Numéricos...

**Números Naturales  $\mathbb{N}$**   
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$

*Redo 16/02/14*

**Números Enteros  $\mathbb{Z}$**   
 $\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty\}$   
 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$   
 $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots, -\infty\}$   
 $\{0\}$

**Números Racionales  $\mathbb{Q}$**   
 Son  $\mathbb{Z}$ -y fracciones.  
 $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ donde } a \text{ y } b \text{ son } \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$   
 $\frac{3}{0}$  no existe  
 $\frac{10}{5} = 2 = \mathbb{Z}$   
 $\frac{4}{5} = 2,25 = \text{frac. } 2,25 \text{ decim exacto}$   
 $\frac{1}{3} = 0,333333 = \text{frac. } 0,33 \text{ denm. Periódico.}$

**Multiplicación de polinomio por polinomio.**  
 $E: (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b)$   
 $= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$   
 $= a^2 + ab + ba + b^2$   
 $= a^2 + 2ab + b^2$

**Significado geométrico.**  
 $(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$

a	b	
a	$a^2$	$ba$
b	$ba$	$b^2$
	a	b

2 Multiplicar  $x+1$  por  $x+2$   
 $(x+1)(x+2) = x(x+2) + 1(x+2)$   
 $= x \cdot x + x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2$   
 $= x^2 + 2x + x + 2$   
 $= x^2 + 3x + 2$

Lenguaje Común	Lenguaje algebraico Variables
1, 2, 3, 4, ... 1 # <sup>ro</sup> $\mathbb{N}$	$\mathbb{N}$
1 # <sup>ro</sup> $\mathbb{N}$ sumadote B.	$n+B$
1 + de 2 # <sup>ros</sup> cualesquiera	$x+y$
1 a de 2 # <sup>ros</sup>	$a-c$
1 a de 2 # <sup>ros</sup> le -5	$(A-C)-5$
1 # <sup>ro</sup> Par	$2n$
1 # <sup>ro</sup> Par $\div 3$	$2n \div 3$ o $2n$ $2n/3$ o $2n/3^3$
1 # <sup>ro</sup> impar	$2n-1$
2 # <sup>ros</sup> $\mathbb{Z}$ consecutivos	$n, n+1$
1 a + de 3 $\mathbb{Z}$ consecutivos	$n, (n+1) + (n+2)$
1 a $\sqrt{\quad}$ de 1 # <sup>ro</sup>	$\sqrt{x}$ $x = \#^{\text{ro}}$
1 a $\sqrt{\quad}$ de la suma de 2 # <sup>ros</sup>	$\sqrt{x+y}$

El doble de un # <sup>ro</sup>	$2 \cdot n$
El triple de un # <sup>ro</sup>	$3 \cdot n$
El cuádruple de un # <sup>ro</sup>	$4 \cdot n$
mitad de un # <sup>ro</sup>	$\frac{1}{2} n$ o $\frac{n}{2}$
La tercera parte de un # <sup>ro</sup>	$\frac{1}{3} n$ o $\frac{n}{3}$
El cuadrado de un número	$x^2$
La suma de los cuadrados de 2 # <sup>ros</sup>	$x^2 + y^2$
El cuadrado de la suma de 2 # <sup>ros</sup>	$(x+y)^2$

El lenguaje algebraico, en esta institución, aparece explícito a través de situaciones que permiten comparar el lenguaje algebraico y el aritmético para establecer diferencias. Mediante tablas se explica dicho lenguaje, se describen algunos conceptos de álgebra, se explican con ejemplos y se realiza la descripción de las partes constitutivas de expresiones algebraicas. En esta institución se encontró registrados ejercicios y tablas que permitan acercarse a la noción de variable para una construcción futura de su concepto.

Con el análisis realizado al plan de área de matemáticas para el grado octavo de cada institución, contrastado con la observación de los contenidos registrados en los cuadernos, permitió concluir que en las tres instituciones educativas se estudiaron los contenidos: suma, resta, multiplicación y división de polinomios; reforzados con ejercicios desde el contexto geométrico; mediante el uso de áreas y perímetros de figuras planas (contenidos contemplados para esta investigación). Bajo estos insumos, se inició la construcción del cuestionario para cada categoría de análisis, partiendo de algunas preguntas diseñadas por Booth (1984), y

preguntas propias del grupo de investigación. De esta manera se obtuvo, los instrumentos necesarios para identificar los errores más comunes al iniciar el aprendizaje del álgebra.

#### 4.2. NATURALEZA Y SIGNIFICADO DE SÍMBOLOS Y LETRAS

Gracias a la utilización de los símbolos y letras es que logramos comunicar y resolver problemas matemáticos; pero existen conflictos por los diferentes significados que pueden tener las letras y formas de proceder en aritmética y en álgebra, los cuales originan errores; los estudiantes han utilizado los símbolos y letras dándole la interpretación y significado de acuerdo al contexto aritmético, sin embargo, al ser utilizados en el contexto algebraico, se producen obstáculos y procedimientos incorrectos, obteniendo errores en las respuestas. Existen diferencias en el significado de algunos símbolos, aunque su escritura sea la misma. Por ejemplo, en aritmética los signos + (más) e = (igual), son utilizados como una acción  $4 + 3 = 7$ ; si en una expresión está el signo + (más), se debe realizar la operación y dar un resultado; el signo = (igual), es trabajado unidireccional induciendo a dar una respuesta. En álgebra muchas veces el signo “más” es parte de una expresión, donde no es necesario realizar la suma, por lo cual no se da un resultado, un caso es  $8 + x$ . El signo igual en álgebra es bidireccional, y no es forzado a obtener una respuesta, más bien representa una equivalencia entre dos expresiones. El significado abstracto de las letras es en general el conflicto en los estudiantes; por ejemplo,  $m$  y  $g$ , pueden representar metros y gramos respectivamente, como pueden representar variables.

Para la categoría Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras se aplicó el cuestionario No 1, a 335 estudiantes. Esta se compone de cuatro subcategorías:

- ✓ Cambio de la aritmética al álgebra
- ✓ Significado de las letras y símbolos
- ✓ Del lenguaje común al lenguaje algebraico
- ✓ Omisión de signos

Para una mejor comprensión de las subcategorías presentes en las preguntas, se realizó la tabla No 11 que permite aclarar la relación entre la pregunta y la subcategoría, con el fin de organizar, de la mejor manera, los errores en cada una de estas subcategorías, y las que son tratadas a continuación.

Tabla No 11. Subcategorías en relación a las preguntas

SUBCATEGORIA	PREGUNTA	SUBPREGUNTAS
Cambio de la aritmética al álgebra	1	a, b
Significado de las letras y símbolos	2	a, b
Del lenguaje común al lenguaje algebraico	3	a, b, c, d
Omisión de signos	4	a, b, c, d

#### 4.2.1. Cambio de la aritmética al álgebra:

Es importante que se tengan conocimientos básicos de la aritmética para operar sin dificultad en el álgebra, sin embargo, la transición de la aritmética al álgebra requiere de un proceso lento y arduo; necesita tiempo para diferenciar los sentidos y significados de los símbolos y letras, tanto en la aritmética como en el álgebra. Kieran, (1989), citando a Love (1986), afirma “que un nivel más avanzado, tiene que ver con los modos de pensamiento que son esencialmente algebraicos. Por ejemplo, manejar lo todavía desconocido, invertir y deshacer operaciones, ver lo general en lo particular, son procesos que implican un grado suficientemente adecuado de conciencia para controlar dichos procesos. Son demandas lógicas más avanzadas”, que para Kieran, es lo que significa pensar algebraicamente.

El estudiante que ha terminado los cursos de la aritmética le es familiar resolver e interpretar problemas donde, en últimas, obtiene una respuesta numérica constituida de un sólo término; al encontrar actividades donde los datos están combinados con números y letras, se opta por omitir las letras o darles un valor numérico para poder desarrollar el ejercicio y arrojar una respuesta concreta.

De los procedimientos realizados por los estudiantes cuando responden las preguntas de la subcategoría “Cambio de la aritmética al álgebra”, los errores encontrados se clasificaron de la siguiente manera: Lados Visibles, Particularización e Interpretación Incorrecta, los cuales se explican a continuación.

Pregunta No1: a) La figura **B** tapa algunos lados de la figura **A**, calcule el perímetro de la figura **A** si tiene **p** número de lados y cada uno mide 5 unidades.

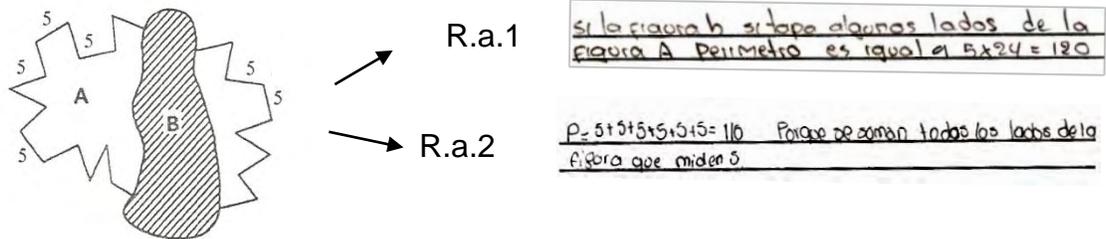


Pregunta No1: b) El profesor de educación física tiene  $m$  número de balones de vóleibol para jugar en grupos. Si hace 5 grupos, ¿cuál es la expresión, para el número de balones en cada grupo?

- Lados Visibles: este error se encontró en la pregunta 1 a), caracterizado por encontrar sólo el perímetro con los lados presentes de una figura, ignorando los que se encuentran cubiertos y no se realiza el proceso de abstracción.

Para este caso se cuentan los 24 lados visibles y luego se opera con el valor que mide cada uno de ellos (cinco unidades). Ver figura No 11, respuesta, R.a.1. En aritmética se acostumbra al uso de datos numéricos y que estén descritos en el enunciado y/o en la figura, por ello, se desarrolla el ejercicio con datos explícitos que están en el diagrama, sin tener en cuenta el hecho de que existen lados tras la figura  $B$  (lados implícitos), es decir que, la figura  $A$  tiene  $p$  número de lados; esto hace que el ejercicio se reduzca a un cálculo de los lados visibles con el valor de cada lado. " $24 \times 5 = 120$ "

Figura No 11. Tipos de respuestas. Lados Visibles.



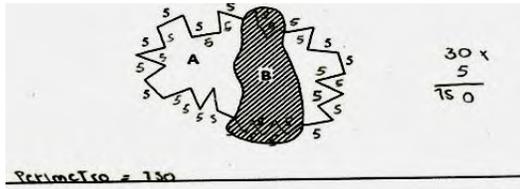
En la respuesta R.a.2, se realiza el cálculo, con los lados que tienen la unidad de medida; en el diagrama hay 6 lados que tienen marcado su valor y simplemente se operan con estos; no sólo se pasa por alto los lados ocultos por la figura  $B$ , sino que se excluyen los lados que no tienen el valor numérico; por este tipo de respuestas, se deduce que el ejercicio es desarrollado aritméticamente y se tienen una tendencia a trabajar de forma concreta y no general. El porcentaje de estudiantes que cometieron este tipo de error, es de 49.9% como se observa en la tabla No 11.

- Particularización: consiste en darle un valor numérico a la variable para obtener una respuesta concreta, debido a la dificultad de desarrollarlo de forma general. Este tipo de error fue detectado en las dos preguntas antes descritas. La diferencia de aquellos que trabajaron únicamente con los lados visibles y el grupo de estudiantes que particulariza, es que estos últimos, no ignoran la variable, ( $p$  número de lados;  $m$  número de balones), se comprende que existe un valor desconocido; el error es llevar la situación planteada en el ejercicio a un caso particular dando un valor numérico a la letra, en consecuencia se transforma el

ejercicio algebraico a uno aritmético; con este cambio es desarrollado y se da una respuesta concreta. Esto hace deducir que se tiene una fijación numérica.

Figura No 12. Tipos de respuestas. Particularización del ejercicio dando un valor numérico a la variable.

R.a.1



R.b.2

El profesor de educación física tiene  $m$  número de balones de vóleybol para jugar en grupos. Si forma 5 grupos, ¿Determinar el número de balones en cada grupo?

Cada Grupo tendrá 4 balones  $m = 20$

En la figura No 12 respuesta R.a.1, vemos que para darle un valor numérico a  $p$  se completa los lados de la figura  $A$  ocultos por la figura  $B$ ; se hace de tal forma que los lados tengan igual longitud y siga la secuencia de la figura, luego se ubica el valor de cinco que le corresponde a cada lado; hecho el arreglo numérico adecuado al problema se cuenta los lados y se multiplica por su medida; de esta manera es hallado el perímetro. Se destaca la conciencia sobre los lados ocultos y la actividad mental de representarlos, obviamente que el paradigma aritmético impide la trascendencia a la representación de forma general mediante la variable. De igual forma en la respuesta R.b.2, se particulariza dándole un valor numérico a la letra  $m$  para dar una solución. Se evidencia un grado inferior del sentido algebraico. El grupo Arzaquiel cita a Collis (1975). “Dice, que los estudiantes antes de llegar al razonamiento formal trabajan en uno de los tres niveles: los del nivel más bajo tienden a sustituir un número concreto por una letra y si no funciona, abandonan. En el segundo nivel, lo intentan con varios números, utilizando un método de ensayo y error. Después, los alumnos ya han obtenido el concepto de número generalizado expresándolo con un símbolo, que se puede ver como una entidad en sí misma, que tiene las mismas propiedades que cualquier número y los números tienen un significado concreto debido a las experiencias previas que se han tenido con ellas”.

En consecuencia este grupo de estudiantes, que particularizan el ejercicio se encuentran en el primer nivel.

- Interpretación Incorrecta: consiste en no realizar una lectura adecuada y dejar en evidencia la escasez de comprensión de los datos suministrados en los ejercicios propuestos, por tanto, induce a realizar falsas expresiones matemáticas que no dan solución al mismo.

Por la interpretación incorrecta que se hace a la pregunta, se inventa procesos matemáticos, se supone situaciones que no vienen al caso, se cree que los datos son incompletos, se comete el error al formular la operación que se debe ejecutar a pesar de que se sabe que  $m$ , es un valor desconocido y se debe relacionar con el número de grupos.

En una investigación sobre errores cometidos por alumnos de secundaria en Matemática, Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), citada por Rico (1995) pág.14, a esta categoría le dan el nombre de: Datos mal utilizados, “errores que se producen por alguna discrepancia entre los datos y el tratamiento que le da el alumno”.

Para el éxito de la resolución de problemas matemáticos están comprometidos procesos como: la lectura comprensiva de enunciados, gráficas y esquemas, los procedimientos algorítmicos de las operaciones fundamentales, las relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas, procesos mentales como la abstracción, clasificación y descripción de propiedades.

En la figura No 13, se muestran los tipos de respuestas más significativas dadas por los estudiantes en la pregunta 1b.

Figura No 13. Tipos de respuestas. Interpretación Incorrecta.

El profesor de educación física tiene  $m$  número de balones de vóleybol para jugar en grupos. Si forma 5 grupos, ¿Determinar el número de balones en cada grupo?

R.b.1.  $2m+2m+2m+2m+2m \approx 10m$

R.b.2. No se sabe porque no dice el número de balones de vóleybol que tiene, ~~8~~

R.b.3. la expresión en cada grupo sea  $M$

R.b.4.  $m = \text{balones de vóleybol}$        $m+5$   
 $5 = \text{grupos}$

R.b.5.  $5m$  LA EXPRESIÓN PARA EL NÚMERO DE BALONES ES DE  $5m$

R.b.6.  $m^5$

Este error, Interpretación Incorrecta, se presenta por:

- La interpretación de la variable como objeto; es decir, observada como algo concreto, como un lápiz, un cuaderno. Socas (1996), cita a Küchemann (1981), “quien encontró que los estudiantes miran las letras como objeto, reduciendo el significado abstracto de ellas por algo más real”.

Por ejemplo, en la figura No 13 en la respuesta R.b.1, se toma la letra ( $m$ ) como representación de balones, más no como número de balones, esto hace que se cometa el error de interpretar a la variable como algo concreto; de alguna manera se da una cifra para los balones que debe tener cada grupo, para el caso, dos

balones, o sea,  $(2m)$  y luego es sumado cinco veces, porque es el número de grupos que se forman, dando como resultado diez balones, o sea,  $(10m)$ ; se ha inducido el ejercicio a una especie de particularización numérica, pero el error es producido por el significado que se le da a la letra, es decir, letra como objeto y no como variable, se miran a letra  $m$  como representación de balones de voleibol.

- También ocurre por el desconocimiento de la variable como cantidad; este tipo de respuestas se dan porque no hay datos numéricos, por ejemplo, en la respuesta R.b.2, nuevamente no se infiere la labor que tiene la letra  $m$  en el ejercicio, de tal modo, que es ignorada y por eso se argumenta: “no se sabe porque no dice el número de balones de voleibol que tiene”.
- La necesidad de una respuesta; en la respuesta R.b.3, se toma un dato del ejercicio, la letra  $m$ , y se lo escribe como resultado, sin tener ninguna relación con la solución.
- y por último la ejecución de operaciones incorrectas; se observa en la respuesta R.b.4, que la solución al ejercicio es realizar una suma,  $m + 5$ , en la respuesta R.b.5, la operación que se realiza es una multiplicación,  $m5$  y por último tenemos que en la respuesta R.b.6, la operación a realizar se trata de una potencia,  $m^5$ , estas operaciones no solucionan de ningún modo el ejercicio, seguramente se está desarrollando desde un conocimiento mal adquirido, el cual explica que se tiene complicaciones más profundas ya que el pensamiento matemático es de bajo nivel al no ejecutar la operación correcta, es decir, el problema es aritmético; no se aprendió a resolver ejercicios de este tipo en aritmética.

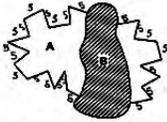
En la pregunta 1(a), se encontraron respuestas que estuvieron A Punto de llegar a la expresión algebraica completamente correcta: el perímetro de la figura en cuestión. Estas respuestas no son consideradas como errores, pero es importante mencionar como se llega a una respuesta casi correcta, ya que, no se concreta la respuesta con la expresión algebraica.

Se rescata el desapego de la aritmética para captar de alguna forma el ejercicio algebraicamente, lo que implica una trascendencia de lo concreto a lo abstracto, visualizando la imagen con mayor profundidad e interpretando la necesidad del problema y la complejidad del mismo.

En este tipo de respuestas se expresa de alguna manera el perímetro, sumando todos sus lados incluyendo los no visibles. Ver (figura No 14) R.a.1. La dificultad está en no relacionar la letra  $p$ , como representación de la cantidad de lados que tiene la figura  $A$ , por tanto, no se llega a la expresión algebraica y las respuestas no definen exactamente el perímetro de la figura en cuestión.

Figura No 14. Tipo de respuestas. A Punto.

R.a.1.



$$P = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \dots$$

DE C unidades c

En la figura No 14 R.a.1, se observa cómo se trata de dar una respuesta al ejercicio; se tiene claro qué operación se debe realizar para su solución, en consecuencia, se suma el número cinco varias veces y al final se ubican puntos suspensivos (...), ya que, se ignora el número de veces que se debe sumar, luego se supone que la suma final debe dar un resultado y se lo reemplaza con la letra  $c$ ; se ha excluido el dato,  $p$  número de lados, pero se aproxima al significado de variable (la letra puede tomar diferentes valores), al darle una nomenclatura al valor que representa el perímetro de la figura dada. Se nota el avance, puesto que, ha creado en su intelecto una noción del significado de variable o generalización.

A continuación se presenta la tabla No 12, con los porcentajes de error.

Tabla No 12. Porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Cambio de la Aritmética al Álgebra” en relación a las preguntas 1a y 1b.

		CAMBIO DE LA ARITMETICA AL ALGEBRA					
Cuestionarios Clasificados en:		Lados Visibles %	Particularización %	A Punto %	Interpretación Incorrecta %	Correctas %	No Aplica %
PREGUNTA	1 a)	49,9	7,2	2,4	0	11,9	28,6
	1 b)	0	27,8	0	31	16,4	24,8

#### 4.2.2. Significado de letras y símbolos:

Al encontrar expresiones matemáticas combinadas con letras, genera conflicto e inseguridad en el desarrollo de ejercicios; por lo general estas expresiones son introducidas de repente en el aprendizaje del álgebra, sin un preámbulo para aclarar las diferencias que existen entre los tipos de letras que se utilizan en matemáticas, y la forma de proceder de algunos símbolos, como el signo igual (=); esta puntualización es de gran importancia, ya que, en la iniciación del aprendizaje del álgebra los estudiantes no se encuentran habituados con estas nuevas condiciones algebraicas y al ser enfrentados ante estas expresiones actúan con respecto al conocimiento que ellos traen desde la aritmética y lo aplican en este nuevo contexto matemático produciendo así el error.

