PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS IDEALES ASOCIADOS A HIPERGRAFOS

ALIX FERNANDA ENRÍQUEZ DELGADO
VIVIANA CAROLINA GUERRERO PANTOJA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2012

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE LOS IDEALES ASOCIADOS A HIPERGRAFOS

ALIX FERNANDA ENRÍQUEZ DELGADO
VIVIANA CAROLINA GUERRERO PANTOJA

Trabajo de grado para optar al título de Licenciatura en Matemáticas

Asesor
Fernando Andrés Benavides Ágredo
Magister en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2012

Nota De Responsabilidad

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de las autoras.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación:

Fernando Andrés Benavides Ágredo
Presidente de Tesis

Wilson Fernando Mutis Cantero
Jurado 1

Fernando Soto Agreda
Jurado 2

San Juan de Pasto, Mayo 19 de 2012

Agradecimientos

Queremos expresar por medio de este trabajo nuestra gratitud, en primer lugar a Dios por habernos permitido ingresar al programa de Licenciatura en Matemáticas y terminar nuestros estudios de la mejor manera. En segundo lugar, a todas las personas que han influenciado en nuestra carrera, por su apoyo incondicional tanto a nivel académico como personal. De manera especial al profesor Fernando Andrés Benavides Ágredo quien con sus valiosos conocimientos, responsabilidad y paciencia fue la base en el desarrollo de este trabajo de investigación. A los profesores del departamento de matemáticas de la Universidad de Nariño por sus enseñanzas, en particular a los profesores: Fernando Benavides, John Castillo y Wilson Mutis, quienes además de formarnos profesionalmente nos han brindado su amistad y apoyo. Finalmente queremos agradecer a las personas que siempre han estado presentes en cada etapa de nuestras vidas, apoyándonos incondicionalmente; nuestros padres, hermanos y demás familiares.

Resumen

Sean $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un anillo de polinomios sobre un campo k y H un hipergrafo simple sobre el conjunto de vértices $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, entonces a H se le asocia un ideal monomial libre de cuadrados I_H, dado por

$$I_H = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} : \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} \in H).$$

Un problema de interés es determinar por via combinatoria los primos minimales de un ideal monomial. En particular, si el ideal monomial es libre de cuadrados, Sara Faridi prueba que es posible determinar los ideales primos minimales del ideal I_H utilizando las propiedades estructurales de su hipergrafo asociado. Ahora si se considera un ideal monomial $I = (M_1, M_2, \ldots, M_q)$, mediante la operación de polarización se le puede asociar el ideal monomial libre de cuadrados

$$\mathcal{P}(I) = (\mathcal{P}(M_1), \mathcal{P}(M_2), \ldots, \mathcal{P}(M_q)).$$

En el presente trabajo de investigación se prueba como determinar una descomposición primaria de un ideal monomial por medio de los cubrimientos minimales de su polarizado, y se presentan algunas propiedades adicionales relacionadas con hipergrafos y sus cubrimientos. y también tres algoritmos que permiten determinar de forma sencilla una descomposición primaria de un ideal monomial los cuales fueron implementados en el programa computacional MuPAD pro 4.0.

Abstract

Let $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ a polynomial ring over a field k and H be a simple hypergraphs on vertex set $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, then H is associated with a square-free monomial ideal I_H, given by

$$I_H = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n} : \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} \in H).$$

One problem is determining by via combinatorial prime minimal of a ideal monomial. In particular, if the monomial ideal is square-free, Sara Faridi proof that may determine the prime minimal of I_H using structural properties hypergraphs. Now if we consider a monomial ideal $I = (M_1, M_2, \ldots, M_q)$, by operation of polarization can be associated with the ideal square-free monomial

$$\mathcal{P}(I) = (\mathcal{P}(M_1), \mathcal{P}(M_2), \ldots, \mathcal{P}(M_q)).$$

This research work as to test determine a primary decomposition of a ideal monomial through your minimal vertex cover its polarized, present and some additional properties related hypergraph and cover. three algorithms as well allowing simple determination of a primary decomposition of an monomial ideal which were implemented in software MuPAD pro 4.0.

Índice general

Introducción

Sean $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ un anillo polinomial sobre un campo k e I un ideal de R, el problema general consiste en expresar a I como intersección de ideales primos e ideales primarios. A tal descomposición del ideal se le denomina descomposición primaria de I. Este problema es aún una tarea difícil a pesar de los grandes cambios del álgebra computacional y de la geometría algebraica computacional. Además los pocos algoritmos conocidos utilizan teorías tales como bases de Gröbner, factorización polinomial multivaluada y álgebra homológica. Sin embargo, a lo largo de ésta investigación se encontró varios algoritmos sencillos de descomposición primaria para ideales monomiales los cuales se expondrán en el capítulo dos, el más fácil de ver es: si m es un generador minimal de un ideal monomial I tal que $m = m'm''$ con m' y m'' monomios primos relativos, entonces $I = (I + (m')) \cap (I + (m''))$, iterando este proceso un número finito de veces finalmente se obtiene una descomposición primaria de I. Este algoritmo se debe al trabajo desarrollado por E. Miller y B. Sturmfels en [8].

La descomposición de un ideal en un anillo polinomial sobre un campo es una de las herramientas teóricas indispensables en álgebra conmutativa y geometría algebraica. Geométricamente corresponde a la descomposición de una variedad afín en componentes irreducibles, es decir, la descomposición del conjunto cero de un ideal I que se define como $V(I) = \{\alpha \in k^n : f(\alpha) = 0 \; para\, todo \; f \in I\}$ donde $k^n = k \times k \times \cdots \times k$ y es por tanto también un concepto geométrico importante.

Mediante la asociación de un hipergrafo a un ideal monomial libre de cuadrados, en este trabajo de investigación se presenta la descomposición primaria de ideales monomiales desde un punto de vista combinatorio mediante la utilización de las propiedades estructurales de los hipergrafos y la operación de polarización la cual convierte un ideal monomial en uno libre de cuadrados. Este trabajo está organizado en tres capítulos, el primero de ellos está dividido en dos secciones, en la primera se exponen algunos conceptos y resultados básicos concernientes al álgebra conmutativa y en la segunda sección se definen algunos conceptos de la teoría de grafos e hipergrafos. El segundo capítulo se lo ha dividido en tres secciones, en las cuales se dan a conocer tres métodos diferentes de descomposición primaria de ideales monomiales a partir de sus generadores minimales, en la primera sección de éste capítulo se muestra el primer método que se basa en el cálculo de dos nuevos ideales del cual nuestra referencia es el trabajo de R. Villarreal, la segunda sección contiene un método en el cual se hace uso del dual de Alexander para determinar una descomposición irredundante en irreducibles del ideal y en la última sección de este capítulo se presenta un método gráfico para ideales monomiales en dos y tres variables, estos dos últimos métodos se fundamentaron en los trabajos de E. Miller y B. Sturmfels [8] y [9].

El tercer capítulo es el más importante, dado que se presentan los principales resultados, producto del presente trabajo de investigación, el cual se divide en dos secciones, en la primera sección se presentan la definición de polarización y la relación existente entre los cubrimientos minimales del hipergrafo simple asociado a un ideal monomial libre de cuadrados y sus cubrimientos minimales que se deben a S. Faridi en [4] y [5]. Y la segunda contiene nuestros principales resultados que son el Teorema 3.1 y la Proposición 3.6 y algunas propiedades adicionales.

Finalmente, en el apéndice A se presenta una breve reseña por cada uno de los algoritmos implementados en el programa computacional Mupad pro 4.0, en cada una de las cuales se indica las entradas en cada algoritmo, resultado final después de su ejecución, así como también cuales son sus algoritmos auxiliares.

Capítulo 1

Fundamentos Teóricos

En este capítulo se introducen algunas nociones básicas y resultados del álgebra conmutativa y la teoría de grafos e hipergrafos con el fin de entender los conceptos de descomposición primaria irredundante, grafo e hipergrafo y algunas propiedades combinatorias de estos últimos. Todos los anillos considerados en este capitulo son conmutativos con unitario. Nuestras principales referencias son los trabajos de M. Atiyah [1] y de R. Villarreal [10] y como referencia auxiliar el trabajo de S.Faridi y M. Caboara [6]. Algunos de los resultados son establecidos sin demostración, si es necesario el lector puede localizar la demostración en alguna de las referencias mencionadas.

1.1. Algebra Conmutativa

En esta sección se presenta en primer lugar algunos conceptos y resultados básicos referentes al concepto de descomposición primaria de un ideal, en segundo lugar se define condición de cadena ascendente y descendente y finalmente se dan a conocer la definición de anillo noetheriano y algunos resultados relacionados con la descomposición primaria de un ideal en esta clase de anillos. En esta sección R denota un anillo conmutativo con unitario.

1.1.1. Descomposición Primaria

La descomposición de un ideal en ideales primarios es un pilar tradicional de la teoría de ideales. Dicha descomposición proporciona una generalización de la factorización de un entero como producto de potencias de primos. Por ejemplo, $15 = 3 \cdot 5$, desde el punto de vista de la teoría de ideales puede ser expresado de la siguiente manera; $(15) = (3) \cap (5)$ en el anillo $\mathbb{Z}$. De esta manera, un ideal primo de un anillo R es en cierto sentido una generalización de un número primo y de igual manera un ideal primario es una generalización de las potencias de números primos.

Definición 1.1.
Sea $\mathfrak{p}$ un ideal de R. Se dice que $\mathfrak{p}$ es *primo* si $ab \in \mathfrak{p}$ implica que $a \in \mathfrak{p}$ o $b \in \mathfrak{p}$.

Definición 1.2.
Sea q un ideal de un anillo R. Se dice que q es *primario* si para $x, y \in R$ se tiene $xy \in q$ implica que $x \in q$ o $y^n \in q$ para algún $n > 0$.

Ejemplo 1.1.

1) Sea $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un anillo polinomial sobre un campo k y sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos dados de k, entonces $\mathfrak{p} = \{g(x_1, \ldots, x_n) \in R : g(a_1, \ldots, a_n) = 0\}$ es un ideal primo de R.

2) Los ideales primarios en $\mathbb{Z}$ son de la forma (0) y (p^n) donde p es un número primo.

3) Sea $R = k[x, y]$, $q = (x, y^2)$. Dado que $k[x, y]/(x, y^2) \cong k[y]/(y^2)$ se tiene que los divisores de cero de R/q son elementos que pertenecen al ideal generado por y, y como y es nilpotente se deduce que q es primario.

Proposición 1.1.
Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ ideales primos e I un ideal contenido en $\cup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i$. Entonces $I \subseteq \mathfrak{p}_i$ para algún i.

Demostración. Ver Proposición 1.11 en [1].

Proposición 1.2.
Sean $I_1, \ldots, I_n$ ideales y $\mathfrak{p}$ un ideal primo que contiene $\cap_{i=1}^{n} I_i$. Entonces $I_i \subseteq \mathfrak{p}$ para algún i. Además, si $I = \cap_{i=1}^{n} I_i$ entonces $\mathfrak{p} = I_i$ para algún i.

Demostración. Ver Proposición 1.11 en [1].

Proposición 1.3.
Sea q un ideal de R. Entonces q es primario si y solo si $R/q \neq 0$ y cada divisor de cero en R/q es nilpotente.

Demostración. Sea $\bar{x} \in R/q$ un divisor de cero, con $x \notin q$ entonces existe $\bar{y} \in R/q$, con $y \notin q$ tal que $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$. De ahí, que $xy \in q$, donde $x^n \in q$ o $y^m \in q$ para algún $n, m \in \mathbb{N}$.

Recíprocamente, suponga que cada divisor de cero en R/q es nilpotente y sea $xy \in R$ tales que $xy \in q$. Luego $\bar{x}\bar{y} = \bar{0}$ entonces $x^n \in q$ y $y^m \in q$ para algunos $n, m \in \mathbb{N}$. □

Definición 1.3.
Si I es un ideal de R se define el *radical* de I como

$$rad(I) = \{x \in R : x^n \in I, para \ \ algún \ \ n\}$$

Sean I, J ideales de un anillo R, entonces a partir de la Definición 1.3 las siguientes propiedades se cumplen:

1) $I \subseteq rad(I)$

2) $rad(I \cap J) = rad(I) \cap rad(J)$

3) $rad(I) = (1)$ si y solo si $I = (1)$

4) Si $\mathfrak{p}$ es primo, $rad(\mathfrak{p}^n) = \mathfrak{p}$ para todo $n > 0$.

Proposición 1.4.
Sea q un ideal primario de un anillo R, entonces $rad(q)$ es el menor ideal primo que contiene a q.

Demostración. Ver Proposición 4.1 en [1].

Si $\mathfrak{p} = rad(q)$ con $\mathfrak{p}$ primo, entonces se dice que q es $\mathfrak{p}$-primario. Se puede probar que un ideal primario no es necesariamente una potencia de un ideal primo y recíprocamente, una potencia p^n de un ideal primo no necesariamente es primario. Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.5.
Si $rad(q)$ es maximal entonces q es primario. En particular, las potencias de un ideal maximal $\mathfrak{m}$ son $\mathfrak{m}$-primarias.

Demostración. Ver Proposición 4.2 en [1].

Lema 1.1.
Si q_i son $\mathfrak{p}$-primarios para $i = 1, 2, ..., n,$ entonces $q = \cap_{i=1}^{n} q_i$ es $\mathfrak{p}$-primario.

Demostración. Ver Lema 4.3 en [1].

Lema 1.2.
Sean q un ideal $\mathfrak{p}$-primario y x un elemento de R. Entonces:

i) *Si $x \in q$ entonces $(q : x) = (1)$;*

ii) *Si $x \notin q$ entonces $(q : x)$ es $\mathfrak{p}$-primario, y por tanto $rad(q : x) = \mathfrak{p}$;*

iii) *Si $x \notin \mathfrak{p}$ entonces $(q : x) = q$.*

Demostración. Ver Lema 4.4 en [1].

Definición 1.4.
Una *descomposición primaria* de un ideal I en R es una expresión de I como una intersección finita de ideales primarios, es decir, $I = \cap_{i=1}^{n} q_i$. Si además,

i) Los $rad(q_i)$ son todos distintos y

ii) Se tiene $\cap_{j \neq i} q_j \nsubseteq q_i$ con $1 \leqslant i \leqslant n$

la descomposición primaria se denomina *irredundante*.

Observación 1.1.
En general, tal descomposición primaria no ha de existir necesariamente; por tal razón consideraremos solamente ideales que tienen una descomposición primaria. Pero, si un ideal I tiene descomposición primaria redundante $I = \cap_{i=1}^{n} q_i$ esta puede llevarse a una descomposición irredundante de la siguiente manera:

1) Suponga que en la descomposición primaria de I existen q_1 y q_2 tales que $rad(q_1) = rad(q_2) = \mathfrak{p}$ entonces sea $q = q_1 \cap q_2$ el cual es $\mathfrak{p} - primario$ por el Lema 1.1. Así $I = q \cap (\cap_{i=3}^{n} q_i)$. Y de esta forma podemos obtener que los $rad(q_i)$ sean todos distintos.

2) Si en la descomposición primaria de I existe q_i tal que $\cap_{j \neq i} q_j \subseteq q_i$ para algún i entonces podemos quitar a q_i de la descomposición primaria de I y se obtiene que $\cap_{j \neq i} q_j \nsubseteq q_i$ para todo i.

Ejemplo 1.2.
Para $I = (x^2z, x^3y^2, yz^2)$ y $J = (x^6y^2, x^5y^4, xy^7)$ se tiene que

$$I = (y, z) \cap (z, y^2) \cap (y, x^2) \cap (z, x^3) \cap (z^2, x^2) \text{ y } J = (x^6, y^4) \cap (x^5, y^7)$$

Teorema 1.1.
Sea $I = \cap_{i=1}^{n} q_i$ una descomposición primaria irredundante de I. Sea $\mathfrak{p}_i = rad(q_i)$ para $1 \leqslant i \leqslant n$. Entonces los $\mathfrak{p}_i$ son precisamente los ideales primos que aparecen en el conjunto de ideales $rad(I : x)$ para todo $x \in R$ y por lo tanto son independientes de la descomposición particular de I.

Demostración. Ver Teorema 4.5 en [1].

Observación 1.2.

1) La demostración del Teorema 1.1, unida con la segunda parte del Lema 1.2, muestran que para cada i existe $x_i \in R$ tal que $(I : x_i)$ es $\mathfrak{p}_i$-primario.

2) Considerando el anillo cociente R/I, el Teorema 1.1 es equivalente a decir que los $\mathfrak{p}_i$ son precisamente los ideales primos que se presentan como radicales de anuladores de elementos de R/I.

Definición 1.5.
Los ideales primos $\mathfrak{p}_i$ que aparecen en el conjunto de ideales $rad(I : x)$ para todo $x \in R$, se dice que pertenecen a I o que son *asociados* de I. El conjunto de todos los ideales asociados de un ideal se denota por $Ass(I)$. Cuando se trabaje con varios anillos es conveniente escribir $Ass_R(I)$.

Proposición 1.6.
Sea $R' = k[x_2, \ldots, x_n]$ y $R = R'[x_1]$ anillos polinomiales sobre un campo k. Si I' es un ideal R' y $\mathfrak{p} \in Ass_R(R/(I', x_1))$, entonces:

i) $\mathfrak{p} = x_1R + \mathfrak{p}'$ *donde p' es un ideal primo de R', y*

ii) *p' es un primo asociado de R'/I'*

Demostración.

i) Sea $(I', x_1) = q_1 \cap q_2 \cap \cdots \cap q_r$ entonces $\mathfrak{p} = rad(q_i)$ para algún i y $(I', x_1) \subseteq \mathfrak{p}$ luego $x_1 \in \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}', x_1)$. Ahora, probemos que $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de R'. Como

$$k[x_1, \ldots, x_n]/\mathfrak{p} \cong k[x_1, \ldots, x_n]/(\mathfrak{p}', x_1) \cong k[x_2, \ldots, x_n]/\mathfrak{p}'$$

se tiene que $\mathfrak{p}'$ es un ideal primo de R'.

ii) Como $\mathfrak{p} \in Ass_R(R/(I', x_1))$ entonces existe $f \in k[x_2, \ldots, x_n]$ tal que $\mathfrak{p} = rad((I', x_1) : f)$. Note que $\mathfrak{p}' = rad(I' : f)$.
Sea $M \in rad(I' : f)$ entonces $M^k \in (I' : f)$ esto es $M^kf \in I'$ de ahí que $M^k \in ((I', x_1) : f)$ y $M \in rad(I : f)$, así $M \in \mathfrak{p} = (\mathfrak{p}', x_1)$ y por lo tanto, $M \in \mathfrak{p}'$. Sea $M \in \mathfrak{p}'$ entonces $M \in \mathfrak{p} = (\mathfrak{p}', x_1)$, de ahí que $M \in rad(I : f)$, luego $M^k \in (I : f)$, $M^kf \in I$ y se tiene que $M^kf \in I'$. Así $M^k \in (I' : f)$ y por lo tanto, $M \in rad(I' : f)$.
De lo cual se tiene que, $\mathfrak{p}'$ es un primo asociado de R'/I'. □

Definición 1.6.
Los ideales minimales del conjunto $\{\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n\}$ que se describe en el Teorema 1.1, se denominan *primos minimales* o ideales *aislados* pertenecientes a I. Los otros se denominan ideales primos *inmersos*.

Observación 1.3.

1) Sea $I = (x^2, xy)$ en $R = k[x, y]$. Entonces, $I = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2^2$, donde $\mathfrak{p}_1 = (x)$ y $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$. El ideal $\mathfrak{p}_2^2$ es primario en virtud de la Proposición 1.5. Y así, los primos son $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$. En este ejemplo $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}_2$; y se tiene $rad(I) = \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_1$ pero, I no es un ideal primario. Además, observe que $\mathfrak{p}_2 = (x, y)$ es inmerso.

2) Un ideal I es primario si y solo si tiene un solo ideal primo asociado.

3) Si I es un ideal descomponible. Entonces cada ideal primo $\mathfrak{p}$ tal que $I \subseteq \mathfrak{p}$ contiene un ideal primo minimal perteneciente a I, y así los ideales primos minimales de I son precisamente los elementos minimales en el conjunto de todos los ideales primos que contienen a I.

No es cierto que todas las componentes primarias sean independientes de la descomposición. Sin embargo, hay algunas propiedades de unicidad que se menciona en el segundo teorema de unicidad.

Teorema 1.2.
Sean $I = \cap_{i=1}^{n} q_i$ una descomposición primaria irredundante de I, y $\{\mathfrak{p}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{p}_{i_m}\}$ un conjunto minimal de ideales primos de I. Entonces $q_{i_1} \cap, \cdots, \cap q_{i_m}$ es independiente de la descomposición.

Demostración. Ver Teorema 4.10 en [1].

Corolario 1.1.
Las componentes primarias minimales (es decir las componentes primarias q_i correspondientes a ideales primos minimales $\mathfrak{p}_i$) están unívocamente determinadas por I.

Demostración. Ver Corolario 4.11 en [1].

