

APROXIMACIÓN DIDÁCTICA AL PROCESO DE DISEÑO DE UN MÓDULO PARA
LA FORMACIÓN DOCENTE EN EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LAS
CÓNICAS EN UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE INFORMÁTICO

MARIO ANDRÉS ESPAÑA GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2010

APROXIMACIÓN DIDÁCTICA AL PROCESO DE DISEÑO DE UN MÓDULO PARA
LA FORMACIÓN DOCENTE EN EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DE LAS
CÓNICAS EN UN AMBIENTE DE APRENDIZAJE INFORMÁTICO

MARIO ANDRES ESPAÑA GONZALEZ

Trabajo de grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
LIC. EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2010

Nota de aceptación:

Firma del presidente del jurado

Firma del jurado

Firma del jurado

San Juan de Pasto, noviembre de 2010

“Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de sus autores”

Artículo 1º del Acuerdo Número 324 de Octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

DEDICATORIA

Dedico estas sencillas líneas:

A mis padres Marina y Carlos, que por su importante apoyo moral y material he podido culminar satisfactoriamente esta importante etapa para mi formación profesional.

A mi novia Yully, que por su grata compañía y valiosa colaboración a lo largo de la carrera pude salir adelante a pesar de todas las dificultades.

A mi hermana Ángela, que con su cariño y alegría supo contagiarme siempre de serenidad.

A la memoria de Zully, que por la fuerza de la amistad incondicional que nos uniera sigue aún viva en mi mente y en mi corazón.

A todos los familiares y amigos que conmigo comparten de manera sincera la alegría de este triunfo.

AGRADECIMIENTOS

Al término de esta etapa quiero agradecer:

Al profesor Edinsson Fernández, quien por su amable gestión como asesor de este Trabajo de Grado y sobre todo por su calidad humana, contribuyó de forma determinante a facilitar las condiciones para el desarrollo del mismo.

A la profesora Claudia Gómez, por su preocupación y apoyo decisivo para que emprendiera esta última fase de mi carrera.

Asimismo agradezco a todos los profesores, compañeros y estudiantes que con sus importantes enseñanzas aportaron de una u otra forma a mi crecimiento personal y profesional.

CONTENIDO

| | Pág. |
|--------------------------------------|------|
| INTRODUCCIÓN | 18 |
| 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA | 21 |
| 2. ANTECEDENTES | 25 |
| 3. JUSTIFICACIÓN | 28 |
| 4. OBJETIVOS | 30 |
| 4.1. OBJETIVO GENERAL | 30 |
| 4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS | 30 |
| 5. MARCO TECNOLÓGICO | 32 |
| 5.1. LOS MÓDULOS DE APRENDIZAJE | 32 |
| 5.1.1. Materiales modulares | 32 |
| 5.1.2. Objetos de aprendizaje (OA) | 32 |
| 5.1.3. Objetos de acoplamiento | 33 |
| 5.1.4. Características del módulo | 33 |
| 5.1.5. Componentes del módulo | 34 |
| 5.2. LA PLATAFORMA E-LEARNING MOODLE | 34 |
| 5.2.1. Noción general | 34 |
| 5.2.2. Características técnicas | 35 |
| 5.2.3. Características conceptuales | 35 |
| 5.2.4. Módulos de actividades | 35 |

| | |
|---|----|
| 5.3. CABRI-GÉOMÈTRE II PLUS | 37 |
| 5.3.1. Noción general | 37 |
| 5.3.2. Características técnicas | 37 |
| 5.3.3. Características conceptuales | 38 |
| 5.3.4. Herramientas especiales | 38 |
| 6. MARCO DIDÁCTICO | 39 |
| 6.1. RECURSOS PEDAGÓGICOS VIVIENTES | 39 |
| 6.1.1. Dimensión didáctica | 39 |
| 6.1.2. Dimensión ecológica | 40 |
| 6.1.3. Dimensión instrumental | 40 |
| 6.1.4. Aproximación Instrumental, Didáctica, Ecológica (AIDE) | 40 |
| 6.1.5. Fichas de estado | 40 |
| 6.2. LA NOCIÓN DE MEDIO” | 42 |
| 6.2.1. El caso de CABRI | 42 |
| 6.2.2. El caso de MOODLE | 43 |
| 6.3. REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS | 43 |
| 6.3.1. Representaciones internas y externas | 44 |
| 6.3.2. Representaciones en geometría elemental | 45 |
| 6.3.3. Representaciones en CABRI | 45 |
| 6.4. VISUALIZACIÓN Y COGNICIÓN | 46 |
| 6.4.1. Visualización y Educación Matemática | 46 |
| 6.4.2. Visualización en CABRI | 46 |
| 6.5. TRANSPOSICIÓN INFORMÁTICA | 46 |

| | |
|---|----|
| 6.5.1. Principio de mediación instrumental | 47 |
| 6.5.2. Nuevo realismo matemático | 47 |
| 6.5.3. CABRI: Una nueva relación con la geometría | 47 |
| 6.6. DISEÑO DE TAREAS CON CABRI | 48 |
| 6.6.1. Tipo de tareas | 49 |
| 7. MARCO PEDAGÓGICO | 51 |
| 7.1. VISIÓN CONSTRUCTIVISTA DEL APRENDIZAJE | 51 |
| 7.2. CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE CONOCIMIENTO | 52 |
| 8. MARCO CURRICULAR | 53 |
| 8.1. FORMACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA | 53 |
| 8.1.1. Desarrollo profesional de los profesores | 53 |
| 8.1.2. Legitimidad educativa de las TIC | 54 |
| 8.2. CULTURA GEOMÉTRICA EN EL CONTEXTO ESCOLAR | 54 |
| 8.2.1. La “matemática moderna” | 54 |
| 8.2.2. La formación docente en geometría | 55 |
| 8.3. HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DOCENTE | 56 |
| 8.3.1. El papel de la historia de las matemáticas | 57 |
| 8.3.2. La historia como instrumento para la formación docente | 57 |
| 9. DESCRIPCIÓN DEL MÓDULO | 59 |
| 9.1. OBJETIVOS DEL MÓDULO | 59 |
| 9.1.1. Objetivos generales | 59 |
| 9.1.2. Objetivos específicos | 60 |
| 9.2. ESTRUCTURA DEL MÓDULO Y CONTENIDOS | 60 |