Para el aprendizaje del álgebra, es necesario el buen desempeño y capacidad de utilizar símbolos y letras e interiorizar su significado.

Para analizar los errores de esta categoría se plantearon las siguientes preguntas:

Pregunta No 2: a) Si el Real Madrid anotó  $W$  goles y el Barcelona anotó  $Z$  goles, ¿qué puedes escribir del número total de goles anotados en el partido?

Pregunta No 2: b) La siguiente expresión

$$W + V = W + Z$$

- Nunca es cierta
- Es cierta ¿cuándo?

Los errores encontrados en esta subcategoría fueron: Apariencia Visible; Diferentes Letras Significan Diferentes Valores.

- Apariencia Visible: en la pregunta 2 b) se encontró este error muy común, es caracterizado por resolver el ejercicio sin un estudio y abstracción de los datos, es desarrollado a primera vista de forma espontánea y desacertada. Igualmente ocurre cuando se aplican expresiones verdaderas para determinado proceso y creer que se lo puede aplicar en otro contexto. Este error ya ha sido observado en la investigación: Iniciación al Álgebra, realizada por Socas (1996).

Por la apariencia visible, se encontró con frecuencia respuestas donde se afirman: que una igualdad es cierta, cuando los dos lados del igual tengan la misma expresión, si no es así, entonces no son iguales. En este caso, esta situación nunca sería cierta, ver (figura No 15), esto proviene nuevamente por los conceptos adquiridos en aritmética. Se presenta brevemente la diferencia existente del signo igual en estas dos ramas de la matemática que ha generado el error en esta pregunta.

En aritmética el signo igual se trata como una acción (realizar la operación y dar un resultado verdadero) y es trabajado unidireccionalmente; al lado izquierdo del igual se encuentra la operación que se debe realizar y al lado derecho su resultado, de esta manera:  $15 + 4 = 19$ , también sirve para conectar procesos operatorios para llegar al resultado;  $(3 \times 4) - 2 = 12 - 2 = 10$ .

En álgebra el signo igual es trabajado como un sistema de reglas de transformación;  $(a + b) \cdot (a - b) = (a^2 - b^2)$ . Una de las características de este signo en álgebra es que es bidireccional, se trabaja a ambos lados del signo en expresiones algebraicas tales como;  $8x + 5 = 7x + 8$ . El signo igual condiciona a la variable para que se cumpla la igualdad, por ejemplo, la expresión antes dicha es verdadera cuando  $x = 3$ . Con esto en álgebra no necesariamente la igualdad debe de ser cierta a simple vista, se trata de encontrar los valores de la variable para que se cumpla, de allí que, los alumnos han tomado el igual de forma

aritmética, por consiguiente, deben ver expresiones equivalentes a ambos lados del igual, entonces la expresión dada en el ejercicio nunca es cierta; el error es no considerar que la expresión dada puede ser verdadera en el momento en que  $V$  sea igual a  $Z$ , ( $V = Z$ ). A continuación se presenta, la figura No 15, ejemplos de respuestas pertenecientes a este error.

Figura No 15. Tipo de respuesta. Apariencia Visible.

b) La siguiente expresión  
 $W+V = W+Z$

- Nunca es cierta
- Es cierta ¿cuándo?

R.b.1.   
 • Nunca es cierta X  
 • Es cierta ¿cuándo? siempre en las mismas letras, o números.

R.b.2.   
 Nunca es cierta X  
 Es cierta ¿cuándo? porque si  $W=W$  y  $V \neq Z$   
 ~~$W+V \neq W+Z$~~   $W = \text{valor de un número}$   
 ~~$V \rightarrow \text{equivale a otro y } Z \text{ equivale a otro las}$~~   
~~dos sumas no son iguales~~

R.b.3.   
 Nunca es cierta X  
 Es cierta ¿cuándo?  $W+V = W+V$  porque tienen que ser igual los

Para las respuestas semejantes a la presentada en la figura No 15 respuestas R.b.1, R.b.2, R.b.3, nunca es cierta, unido a sus argumentos que se refieren a que a ambos lados del igual deben existir términos equivalentes, se puede decir que, este error ha sido provocado por la apariencia visible encadenado al significado aritmético del signo igual.

Se encontró respuestas donde se trata de decir cuando se cumple la igualdad en el ejercicio 2 b), dejando en evidencia la falta de interiorización de la noción de variable. En las respuestas también se observa que el signo igual es visto unidireccionalmente, es decir, muchos afirman... “Nunca es cierta, si en vez de  $Z$  iría  $V$ , para así el resultado daría  $W + V$ ”, se observa la expresión de izquierda a derecha, se quiere reemplazar a  $Z$  por  $V$  y no  $V$  por  $Z$ . Estas respuestas son guiadas por la apariencia visible.

- Diferentes Letras Significan Diferentes Valores: este error es derivado de la apariencia visible; se trata de modificar una expresión ubicando o cambiando términos para que una igualdad sea verdadera a simple vista. Esto hace detectar la no comprensión del significado de variable.

Para el caso,  $V$  igual a  $Z$ , ( $V = Z$ ), las letras son independientes del valor numérico que pueden tomar cada una de ellas; pero los estudiantes no llegan a esta igualdad, ya que, existe confusión en el hecho de que estas dos letras diferentes tengan un mismo valor en un determinado momento, por tanto, no es aceptada la igualdad; este error es producido por la falta de claridad en el significado y las diferencias que hay con los símbolos matemáticos en sus diferentes ramas, lo cual, es necesario para el desarrollo y aprendizaje del álgebra. Algunas

respuestas fueron: “esto dependería del valor de  $V$  y el valor de  $Z$ ”, “no porque  $W + V = W + V$  y  $W + Z = W + Z$ , o en ciertas veces” Véase la figura No 16.

Figura No 16. Tipos de respuestas. Diferentes Letras Significan Diferentes Valores.

La siguiente expresión

$$W+V = W+Z$$

- Nunca es verdadera \_\_
- Es verdadera ¿cuándo?

R.b.1. • Nunca es cierta \_\_  
• Es cierta ¿cuándo? no es cierta porque en vez de la z es la v y quedaría w+v

R.b.2. • Nunca es cierta \_\_  
• Es cierta ¿cuándo? esto dependería del valor de v y el valor de z

R.b.3. • Nunca es cierta \_\_  
• Es cierta ¿cuándo? No porque w+v = w+v y w+z = w+z o en ciertas veces

Se entiende el objetivo del ejercicio, se tiene un nivel de interpretación más amplia, pero se carece de sentido en el significado de las letras, por tanto, ese es el obstáculo para llegar a la respuesta correcta, si se tuviera en claro cuál es el significado de las letras en álgebra, es decir, que ellas representan cualquier valor perteneciente a un conjunto, donde para algunos valores la igualdad se cumple y la cuestión es establecer en qué momento será verdadera.

En esta subcategoría se encontraron errores como: Particularización, Interpretación Incorrecta que corresponden a la primera subcategoría y también el error denominado, Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra el cual se tratara más adelante, a continuación se muestra imágenes de estos errores y una breve descripción de ellos.

Figura No 17. Tipos de respuesta. Particularización.

R.a.1 2. a) Si el Real Madrid anoto  $W$  goles y el Barcelona anoto  $Z$  goles, ¿qué puedes escribir del número total de goles anotados en el partido?  
Real Madrid anoto 3 y Barcelona anoto 2 en total 5  $w=3-z=2$  5 goles

R.b.2 b) • Nunca es cierta x  
• Es cierta ¿cuándo? Tula desarrolla  
 $w+v = w+z$   
 $4+1 = 4+3$  y es igual a  $4+1 = w+v$

Se observa en la figura 17 respuesta R.a.1, que las letras son observadas como valor específico; se concibe que en ellas debe ir un valor numérico y de esta manera dar una solución, de igual forma ocurre en la respuesta R.b.2, se

reemplaza valores a cada una de las letras para realizar operaciones y darse cuenta que el resultado es diferente.

Figura No 18. Tipo de respuesta. Interpretación Incorrecta.

R.a.1. El número total de goles anotados en el partido es  $\frac{W}{Z}$

R.a.2. El número de goles anotados del total de goles en el partido es de  $(2WZ)$  goles que se marcaron

R.a.4. no se porq" no hay números q" anote el barcelona o el real madrid

R.b.1. 

- Nunca es cierta
- Es cierta ¿cuándo?  $W + U = W + U^2$

Se contempla en la figura No 18, que en todos los tipos de respuestas las operaciones y procedimientos son erróneos, no se tiene claro procesos aritméticos y se inventa situaciones producidas por una interpretación Incorrecta y desconocimiento de cómo desarrollar este tipo de ejercicios, por tanto, la operación que se realiza no es la adecuada.

En las respuestas como R.a.4, se puede abstraer que no se avanzó en la estructura del significado que tiene la letra o variable, por ello existe un impedimento para desarrollar el ejercicio.

Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra: es caracterizado por creer que la unión de términos en álgebra representa la suma. Esta incidencia será tratada en la subcategoría denominada: Omisión de Signos, pero cabe anotar este error ya que se produjo en las dos preguntas que pertenecen a esta subcategoría; en la figura No 19, se muestran ejemplos de los tipos de respuestas con respecto a este error, en cada pregunta.

Figura No 19. Tipos de respuestas. Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra.

2. a) Si el Real Madrid anoto  $W$  goles y el Barcelona anoto  $Z$  goles, ¿qué puedes afirmar del número total de goles anotados en el partido?

La siguiente expresión  $W+V = W+Z$

- Nunca es verdadera \_\_
- Es verdadera ¿cuándo?

R.a.1. Puedo anotar  $WZ$

R.a.2.  $A = W \quad B = Z \quad W + Z = WZ$

R.a.3.  $w$  goles Real Madrid  
 $Z$  " Barcelona  $w + z = wz$  goles  
los goles anotados son  $wz$  goles

R.b.1.

- Nunca es cierta
- Es cierta ¿cuándo? NO porque  $w + v = wv$

R.b.2.

- Nunca es cierta
- Es cierta ¿cuándo? el resultado es referente a la operación pero sin signo o sea que queda  $wz$

R.b.3.

- Nunca es cierta \_\_
- Es cierta ¿cuándo? hay podemos quitarle el signo + y q nos quede así  $WV = WV$  por q  $WZ$  no se puede por q no expresa el problema la letra  $z$ .

Se observa en la figura anterior los tipos de repuestas, en el que la suma ( $W + Z$ ) es tomada como la unión de las letras ( $WZ$ ) que en álgebra representa la multiplicación; no cabe duda que hay confusión y posiblemente es originado por la omisión de signos. Esta nomenclatura  $WZ$ , donde no se encuentra el signo por ( $\times$ ), es utilizada en álgebra para representar el producto entre términos matemáticos, es introducida de manera insustancial, como si los estudiantes ya estuvieran acostumbrados a ella. Al iniciar el aprendizaje del álgebra de un momento a otro se deja de utilizar el signo por ( $\times$ ), algunas veces se lo sustituye por un punto ( $\cdot$ ), o simplemente no se escribe ningún signo entre letras o términos; esto ocasiona confusión y crea el error, muchas veces no saben qué operación realizar al encontrar expresiones donde el signo es omitido y por tanto la ejecutan según su criterio. Como se dijo anteriormente este tipo de error se tratara más adelante.

A continuación se presenta la tabla N° 13 con los porcentajes de error, de la subcategoría, Significado de Letras y Símbolos, teniendo en cuenta que los errores pertenecientes a la misma son: Apariencia Visible, Diferentes Letras Significan Diferentes Valores.

Tabla No 13. Porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Significado de Letras y Símbolos” en relación con las preguntas 2a y 2b.

		SIGNIFICADO DE LETRAS Y SÍMBOLOS						
Cuestionarios Clasificados en:		Apariencia Visible %	Diferentes Letras Significan Diferentes Valores %	Particularización %	Desconocimiento del significado de concatenación en álgebra %	Interpretación Incorrecta %	Correctas %	No Aplica %
PREGUNTA	2 a)	0	0	19,4	26	6,9	23,3	24,4
	2 b)	66,6	6	1,2	7	5,1	10,6	3,5

#### 4.2.3. Del lenguaje común al lenguaje algebraico:

El lenguaje matemático necesita del lenguaje natural, gracias a él, podemos darle significado a símbolos y expresiones matemáticas aún siendo diferentes. Por su parte, el lenguaje natural ayuda a expresar sentimientos, situaciones, descripciones de momentos, en cambio el lenguaje matemático es exacto y no expresa ningún tipo de emoción, sin embargo, ambos tienen una estructura o reglas que hacen que la comunicación sea entendible y precisa para cualquier persona que conozca de ellas, es decir, para el lenguaje natural o común, en la construcción de oraciones, se debe tener en cuenta las reglas gramaticales, ortografía, etc. En matemáticas sucede lo mismo, se debe seguir una estructura u orden, por ejemplo: En el lenguaje natural está mal escrito: *mañana en la llovió, sol salió tarde y en la*; no es una oración bien estructurada ni entendible. Por otro lado en el Lenguaje matemático, está mal escrito:  $5X- = 3+^2$ ; no es una ecuación, no es entendible y mucho menos exacta. De allí que, es necesario conocer las reglas del lenguaje natural y matemático, para poder comunicarnos de forma apropiada, para escribir, manipular procesos, y dar respuesta a ejercicios. Con estos dos lenguajes se desarrolla, se enseña y se aprende matemática.

El inconveniente se presenta, cuando se utilizan palabras comunes que tienen significados diferentes en estos dos lenguajes y producen desconcierto en los alumnos, por ejemplo; palabras como, matriz, factor, raíz, potencia, producto. En muchas ocasiones el concepto de estas palabras no se adquieren de forma apropiada en ninguno de los dos contextos y si se tiene en uno de ellos, de igual manera genera problemas al utilizarlas, sobre todo en matemáticas; en esta ocasión, analizaremos como interpretan expresiones matemáticas, combinadas con palabras que tienen un significado particular en ella.

Para analizar los errores de esta subcategoría se plantearon las siguientes preguntas:

Pregunta No 3 a) ¿Cómo escribes **3 aumentado en  $5W$** ?

Pregunta No 3 b) **Cómo escribes  $m + 5$  multiplicado por 3?**

Pregunta No 3 c) **Aumentar 3 a  $5m$**

Pregunta No 3 d) Multiplicar  $K + 2$  por 3

Los errores encontrados en esta subcategoría fueron: Ignora la Variable, Mal Uso de Signos de Agrupación, y No aplica la Ley Distributiva Correctamente.

- Ignorar la Variable: consiste en ejecutar una operación, como la suma, en una expresión donde los términos no son semejantes, ya que uno de ellos está acompañado de una variable, por lo cual, no es permitido realizarla.

Al ignorar la variable, son impulsados a realizar la operación indicada, (para este caso la suma), sin apreciar la letra y sólo se enfocan en los términos numéricos, sin darse cuenta que esta operación no es oportuna. Otros investigadores llaman a este error como, La No Aceptación de la Falta de Cierre (Silvia Caronía & Operuk, 2003-2004), Falta de Clausura (Collis, 1974), citado por, (Palarea, 1998).

Este error será tratado en la categoría: El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra, con el nombre de Clausura. Sin embargo, se observa la incidencia de este error en esta subcategoría. A continuación se muestra en la figura No 20 ejemplos de respuestas con este error.

Figura No 20. Tipo de respuesta. Ignora la Variable.

3.a) “¿Cómo escribes 3 aumentado en  $5W$ ?”

R.a.1.  $3^5 + 5$

R.a.2.  $(3+5)W$

R.a.3.  $(3+5W) = 8W$  se suma el coeficiente y se pasa la parte literal.

3.c) “Aumentar 3 a  $5m$ ”

R.c.1.  $(3+5)m$

R.c.2.  $3+5m = 8m$

3.d) “Multiplicar  $K + 2$  por 3”

R.d.1.  $5$

Como se observa en la figura No 20, en las respuestas R.a.1, R.a.2, R.a.3, R.c.1, R.c.2, la variable es ignorada y sólo se suma la parte numérica, en algunos casos se realizan una especie de factorización con la letra, para ejecutar la suma de los

números; otros simplemente operan y aumentan la variable al final. En la respuesta R.d.1, ignoran por completo la letra  $K$  y cambian la operación multiplicación por la suma dándole como resultado 5.

Socas (1996), cita a Küchemann (1982), donde, encontró que los estudiantes miran las letras como incógnitas específicas.

Se cree que la letra toma un valor numérico y no diferentes valores, en consecuencia se opera ignorándola, no se tiene una noción del concepto de la letra en álgebra. Es evidente que no se comprende la diferencia que existe entre dos expresiones, una aritmética y otra algebraica, por ejemplo, al sumar dos números nos da otro número particular,  $3 + 5 = 8$ , (expresión aritmética), y por el contrario sí sumo  $3 + 5W$  (expresión algebraica), da como resultado un conjunto de números determinados por los valores que puede tomar  $W$ , por consiguiente, una vez más se ve reflejada a profundidad el desconocimiento de las diferencias existentes de los símbolos y letras en estas dos ramas de la matemática, de allí que, no pueden dejar una expresión inconclusa, por ello efectúan la operación ignorando la variable. Por consiguiente, es importante el conocimiento por parte de los estudiantes del lenguaje algebraico, haciendo puntualización en cada expresión para evitar este tipo de errores.

- Mal Uso de Signos de Agrupación: caracterizado por no creer necesario el uso de paréntesis, (), o su mala aplicación, lo cual genera el error al operar, en consecuencia se dan respuestas erróneas.

Los paréntesis y corchetes ayudan a tener un orden en la estructura de expresiones matemáticas, ellos son como los signos de puntuación en el lenguaje cotidiano, es decir, la coma se utiliza para separar elementos gramaticalmente equivalentes en un enunciado, un caso es: *toda europea estaba presente: franceses, españoles, italianos, alemanes, portugueses, etc.* El punto aparte, separa dos párrafos distintos con dos contenidos diferentes, por ejemplo:

*Un año después de salir el disco al mercado, prácticamente todos saben ya quién es.*

*El segundo single ha comenzado a sonar.*

En matemáticas los signos de agrupación como su nombre lo dice nos ayuda agrupar términos, a separar unos procesos de otros, a llevar un orden con respecto a las operaciones que se van a ejecutar y así poder leer una expresión matemática, ejemplo:

$$\{8 + 4(-5 + 3 + 14)\} \times 2 = \{8 + 4(12)\} \times 2 = \{8 + 48\} \times 2 = \{56\} \times 2 = 112$$

Gracias a ellos sabemos cómo proceder, que operaciones realizar antes que otras y llegar al resultado correcto; es de gran importancia saber en qué momento utilizarlos y cómo trabajar con ellos en aritmética y álgebra.

En la figura No 21. Se observan las diferentes situaciones que se presentan en la utilización y no de paréntesis.

Figura No 21. Tipos de respuesta. Mal Uso de Signos de Agrupación.

R.d.1.  $\underline{k+2 \times 3}$

R.b.1.  $\underline{m+5 \times 3 = m+15}$

R.d.2.  $\underline{k+2 \times 3 = k+6 = 6k}$

R.b.2.  $\underline{m+5(3) = m+15}$

R.d.3.  $\underline{k+(2 \times 3)}$

En los tres primeros ejemplos de respuestas, R.d.1, R.b1, R.d.2, de la figura 21, no se cree necesario utilizar paréntesis, se podría decir que no se está suficientemente instruido para su debida aplicación, no se sabe en qué momento aplicarlos. En el supuesto caso, en que se olvide o no se aplique la jerarquía de los símbolos las respuestas se verán afectadas. Este tipo de error de no ver necesario utilizar paréntesis, también fue detectado en otras investigaciones como las realizada por; (Palarea, 1998) y (Socas, 2007), este último afirma que, “el error puede ser cometido, o bien por la ausencia de sentido o bien en un obstáculo”.