Ejemplo 1.3.
Sea $R = k[x, y]$ un anillo polinomial sobre un campo k y sea $I = (x^2, xy)$ un ideal en R. Luego

$$I = (x) \cap (x, y)^2 = (x) \cap (x^2, y)$$

son dos descomposiciones primarias irredundantes.

1.1.2. Condición de Cadena

Hasta ahora se han considerado siempre anillos conmutativos con identidad arbitrarios. Para ir más lejos y obtener teoremas más fuertes es necesario imponer algunas condiciones de finitud. La manera más conveniente es en la forma de condiciones de cadena. Estas se aplican tanto a los anillos como a los módulos. La mayoría de los razonamientos son de carácter totalmente formal, y por esta causa hay simetría entre las cadenas ascendentes y las descendentes.

Sea Σ un conjunto parcialmente ordenado por una relación $\leq$.

Proposición 1.7.
Las siguientes condiciones en Σ son equivalentes:

(i) Cada sucesión creciente $x_1 \leq x_2 \leq \ldots$ en Σ es estacionaria (es decir, existe un n tal que $x_n = x_{n+1} = \ldots$).

(ii) Cada subconjunto no vacío de Σ tiene un elemento maximal.

Demostración. Ver Proposición 6.1 en [1]

Definición 1.7.
En referencia a la Proposición 1.7 se tiene que:

1) Si Σ esta ordenado por la relación $\subseteq$, entonces i) se denomina la *condición de cadena ascendente* (abreviadamente c.c.a.) y ii) la condición maximal.

2) Si Σ está ordenado por $\supseteq$, entonces i) es la *condición de cadena descendente* (abreviadamente c.c.d) e ii) la condición minimal.

Ejemplo 1.4.

1) Un grupo abeliano finito satisface a la vez c.c.a. y c.c.d. en subgrupos.

2) El anillo $\mathbb{Z}$ satisface c.c.a. pero no c.c.d en ideales. Pues si $a \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$ se tiene $(a) \supset (a^2) \supset \ldots \supset (a^n) \supset \ldots$ (inclusión en sentido estricto).

3) El anillo $k[x]$ sobre un campo k, satisface c.c.a. pero no c.c.d. en ideales.

4) El anillo de polinomios $k[x_1, x_2, \ldots]$ con k un campo en un número infinito de indeterminadas x_n no satisface ninguna condición de cadena en los ideales: pues la sucesión $(x_1) \subset (x_1, x_2) \subset \ldots$ es creciente en sentido estricto, y la sucesión $(x_1) \supset (x_1^2) \supset (x_1^3) \supset \ldots$ es decreciente en sentido estricto.

Definición 1.8.
Sea R un anillo arbitrario con unitario. Un ideal primo $\mathfrak{p} \neq R$ se dice que tiene *altura* n si existe al menos una cadena

$$\mathfrak{p_o} \subset \mathfrak{p_1} \subset \ldots \subset \mathfrak{p_{n-1}} \subset \mathfrak{p_n} = \mathfrak{p}$$

donde los $\mathfrak{p_i}$ son ideales primos y no existe tal cadena con $n+1$ ideales. Se denota, la *altura de un ideal primo* $\mathfrak{p}$ por $\mathfrak{ht}(\mathfrak{p})$. Además, $\mathfrak{p_o} = (0)$. Si I es un ideal en R entonces $\mathfrak{ht}(I)$ se define:

$$\mathfrak{ht}(I) = min\{\mathfrak{ht}(\mathfrak{p}) \,:\, I \subset \mathfrak{p} \text{ y } \mathfrak{p} \in Spec(R)\}$$

donde, $Spec(R)$ denota un conjunto de todos los ideales primos en el anillo R.

1.1.3. Anillos Noetherianos

Los anillos noetherianos son la clase mas importante de anillos en algebra conmutativa, debido a su condición de finitud adecuada para que tengan validez en gran número de teoremas.

Definición 1.9.
Sea R un anillo, se dice que R es *noetheriano*, si satisface una de las siguientes condiciones equivalentes:

1. Cada conjunto no vació de ideales en R tiene un elemento maximal.
2. Cada cadena ascendente de ideales es estacionaria.

La equivalencia de estas condiciones se prueban con la Proposición 1.7.

Proposición 1.8.
R es un anillo noetheriano si y sólo si cada ideal de R es de generación finita.

Demostración. Sea J un ideal de R, y sea Σ el conjunto de todos los ideales finitamente generados de R. Entonces Σ es no vació (puesto que $0 \in \Sigma$) y por tanto tiene un elemento maximal J_0. Si $J_0 \neq J$, se considera el ideal $J_0 + (x)$ donde $x \in J$, $x \in J_0$; éste es de generación finita y contiene J_0 en sentido estricto, por tanto se llega a una contradicción. Así, $J = J_0$ y se tiene que J es de generación finita.

En el otro sentido, sea $J_1 \subseteq J_2 \subseteq \ldots$ una cadena ascendente de ideales de R. Entonces, $J = \cup_{n=1}^{\infty} J_n$ es un ideal de R, por tanto es de generación finita. Y sea $x_1, \ldots, x_r$, un sistema de generadores. Si $x_i \in J_{n_i}$ sea $n = máx_{i=1}^{r} n_i$; entonces cada $x_i \in J_n$, por tanto $J_n = J_k$ para todo $k \geq n$ así la cadena es estacionaria. $\square$

Ejemplo 1.5.

1) Cada dominio de ideales principales es noetheriano.
2) Cada campo es un anillo noetheriano; también lo es el anillo $\mathbb{Z}/(n)$ con $n \neq 0$.
3) El anillo $k[x_1, x_2, \ldots]$ con k un campo en un número infinito de indeterminadas, no es noetheriano ya que mo cumple la condición de cadena ascendente para ideales.
4) El anillo $k[x_1, \ldots, x_n]$ con k un campo es un anillo noetheriano pues se cumple la condición de cadena ascendente para ideales.

Los dos teoremas que siguen prueban que cada ideal diferente del generado por la unidad en el anillo, en un anillo noetheriano tiene descomposición primaria.

Definición 1.10.
Un ideal I de R de denomina *irreducible* si

$$I = J \cap N \text{ entonces } I = J \ \text{ o } \ I = N.$$

Teorema 1.3.
En un anillo noetheriano R cada ideal es una intersección finita de ideales irreducibles.

Demostración. Supóngase que no lo fuera; entonces el conjunto de los ideales de R para los cuales el lema es falso sería no vacío, por tanto tendría un elemento maximal I. Puesto que I es reducible, se tendría $I = J \cap N$ donde $I \subset J$ e $I \subset N$. Así J y N serían intersección finita de ideales irreducibles y por tanto también lo sería I, lo que es una contradicción. □

Teorema 1.4.
En un anillo noetheriano cada ideal irreducible es primario.

Demostración. Primero suponga que le ideal 0 es irreducible. Entonces sean $x, y \in R$ tales que $xy = 0$ con $y \neq 0$, y considere la cadena de ideales

$$Ann(x) \subseteq Ann(x^2) \subseteq \cdots$$

Como R es noetheriano se tiene que existe algún entero positivo n para el cual

$$Ann(x^n) = Ann(x^{n+1}) = \cdots$$

Ahora, observe que $(x^n) \cap (y) = 0$; para $a \in (x^n) \cap (y)$, se tiene que $a = ky$ y así $ax = kyx = 0$. Por otro lado $a = bx^n$ implica que $ax = bx^{n+1} = 0$ de lo cual se tiene que $b \in Ann(x^{n+1}) = Ann(x^n)$. Luego $a = bx^n = 0$ y por tanto se garantiza la afirmación hecha.

Como 0 es irreducible y $y \neq 0$ se tiene que $(x^n) = (0)$ y así $x^n = 0$ para algún n, es decir 0 es un ideal primario.

Para el caso general sea I un ideal irreducible de R y considere el anillo cociente R/I. Suponga que $\overline{0}$ de R/I es reducible, entonces existen ideales no cero J_1, J_2 de R/I tales que, $\overline{0} = J_1 \cap J_2$. De ahí que $I = f^{-1}(J_1) \cap f^{-1}(J_2)$ y por tanto I es reducible. Esto muestra que si I es irreducible entonces el ideal cero de R/I es irreducible, luego por la primera parte de la prueba se obtiene que I es primario. □

Corolario 1.2.
En un anillo de polinomios cada ideal tiene una descomposición primaria.

1.2. Teoría de Grafos e Hipergrafos

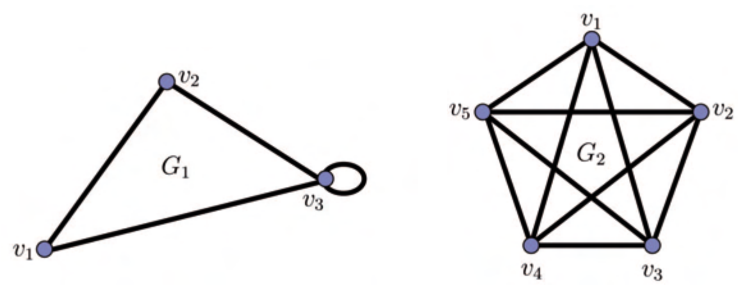
En esta sección se presenta en primer lugar, los conceptos básicos de la teoría de grafos, así como también las definiciones de una variedad de grafos simples. En segundo lugar se encuentran algunos conceptos de la teoría de hipergrafos, los cuales son una generalización de la teoría de grafos. Ambas subsecciones contienen algunas propiedades combinatorias de grafos e hipergrafos.

1.2.1. Teoría de Grafos

Definición 1.11.
Un *grafo simple* G consiste de un conjunto finito V de *vértices* y una colección E de pares no ordenados de puntos distintos de V. Cada par $z = \{v_i, v_j\}$ de E se denomina una *arista* de G.

Si $z = \{v_i, v_j\}$ es una arista de G se dice que v_i y v_j son vértices adyacentes, además es usual decir que la arista z es incidente con el vértice v_i o con el vértice v_j en tal caso lo denotamos por $v \in z$. Note que un grafo simple G no tiene ciclos, es decir, pedimos que $v_i \neq v_j$ para toda arista $\{v_i, v_j\}$ de E. Cuando trabajamos con varios grafos es conveniente escribir $V(G)$ y $E(G)$ para denotar el conjunto de vértices y el conjunto de aristas de G respectivamente.

Ejemplo 1.6.
Considere los grafos

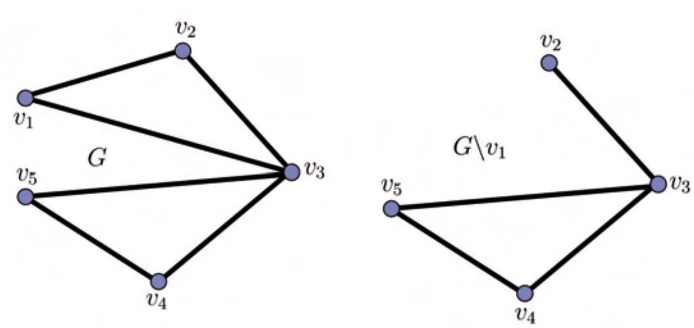


Fuente: de esta investigación
Observe que G_2 es un simple mientras que G_1 no lo es.

Definición 1.12.
Sean H y G dos grafos, se dice que H es un *subgrafo* de G si $V(H) \subset V(G)$ y $E(H) \subset E(G)$.

Definición 1.13.
Sea G un grafo y v un vértice de G, el subgrafo de G obtenido al *remover el vértice* v de G, denotado por $G\backslash v$, es el grafo compuesto por todos los vértices de G distintos de v y de todas las aristas de G tales que no son incidentes con v.

Ejemplo 1.7.
Considere el grafo G. Entonces $G\backslash v_1$ representa el grafo obtenido al remover de G el vértice v_1.



Fuente: de esta investigación

Observe que en general $G\backslash v$ es un subgrafo del grafo G.

Definición 1.14.
El *grado* de un vértice v de V,denotado por $deg(v)$, se define como el número máximo de aristas incidentes con el vértice v es decir:

$$deg(v) = |\{z \in E : v \in z\}|.$$

Un vértice de grado uno se denomina un *vértice libre* y un vértice de grado cero se dice es un *vértice aislado*, si todos los vértices de G son aislados, entonces G se denomina un *grafo discreto.*

Definición 1.15.
Sea G un grafo con conjunto de vértices V y conjunto de aristas E. Un subconjunto C de V es un *cubrimiento minimal por vértices* para G si:

i) Cada vértice de V es adyacente con algún vértice de C.

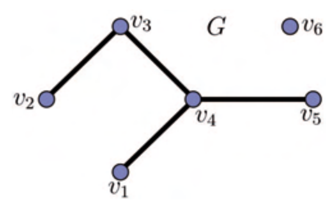
ii) No existe un subconjunto propio de C con la primera propiedad.

Además, si C solamente satisface la primera propiedad, entonces C se llama un *cubrimiento por vértices.*

Definición 1.16.
El *número de cobertura* de G, denotado por $\alpha_0(G)$, es el mínimo cardinal de cualquier cubrimiento por vértices, es decir:

$$\alpha_0(G) = \text{mín}\{|C| \ : \ C \text{ es un cubrimiento por vértices para } G\}$$

Ejemplo 1.8.
Considere el grafo



Fuente: de esta investigación
Entonces de aquí se observa que $deg(v_4) = 3$ y $deg(v_6) = 0$. Es decir, v_4 es el vértice de mayor grado mientras que v_6 es un vértice aislado.

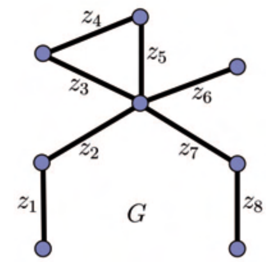
Por otro lado $C_1 = \{v_1, v_3, v_5, v_6\}$ y $C_2 = \{v_2, v_4, v_6\}$ son cubrimientos minimales de G, además $\alpha_0(G) = 3$.

Definición 1.17.
Dos aristas $\{v, v'\}$ y $\{w, w'\}$ de G son *independientes* si $\{v, v'\} \cap \{w, w'\} = \emptyset$.

Definición 1.18.
El *número de independencia* de un grafo G, denotado por $\beta_1(G)$, es el número máximo de aristas independientes del grafo, es decir

$$\beta_1(G) = \, m\acute{a}x\{|A| \ : \ A \text{ es un conjunto de aristas independientes}\}$$

Ejemplo 1.9.
Considere el grafo



Fuente: de esta investigación
De ahí que $A_1 = \{z_1, z_4, z_6, z_8\}$ y $A_2 = \{z_1, z_3, z_8\}$ son conjuntos independientes de aristas, además $\beta_1(G) = 4$.

Es claro, a partir de las definiciones 1.16 y 1.18 que para cualquier grafo simple $\beta_1(G) \leq \alpha_0(G)$.

Definición 1.19.
Un grafo G es *unmixed*, si todos los cubrimientos minimales por vértices para G tienen la misma cardinalidad.

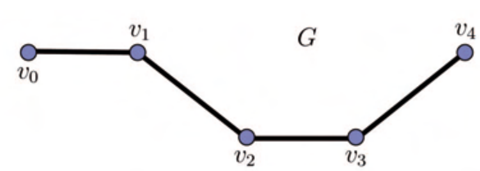
Variedades de Grafos

Definición 1.20.
Sea G un grafo. Un *camino de longitud* n en G es una secuencia alternante de vértices y aristas,

$$w = \{v_0, v_1, \cdots, v_{n-1}, v_n\}$$

donde $\{v_{i-1}, v_i\}$ es una arista de G, para $i = 1, \cdots, n$. Si todos sus vértices son distintos entonces w se denomina *trayectoria* (o *camino especial*).

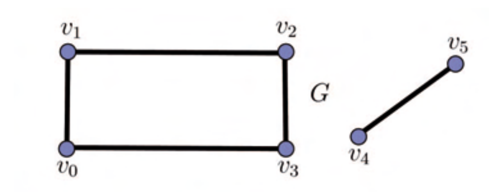
Ejemplo 1.10.
considere el grafo



Fuente: de esta investigación
entonces $W = \{v_0, z_1, v_1, z_2, v_2, z_3, v_3, z_4, v_4\}$ es una trayectoria.

Definición 1.21.
Sea G un grafo. Se dice que G es *conexo* si para cada par de vértices v y v' existe un camino especial $\{v_0, \cdots, v_n\}$ tal que $v = v_0$ y $v' = v_n$.

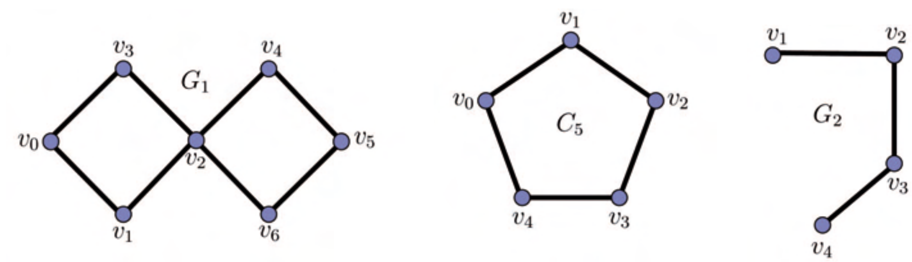
Ejemplo 1.11.
Considere el grafo



Fuente: de esta investigación
el cual no es conexo ya que no existe una trayectoria de v_0 a v_5.

Definición 1.22.
Un *ciclo de longitud* n es un camino $\{v_0, \cdots, v_n\}$ en el cual $n \geq 3$ y los vértices $v_0, \cdots, v_{n-1}$ son todos distintos y $v_n = v_0$, luego un grafo G es *acíclico* si él no tiene ciclos. Un ciclo es *par* (respectivamente *impar*) si su longitud es par (respectivamente impar). Denotaremos por C_n el grafo consistente de un ciclo de longitud n.

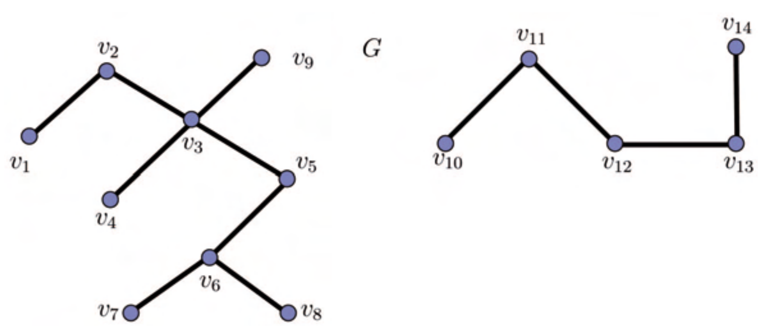
Ejemplo 1.12.
Considere los siguientes grafos



Fuente: de esta investigación
Entonces G_1 es un grafo con dos ciclos pares, pero, G_1 no es un ciclo. Sin embargo, C_5 es un ciclo de longitud 5 (impar) y G_2 es acíclico.

Definición 1.23.
Si G es un grafo conexo y acíclico entonces, G es un *árbol.*
Una *foresta* es un grafo cuyas componentes conexas son árboles es decir, una foresta es un grafo acíclico.

Ejemplo 1.13.
El grafo G es una foresta



Fuente: de esta investigación

Definición 1.24.
Un grafo G es *bipartido*, si el conjunto de vértices V se puede particionar en dos conjuntos V_1 y V_2 tales que:

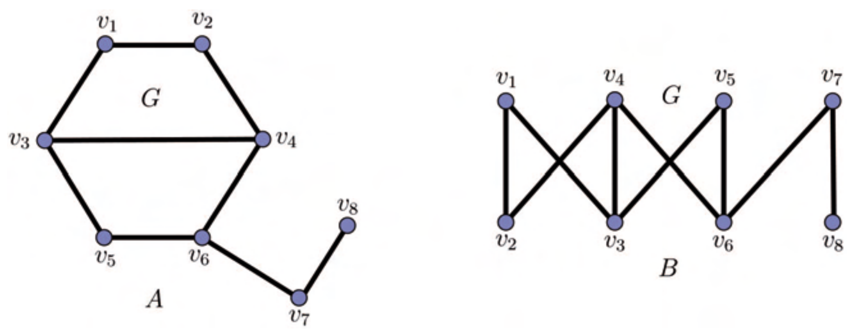
(i) $V_1 \cup V_2 = V$.

(ii) $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

Proposición 1.9.
Un grafo G es bipartido si y solo si todos los ciclos de G son pares.

Demostración. Ver proposición 6.1.1 en [10].

Ejemplo 1.14.
Sea G un grafo simple, el cual tiene todos sus ciclos pares como se puede observar en la figura A. Entonces G es un grafo bipartido con $V_1 = \{v_1, v_4, v_5, v_7\}$ y $V_2 = \{v_2, v_3, v_6, v_8\}$ cuya partición se representación gráficamente en la figura B.



Fuente: de esta investigación

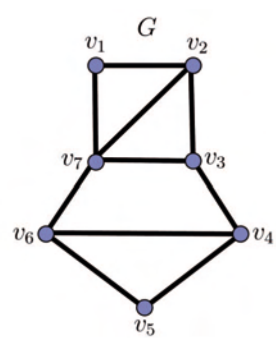
Teorema 1.5 (**König**).
Si G es un grafo bipartido, entonces $\beta_1(G) = \alpha_0(G)$.