| | |
|--|----|
| 9.2.1. Unidad 1 | 60 |
| 9.2.2. Unidad 2 | 61 |
| 9.2.3. Unidad 3 | 62 |
| 9.2.4. Evaluación | 62 |
| 9.2.5. Actividades | 62 |
| 9.2.6. Materiales y recursos | 63 |
| 10. METODOLOGÍA | 66 |
| 10.1. EVALUACIÓN DEL CONTEXTO | 66 |
| 10.1.1. Análisis de necesidades | 66 |
| 10.1.2. Perfil del usuario | 67 |
| 10.1.3. Aspectos, pedagógicos, didácticos y curriculares | 67 |
| 10.2. FORMULACIÓN DE COMPETENCIAS DE APRENDIZAJE | 68 |
| 10.2.1. Competencias técnicas | 68 |
| 10.2.2. Competencias didácticas | 68 |
| 10.2.3. Competencias pedagógicas | 68 |
| 10.3. ESTRUCTURACIÓN DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS | 69 |
| 10.4. DEFINICIÓN DE CRITERIOS DE EVALUACIÓN | 71 |
| 10.4.1. Tipo de contenido | 71 |
| 10.4.2. Instrumentos de evaluación | 72 |
| 10.4.3. Criterios de evaluación | 72 |
| 10.5. SELECCIÓN DE CONTENIDOS | 73 |
| 10.5.1. Bibliográfica consultada | 74 |
| 10.6. DISEÑO DE LA INTERFAZ | 76 |

| | |
|---|-----|
| 10.7. DISEÑO DE LOS COMPONENTES TEMÁTICOS | 79 |
| 10.7.1. Ilustraciones con CABRI | 79 |
| 10.7.2. Ventanas emergentes | 80 |
| 10.7.3. Videos | 81 |
| 10.7.4. Presentaciones | 83 |
| 10.7.5. Fichas de estado | 84 |
| 10.7.6. Documentos SWF | 93 |
| 10.7.7. Documentos PDF | 95 |
| 10.8. DISEÑO DE ACTIVIDADES EN MOODLE | 95 |
| 10.8.1. Glosario | 95 |
| 10.8.2. Foros | 96 |
| 10.8.3. Patatas | 98 |
| 10.8.4. Tareas | 99 |
| 10.8.5. Consultas | 102 |
| 10.8.6. Talleres | 103 |
| 10.9. ENSAMBLAJE | 104 |
| 11. CONCLUSIONES | 107 |
| 11.1. SOBRE EL DISEÑO PEDAGÓGICO | 107 |
| 11.2. SOBRE EL DISEÑO DIDÁCTICO | 108 |
| 11.3. SOBRE EL DISEÑO CURRICULAR | 109 |
| 11.4. SOBRE EL DISEÑO TECNOLÓGICO | 109 |
| 11.5. ALCANCES, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS | 110 |
| 11.6. CONSIDERACIONES Y RECOMENDACIONES | 111 |

LISTA DE TABLAS

| | Pág. |
|---|------|
| Tabla 1. Estructura global del módulo | 60 |
| Tabla 2. Materiales y recursos distribuidos por categoría y unidades | 64 |
| Tabla 3. Modelo de evaluación propuesto | 72 |
| Tabla 4. Criterios de evaluación unidad uno | 72 |
| Tabla 5. Criterios de evaluación unidad dos | 73 |
| Tabla 6. Criterios de evaluación unidad tres | 73 |
| Tabla 7. Necesidades formativas de orden actitudinal, conceptual y procedimental | 74 |
| Tabla 8. Relación de actividades que utilizan patatas | 99 |
| Tabla 9. Descripción de varias tareas sobre cónicas propuestas por diversos autores | 101 |

LISTA DE FIGURAS

| | Pág. |
|---|------|
| Figura 1. Estructura de la ficha de identificación | 41 |
| Figura 2. Estructura de la ficha del profesor | 41 |
| Figura 3. Estructura de la ficha técnica | 42 |
| Figura 4. Estructura de la unidad cero | 69 |
| Figura 5. Estructura de la unidad uno | 70 |
| Figura 6. Estructura de la unidad dos | 70 |
| Figura 7. Estructura de la unidad tres | 71 |
| Figura 8. Esquema del formato de presentación o interfaz | 77 |
| Figura 9. Imágenes para el formato de presentación o interfaz | 77 |
| Figura 10. Barra de navegación para la plantilla de la unidad dos | 78 |
| Figura 11. Ilustración dinámica del problema de la duplicación del cubo | 80 |
| Figura 12. Imagen de un óvalo (izquierda) y de una elipse (derecha) | 81 |
| Figura 13. Página Web del módulo Las Cónicas con un video de Google | 82 |
| Figura 14. Imagen de video sobre problema de lugar geométrico oculto | 83 |
| Figura 15. Imagen de diapositiva que explica el proceso de modelización | 83 |
| Figura 16. Interfaz de acceso a los documentos de un recurso pedagógico | 92 |
| Figura 17. Imagen de Ficha de identificación | 92 |
| Figura 18. Portada del documento SWF: El 'Milieu' y las Retroacciones | 94 |
| Figura 19. Portada del documento PDF: Macro-construcciones | 95 |
| Figura 20. Glosario de términos matemáticos | 96 |
| Figura 21. Consulta sobre ideas previas acerca de la hipérbola | 103 |
| Figura 22. Unidad cero | 104 |
| Figura 23. Interfaz de la unidad cero | 105 |
| Figura 24. Unidad uno | 105 |
| Figura 25. Actividades unidad uno | 106 |

RESUMEN

El diseño de cursos para la formación docente en Matemáticas y Tecnología es un naciente campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Con el fin de explorar este nuevo dominio, el presente documento describe un acercamiento al proceso de elaboración de un módulo sobre cónicas, configurado por Objetos de Aprendizaje que integran instrumentos desarrollados a partir de herramientas provistas por la plataforma e-learning MOODLE y el software educativo CABRI. La estrategia metodológica de esta investigación comprende básicamente la estructuración de un ambiente de aprendizaje informático, que integra tres ejes articuladores: (i) historia de las matemáticas; (ii) conocimientos didácticos y (iii) recursos pedagógicos vivientes; relacionados en torno del saber matemático de las cónicas.

Palabras clave: formación docente, Matemáticas y Tecnología, módulo de aprendizaje, MOODLE, CABRI, cónicas, recursos pedagógicos.

ABSTRACT

The design of teacher training courses in Mathematics and Technology is an emerging field of research in Didactics of the Mathematics. In order to explore this new domain, this paper describes an approach to the process of making a learning module on the mathematical knowledge of conics, which is built with Reusable Learning Objects that integrate instruments developed from the computer tools provided by e-learning platform MOODLE and educational software CABRI. The methodological strategy of this research comprises principally the structuring of a computer learning environment that integrates three main axes: (i) history of mathematics, (ii) teaching skills, and (iii) living pedagogical resources, three axes mutually interacting around the mathematical knowledge of the conical ones.

Keywords: teacher training, Mathematics and Technology, learning module, MOODLE, CABRI, conics, pedagogical resources.

INTRODUCCIÓN

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación (en adelante TIC, por sus siglas en español)¹ han transformado profundamente la concepción que se tenía sobre la manera de interactuar con los objetos matemáticos, especialmente, en términos de visualización y representación. Por otra parte, la conectividad muestra estrecha relación con el trabajo colaborativo, lo cual ha incidido notablemente en el desarrollo de nuevos modelos para organizar y gestionar los cursos de profesionalización, en particular, dirigidos a la formación docente.