En las siguientes 2 respuestas, R.b.2, R.d.3, de la misma figura, se utiliza paréntesis, pero de forma incorrecta, pues se asocia de manera equivocada y esto conduce a cometer errores obteniendo respuestas falsas; un caso es: primero se multiplican los números y al resultado se le suma la letra. En la respuesta R.d.3, se ha realizado una asociación impropia, totalmente diferente a la pedida en el ejercicio, (multiplicar  $k+2$  por 3), si leemos la expresión escrita en esta respuesta,  $k+(2 \times 3)$ , sería así: *al resultado, de la multiplicación de los números 2 y 3, le sumo la variable k*. Se ha manipulado enteramente el ejercicio con sólo la ubicación de los paréntesis.

Es conveniente que se entienda la importancia de estos signos de agrupación que se aprenda y adquiera agilidad en dominar su aplicación en el contexto matemático; ya que, para los estudiantes es suficiente con el sentido en que están escritas las operaciones, de izquierda a derecha. (Kieran 1979) dice “el orden de izquierda a derecha en que están escritos los términos específica para esos estudiantes el orden del cálculo”.

- No aplica la Ley Distributiva Correctamente: el producto respecto a la suma  $a.(b + c) = a.b + a.c$ . El cual es caracterizado por operar sólo uno de los términos preferiblemente el numérico, ignorando la parte literal, como si no hiciera parte de la expresión. Este error proviene de aritmética, dado que no se ha desarrollado a plenitud el algoritmo de esta propiedad tan importante para el aprendizaje del álgebra. En la figura 22 respuestas R.d.4, la expresión es correcta pero no se ejecutan las operaciones, sólo la deja indicada.

Figura No 22. Tipos de respuesta. No aplica la Ley Distributiva Correctamente.

R.d.4.

R.d.5. 
$$\frac{(k+2)(3)}{(k+2)(3)} = k+6$$

R.b.3. 
$$\frac{(m+5)(3)}{(m+5)(3)} = m+15$$

En las respuestas R.d.5 y R.b.3 de la anterior figura, se opera un término preferiblemente el numérico y al final se agrega la variable. (Socas, 2007), afirma, “que este error puede ser generado por la forma de enseñanza-aprendizaje de las propiedades, las cuales se enseñan al mismo tiempo, sin hacer énfasis en cada una de ellas por separado y no se profundiza en la necesidad de la existencia de dos operaciones para que se pueda dar la distributividad”; dice además, “que está involucrado un pensamiento numérico, lo que se trataría de un error operacional/estructural”.

Propiedades como la asociativa, conmutativa, distributiva y otras más, son esenciales para desarrollar cálculos matemáticos y necesarias para aprender nuevos conceptos, por tanto, es necesario crear en los estudiantes familiaridad con las propiedades enfatizando cada una de ellas y lograr que las desarrollen a plenitud, pues estas propiedades hacen parte del lenguaje algebraico.

En la clasificación de errores de la categoría, Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras, existen errores que se repiten en las subcategorías, esto hace ratificar el error, ya que, es persistente en diferentes tipos de preguntas, en esta categoría se presentaron nuevamente los errores: Interpretación Incorrecta y Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra. Como se ha dicho anteriormente este último error pertenece a la subcategoría Omisión de Signos, pero se hace un análisis a este error de acuerdo a la presente subcategoría, Del Lenguaje Común al Lenguaje Algebraico.

- Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra: este error es caracterizado, por creer que la unión en álgebra representa la suma.

Como se observa en la figura No 23, respuesta R.a.1, R.a.2. Se interpreta a: 3 aumentado en  $5W$  como  $35W$  o  $15W$ , respectivamente, como se puede ver, aumentar lo interpretan como la unión de estos términos o para el segundo caso se cree que la solución es la multiplicación de los valores, de igual manera se observa el error en las respuestas, R.b.1, donde se combina operaciones, en primer lugar  $m + 5 = 5m$  luego se realiza la multiplicación por el número 3 dando como resultado  $15m$  y este resultado es nuevamente expresado como la suma,  $m + 15$ , en la respuesta R.c.1, aumentar se interpreta como la multiplicación, por último en la respuesta, R.d.1, deja en evidencia la confusión de la suma con la multiplicación, donde,  $K + 2$  es igual a  $K + K$ .

Con estos ejemplos de respuestas; no cabe duda del conflicto que genera la omisión de signos para el aprendizaje del álgebra.

Figura No 23. Tipo de respuestas. Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra.

a) ¿Cómo escribes 3 aumentado en $5W$ ?	R.a.1	<u>si lo aumento <math>3+5W = 35W</math>.</u>
	R.a.2	<u>aumentando <math>5W = 15W = 3(5W)</math></u>
b) ¿Cómo escribes $m+5$ multiplicado por 3?	R.b.1	<u><math>m+5 = 5m+3 = 15m = m+15</math></u>
c) Aumentar 3 a $5m$	R.c.1	<u><math>3(5m) = 15m</math>.</u>
d) Multiplicar $K+2$ por 3	R.d.1	<u><math>K+K</math> por 3.</u>

Es probable que no se haya adquirido una buena apreciación y relación del símbolo matemático, + (más), con los diferentes nombres que pueden tener como: incrementar, adicionar, añadir, agregar y aumentar. Al parecer no fue profundizado en aritmética, es decir, hacer que los estudiantes articulen el símbolo matemático con los diferentes sinónimos que tiene la palabra sumar en el lenguaje cotidiano, esto unido a que en muchas ocasiones, se dice que la multiplicación es una suma reiterada; que al multiplicar un número por otro nos aumenta el valor, o que el resultado se incrementa; lo cual es verdad para determinados casos, pero no se aclaran las diferencias existentes entre esas dos operaciones, en consecuencia pueden crear una idea errónea de estos procedimientos. Otra posibilidad es que en clase, se hayan hecho estas aclaraciones, pero es olvidada y no es recordado el significado, que tiene la expresión, donde se omite el signo por ( $\times$ ) y entonces, se especula con la operación que se debe aplicar, como la suma.

A continuación se presenta la tabla No 14. Con los porcentajes de error de la subcategoría, Del Lenguaje Común Al Lenguaje Algebraico, teniendo en cuenta que los errores pertenecientes a la misma son: Ignora la Variable, Mal Uso de Signos de Agrupación, y No aplica la Ley Distributiva Correctamente.

Tabla No 14, porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Del Lenguaje Común al Lenguaje Algebraico” en relación a las preguntas: 3a, 3b, 3c, 3d.

		LENGUAJE COMUN AL LENGUAJE ALGEBRAICO						
Cuestionarios Clasificados en:		Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra %	Interpretación Incorrecta %	Ignora la Variable %	Mal Uso de Signos de Agrupación %	No Aplica la Ley Distributiva Correctamente %	Correctas %	No Aplica %
PREGUNTA	3 a)	4,2	24,5	26,3	0	0	32,5	12,5
	3 b)	21,8	11,3	0	28,1	0	27,2	11,6
	3 c)	9,3	9,9	43,6	0	0	19,1	18,1
	3 d)	40,9	1,8	0	4,5	26,6	8,1	18,1

#### 4.2.4. Omisión de signos.

La omisión de signo se interpreta de diferente manera en aritmética y en álgebra. En aritmética, la omisión de signos hace referencia a la suma. Para aprender a escribir números, tales como, 1, 2, 3, ..., 11, 12, 13, ..., 22, 23, 24, ..., 115, ... es todo un proceso, esto es enseñado utilizando el sistema numérico decimal, unidades, decenas, centenas, millar, etc. Donde cada número tiene su respectiva posición, ejemplo, para escribir 145 se lo representa de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \text{Cent} \text{ Dece} \text{ Unid} \\ 100 + 40 + 5 = 145 \end{array}$$

Donde las centenas representan 100, las decenas 10, y la unidad 1 por tanto:

$$\begin{array}{l} 1 \text{ de } 145 \text{ es } 1 \times 100 = 100 \\ 4 \text{ de } 145 \text{ es } 4 \times 10 = 40 \\ 5 \text{ de } 145 \text{ es } 5 \times 1 = 5 \end{array}$$

Si se suman los resultados da igual a 145, del mismo modo se puede observar la omisión de signo en los números mixtos,  $5\frac{6}{2}$ , donde representa la suma de números fraccionarios,  $\frac{5}{1} + \frac{6}{2}$ , por tanto, la concatenación en aritmética personifica la suma.

Por el contrario, en álgebra, la omisión de signo simboliza la multiplicación,  $ab = a \times b$

(Palarea, 1998), dice, “en aritmética la yuxtaposición de dos números,  $43 = 40 + 3$ , significa suma, en álgebra,  $4a = 4 \times a$ , significa multiplicación, (Matz, 1979)”.

Es vital aclarar esta situación, y no iniciar el aprendizaje del álgebra como si el estudiante, ya tuviera explícitas estas diferencias y así evitar confusiones.

Para analizar los errores de esta subcategoría se plantearon las siguientes preguntas:

Pregunta No 4 a) Si  $a = 3$ , cuanto es  $4a$ ?

Pregunta No 4 b) Si  $b = 5$ , cuanto es  $b7$ ?

Pregunta No 4 c) ¿Cuánto es  $ab$  si  $a = 3$  y  $b = 5$ ?

Pregunta No 4 b)  $5\frac{2}{7}$  Es un numero mixto, donde  $a = 2$   $b = 7$   $c = 5$  ¿Cuál es la expresión algebraica del número mixto?

Los errores encontrados en esta subcategoría fueron: Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra, Confusión de la Multiplicación con la Potenciación, Sustitución de Letras por Valores Numérico con y sin Paréntesis, Incluye la Letra en su Resultado.

- Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra: es caracterizado por creer que la unión de términos en álgebra representa la suma. Este error es significativo para la investigación ya que es uno de los que se han presentado persistentemente. A continuación se presenta la evidencia del conflicto que genera la omisión de signos en los estudiantes.

Figura No 24. Tipos de respuestas, Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra.

a) Si $a=3$ , cuanto es $4a$ ?	R.a.1. <u>si <math>a=3</math> entonces <math>4+3=7</math></u>
b) Si $b=5$ , cuanto es $b7$ ?	R.b.1. <u>si <math>b=5</math> entonces <math>5+7=12</math></u>
c) ¿Cuánto es $ab$ si $a = 3$ y $b = 5$ ?	R.c.1. <u><math>a+b = 3+5 = (3+5) = 8</math></u>
	R.c.2. <u><math>a=3</math> y <math>b=5</math> como veno la hacer <math>ab=15</math> o <math>8</math></u>

En las tres primeras respuestas, R.a.1, R.b.1, R.c.1, de la figura No 24, referentes a la omisión de signos, efectivamente se realiza la sustitución, pero las expresiones dadas en el cuestionario:  $4a$ ,  $b7$ ,  $ab$ , son interpretadas como la suma, es decir, que son equivalentes a:  $4 + a$ ,  $b + 7$ ,  $a + b$ , respectivamente. Por tanto, este tipo de respuestas hace deducir que la concatenación en álgebra (omisión de signo), es confundida con la suma. En la respuesta, R.c.2, es evidente la

confusión, al dudar en la respuesta, no sabe si multiplicar o sumar, por ello escriben las dos opciones, esta falencia que viene presentándose en casi toda la investigación de esta categoría, podría evitarse si no se excluye el signo por ( $\times$ ), de golpe. (Socas, 1996) aconseja no omitir el signo de la multiplicación demasiado pronto cuando se trabaja con productos algebraicos, para evitar este tipo de errores.

No sólo eso, sino también aclarar las diferencias existentes, ante esta situación repetidas veces, ya que, se viene trabajando con otro sistema durante todo el trayecto educativo e inesperadamente en octavo grado cambian significados de símbolos que de alguna manera ya se han interiorizado.

- Confusión de la Multiplicación con la Potencia. Categorizado por creer que la multiplicación está relacionado con el algoritmo de la potenciación.

Como se puede percibir, en la figura No 25 respuestas R.a.1, R.b.1, se expresa el ejercicio dejando de base uno de los términos numéricos y el otro tomado como potencia, luego se aplica el algoritmo de potenciación. Este error es producido por la omisión de signo en la multiplicación lo cual induce, a realizar una visualización de estas expresiones, (multiplicación y potencia, de términos) que aparentemente pueden ser semejantes y relacionar los procesos creyendo que son equivalentes. (Socas, 1996), afirma “que este error puede producirse de una apariencia visual de  $a^2$  denotado  $a \times a$  frecuentemente confundido con  $2a$ ”.

Este error se fundamenta cuando se observa que estas dos expresiones,  $Z^2$  y  $2Z$ , son equivalentes en el momento que  $Z$  toma el valor de 2, de tal manera que es importante aclarar esta situación y resaltar que esta casualidad no se cumple para los demás valores que pueda tomar  $Z$ .

Figura No 25. Tipo de respuesta. Confusión de la Multiplicación con la Potencia.

a) Si $a=3$ , cuanto es $4a$ ?	R.a.1. $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 = 4a = 81$
b) Si $b=5$ , cuanto es $b^7$ ?	R.b.1 $(5)^7 = 171.875$

Es importante aclarar los procesos de las operaciones haciendo énfasis en cada una de ellas, detallando las diferencias, aclarando el lenguaje matemático para representarlas, como por ejemplo, el significado que tiene la omisión de signos entre términos en álgebra.

- Sustitución de Letras por Valores Numérico con y sin Paréntesis: hace referencia, a una simple transposición de datos, reemplazar números por letras o viceversa, en algunos casos es acompañado por signos de agrupación como los paréntesis. En la figura No 26, se observa que en las tres primeras respuestas, R.a.1, R.b.1, R.c.1, hay dos tipos de sustitución; por una parte, sólo se reemplaza el valor dado en la letra correspondiente, con lo cual no se tiene ningún

inconveniente. Para ellos la respuesta es delimitada en un simple reemplazo de números y letras. Socas(1996). Dice, En aritmética la concatenación es usada en la notación <cada lugar, un valor>. Error típico en álgebra es concluir que si  $x = 6$ ,  $4x = 46$ .

Figura No 26. Tipo de respuesta. Sustitución de Letras por Valores Numérico con y sin Paréntesis.

- |   |  |                                      |
|---|--|--------------------------------------|
| a) Si $a=3$ , cuanto es $4a$ ?  | R.a.1. <u>43</u>   | R.a.2. <u><math>4s = 4(3)</math></u> |
| b) Si $b=5$ , cuanto es $b7$ ?  | R.b.1. <u>75</u>   | R.b.2. <u><math>fs = 5(7)</math></u> |
| c) ¿Cuánto es $ab$ si $a = 3$ y $b = 5$ ?   | R.c.1. <u>35</u>   | R.c.2. <u><math>fs = 3(5)</math></u> |
| d) $5\frac{2}{7}$ Es un numero mixto, donde $a = 2$ $b = 7$ $c = 5$<br>¿Cuál es la expresión algebraica del número mixto? | R.d.1. <u><math>5\frac{2}{7}</math> algebraicamente queda expresado como <math>\frac{ca}{b}</math></u> |                                      |

Este error se presenta porque hay un desconocimiento, de que en la expresión dada en el ejercicio, como por ejemplo,  $4a$ , existe la operación multiplicación, es decir,  $4 \times a$ . Por la omisión del signo no se realiza la operación inmersa en la expresión y sólo se reemplazan los datos. De igual manera ocurre con el segundo tipo de sustitución, respuestas, R.a.2, R.b.2, R.c.2, la diferencia es el uso de paréntesis, aun así, no se termina el ejercicio; puede ser que se sientan confundidos y prefieran dejarlo expresado.

Para la solución de la última pregunta, 4 b); no sólo se requiere la comprensión, de que existe diferencia entre la concatenación de una expresión aritmética y una algebraica, sino también, un pleno conocimiento del algoritmo que se utiliza para desarrollar un número mixto, es evidente en los estudiantes que realizaron una sustitución de valores en esta pregunta, respuesta R.d.1, no gozan de estas dos condiciones requeridas para resolver este ejercicio, pues solamente se ubican las letras que le corresponde a cada número.

• Incluye la Letra en su Resultado: hace referencia a que se realiza la sustitución de valores por letras para ejecutar la operación pertinente, para el caso la multiplicación, y luego incorporar nuevamente la letra en la respuesta. En la figura No 27, miramos ejemplos, de respuestas con respectó a este error.

Figura No 27. Tipo de respuestas. Incluye la Letra en su Resultado

- a) Si  $a=3$ , cuanto es  $4a$ ? R.a.1. en este caso seria  $b)(4)=12a$
- b) Si  $b=5$ , cuanto es  $b7$ ? R.b.1. seria  $b)(7)=35b$
- c) ¿Cuánto es  $ab$  si  $a = 3$  y  $b = 5$ ? R.c.1. 15ab

En las respuestas, R.a.1, R.b.1, R.c.1, se realiza la sustitución, luego se efectúa la operación necesaria para este ejercicio, la multiplicación, sin embargo, incluyen la letra en su respuesta, pues la variable es observada como un objeto, es decir, como el nombre o marca de algo, el cual debe agregar en su resultado. Este error poco frecuente pero curioso, confirma una vez más el conflicto que generan las variables en los estudiantes.

Existieron respuestas con errores que ya se nombraron, estos son: Apariencia Visible e Interpretación Incorrecta a continuación se muestra imágenes de estos errores y una breve descripción de ellos.

- Apariencia Visible: caracterizada por proceder a primera vista y dar una respuesta de forma espontánea y desafortunada; igualmente incide cuando se aplican expresiones verdaderas para determinado proceso y creer que se lo puede aplicar en otro contexto. Se observan ejemplos de respuesta en la figura No 28; como resuelven el ejercicio impulsados por la apariencia visible.

Figura No 28. Tipo de respuestas. Apariencia Visible.

- a) Si  $a=3$ , cuanto es  $4a$ ? R.a.1  $a=4$
- b) Si  $b=5$ , cuanto es  $b7$ ? R.b.1  $B=7$

Como se ve reflejado en la figura 28, respuestas, R.a.1, R.b.1, se hace una visualización al ejercicio, sin detallar ni profundizar su objetivo, lo resuelve espontáneamente estableciendo: como  $a$  es igual a 3, ( $a = 3$ ), entonces,  $a$  es igual a 4 ( $a = 4$ ).

- Interpretación Incorrecta: se crea falsos procedimientos los cuales son fundados desde un conocimiento previo y lo tratan de adecuar al ejercicio

propuesto. Se observa en la figura No 29, ejemplos de respuestas asociadas a este error.

Figura No 29. Tipo de errores. Interpretación Incorrecta.

c) ¿Cuánto es  $ab$  si  $a = 3$  y  $b = 5$ ?

R.c.1  $a^3 + b^5$

R.c.2  $\frac{4-3=5}{b}$

d)  $5\frac{2}{7}$  Es un número mixto, donde  $a = 2$   $b = 7$   $c = 5$   
¿Cuál es la expresión algebraica del número mixto?

R.d.3  $\frac{5+2}{7} \frac{7}{7} \cdot \frac{7}{7} \frac{7}{7}$

R.d.4  $5\frac{2}{7} = \frac{(5 \times 7) + 2}{7} = \frac{37}{7}$

En la figura No 29, respuestas, R.c.1, R.c.2, R.d.3, R.d.4, donde se aplican algoritmos o formulas producidas por la imaginación, dejan en evidencia que no se comprendió la solicitud de cada pregunta, ya sea por su interpretación incorrecta de lo sugerido en ella o desconocimiento total de cómo solucionarlo y para dar una respuesta se instauran procesos inadecuados; aunque, en el ejercicio del número mixto (4d), existieron 2 estudiantes que solucionaron este número de forma particular correctamente, no da solución al ejercicio y dejan en claro que no capturaron la idea notificada en la pregunta, la cual es, expresar el número mixto de forma algebraica, y no desarrollarlo numéricamente.

A continuación se presenta la tabla No 15. Con los, porcentaje de error teniendo en cuenta que los errores pertenecientes a esta subcategoría son: Desconocimiento del significado de concatenación en álgebra, confusión de la multiplicación con la potenciación, sustitución de letras por valores numéricos con y sin paréntesis e Incluye la letra en su resultado.

Tabla No 15. Porcentajes de los tipos de error de la subcategoría “Omisión de Signo” en relación a las preguntas: 4a, 4b, 4c, 4d.