Demostración. Ver teorema 6.1.7 en [10].

Si $w = \{v_0, z_1, v_1, \cdots, v_{n-1}, z_n, v_n\}$ es un ciclo de longitud $n > 3$, entonces una arista $z = \{v_i, v_j\}$ con $v_i, v_j \in \{v_0, \cdots, v_n\}$ tal que $z \neq z_i$ para todo $i = 1, \cdots, n$ se llama una *cuerda* del ciclo w.

Definición 1.25.
Un grafo G se llama *cordal* si todo ciclo de longitud $n > 3$ tiene una cuerda.

Ejemplo 1.15.
Considere el grafo



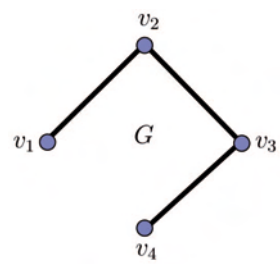
Fuente: de esta investigación
G es un grafo cordal ya que esta conformado por tres ciclos de longitudes 4, 5 y 7, donde cada uno de ellos tiene una cuerda.

Luego, son claras, las siguientes relaciones que se tienen entre algunas nociones definidas anteriormente

$$\text{Grafo Cordal} \Leftarrow \text{Árbol} \Rightarrow \text{Grafo Bipartido}$$

donde las implicaciones son, en general, en el sentido indicado.

Ejemplo 1.16.
Considere el grafo



Fuente: de esta investigación
Observe que G es un árbol, un grafo cordal y bipartido con $V_1 = \{v_1, v_3\}$ y $V_2 = \{v_2, v_4\}$.

1.2.2. Teoría de Hipergrafos

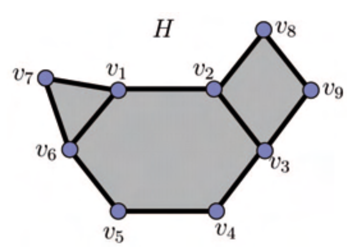
Definición 1.26.
Sea $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto finito de *vértices*. Un *hipergrafo* sobre V es una familia $H = \langle F_1, F_2, \ldots, F_r \rangle$ de subconjuntos de V tal que:

1.) $F_i \neq \phi$ para $i = 1, 2, \ldots, r$.

2.) $V = \cup_{i=1}^{r} F_i$.

cada F_i se denomina un borde de H. Si además, se tiene la condición $F_i \subset F_j$ implica que $i = j$, entonces H se denomina *hipergrafo simple*, en este caso a F_i se le llama una *cara* de H.

Ejemplo 1.17.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación
observe que H es un hipergrafo simple.

Si u y v son vértices de un hipergrafo H, entonces se dice que u y v son vértices adyacentes si existe una cara $F \in H$ tal que $v, u \in F$. Cuando trabajamos con varios hipergrafos es conveniente escribir $V(H)$ para denotar el conjunto de vértices H.

Definición 1.27.
Un *subhipergrafo* de un hipergrafo simple $H = \{F_1, \ldots F_m\}$ es un subconjunto del conjunto H, es decir, $H' = \{F_j : j \in J\}$ donde $J = \{1, \ldots, m\}$

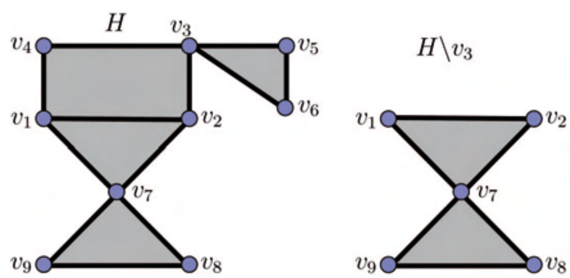
Definición 1.28.
Sea H un hipergrafo simple y v un vértice de H, el subhipergrafo H' de H obtenido al *remover* el vértice v de H, denotado por $H \backslash v$, es el hipergrafo simple compuesto por todos los vértices de V distintos de v y de todas las caras F de H tales que $v \notin F$.

Definición 1.29.
Sea $v \in V$. Se define el *grado* de v, como el cardinal de todas las caras $F \in H$ tales que $v \in F$, esto es

$$deg(v) = |\{F \in H : v \in F\}|$$

donde $deg(v)$ denota el grado de v. Un vértice de grado uno se denomina un *vértice libre* y si todos los vértices de una cara $F \in H$ son de grado uno esta cara se denomina *cara aislada.*

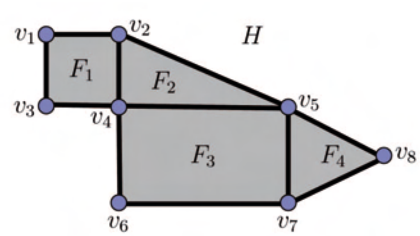
Ejemplo 1.18.
Considere el hipergrafo H. Luego, $H \backslash v_3$ representa el hipergrafo obtenido al remover de H el vértice v_3.



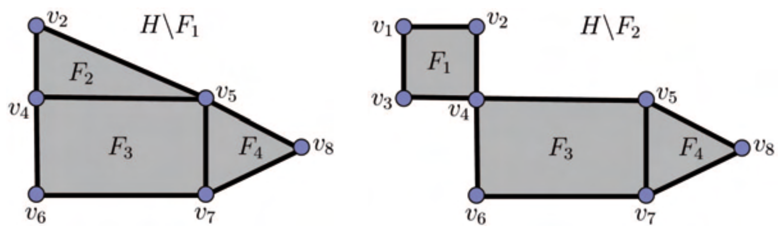
Fuente: de esta investigación
Observe que el grado del vértice v_3 es $deg(v_3) = 2$ y un vértice libre de H es v_4.

Definición 1.30.
Sea H un hipergrafo simple y F una cara de H, el subhipergrafo H' de H obtenido al *remover* la cara F, denotado por $H \backslash F$ es el hipergrafo simple compuesto por todos los vértices de V menos los vértices libres de F y de todas la caras de H distintas de F.

Ejemplo 1.19.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación
Luego, $H\backslash F_1$ y $H\backslash F_2$ son los hipergrafos que se obtienen al remover las caras F_1 y F_2 de H respectivamente.



Fuente: de esta investigación

Observe que en general $H\backslash v$ y $H\backslash F$ son subhipergrafos del hipergrafo H.

Definición 1.31.
Sea H un hipergrafo simple con conjunto de vértices V y conjunto de caras $\{F_1, \ldots, F_r\}$. Un subconjunto C de V es un *cubrimiento minimal* por vértices para H si:

i) $F_i \cap C \neq \varnothing$ para todo i.

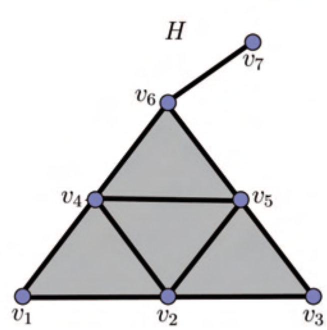
ii) No existe un subconjunto propio de C con la primera propiedad.

Además, si C solamente satisface la primera propiedad, entonces C se llama un *cubrimiento* por vértices.

Definición 1.32.
El *número de cobertura* por vértices de H, denotado por $\alpha(H)$, es el mínimo cardinal de cualquier cubrimiento por vértices, es decir:

$$\alpha(H) = \text{mín}\{|C| \ : \ C \text{ es un cubrimiento por vértices para } H\}$$

Ejemplo 1.20.
Considere el hipergrafo



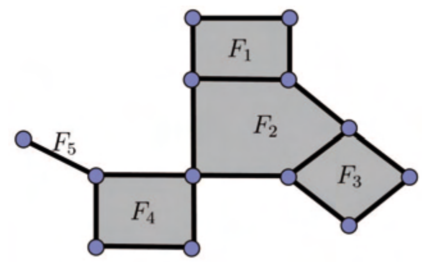
Fuente: de esta investigación
De ahí que $C_1 = \{v_1, v_5, v_6\}$ y $C_2 = \{v_2, v_6\}$ son cubrimientos minimales para H, además $\alpha(H) = 2$.

Definición 1.33.
Un conjunto $\{F_1, F_2, \ldots, F_r\}$ de caras de H se llama un conjunto *independiente* si $F_i \cap F_j = \varnothing$ para $i \neq j$.

Definición 1.34.
El máximo cardinal posible de un conjunto independiente de caras, denotado por $\beta(H)$, se llama *número de independencia* de H esto es:

$$\beta(H) = \text{máx}\{|A| \ : \ A \text{ es un conjunto independiente de caras}\}$$

Ejemplo 1.21.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación
se observa que $A_1 = \{F_1, F_4\}$ y $A_2 = \{F_1, F_3, F_4\}$ son conjuntos independientes de caras, además $\beta(H) = 3$.

Es claro, a partir de las definiciones anteriores que para cualquier hipergrafo simple $\beta(H) \leq \alpha(H)$.

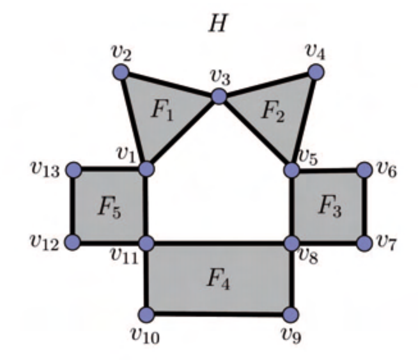
Definición 1.35.
Un hipergrafo H es *unmixed* si todos los cubrimientos minimales por vértices para H tienen la misma cardinalidad.

Variedades de Hipergrafos

Definición 1.36.
Sea H un hipergrafo simple. Una *trayectoria* o k-trayectoria de H es una secuencia alternante de vértices distintos y caras $v_1, F_1, v_2, \ldots, v_k, F_k, v_{k+1}$ tal que $v_i, v_{i+1} \in F_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Definición 1.37.
Se dice que un hipergrafo simple $H = \langle F_1, F_2, \ldots, F_r\rangle$ es *conexo* si para cada par i, j con $1 \leq i < j \leq r$, existe una trayectoria $v_1, F_{t_1}, v_2, \ldots, v_k, F_{t_k}, v_{k+1}$ tal que $F_{t_1} = F_i$ y $F_{t_k} = F_j$.

Ejemplo 1.22.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación
De ahí se observa que el hipergrafo H es conexo, además

$$v_1, F_1, v_3, F_2, v_5, F_3, v_8, F_4, v_{11}, F_5, v_1$$

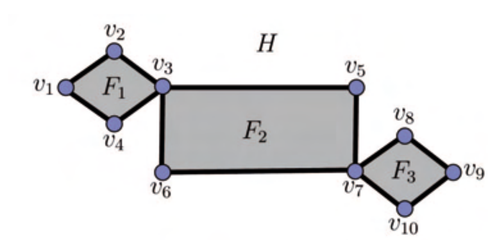
es una trayectoria de H.

Sean F, G y T caras de un hipergrafo simple H, entonces el símbolo $T \leq_F G$ significa que $T \cap F \subseteq G \cap F$. Note que la relación $\leq_F$ definida sobre el hipergrafo simple T es reflexiva y transitiva.

Definición 1.38.
Sea H un hipergrafo simple. Una cara F de H se llama *hoja* si F es la única cara de H, o existe una cara G de $H \backslash F$ tal que $F' \leq_F G$, donde F' es una cara de $H \backslash F$ para toda $F' \in H \backslash F$. El conjunto de todas las caras G, el cual se denota por $U_H(F)$, se llama el *conjunto universal* de F en H. Si $G \in U_H(F)$ y $F \cap G \neq \emptyset$, entonces G se llama una *rama* de F.

Si F es una hoja de H, entonces F tiene un vértice libre de H. El siguiente ejemplo muestra que el recíproco de la expresión anterior no se cumple.

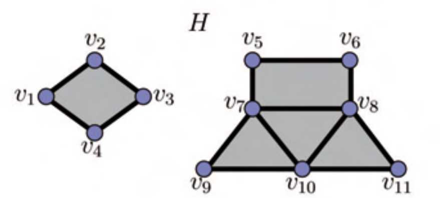
Ejemplo 1.23.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación
Note que F_2 tiene dos vértices libres pero no es una hoja de H. Mientras que F_1 y F_3 si lo son.

Definición 1.39.
Sea H un hipergrafo conexo. Se dice que H es un *árbol*, si todo subhipergrafo no vacío de H tiene una hoja. Un hipergrafo H con la propiedad que cada subhipergrafo conexo de H es un árbol se llama una *foresta*.

Ejemplo 1.24.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación
Entonces H es una foresta, ya que todo subhipergrafo conexo de H es un árbol, por ejemplo el subhipergrafo conexo $H' = \langle v_5v_6v_7v_8, v_7v_9v_{10}, v_8v_{10}v_{11}\rangle$ es un árbol.

El siguiente teorema que se presenta es una extensión del teorema de König para grafos, ver teorema 1.5, el cual presenta S. Faridi en [3]

Teorema 1.6 (**Una generalización del teorema de König**).
Si H es un hipergrafo el cual es un árbol(foresta) y $\alpha(H) = r$, entonces H tiene r caras independientes, y por lo tanto

$$\alpha(H) = \beta(H).$$

Demostración. Ver, Teorema 5.3 en [4].

Definición 1.40.
Un hipergrafo H' es una *suspensión de un hipergrafo* $H = \langle G_1, \ldots, G_s\rangle$ con las caras $F_1, \ldots, F_r$, si

$$H' = \langle F_1, \ldots, F_r\rangle \cup \langle G_1, \ldots, G_s\rangle$$

con las siguientes propiedades:

(*i*) $V(H) \subseteq V(F_1) \cup \cdots \cup V(F_r)$

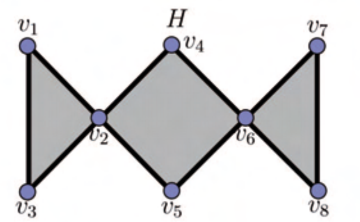
(*ii*) $F_1, \ldots, F_r$ son todas las hojas de H'

(*iii*) $\{G_1, \ldots, G_s\} \cap \{F_1, \ldots, F_r\} = \emptyset$

(*iv*) Para $i \neq j$, $F_i \cap F_j = \emptyset$

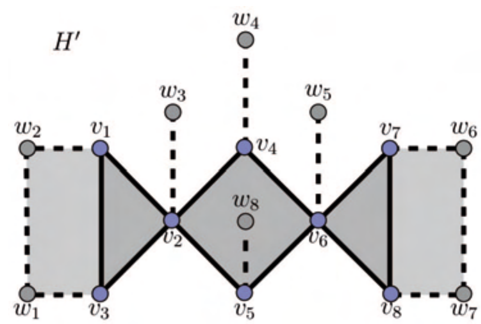
(*v*) Si G_i es una rama de H', entonces $H' \backslash G_i$ es igualmente de suspensión.

Ejemplo 1.25.
Considere el hipergrafo



Fuente: de esta investigación

Luego, una suspensión del hipergrafo H es:



Fuente: de esta investigación

Observe que si H es un hipergrafo el cual consiste de solamente de una cara o de varias caras disjuntas por pares, entonces H es necesariamente de suspensión, el cual puede ser considerado como la suspensión del hipergrafo $H = \emptyset$. Por otro lado es claro, a partir de la definición de suspensión, que la unión de dos o más hipergrafos de suspensión es de suspensión.

Definición 1.41.

Una cara F de un hipergrafo H se llama *hoja reducible*, si para toda cara $G, G' \in H$ se tiene:

$$G \leq_F G' \text{ o } G' \leq_F G.$$

Proposición 1.10.

Un hipergrafo H es de suspensión si y solo si

(1) *Para cada vértice v de H, existe una única hoja F tal que $v \in F$.*

(2) *Todas las hojas de H son reducibles.*

Demostración. Ver lema 6.8 en [7].

Capítulo 2

Algoritmos de Descomposición Primaria

En este capítulo se presentan tres métodos de descomposición primaria de ideales monomiales a partir de sus generadores minimales; el primero de ellos es un método recursivo que se fundamenta en el cálculo de nuevos ideales del cual nuestra referencia es el trabajo de R. Villarreal [10], para el segundo método se hace uso del dual de Alexander para determinar una descomposición irredundante en irreducibles del ideal, y por último se presenta un método gráfico para ideales monomiales en dos y tres variables. Los dos últimos métodos se fundamentan en los trabajos de E. Miller y B. Sturmfels [7] y [8] respectivamente.

2.1. Ideal Generado e Ideal Cociente

En ésta sección se presenta la descomposición primaria irredundante de un ideal monomial arbitrario mediante la representación del ideal como intersección de dos nuevos ideales que se generan a partir de éste.

Sea $R = k[\boldsymbol{x}] = k[x_1, \ldots, x_n]$ un anillo de polinomios sobre un campo k. Para hacer una notación más simple se denota, $\boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. En adelante R denotará el anillo polinomial $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Definición 2.1.
Un ideal I de R se denomina un *ideal monomial* si existe $\mathcal{A} \subset \mathbb{N}^n$ tal que I es generado por $\{\boldsymbol{x}^\alpha | \alpha \in \mathcal{A}\}$. Si I es un ideal monomial, el anillo cociente R/I se denomina anillo monomial.

Note que cada ideal monomial de R es de generación finita debido a que R es noetheriano. Además, dos conjuntos minimales de generadores de un ideal monomial I tienen igual número de monomios.

En efecto, suponga que $I = (\boldsymbol{x}^{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\alpha_r}) = (\boldsymbol{x}^{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\beta_s})$. Entonces para cada $\boldsymbol{x}^{\alpha_i}$ existe $\boldsymbol{x}^{\beta_j}$ tal que $\boldsymbol{x}^{\beta_j} \mid \boldsymbol{x}^{\alpha_i}$ de donde se obtiene que $r \leq s$. De forma similar se prueba que $s \leq r$.

Definición 2.2.
Sean $R = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un anillo polinomial en n variables sobre un campo k y M, N y T monomios en R. Se dice que T es el *mínimo común múltiplo* de M y N que se denota $mcm(M, N) = T$, si y sólo si T cumple las siguientes condiciones:

i.) $M \mid T$ y $N \mid T$

ii.) Si existe un monomio $S \in R$ tal que $M \mid S$ y $N \mid S$ entonces $T \mid S$.

La siguiente proposición es una caracterización para la intersección de ideales monomiales.

Proposición 2.1.
Sean $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ un anillo polinomial sobre un campo k, $I = (M_1, \ldots, M_q)$ y $J = (N_1, \ldots, N_r)$ ideales monomiales. Entonces,

$$I \cap J = (m_{ij} : \text{ con } 1 \leq i \leq q \text{ y } 1 \leq j \leq r)$$

donde, $m_{ij} = mcm(M_i, M_j)$.

Demostración. Sea $M \in I \cap J$ entonces, existen $M_i \in I$ y $N_j \in J$ con $1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq r$ tales que $M_i \mid M$ y $N_j \mid M$, luego por la Definición 2.2 se tiene que $m_{ij} \mid M$, es decir, $M \in (m_{ij} :$ con $1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq r)$.

En el otro sentido, sea $T \in (m_{ij} :$ con $1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq r)$ entonces, $T = Nm_{ij}$ para algún $1 \leq i \leq q$ y algún $1 \leq j \leq r$, dado que $m_{ij} \in I, J$ se llega a que $Nm_{ij} \in I, J$, es decir $T \in I \cap J$. □

Definición 2.3.
Un *ideal de caras* es un ideal primo $\mathfrak{p}$ de R generado por un subconjunto del conjunto de variables, es decir, $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ para algunas variables x_{i_j}.

Proposición 2.2.
Sea I es un ideal monomial en R entonces cada primo asociado de I es un ideal de caras.

Demostración. Suponga que para todo ideal definido en un número de variables inferior a n la afirmación se satisface. Sean $m = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\mathfrak{p}$ un primo asociado de I. Si $rad(I) = m$ entonces por la Proposición 1.5, I es primario y así $\mathfrak{p} = m$. Ahora, suponga que $rad(I) \neq m$ entonces si perdida de generalidad se puede suponer que $x_1 \notin rad(I)$ y considere la cadena ascendente de ideales

$$I_0 = I \text{ y } I_{n+1} = (I_n : x_1), n \geq 0.$$

Dado que R es noetheriano, la cadena anterior es estacionaria, es decir existe $k \in \mathbb{N}$ para el cual $I_n = I_k$ para todo $n \geq k$. En particular para $n = k + 1$ se tiene $(I_k : x_1) = I_k$. Considere los dos siguientes casos:

1.) $\mathfrak{p}$ un primo asociado de (I_n, x_1) para algún n.

2.) $\mathfrak{p}$ no es un primo asociado de (I_n, x_1) para todo n.

Para el primer caso, observe que $(I_n, x_1) = (I'_n, x_1)$ donde I'_n es un ideal en el anillo $R' = k[x_2, \ldots, x_n]$ y $\mathfrak{p} = (\mathfrak{p}', x_1)$ donde, por la Proposición 1.6 $\mathfrak{p}'$ es un primo asociado para I'_n. Lugo por la hipótesis de inducción se tiene que $\mathfrak{p}'$ es un ideal de caras y por lo tanto $\mathfrak{p}$ es un ideal de caras.