Pero, cuando se integra un nuevo artefacto dentro de una situación de enseñanza, su estabilidad naturalmente se perturba, comprometiendo a los profesores en un complejo proceso de adaptación. En el caso de las TIC, las modificaciones requeridas en las prácticas habituales son particularmente pronunciadas. Además, en simultáneo con esto, los profesores son inducidos a tomar decisiones sujetas a un sistema de restricciones (curriculares, disciplinares, sociales, etc.). Por ejemplo:

- ¿Cómo son afectados los objetos matemáticos y sus interacciones por la mediación de las TIC?
- ¿Qué aspectos se conservan y cuáles cambian?
- ¿Por quién son utilizadas las TIC y para qué?
- ¿Las TIC deben apoyar el discurso del profesor?; ¿ilustrar algunos contenidos del Currículo?; o ¿asistir el aprendizaje de los estudiantes?
- ¿Hasta qué punto el uso de las TIC está vinculado con el Currículo Oficial?
- ¿En qué circunstancias excepcionales se puede introducir una nueva idea al Currículo?

Este tipo de planteamientos tiene implicaciones significativas para el desarrollo profesional de los profesores en formación inicial y en servicio. Ahora bien, pese a que el desarrollo profesional de los profesores es reconocido ampliamente como un factor crucial para el éxito de la integración de las TIC en la Educación Matemática, actualmente se dispone de muy pocos elementos que permitan orientar las acciones de los investigadores, responsables institucionales y formadores de profesores, con vistas a dar respuesta a tales cuestiones.

De acuerdo con lo expuesto, este trabajo pretende ser un aporte a la investigación sobre el diseño de cursos para la formación docente en el contexto de las TIC, concretamente en dos sentidos:

¹ En un sentido amplio, las TIC se definen como sistemas tecnológicos diseñados para la emisión, recepción, transmisión, manipulación y procesamiento de información, y que a la vez, facilitan la comunicación entre dos o más interlocutores. El actual proceso de convergencia de las TIC tiende a la coalescencia de tres caminos tecnológicos separados, en un sistema único: (i) tecnologías de la información y divulgación; (ii) tecnologías de la comunicación; y (iii) soluciones informáticas. En la mayoría de círculos educativos el término TIC se utiliza para referirse a la tecnología computacional, la multimedia y las conexiones entre redes, especialmente, la Internet.

- Proponiendo una serie de materiales didácticos² organizados en una estrategia modular que facilita su aplicación y estudio.
- Estableciendo algunos criterios de referencia para la elaboración de materiales didácticos o para el desarrollo de futuras investigaciones.

Para ello, se propone una secuencia de aprendizaje basada en el diseño y producción de recursos pedagógicos (Guin, y otros, 2007; Garzón, 2008; Trgalova, y otros, 2009) que integran CABRI. Asimismo, se propone una estrategia metodológica que puede ser implementada con la plataforma MOODLE.

En lo que respecta a la parte matemática de la propuesta, es de señalar que ésta consiste en una aproximación histórica y epistemológica del significado de las cónicas como objetos geométricos. En este sentido, se precisa realizar una cuidadosa revisión bibliográfica sobre las primeras caracterizaciones que se hicieron de las cónicas.

En cuanto a las dimensiones de análisis, cabe señalar que se adopta como fundamento conceptual las aportaciones que desde la Didáctica de las Matemáticas se estiman más significativas para abordar las cuestiones relacionadas a la integración de CABRI en la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas:

- Epistemológica: transposición informática de la noción de lugar geométrico.
- Cognitiva: conocimientos previos; preconceptos; y concepciones erróneas sobre cónicas.
- Didáctica: representaciones; visualización; construcción, demostración, noción de medio (milieu en francés); y diseño de tareas con CABRI.
- Instrumental: modo “arrastre”; construcciones blandas y robustas; y macro-construcciones.

Por su parte, el diseño digital utiliza los tres tipos de aplicaciones tecnológicas que usualmente se emplean en los programas de formación de profesores de matemáticas (Mousley, y otros, 2003 pág. 396):

1. Videos y recursos multimedia.
2. Internet.
3. Software genérico y específico.

Este acercamiento se deriva del consenso alcanzado en Didáctica de las Matemáticas con respecto a la creación de recursos pedagógicos por parte de los profesores como requisito indispensable para la integración de las TIC en Educación Matemática (Haspékian, y otros, 2007).

² En este documento se utiliza el término “material didáctico” para designar a todos aquellos elementos diseñados para contribuir al desarrollo de los objetivos didácticos planteados en el módulo de aprendizaje propuesto.

Es importante señalar que la integración de recursos pedagógicos a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y su papel en el proceso de construcción de pensamiento matemático, ha ocupado un lugar central en las investigaciones realizadas en las últimas décadas desde la Didáctica de las Matemáticas. Sin embargo, aun se percibe la necesidad de realizar investigaciones sobre este asunto en el contexto local y regional.

Se espera que el presente trabajo permita generar una discusión y desarrollar un conocimiento fundamentado entre los profesores en servicio, en relación con algunas temáticas y procesos que están siendo reivindicados desde ciertos enfoques de la Didáctica de las Matemáticas, que incluyen entre otros aspectos la importancia de los escenarios experimentales para el aprendizaje de las matemáticas y la integración de recursos informáticos y computacionales en las clases de matemáticas.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las investigaciones realizadas en las últimas décadas, coinciden en que la concepción que tienen los profesores sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, desempeña un papel central en el proceso de integración de las TIC. La relación del profesor con los ambientes de aprendizaje informáticos³ a la luz de una concepción didáctica, cognitiva y curricular será determinante para el éxito de la integración de las TIC. Por este motivo, se considera importante promover una formación continua y permanente que incida sobre el sistema de creencias de los profesores, propiciando que estos sean más abiertos a los cambios susceptibles de ser aportados por la integración de las TIC en la enseñanza. Este cambio es considerado por Balacheff (2000), ante todo como un cambio de la concepción del profesor sobre su práctica profesional.

Este cambio de concepción significa un cambio en profundidad de la concepción de la enseñanza, tanto en la presentación de los contenidos mismos de enseñanza como en las formas de la actividad. Además, estos cambios necesitan una reflexión y un trabajo que no pueden ser realizados por un solo individuo e igualmente requieren de nuevas competencias individuales y colectivas por parte de los profesores, motivo por el cual se deben generar escenarios que permitan la adquisición de las mismas.

Desde esta perspectiva, se piensa que es necesario para un docente conocer distintas dimensiones que le permitan explicar la naturaleza y propiedades de los artefactos y herramientas que utiliza en su clase, dado que como reconocen los investigadores, estos artefactos influyen profundamente la construcción del saber. En tal sentido, la formación docente debería propender por hacer tomar conciencia a los profesores que los artefactos no cumplen una función neutral, por el contrario, implican cambios sustanciales. Igualmente sería conveniente proporcionar elementos teóricos y metodológicos para analizar e intervenir las propiedades de los artefactos que utilizarán en sus clases.