		OMISIÓN DE SIGNOS								
Cuestionarios Clasificados en:		Sustitución de letras por Valores Numéricos %	Sustitución de letras por Valores Numéricos, Utiliza Paréntesis %	Incluye la Letra en su Resultado %	Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra	Confusión de la Multiplicación con la Potenciación %	Apariencia Visible %	Interpretación Incorrecta %	Correctas %	No Aplica %
PREGUNTA	4 a)	9	2,4	0,9	20,6	2,7	17,3	0	17	30,1
	4 b)	7,8	3	0,3	18,8	2,7	18,2	0	17,9	31,3
	4 c)	11,6	2,7	1,5	31,9	0	0	2,7	21,8	27,8
	4 d)	42,1	0	0	0	0	0	18,8	0,9	38,2

### 4.3. EL OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y LA NATURALEZA DE LAS RESPUESTAS EN ÁLGEBRA

Las actividades matemáticas desarrolladas en la Educación Básica, antes del álgebra (hasta el grado séptimo), son de tipo aritmético. Las cantidades se expresan en números, es decir, 5 expresa una cantidad concreta: “cinco”. Si se quiere expresar un número mayor o menor, se usan símbolos distintos. En álgebra, se usan letras, de tal manera que, una letra puede representar cantidades diferentes; estas letras se denominan variables y permiten las representaciones de generalizaciones, relaciones y procesos. Esta diferencia, entre las representaciones usadas en la aritmética y el álgebra, en algunas ocasiones es ignorada. De tal forma que al iniciar el estudio del álgebra, los estudiantes suponen que los procedimientos son los mismos que en aritmética, en donde, todas las respuestas están dadas en números, y las expresiones que tengan operaciones como la suma, resta, multiplicación y división, deben ser desarrolladas hasta obtener un término como respuesta. Por ejemplo, la adición, tiene la siguiente estructura: las cantidades, el símbolo de la operación (+), el símbolo igual (=) y el resultado. En este sentido, la expresión  $12 + 2$  está incompleta, debe ser cerrada de tal manera que cumpla con la estructura utilizada; para este caso será  $12 + 2 = 14$ . Este es un procedimiento válido y constituye una forma procedimental de los estudiantes; el error aparece al momento de tratar con variables, en las que hacen presencia expresiones como  $3x + 4$ . Aquí se usa una letra “ $x$ ”, que antes no ha sido usada sino sólo como nominal. Sin embargo, al tener la misma estructura que la suma aritmética, se procede a dar una respuesta “ $3x + 4 = 7x$ ”. Este error o forma de proceder se le ha denominado “Clausura”, entendida, no como su definición formal en matemáticas, sino más bien, haciendo una referencia a la propiedad clausurativa en algunos conjuntos, en la cual, si se opera bajo alguna operación dos elementos pertenecientes a un conjunto, la respuesta será un elemento perteneciente al mismo conjunto. En este sentido, la intencionalidad de la pregunta tiene como objetivo que la respuesta tenga un único término. En cambio, la naturaleza de la respuesta dada por el estudiante, es la clausura influenciada por la cultura aritmética. De este modo, la “Clausura”, se considera como eje principal de la categoría a estudiar.

El rastreo de los errores para esta categoría, se realizó mediante la aplicación de un cuestionario a 335 estudiantes, de las instituciones escogidas; dicho cuestionario se estructuró en dos partes, la primera, desde un contexto geométrico y la segunda, desde las operaciones básicas con polinomios.

#### 4.3.1. CONTEXTO GEOMÉTRICO.

La geometría es el sistema concreto para llegar a conceptualizar objetos algebraicos. Históricamente la geometría fue la antesala del álgebra moderna. El trabajo geométrico de los griegos, centrado en las formas, dio el marco para la

generalización a través de fórmulas, la solución de los problemas particulares y la resolución de ecuaciones. Didácticamente, la geometría es un recurso para llegar al concepto de variable y explicar situaciones algebraicas de carácter abstracto.

En este sentido en el “contexto geométrico”, se abordó las operaciones algebraicas de forma implícita, planteando el cálculo de perímetros de algunas figuras planas, en las que los lados se denotan, primero, con números naturales y, luego, con variables. Así:

- Trabajo aritmético: en las preguntas 1. a) y b), en la que se utiliza elementos de la aritmética (números naturales);
- Trabajo algebraico: en las preguntas 1. c) y d), en las que se trabaja con variables.
- Trabajo aritmético-algebraico: en las preguntas 1. e), f) y g), en las que se combinan los dos contextos anteriores.

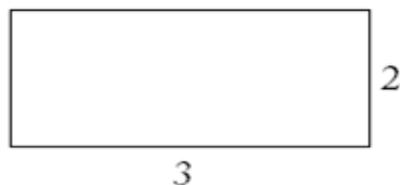
#### 4.3.1.1. Trabajo aritmético.

En este trabajo se plantean preguntas con contenido aritmético, partiendo de situaciones geométricas. De tal manera que se comiencen a evidenciar los procedimientos que comúnmente se usan en problemas de este tipo y como estos influyen posteriormente en el trabajo algebraico.

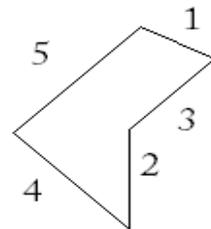
A continuación se presentan las preguntas planteadas para este trabajo y el tipo de respuestas encontradas en los cuestionarios.

1. Calcula los siguientes perímetros:

a)



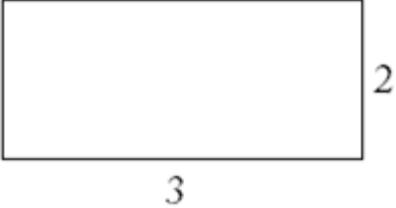
b)



Los errores para estas preguntas fueron variados y significativos. Por ejemplo, en la pregunta 1. a) Se suma únicamente los lados que tienen medida: “ $3+2=5$ ” o en el caso de la figura b) se suma de forma incorrecta las medidas de cada lado de la figura: “ $1+2+3+4+5=16$ ”. Estos casos se categorizaron de la siguiente manera:

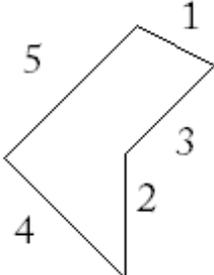
- “Olvido del significado de perímetro”, este error es de tipo geométrico. El perímetro en este caso es confundido con el área de una figura plana, de tal manera, que al calcularlo se utiliza únicamente dos lados (la base y la altura) fig 30. a) R 1. a).

Figura 30.a. Tipos de respuesta. Olvido significado de Perímetro.

a)  R 1. a) multiplicar  $3 \times 2 =$  Perímetro de la figura

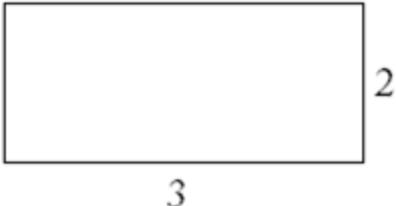
- “Suma incorrecta de la medida de los lados”. El concepto de perímetro es claro, se expresa correctamente la suma de los lados. Sin embargo, al momento de trabajar dicha suma, se presenta el error en el cálculo de la misma fig. 31. R 1.b).

Figura 31.b. Tipos de respuesta. Suma incorrecta de la medida de los lados

b)  R 1. b) el perímetro es:  $120 = 24 \times 5$

- “Incomprensión de la pregunta”. El proceso se desvía de lo planteado por la pregunta, se describe las partes constitutivas de las figuras, como la base y la altura (o largo y ancho), fig. 32 R 2. a), en ningún momento se plantea el cálculo del perímetro. Esta situación obedece a dificultades en la comprensión de lectura, la cual no sólo es importante en álgebra, sino en ejercicios de cualquier otra ciencia.

Figura 32. Tipos de respuesta. Incomprensión de la pregunta

a)  R 2. a) que 3 es la medida de la anchura y el 2 es la medida de la altura

Esta categorización permite dar indicios de procedimientos que se adoptan en aritmética, los cuales se trasladan a ejercicios en contextos diferentes. Este es un aspecto clave dentro de la categoría, ya que permite evidenciar cual es la

naturaleza de las respuestas y que tan alejadas están estas del objetivo inicial de la pregunta.

Cabe resaltar que el porcentaje de respuestas correctas fue alto, como se muestra en la tabla 16. Sin embargo, se presentaron errores significativos que justifican en parte el planteamiento de las preguntas.

La siguiente tabla muestra los errores encontrados y su frecuencia.

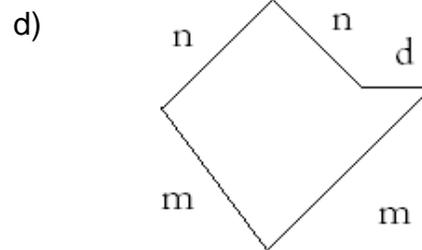
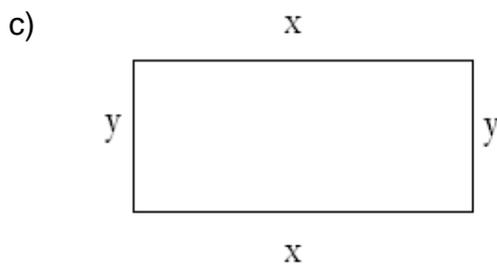
Tabla No 16. Ocurrencia de error (%), Trabajo aritmético.

Cuestionarios clasificados en:		Contexto Geométrico				
		TRABAJO ARITMETICO				
		Olvido del significado de perímetro (%)	Suma incorrecta de la medida de los lados (%)	Incomprensión de la pregunta (%)	Correcta (%)	No aplica (%)
PREGUNTA A	1. a)	10,8	15,2	7,3	63,6	3,1
	1. b)	3	0	11,5	79,3	6,2

#### 4.3.1.2. Trabajo algebraico.

En este ítem, se desarrollan operaciones algebraicas, planteando las siguientes preguntas:

1. Calcula los siguientes perímetros:



Las preguntas planteadas son de tipo algebraico. Se abordan conceptos algebraicos desde el contexto geométrico. Para conocer el perímetro de cada figura, se debe realizar los cálculos con variables,  $x, y$  y  $n, m, d$  respectivamente. Los siguientes son procedimientos comunes que desencadenan en errores:

Pregunta c) el objetivo de la pregunta es hallar el perímetro de un rectángulo, cuyos lados se denotan con las variables  $x, y$ . Para esto se debe sumar los lados del rectángulo. Así, la expresión inicial es " $x + x + y + y$ " (fig. 33)

Fig. 33. Planteamiento inicial del ejercicio 1. c)

Para Hallar el PERIMETRO se suma $4 + x + 4 + x$
--

Este tipo de expresiones generan confusión, si no se tiene claro el significado de los elementos que la componen. Es por esto, que la forma de abordar el ejercicio, es asociar expresiones de este tipo con otras similares, es decir, cuya estructura sea parecida. Por ejemplo,  $12 + 3 + 21 + 4$ . Expresión que está incompleta o puede calcularse su resultado; un procedimiento habitual para resolver este tipo de expresiones es el siguiente:

$$12 + 3 + 21 + 4 = (12 + 3) + (21 + 4) = 15 + 25 = 40$$

Evidentemente la expresión " $x + x + y + y$ " involucra elementos nuevos, sin embargo, al presentar estructura similar a  $12 + 3 + 21 + 4$  se procede de la misma forma:

$$x + x + y + y = (x + x) + (y + y) \quad (i)$$

Hasta este punto, la forma de abordar el ejercicio no ha sido diferente al trabajo acostumbrado en aritmética, razón por la cual, no se considera que esta sea una situación perteneciente a otro contexto, y al igual que en aritmética, el ejercicio no ha terminado. Para el siguiente paso se obtuvo dos formas de proceder:

- $x + x + y + y = (x + x) + (y + y) = 2x + 2y \quad (ii)$
- $x + x + y + y = (x + x) + (y + y) = x^2 + y^2 \quad (iii)$

El primer procedimiento es correcto y puede obedecer al hecho de estar sumando "cosas iguales con cosas iguales", es decir, se asocia a expresiones como "una manzana más otra manzana igual a dos manzanas", ejemplos que comúnmente se usan en el aula de clase. Para el segundo caso, hay una confusión con la operación a realizar, se trata de un error en el trabajo con las propiedades de potenciación, el cual ha quedado parcialmente entendido; en este caso se asocia con situaciones aritméticas diferentes, por ejemplo  $5^2 \cdot 5^2 = 5^4$ , lo que en (iii) será  $(x + x) = x^2$ . Este error es de enorme importancia, puesto que, muestra errores que van más allá de los elementos de álgebra, involucra la malinterpretación de propiedades, de vacíos conceptuales. Este tipo de errores constituyen otra línea de investigación considerada por Booth (1984), "la Comprensión de la Aritmética por parte de los estudiantes". La cual queda planteada para futuras investigaciones.

Retomando lo trabajado hasta el momento, se tiene lo siguiente:

- $x + x + y + y = (x + x) + (y + y) = 2x + 2y \quad (ii)$
- $x + x + y + y = (x + x) + (y + y) = x^2 + y^2 \quad (iii)$

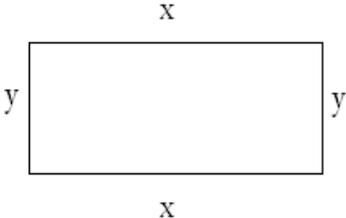
Para el siguiente paso, se requiere un razonamiento especial, que no se presenta al momento de resolver expresiones aritméticas, tiene que ver con el trabajo con variables; en este caso, la adición. La causa de este razonamiento, se debe a que al ver las expresiones (i) y (ii), se consideran incompletas; en este punto se retoma lo que en un inicio se tomó como referencia, la estructura de la suma en aritmética:

$$12 + 3 + 21 + 4 = (12 + 3) + (21 + 4) = 15 + 25 = 40$$

Es decir el ejercicio termina cuando la respuesta sea única y contenga un único término, entonces para este caso se tendrá:

- $x + x + y + y = (x + x) + (y + y) = 2x + 2y = 4xy$  (fig 34) R.c.1
- $x + x + y + y = (x + x) + (y + y) = x^2 + y^2 = (xy)^2$  (fig 34) R.c.2

Fig. 34. Error pregunta 3.a), Respuesta final asociada a la aritmética.

c) 

R.c.1 Perímetro de la figura =  $2x + 2y = 4xy$ .

R.c.2  $P = x + y + x + y = x^2 + y^2 = (xy)^2$

A pesar de que cada respuesta es diferente, la causa que las desencadena es la misma: “La clausura”. En aritmética, los resultados obtenidos en su mayoría son numéricos, el resultado es único y se encuentra dentro de los elementos de la aritmética misma. En expresiones tales como  $2x + 2y$  o  $x^2 + y^2$ , se considera que la respuesta está incompleta, ignorando la naturaleza de elementos que forman parte de las expresiones (variables). En este caso, sumando la parte numérica de las expresiones y uniendo las variables, arrojando como resultado  $(4xy)$  y  $(x^2 + y^2)$ . Estas respuestas ya se consideran completas o cerradas. El ejercicio evidencia el papel que desenvuelve lo que consideramos como clausura y en qué momento entra a formar parte de los procedimientos. La siguiente pregunta es un tanto diferente, aunque la forma de proceder es parecida.

Pregunta d). Continuando con el análisis de las respuestas, se plantea la segunda pregunta del trabajo algebraico. En esta, se debe calcular el perímetro de un polígono irregular, cuyos lados están denotados con las variables  $d, m$  y  $n$ . Para el cálculo del perímetro se suman los lados del polígono obteniendo la siguiente expresión “ $n + n + m + m + d$ ” (fig. 35).

Fig. 35. Planteamiento del ejercicio 1. d)

Para hallar el perímetro se suma  $n + m + m + d + n$

Al igual que en la anterior pregunta, se parte de una situación aritmética cuya estructura sea similar. Por lo tanto se desarrolla el ejercicio 1.d), de esta forma:

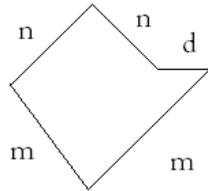
$$n + n + m + m + d = (n + n) + (m + m) + d$$

Se obtiene una expresión parecida a las planteadas en la anterior pregunta, como es de esperarse, el procedimiento que sigue es el mismo al usado anteriormente.

- $n + n + m + m + d = (n + n) + (m + m) + d = 2n + 2m + d = 5mnd$  (fig 36) R d.1.
- $n + n + m + m + d = (n + n) + (m + m) + d = n^2 + m^2 + d = (nmd)^4$  (fig 36) R d.2.

Fig. 37. Error pregunta 1.d. Respuesta final asociada a la aritmética.

d)



R d.1

$$\underline{2m + 2n + d = 5mnd}$$

R d.2

$$\underline{Q = n + n + m + m + d = n^2 + m^2 + d = (nmd)^4}$$

Las dos preguntas planteadas para el trabajo algebraico parten de un objetivo trabajar con elementos algebraicos, sin embargo al desconocer el trabajo con dichos elementos, se tiende un puente el cual une situaciones con estructura similar; en este caso aritmética. De tal manera, que las situaciones nuevas tengan procedimientos similares para su resolución. Esta forma de proceder es adoptada durante casi toda la resolución del ejercicio, sin embargo, en cierto punto las expresiones son totalmente nuevas, es ahí donde la forma de proceder cambia y se asocia a otro aspecto "la clausura". La respuesta final tiene como característica en ambos casos, tener un único término, respuesta que está bien estructurada puesto que no tiene ningún símbolo que sugiera más operaciones. En las siguientes preguntas se combinarán los dos elementos que se han utilizado hasta el momento las variables y los números.

La siguiente tabla muestra el porcentaje de error presentados en esta pregunta.

Tabla No 17. Ocurrencia de error (%), Trabajo algebraico.

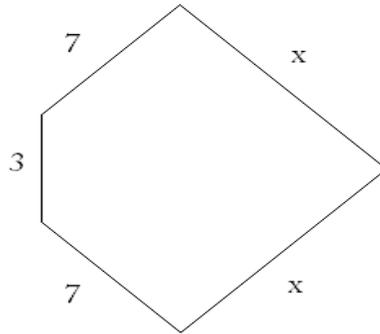
Cuestionarios clasificados en:		Contexto Geométrico					
		TRABAJO ALGEBRAICO					
PREGUNTA		Clausura en Álgebra (%)	Particulariza (%)	Interpretación errónea de la pregunta (%)	Olvido perímetro (%)	Correcta (%)	No aplica (%)
1. c)		60	2,7	3	4,4	26,8	3,1
1. d)		71	1,2	1,5	2,2	17,9	6,2

## 3.1.3. Trabajo aritmético algebraico.

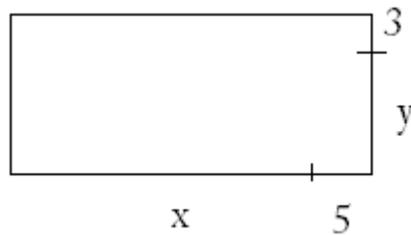
En este trabajo se estructuran las preguntas e), f) y g)

1. Calcula los siguientes perímetros:

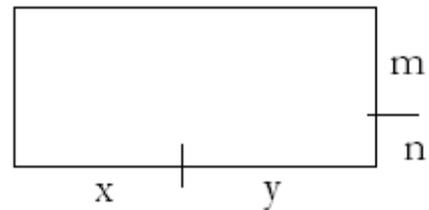
e)



f)



g)



Estas preguntas parten del hecho de encontrar el perímetro de figuras planas. Al igual que en las anteriores preguntas, este aspecto no presenta mayor dificultad.

Es en el trabajo con cada lado donde se presenta problemas, ya que, en el caso de la pregunta e), se combinan números y variables; para el caso de f) y g) deben interpretar que cada lado se compone de dos medidas. A continuación, se presentaran los errores encontrados en cada pregunta.