En el segundo caso, para cada ideal I_n definimos los homomorfismos

$$x_1 : R/(I_n : x_1) \longrightarrow R/I_n \qquad\qquad i : R/I_n \longrightarrow R/(I_n, x_1)$$

donde el primero de ellos es la multiplicación por x_1 y el segundo es la inclusión. Del modo como se han definido estos homomorfismos se tiene que x_1 es inyectivo, i es sobreyectivo y $Ker(i) = Im(x_1)$.

De lo anterior se tiene que la secuencia

$$0 \longrightarrow R/(I_n : x_1) \xrightarrow{x_1} R/I_n \xrightarrow{i} R/(I_n, x_1) \longrightarrow 0$$

es exacta corta.

Ahora, aplicando el Lema 1.1.16 de [10] se tiene que si $\mathfrak{p} \in Ass(I_n)$ entonces $\mathfrak{p} \in Ass(I_n : x_1) \cup Ass(I_n, x_1)$ para todo n, pero por hipótesis $\mathfrak{p} \notin Ass(I_n, x_1)$ para todo n, así $\mathfrak{p}$ es un primo asociado de $(I_n : x_1)$ para todo n. Ya que x_1 es regular en R/I_k se tiene que I_k es un ideal generado minimalmente por monomios en las variables $x_2, \ldots, x_n$, entonces por inducción $\mathfrak{p}$ es un ideal de caras. □

Definición 2.4.
Un monomio f en R se denomina *libre de cuadrados* si

$$f = x_{i_1} \cdots x_{i_r}$$

para algunos $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq n$.

Corolario 2.1.
Si I es un ideal de R generado por monomios libres de cuadrados y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ son los primos asociados de I, entonces

$$I = \mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_s$$

Demostración. Primero observe que $J = rad(I)$ donde $J = \bigcap_{i=1}^{s} \mathfrak{p}_i$, así J es un ideal monomial por la Proposición 2.1. Como I esta contenido en cada uno de sus primos asociados entonces $I \subset J$.

Sea $f = x_{i_1}^{a_1} \cdots x_{i_r}^{a_r}$ con $a_i > 0$ para todo i, un generador minimal de $J = rad(I)$ para alguna $i_1 < \cdots < i_r$. Ahora, como $f \in rad(I)$ entonces $f^k \in I$ para algún $k \geq 1$, y usando el hecho que I es generado por monomios libres de cuadrados se tiene que $x_{i_1} \cdots x_{i_r} \in I$ y por lo tanto $f \in I$. □

Definición 2.5.
El *soporte de un monomio* $\boldsymbol{x^a} = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$ en R se denota por $Supp(\boldsymbol{x^a})$ y se define como

$$Supp(\boldsymbol{x^a}) = \{x_i : a_i > 0\}$$

El *soporte de un ideal* monomial I en R se denota por $Supp(I)$ y se define como la unión de los soportes de los generadores minimales.

Proposición 2.3.
Sea q un ideal monomial de $R = k[x_1, \dots, x_n]$. Entonces q es un ideal primario si y sólo si, después de la permutación de las variables, q tiene la forma:

$$q = (x_1^{a_1}, \dots, x_r^{a_r}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \dots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_s})$$

donde $a_i \geq 1$ y $\cup_{j=1}^{s} Supp(\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_j}) \subset \{x_1, \dots, x_r\}$.

Demostración. Sea $q = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{e}_1}, \dots, \boldsymbol{x}^{\mathbf{e}_l})$ un ideal primario y suponga que $Supp(q) \subset \{x_1, \dots, x_r\}$. Entonces q tiene solamente un primo asociado el cual por la Proposición 2.2 es $\mathfrak{p} = (x_1, \dots, x_r)$. La igualdad $rad(q) = \mathfrak{p} = (x_1, \dots, x_r)$ implica que $x_i^{a_i} \in q$ para todo $i = 1, \dots, r$ donde $a_i \geq 1$ y así $x_i^{a_i}$ es un generador de q. Por tanto q es generado por un conjunto de la forma

$$\{x_1^{a_1}, \dots, x_r^{a_r}, \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_1} \dots \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_s}\}$$

donde $\cup_{j=1}^{s} Supp(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_j}) \subset \{x_1, \dots, x_r\}$.

En el otro sentido, como $q \subseteq (q : f)$ para cualquier $f \in R$ se obtiene que $rad(q) \subseteq rad(q : f)$ y así

$$(x_1, \dots, x_r) \subseteq rad(q : f).$$

Ahora, suponga que $f \notin q$ y $M \in rad(q : f)$, entonces $M^k f \in q$ lo cual implica que existe $x_i \mid M$ para algún $i = 1, \dots, r$ y por lo tanto $M \in (x_1, \dots, x_r)$. En el caso que $f \in q$ se tiene que $q = (q : f)$ por lo tanto $(x_1, \dots, x_r) = rad(q : f)$. De esto se tiene que $(x_1, \dots, x_r)$ es el único primo asociado de q. Por lo tanto q es primario. □

Corolario 2.2.
Si $\mathfrak{p}$ es un ideal de caras, entonces $\mathfrak{p}^n$ es un ideal primario para todo n.

Demostración. Por la prueba anterior $rad(\mathfrak{p}^n : f) = \mathfrak{p}$ para todo n y cualquier $f \in R$ de ahí que $\mathfrak{p}^n$ tiene un único primo asociado y por tanto $\mathfrak{p}^n$ es primario. □

Aunque se conoce que I tiene una descomposición primaria por ser R noetheriano, la prueba de la siguiente proposición se presenta ya que ésta induce un algoritmo de descomposición primaria.

Proposición 2.4.
Si I es un ideal monomial de $R = k[x_1, \dots, x_n]$, entonces I tiene una descomposición primaria irredundante $I = q_1 \cap \cdots \cap q_r$, donde q_i es un ideal monomial primario para todo i y $rad(q_i) \neq rad(q_j)$ si $i \neq j$.

Demostración. Sea $I = (f_1, \dots, f_q)$ un ideal monomial. Procediendo por inducción sobre el número de variables que están en el $Supp(I)$, se tiene que si $Supp(I) = \{x_i\}$ con $1 \leq i \leq n$ entonces el ideal monomial es primario ya que sera generado por una variable elevada a una potencia. Ahora, suponga que se cumple para todo ideal monomial generado por menos de n variables y se prueba que se cumple para todo ideal generado por n variables. Suponga que existe $x_i \in Supp(I)$, con $1 \leq i \leq n$ tal que $x_i^k \notin I$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, porque en caso contrario, I es un ideal primario y no se requiere probar nada.

Sin perdida de generalidad suponga que $x_n^k \notin I$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$, luego ordenando los f_i se puede encontrar los enteros $0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_q$, con $a_q \geq 1$, donde f_i es divisible por $x_n^{a_i}$ pero no por una potencia mayor de x_n. Note que

$$I = (I, x_n^{a_q}) \cap (I : x_n^{a_q}).$$

Como $I \subseteq (I, x_n^{a_q})$ e $I \subseteq (I : x_n^{a_q})$ se tiene que $I \subseteq (I, x_n^{a_q}) \cap (I : x_n^{a_q})$. En el otro sentido sea $M \in (I, x_n^{a_q}) \cap (I : x_n^{a_q})$ entonces M se puede expresar como $M = x_n^a M'$ donde $x_n \nmid M'$. Si $a < a_q$ entonces $M \in I$ ya que $M \in (I, x_n^{a_q})$. Ahora si $a \geq a_q$ entonces $M' \in (I : x_n^{a_q})$ y así $M'' = M' x_n^{a_q} \in I$ pero como $M'' \mid M$ se obtiene que $M \in I$.

Note que aplicando el argumento anterior para $(I, x_n^{a_q})$ tomando cualquier variable distinta de x_n y usando inducción sobre $(I : x_n^{a_q})$ que es generado por monomios que tienen menos de n variables; de forma recursiva se obtiene una descomposición de I en ideales monomiales primarios $q'_1 \cap \cdots \cap q'_s$ de la cual es posible obtener una descomposición irredundante siguiendo el procedimiento que se expone en la Observación 1.1. □

Para ideales monomiales una descomposición primaria irredundante no es única, lo que es único es el número de términos en tal descomposición y también las componentes primarias que corresponden a primos minimales.

Ejemplo 2.1.
Si $I = (x_1^2, x_1x_2) \subset k[x_1, x_2]$, entonces $I = (x_1) \cap (x_1^2, x_1x_2, x_2^2) = (x_1) \cap (x_1^2, x_2)$ son dos descomposiciones primarias minimales de I.

El cálculo de una descomposición primaria de un ideal monomial puede ser llevada a cabo por sucesiva eliminación de las variables, observe además que es posible tomar la mayor potencia de cualquiera de las variables del ideal para realizar el cálculo de la descomposición, como se describe en la prueba de la Proposición 2.4. En el siguiente ejemplo se ilustra este procedimiento con un ideal específico.

Ejemplo 2.2.
Sean $R = k[x_1, x_2, x_3]$ y $I = (x_2x_3^2, x_1^2x_3, x_1^3x_2^2)$ entonces,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (I : x_1^3) = (x_3, x_2^2) & \\ I \arrow[ur] \arrow[dr] & & (J : x_3^2) = (x_1^2, x_2) \\ & J = (I, x_1^3) = (x_1^3, x_3x_1^2, x_3^2x_2) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & (J, x_3^2) = (x_3^2, x_1^3, x_1^2x_3) \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $I = (x_3, x_2^2) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_3^2, x_1^3, x_1^2x_3)$.

Con base en la prueba de la Proposición 2.4 se desarrolló un algoritmo de descomposición primaria que se implementó en el programa computacional MuPAD Pro. 4.0 con el cual se elaboraron los siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.3.
Para $I = (x_1x_2x_3^2, x_1^2x_3, x_1^3x_2^2)$ se tiene:

$$I = (x_1) \cap (x_3, x_2^2) \cap (x_2, x_1^2) \cap (x_2, x_3, x_1^3) \cap (x_3^2, x_1^2x_3, x_1^3)$$

Ejemplo 2.4.
Para $I = (x_1^5 x_2, x_1^4 x_3^2, x_2^6 x_3^4)$ se tiene:

$$I = (x_3^2, x_2) \cap (x_1^4, x_2^6) \cap (x_1^5, x_3^2, x_2^6) \cap (x_1^5, x_1^4 x_3^2, x_3^4)$$

Corolario 2.3.
Sea I un ideal en R, entonces I tiene una descomposición primaria

$$I = q_1 \cap \cdots \cap q_m$$

tal que q_i es generado por potencias de variables para todo i.

Demostración. Sea q un ideal primario entonces por la Proposición 2.3

$$q = (x_1^{b_1}, \ldots, x_r^{b_r}, f_1, \ldots, f_s)$$

donde $b_j > 0$ para todo j y $\cup_{k=1}^{s} Supp(f_k) \subset \{x_1, \ldots, x_r\}$. Si $f_1 = x_1^{c_1} \cdots x_r^{c_r}$ y $c_1 > 0$ entonces $b_1 > c_1$ y de la prueba de la Proposición 2.4 se tiene que $q = (q : x_1^{c_1}) \cap (q, x_1^{c_1})$ esto es

$$q = (x_1^{b_1}, \ldots, x_r^{b_r}, x_2^{c_2} \cdots x_r^{c_r}, f_2, \ldots, f_s) \cap (x_1^{c_1}, x_2^{b_2}, \ldots, x_r^{b_r}, f_2, \ldots, f_s)$$

Aplicando el anterior argumento de forma sucesiva se tiene que q se puede escribir como intersección de ideales monomiales primarios tales que para cada uno de ellos los únicos generadores minimales que contienen x_1 son potencias de x_1. Por inducción sobre el número de variables, se tiene que q es la intersección de ideales generados por potencias de variables. □

2.2. Generadores Minimales Versus Componentes Irreducibles

En ésta sección se presenta la descomposición minimal de ideales monomiales como intersección de ideales monomiales irreducibles a partir del conjunto minimal de generadores. La herramienta que se utiliza en este proceso es el Dual de Alexander generalizado.

Proposición 2.5.
Sea I un ideal monomial en R, entonces I es irreducible si y solo si, después de la permutación de la variables, I tiene la forma

$$I = (x_1^{a_1}, \ldots, x_r^{a_r})$$

donde $a_i \geq 1$ para todo i.

Demostración. Sea I un ideal irreducible entonces por el Lema 1.4 I es primario y por el Corolario 2.3 se tiene que

$$I = q_1 \cap \cdots \cap q_r$$

donde q_i son generados por potencias de variables para todo i. De la Proposición 2.3 se tiene que los q_i son primarios para todo i, por tanto $I = q_i$ para algún i.

En el otro sentido si I es reducible, entonces por el Corolario 2.3

$$I = q_1 \cap \cdots \cap q_r$$

donde $q_i \neq I$ y q_i son generados por potencias de algunas de las variables $x_1, \ldots, x_r$ para todo i. Sean $x_{j_i}^{c_i}$ con $1 \leq j_i \leq r$ y $c_i < a_{j_i}$ un elemento en q_i que no esta en I y $f = mcm(x_{j_1}^{c_1}, \ldots, x_{j_r}^{c_r})$, note que $f = x_{m_1}^{e_1}, \ldots, x_{m_k}^{e_k}$, donde $e_i < a_{m_i}$ y $m_1, \ldots, m_k$ son distintos, pero es imposible que $f \in I$, por lo tanto I es irreducible. □

Observe que si un ideal es irreducible entonces es primario por lo tanto una descomposición en irreducibles es una descomposición primaria. Esta descomposición se denomina **irredundante** si ningún elemento de la intersección puede ser omitido y los ideales $\mathfrak{m}^{\mathbf{b}_1}, \ldots, \mathfrak{m}^{\mathbf{b}_r}$ se denominan **componentes irreducibles** de I donde $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$.

Sea $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$, entonces se denota por $\mathfrak{m}^{\mathbf{b}} = (x_i^{b_i} : b_i \geq 1)$. Así, $\mathfrak{m}^{(1,0,5)}$ es el ideal (x, z^5) donde $R = k[x, y, z]$. En los ejemplos, se escribe $\mathfrak{m}^{105}$ en lugar de $\mathfrak{m}^{(1,0,5)}$ donde todos los enteros involucrados tienen justamente un dígito.

Definición 2.6.
Dados dos vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ con $\mathbf{b} \preceq \mathbf{a}$ (esto es $b_i \leq a_i$ para $i = 1, \ldots, n$), $\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}$ denota el vector cuya $i-ésima$ componente es:

$$a_i \setminus b_i = \begin{cases} a_i + 1 - b_i, & \text{si } b_i \geq 1, \\ 0, & \text{si } b_i = 0 \end{cases}$$

Si I es un ideal monomial del cual todos sus generadores minimales dividen a $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$, entonces el ***dual de Alexander*** de I con respecto a $\mathbf{a}$ es:

$$I^{[\mathbf{a}]} = \bigcap \{\mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}} : \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}} \text{ es un generador minimal de } I\}$$

Note que la igualdad anterior está bien definida es decir, si

$$I = (\boldsymbol{x}_1^{\alpha_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_r^{\alpha_r}) = (\boldsymbol{x}_1^{\beta_1}, \ldots, \boldsymbol{x}_s^{\beta_s}),$$

entonces $I^{[\mathbf{a}]} = \cap\, \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \alpha_i} = \cap\, \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \beta_j}$.

En efecto, sea $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \cap\, \mathfrak{m}_i^{\mathbf{a} \setminus \alpha}$ y β_j con $1 \leq j \leq s$. Entonces para j existe i tal que $\alpha_i \preceq \beta_j$. Como $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \alpha_i}$, existe k, $1 \leq k \leq n$ tal que $x_k^{a_k - \alpha_{ik} + 1} \mid \boldsymbol{x}^{\mathbf{c}}$, es decir $c_k \geq a_k - \alpha_{ik} + 1$. Luego $c_k \geq a_k - \alpha_{ik} + 1 \geq a_k - \beta_{jk} + 1$ y así $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \beta_j}$. Por tanto, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \cap\, \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \alpha_i}$. De igual forma se prueba la otra contenencia.

El cálculo de los siguientes ejemplos se realizó con ayuda de los de los algoritmos implementados en el programa computacional Mupad Pro 4.0

Ejemplo 2.5.
Sea $\mathbf{a} = (4,4,4)$, entonces

$$I = (x^3, xy, yz^2) \qquad\qquad I^{[\mathbf{a}]} = (x^2) \cap (x^4, y^4) \cap (y^4, z^3)$$
$$\Rightarrow$$
$$I = (x,y) \cap (x, z^2) \cap (x^3, y) \qquad\qquad I^{[\mathbf{a}]} = (x^2y^4, x^4z^3)$$

Ejemplo 2.6.
Sean $I = (x^6y^6z, x^5y^7z, x^3y^3z^5, x^6z^3, x^4z^5, x^6y^4z^2, y^4z^4)$ y $\mathbf{a} = (8,9,7)$ entonces

$$I^{[\mathbf{a}]} = (x^3y^3, x^5y^7, y^4z^6, x^3y^3z^3, x^4z^4, y^6z^5, z^7)$$

Bajo la definición 2.6, se tiene que si $\mathbf{b} \preceq \mathbf{a}$ en $\mathbb{N}^n$, entonces $\mathbf{a} \setminus (\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}) = \mathbf{b}$. En efecto, para $\mathbf{c} = \mathbf{a} \setminus \mathbf{b}$ considere los casos:

a) Si $b_i \geq 1$, entonces $c_i = a_i + 1 - b_i$, pero $b_i \leq a_i$ por hipótesis, luego $c_i = a_i + 1 - b_i > 0$, es decir, $c_i \geq 1$. Así,

$$a_i \setminus c_i = a_i + 1 - c_i = a_i + 1 - (a_i + 1 - b_i) = a_i + 1 - a_i - 1 + b_i = b_i$$

b) Si $b_i = 0$, entonces $c_i = 0$, esto es $a_i \setminus c_i = 0 = b_i$.

Por lo tanto, en cualquier caso se satisface la afirmación.

Lema 2.1.
Sea $I = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} : \mathbf{c} \in C)$ y suponga que todos los generadores minimales del ideal I dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$. Entonces

$$\bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}-\mathbf{c}} = I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$$

Demostración. Sea $\mathbf{c} \in C$ y considere a $c_i \geq 1$. Entonces $a_i \setminus c_i = a_i + 1 - c_i$ y por tanto, $x_i^{a_i \setminus c_i} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$. Luego, $\mathfrak{m}^{\mathbf{a}\setminus\mathbf{c}} \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$ y

$$I^{[\mathbf{a}]} = \bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a}\setminus\mathbf{c}} \subseteq \bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}} \tag{2.1}$$

Por otro lado como $\mathbf{a} + \mathbf{1} - \mathbf{c} \preceq \mathbf{a} + \mathbf{1}$ para todo $\mathbf{c} \in C$ se tiene que $\mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}} \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$, lo cual implica que

$$\mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}} \subseteq \bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}} \tag{2.2}$$

De 2.1 y 2.2 se obtiene que $I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}} \subseteq \bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$.

En el otro sentido, para $M \in \bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$ se tiene que $M \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$ para todo $\mathbf{c} \in C$. De ahí que para cada $\mathbf{c} \in C$ existe i tal que $x_i^{a_i+1-c_i} \mid M$. Según esto considere los casos:

a) Para todo $\mathbf{c} \in C$, $c_i \geq 1$, en tal caso $M \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a}\setminus\mathbf{c}}$ y así $M \in I^{[\mathbf{a}]}$.

b) Existe $\mathbf{c} \in C$ tal que $c_i = 0$, de ahí que $M \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$.

Por lo tanto, $M \in I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$ y $\bigcap_{\mathbf{c}\in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}} \subseteq I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$ $\square$

Proposición 2.6.
Suponga que todos los generadores minimales del ideal I dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$. Si $\boldsymbol{b} \preceq \mathbf{a}$, entonces $\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}}$ no esta en I si y solo si $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}-\boldsymbol{b}}$ esta en $I^{[\mathbf{a}]}$

Demostración.
Suponga que $I = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} : \mathbf{c} \in C)$ y $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}} \notin I$. De ahí que $\mathbf{b} \not\succeq \mathbf{c}$, para todo $\mathbf{c} \in C$, lo cual es equivalente a decir que para cada $\mathbf{c} \in C$ existe i tal que $b_i < c_i$ y así $a_i - b_i > a_i - c_i$. Por lo tanto, para cada $\mathbf{c} \in C$ existe i tal que $a_i - b_i \geq a_i - c_i + 1$, de lo cual se obtiene que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$ para todo $\mathbf{c} \in C$ esto es $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}} \in \cap_{\mathbf{c} \in C} \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1-c}}$ y por el Lema 2.1 tenemos que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}} \in I^{[\mathbf{a}]}$. □

Teorema 2.1.
Si todo generador minimal de I divide a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$, entonces todo generador minimal de $I^{[\mathbf{a}]}$ divide a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$, y $(I^{[\mathbf{a}]})^{[\mathbf{a}]} = I$.