Frente a tal importancia acordada a la formación de los docentes, como elemento central de la integración de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, resulta necesario abordar algunos aspectos relacionados con la integración de las TIC en la educación tanto desde una perspectiva general como particular, en este caso de la Educación Matemática.

³ Se entiende por ambiente de aprendizaje informático, desde una aproximación instrumental (Trouche, 2004), como aquel espacio de aprendizaje en el que cohabitan seres vivos — profesor y estudiantes — y objetos inanimados —TIC y conocimientos —, constituyendo sistemas didácticos enriquecidos principalmente por dos factores: (a) la mediación instrumental en las interacciones que sustentan la actividad del estudiante y la producción de conocimiento; y (b) el potencial didáctico que se deriva de la instrumentación de las herramientas computacionales.

La tecnología es sin duda uno de los factores más influyentes en la conformación y evolución de la organización social. Si bien se suelen identificar otros factores determinantes del cambio social, como son los procesos económicos, los movimientos políticos y sociales, los procesos demográficos o los cambios del entorno natural, se sigue considerando dominante al factor tecnológico. La Educación Matemática como un proceso de naturaleza social no es ajena a tal aproximación.

La relación que sostienen la tecnología y la Educación Matemática se encuentra profundamente cargada de ideología, que oscila entre un desbordado optimismo de sus posibilidades en el ámbito educativo y el pesimismo de las consecuencias de su integración. Esto hace que el estudio de la relación entre la tecnología y la Educación Matemática pueda abordarse a partir de dos dimensiones:

1. La primera caracteriza la tecnología como constituida por dos elementos: los medios y los procesos tecnológicos.
2. La segunda explora la tecnología como dimensión de la Educación Matemática permitiendo distinguir y definir la tecnología externa e interna.

Estas dos dimensiones colocan en un primer plano las posiciones pesimistas y optimistas del impacto de la tecnología en la educación. No obstante la tendencia se dirige a considerar la tecnología como un escenario de potenciales soluciones a los problemas humanos y que refleja las características de la organización social.

En estos términos, resultaría bastante plausible centrar la atención no tanto en la herramienta sino mejor en los cambios culturales y de pensamiento que involucra el uso de nuevos instrumentos de mediación entre las personas y su entorno. Estos cambios que inciden directamente sobre las estructuras sociales de las antiguas tecnologías, por un lado, dan lugar a que las transformaciones sean lentas e intensas; y por otro, suponen la adopción de un nuevo paradigma tecnológico.⁴

Por otra parte, los investigadores reconocen la necesidad de colocar la integración de las TIC en el contexto de las innovaciones educativas. En general, se considera que una innovación educativa se caracteriza por el compromiso de deliberación y participación social, el cual exige una fundamentación reflexiva y crítica sobre qué cambiar, en qué dirección y cómo hacerlo (Aguaded Gómez, 2005).

Se señala que el término innovación, en la práctica educativa, va siempre asociado a distintos adjetivos que contextualizan el ámbito donde tiene lugar. De esta manera, se alude a “innovación didáctica”, “innovación tecnológica”, “innovación curricular” e “innovación

⁴ El término “paradigma tecnológico” hace referencia al conjunto de la lógica necesaria para el uso y desarrollo de un tipo de tecnología. El despliegue de un nuevo paradigma tecnológico implica numerosas interconexiones: el desarrollo de una serie de servicios; una adaptación cultural a la lógica de las nuevas tecnologías; y la creación de condiciones institucionales que favorezcan su difusión

pedagógica”. De igual manera, el ámbito de integración de las TIC en la enseñanza, es reconocido como un dominio particular de innovación.

En consonancia con lo expuesto, puede establecerse un estrecho vínculo entre la innovación y el uso de recursos para la enseñanza. Pero éstos no producen efectos innovadores por sí mismos, puesto que constituyen tan solo una pieza del engranaje que articula los procesos de diseño, desarrollo e innovación a nivel de currículo.

Así pues, la presencia de las TIC en la educación, no se convierte automáticamente en un elemento dinamizador y generador de procesos de innovación. Es preciso que las TIC se sitúen en un contexto curricular y didáctico, de manera que los docentes dispongan una serie de criterios fundamentados para integrar dichas tecnologías en el aula.

Aquí se subraya nuevamente la importancia de promover procesos de formación docente, tanto inicial como continua, que contemplen la integración de las TIC. No obstante, los escenarios de formación docente en el contexto tecnológico usualmente tienden a centrarse tan solo en el desarrollo de saberes genéricos, relacionados con el manejo básico de estas tecnologías. Tal como señalan Guin y Trouche (2007), en este tipo de procesos suelen ser desestimadas las especificidades disciplinarias, haciendo que los profesores no sean preparados realmente para integrar las TIC a sus prácticas profesionales.

A este respecto, se hace oportuno citar la reflexión que hace Laborde (2001, pág. 311), a manera de conclusión, al término de un estudio desarrollado para identificar y analizar las etapas de la integración de CABRI, basándose en el seguimiento de la evolución conceptual de las tareas propuestas por un grupo de profesores a lo largo de un periodo de tres años:

CABRI abarca una amplia esfera del conocimiento y la acción. Se trata de un micromundo que permite múltiples maneras de explorar, experimentar y resolver un problema. Si bien el uso básico de CABRI se puede aprender con rapidez debido a su amigable interfaz, elaborar una concepción global y estructurada de todas sus posibilidades requiere tiempo [...]

Con esta cita se quiere constatar que la apropiación que hace el usuario de un artefacto computacional va más allá de la simple construcción de saberes genéricos. Situándose en el marco de la Ergonomía Cognitiva (Rabardel, 1996), el usuario aparte de descubrir las funciones previstas del artefacto debe de entender las potencialidades y restricciones que dimanen de éstas, para así desarrollar técnicas que respondan efectivamente a una tarea determinada — génesis instrumental—. Lo que se traduce en saberes disciplinarios cuando la tarea es realizada dentro de un contexto profesional.

Ahora, cuando el artefacto es complejo y ofrece la oportunidad de realizar operaciones referentes a un dominio teórico, como en el caso de CABRI, la génesis instrumental puede requerir la asistencia o intervención de una persona más experta, ya que las TIC aplicadas a la Educación Matemática expresan saberes matemáticos en los cuales las dimensiones técnica y conceptual se entrelazan intrínsecamente (Artigue, 2002), haciendo que el uso de

las TIC modele el conocimiento producido por el usuario — aprendiz de matemáticas— (Hoyles, y otros, 2004).

En el caso particular de la formación docente a distancia, la creación de mecanismos para facilitar el desarrollo de estos procesos de génesis instrumental es responsabilidad de los formadores facilitadores, lo que da lugar a nuevas demandas o requerimientos inusuales para la profesión del formador, relacionados principalmente con la diversificación de su rol en torno a dos figuras específicas: el autor y el tutor; siendo la primera de éstas la que necesita especial atención.