Pregunta e). Para esta pregunta, los estudiantes deben calcular el perímetro de un polígono irregular de 5 lados, 3 de sus lados se denotan con los números 7, 7 y 3; para expresar la medida de los lados restantes se utiliza la variable  $x$ . Este ejercicio, plantea una situación nueva a los estudiantes, debido a la combinación de elementos aritméticos (números) y algebraicos (variables). El primer paso a desarrollar, es plantear la expresión inicial; tomar los lados que componen el polígono y sumar (fig. 38):

Figura. 38. Planteamiento expresión inicial pregunta 1. e)

$$\text{El perímetro es } x + x + 7 + 7 + 3$$

La resolución de esta expresión implica que los estudiantes operen de forma combinada números y letras. Esta situación es nueva, puesto que, hasta ahora lo aritmético y lo algebraico se trabajó de forma separada. Al igual que en los anteriores casos, los estudiantes resuelven este ejercicio de acuerdo al trabajo en aritmética, de esta forma el siguiente paso será:

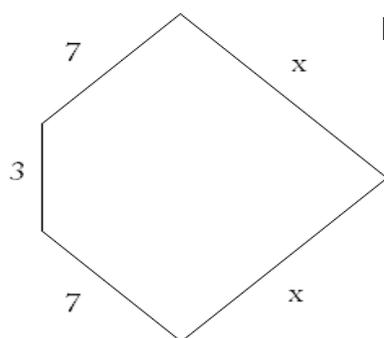
- $7 + 7 + 3 + x + x = (7 + 7 + 3) + (x + x)$

Aquí, asocian de tal manera que queden elementos del mismo tipo, esto lo hacen con el fin de trabajar en un contexto más fácil y por lo tanto de más rápida solución. Para el siguiente paso, en el cual resuelven cada paréntesis, se presentan dos tipos de respuestas válidas para los estudiantes:

- $7 + 7 + 3 + x + x = (7 + 7 + 3) + (x + x) = (17) + 2x$  (fig 39. a)
- $7 + 7 + 3 + x + x = (7 + 7 + 3) + (x + x) = 7^2 + 3 + x^2$  (fig 39. b)

Figura 39.a. Respuestas de estudiantes.

e)



R.e.1.

$$\underline{x + x + 7 + 7 + 3 = 2x + 17}$$

R.e.2.

$$\underline{\text{el perímetro } 7^2 + 3 + x^2}$$

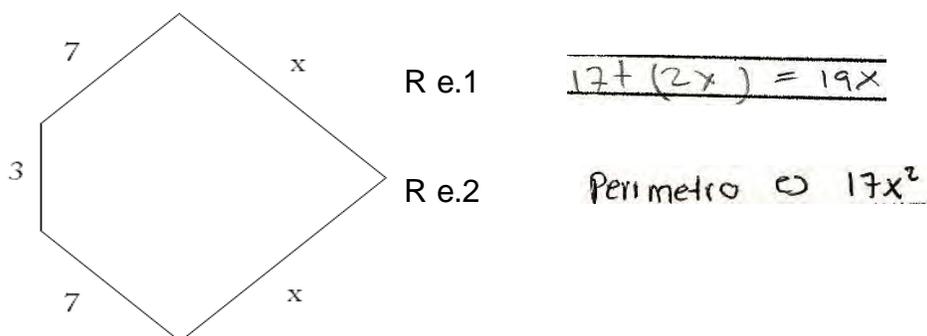
El primer procedimiento es correcto, opera sin mayor dificultad cada paréntesis, en el segundo observamos cómo los estudiantes muchas veces se dejan llevar por el

contexto, es decir, si se planteara únicamente la suma  $(7 + 7 + 3)$ , esta se resolvería sin mayor dificultad; sin embargo, se enfatiza en cómo solucionar  $(x + x)$ , cuyo resultado es para ellos  $x^2$ . En consecuencia no se reflexiona que en el caso de  $(7 + 7)$  deben sumar normalmente y por lo tanto da como resultado  $7^2$ . Este error tiene que ver con el papel de los símbolos en álgebra, referente a la apariencia visible; en el cual, los estudiantes se quedan con expresiones correctas para un contexto y trasladan este procedimiento a otro diferente. Hasta aquí, los estudiantes afrontan el ejercicio de acuerdo con situaciones conocidas; el error ocurre al considerar que estas expresiones están incompletas, por lo que siguen desarrollando el ejercicio obteniendo las siguientes respuestas:

- $7 + 7 + 3 + x + x = (7 + 7 + 3) + (x + x) = (17) + 2x = 19x$  (fig 40. a) R e.1
- $7 + 7 + 3 + x + x = (7 + 7 + 3) + (x + x) = 7^2 + 3 + x^2 = 17x^2$  (fig 40. b) R e.2

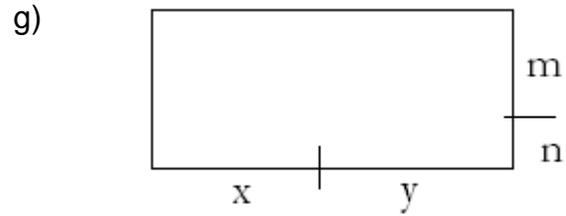
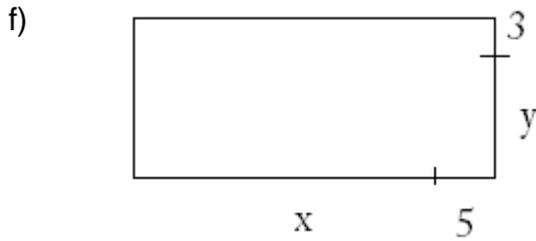
Figura 40. Respuestas estudiantes.

e)



Este tipo de respuestas muestra el papel que juega la aritmética dentro del desarrollo del álgebra. Los estudiantes trasladan ejercicios de tipo algebraico al contexto aritmético, en donde, los procedimientos son conocidos y su uso no conlleva mayores consideraciones. Este tipo de consideraciones, no se toman en cuenta al iniciar el trabajo en el álgebra, razón por la cual su uso no merece reflexión por parte de los estudiantes, los cuales, muchas veces no tiene certeza de los cambios conceptuales que implica el trabajo en álgebra. Los errores encontrados hasta ahora desencadenaron de una situación común la clausura.

- Preguntas f) y g)



Como parte del análisis en el contexto geométrico, se plantearon las dos preguntas finales, las cuales, proyectan el cálculo del perímetro de forma diferente a como se trabajó hasta ahora. En estas preguntas los estudiantes deben realizar la composición que requiere cada lado de los rectángulos, para plantear la expresión inicial y posteriormente realizar los cálculos necesarios. Las dos preguntas se analizan juntas, para mostrar que los procedimientos son similares, sin importar si se utiliza únicamente elementos algebraicos o la combinación de elementos aritmético-álgebra. Para empezar, los estudiantes plantean la expresión inicial de la siguiente manera:

Tabla No 18. Procedimiento inicial ejercicios 1 f) y 1 g)

Pregunta f)	Pregunta g)
$(x + 5) + (x + 5) + (y + 3) + (y + 3)$	$(x + y) + (x + y) + (m + n) + (m + n)$

Cabe resaltar que no todos los estudiantes realizaron estos procedimientos, se presentaron errores referidos al olvido del perímetro, confusión perímetro área, particularización. Estos errores son tratados en otras categorías de análisis o son propios de la geometría.

De vuelta a las preguntas f) y g), los estudiantes realizan de forma correcta el planteamiento del problema. A pesar de que deben realizar una composición de cada lado, esto no causa dificultad, muchos omiten este paso y plantean la expresión de la siguiente manera:

Tabla No 19. Planteamiento inicial opcional de las preguntas.

Pregunta f)	Pregunta g)
$x + 5 + x + 5 + y + 3 + y + 3$ Ó $x + x + y + y + 5 + 5 + 3 + 3$	$x + y + x + y + m + n + m + n$ Ó $x + x + y + y + m + m + n + n$

Estos procedimientos se derivan de los presentados en la tabla 19, algunos estudiantes comienzan desde este punto. Hasta aquí desarrollan el ejercicio de forma correcta y obedece a procedimientos similares en aritmética. El siguiente pasó al igual que en las anteriores preguntas presentan dos maneras de trabajo diferente:

Tabla No 20. Segundo paso del desarrollo de las preguntas.

Pregunta f)
a1) $x + x + y + y + 5 + 5 + 3 + 3 = 2x + 2y + 10 + 6$
b1) $x + x + y + y + 5 + 5 + 3 + 3 = x^2 + y^2 + 5^2 + 3^2$
Pregunta g)a
a2) $x + x + y + y + m + m + n + n = 2x + 2y + 2m + 2n$
b2) $x + x + y + y + m + m + n + n = x^2 + y^2 + m^2 + n^2$

En los casos a1) y a2), el proceso se desarrolla de forma correcta, operan las variables y números, si el ejercicio terminara aquí, estaría correcto. Para el caso b1), se presenta nuevamente la confusión generada por el trabajo con álgebra, esta forma de realizar el cálculo ya se presentó en anteriores preguntas, en la cual, los estudiantes le dan prioridad al trabajo con las variables, de tal manera que al realizar operaciones con números realizan el mismo procedimiento que al trabajar con variables. Situación similar se presenta en b2), en la cual confunden propiedades de la potenciación error que como ya se ha mencionado tiene que ver directamente con la aritmética. Es importante considerar la gran dificultad que presentan los estudiantes al terminar un ejercicio, se encuentran vacíos conceptuales, los cuales llenan de tal manera que obtengan una respuesta, de ahí que consideren que este ejercicio aún no ha terminado y prosigan al siguiente paso:

Tabla No 21. Resultado final de las dos preguntas planteadas.

Pregunta f)
a1) $x + x + y + y + 5 + 5 + 3 + 3 = 2x + 2y + 10 + 6 = 20xy$
b1) $x + x + y + y + 5 + 5 + 3 + 3 = x^2 + y^2 + 5^2 + 3^2 = (16xy)^2$
Pregunta g)
a2) $m + m + n + n + x + x + y + y = 2m + 2n + 2x + 2y = 8mnxy$
b2) $x + x + y + y + m + m + n + n = x^2 + y^2 + m^2 + n^2 = (xymn)^2$

La forma de obtener las respuestas en los cuatro procedimientos es la misma, debido a la imposibilidad de juzgar en álgebra cuando un ejercicio termina, cuando una expresión es válida. Al encontrarse frente a esta limitación, los estudiantes tienden un puente hacia la aritmética, de tal forma que puedan resolver el ejercicio

correctamente. Esto desencadena los errores mostrados hasta el momento, los cuales se presentaron de forma recurrente. Para las preguntas f) y g) la situación no cambio como se muestra a continuación:

Tabla No 22. Ocurrencia de error (%), Trabajo aritmético-algebraico

		Contexto Geométrico					
		TRABAJO ARITMETICO-ALGEBRAICO					
Cuestionarios clasificados en:		Clausura en Álgebra	Particulariza (%)	Interpretación errónea de la pregunta (%)	Olvido perímetro (%)	Correcta (%)	No aplica (%)
PREGUNTA	1. e)	72	1,3	0	2,1	21,5	3,1
	1. f)	75	2,5	4,4	1,4	10,5	6,2
	1. g)	78	1,1	5,1	3	10,6	2,2

El contexto geométrico se abordó de tal manera que los estudiantes realicen de forma indirecta procesos algebraicos, dichos procesos fueron objeto de análisis el cual arrojó un error frecuente, correspondiente a la CLAUSURA. Las respuestas obtenidas en las preguntas con contenido algebraico tienen un desarrollo común, lo que sugiere que los estudiantes se acostumbran a trabajar con métodos únicos, muy pocas veces salen o modifican este modelo, lo cual, hasta cierto punto no es incorrecto. Los problemas aparecen cuando al pasar a un contexto diferente no realizan el cambio adecuado, no consideran que en álgebra las respuestas válidas tienen varias formas de presentarse y todas ellas son válidas. Al momento de diseñar el cuestionario se eligió iniciar con el contexto geométrico, para mostrar que los errores del álgebra no son propios de la misma, estos muchas veces tienen factores externos a los cuales se asocian. En la segunda parte del cuestionario se presentan expresiones algebraicas, de tal manera que ahora los estudiantes trabajen en un contexto netamente algebraico, con el fin de corroborar que el error referido a la clausura se presenta, ya sea al abordarlo de forma directa o indirectamente.

#### 4.3.2. OPERACIONES DIRECTAS CON POLINOMIOS

De igual manera, el cuestionario, aborda operaciones explícitas con polinomios de grado uno, para que los estudiantes decidan cuáles de ellas pueden simplificarse. En el caso que fuera posible su simplificación, describan el proceso que utilizaron para reducir el polinomio.

Hasta ahora se ha trabajado lo relacionado con álgebra de forma indirecta, partiendo del contexto geométrico. En la segunda parte del cuestionario, el trabajo es directo, al simplificar polinomios de grado uno. La simplificación es un ejercicio habitual en álgebra; cuyo objetivo es reducir los términos semejantes, por lo cual los estudiantes están familiarizados con este tipo de ejercicios. Al plantear el trabajo directo en álgebra, se busca verificar que los errores no dependen del contexto, depende de los conceptos que el estudiante posea al enfrentarse al trabajo con elementos del álgebra. De esta forma se plantearon los siguientes ejercicios:

2) Escribir de forma más simplificada (si es posible) las siguientes expresiones:

a)  $3x + 5y$

b)  $3x + 8y + 2x$

c)  $5pt + 2p$

d)  $2a + 7a$

e)  $5q - 3w$

f)  $10x - x$

En cada caso los estudiantes deciden que expresiones pueden ser reducidas, escribiendo al frente de cada una de ellas su forma simplificada. Las expresiones a), b), c) y d), tienen estructuras similares a las que se usaron anteriormente para calcular el perímetro, es por esto, que el procedimiento es el mismo utilizado por los estudiantes. Sin embargo se presentan dos tipos de respuesta. La primera, tiene que ver con la necesidad de cerrar una expresión, de completar la estructura habitual de la suma, tal como se muestra en la figura en la tabla 23.

Tabla No 23. Respuestas Tipo 1. Preguntas 2. a), b), c) y d)

Ejercicio	Respuesta
a) $3x + 5y$	<u>8xy</u>
b) $3x + 8y + 2x$	<u>13xy</u>
c) $5pt + 2p$	<u>7pt</u>
d) $2a + 7a$	<u>9a</u>

Este tipo de respuestas muestran con claridad, el problema que implica para los estudiantes La Clausura. La forma de resolver estas expresiones se basa en intentar completar cada expresión, no se considera que elementos componen cada expresión, por el contrario, interesa que en la expresión se utiliza el símbolo

+, el cual invita a una suma. De esta manera los estudiantes realizan la operación arrojando las respuestas mostradas.

El segundo tipo de respuestas, adicional al problema con la Clausura, se involucra a un problema de tipo aritmético, particularmente con la potenciación. Esta combinación ya se había presentado en los ejercicios anteriores. A continuación se presentan los errores asociados a esta situación:

Tabla No 24. Respuestas Tipo 1. Preguntas 2. b), c) y d)

Ejercicio	Respuesta
e) $3x+8y+2x$	<u><math>13x^2y</math></u>
f) $5pt+2p$	<u><math>7p^2t</math></u>
g) $2a+7a$	<u><math>9a^2</math></u>

El error que involucra la potenciación es claro, los estudiantes interpretan que  $A + A = A^2$ , seguido de error en el cierre de la expresión. En los dos tipos de respuesta, se involucran elementos de aritmética y álgebra, siendo esta combinación la más usada en álgebra, de este modo se corrobora lo mostrado hasta el momento en las preguntas anteriores.

Las preguntas e) y f), merecen atención especial debido a que involucran la resta como operación principal, hecho que hasta el momento no se había considerado. De esta manera se pretende mostrar que el signo de operación en la expresión, no determina el tipo de proceso usado por los estudiantes, este se determina por el tipo de estructura al cual se asemeja la expresión. Las siguientes son las respuestas arrojadas por los estudiantes para estos dos ejercicios:

Tabla No 25. Respuestas finales. Preguntas 2. e) y f)

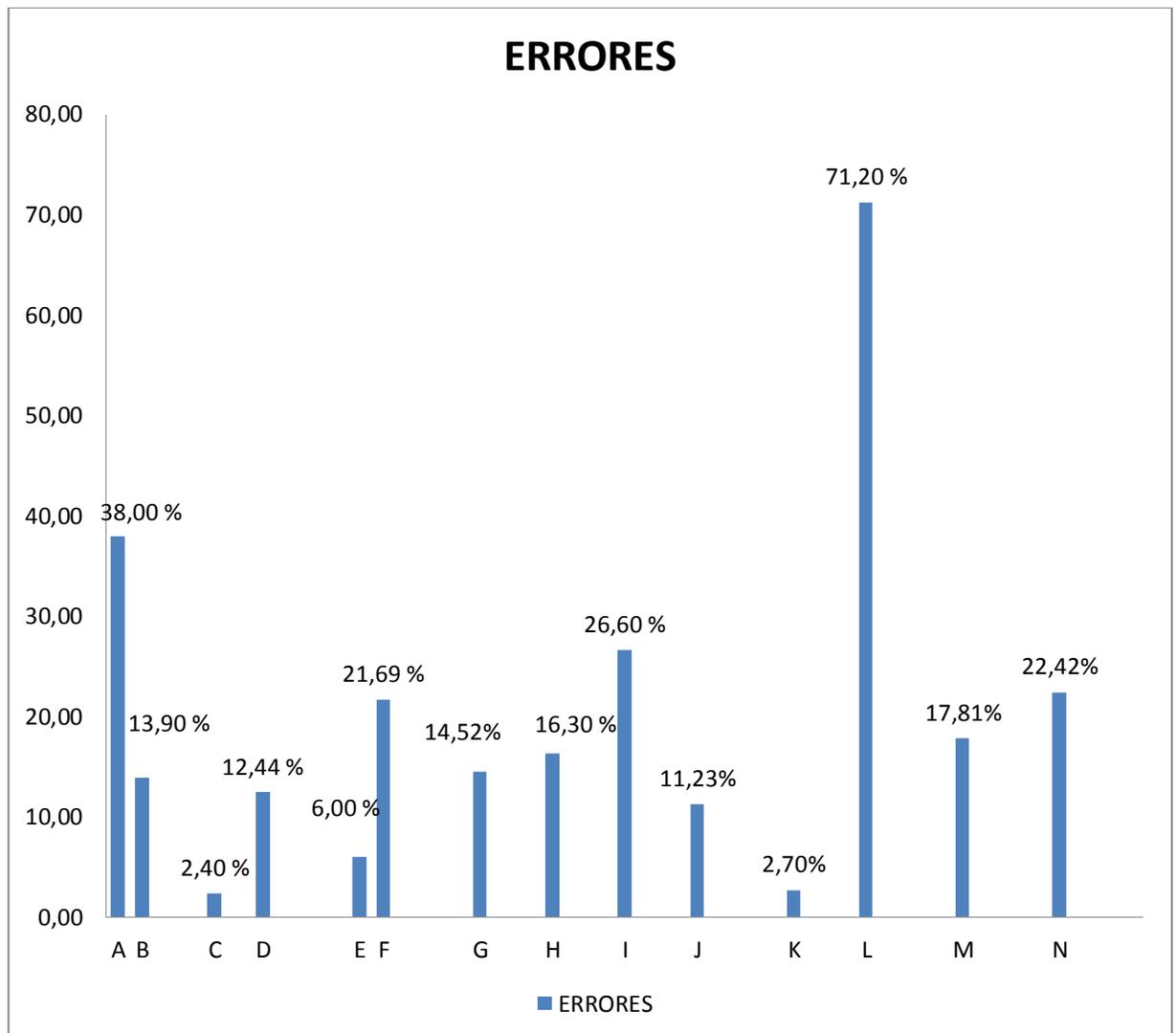
Ejercicio	Respuesta
b) $5q-3w$	<u><math>2q.w</math></u>
c) $10x-x$	<u><math>9x^2</math></u>

En el ejercicio e), el problema se relaciona únicamente con la clausura. Los estudiantes resuelven la expresión, basándose en la operación indicada sin

considerar la naturaleza de las variables del ejercicio. Los dos procesos que se presentaron en la pregunta f), al igual que en la anterior tiene que ver con la clausura, en el primer caso se adicionan el error en la potenciación que ya se ha mostrado. En el segundo además, tiene que ver con la apariencia visible, error trabajado en la categoría Naturaleza y Significado de los Símbolos. De esta manera, se concluye los errores referentes a la Clausura, se presentan independientemente de la operación usada, por lo cual se determina por el tipo de estructura a la cual se asemeja la expresión.

A continuación se presenta el Gráfica No 2 en el cual se presentan los porcentajes de los errores.