Demostración. Sean $I = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_r})$ y $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}}$ un generador minimal de $I^{[\mathbf{a}]}$. Como $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}}$ por definición puede ser expresado como el mínimo común múltiplo de algunas potencias de variables, se tiene que para cada j, $1 \leq j \leq n$, existe k, $1 \leq k \leq q$ tales que $c_j = a_j - b_{k_j} + 1$ y así $\mathbf{c} \preceq \mathbf{a}$. Por tanto los generadores de $I^{[\mathbf{a}]}$ dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$.

Además, sean $V = [\mathbf{0}, \mathbf{a}]$ el conjunto de vectores en $\mathbb{N}^n$ menores que $\mathbf{a}$, el cual es parcialmente ordenado y V' es el conjunto parcialmente ordenado de todos los vectores en V cuyos monomios asociados están en I. Entonces por la Proposición 2.6 tenemos que a partir $V \smallsetminus V'$ se obtiene un conjunto de vectores parcialmente ordenado cuyos monomios asociados están en $I^{[\mathbf{a}]}$, pero con el orden inverso bajo la operación $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}$. Sea V'' el conjunto parcialmente ordenado de todos los vectores en V cuyos monomios asociados están en $I^{[\mathbf{a}]}$ entonces de $V \smallsetminus V''$ se obtiene un conjunto de vectores parcialmente ordenado cuyos monomios asociados están en I, pero con el orden inverso bajo la operación $\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}$. De ahí que, para $\mathbf{b} \preceq \mathbf{a}$ se tiene que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}} \in I$ si y sólo si $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}} \in (I^{[\mathbf{a}]})^{[\mathbf{a}]}$. □

Proposición 2.7.
Si todos los generadores minimales de I dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$, entonces

$$(\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I) = I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$$

Demostración. Suponga que I es generado minimalmente por q monomios. Sea $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in (\mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}} : I)$. Entonces $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} I \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$ o lo que es equivalente $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$ para todo i, $1 \leq i \leq q$. Luego para cada i, $1 \leq i \leq q$, existe j tal que $x_j^{a_j+1} \mid \boldsymbol{x}^{\mathbf{c}+\mathbf{b}_i}$, de donde se obtiene que $a_j + 1 \leq c_j + b_{ij}$. Considere los siguientes casos:

a) Para todo i, $b_{ij} \geq 1$ entonces $c_j \geq a_j - b_{ij} + 1$ y así $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \smallsetminus \mathbf{b}_i}$ para todo i, es decir, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in I^{[\mathbf{a}]}$.

b) Existe i para el cual $b_{ij} = 0$ entonces $c_j \geq a_j + 1$ y así $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$.

Por lo tanto $(\mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}} : I) \subseteq I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a+1}}$.

En el otro sentido, sea $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}}$ un generador minimal de $I^{[\mathbf{a}]}$. Entonces $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \smallsetminus \mathbf{b}_i}$ para todo i, $1 \leq i \leq q$, es decir que para cada i, $1 \leq i \leq q$, existe j tal que $a_j - b_{ij} + 1 \leq c_j$.

Luego, $a_j + 1 \leq c_j + b_{ij}$ y así $x_j^{a_j+1} \mid \boldsymbol{x}^{\mathbf{c}+\mathbf{b}_i}$. Por lo tanto $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}+\mathbf{b}_i} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$ para todo i, lo cual implica que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in (\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I)$ o equivalentemente $I^{[\mathbf{a}]} \subseteq (\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I)$. Por otro lado, $\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} \subseteq (\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I)$, de donde se tiene $I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} \subseteq (\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I)$. $\square$

Proposición 2.8.
Si todos los generadores minimales de I dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$, entonces $I^{[\mathbf{a}]}$ es el único ideal con generadores que dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$ que satisface

$$(\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I) = I^{[\mathbf{a}]} + \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}.$$

Demostración. Suponga que existe un ideal J cuyos generadores minimales dividen a $\mathbf{x}^{\mathbf{a}}$ y tal que

$$(\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I) = J + \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} \tag{2.3}$$

Sea $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in J$ con $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \notin \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$. Luego por la Proposición 2.7 $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}}\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$ para todo i, $1 \leq i \leq q$. De ahí que para cada i existe j, $1 \leq j \leq n$ tal que $a_j + 1 \leq c_j + b_{ij}$ con $b_{ij} \neq 0$, lo cual implica que $c_j \geq a_j - b_{ij} + 1$ y así $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_i}$ para todo i y se tiene que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in I^{[\mathbf{a}]}$.

Por otro lado, si $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}}$ es un generador minimal de $I^{[\mathbf{a}]}$ entonces, por la Proposición 2.7, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in (\mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}} : I)$ y por la igualdad 2.3, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in J + \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$, pero dado que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \notin \mathfrak{m}^{\mathbf{a}+\mathbf{1}}$ por ser un generador minimal de $I^{[\mathbf{a}]}$, se obtiene que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{c}} \in J$. Por lo tanto $I^{[\mathbf{a}]} = J$. $\square$

Lema 2.2.
Suponga que $\boldsymbol{b} \preceq \mathsf{a}$ y $\boldsymbol{c} \preceq \mathsf{a}$ en $\mathbb{N}^n$. Entonces, $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus \boldsymbol{b}}$ divide a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus \boldsymbol{c}}$ si y solo si $\mathfrak{m}^{\boldsymbol{b}} \subseteq \mathfrak{m}^{\boldsymbol{c}}$.

Demostración. Observe que $\mathfrak{m}^{\mathbf{b}} \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbf{c}}$ si y sólo si $b_i \geq c_i \geq 1$ ó $b_i = c_i = 0$. Pero esto último ocurre si y sólo si $a_i - b_i \leq a_i - c_i$ ó $b_i = c_i = 0$. De ahí que, $a_i \setminus b_i \leq a_i \setminus c_i$ para todo i. Por lo tanto $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}}$ divide a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{c}}$. $\square$

Teorema 2.2.
Asuma que todos los generadores minimales de I dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$, entonces I tiene una descomposición irredundante en irreducibles y esta dada por:

$$I = \cap\{\mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \boldsymbol{b}} : \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}} \textit{es un generador minimal de } I^{[\mathbf{a}]}\}$$

Equivalentemente, el dual de Alexander de I esta dado por los generadores minimales como:

$$I^{[\mathbf{a}]} = (\boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus \boldsymbol{c}} : \mathfrak{m}^{\boldsymbol{c}} \textit{es una componente irreducible de } I\ ).$$

Demostración. Por hipótesis, todos los generadores minimales de I dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$, entonces por el Teorema 2.1 todos los generadores minimales de $I^{[\mathbf{a}]}$ dividen a $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}}$ y $(I^{[\mathbf{a}]})^{[\mathbf{a}]} = I$. Luego por la Definición 2.6, se tiene que

$$I = \cap\{\mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}} : \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}} \text{es un generador minimal de } I^{[\mathbf{a}]}\}.$$

Sean $\mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_1}$ y $\mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_2}$ componentes irreducibles de I y suponga que $\mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_1} \subseteq \mathfrak{m}^{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_2}$ entonces $\boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus (\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_1)} \mid \boldsymbol{x}^{\mathbf{a} \setminus (\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}_2)}$ y dado que $\mathbf{a} \setminus (\mathbf{a} \setminus \mathbf{b}) = \mathbf{b}$ se tiene que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_1} \mid \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_2}$, lo cual contradice que $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_1}$ y $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_2}$ son generadores minimales de $I^{[\mathbf{a}]}$. Así la descomposición es irredundante.

Sea $\cap_{\mathbf{c}\in C}\mathfrak{m}^{\mathbf{c}}$ una descomposición irredundante en irreducibles de I y sea $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^n$ tal que $\mathbf{c} \preceq \mathbf{a}$ para todo $\mathbf{c} \in C$. Como los ideales del conjunto $\{\mathfrak{m}^{\mathbf{c}} : \mathbf{c} \in C\}$ son incomparables por pares por la irredundancia de la descomposición se tiene entonces, por el Lema 2.2 que el conjunto $\{\boldsymbol{x}^{\mathbf{a}\setminus\mathbf{c}} : \mathbf{c} \in C\}$ genera minimalmente un ideal J de ahí que $J^{[\mathbf{a}]} = I$ por la Definición 2.6, de lo cual se tiene que $J = I^{[\mathbf{a}]}$ por el Teorema 2.1. De donde se tiene que $C = \{\mathbf{c} : \boldsymbol{x}^{\mathbf{a}\setminus\mathbf{c}}$ es un generador minimal de $I^{[\mathbf{a}]}\}$, pero si $\mathbf{b} = \mathbf{a} \setminus \mathbf{c}$ entonces $\mathbf{a} \setminus \mathbf{b} = \mathbf{a} \setminus (\mathbf{a} \setminus \mathbf{c}) = \mathbf{c}$ así

$$C = \{\mathbf{a} \setminus \mathbf{b} : \boldsymbol{x}^{\mathbf{b}} \text{ es un generador minimal de } I^{[\mathbf{a}]}\}.$$

Por lo tanto, la descomposición es única, y en particular, es independiente de la elección de $\mathbf{a}$. □

Los cálculos de los ejemplos que se presentan a continuación fueron realizados en con el algoritmo Descomposición Primaria Dual implementado en el programa computacional MuPAD Pro 4.0.

Ejemplo 2.7.
Para $I = (z^5, x^2z^2, x^4y^3, x^3y^5, y^4z^3, y^2z^4, xyz)$ se tiene:

$$I = (x^2, y, z^5) \cap (y, z^2) \cap (y^3, z) \cap (x^4, y^5, z) \cap (x^3, z) \cap (x, z^3) \cap (x, y^4, z^4) \cap (x, y^2, z^5).$$

Ejemplo 2.8.
Para $I = (yz^2, x^2z, x^3y^2)$ se tiene:

$$I = (x^2, y) \cap (x^2, z^2) \cap (x^3, z) \cap (y^2, z).$$

Ejemplo 2.9.
Para $I = (x^2z^4, x^3y, xy^3)$ se tiene:

$$I = (x^2, y^3) \cap (x^3, y^3, z^4) \cap (x) \cap (y, z^4).$$

2.3. Método Gráfico

En esta sección se presenta un método gráfico para determinar una descomposición en irreducibles para ideales monomiales en dos y tres variables, para el caso en dos variables se hace para un ideal monomial arbitrario mediante la construcción del diagrama escalera, mientras que para el caso en tres variables solo se presenta para ideales artinianos para los cuales además del uso del diagrama escalera es necesario recurrir a un grafo asociado del ideal.

2.3.1. Caso en Dos Variables

Todos los ideales que van a considerar en esta subsección son ideales sobre el anillo $R = k[x_1, x_2]$ con k un campo.

Si I es un ideal monomial generado minimalmente por los monomios $M_1, M_2, \ldots, M_r$ entonces, dichos monomios pueden ser reordenados de tal forma que

$$I = (x_1^{a_1}x_2^{b_1}, x_1^{a_2}x_2^{b_2}, \ldots, x_1^{a_r}x_2^{b_r})$$

donde $a_1 > a_2 > \cdots > a_r$ y $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$.

Proposición 2.9.
Sea $I = (x_1^{a_1}x_2^{b_1}, x_1^{a_2}x_2^{b_2}, \ldots, x_1^{a_r}x_2^{b_r})$ *donde* $a_1 > a_2 > \cdots > a_r$ *y* $b_1 < b_2 < \cdots < b_r$. *Entonces, una descomposición en irreducibles de* I *está dada por*

$$I = (x_2^{b_1}) \cap (x_1^{a_1}, x_2^{b_2}) \cap (x_1^{a_2}, x_2^{b_3}) \cap \cdots \cap (x_1^{a_{r-1}}, x_2^{b_r}) \cap (x_1^{a_r})$$

donde la primera o la última componente puede ser removida si $a_r = 0$ *o* $b_1 = 0$.

Demostración. Sea $x_1^{a_i}x_2^{b_i} \in I$ un generador minimal y sea

$$J = (x_2^{b_1}) \cap (x_1^{a_1}, x_2^{b_2}) \cap (x_1^{a_2}, x_2^{b_3}) \cap \cdots \cap (x_1^{a_{r-1}}, x_2^{b_r}) \cap (x_1^{a_r}).$$

Entonces, para $0 < k < r$ se tiene que $a_i \geq a_k$ ó $a_i < a_k$. Del primer caso se obtiene que $x_1^{a_k} \mid x_1^{a_i}x_2^{b_i}$ y del segundo caso $a_i \leq a_{k+1}$ lo cual implica que $b_{k+1} \leq b_i$ y así $x_2^{b_{k+1}} \mid x_1^{a_i}x_2^{b_i}$. Por tanto $x_1^{a_i}x_2^{b_i} \in (x_1^{a_k}, x_2^{b_{k+1}})$. Por otro lado del hecho que $a_r < a_i$ y $b_1 < b_i$ se obtiene que $x_1^{a_r} \mid x_1^{a_i}x_2^{b_i}$ y así $x_2^{b_1} \mid x_1^{a_i}x_2^{b_i}$ con lo cual se obtiene que $I \subseteq J$.

Por otro lado si $x_1^a x_2^b$ es un generador de J, entonces $x_1^a x_2^b$ es el mínimo común múltiplo de generadores de componentes irreducibles de J y así $a = a_j$ y $b = b_k$ para algunos j y k con $1 \leq j, k \leq r$. Ahora, observe que si $j = k$ entonces $x_1^a x_2^b$ es un generador minimal de I, pero si $j < k$ entonces, $x_1^{a_j}x_2^{b_j} \mid x_1^{a_j}x_2^{b_k}$ y el caso $j > k$ no es posible por la forma de las componentes irreducibles. Por lo anterior, $x_1^a x_2^b \in I$ y tenemos que $J \subseteq I$. □

Observe que la descomposición en irreducibles de I dada en la Proposición 2.9, la primera y la última componente son redundantes en la descomposición cuando $b_1 \neq 0$ o $a_r \neq 0$ ya que son generadas por las menores potencias de x_1 y x_2 respectivamente. Así, una descomposición irredundante en irreducibles de I es:

$$I = (x_1^{a_1}, x_2^{b_2}) \cap (x_1^{a_2}, x_2^{b_3}) \cap \cdots \cap (x_1^{a_{r-1}}, x_2^{b_r})$$

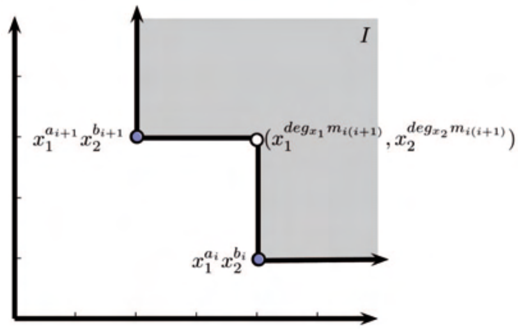
en caso contrario la descomposición ya es irredundante. Además, note que si $m_{i(i+1)} = m.c.m(x_1^{a_i}x_2^{b_i}, x_1^{a_{i+1}}x_2^{b_{i+1}})$ entonces

$$(x_1^{a_i}, x_2^{b_{i+1}}) = (x_1^{deg_{x_1} m_{i(i+1)}}, x_2^{deg_{x_2} m_{i(i+1)}}) \text{ para todo } 1 \leq i \leq r-1 \tag{2.4}$$

Así,

$$I = \bigcap_{i=1}^{r-1} (x_1^{deg_{x_1} m_{i(i+1)}}, x_2^{deg_{x_2} m_{i(i+1)}}).$$

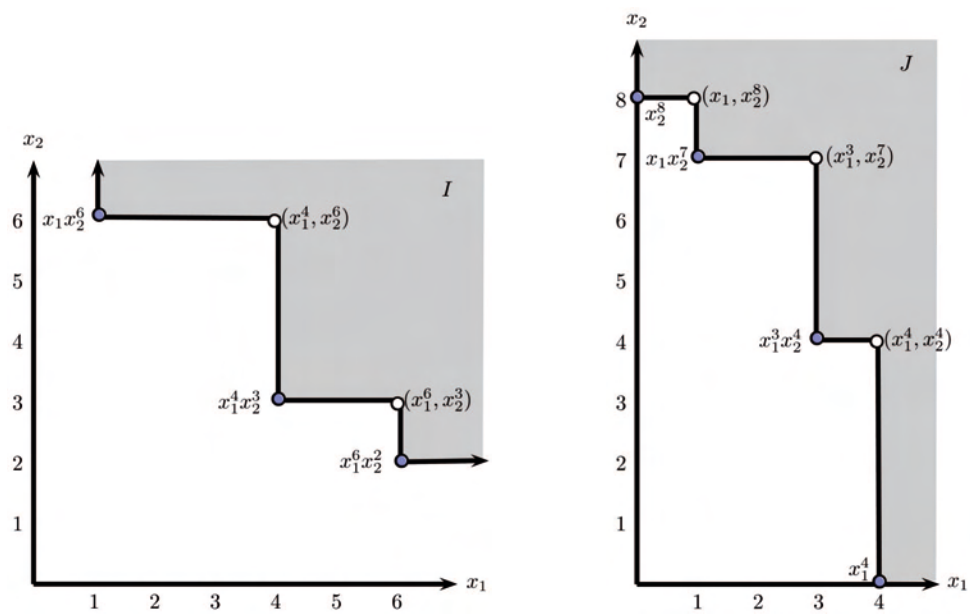
El ***diagrama escalera*** de un ideal monomial en $k[x_1, x_2]$ es el conjunto de puntos $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ para el cual existe un monomio $x_1^a x_2^b \in I$ tal que $a \leq c$ y $b \leq d$. Suponga que cada punto en el plano con coordenadas (a_i, b_i) representa el generador minimal $x_1^{a_i}, x_2^{b_i}$ para todo i. Entonces por la igualdad 2.4 el punto con coordenadas (a_i, b_{i+1}) representa la componente irreducible $(x_1^{deg_{x_1} m_{i(i+1)}}, x_2^{deg_{x_2} m_{i(i+1)}})$.



Fuente: de esta investigación

Note que en el diagrama los puntos oscuros corresponden a los generadores minimales del ideal, los puntos blancos representan las componentes irreducibles de la descomposición del ideal y las flechas indican la dirección en que se extiende el diagrama de forma indefinida.

Ejemplo 2.10.
Para $I = (x_1^6 x_2^2, x_1^4 x_2^3, x_1 x_2^6)$ y $J = (x_1^4, x_1^3 x_2^4, x_1 x_2^7, x_2^8)$ se tiene que $I = (x_1^4, x_2^6) \cap (x_1^6, x_2^3)$ y $J = (x_1, x_2^8) \cap (x_1^3, x_2^7) \cap (x_1^4, x_2^4)$



Fuente: de esta investigación

2.3.2. Caso en Tres Variables

Sea $I = (M_1, M_2, \ldots, M_r)$ un ideal monomial, definimos $m_{ij} = mcm(M_i, M_j)$ con $i < j$ y $1 \leq i, j \leq r$. Sea, G_I el grafo con conjunto de vértices $V = \{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$ y m_{ij} es una arista de G_I si no es un múltiplo de M_k para cualquier $k \in \{1, 2 \ldots, r\} \setminus \{i, j\}$. Ahora, definamos $m_{ijk} = mcm(M_i, M_j, M_k)$ con $i < j < k$ y $1 \leq i, j, k \leq r$ y sea T_I el conjunto de tripletas $\{M_i, M_j, M_k\}$ las cuales forman el triángulo $\{M_i, M_j\}, \{M_i, M_k\}, \{M_j, M_k\} \in G_I$ y que no consiste completamente de las potencias de las variables $x_1^{a_i}$, $x_2^{b_j}$ y $x_3^{c_k}$.

Definición 2.7.
Un ideal monomial en el anillo $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ es artiniano si tiene entre sus generadores minimales elementos de la forma $x_i^{a_i}$ con $a_i > 0$ para todo $1 \leq i \leq n$.

Teorema 2.3.
Sea I un ideal artiniano en el anillo $R = k[x_1, x_2, x_3]$. Entonces la descomposición en irreducibles de I es igual a

$$I = \bigcap_{\{i,j,k\} \in T_I} (x_1^{deg_{x_1} m_{ijk}}, x_2^{deg_{x_2} m_{ijk}}, x_3^{deg_{x_3} m_{ijk}})$$

Demostración. Ver Teorema 8.1 en [3]

El ***diagrama escalera*** de un ideal monomial en $k[x_1, x_2, x_3]$ es el conjunto de vectores $(v_{x_1}, v_{x_2}, v_{x_3}) \in \mathbb{R}^3$ para el cual existe un monomio $x_1^{u_{x_1}} x_2^{u_{x_2}} x_3^{u_{x_3}} \in I$ tal que $u_{x_i} \leq v_{x_i}$ para todo $i \in \{1, 2, 3\}$.

A partir de lo mencionado anteriormente, el procedimiento para determinar una descomposición en irreducibles de un ideal monomial artiniano en tres variables de forma gráfica es:

1) Elaborar el diagrama escalera del ideal.