Generalmente, el término “autor” se utiliza para designar a un grupo de profesionales y especialistas en distintas áreas: el diseñador didáctico, el experto en el dominio del saber a enseñar, el artista gráfico, el editor, el experto en TIC, el experto en comunicaciones, el sociólogo, el didacta — general y específico—, el pedagogo, etc. Esta interdisciplinariedad genera un escenario de expectativas heterogéneas sobre los conocimientos y creencias profesionales o ideológicas en relación con las filosofías implícitas, las cuales hoy son modeladas por la mediación instrumental de las herramientas provistas por las plataformas e-learning (Albano, 2005).

No cabe duda de que la discusión de estos temas entre todos los integrantes del equipo, así como los pensamientos que iluminan sus decisiones, que por cierto, provienen de experiencias diversas, son dos sistemas que influyen y convergen en los contenidos y materiales que se crean e integran en la plataforma y en las metodologías para su desarrollo, lo que en últimas define el alcance y la profundidad del producto. Sin embargo, la literatura educativa generalmente se centra en la figura “tutor” y solo considera aspectos generales de la figura “autor”, por lo tanto no se dispone de suficiente documentación de referencia para los diseñadores de cursos y materiales.

Así pues, teniendo conciencia de esta situación y considerando que el investigador toma roles que corresponden a la figura “autor”, el presente estudio busca hacer una caracterización de las categorías didáctica, pedagógica, curricular y tecnológica, en el marco del proceso de elaboración de un módulo de aprendizaje para la formación de profesores de matemáticas en un contexto e-learning, con el fin de obtener y compartir información detallada acerca del diseño de cursos para la formación docente en Matemáticas y Tecnología, haciendo énfasis en la producción de recursos pedagógicos.

2. ANTECEDENTES

El IREM de Montpellier (Instituto de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas), con el apoyo institucional de diversas entidades, incluido el Ministerio de Educación Nacional de Francia, ha venido desarrollando en los últimos años el programa SFoDEM (Seguimiento a la Formación a Distancia de Profesores de Matemáticas), un mecanismo diseñado para asistir y acompañar a los docentes en la creación, apropiación y experimentación de nuevos materiales didácticos que integran herramientas informáticas (Guin, y otros, 2004).

El modelo propuesto para orientar el diseño de material didáctico en este contexto, se sustenta en dos pilares (Joab, Guin, & Trouche, 2003):

- La institución de nuevas formas de colaboración entre todos los participantes del proceso — directores, técnicos, formadores y profesores novicios —, de tal manera que se posibilite la constitución de comunidades de práctica (Wenger, 1998).
- La concepción colaborativa de recursos pedagógicos vivientes, es decir, de materiales didácticos que evolucionan en función de las necesidades y usos que de los mismos hacen las comunidades donde son producidos y utilizados.

En cuanto a la estructura de los nuevos recursos, esta se concretó sobre la base del análisis de los recursos existentes hasta ese momento. Esto quiere decir que la validación de tal estructura comporta una fase de revisión de recursos existentes y una fase de creación de nuevos recursos.

De otra parte, para definir los comportamientos de los actores en función de los requisitos que exige el modelo, se establecieron cuatro figuras que precisan el papel desempeñado por cada uno de ellos:

- el autor, quien es el encargado de la creación o revisión del recurso;
- el mediatizador, quien es el encargado de producir la forma realizable del recurso;
- el usuario, quien es el encargado de mejorar, asimilar y adaptar los materiales propuestos a sus propias necesidades; y
- el experimentador, quien es el encargado de evaluar la idoneidad del recurso para su situación concreta. Además, es quien propone, cuando sea necesario, los ajustes y las condiciones de uso requeridas.

Finalmente, para configurar el modelo, se procedió a desarrollar un proceso permanente en etapas sucesivas, determinado por el ciclo: (i) análisis de recursos existentes; (ii) estudio y comparación de estándares de calidad para el diseño de objetos de aprendizaje; (iii) producción de nuevos recursos; (iv) uso o experimentación de los recursos en clases; (v) evaluación de la funcionalidad de los recursos; y (v) revisión y actualización para el

enriquecimiento de los mismos. Es a través de este proceso cíclico que los recursos evolucionan y cobran vida.

Durante la fase experimental del proyecto — entre septiembre de 2000 y junio de 2002 —, las primeras experiencias registradas pusieron de manifiesto que los usos y experimentos de los novicios con los recursos propuestos eran satisfactorios, pero que ellos presentan dificultades para cambiar del rol de usuario al rol de diseñador, puesto que este último implica una crítica del recurso, acompañada de una propuesta de mejoramiento. Igualmente, se estableció de manera concluyente, que las actividades propuestas deben procurar aglutinar a los novicios en torno a la creación de nuevos materiales.

En este orden de ideas, en Colombia, el diseño de material didáctico como estrategia para la formación docente en Matemáticas y Tecnología fue investigado por un equipo interdisciplinario integrado por miembros del GCEM de la Universidad de Antioquia (Grupo de Educación en Ciencias Experimentales y Matemáticas) y el GEM de la Universidad del Valle (Grupo de Educación Matemática), en el marco del proyecto “Aspectos teóricos y metodológicos para la consolidación de una red de aprendizaje”, financiado por Colciencias durante los años 2006 y 2007.

El propósito del proyecto era la configuración de una red de aprendizaje que estuviera conformada por profesores de matemáticas, apoyada en los fundamentos teóricos del concepto de comunidad de práctica, elaborado por Wenger (1998). Para ello se propuso un modelo que incluye una tríada articulada en tres categorías:

- la elaboración de recursos pedagógicos vivientes;
- el conocimiento matemático y didáctico; y
- la estructuración de un ambiente de aprendizaje informático.

La naturaleza y el diseño de los materiales se caracterizaron por contemplar la mediación de instrumentos desarrollados a partir de ambientes como Moodle y Cabri-Géomètre II plus. Así pues, mediante el seguimiento y evaluación del proceso formativo, se buscó dar cuenta de la mediación de estos instrumentos en la concepción de nuevos materiales por parte de los profesores formados.

De esta manera, procediendo en consonancia al modelo propuesto, fueron considerados los siguientes criterios para la difusión de los materiales en la red:

- La actividad del individuo, considerada como el núcleo central para propiciar la movilización de conocimientos matemáticos y didácticos.
- Los ambientes de aprendizaje informáticos, vistos como medios para la producción de nuevos conocimientos y para la orquestación instrumental.
- Los materiales diseñados, reconocidos como una estructura compleja que relaciona entre sí, diferentes elementos de orden tecnológico, pedagógico y didáctico.
- Los nuevos modelos de conocimiento matemático, asociados a los fenómenos que se derivan de la transposición informática.

En lo relativo a la gestión del proceso, se resalta la acción pedagógica del equipo autor, quien se ocupó de materializar los recursos en módulos de aprendizaje, en los que se dispusieron actividades cuya finalidad era la de garantizar la interacción entre los participantes y responder a las características propias del “ambiente”.