Gráfica No 2. Errores



Fuente: Esta Investigación

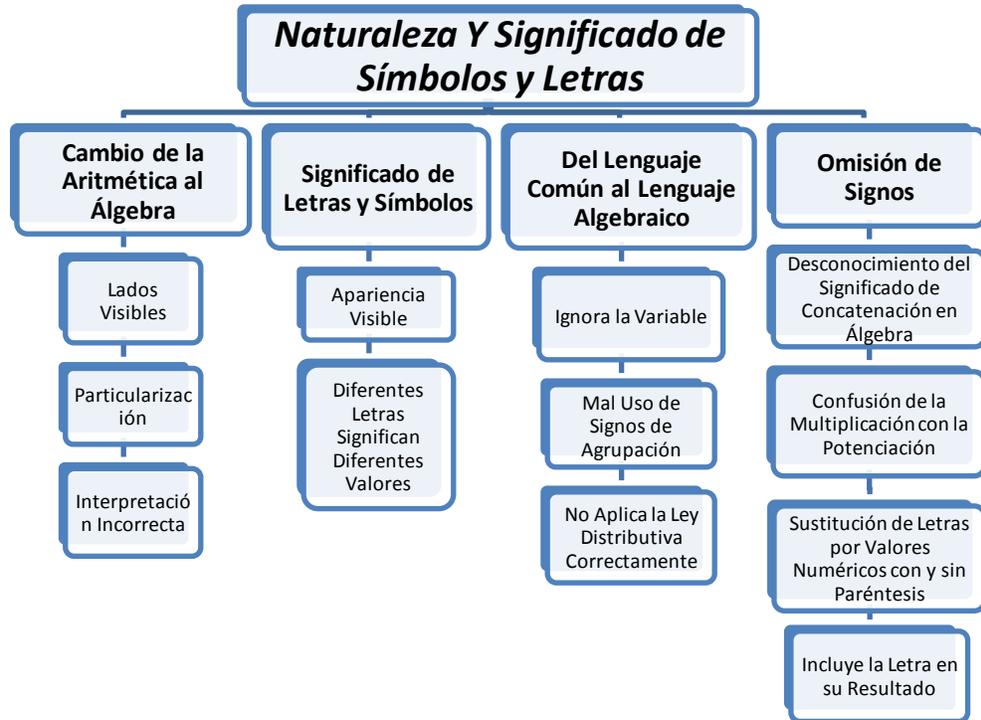
- A Apariencia Visible
- B Particularización
- C A Punto
- D Interpretación Incorrecta
- E Diferentes Letras Significan Diferentes Valores
- F Desconocimiento Del Significado De Concatenación En Álgebra
- G Ignora La Variable
- H Mal Uso De Signos De Agrupación
- I No Aplica La Ley Distributiva
- J Sustitución De Letras Por Valores Numéricos Con Y Sin Paréntesis
- K Confusión De La Multiplicación Con La Potenciación
- L Clausura
- M Correctas
- N Incorrectas

Como se evidencia en la anterior gráfica, los errores que arrojan los cuestionarios son recurrentes, de ahí que merecen atención, especialmente errores cuyo porcentaje supera el 12 %; puesto que estos son los más significativos. Estas cifras proporcionan una visión para futuras investigaciones sobre qué tipo de errores necesitan más acciones didácticas, de esta manera el punto de partida estaría más claro para los investigadores.

## CONCLUSIONES

Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.

Esquema 4. Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras



En el esquema se muestran los errores más comunes asociados a la naturaleza y significado de símbolos y letras. A continuación se trata cada uno de ellos:

- ❖ **Apariencia Visible:** caracterizada por proceder a primera vista y dar una respuesta de forma espontánea y desacertada; igualmente incide cuando se aplican expresiones verdaderas para determinado proceso y creer que se lo puede aplicar en otro contexto. Este error fue encontrado en la primera, segunda y cuarta subcategoría descritas para analizar los errores en la Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras: Cambio de la Aritmética al Álgebra; Significado de Símbolos y Letras; Omisión de Signos. Fue notable en las respuestas, como influye la apariencia visible para desarrollar un ejercicio sin hacer el mínimo esfuerzo de mirar más allá de lo implícito, este error puede ser producido por una falta de visualización,

razonamiento y desconocimiento de los significados que tienen los símbolos matemáticos involucrados en el problema, como por ejemplo, las letras o variables y el signo igual.

- ❖ Particularización: se refiere a realizar un ejercicio numéricamente dando valores a la variable o letra, este error fue encontrado en las dos primeras subcategorías: Cambio de la Aritmética al Álgebra y Significado de Símbolos y Letras; a pesar de que se tienen en cuenta la variable no es de forma apropiada, pues se da un valor específico para resolver el problema por tanto, se deduce que existe una fijación numérica, además se carece de conceptualización y falta de interpretación del significado que tiene la letra en un ejercicio algebraico.
- ❖ Interpretación Incorrecta: consiste, en no realizar una lectura adecuada y dejar en evidencia la escasez de análisis de los datos suministrados en los ejercicios propuestos, por tanto, induce a realizar falsas expresiones matemáticas que no dan solución al mismo. En las respuestas se encontró una alteración inventando procesos y situaciones que no son pertinentes; igualdades con los datos del enunciado de tal forma que no dan solución al mismo, hasta se suele creer que los datos son incompletos: este tipo de respuestas son ocasionadas, por una lectura inadecuada, donde se interpreta y analiza de forma equivoca los datos suministrados en el ejercicio.  
Este error se puede catalogar en esta investigación como uno de los más frecuentes ya que, fue detectado en todas las subcategorías de la Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.
- ❖ Diferentes Letras Significa Diferentes Valores: este error es derivado de la apariencia visible, se trata de modificar una expresión, ubicando o cambiando términos para que una igualdad sea verdadera a simple vista. Este tipo de respuestas es producido, por no aceptar, que dos letras diferentes puedan tomar un mismo valor en un determinado momento, por esto son inducidos a modificar el ejercicio, pues no hay claridad en el significado y las diferencias que hay con los símbolos matemáticos en sus diferentes ramas, lo cual es necesario para el desarrollo y aprendizaje del álgebra, concretamente en este error; la variable y el signo igual.
- ❖ Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra: hace referencia a creer que la unión de términos en álgebra representa la suma. Este error fue producido en casi toda la investigación, se puede catalogar como otro de los errores más comunes en el aprendizaje del álgebra, ya que fue encontrado en las tres últimas categorías: Significado de Símbolos y Letras; Lenguaje Común al Lenguaje Algebraico; Omisión de Signos. Es originado por la designación del producto de términos, omitiendo el signo por ( $\times$ ) en el inicio del aprendizaje del álgebra, el cual genera el conflicto al

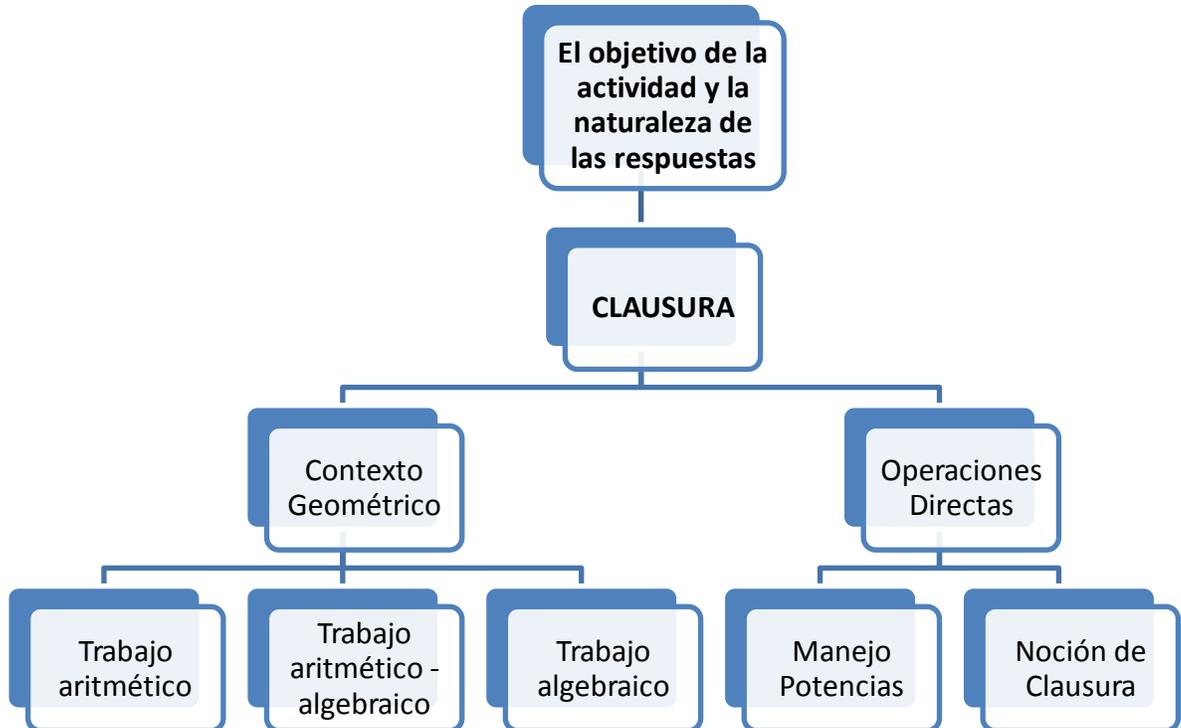
realizar operaciones; por ello, se impulsa a creer que existe una suma en las expresiones de este tipo; también puede ser ocasionado, porque algunas veces, se hace referencia a la multiplicación como una suma reiterada o que el producto de los números aumenta el valor, lo cual es verídico para determinados casos, pero estas palabras utilizadas para representar la suma pueden ser el origen del error; sería fundamental aclarar estos dos procesos.

- ❖ **Sustitución de Letras por Valores Numéricos:** este tipo de error se refiere a una simple transposición de datos ya sea de letras a números o viceversa, en algunos casos son utilizados los paréntesis. Este tipo de respuestas, limita al ejercicio a una sustitución; es producido por la omisión de signos ya que se presenta la confusión al no entender, ni saber lo requerido en el ejercicio, por tanto se prefiere dejarla indicada.
- ❖ **Confusión de la Multiplicación con la Potenciación:** Categorizado por creer que la multiplicación está relacionada con el algoritmo de la potenciación; este error es ocasionado por la Omisión de Signos, para el caso el signo por ( $\times$ ), este inconveniente hace un llamado a la apariencia visible, donde se inicia por una referencia visual, de la multiplicación con la potenciación, es decir, aparentemente  $2a$  es confundido por  $2^a$ , además de que existe una coincidencia en los resultados cuando,  $a$ , toma el valor de 2, ( $a = 2$ ), esto hace creer que el proceso que se realiza para la potenciación es equivalente al de la multiplicación
- ❖ **Ignora la Variable; e Incluye la Letra en su Resultado:** Estos tipos de errores donde la letra es el protagonista fue presentado en las subcategorías: Lenguaje Común al Lenguaje Algebraico y Omisión de Signos, respectivamente. Hace referencia a mirar la letra como un valor específico o como un objeto; para el primero caso, se ejecuta una operación, como la suma, en una expresión donde los términos no son semejantes ya que uno de ellos está acompañado de una variable, por lo cual no es permitido realizarla; en el segundo caso, letra como objeto, hace referencia en que se incluyen la letra o variable en los resultados como si fueran una nomenclatura. Estos tipos de errores, donde involucran la variable o letra, son producidos, por qué no se tiene conceptualizado e interiorizado los diferentes significados que tiene la letra en matemáticas y las diferencias existentes en ellas por ende no ven la disimilitud de una expresión aritmética, de una algebraica.  
De alguna manera este error fue presentado en toda la investigación, ya que, se encuentra inmerso en algunos errores de las subcategorías descritas para la Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras, dejando en las respuestas la evidencia, del error que consiste en la forma de ver la letra o variable.

- ❖ **Mal Uso de Signos de Agrupación:** Hace referencia a no considerar necesario utilizar paréntesis en expresiones matemáticas y si son utilizados es de forma equivocada, produciendo respuestas incorrectas. Es muy usual que al desarrollar un ejercicio sea suficiente con el orden en que está escrita, de izquierda a derecha, este error es proveniente de la aritmética ya que no fue enseñado de tal manera, que se adquiriera la iniciativa de determinar la necesidad y buena aplicación de paréntesis.
- ❖ **No Aplican la Ley Distributiva Correctamente:** este error caracterizado por su mala ejecución, operando un sólo termino por lo general el numérico, dejando en evidencia una fijación numérica por parte de los estudiantes e ignorando la letra como si no hiciera parte del ejercicio. Este error es proveniente de la aritmética ya que casi siempre este tipo de propiedades se estudian en conjunto y no se enfatiza en cada una de ellas, además que son mencionadas de forma apresurada y no detenidamente como debería de ser, unido a que no se resalta que en esta propiedad existen dos operaciones para que se cumpla la ley distributiva.

El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra.

Esquema 5. El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Álgebra.



Para esta categoría se encontraron los siguientes errores:

- ❖ Suma Incorrecta de la medida de los lados, la característica principal de este error tiene que ver con la parte operatoria en los ejercicios, en los cuales, se presentan errores al momento de realizar las operaciones como la suma o resta. Este tipo de error se encuentra en el trabajo aritmético, el cual se trabajó en el contexto geométrico.
- ❖ Olvido Significado del perímetro. Este error tiene que ver con la parte geométrica del cuestionario, obedece a la confusión entre área y perímetro de algunas figuras planas. Esta confusión se ha quedado sin resolver en cursos anteriores, por lo cual, al momento de plantear ejercicio de este tipo se presenta esta situación.

- ❖ Incomprensión de la pregunta. Las preguntas planteadas en los cuestionarios tienen una estructura simple, sin embargo; algunas veces se interpreta la pregunta de forma errónea alejándose del tipo de operaciones que son necesarias para resolver las preguntas. Esta situación se desencadena debido a la falta de comprensión de lectura, la cual es importante en todas las áreas de estudio.
- ❖ Manejo de potencias. Esta situación fue recurrente en el contexto geométrico y en las operaciones directas con polinomios. Tiene que ver con la confusión existente al momento de sumar números con igual base y potencias diferentes, ya que esta operación se trabaja de forma similar que en la multiplicación de números con igual base, siendo este un error de tipo aritmético.
- ❖ Noción de clausura. Este error es el más importante y se constituye en el eje principal de la categoría. Se presenta al momento de trabajar con elementos de algebra. Su característica principal es la de completar expresiones que al ser vistas desde un contexto aritmético están incompletas. Dichas expresiones tienen una estructura similar a expresiones aritméticas, por lo cual resulta comprensible la asociación que se hace para tratar de completar situaciones algebraicas. De esta manera, se busca cerrar el ejercicio dejando un único término en el cual se combinen todos los elementos que intervinieron, ya sean de tipo aritmético (números) o algebraico (letras).

## RECOMENDACIONES

- Con los errores descritos se ha detectado la confusión entre los símbolos y letras, que se trabajan en aritmética y que tienen diferentes formas de actuar en álgebra, está claro que por esta situación la transición de aritmética al álgebra genera conflicto, es vital que en este proceso se aclaren persistentemente estos términos como los símbolos y letras, hasta que se encuentren totalmente familiarizados con ellos y puedan detectar sus diferencias, ya que, tienen un significado ambiguo en estas dos ramas de la matemática.
- Es pertinente afianzar en los estudiantes el pensamiento algebraico, para evitar que trate de desarrollar los ejercicios de manera particular, es decir, deshacer en ellos, la fijación numérica que fue creada en todo su transcurso escolar.
- Enfatizar en la importancia y necesidad del manejo de signos de agrupación, hacer que sepan en qué momento, es apropiada su utilización, que puedan construir términos incluyéndolos; operar con ellos y deshacerlos, utilizando propiedades como por ejemplo la ley distributiva, o lo que requiera el ejercicio; haciendo énfasis en cómo se desarrollan cada una de las propiedades, para evitar errores en su aplicación.
- Evitar la omisión de signos de forma apresurada en la multiplicación para evitar confusión con otras operaciones como la suma y la potenciación, es necesario, antes hacer aclaraciones con respecto a las diferencias que existen con este procedimiento en la transición de la aritmética al álgebra.
- Tratar, que los estudiantes no se dejen llevar por su instinto, que no den respuestas impulsados por la aparición visible y traten de analizar con profundidad el ejercicio haciendo observaciones de lo implícito y no sólo de lo explícito.
- Se sugiere que, la lectura comprensiva sea un proceso de aprendizaje que debe ser afianzado desde grados inferiores, para evitar dificultad en analizar un problema matemático ya sea aritmético o algebraico y así se comprenda lo requerido en ellos, en consecuencia, poder abstraer los datos que dan los ejercicios y resolverlos.
- Al iniciar el trabajo en álgebra, se deben aclarar los aspectos claves en los que la aritmética se diferencia del álgebra. Tal es el caso de la CLAUSURA, esta propiedad como ya se demostró es generalmente mal interpretada o generalizada para el contexto algebraico. Esta generalización es

precisamente la generatriz de muchos errores en álgebra, errores que se pueden corregir si se identifican a tiempo. Aspecto que ya se realiza en esta investigación, el paso siguiente es aclarar que en aritmética la clausura funciona debido a los elementos que se utilizan (números), en álgebra a estos elementos se adicionan otros como son las variables. Esta diferencia es la clave para comprender que en el álgebra se debe hacer consideraciones nuevas, consideraciones que años atrás no fueron necesarias. Por lo tanto, el docente al iniciar el trabajo con algebra, debe hacer esta aclaración mediante ejemplos en los que se muestre el trabajo en aritmética y como este trabajo trasladado a un contexto algebraico cambia, mostrando que no sólo cambian los elementos; es decir lo que se ve, sino además los procedimientos implícitos, los cuales muchas veces se dan por entendidos.

## BIBLIOGRAFÍA

- Azarquiél, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra*. Vallehermoso, Madrid: Síntesis. S.A.
- Booth, L. (1984). *Algebra: Children's Strategies and Errors*. NFER-NELSON.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano, Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Cali: Merilín ID.
- Kieran, C. y. (1989). El Aprendizaje del Álgebra Escolar Desde una Perspectiva Psicológica. *Enseñanza de las Ciencias*, 229-240.
- Martín Manuel Socas Robayana, M. C. (1996). *Iniciación al Álgebra*. Vallehermoso, Madrid: Síntesis. S.A.
- Miranda, V. C. (2007). Análisis de Errores de Estudiantes y Profesores en Expresiones Combinadas con Naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.*, 19-57.
- Otros, S. V. (1997). *Procesos de Construcción Teórica, Métodos y Técnicas en la Investigación Social*. Manizales : Cinde .
- Palarea, M. d. (1998). *La Adquisición del Lenguaje Algebraico y la Detección de Errores Comunes Cometidos en Álgebra por Alumnos de 12 a 14 Años*.
- Raimund Olfos, E. V. (2001). *Actividades Ludicas y Juegos en la Iniciación del Álgebra*. La Serena, Chile: Integra.
- Rico, L. (1995). *Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas*.
- Silvia Caronía, A. M., & Operuk, R. (2003-2004). *UN ANÁLISIS DESDE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA*. Argentina : Universidad Nacional de Misiones.
- Silvia Monica del Puerto, C. L. (s.f.). Análisis de los Errores: Una Valiosa Fuente de Información Acerca del Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Socas, M. (1997). *Dificultades y Obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- Socas., M. M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis Desde el Enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en educación matemática XI*, 19-52.
- V., R. O. (s.f.). Actividades Ludicas y Juegos en la Iniciación al Álgebra . *Integra* , 1-13.

## ANEXOS

Anexo A: Cuestionarios de Preguntas.

Cuestionario 1. Naturaleza y Significado de los Símbolos y Letras.

ERRORES MAS COMUNES EN EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA

INSTITUCION: \_\_\_\_\_

CUESTIONARIO # 1

DURACION: 2 horas

Género: masculino\_\_

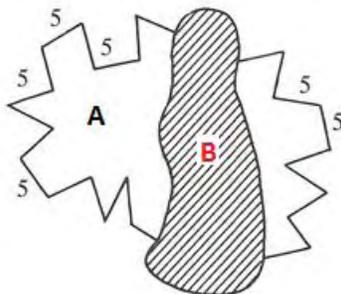
femenino\_\_

Edad: \_\_\_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

NATURALEZA Y SIGNIFICADO DE LOS SÍMBOLOS Y LETRAS

CAMBIO DE LA ARITMÉTICA AL ÁLGEBRA

1. a) La figura B tapa algunos lados de la figura A, calcule el perímetro de la figura A si tiene  $p$  número de lados y cada uno mide 5 unidades



- b) El profesor de educación física tiene  $m$  número de balones de vóleybol para jugar en grupos. Si hace 5 grupos, ¿cuál es la expresión para el número de balones en cada grupo?