2) Determinar el grafo G_I asociado.

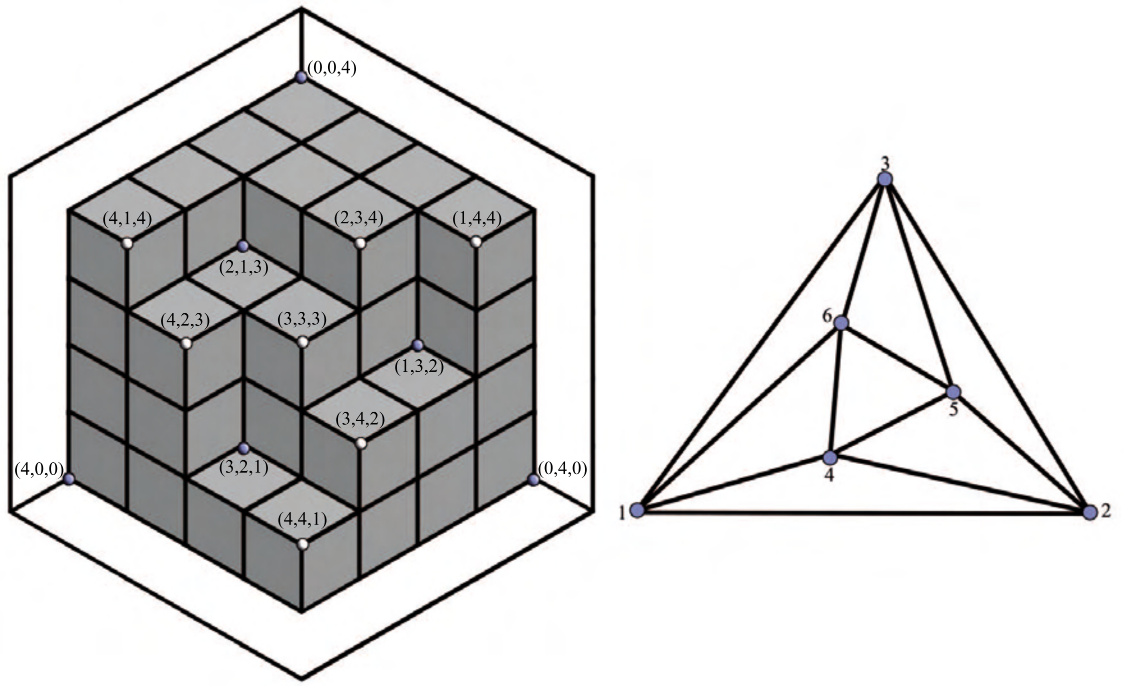
3) Calcular el conjunto T_I.

4) Determinar las componentes irreducibles del ideal.

Los diagramas escalera que se presentan a continuación fueron elaborados con la ayuda del programa computacional Xfig, y el cálculo de las aristas del grafo G_I, el conjunto T_I y las respectivas componentes irreducibles fueron realizados con la ayuda de los algoritmos Aristas del Grafo G_I y Regiones Triángulos del Grafo G_I implementados en el programa computacional MuPAD Pro 4.0.

Ejemplo 2.11.
Para $I = (x_1^4, x_2^4, x_3^4, x_1^3x_2^2x_3, x_1x_2^3x_3^2, x_1^2x_2x_3^3)$ se tiene que

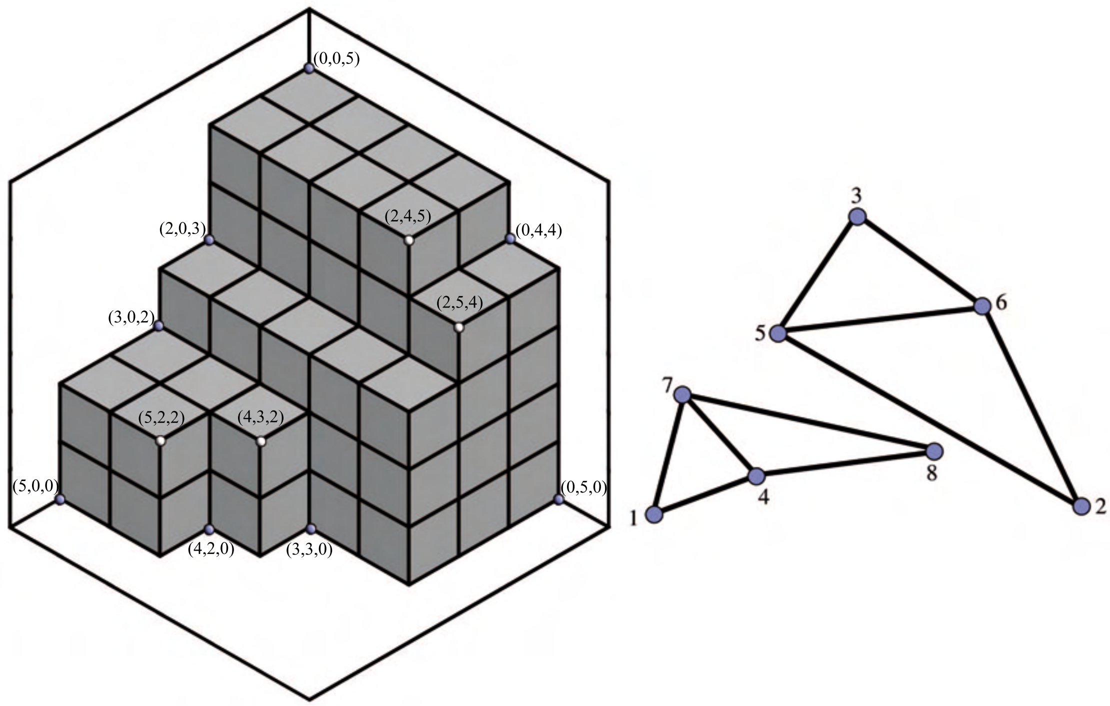
$$I = (x_1^4, x_2^4, x_3) \cap (x_1^4, x_2, x_3^4) \cap (x_1^4, x_2^2, x_3^3) \cap (x_1, x_2^4, x_3^4) \cap (x_1^3, x_2^4, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2^3, x_3^4) \cap (x_1^3, x_2^3, x_3^3)$$



Fuente: de esta investigación

Ejemplo 2.12.
Para $I = (x_1^5, x_2^5, x_3^5, x_1^4x_2^2, x_1^2x_3^3, x_2^4x_3^4, x_1^3x_3^2, x_1^3x_2^3)$ se tiene que

$$I = (x_1^5, x_2^2, x_3^2) \cap (x_1^2, x_2^5, x_3^4) \cap (x_1^2, x_2^4, x_3^5) \cap (x_1^4, x_2^3, x_3^2)$$



Fuente: de esta investigación

Capítulo 3

Polarización y Descomposición Primaria

En este capítulo se presentan algunas conecciones entre las propiedades combinatorias de los grafos e hipergrafos y el álgebra conmutativa mediante los cubrimientos minimales por vértices con el fin de determinar la descomposición prima de un ideal monomial a partir de su polarizado y de la asociación de un hipergrafo a éste ideal monomial libre de cuadrados.

A lo largo de este capítulo R denotara el anillo polinomial $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ con k un campo y los ideales que se consideren sobre este anillo serán monomiales.

3.1. Polarización

En ésta sección se presentan la definición de polarización y algunas de sus propiedades, también algunos de los resultados relacionados con la descomposición primaria de ideales monomiales libres de cuadrados, así como la relación existente entre los cubrimientos minimales del hipergrafo simple asociado a un ideal monomial libre de cuadrados y sus cubrimientos minimales que expone S. Faridi en [4] y [5].

Definición 3.1.
Sea $M = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ es un monomio en R, entonces, se define la *polarización* de M como el monomio libre de cuadrados

$$\mathcal{P}(M) = x_{1,1}x_{1,2}\cdots x_{1,\alpha_1}x_{2,1}\cdots x_{2,\alpha_2}\cdots x_{n,1}\cdots x_{n,\alpha_n}$$

en el anillo polinomial $S = k[x_{i,j} | 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \alpha_i]$.

Si I es un ideal de R generado por los monomios $M_1, M_2, \ldots, M_q$, entonces, la *polarización* de I se define como:

$$\mathcal{P}(I) = (\mathcal{P}(M_1), \mathcal{P}(M_2), \ldots, \mathcal{P}(M_q))$$

el cual es un ideal monomial libre de cuadrados en el anillo de polinomios S.

Note que identificando cada x_i con $x_{i,1}$, se puede considerar a S como una extensión polinomial de R. Las variables de S siempre dependen del ideal a polarizar. Por lo tanto, siempre estamos interesados en las polarizaciones de un número finito de monomios e ideales. En los ejemplos, se escribe x_{ij} en lugar de $x_{i,j}$ donde todos los enteros involucrados tienen justamente un dígito.

Ejemplo 3.1.
Sea $J = (x_1^2, x_1x_2, x_2^3)$ un ideal en $R = k[x_1, x_2]$ entonces,

$$\mathcal{P}(J) = (x_{11}x_{12}, x_{11}x_{21}, x_{21}x_{22}, x_{23})$$

es la polarización de J en el anillo de polinomios $S = k[x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{23}]$

Sean M y N dos monomios en R tales que $Supp(M) \cap Supp(N) = \phi$ entonces de la definición 3.1 puede deducirse que

$$\mathcal{P}(M \cdot N) = \mathcal{P}(M) \cdot \mathcal{P}(N)$$

Sea $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ y $\mathbf{d} \in \mathbb{N}^n$. Entonces $mcm(\mathbf{x^a}, \mathbf{x^b}) = \mathbf{x^c}$ si y solo si

i) $\mathbf{a} \preceq \mathbf{c}$ y $\mathbf{b} \preceq \mathbf{c}$

ii) si $\mathbf{a} \preceq \mathbf{d}$ y $\mathbf{b} \preceq \mathbf{d}$ entonces $\mathbf{c} \preceq \mathbf{d}$

Proposición 3.1.
Sean M y N dos monomios en R, entonces:

$$mcm(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(N)) = \mathcal{P}(mcm(M, N))$$

Demostración. Supóngase que

$$M = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \quad y \quad N = x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$

entonces la polarización de M y N son:

$$\mathcal{P}(M) = x_{1,1} \cdots x_{1,b_1} \cdots x_{n,1} \cdots x_{n,b_n} \qquad \mathcal{P}(N) = x_{1,1} \cdots x_{1,c_1} \cdots x_{n,1} \cdots x_{n,c_n}.$$

Si $d_i = \text{máx}\,(b_i, c_i)$ para todo i, con $1 \leq i \leq n$ se tiene que $mcm(M, N) = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ y

$$mcm(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(N)) = x_{1,1} \cdots x_{1,d_1} \cdots x_{n,1} \cdots x_{n,d_n}$$

Además dado que

$$\mathcal{P}(mcm(M, N)) = x_{1,1} \cdots x_{1,d_1} \cdots x_{n,1} \cdots x_{n,d_n}$$

se llega a, $mcm(\mathcal{P}(M), \mathcal{P}(N)) = \mathcal{P}(mcm(M, N))$ □

Proposición 3.2. *(S.Faridi [5])*
Sean I y J dos ideales monomiales en R. Entonces

1.) $\mathcal{P}(I+J) = \mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(J)$

2.) *Para dos monomios M y N en R, $M \mid N$ si y sólo si $\mathcal{P}(M) \mid \mathcal{P}(N)$.*

3.) $\mathcal{P}(I \cap J) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{P}(J)$

4.) *Si $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ es un primo (minimal) que contiene a I entonces $P(\mathfrak{p})$ es un primo (minimal) que contiene a $\mathcal{P}(I)$*

5.) *Si $\mathfrak{p}' = (x_{i_1,e_1}, \dots, x_{i_r,e_r})$ es un primo que contiene a $\mathcal{P}(I)$, entonces $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ es un primo que contiene a I. Además, si $\mathfrak{p}'$ tiene altura minimal (entre todos los primos que contienen a $\mathcal{P}(I)$), entonces $\mathfrak{p}$ también tiene altura minimal (entre todos los primos que contienen a I)*

6.) *La altura de I es igual a la altura de $\mathcal{P}(I)$*

Demostración.

1.) Sea M' un un generador minimal en $\mathcal{P}(I+J)$. Entonces existe $M \in I+J$ tal que $M' = \mathcal{P}(M)$. Si $M \in I$ se tiene que $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(I)$ y si $M \in J$ entonces $\mathcal{P}(M) \in \mathcal{P}(J)$. Así, $M' \in \mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(J)$.

En el otro sentido, sea M' un generador minimal en $\mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(J)$. Entonces $M' \in \mathcal{P}(I)$ o $M' \in \mathcal{P}(J)$. Si $M' \in \mathcal{P}(I)$ entonces existe $M \in I$ tal que $\mathcal{P}(M) = M'$, y si $M' \in \mathcal{P}(J)$ entonces existe $M \in J$ tal que $\mathcal{P}(M) = M'$. En cualquiera de los dos casos se tiene que existe $M \in I+J$ tal que $\mathcal{P}(M) = M'$. Por lo tanto $M' \in \mathcal{P}(I+J)$.

2.) Supóngase que
$$M = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_n^{b_n} \quad \text{y} \quad N = x_1^{c_1} x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}$$
entonces
$$\mathcal{P}(M) = x_{11} \cdots x_{1b_1} \cdots x_{n1} \cdots x_{nb_n} \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(N) = x_{11} \cdots x_{1c_1} \cdots x_{n1} \cdots x_{nc_n}$$
Luego, $M \mid N$ si y solo si $b_i \leq c_i$ para todo i. Esto último es equivalente a decir que $Supp(\mathcal{P}(M)) \subseteq Supp(\mathcal{P}(N))$ y a su vez equivale a $\mathcal{P}(M) \mid \mathcal{P}(N)$.

3.) Sean $I = (M_1, \dots, M_q)$ y $J = (N_1, \dots, N_s)$ ideales monomiales. Si $U = x_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$ es un monomio en $I \cap J$ entonces $\mathcal{P}(U)$ es un monomio en $\mathcal{P}(I \cap J)$ de ahí que, para algún generador M_i de I y N_j de J se tiene $M_i \mid U$ y $N_j \mid U$ y por la segunda propiedad, $\mathcal{P}(M_i) \mid \mathcal{P}(U)$ y $\mathcal{P}(N_j) \mid \mathcal{P}(U)$, por tanto $\mathcal{P}(U) \in \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{P}(J)$.

Recíprocamente, si U' es un monomio en $\mathcal{P}(I) \cap \mathcal{P}(J)$, entonces para algún generador M_i de I y N_j de J se tiene $\mathcal{P}(M_i) \mid U'$ y $\mathcal{P}(N_j) \mid U'$ de donde
$$mcm(\mathcal{P}(M_i), \mathcal{P}(N_j)) \mid U'$$
Luego, $mcm(\mathcal{P}(M_i), \mathcal{P}(N_j)) = \mathcal{P}(mcm(M_i, N_j))$ divide a U' y dado que $\mathcal{P}(mcm(M_i, N_j)) \in \mathcal{P}(I \cap J)$, se tiene $U' \in \mathcal{P}(I \cap J)$.

4.) Si $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$ es un primo minimal que contiene a $I = (M_1, \ldots, M_q)$, entonces para cada uno de los x_{i_j} existe un M_T tal que $x_{i_j} \mid M_T$ y no otro generador de $\mathfrak{p}$ divide a M_T, dado que, si existe otro generador que divida a M_T entonces $\mathfrak{p}$ no sería minimal ya que para

$$q = (x_{i1}, \ldots, x_{ij-1}, x_{ij+1}, \ldots, x_{ir})$$

se satisface que $I \subseteq q \subseteq \mathfrak{p}$. Lo mismo es valido para la polarización de los dos ideales $\mathcal{P}(\mathfrak{p}) = (x_{i_1,1}, \ldots, x_{i_r,r})$ y $\mathcal{P}(I) = (\mathcal{P}(M_1), \ldots, \mathcal{P}(M_q))$. Así, $\mathcal{P}(\mathfrak{p})$ es un primo minimal que contiene a $\mathcal{P}(I)$.

5.) Suponga que $\mathfrak{p}' = (x_{i_1,e_1}, \ldots, x_{i_r,e_r})$ es un primo que contiene a $\mathcal{P}(I)$, entonces, para todo generador M_T de I, existe x_{i_j,e_j} en $\mathfrak{p}'$ tal que $x_{i_j,e_j} \mid \mathcal{P}(M_T)$, pero esto implica que $x_{i_j} \mid M_T$. Por lo tanto, $I \subseteq \mathfrak{p} = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})$.

Ahora, supóngase que $\mathfrak{p}'$ tiene una altura minimal r y contiene a $\mathcal{P}(I)$ y que existe un ideal primo q que contiene a I con altura $q < r$. Esto implica que $\mathcal{P}(q)$ es un ideal primo con altura menor que r y contiene a $\mathcal{P}(I)$, lo cual es una contradicción.

6.) La prueba se deduce de la demostración del item 5) de esta proposición.

$\square$

Ejemplo 3.2.

1.) Sea $R = k[x, y, z]$ un anillo de polinomios sobre un campo k y sean $I = (x^2, y)$, $J = (y^3, z)$ ideales en R. Ahora,

$$I + J = (x^2, y, z)$$

Luego,

$$\mathcal{P}(I + J) = (x_{11}x_{12}, y_{11}, z_{11})$$

y

$$\mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}, y_{11}) \quad y \quad \mathcal{P}(J) = (y_{11}y_{12}y_{13}, z_{11})$$

De donde

$$\mathcal{P}(I) + \mathcal{P}(J) = (x_{11}x_{12}, y_{11}, z_{11})$$

2.) Sea $R = k[x, y]$ un anillo de polinomios sobre un campo k y sean $M = x^2y^3$ y $N = xy$ tal que $N \mid M$ entonces

$$\mathcal{P}(N) = x_{11}y_{11} \quad y \quad \mathcal{P}(M) = x_{11}x_{12}y_{11}y_{12}y_{13}$$

Así, $\mathcal{P}(N) \mid \mathcal{P}(M)$.

3.) Sea $R = k[x, y, z]$ un anillo de polinomios sobre un campo k y considere los ideales

$$I = (x^2, y^3) \quad y \quad J = (x^2, z^2)$$

entonces

$$\mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}, y_{11}y_{12}y_{13}) \quad y \quad \mathcal{P}(J) = (x_{11}x_{12}, z_{11}z_{12})$$

Luego,

$$I \cap J = (x^2, y^3z^2) \quad \text{y} \quad \mathcal{P}(I \cap J) = (x_{11}x_{12}, y_{11}y_{12}y_{13}z_{11}z_{12}) = \mathcal{P}(I) \cap \mathcal{P}(J)$$

A un hipergrafo H se le asocia un ideal monomial libre de cuadrados I_H, denominado el ideal de caras I_H, definido por:

$$I_H = (x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n} : \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\} \in H).$$

En forma inversa a cada ideal monomial libre de cuadrados se le asocia el hipergrafo simple H_I con conjunto de vértices $V = Supp(I)$ y $F = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}\}$ es una cara de H_I si $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ es un generador minimal de I.

La siguiente proposición muestra la relación que existe entre los ideales monomiales libres de cuadrados y los hipergrafos simples.

Proposición 3.3. *(S.Faridi [4])*
Sea H un hipergrafo simple sobre el conjunto de vértices $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e I_H su ideal asociado en R. Entonces un ideal $\mathfrak{p} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})$ de R es un primo minimal de I_H si y solo si $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$ es un cubrimiento minimal por vértices para H.

Demostración. Sea $I_H = (M_1, \ldots, M_q)$. Los primos minimales de I_H son generados por subconjuntos de $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ por la Proposición 2.2. Por la Definición 1.31 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$ es un cubrimiento por vértices para H si y solo si para cada generador M_j de I con $1 \leq j \leq q$, $x_{i_t} \mid M_j$ para algún $1 \leq t \leq s$. De ahí que, $I_H \subseteq \mathfrak{p} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s})$ si y solo si $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_s}\}$ es un cubrimiento minimal por vértices para H. $\square$

La proposición anterior es una generalización de la Proposición 6.1.16 que presenta R. Villarreal en [10] para el caso particular de ideales asociados a grafos. Además, por el Corolario 2.1 y la Proposición 3.3 se tiene que para un ideal monomial libre de cuadrados una descomposición primaria irredundante esta dada por la intersección de todos los cubrimientos minimales de su hipergrafo asociado.

En adelante, si I es un ideal en el anillo R entonces $\mathcal{P}(I)$ denotara la polarización de I en el anillo $S = k[x_{i,j}]$ como se describe en la Definición 3.1.

Proposición 3.4. *(S.Faridi [5])*
Sean I un ideal en R y $\mathcal{P}(I)$ la polarización de I en el anillo S.