Con base a los resultados obtenidos de esta experiencia, se extrajeron varias consecuencias prácticas. En particular, una referente a la estrategia metodológica de los materiales diseñados, la cual se considera oportuno destacar aquí. Según Garzón (2008), quien fuera uno de los coordinadores del proyecto, se pudo observar que la apropiación de los materiales por parte de los docentes se hace efectiva en la medida en que éstos permitan organizar la gestión didáctica del profesor y de las herramientas informáticas que integran, es decir, dependiendo de qué tan funcionales sean estos materiales depende la facilidad o dificultad de llevar a cabo la orquestación instrumental.

3. JUSTIFICACIÓN

Uno de los usos educativos de la Tecnología con mayor trayectoria es sin duda la creación de recursos y materiales didácticos para la formación profesional a distancia, sobresaliendo la elaboración de módulos de aprendizaje como una tarea fundamental para desarrollar este tipo de procesos formativos (Area Moreira, 2002).

Efectivamente, los recursos y materiales didácticos evolucionan en la medida que avanzan las tecnologías de la comunicación y desde hace algunos años de la información (Garrison, y otros, 2003), adaptándose a las posibilidades de mediación emergentes y tendencias educativas del momento.

Actualmente, la evolución tecnológica en el campo de la educación se ha materializado en el desarrollo de plataformas e-learning, las cuales suponen un contexto apropiado para la formación profesional de los docentes de matemáticas (Almeida, 2002; Guin, y otros, 2005), especialmente en el sentido de propiciar escenarios para la construcción social de conocimientos y el trabajo colaborativo.

No obstante, la naturaleza del conocimiento mediado por las tecnologías actuales hace que se complejice la creación de recursos y materiales didácticos para la formación matemática e-learning (Albano, 2005), más aún si éstos se dirigen a la formación docente en Matemáticas y Tecnología (Lagrange, y otros, 2003). Por lo cual el diseño de cursos e-learning se ha constituido recientemente en un campo de investigación en Didáctica de las Matemáticas, aunque poco documentado.

La presente investigación busca en primera instancia, configurar una estrategia modular para la formación docente en el conocimiento matemático de las cónicas, a la luz del modelo de elaboración de recursos pedagógicos vivientes (Joab, y otros, 2003); y en segunda instancia, establecer algunos criterios didácticos, pedagógicos, curriculares y tecnológicos para el diseño de material modular dirigido a la formación docente en Matemáticas y Tecnología.

Por tal razón, este estudio resulta pertinente, ya que aborda uno de los elementos clave para la integración de las TIC en la Educación Matemática: la formación de profesores (Artigue, 1998). Por otra parte, suministra material e información que pueden utilizarse para sustentar la actividad docente e investigativa de los formadores, algo que es particularmente importante para su profesionalización (Zaslavsky, 2009).

Además, estudios serios (Bongiovanni, 2002) han aportado pruebas de que las curvas cónicas son un tema singularmente adecuado para activar los conocimientos geométricos de los profesores, lo que es ampliamente considerado como una acción necesaria para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas (Mammana, y otros, 1998).

Cabe destacar, que el software de geometría dinámica en comparación con otros software educativos constituye una de las clases de tecnología que tiene mayor acogida entre la comunidad de profesores de matemáticas (Darricarrère, y otros, 2010), dado lo fácil de su manejo básico. Igualmente, es uno de los más investigados, debido a que las nuevas y potentes oportunidades de experimentación y representación que ofrecen facilitan la exploración sin precedentes de los objetos geométricos, en particular, de las cónicas.

4. OBJETIVOS

A fin de concretizar acciones específicas que permitan conseguir los propósitos perseguidos se encuentra oportuno formular los siguientes objetivos:

4.1. OBJETIVO GENERAL

Diseñar un módulo de aprendizaje sobre cónicas para estructurar un ambiente de aprendizaje informático que pueda enmarcarse en un proceso de formación docente en Matemáticas y Tecnología con la mediación de MOODLE y CABRI.

4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Organizar tres unidades didácticas articuladas en torno al saber matemático de las cónicas como eje transversal.
- Diseñar una secuencia de aprendizaje que permita estructurar los contenidos a enseñar y las actividades prácticas en coherencia con la concepción global del módulo.
- Desarrollar una estrategia didáctica que permita integrar el módulo al campus virtual de la Universidad de Nariño.
- Diseñar y producir un recurso pedagógico que integre CABRI.
- Elaborar las cuatro primeras fichas de estado del recurso pedagógico: Ficha de identificación, Ficha del profesor, Ficha del estudiante, y Ficha técnica.

MARCO TEÓRICO

En los siguientes cuatro capítulos se presenta el marco teórico sobre el que se sustenta esta investigación, el cual contempla aspectos relativos a la dimensión histórico-epistemológica de las cónicas; la dimensión didáctica que da cuenta de algunos de los fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las cónicas y aspectos relativos a su vínculo con las propuestas curriculares vigentes para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

El marco teórico se complementa con la caracterización y aproximación desde la didáctica de las matemáticas, al diseño y gestión de escenarios experimentales y el trabajo experimental en la clase de matemáticas apoyado en TIC.

5. MARCO TECNOLÓGICO

En este capítulo se dan a conocer los aspectos de tipo tecnológico que incluye la propuesta modular que se desarrolla en la presente investigación. De esta manera, se considera pertinente tratar aquí los siguientes puntos: (i) módulos de aprendizaje; (ii) plataforma MOODLE; y (iii) software CABRI.

5.1. LOS MÓDULOS DE APRENDIZAJE

Los módulos son un componente esencial para el desarrollo de cursos e-learning. En este apartado se hace una descripción detallada de cada una de sus partes.

5.1.1. Materiales modulares. Desde el punto de vista estructural, los materiales modulares para ser utilizados en plataformas e-learning se organizan en módulos, unidades y elementos generales (Sangrà, 2005 pág. 23).

- El módulo de aprendizaje es el nivel más alto de la estructura. Corresponde a un gran bloque temático dentro de un curso específico. Para poder diseñar un módulo de aprendizaje es preciso programar y concretar la secuencia de aprendizaje a desarrollar. El módulo estará compuesto entonces de uno o varios objetos de aprendizaje y de los objetos de acoplamiento necesarios para contextualizar a los primeros (ICE-ASIC, 2008). Cada módulo contiene un número determinado de unidades.
- La unidad didáctica es el nivel básico de la estructura. Un conjunto de unidades da lugar a un módulo. Al conjunto de objetos de aprendizaje se les llama “paquetes instructivos”. Cada uno de los objetos que integran el paquete constituye una “unidad” con sentido lógico y funcional propios. Así, por antonomasia, se llama unidad didáctica a un determinado paquete instructivo y los objetos de acoplamiento en que se apoya para lograr un objetivo de enseñanza específico (Muiños Gual, 1999, pág. 79). El término aplica sólo para el contexto de la educación a distancia.
- Los elementos generales son todos los objetos de aprendizaje y objetos de acoplamiento que configuran el material en sí, tanto del módulo como de sus unidades, ayudando a contextualizar y dar coherencia y cohesión a los contenidos y actividades.