## SIGNIFICADO DE LETRAS

2. a) Si el Real Madrid anoto  $W$  goles y el Barcelona anoto  $Z$  goles, ¿qué puedes escribir del número total de goles anotados en el partido?

---

- b) La siguiente expresión

$$W + V = W + Z$$

- Nunca es cierta \_\_\_
- Es cierta ¿cuándo? \_\_\_\_\_

## DEL LENGUAJE COMUN AL LENGUAJE ALGEBRAICO

3. a) ¿Cómo escribes 3 aumentado  $5W$ ?

---

- b) ¿Cómo escribes  $m + 5$  multiplicado por 3?

---

- c) Aumentar 3 a  $5m$  \_\_\_\_\_

- d) Multiplicar  $K + 2$  por 3 \_\_\_\_\_

## OMISIÓN DE SIGNOS

4. a) Si  $a = 3$ , cuanto es  $4a$ ?

---

- b) Si  $b = 5$ , cuanto es  $b^7$ ?

---

- c) ¿Cuánto es  $ab$  si  $a = 3$  y  $b = 5$ ?

---

- d)  $5\frac{2}{7}$  Es un número mixto, donde  $a = 2$   $b = 7$   $c = 5$  como quedara expresado algebraicamente este número mixto.

---

Cuestionario 2. El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Algebra

ERRORES MAS COMUNES EN EL APRENDIZAJE DEL ALGEBRA

INSTITUCION \_\_\_\_\_

CUESTIONARIO # 2

DURACION: 2 horas

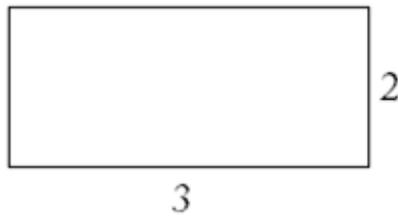
Género: masculino\_\_ femenino\_\_ Edad: \_\_ Fecha: \_\_\_\_\_

EL OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD Y LA NATURALEZA DE LAS RESPUESTAS  
EN ALGEBRA

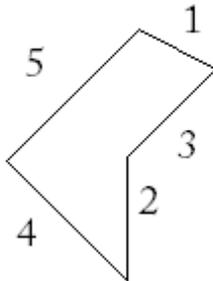
EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA

- Calcula los siguientes perímetros:

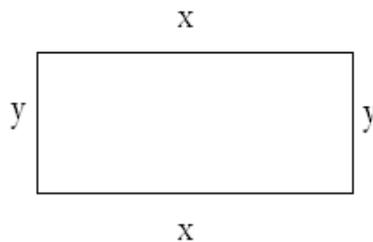
a)



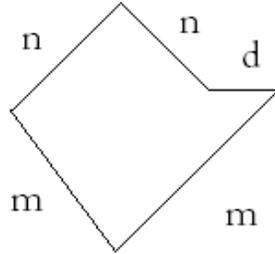
b)



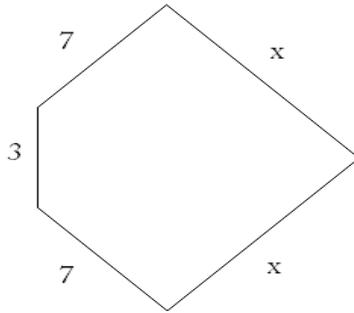
c)



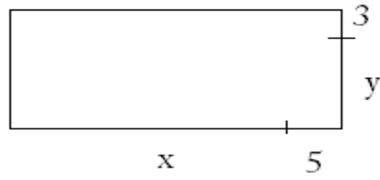
d)



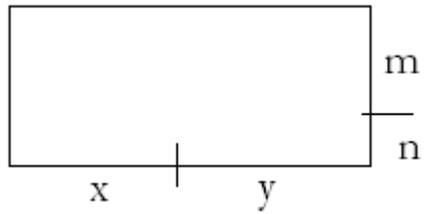
e)



f)



g)



## EN EL CONTEXTO DE OPERACIONES CON POLINOMIOS

2. Escribir de forma más simplificada (si es posible) las siguientes expresiones:

a)  $3X + 5Y$  \_\_\_\_\_

b)  $3X + 8Y + 2X$  \_\_\_\_\_

c)  $5q - 3w$  \_\_\_\_\_

d)  $5pt + 2p$  \_\_\_\_\_

e)  $2a + 7a$  \_\_\_\_\_

f)  $10X - X$  \_\_\_\_\_

g)  $2a + 7$  \_\_\_\_\_

h)  $5a + 3b - 2a + 8b$  \_\_\_\_\_

## Anexo B. Constancia no participación I.E.M. Antonio Nariño

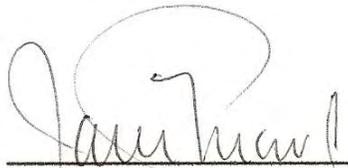
1 de septiembre de 2011

## Constancia de no participación en el Proyecto

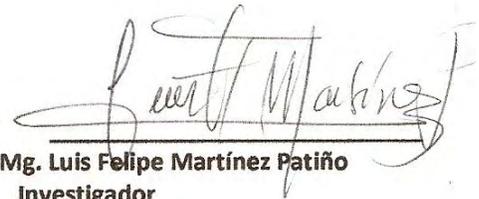
**“ERRORES MÁS COMUNES COMETIDOS POR LOS ESTUDIANTES DE OCTAVO AL INICIAR EL  
APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA”**

El rector de I.E.M. Antonio Nariño, Magister Javier Moncayo, teniendo en cuenta que se están desarrollando varios proyectos en la institución, ve conveniente no participar en esta oportunidad del proyecto antes mencionado por razones de tiempo.

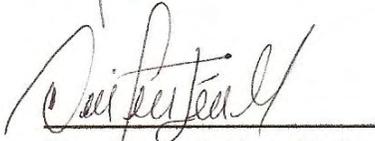
En constancia se firma:



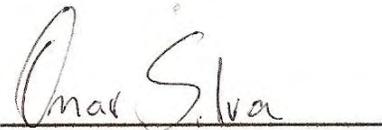
Mg. Javier Moncayo  
Rector I.E.M Antonio Nariño



Mg. Luis Felipe Martínez Patiño  
Investigador



Diana Fernanda López Muñoz  
Investigadora



Omar Henry Silva Castro  
Investigador

## Anexo C. Condiciones actuales del desarrollo de la programación de álgebra.

	TS V	CAERTEPA	FRANCISCO DE LA VIGOTA
DESCRIPCIÓN	Conjuntos Numéricos: números naturales, números racionales y propiedades, números irracionales y propiedades, relación entre los tres conjuntos. Expresiones algebraicas: lenguaje algebraico, definición e identificación de partes de expresiones algebraicas, propiedades y tipos de monomios, polinomios, características y propiedades. Operación con polinomios: suma, resta, multiplicación de polinomios, todos los contenidos se trabajaron de acuerdo a la programación establecida.	Conjuntos Numéricos: este contenido se describe brevemente algunos conjuntos, no se profundiza como se tenía estipulado en la programación. Expresiones Algebraicas: monomios, tipo de monomios, suma y resta de monomios, polinomios, suma y resta de polinomios, multiplicación y productos notables, estos contenidos se trabajaron de acuerdo a la programación.	Números Reales: operaciones y propiedades; números naturales, números enteros y racionales, generatriz de un Decimal, Números irracionales. Expresiones Algebraicas: Polinomios, orden en los polinomios, tipo de polinomios, valor numérico, operaciones con polinomios.
PROCESOS	Da definiciones formales de conceptos de álgebra y se explican mediante ejemplos, mediante tablas se trabaja y explica el lenguaje algebraico, mediante tablas se realiza la descripción de las partes constitutivas de expresiones algebraicas (aunque no se encontró registrada la definición de variable, mediante tablas y ejercicios se da un acercamiento al estudiante).	Da una definición formal de conceptos del álgebra y luego lo explica con ejemplos, realiza descripción de las partes constitutivas de las expresiones algebraicas pertinentes. (en ningún momento define el significado de variable, solo la denomina como letra, no está registrado).	Da una definición formal de conceptos del álgebra y luego lo explica con ejemplos, realiza descripción de las partes constitutivas de las expresiones algebraicas pertinentes. (no define el concepto de variable lo denomina como letra, pero se observa que en algunos conceptos matemáticos realiza definiciones utilizando la palabra variable).
CONTEXTO	Realiza actividades de tipo geométrico y ejercicios de práctica para conceptos del álgebra, mediante el uso de tablas se ejercita la interpretación de expresiones algebraicas.	Realiza actividades de tipo geométrico para poner en práctica conceptos algebraicos, ejemplo hallar el área, perímetro de figuras planas, mediante tablas identifica las partes de expresiones algebraicas, desarrolla ejercicios mecánicos con polinomios.	Realiza actividades de tipo geométrico para poner en práctica conceptos algebraicos, ejemplo hallar el área, perímetro de figuras planas; realiza ejercicios mecánicos con los polinomios.



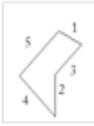
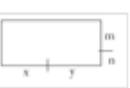
## Anexo E. Pruebas piloto, promedio tiempo.

Tiempo aplicación cuestionarios- piloto		
Tiempo en desarrollar cada cuestionario (minutos)	Cuestionario 1: hora de inicio: 7:00 a.m., finaliza 8:10 a. m. (No estudiantes)	Cuestionario 2: hora de inicio: 8:20 a.m., finaliza 9:25 a. m. (No Estudiantes)
20	0	2
25	0	4
26	0	1
29	0	1
30	0	2
31	0	2
35	0	1
36	0	2
40	1	1
42	1	0
50	3	3
52	0	0
55	0	3
56	0	0
58	0	0
60	2	2
62	0	0
63	2	0
65	0	2
68	2	0
69	2	0
70	4	0
73	6	0
TOTAL	23	26
Promedio Tiempo	63,91	39,58

## Anexo F. Ocurrencia de error en pruebas piloto. Cuestionario 1.

	PREGUNTA	ESTADO			
		CORRECTO		INCORRECTA	
		NUMERO	PROCENTAJE	NUMERO	PROCENTAJE
Cambio de la aritmética al algebra	1.a) La figura B tapa algunos lados de la figura A, calcule el perímetro de la figura A si tiene p-lados y cada uno mide 5 unidades. 	1	4,55	21	95,45
	1.b) El profesor de educación física tiene P balones de voleibol para jugar en grupos. Si hace 5 grupos. ¿ cual es la expresión para el numero de balones en cada grupo?	1	4,55	21	95,45
Significado de las letras	2.a) X goles tiene el equipo Real Madrid, Y tiene el equipo Barcelona, ¿qué puedes escribir del número total de goles anotados?	3	13,64	19	86,36
	2.b) ¿Cuando es cierta esta expresión? $X+Y+Z = X+P+Z$ .SIEMRPE .NUNCA .A VECES, ¿CUANDO?	0	0,00	22	100,00
Del lenguaje común al lenguaje algebraico	3.a) ¿Cómo escribes <b>3 añadido 5Y</b> ?	3	13,64	19	86,36
	3.b) ¿Cómo escribes m+5 multiplicado por 3?	3	13,64	19	86,36
	3.C) Añadir 3 a 5m	0	0,00	22	100,00
	3.d) Multiplicar K+2 por 3	2	9,09	20	90,91
Omisión de signos	4.a) Si a=3, cuanto es 4a?	0	0,00	22	100,00
	4.b) Si b=5, cuanto es b7?	0	0,00	22	100,00
	4.c) ¿Cuánto es ab si a=3 y b=5?	0	0,00	22	100,00
	4.d) $5\frac{3}{2}$ Es un numero mixto, si a=2 b=3 c=5 como quedara expresado algebraicamente este número mixto.	0	0,00	22	100,00

## Anexo G. Ocurrencia de error en pruebas piloto. Cuestionario 2.

	PREGUNTA	ESTADO			
		CORRECTO		INCORRECTA	
		NUMERO	PROCENTAJE	NUMERO	PROCENTAJE
EN EL CONTEXTO DE LA GEOMETRÍA	1) ¿Quié puedes escribir sobre los siguientes perímetros?:				
	a) 	5	19,23	21	80,77
	b) 	16	61,54	10	38,46
	c) 	6	23,08	20	76,92
	d) 	3	11,54	23	88,46
	e) 	2	7,69	24	92,31
	f) 	0	0,00	26	100,00
	g) 	0	0,00	26	100,00
	EN EL CONTEXTO DE OPERACIONES CON POLINOMIOS	2) Escribir de forma más simplificada las siguientes expresiones:			
$3X + 5Y$		0	0,00	26	100,00
$3X+8Y+2X$		0	0,00	26	100,00
$5q - 3w$		0	0,00	26	100,00
$5pt+2p$		1	3,85	25	96,15
$2a+7^a$		0	0,00	26	100,00
$10X - X$		3	11,54	23	88,46
$2a+7$		0	0,00	26	100,00
$5a+3b-2a+8b$		0	0,00	26	100,00



## Anexo I. Consolidado de los tipos de errores por categoría de las tres instituciones

1. CATEGORIA 1: La naturaleza y significado de los símbolos;								
I.E.M	CUR SO	ERROR	GENER				TOTAL X	
			MAS		FEMEN		CURSO	
			No	%	No	%	No	%
TECNICO INDUSTRIAL	8-1 JM	A.						
		B						
		C						
		D						
	8-2 JM	A						
		B						
		C						
		D						
	8-3 JM	A						
		B						
		C						
		D						
	8-4 JM	A						
		B						
		C						
	8-5 JT	A						
		B						
		C						
		D						
	8-6 JT	A						
		B						
		C						
		D						
		E						
	8-7 JT	A						
		B						
		C						
	8-8 JT	A						
		B						
		C						
	CABRERA	8-1	A					
			B					
C								
D								

## Anexo J. Tipos de errores por categoría según institución y género

CATEGORIA 1: La naturaleza y significado de los símbolos;							
I.E.M	GENERO					TOTAL X CURSO	
	ERROR	MAS		FEMEN		No	%
		No	%	No	%	No	%
TECNICO INDUSTRIAL	A						
	B						
	C						
	D						
	E						
	F						
	G						
	H						
CABRERA	A						
	B						
	C						
	D						
F. de la VILLOTA	A						
	B						
	C						
	D						
CATEGORIA 2: El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra							
I.E.M	GENER					TOTAL X CURSO	
	ERROR	MAS		FEMEN		No	%
		No	%	No	%	No	%
TECNICO INDUSTRIAL	A						
	B						
	C						
	D						
	E						
CABRERA	B						
	C						
	D						
F. de la VILLOTA	A						
	B						
	C						
	D						



Anexo L. Constancia del grupo de investigación GESCAS del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño.



Universidad de Nariño  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
Y ESTADÍSTICA

EL SUSCRITO COORDINADOR DEL GRUPO DE INVESTIGACIÓN "GESCAS" DEL  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO,

HACE CONSTAR:

Que los estudiantes DIANA FERNANDA LÓPEZ MUÑOZ -25011226- y OMAR HENRY SILVA CASTRO -25011225-, pertenecen al Grupo de Investigación "GESCAS" del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, desde el mes de febrero de 2010.

En constancia se firma en San Juan de Pasto, a dieciocho días del mes de abril de dos mil doce.

SAULO MOSQUERA LÓPEZ  
Coordinador

Anexo O. Base de datos cuestionario1. Naturaleza y Significado de Símbolos y Letras.

Base de Datos I.E.M Técnico Industrial General

PREGUNTA 1a

- A) Lados Visibles
- B) Particularización
- C) A Punto
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA 1a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	94	37.8	38	15.3	132	53.0
B	18	7.2	4	1.6	22	8.8
C	5	2.0	1	0.4	6	2.4
D	14	5.6	4	1.6	18	7.2
E	48	19.3	23	9.2	71	28.5
Total	179		70		249	100.0

PREGUNTA 1b

- A) Particularización
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Correcta
- D) No Aplica

PREGUNTA 1 b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	48	19.3	21	8.4	69	27.7
B	58	23.3	16	6.4	74	29.7
C	39	15.7	7	2.8	46	18.5
D	34	13.7	26	10.4	60	24.1
	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 2 a)

- A) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- B) Particularización
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA 2a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	44	17.7	16	6.4	60	24.1
B	24	9.6	11	4.4	35	14.1
C	14	5.6	4	1.6	18	7.2
D	58	23.3	15	6.0	73	29.3
E	39	15.7	24	9.6	63	25.3
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 2b)

- A) Apariencia Visible
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Diferentes Letras Significan Diferentes Valores
- D) Particularización
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA 2b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	124	49.8	56	22.5	180	72.3
B	9	3.6	0	0.0	9	3.6
C	11	4.4	1	0.4	12	4.8
D	0	0.0	0	0.0	0	0.0
E	26	10.4	10	4.0	36	14.5
F	9	3.6	3	1.2	12	4.8
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 3a)

- A) Correcta
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Ignora la Variable
- D) No Aplica
- E) Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra

PREGUNTA 3 a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	53	21.3	32	12.9	85	34.1
B	51	20.5	14	5.6	65	26.1
C	47	18.9	12	4.8	59	23.7
D	22	8.8	7	2.8	29	11.6
E	6	2.4	5	2.0	11	4.4
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 3 b)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra
- E) Mal Uso de Signos de Agrupación

PREGUNTA 3 b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	57	22.9	18	7.2	75	30.1
B	20	8.0	4	1.6	24	9.6
C	17	6.8	12	4.8	29	11.6
D	38	15.3	12	4.8	50	20.1
E	47	18.9	24	9.6	71	28.5
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 3 C)

A) Correcta

B) No Aplica

C) Ignora la Variable

D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra

E) Interpretación Incorrecta

PREGUNTA 3 c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	32	12.9	18	7.2	50	20.1
B	30	12.0	14	5.6	44	17.7
C	79	31.7	31	12.4	110	44.2
D	18	7.2	6	2.4	24	9.6
E	20	8.0	1	0.4	21	8.4
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 3d)

A) Correcta

B) No Aplica

C) Interpretación Incorrecta

D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra

E) No Aplica Ley Distributiva Correctamente

F) Mal Uso de Signos de Agrupación

PREGUNTA 3 d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	20	8.0	5	2.0	25	10.0
B	29	11.6	15	6.0	44	17.7
C	4	1.6	2	0.8	6	2.4
D	66	26.5	26	10.4	92	36.9
E	54	21.7	18	7.2	72	28.9
F	6	2.4	4	1.6	10	4.0
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 4a

A) Correcta

B) No aplica

C) Sustitución de Letras por Valores Numéricos

D) Sustitución de Letras por Valores, Numéricos, Utiliza Paréntesis

E) Incluye la Letra en su Resultado

F) Confusión de la Multiplicación con la Potenciación

G) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra

H) Apariencia Visible

PREGUNTA 4 a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	38	15.3	14	5.6	52	20.9
B	51	20.5	18	7.2	69	27.7
C	6	2.4	1	0.4	7	2.8
D	16	6.4	8	3.2	24	9.6
E	3	1.2	0	0.0	3	1.2
F	2	0.8	3	1.2	5	2.0
G	38	15.3	17	6.8	55	22.1
H	25	10.0	9	3.6	34	13.7
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 4 b

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Sustitución de Letras por Valores Numéricos
- D) Sustitución de Letras por Valores, Numéricos, Utiliza Paréntesis
- E) Incluye la Letra en su Resultado
- F) Confusión de la Multiplicación con la Potenciación
- G) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- H) Apariencia Visible

PREGUNTA 4 b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	42	16.9	12	4.8	54	21.7
B	50	20.1	20	8.0	70	28.1
C	6	2.4	2	0.8	8	3.2
D	16	6.4	4	1.6	20	8.0
E	1	0.4	0	0.0	1	0.4
F	2	0.8	4	1.6	6	2.4
G	36	14.5	16	6.4	52	20.9
H	26	10.4	12	4.8	38	15.3
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 4 c

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- D) Interpretación Incorrecta
- E) Sustitución de letras por Valores Numéricos
- F) Incluye la Letra en su Resultado
- G) Sustitución de letras por Valores Numéricos, Utiliza Paréntesis

PREGUNTA 4 c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	53	21.3	13	5.2	66	26.5
B	40	16.1	17	6.8	57	22.9
C	54	21.7	26	10.4	80	32.1
D	6	2.4	1	0.4	7	2.8
E	20	8.0	11	4.4	31	12.4
F	2	0.8	1	0.4	3	1.2
G	4	1.6	1	0.4	5	2.0
total	179		70		249	100.0