1.) *Si $I = (x_{i_1}^{a_1}, \ldots, x_{i_r}^{a_r})$ donde los a_j son enteros positivos, entonces:*

$$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{\substack{1\leq c_j\leq a_j \\ 1\leq j\leq r}} (x_{i_1,c_1}, \ldots, x_{i_r,c_r})$$

2.) *Si $I = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})^m$ donde $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq n$ y m es un entero positivo, entonces, $\mathcal{P}(I)$ tiene descomposición irredundante en irreducibles dada por*

$$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{\substack{1 \le c_j \le m \\ \sum c_j \le m+r-1}} (x_{i_1,c_1}, \ldots, x_{i_r,c_r})$$

3.) *Supóngase que* $I = q_1 \cap \cdots \cap q_m$ *es la única descomposición irredundante en irreducibles de* I*, tal que para cada* $i = 1, \ldots, m$

$$q_i = (x_1^{a_1^i}, \ldots, x_n^{a_n^i})$$

donde, los a_j *son enteros no negativos, y si* $a_j = 0$ *asumimos que* $x_j^{a_j^i} = 0$*. Entonces* $\mathcal{P}(I)$ *tiene la siguiente descomposición en irreducibles (algunos primos pueden repetirse).*

$$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{1 \le i \le m_i} \bigcap_{\substack{1 \le c_j \le a_j^i \\ 1 \le j \le n}} (x_{1,c_1}, \ldots, x_{n,c_n})$$

donde, si $a_j^i = 0$*, asumimos que* $c_j = x_{j,0} = 0$*.*

Demostración.

1.) Sin perdida de generalidad suponga que el ideal I es generado por los monomios $M_1 = x_1^{a_1}, \ldots, M_r = x_r^{a_r}$, luego, $\mathcal{P}(M_1), \ldots, \mathcal{P}(M_r)$ son monomios libres de cuadrados tales que $\cap_{i=1}^r Supp(\mathcal{P}(M_i)) = \emptyset$. Entonces, a $\mathcal{P}(I)$ se le puede asocia el hipergrafo simple $H_{\mathcal{P}(I)}$, donde todas las caras de $H_{\mathcal{P}(I)}$ son independientes. Los cubrimientos minimales de $H_{\mathcal{P}(I)}$ son conjuntos de la forma $\{x_{1,c_1}, \ldots, x_{r,c_r}\}$ tal que $1 \le c_i \le a_i$ con $1 \le i \le r$. Por lo tanto, la descomposición primaria de $\mathcal{P}(I)$, es la intersección de todos los cubrimientos minimales de $H_{\mathcal{P}(I)}$ por la Proposición 3.3, es decir,

$$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{\substack{1 \le c_i \le a_i \\ 1 \le i \le r}} (x_{1,c_1}, \ldots, x_{r,c_r})$$

2.) Suponga sin perdida de generalidad que $I = (x_1, \ldots, x_r)^m$ con $r \le n$ y m un entero positivo. Así, I se puede expresar como el ideal generado por los monomios de la forma:

$$M = x_1^{b_1} \cdots x_r^{b_r} \text{ tal que } 0 \le b_i \le m \text{ y } \Sigma_{i=1}^r b_i = m$$

De ahí que, $\mathcal{P}(I)$ es el ideal generado por los monomios libres de cuadrados

$$x_{1,1} \cdots x_{1,b_1} \cdots x_{r,1} \cdots x_{r,b_r} \text{ donde } 0 \le b_i \le m \text{ y } \Sigma_{i=1}^r b_i = m$$

Si a $\mathcal{P}(I)$ se le asocia el hipergrafo simple $H_{\mathcal{P}(I)}$, entonces la descomposición en primos minimales de $\mathcal{P}(I)$ viene dada por la intersección de los cubrimientos minimales de $H_{\mathcal{P}(I)}$ según la Proposición 3.3.

Dado que $H_{\mathcal{P}(I)}$ tiene r caras independientes entonces un cubrimiento minimal por vértices debe tener un vértice de cada una de las caras independientes. Suponga que C es un cubrimiento minimal por vértices con cardinal $r+1$ y $x_{1,c_i}, x_{1,c_j} \in C$. Sea C_i el conjunto de todas las caras cubiertas por x_{1,c_i} y C_j el conjunto de todas las caras cubiertas por x_{1,c_j} donde estas caras corresponden a los polarizados de monomios de la forma,

$$N = x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r} \text{ con } 1 \leq c_i \leq n_1$$
$$M = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_r^{m_r} \text{ con } 1 \leq c_j \leq m_1$$

Ahora, si $c_i > c_j$ tenemos $c_j < c_i \leq n_1$, luego, $C_i \subseteq C_j$ y C no sería un cubrimiento minimal. De igual manera se tiene si $c_j > c_i$. Por lo tanto, todo cubrimiento minimal por vértices es de la forma $(x_{1,c_1}, \ldots, x_{r,c_r})$.

Sea $C = \{x_{1,c_1}, x_{2,c_2}, \ldots, x_{r,c_r}\}$ un cubrimiento minimal por vértices y suponga que $\Sigma_{j=1}^r c_j > m + r - 1$, entonces $\Sigma_{j=1}^r (c_j - 1) > m - 1$ con $0 \leq c_j \leq m$. Luego, existe un monomio $M = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$ de I tal que $\Sigma_{j=1}^r a_j = m$ y $a_j \leq c_j - 1$ para todo j así, $a_j < c_j$ para todo j, es decir, C no cubre a $\mathcal{P}(M)$. Por lo tanto, si C es un cubrimiento minimal de $H_{\mathcal{P}(I)}$ entonces $\Sigma_{j=1}^r c_j \leq m + r - 1$.

Sea $M = x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r}$ con $a_1 + \cdots + a_r = m$ y $C = (x_{1,c_1}, x_{2,c_2}, \ldots, x_{r,c_r})$ con $\Sigma_{j=1}^r c_j \leq m + r - 1$. Suponga que para todo j, $c_j > a_j$, entonces, $c_j - 1 \geq a_j$ y así $m - 1 \geq \Sigma_{j=1}^r (c_j - 1) \geq m$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $C = (x_{1,c_1}, x_{2,c_2}, \ldots, x_{r,c_r})$ con $\Sigma_{j=1}^r c_j \leq m + r - 1$ es un cubrimiento minimal por vértices.

3.) Por la parte 1) de la Proposición 3.4 se tiene que

$$\mathcal{P}(q_i) = \bigcap_{\substack{1 \leq c_j \leq a_j^i \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{1,c_1}, \ldots, x_{n,c_n})$$

Luego, por el item 3) de la Proposición 3.2 se tiene que

$$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{1 \leq i \leq m_i} \bigcap_{\substack{1 \leq c_j \leq a_j^i \\ 1 \leq j \leq n}} (x_{1,c_1}, \ldots, x_{n,c_n})$$

con lo cual se finaliza la prueba.

□

3.2. Ideales Monomiales e Hipergrafos

En esta sección se prueba como determinar la descomposición primaria de un ideal monomial por medio de los cubrimientos minimales de su polarizado, y se presentan algunas propiedades adicionales relacionadas con hipergrafos y sus cubrimientos; resultados que son producto del presente trabajo de investigación.

Proposición 3.5.
Sean $I = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_q})$ un ideal en el anillo R, $\mathcal{P}(I)$ el polarizado del ideal I en el anillo S y $H_{\mathcal{P}(I)}$ el hipergrafo simple asociado a $\mathcal{P}(I)$. Si C es un cubrimiento minimal por vértices de $H_{\mathcal{P}(I)}$ entonces no existen $x_{i,j_1}, x_{i,j_2} \in C$ con $j_1 \neq j_2$.

Demostración. Suponga que C es un cubrimiento minimal por vértices para $H_{\mathcal{P}(I)}$ y que existen $x_{i,j_1}, x_{i,j_2} \in C$ con $j_1 \neq j_2$. Supóngase que $j_1 < j_2$ entonces $C \setminus x_{i,j_2}$ es un cubrimiento para $H_{\mathcal{P}(I)}$ lo cual es una contradicción. $\square$

Teorema 3.1.
Sea $I = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_q})$ un ideal en R y $\mathcal{P}(I)$ el polarizado del ideal I en el anillo S tal que

$$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}_k$$

donde $\mathfrak{p}_k$ es un primo minimal de $\mathcal{P}(I)$ y tiene la forma $(x_{1,c_1}, x_{2,c_2}, \ldots, x_{n,c_n})$ y si $c_j = 0$ se asume que $x_{j,c_j} = 0$. Entonces

$$I = \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}'_k$$

donde $\mathfrak{p}'_k$, tiene la forma $(x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_n^{c_n})$ y si $c_j = 0$ se asume que $x_j^{c_j} = 0$.

Demostración. Sea $\mathfrak{p}_k = (x_{1,c_1}, x_{2,c_2}, \ldots, x_{n,c_n})$ un primo minimal de $\mathcal{P}(I)$. Entonces para todo generador $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i}$ de I con $1 \leq i \leq q$, existe x_{j,c_j} con $1 \leq j \leq n$ en $\mathfrak{p}_k$ tal que $x_{j,c_j} \mid \mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})$, lo cual implica que $\mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i}) = x_{j,c_j}M$ donde M es un monomio en S. Dado que $\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i} = x_1^{b_{i_1}} \cdots x_j^{b_{i_j}} \cdots x_n^{b_{i_n}}$ se tiene que $c_j \leq b_{i_j}$ lo cual equivale a decir que $x_j^{c_j} \mid \mathbf{x}^{\mathbf{b}_i}$. Por lo tanto $I \subseteq (x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_n^{c_n}) = \mathfrak{p}'_k$ para todo $1 \leq k \leq m$.

En el otro sentido, sea $N \in \cap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}'_k$ entonces $N = mcm\{x_{i_1}^{c_{i_1}}, \ldots, x_{i_m}^{c_{i_m}}\}$ donde m representa el número de elementos en la intersección y sea $N' = x_{i_1,c_{i_1}} \cdots x_{i_m,c_{i_m}}$. Como $N' \in \mathcal{P}(I)$ existe i con $1 \leq i \leq r$ tal que $\mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})$ divide a N'. Por otro lado observe que N' divide a $\mathcal{P}(N)$, así $\mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})$ divide a $\mathcal{P}(N)$ y por tanto $\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i}$ divide a N, de donde se tiene que $N \in I$. $\square$

Corolario 3.1.
Sea $I = (x_1, x_2, \ldots, x_r)^m$ con $r \leq n$ y m un entero positivo, entonces

$$I = \bigcap_{\substack{1 \leq c_j \leq m \\ \sum c_j \leq m+r-1}} (x_1^{c_1}, \ldots, x_r^{c_r}).$$

Demostración. La prueba se deduce del Teorema 3.1 y el item 2) de la Proposición 3.4. $\square$

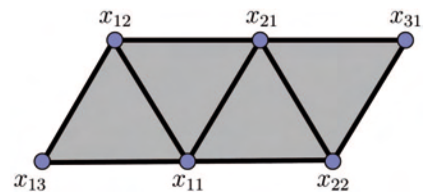
Observación 3.1.
Si $I = (x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_r^{a_r})$ con $r \leq n$. Entonces:

$$I = \bigcap_{\substack{1 \leq c_j \leq a_j \\ 1 \leq j \leq r}} (x_1^{c_1}, \ldots, x_r^{c_r}).$$

Ejemplo 3.3.
Sea $I = (x_1^3, x_1^2 x_2, x_2^2 x_3, x_1 x_2^2)$ entonces

$$\mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}x_{13}, x_{11}x_{12}x_{21}, x_{21}x_{22}x_{31}, x_{11}x_{21}x_{22})$$

donde su hipergrafo asociado es:



Fuente: de esta investigación
Los cubrimientos minimales de $H_{\mathcal{P}(I)}$ son:

$C_1 = \{x_{11}, x_{21}\}$
$C_2 = \{x_{11}, x_{22}\}$
$C_3 = \{x_{11}, x_{31}\}$
$C_4 = \{x_{12}, x_{21}\}$
$C_5 = \{x_{12}, x_{22}\}$
$C_6 = \{x_{13}, x_{21}\}$

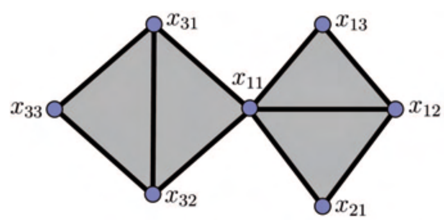
Por tanto,

$$I = (x_1, x_2) \cap (x_1, x_2^2) \cap (x_1, x_3) \cap (x_1^2, x_2) \cap (x_1^2, x_2^2) \cap (x_1^3, x_2)$$

Ejemplo 3.4.
Sea $I = (x_1^3, x_3^3, x_1^2 x_2, x_1 x_3^2)$ entonces

$$\mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}x_{13}, x_{31}x_{32}x_{33}, x_{11}x_{12}x_{21}, x_{11}x_{31}x_{32})$$

donde su hipergrafo asociado es:



Fuente: de esta investigación
Los cubrimientos minimales de $H_{\mathcal{P}(I)}$ son

$C_1 = \{x_{11}, x_{31}\}$
$C_2 = \{x_{11}, x_{32}\}$
$C_3 = \{x_{11}, x_{33}\}$
$C_4 = \{x_{12}, x_{31}\}$
$C_5 = \{x_{12}, x_{32}\}$
$C_6 = \{x_{13}, x_{21}, x_{31}\}$
$C_7 = \{x_{13}, x_{21}, x_{32}\}$

Por tanto,

$$I = (x_1, x_3) \cap (x_1, x_3^2) \cap (x_1, x_3^3) \cap (x_1^2, x_3) \cap (x_1^2, x_3^2) \cap (x_1^3, x_2, x_3) \cap (x_1^3, x_2, x_3^2)$$

A continuación se presentan algunas propiedades adicionales, una de ellas referente a la polarización de un ideal cociente, otra relaciona los ideales primarios con una propiedad combinatoria del hipergrafo asociado a su polarización y las dos ultimas se refieren a cubrimientos.

Dados dos ideales I, J de un anillo R entonces el ideal *cociente* de I por J, denotado $(I : J)$, se define

$$(I : J) = \{x \in R : xJ \subseteq I\}$$

Para $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^n$ se denota por $\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \searrow x_i$ al monomio dado por

$$\mathbf{x}^{\mathbf{b}} \searrow x_i = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \cdots x_{i-1}^{b_{i-1}} x_{i+1}^{b_{i+1}} \cdots x_n^{b_n}$$

Observe que si $I = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_2}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_r})$ y $m \geq \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{ij}\}$ para un i fijo entonces

$$(I : x_i^m) = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1} \searrow x_i, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_2} \searrow x_i, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_r} \searrow x_i)$$

Además,

$$\mathcal{P}(I : x_i^m) = (\mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1} \searrow x_i), \mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_2} \searrow x_i), \ldots, \mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_r} \searrow x_i))$$

Proposición 3.6.
Sea $I = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_2}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_r})$ *y* $m \geq \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{ij}\}$ *para un* i *fijo, con* $1 \leq i \leq n$ *entonces,*

$$\mathcal{P}(I : x_i^m) = (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(x_i^m))$$

Demostración. Sea M un generador minimal de $(I : x_i^m)$ entonces $Mx_i^m \in I$. Luego, $\mathcal{P}(Mx_i^m) \in \mathcal{P}(I)$ con $x_i \notin Supp(M)$ dado que $m \geq \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{ij}\}$, por tanto $\mathcal{P}(Mx_i^m) = \mathcal{P}(M)\mathcal{P}(x_i^m) \in \mathcal{P}(I)$ y así, $\mathcal{P}(M) \in (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(x_i^m))$.

En el otro sentido, sea $M' \in (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(x_i^m))$ entonces $M'\mathcal{P}(x_i^m) \in \mathcal{P}(I)$ luego $\mathcal{P}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_k}) \mid M'\mathcal{P}(x_i^m)$ para algún k con $1 \leq k \leq r$ esto es

$$\mathcal{P}(x_1^{b_{k1}} x_2^{b_{k2}} \cdots x_n^{b_{kn}}) \mid M' x_{i,1} x_{i,2} \cdots x_{i,m}$$

Dado que $m \geq \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{ij}\}$, se tiene que

$$\mathcal{P}(x_1^{b_{k1}} \cdots x_{i-1}^{b_{k_{i-1}}} x_{i+1}^{b_{k_{i+1}}} \cdots x_n^{b_{kn}}) \mid M' x_{i,(b_{k_i}+1)} \cdots x_{i,m}$$

o equivalentemente, $\mathcal{P}(x_1^{b_{k1}} \cdots x_{i-1}^{b_{k_{i-1}}} x_{i+1}^{b_{k_{i+1}}} \cdots x_n^{b_{kn}}) \mid M'$ de ahí que, $M' \in \mathcal{P}(I : x_i^m)$. $\square$

Ejemplo 3.5.
Sea $M = x_2^3$ entonces

$$\begin{array}{rcl} I = (x_1^2, x_2^3, x_1x_3^2, x_1x_2^2) & & \mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}, x_{21}x_{22}x_{23}, x_{11}x_{31}x_{32}, x_{11}x_{21}x_{22}) \\ & \Rightarrow & \\ (I : M) = (x_1) & & \mathcal{P}(I : M) = (x_{11}) = (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(M)) \end{array}$$

Los siguientes ejemplos muestran que la proposición anterior no es cierta si $m < \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{ij}\}$ para un i fijo y además que

$$\mathcal{P}(I : x_i^m x_k^n) \neq (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(x_i^m x_k^n))$$

cuando $m < \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{ij}\}$ y $n \geq \underset{1 \leq j \leq r}{máx}\{b_{kj}\}$ para i, k fijos.

Ejemplo 3.6.
Sea $M = x_1^2$ entonces

$$\begin{array}{ccc} I = (x_3^2, x_1^3, x_1^2 x_3) & & \mathcal{P}(I) = (x_{31}x_{32}, x_{11}x_{12}x_{13}, x_{11}x_{12}x_{31}) \\ & \Rightarrow & \\ (I : M) = (x_1, x_3) & & \mathcal{P}(I : M) = (x_{11}, x_{31}) \neq (x_{13}, x_{31}) = (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(M)) \end{array}$$

Ejemplo 3.7.
Sea $M = x_1 x_3^2$ entonces

$$\begin{array}{ccc} I = (x_1^3, x_1 x_3^2) & & \mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}x_{13}, x_{11}x_{31}x_{32}) \\ & \Rightarrow & \\ (I : M) = (x_1^2) & & \mathcal{P}(I : M) = (x_{11}x_{12}) \neq (x_{12}x_{13}) = (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(M)) \end{array}$$

Sean I un ideal monomial y $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}}$ un generador minimal de I. Entonces se denota por $C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}})$ la cara del hipergrafo $H_{\mathcal{P}(I)}$ asociada a la polarización del monomio $\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}}$.

Proposición 3.7.
Si $I = (\boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_1}, \ldots, \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{b}_r}, x_j^k)$ donde $k > b_{ji}$ para todo i con $1 \leq i \leq r$ entonces $C_{\mathcal{P}}(x_j^k)$ es una hoja reducible de $H_{\mathcal{P}(I)}$.

Demostración. Si $Supp(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i}) \cap \{x_j\} = \phi$ para todo i con $1 \leq i \leq r$, entonces

$$C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k) = \phi$$

para todo i, de ahí que $C_{\mathcal{P}}(x_j^k)$ es una cara aislada de $H_{\mathcal{P}(I)}$ y por lo tanto es una hoja reducible de $H_{\mathcal{P}(I)}$.

Suponga que

$$C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k) \neq \phi \ \text{ y } \ C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_m}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k) \neq \phi$$

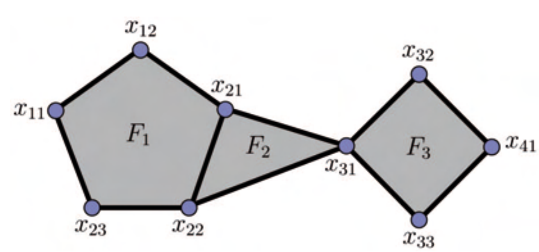
para $1 \leq i, m \leq r$ entonces

$$C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k) = \{x_{j,1}, \ldots, x_{j,b_{ji}}\} \ \text{ y } \ C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_m}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k) = \{x_{j,1}, \ldots, x_{j,b_{jm}}\}$$

Luego, si $b_{ji} \leq b_{jm}$ y se tiene $C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_i}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k) \subseteq C_{\mathcal{P}}(\boldsymbol{x}^{\mathbf{b}_m}) \cap C_{\mathcal{P}}(x_j^k)$. Por lo tanto, $C_{\mathcal{P}}(x_i^k)$ es una hoja reducible de $H_{\mathcal{P}(I)}$. □

El caso contrario de la proposición anterior es falso, es decir, si $H_{\mathcal{P}(I)}$ tiene una hoja reducible F entonces I tiene entre sus generadores minimales un monomio de la forma x_j^k para algún $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo 3.8.
Sea $I = (x_1^2 x_2^3, x_2^2 x_3, x_3^3 x_4)$ entonces $\mathcal{P}(I) = (x_{11}x_{12}x_{21}x_{22}x_{23}, x_{21}x_{22}x_{31}, x_{31}x_{32}x_{33}x_{41})$



Fuente: de esta investigación
Observe que, F_1 y F_3 son hojas reducibles de $H_{\mathcal{P}(I)}$ pero los generadores minimales de I no son de la forma x_j^k.