5.1.2. Objetos de aprendizaje (OA). Considerando que en la literatura educativa no hay un claro consenso en cuanto a concepto de objeto de aprendizaje se refiere, se estima oportuno acordar la siguiente definición, dentro de la cual se enmarca el presente trabajo:

Un objeto de aprendizaje es la “unidad mínima” en un proceso de enseñanza y aprendizaje, que para ser considerado como tal debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Estar diseñado en formato digital, para así poder actualizarlo y/o modificarlo constantemente.

- Tener un propósito educativo, por tanto debe estar constituido no solo por contenidos sino también por elementos de contextualización (objetos de acoplamiento).
- Proveer acceso a contenido interactivo, es decir, es necesario que incluya actividades (ejercicios, cuestionarios, diapositivas, pruebas, etc.) que faciliten el aprendizaje y a la vez promuevan la evaluación continua.
- Ser indivisible e independiente de otros objetos de aprendizaje, por lo que: (i) debe tener sentido en sí mismo; y (ii) no descomponerse en partes más pequeñas.
- Ser reutilizable en contextos educativos distintos. Para ello es necesario que: (i) los contenidos no estén contextualizados con relación a su ubicación, ni al tiempo, ni al programa, etc.; y (ii) determinar posibles situaciones de uso, para así facilitar su rediseño o implementación.

5.1.3. Objetos de acoplamiento. Como fue señalado arriba, los objetos de acoplamiento constituyen “paquetes instructivos”. Esto quiere decir que su función es acompañar al objeto de aprendizaje, por lo cual, éstos no tienen sentido por sí solos y son totalmente dependientes.

A pesar de estar diseñados en formato digital no cumplen todas las condiciones del objeto de aprendizaje, puesto que su tarea principal es ayudar a enlazar las diferentes partes que componen el módulo. Es por eso que un módulo se compone de uno o más objetos de aprendizaje y muchos objetos de acoplamiento.

Entre los objetos de acoplamiento se destacan principalmente cuatro:

- La guía introductoria o guía de aprendizaje, que establece el hilo conductor que permite al estudiante auto-dirigir su itinerario.
- Las actividades prácticas, que son el eje central del ambiente de aprendizaje. El desarrollo de las actividades son el mayor compromiso académico del estudiante y el punto de partida de su evaluación.
- La evaluación, cuya finalidad es sobre todo formativa y en menor medida de control de resultados. Por ello sus objetivos son: (i) ofrecer retroalimentación al estudiante de su propio aprendizaje; y (ii) detectar dificultades con vistas a mejorar la formación del estudiante en sus distintas fases. De este modo, la evaluación puede hacerse a través de las mismas actividades prácticas o mediante pruebas de tipo test.
- El resumen, cuyos objetivos son: (i) Sintetizar ideas clave; (ii) estimular la retentiva para afianzar aprendizajes; y (iii) favorecer futuros aprendizajes.

5.1.4. Características del módulo. Los materiales en formato modular deben cumplir con las siguientes características (Area Moreira, 2002):

- La hipertextualidad organizativa de la información para facilitar la “navegación” del usuario a través del módulo.
- Los atributos multimedia (gráficos, animaciones, videos, sonidos, etc.) que permiten apoyar el aprendizaje mediante.

- El acceso a información variada para que el usuario tenga múltiples opciones de documentarse.
- La flexibilidad e interactividad que consiste en brindar cierto grado de autonomía al usuario y combinar la información con las actividades.

5.1.5. Componentes del módulo. Todo módulo de aprendizaje debe tener una serie de componentes básicos para hacer más comprensible, funcional y práctico su manejo (Arboleda Toro, 2005):

- El índice o tabla de contenido tiene por objeto ofrecer al lector un panorama global anticipado de los temas que aborda el documento.
- La introducción es una especie de “carta al lector” que antecede al cuerpo del texto. Mediante ella se explica los alcances y propósitos del módulo en general y de cada una de las unidades que lo integran.
- Los objetivos del módulo Son el núcleo esencial del módulo, puesto que deben dar la pauta en torno a los aprendizajes esperados.
- Los objetivos de la unidad deben hacer referencia a un logro o competencia específica por desarrollar en la esfera cognitiva, actitudinal o procedimental.
- La estructura de las unidades debe esquematizar de manera sencilla pero eficaz la relación existente entre el objetivo general del módulo y los objetivos de cada una de las unidades que lo conforman.
- Los bloques temáticos son el contenido temático compuesto por bloques de texto redactados e interconectados entre sí, a los cuales corresponde una jerarquía de títulos, antetítulos y subtítulos. Además, puede contener gráficos, cuadros sinópticos u otras aplicaciones que contribuyan a enriquecer la experiencia de aprendizaje.
- La evaluación al final de cada una de las unidades del módulo debe ser un instrumento que procure fogear al discente con respecto a los avances de aprendizaje alcanzados.
- La bibliografía es el conjunto de documentos consultados por el autor del módulo. Generalmente es recomendable referenciarla al final de cada unidad.

5.2. LA PLATAFORMA E-LEARNING MOODLE

Hoy por hoy, la gestión de cursos a distancia apoyados en recursos tecnológicos ha sido enriquecida por las nuevas posibilidades y oportunidades que ofrecen las plataformas e-learning. Una de ellas es MOODLE, una plataforma que se destaca por estar basada en la filosofía Linux sobre uso de software libre. En este apartado se hacen algunas consideraciones sobre el aspecto tecnológico de dicha plataforma.

5.2.1. Noción general. MOODLE (Modular Object-Oriented Dynamic Learning Environment) es un sistema digital que contiene herramientas de comunicación, sincrónica y asincrónica, integradas y disponibles a través de redes de computadores. Además, tiene una estructura hipermedia — versión multimedia del hipertexto— que admite materiales que a su vez poseen también características hipermedia.

5.2.2. Características técnicas. Los procesos formativos desarrollados con la mediación instrumental⁵ de las herramientas de MOODLE se caracterizan técnicamente por tres rasgos esenciales:

- La “personalización”, que tiene que ver con la posibilidad que tienen los usuarios de adaptar hasta cierto grado los cursos MOODLE a sus necesidades o preferencias, ya que el acceso a la plataforma se hace por medio de computadores personales.
- La “interactividad”, que hace referencia a las posibilidades de comunicación multilateral, en tiempo real y en diferido, que tienen los usuarios — profesor o tutor y estudiantes—. Asociado a este concepto está la integración de los actores del proceso formativo en torno a la comunicación participativa, colaborativa y reflexiva.
- La “conectividad”, que se refiere principalmente a la posibilidad que tienen los usuarios de conectarse a la plataforma en cualquier momento y durante el tiempo que sea necesario. Esto está sujeto, obviamente, al tipo de conexión con la cual trabaja el usuario y las condiciones técnicas del servicio de Internet.