## PREGUNTA 4 d)

A) Correcta

B) No aplica

C) Interpretación Incorrecta

D) Sustitución de Letras por Valores Numéricos

PREGUNTA 4 d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	1	0.4	2	0.8	3	1.2
B	65	26.1	24	9.6	89	35.7
C	34	13.7	14	5.6	48	19.3
D	79	31.7	30	12.0	109	43.8
total	179		70		249	100.0

## Base de Datos I.E.M Francisco de la Villota, General

## PREGUNTA 1a

A) Lados Visibles

B) Particularización

C) A Punto

D) Correcta

E) No Aplica

PREGUNTA 1a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	14	23.3	14	23.3	28	46.7
B	0	0.0	0	0.0	0	0.0
C	2	3.3	0	0.0	2	3.3
D	13	21.7	5	8.3	18	30.0
E	5	8.3	7	11.7	12	20.0
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 1b

- A) Particularización
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Correcta
- D) No Aplica

PREGUNTA 1b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	6	10.0	12	20.0	18	30.0
B	16	26.7	5	8.3	21	35.0
C	6	10.0	2	3.3	8	13.3
D	6	10.0	7	11.7	13	21.7
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 2 a)

- A) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- B) Particularización
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA2 a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	11	18.3	6	10.0	17	28.3
B	12	20.0	13	21.7	25	41.7
C	3	5.0	1	1.7	4	6.7
D	2	3.3	1	1.7	3	5.0
E	6	10.0	5	8.3	11	18.3
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 2b)

- A) Apariencia Visible
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Diferentes Letras Significan Diferentes Valores
- D) Particularización
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA2b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	22	36.7	10	16.7	32	53.3
B	2	3.3	2	3.3	4	6.7
C	2	3.3	1	1.7	3	5.0
D	1	1.7	2	3.3	3	5.0
E	7	11.7	11	18.3	18	30.0
F	0	0.0	0	0.0	0	0.0
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 3a)

- A) Correcta
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Ignora la Variable
- D) No Aplica
- E) Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra

PREGUNTA 3a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	9	15.0	5	8.3	14	23.3
B	7	11.7	5	8.3	12	20.0
C	13	21.7	9	15.0	22	36.7
D	5	8.3	5	8.3	10	16.7
E	0	0.0	2	3.3	2	3.3
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 3 b)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra
- E) Mal Uso de Signos de Agrupación

PREGUNTA 3b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	8	13.3	1	1.7	9	15.0
B	5	8.3	7	11.7	12	20.0
C	1	1.7	1	1.7	2	3.3
D	11	18.3	5	8.3	16	26.7
E	9	15.0	12	20.0	21	35.0
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 3 C)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Ignora la Variable
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- E) Interpretación Incorrecta

PREGUNTA 3c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	6	10.0	2	3.3	8	13.3
B	4	6.7	8	13.3	12	20.0
C	15	25.0	12	20.0	27	45.0
D	4	6.7	1	1.7	5	8.3
E	5	8.3	3	5.0	8	13.3
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 3d)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- E) No Aplica Ley Distributiva Correctamente
- F) Mal Uso de Signos de Agrupación

PREGUNTA 3d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	2	3.3	0	0.0	2	3.3
B	4	6.7	7	11.7	11	18.3
C	0	0.0	0	0.0	0	0.0
D	18	30.0	17	28.3	35	58.3
E	8	13.3	2	3.3	10	16.7
F	2	3.3	0	0.0	2	3.3
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 4a

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Sustitución de Letras por Valores Numéricos
- D) Sustitución de Letras por Valores, Numéricos, Utiliza Paréntesis
- E) Incluye la Letra en su Resultado
- F) Confusión de la Multiplicación con la Potenciación
- G) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- H) Apariencia Visible

PREGUNTA 4a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	4	6.7	0	0.0	4	6.7
B	12	20.0	8	13.3	20	33.3
C	1	1.7	0	0.0	1	1.7
D	5	8.3	1	1.7	6	10.0
E	0	0.0	0	0.0	0	0.0
F	0	0.0	0	0.0	0	0.0
G	7	11.7	4	6.7	11	18.3
H	5	8.3	13	21.7	18	30.0
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 4 b

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Sustitución de Letras por Valores Numéricos
- D) Sustitución de Letras por Valores, Numéricos, Utiliza Paréntesis
- E) Incluye la Letra en su Resultado
- F) Confusión de la Multiplicación con la Potenciación
- G) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- H) Apariencia Visible

PREGUNTA 4b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	5	8.3	0	0.0	5	8.3
B	11	18.3	10	16.7	21	35.0
C	1	1.7	0	0.0	1	1.7
D	5	8.3	1	1.7	6	10.0
E	0	0.0	0	0.0	0	0.0
F	0	0.0	0	0.0	0	0.0
G	6	10.0	4	6.7	10	16.7
H	6	10.0	11	18.3	17	28.3
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 4 c

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- D) Interpretación Incorrecta
- E) Sustitución de letras por Valores Numéricos
- F) Incluye la Letra en su Resultado
- G) Sustitución de letras por Valores Numéricos, Utiliza Paréntesis

PREGUNTA 4c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	3	5.0	1	1.7	4	6.7
B	11	18.3	9	15.0	20	33.3
C	11	18.3	12	20.0	23	38.3
D	1	1.7	1	1.7	2	3.3
E	5	8.3	2	3.3	7	11.7
F	1	1.7	1	1.7	2	3.3
G	2	3.3	0	0.0	2	3.3
Total	34		26		60	100.0

## PREGUNTA 4 d)

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Sustitución de Letras por Valores Numéricos

PREGUNTA 4d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	0	0.0	0	0.0	0	0.0
B	11	18.3	10	16.7	21	35.0
C	6	10.0	6	10.0	12	20.0
D	17	28.3	10	16.7	27	45.0
Total	34		26		60	100.0

Base de Datos General de las Tres I.E.M, Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera

## PREGUNTA 1a

- A) Lados Visibles
- B) Particularización
- C) A Punto
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA 1a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	110	32.8	57	17.0	167	49.9
B	18	5.4	6	1.8	24	7.2
C	7	2.1	1	0.3	8	2.4
D	30	9.0	10	3.0	40	11.9
E	58	17.3	38	11.3	96	28.7
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 1b

- A) Particularización
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Correcta
- D) No Aplica

PREGUNTA 1b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	57	17.0	36	10.7	93	27.8
B	76	22.7	28	8.4	104	31.0
C	45	13.4	10	3.0	55	16.4
D	45	13.4	38	11.3	83	24.8
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 2 a)

- A) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- B) Particularización
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA2a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	60	17.9	27	8.1	87	26.0
B	36	10.7	29	8.7	65	19.4
C	18	5.4	5	1.5	23	6.9
D	61	18.2	17	5.1	78	23.3
E	48	14.3	34	10.1	82	24.5
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 2b)

- A) Apariencia Visible
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Diferentes Letras Significan Diferentes Valores
- D) Particularización
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA2b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	152	45.4	71	21.2	223	66.6
B	13	3.9	4	1.2	17	5.1
C	15	4.5	5	1.5	20	6.0
D	1	0.3	3	0.9	4	1.2
E	33	9.9	26	7.8	59	17.6
F	9	2.7	3	0.9	12	3.6
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 3a)

- A) Correcta
- B) Interpretación Incorrecta
- C) Ignora la Variable
- D) No Aplica
- E) Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra

PREGUNTA3a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	64	19.1	45	13.4	109	32.5
B	61	18.2	21	6.3	82	24.5
C	62	18.5	26	7.8	88	26.3
D	29	8.7	13	3.9	42	12.5
E	7	2.1	7	2.1	14	4.2
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 3 b)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en el Álgebra
- E) Mal Uso de Signos de Agrupación

PREGUNTA 3b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	65	19.4	26	7.8	91	27.2
B	27	8.1	12	3.6	39	11.6
C	22	6.6	16	4.8	38	11.3
D	51	15.2	22	6.6	73	21.8
E	58	17.3	36	10.7	94	28.1
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 3 C)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Ignora la Variable
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- E) Interpretación Incorrecta

PREGUNTA3c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	38	11.3	26	7.8	64	19.1
B	37	11.0	24	7.2	61	18.2
C	97	29.0	49	14.6	146	43.6
D	24	7.2	7	2.1	31	9.3
E	27	8.1	6	1.8	33	9.9
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 3d)

- A) Correcta
- B) No Aplica
- C) Interpretación Incorrecta
- D) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- E) No Aplica Ley Distributiva Correctamente
- F) Mal Uso de Signos de Agrupación

PREGUNTA3d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	22	6.6	5	1.5	27	8.1
B	36	10.7	25	7.5	61	18.2
C	4	1.2	2	0.6	6	1.8
D	89	26.6	48	14.3	137	40.9
E	63	18.8	26	7.8	89	26.6
F	9	2.7	6	1.8	15	4.5
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 4a

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Sustitución de Letras por Valores Numéricos
- D) Sustitución de Letras por Valores, Numéricos, Utiliza Paréntesis
- E) Incluye la Letra en su Resultado
- F) Confusión de la Multiplicación con la Potenciación
- G) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- H) Apariencia Visible

PREGUNTA4a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	42	12.5	15	4.5	57	17.0
B	68	20.3	33	9.9	101	30.1
C	7	2.1	1	0.3	8	2.4
D	21	6.3	9	2.7	30	9.0
E	3	0.9	0	0.0	3	0.9
F	2	0.6	7	2.1	9	2.7
G	48	14.3	21	6.3	69	20.6
H	32	9.6	26	7.8	58	17.3
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 4 b

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Sustitución de Letras por Valores Numéricos
- D) Sustitución de Letras por Valores, Numéricos, Utiliza Paréntesis
- E) Incluye la Letra en su Resultado
- F) Confusión de la Multiplicación con la Potenciación
- G) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- H) Apariencia Visible

PREGUNTA4b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	47	14.0	13	3.9	60	17.9
B	68	20.3	37	11.0	105	31.3
C	7	2.1	3	0.9	10	3.0
D	21	6.3	5	1.5	26	7.8
E	1	0.3	0	0.0	1	0.3
F	2	0.6	7	2.1	9	2.7
G	43	12.8	20	6.0	63	18.8
H	34	10.1	27	8.1	61	18.2
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 4 c

- A) Correcta
- B) No aplica
- C) Desconocimiento del Significado de Concatenación en Álgebra
- D) Interpretación Incorrecta
- E) Sustitución de letras por Valores Numéricos
- F) Incluye la Letra en su Resultado
- G) Sustitución de letras por Valores Numéricos, Utiliza Paréntesis

PREGUNTA4c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	56	16.7	17	5.1	73	21.8
B	57	17.0	36	10.7	93	27.8
C	68	20.3	39	11.6	107	31.9
D	7	2.1	2	0.6	9	2.7
E	26	7.8	13	3.9	39	11.6
F	3	0.9	2	0.6	5	1.5
G	6	1.8	3	0.9	9	2.7
Total	223		112		335	100.0

## PREGUNTA 4 d)

A) Correcta

B) No aplica

C) Interpretación Incorrecta

D) Sustitución de Letras por Valores Numéricos

PREGUNTA4d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	1	0.3	2	0.6	3	0.9
B	84	25.1	44	13.1	128	38.2
C	41	12.2	22	6.6	63	18.8
D	97	29.0	44	13.1	141	42.1
Total	223		112		335	100.0

Anexo P. Base de datos cuestionario 2. El Objetivo de la Actividad y la Naturaleza de las Respuestas en Algebra.

Base De Datos I.E.M Técnico Industrial General

PREGUNTA 1a

- A) Olvido del significado de perímetro
- B) Suma incorrecta de la medida de los lados
- C) Incomprensión de la pregunta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA						
A 1ª						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	25	10,0	25	10,0	50	20,1
B	14	5,6	7	2,8	21	8,4
C	8	3,2	7	2,8	15	6,0
D	114	45,8	27	10,8	141	56,6
E	16	6,4	6	2,4	22	8,8
Total	177		72		249	100,0

## PREGUNTA 1b

- A) Olvido del significado de perímetro  
 B) Suma incorrecta de la medida de los lados  
 C) Incomprensión de la pregunta  
 D) Correcta  
 E) No Aplica

PREGUNTA 1b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	22	8,8	17	6,8	39	15,7
B	18	7,2	13	5,2	31	12,4
C	14	5,6	11	4,4	25	10,0
D	108	43,4	20	8,0	128	51,4
E	15	6,0	11	4,4	26	10,4
Total	177		72		249	100,0

## PREGUNTA 1c

- A) Clausura en álgebra  
 B) Particulariza  
 C) Interpretación errónea de la pregunta  
 D) Olvido perímetro  
 E) Correcta  
 F) No Aplica

PREGUNTA 1c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	131	52,6	46	18,5	177	71,1
B	7	2,8	2	0,8	9	3,6
C	9	3,6	4	1,6	13	5,2
D	5	2,0	3	1,2	8	3,2
E	16	6,4	11	4,4	27	10,8
F	11	4,4	5	2,0	16	6,4
total	179		71		250	100,0

## PREGUNTA 1d

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA 1d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	137	55,0	38	15,3	175	70,3
B	13	5,2	4	1,6	17	6,8
C	7	2,8	7	2,8	14	5,6
D	6	2,4	6	2,4	12	4,8
E	10	4,0	10	4,0	20	8,0
F	7	2,8	6	2,4	13	5,2
total	180		71		251	100,0

## PREGUNTA 1e

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA 1e						
Error	Masculin o	Porcentaj e	Femenin o	Porcentaj e	Total	Porcentaj e
A	130	52,2	38	15,3	168	67,5
B	18	7,2	5	2,0	23	9,2
C	9	3,6	5	2,0	14	5,6
D	4	1,6	8	3,2	12	4,8
E	10	4,0	10	4,0	20	8,0
F	8	3,2	4	1,6	12	4,8
total	179		70		249	100,0

## PREGUNTA 1f

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA 1f						
Error	Masculin o	Porcentaj e	Femenin o	Porcentaj e	Total	Porcentaj e
A	127	51,0	38	15,3	165	66,3
B	13	5,2	3	1,2	16	6,4
C	9	3,6	8	3,2	17	6,8
D	7	2,8	10	4,0	17	6,8
E	10	4,0	6	2,4	16	6,4
F	14	5,6	7	2,8	21	8,4
total	180		72		252	100,0

## PREGUNTA 1g

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA 1g						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A	144	57,8	37	14,9	181	72,7
B	4	1,6	11	4,4	15	6,0
C	4	1,6	2	0,8	6	2,4
D	8	3,2	5	2,0	13	5,2
E	6	2,4	7	2,8	13	5,2
F	16	6,4	8	3,2	24	9,6
total	182		70		252	100,0

## Base de Datos I.E.M Francisco de la Villota General

## PREGUNTA 1 a)

- A) Olvido del significado de perímetro
- B) Suma incorrecta de la medida de los lados
- C) Incomprensión de la pregunta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA 1 <sup>a</sup>						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	4	6,7	3	5,0	7	11,7
B	1	1,7	0	0,0	1	1,7
C	4	6,7	0	0,0	4	6,7
D	21	35,0	16	26,7	37	61,7
E	4	6,7	7	11,7	11	18,3
Total	34		26		60	100,0

## PREGUNTA 1b

- A) Olvido del significado de perímetro
- B) Suma incorrecta de la medida de los lados
- C) Incomprensión de la pregunta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA 1b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	0	0,0	1	1,7	1	1,7
B	3	5,0	2	3,3	5	8,3
C	5	8,3	3	5,0	8	13,3
D	25	41,7	17	28,3	42	70,0
E	1	1,7	3	5,0	4	6,7
Total	34		26		60	100,0

## PREGUNTA 1c

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	24	40,0	9	15,0	33	55,0
B	1	1,7	1	1,7	2	3,3
C	0	0,0	1	1,7	1	1,7
D	2	3,3	4	6,7	6	10,0
E	5	8,3	9	15,0	14	23,3
F	2	3,3	2	3,3	4	6,7
Total	34		26		60	100,0

## PREGUNTA 1d

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	17	28,3	18	30,0	35	58,3
B	4	6,7	1	1,7	5	8,3
C	2	3,3	0	0,0	2	3,3
D	3	5,0	2	3,3	5	8,3
E	4	6,7	3	5,0	7	11,7
F	4	6,7	2	3,3	6	10,0
Total	34		26		60	100,0

## PREGUNTA 1e

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1e						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	22	36,7	17	28,3	39	65,0
B	1	1,7	2	3,3	3	5,0
C	0	0,0	0	0,0	0	0,0
D	0	0,0	1	1,7	1	1,7
E	6	10,0	5	8,3	11	18,3
F	5	8,3	1	1,7	6	10,0
Total	34		26		60	100,0

## PREGUNTA 1f

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA 1f						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	20	33,3	13	21,7	33	55,0
B	6	10,0	2	3,3	8	13,3
C	1	1,7	4	6,7	5	8,3
D	1	1,7	1	1,7	2	3,3
E	1	1,7	3	5,0	4	6,7
F	5	8,3	3	5,0	8	13,3
Total	34		26		60	100,0

## PREGUNTA 1g

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1g						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	21	35,0	20	33,3	41	68,3
B	4	6,7	1	1,7	5	8,3
C	3	5,0	1	1,7	4	6,7
D	1	1,7	0	0,0	1	1,7
E	5	8,3	0	0,0	5	8,3
F	0	0,0	4	6,7	4	6,7
Total	34		26		60	100,0

## Base de Datos I.E.M Sede Cabrera

## PREGUNTA 1 a)

- A) Olvido del significado de perímetro
- B) Suma incorrecta de la medida de los lados
- C) Incomprensión de la pregunta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA1a						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	1	3,85	2	7,69	3	11,44
B	0	0,00	1	3,85	1	3,85
C	0	0,00	1	3,85	1	3,85
D	7	26,92	7	26,92	14	53,84
E	2	7,69	5	19,23	7	26,92
Total	10		26		26	100,0

## PREGUNTA 1b

- A) Olvido del significado de perímetro
- B) Suma incorrecta de la medida de los lados
- C) Incomprensión de la pregunta
- D) Correcta
- E) No Aplica

PREGUNTA1b						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	1	3,85	2	7,69	3	11,54
B	0	0,00	1	3,85	1	3,85
C	1	3,85	0	0,00	1	3,85
D	0	0	2	7,69	2	7,69
E	8	30,77	11	33	19	73,07
Total	10		26		26	100,0

## PREGUNTA 1c

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1c						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	7	26,92	9	34,62	16	61,54
B	1	3,85	0	0,00	1	3,85
C	1	3,85	0	0,00	1	3,85
D	1	3,85	4	15,38	5	19,23
E	0	0,00	1	3,85	1	3,85
F	0	0,00	2	7,69	2	7,69
Total	10		16		26	100,0

## PREGUNTA 1d

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1d						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	9	34,62	8	30,77	17	63,38
B	0	0,00	2	7,69	2	7,69
C	0	0,00	1	3,85	1	3,85
D	0	0,00	0	0,00	0	0,00
E	1	3,85	3	11,54	4	15,38
F	0	0,00	2	7,69	2	7,69
Total	10		16		26	100,0

## PREGUNTA 1e

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1e						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	6	23,08	7	26,92	13	50,00
B	1	3,85	1	3,85	2	7,69
C	1	3,85	0	0,00	1	3,85
D	1	3,85	1	3,85	2	7,69
E	0	0,00	5	19,23	5	19,23
F	1	3,85	2	7,69	3	11,54
Total	10		16		26	100,0

## PREGUNTA 1f

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1f						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	7	26,92	7	26,92	14	53,85
B	0	0,00	2	7,69	2	7,69
C	3	11,54	2	7,69	5	19,23
D	0	0,00	1	3,85	1	3,85
E	0	0,00	1	3,85	1	3,85
F	0	0,00	3	11,54	3	11,54
Total	10		16		26	100,0

## PREGUNTA 1g

- A) Clausura en álgebra
- B) Particulariza
- C) Interpretación errónea de la pregunta
- D) Olvido perímetro
- E) Correcta
- F) No Aplica

PREGUNTA1g						
Error	Masculino	Porcentaje	Femenino	Porcentaje	Total	Porcentaje
A.	8	30,77	6	23,08	14	53,85
B	0	0,00	0	0,00	0	0,00
C	1	3,85	0	0,00	1	3,85
D	0	0,00	3	11,54	3	11,54
E	1	3,85	5	19,23	6	23,08
F	0	0,00	2	7,69	2	7,69
Total	10		16		26	100,0