Corolario 3.2.
Sea I un ideal primario entonces $H_{\mathcal{P}(I)}$ es un hipergrafo de suspensión.

Demostración. Por la Proposición 2.3 se tiene que I es generado minimalmente por un conjunto de la forma $\{\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_r}, x_1^{k_1}, \ldots, x_n^{k_n}\}$ con $k_i \geq 1$ para todo i y $\cup_{i=1}^{r}(Supp(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i}) \subset \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de ahí que $C_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})$ no es una hoja para todo i con $1 \leq i \leq r$. Suponga lo contrario, es decir, que $C_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})$ es una hoja entonces, $C_{\mathcal{P}}(\mathbf{x}^{\mathbf{b}_i})$ tiene un vértice libre, lo cual implica que existe j con $1 \leq j \leq n$ tal que $b_{ij} \geq k_j$ lo cual contradice las hipótesis iniciales.

Además, por la proposición 3.7 se tiene que todas las caras de la forma $C_{\mathcal{P}}(x_j^{k_j})$ con $1 \leq j \leq n$ son hojas reducibles de $H_{\mathcal{P}(I)}$. Por lo tanto, $H_{\mathcal{P}(I)}$ es un hipergrafo de suspensión.
□

Proposición 3.8.
Sean $H = \langle F_1, \ldots, F_r\rangle$ un hipergrafo simple y $V \subsetneq V(H)$ con $V \subsetneq F_i$ para todo i. Entonces $F_i' \subseteq F_j'$ si y solo si $i = j$ con $F_i' = F_i \setminus V$.

Demostración. Suponga que $F_i' \subseteq F_j'$ y sea $x \in F_i$. Luego $x \in F_i'$ o $x \in V$, del primer caso se tiene $x \in F_j' \subseteq F_j$ y del segundo caso $x \in F_j$. Por lo tanto $F_i \subseteq F_j$ lo cual implica $i = j$. □

Proposición 3.9.
Sea $H = \langle F_1, \ldots, F_r\rangle$ un hipergrafo simple y $V \subseteq V(H)$ con $V \neq \phi$ tal que $V \subsetneq F_i$ para todo i. Sean $H' = H/V = \{F_i \setminus V : i = 1, \ldots, r\}$ y C un cubrimiento por vértices de H', entonces C es un cubrimiento por vértices para H.

Demostración. Note que cada $F_i' \in H'$ es una cara maximal de H' por la Proposición 3.8. Luego, si C es un cubrimiento por vértices para H' entonces $C \cap F_i' \neq \phi$ para todo i, de ahí que $C \cap F_i \neq \phi$ para todo i y por tanto C es un cubrimiento por vértices para H. □

Apéndice A

Algoritmos

En este apéndice se presenta una breve descripción de los algoritmos utilizados en el presente trabajo de investigación entre los mas importantes se encuentran los algoritmos de descomposición primaria que son: Descomposición Primaria Suma, Descomposición Primaria Villarreal, DescomposiciónPrimaria Dual y Descomposición Primaria Gráfica en Tres Variables; los algoritmos de polarización y la intersección de ideales monomiales los cuales fueron implementados en MuPAD Pro.4.0 con el fin de plantear conjeturas que posteriormente se probaron, como lo son el Teorema 3.1 y la Proposición 3.6 principalmente.

En adelante cuando se diga que la entrada del algoritmo es un ideal debe entenderse que es un ideal monomial en las variables $x_1, \ldots, x_n$ y el algoritmo recibe una lista de listas que representa a dicho ideal, donde cada sublista representa a un generador minimal del ideal, las posiciones en las sublistas representan los subíndices de cada variable y el valor en cada posición corresponde al exponente de la variable en cada monomio, por ejemplo, para el ideal $I = (x_1^2x_2, x_3^4, x_4^3x_5^2)$ la entrada correspondiente es la lista $I := [[2,1,0,0,0],[0,0,4,0,0],[0,0,0,3,2]]$ de ahí que cuando se diga que la entrada es un monomio $M = x_1^2x_3^4$ la entrada correspondiente es la lista $M := [2,0,4]$.

A.1. Algoritmos de Descomposición Primaria

Descomposición Primaria Suma

Este algoritmo, es el que se expone en la introducción de este trabajo. El algoritmo recibe un ideal y la salida correspondiente es la descomposición primaria del ideal. Por otra parte en este algoritmo se utilizan cuatro algoritmos auxiliares que se denominan: Ideal Primario, Primos Relativos, Minimal de Generadores y Listas a Ideales.

Descomposición Primaria Villarreal

Algoritmo Auxiliar
Este algoritmo, se basa en la primera parte de la prueba de la Proposición 2.4. El algoritmo recibe un ideal; este algoritmo primero verifica si el ideal es primario o no

si no lo es entonces, encuentra el conjunto de variables con las cuales es posible realizar el calculo del ideal cociente y en ideal generado de tal manera que la intersección de estos sea el ideal inicial, luego selecciona el primer elemento de este conjunto con la mayor potencia que aparece entre los generadores minimales de ideal y finalmente la salida de este algoritmo es el calculo del ideal cociente y el ideal generado con respecto al elemento seleccionado. Por otra parte en este algoritmo se utilizan seis algoritmos auxiliares que se denominan: Ideal Primario, Ideal Generado, Ideal Cociente, Soporte de un Ideal, Minimal de Generadores y Listas a Ideales.

Algoritmo de Descomposición Primaria
Este algoritmo, se basa en la prueba de la Proposición 2.4 y hace los cálculos con respecto a la primera variable del conjunto de variables con las cuales es posible realizar el algoritmo en cada paso, conjunto que es calculado por el algoritmo auxiliar DPVR el cual es parte fundamental para este. Este algoritmo recibe un ideal y la salida es la descomposición primaria irredundante del ideal. Por otra parte en este algoritmo se utilizan dos
algoritmos secundarios que se denominan: Ideal Primario y Listas a Ideales.

Descomposición Primaria Dual

Este algoritmo, se basa en el Teorema 2.1. El algoritmo recibe un ideal y la salida es la descomposición irredundante en irreducibles del ideal. Por otra parte en este algoritmo se utilizan tres algoritmos auxiliares que se denominan: Dual de Alexander 1, Intersección de Ideales y Listas a Ideales.

Descomposición Primaria Gráfica en Tres Variables

Aristas Del Grafo G_I
Este algoritmo, se basa en las condiciones que deben cumplir dos vértices para formar una arista del grafo G_I que se encuentran expuestas en el segundo capítulo en la sección Método Gráfico para el caso en tres variables. El algoritmo recibe un ideal y la salida son dos listas; la primera muestra las aristas y la segunda lista muestra el mínimo común múltiplo de cada arista respectivamente. Por otra parte en este algoritmo se utilizan dos algoritmos auxiliares que se denominan: Mínimo Común Múltiplo Lista y ¿M Menor Que N? .

Regiones Triangulares del Grafo G_I
Este algoritmo, se basa en las condiciones que deben cumplir tres aristas para formar una región triangular del grafo G_I que se encuentran expuestas en el segundo capítulo en la sección Método Gráfico para el caso en tres variables y también en el Teorema 2.3. El algoritmo recibe un ideal y la salida son tres listas, la primera muestra las regiones triangulares, la segunda lista muestra el mínimo común múltiplo de cada región triangular respectivamente y la tercera lista muestra la descomposición irredundante en irreducible del ideal. Por otra parte en este algoritmo se utilizan tres algoritmos auxiliares que se denominan: ¿M Menor Que N?, Mínimo Común Múltiplo Lista y Lista a Irreducibles.

A.2. Algoritmos Dual de Alexander

Dual de Alexander1

Este algoritmo, se basa en la Definición 2.6. El algoritmo recibe un ideal, calcula el menor **a** con respecto al cual es posible calcular el Dual de Alexander de un ideal y la salida de este algoritmo es la descomposición primaria del Dual de Alexander con respecto al **a** mínimo. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Listas a Ideales.

Dual de Alexander2

Este algoritmo, se basa en la Definición 2.6. El algoritmo recibe un ideal, calcula el menor **a** con respecto al cual es posible calcular el Dual de Alexander de un ideal y la salida de este algoritmo es el ideal Dual de Alexander con respecto al **a** mínimo. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Intersección de Ideales.

Dual de Alexander3

Este algoritmo, se basa en la Definición 2.6. El algoritmo recibe un ideal y una lista que representa el vector a con respecto al cual se quiere calcular el Dual de Alexander; este algoritmo primero verifica si el **a** cumple con la condición necesaria para que sea posible calcular el Dual de Alexander de un ideal, si es posible la salida de este algoritmo es la descomposición primaria del Dual de Alexander con respecto al **a** inicial, en caso contrario la salida sera "A no cumple la condición". Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Listas a Ideales.

Dual de Alexander4

Este algoritmo, se basa en la Definición 2.6. El algoritmo recibe un ideal y una lista que representa el vector a con respecto al cual se quiere calcular el Dual de Alexander; este algoritmo primero verifica si el **a** cumple con la condición necesaria para que sea posible calcular el Dual de Alexander de un ideal, si es posible la salida de este algoritmo es el ideal Dual de Alexander con respecto al **a** inicial, en caso contrario la salida sera "A no cumple la condición". Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Intersección de Ideales.

A.3. Algoritmos de Algebra Conmutativa

Ideal Cociente

Este algoritmo, se basa en la definición del cociente de ideales y calcula el cociente de un ideal monomial con respecto a una variable en el soporte del ideal elevada a cualquier potencia. El algoritmo recibe un ideal y dos valores numéricos de los cuales el primero representa el subíndice de la variable y el segundo el exponente al cual se eleva dicha variable, por ejemplo si la entrada es: $(I, 3, 4)$ el algoritmo calcula el ideal cociente $(I : x_3^4)$; la salida de este algoritmo es el ideal cociente. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Ideal.

Ideal Irreducible

Este algoritmo, se basa en la Proposición 2.5 la cual presenta una caracterización de un ideal irreducible para ideales monomiales. El algoritmo recibe un ideal y la salida es "irreducible"si el ideal es irreducible o "no irreducible" en caso contrario.

Ideal Primario

Este algoritmo, se basa en la Proposición 2.3 la cual presenta una caracterización de un ideal primario para ideales monomiales. El algoritmo recibe un ideal y la salida es "primario"si el ideal es primario o "NO primario" en caso contrario. Por otra parte en este algoritmo se utilizan dos algoritmos auxiliares que se denominan: Soporte de un Monomio y Soporte de un Ideal.

Soporte de un Monomio

Este algoritmo, se basa en la definición de soporte de un monomio. El algoritmo recibe una monomio y la salida es el soporte del monomio.

Soporte de un Ideal

Este algoritmo, se basa en la definición de soporte de un ideal monomial. El algoritmo recibe un ideal y la salida es el soporte del ideal. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Soporte de un Monomio.

Ideal Generado

Dado un ideal monomial I si x_j es una variable en el soporte de I entonces este algoritmo calcula el conjunto minimal de generadores del ideal monomial (I, x_j^e). El algoritmo recibe un ideal y dos valores numéricos de los cuales el primero representa el subíndice de la variable y el segundo el exponente al cual se eleva dicha variable, por ejemplo si la entrada es: $(I, 3, 4)$ el algoritmo calcula el conjunto minimal de generadores del ideal (I, x_3^4); la salida de este algoritmo son los monomios que generan minimalmente a (I, x_j^e). Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Ideal.

Conjunto Minimal de Generadores

Este algoritmo determina el conjunto minimal de generadores de un ideal monomial arbitrario. El algoritmo recibe un ideal y la salida es el conjunto que genera minimalmente al ideal monomial. Por otra parte en este algoritmo se utilizan dos algoritmos auxiliares que se denominan: Son Comparables y Menor.

A.4. Divisibilidad e Intersección

Mínimo Común Múltiplo de Dos Monomios

Este algoritmo, se basa en la Definición 2.2. El algoritmo recibe dos monomios y la salida es el mínimo común múltiplo de dos monomios. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Monomio.

Mínimo Común Múltiplo de Monomios

Este algoritmo, se basa en la Definición 2.2. La entrada de este algoritmo es una lista de monomios y la salida es el mínimo común múltiplo de un conjunto de monomios. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Monomio.

Monomios Primos Relativos

Este algoritmo recibe un ideal y entre los generadores minimales del ideal busca el primero que sea producto de dos o mas variables y lo descompone en dos monomios que son primos relativos, los cuales son la salida del algoritmo. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Ideal.

Intersección de Dos Ideales

Este algoritmo, se basa en la Proposición 2.1 la cual nos presenta una caracterización de la intersección de ideales monomiales. El algoritmo recibe dos ideales y la salida es la intersección de los ideales. Por otra parte en este algoritmo se utilizan tres algoritmos auxiliares que se denominan: Mínimo Común Múltiplo, Minimal de Generadores y Lista a Ideal.

Intersección de Ideales

Este algoritmo, se basa en la Proposición 2.1 la cual nos presenta una caracterización de la intersección de ideales monomiales. El algoritmo recibe una lista de ideales y la salida es el ideal que resulta de la intersección. Por otra parte en este algoritmo se utilizan dos algoritmos auxiliares que se denominan: Intersección de dos Ideales y Lista a Ideal.

A.5. Algoritmos de Comparación y Orden

Son Comparables

Este algoritmo recibe dos monomios, analiza los dos monomios y determina si son o no comparables; la salida de este algoritmo es "Si" si los dos monomios son comparables y "No" en caso contrario.

¿M Menor Que N?

Este algoritmo recibe dos monomios, compara los monomios y determina si el primer monomio es menor que el segundo; la salida de este algoritmo es "Si" si lo anterior se cumple y "No" en caso contrario.

Menor de dos Comparables

Este algoritmo recibe dos monomios comparables, los compara y determina cual es menor; la salida de este algoritmo es el menor monomio de los dos.

Ordena dos Monomios

Este algoritmo recibe dos monomios comparables, compara los monomios y si el posible ordenarlos determina cual es menor y los ordena de menor a mayor; la salida de este algoritmo son los dos monomios ordenados o "No Ordenables".

A.6. Algoritmos de Polarización

Polarización de un Monomio

Este algoritmo, se basa en la Definición 3.1 de polarización de un monomio. El algoritmo recibe un monomio y la salida es la polarización del monomio. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Monomio Polarizado.

Polarización de un Ideal

Este algoritmo, se basa en la Definición 3.1 de polarización de un ideal monomial. El algoritmo recibe un ideal la salida de este algoritmo es la polarización del ideal. Por otra parte en este algoritmo se utilizan dos algoritmos auxiliares que se denominan: Polarización Monomio y Lista a Ideal Polarizado.

Despolarización

Este algoritmo despolariza un ideal monomial polarizado. El algoritmo recibe una lista de listas donde cada sublista representa un monomio polarizado por lo cual contiene listas, las posiciones de las sublistas de estas listas representan el primer índice de las variables y contienen el segundo valor de cada subíndice, por ejemplo, para el ideal $\mathcal{P}(I) = (x_{1,1}x_{1,2}x_{2,1}, x_{3,1})$ la entrada correspondiente es la lista $\mathcal{P}(I) := [[[1,2],[1],[]],[[],[][1]]]$; y la salida de este algoritmo es el ideal despolarizado. Por otra parte en este algoritmo se utiliza un algoritmo auxiliar que se denomina: Lista a Ideal.

A.7. Algoritmos de Presentación

Lista a Monomio

Este algoritmo recibe una lista y la transforma en un monomio en las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Lista a Ideal

Este algoritmo recibe una lista de listas y la transforma en un ideal monomial en las variables $x_1, \ldots, x_n$.

Listas a Ideales

Este algoritmo recibe una lista de listas donde cada sublista contiene como elementos listas y cada sublista la trasforma en un ideal monomial en las variables $x_1, \ldots, x_n$ y la salida son todos los ideales contenidos en la lista.

Lista a Irreducibles

Este algoritmo recibe una lista de listas y cada sublista la transforma en un ideal irreducible y la salida son todos los ideales irreducibles.

Lista a Monomio Polarizado

Este algoritmo recibe una lista de listas y la transforma en un monomio polarizado.

Listas a Ideal Polarizado

Este algoritmo recibe una lista de listas donde cada sublista contiene como elementos listas y cada sublista la trasforma en un monomio polarizado y la salida es un ideal monomial polarizado.

Conclusiones

1. Se presentan los conceptos más relevantes del álgebra conmutativa, de la teoría de grafos y de Hipergrafos, para facilitar al lector la comprensión de los resultados incluidos en el trabajo.

2. Se incluyen algunos de los resultados más importantes que relacionan las propiedades combinatorias de los grafos e hipergrafos y la descomposición primaria de un ideal monomial libre de cuadrados, como también la definición de polarización y sus propiedades básicas que se deben principalmente a Sara Faridi.

3. Se demuestran nuevas propiedades de la polarización, de ideales monomiales y nuevos resultados relacionados con la descomposición primaria de ideales monomiales a partir de su polarizado, principalmente:

   a) El Teorema 3.1: Sea $I = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_q})$ un ideal en R y $\mathcal{P}(I)$ el polarizado del ideal I en el anillo S tal que

   $$\mathcal{P}(I) = \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}_k$$

   donde $\mathfrak{p}_k$ es un primo minimal de $\mathcal{P}(I)$ y tiene la forma $(x_{1,c_1}, x_{2,c_2}, \ldots, x_{n,c_n})$ y si $c_j = 0$ se asume que $x_{j,c_j} = 0$. Entonces

   $$I = \bigcap_{k=1}^{m} \mathfrak{p}'_k$$

   donde $\mathfrak{p}'_k$ tiene la forma $(x_1^{c_1}, x_2^{c_2}, \ldots, x_n^{c_n})$ y si $c_j = 0$ se asume que $x_j^{c_j} = 0$.

   b) La Proposición 3.6: Sea $I = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_2}, \cdots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_r})$ y $m = \underset{1 \leq j \leq r}{\textit{máx}} \{b_{ij}\}$ para un i fijo, con $1 \leq i \leq n$ entonces,

   $$\mathcal{P}(I : x_i^m) = (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(x_i^m))$$

   y las proposiciones 3.1, 3.5, 3.7, 3.8 y 3.9 y de igual forma los corolarios 3.1 y 3.2.

4. Se presentan diferentes algoritmos de descomposición primaria, de polarización y la intersección de ideales monomiales que fueron implementados en Mupad Pro. 4.0, los cuales nos condujeron a la conjetura del teorema, las proposiciones y los corolarios mencionados anteriormente.

5. A partir de los resultados obtenidos consideramos se sientan las bases para continuar las investigaciones sobre las propiedades algebraicas de los hipergrafos, particularmente la comprobación o no de los siguientes problemas abiertos:

    a) ¿Que otra forma puede tener el ideal para que el hipergrafo asociado a su polarización tenga una hoja reducible?

    b) Determinar si existe alguna relación entre el dual de Alexander y la polarización de un ideal monomial.

    c) Determinar si es posible expresar el algoritmo que induce la prueba de la proposición 2.4 en términos de hipergrafos y sus cubrimientos.

    d) Determinar si $I = (\mathbf{x}^{\mathbf{b}_1}, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_2}, \ldots, \mathbf{x}^{\mathbf{b}_r})$ y $M = \boldsymbol{x}^{\mathbf{m}}$ donde cada $m_i \geq \max\limits_{1\leq j\leq r}\{b_{ij}\}$ entonces $\mathcal{P}(I : M) = (\mathcal{P}(I) : \mathcal{P}(M))$.

Referencias

[1] M.F. Atiyah and I.G. MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley, Reading MA, 1969, 127p. .

[2] C. Berge, *Hypergraphs, Combinatorics of finite sets*, North-Holland Mathematical Library, 45. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1989, 523p.

[3] D. Bayer, I. Peeva and B. Sturmfels, *Monomial Resolutions*, Mathematical Research Letters 5, 1998, pag. 31-46.

[4] S. Faridi, *Cohen-Macaulay properties of square-free monomial ideals*, J. Combin. Theory Ser. A **109** 2005, no. 2, pag. 299–329. MR2121028 (2005j:13021)

[5] S. Faridi, *Monomial ideals via square-free monomial ideals*, in *Commutative algebra* 2005, pag. 85–114, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. MR2184792 (2006i:13038)

[6] S. Faridi and M. Caboara, *Odd-Cycle-Free Facet Complexes and the König Property*, arXiv:math.AC/0703459v1, 2007, pag 94–123.

[7] S. Faridi, M. Caboara and P. Selinger, *Simplicial cycles and the computation of simplicial trees*, arXiv:math.AC/0606375v1, 2006, pag 85–98.

[8] E. Miller and B. Sturmfels, *Combinatorial Commutative Algebra (Graduate Texts in Mathematics, Vol.227)*, Springer, New York Berlin Heidelberg, 2005.

[9] E. Miller and B. Sturmfels, *Monomial Ideals and Planar Graphs*,AAECC 99, 1999, pag. 19-28.

[10] R. H. Villarreal, *Monomial algebras*, Dekker, New York, 2001. MR1800904 (2002c:13001) ,449 p.

Índice alfabético