5.2.3. Características conceptuales. MOODLE se sustenta sobre la base teórica de cuatro ámbitos relacionados con el aprendizaje (Amorós Poveda, 2007):

- El “constructivismo social”, que enfatiza en la influencia de los contextos social y cultural en la producción de conocimiento.
- Los “ambientes hipermedia”, que favorecen la dinamicidad y la versatilidad de los niveles de complejidad de la información, de las posibilidades de exploración y del procesamiento de la información — semejante al de la mente humana—.
- El “trabajo colaborativo”, que permite a los estudiantes trabajar en conjunto y hacer aportes de diversas maneras para la consecución de un objetivo de aprendizaje específico.
- La “orientación a objetos”, que facilita al tutor la creación de objetos de aprendizaje sin que tenga que recurrir necesariamente al uso del lenguaje HTML. Además, le brinda la posibilidad de volverlos a utilizar en cursos posteriores o rediseñarlos si fuera necesario.

5.2.4. Módulos de actividades. El término módulo tiene una connotación arquitectónica, como la mínima unidad de una estructura mayor que sirve para determinar las proporciones de cada una de las estructuras restantes. La literatura educativa acuñó el término para inscribirlo en la concepción modular del aprendizaje activo, buscando ante todo redimensionar la dinámica que se establece entre las unidades temáticas y el bloque temático de una asignatura o materia.

En MOODLE, los módulos son pequeños programas que permiten añadir funciones a la plataforma. Existen módulos para guardar calificaciones, módulos para tomar exámenes, etc. Pero los módulos de actividades son con mucho los más importantes. Por defecto hay siete de estos módulos (Cole, y otros, 2008):

5.2.4.1. Tareas. Hay cuatro tipos diferentes:

⁵ En la página 46 se explica más detalladamente el concepto de mediación instrumental.

- Subir un único archivo: Esto permite a cada estudiante subir un solo archivo en cualquier formato, incluido un archivo ZIP.
- Actividad fuera de línea: Esto es útil cuando la tarea se realiza fuera de MOODLE. Podría ser algo presencial o en papel. Los estudiantes pueden ver una descripción de la tarea, pero no pueden subir los archivos.
- Texto en línea: Esto permite a los estudiantes editar texto en línea. El profesor puede calificar e incluir comentarios o hacer cambios.
- Subida avanzada de archivos: Esto permite que cada estudiante pueda subir uno o más archivos en cualquier formato. El profesor también puede subir uno o más archivos de cada estudiante, ya sea al inicio o en respuesta a su presentación. Un estudiante puede anexas documentos que describan los archivos presentados, el estado de progreso, o cualquier otra información pertinente.

5.2.4.2. Consulta. Es una actividad muy sencilla, consistente en formular una pregunta y predeterminar una serie de respuestas entre las cuales deben elegir los estudiantes. Puede ser muy útil para realizar encuestas rápidas para estimular la reflexión sobre un asunto, para permitir que el grupo decida sobre cualquier tema, o para recabar el consentimiento para realizar una investigación.

5.2.4.3. Foros. Estos son una poderosa herramienta de comunicación dentro de un curso y constituyen el principal canal de discusión en línea. MOODLE tiene cuatro tipos básicos de foro:

- Un debate sencillo: sólo es posible debatir sobre un único tema en este foro. Esto evitará que la discusión se centre en un tema particular.
- Cada persona plantea un debate: cualquier estudiante puede iniciar una discusión. Esto es útil cuando el estudiante desea hacer una reflexión o una pregunta. Cada debate puede tener varias respuestas.
- Foro P y R: este foro permite que los estudiantes puedan expresar sus puntos de vista antes de conocer las posturas de otros estudiantes. Después de la primera publicación, los estudiantes pueden ver y responder a los planteamientos de los demás.
- Foro para uso general: cualquier persona tiene el permiso de poner en discusión temas libres. Este es el mejor foro para propósitos generales

5.2.4.4. Glosarios. Esta actividad permite a los participantes crear y mantener una lista de definiciones, como un diccionario. En apariencia, el módulo “Glosario” no parece más que una simple lista de palabras, pero en la práctica es una poderosa herramienta de aprendizaje.

5.2.4.5. Cuestionarios. Este módulo permite diseñar y aplicar cuestionarios. Los cuestionarios pueden permitir múltiples intentos ofreciendo de esta forma la posibilidad de retroalimentar los conocimientos adquiridos. Los tipos de pregunta posibles son:

- Preguntas de opción múltiple con única o varias respuestas.
- Preguntas de respuesta corta.

- Pruebas de emparejamiento.
- Pruebas de texto mutilado.

5.2.4.6. Lecciones. Esta es una herramienta que proporciona contenidos de forma interesante y flexible. Consiste en una serie de páginas. Cada una de ellas normalmente termina con una pregunta y un número de respuestas posibles. Dependiendo de cuál sea la elección del estudiante, progresará a la próxima página o volverá a una página anterior.

5.2.4.7. Recursos. Son contenidos que el profesor desea facilitar a los alumnos. Pueden ser archivos preparados y cargados en el servidor; páginas editadas directamente en MOODLE, o páginas Web externas que aparecerán en el curso. MOODLE permite varios tipos de recursos: crear páginas de texto, crear páginas Web, enlazar archivos o una Web, agregar una etiqueta, entre otros.

5.3. CABRI-GÉOMÈTRE II PLUS

CABRI pertenece a la categoría de ambientes de geometría dinámica. El término geometría dinámica, acuñado inicialmente por Nick Jackiw y Steve Rasmussen, pronto llegó a ser adoptado por la literatura educativa como un término genérico, por su idoneidad para aludir la principal característica que distingue a esta clase de software: la variación continua en tiempo real de los objetos de la Geometría Elemental (Goldenberg, y otros, 1998). En este apartado se describe algunos rasgos característicos del ambiente CABRI.

5.3.1. Noción general. CABRI es un software educativo provisto de múltiples funciones que facilitan la exploración de los objetos de la Geometría Elemental. Contiene un editor gráfico para construir y modificar figuras geométricas que favorece las interacciones entre el usuario y el software, permitiéndole actuar espontáneamente pero dentro de las posibilidades ofrecidas por el sistema y bajo el control de la teoría euclidiana. Las figuras construidas, de las más simples a las más complicadas pueden ser manipuladas libremente y así observar la variación en tiempo real, lo que agrega una nueva dimensión con respecto a las construcciones clásicas que utilizan lápiz, papel, regla y compás.

5.3.2. Características técnicas. Tal como señala Kadunz (2002), en la literatura sobre Investigación en Didáctica de las Matemáticas se indica usualmente tres características técnicas distintivas de este tipo de software:

- El “modo de arrastre” que permite al usuario modelar dinámicamente los objetos y relaciones convencionales de la Geometría Elemental, mediante la manipulación directa de sus representaciones en pantalla.
- Las “macro-construcciones” o macros que facilitan al usuario la automatización de sus propias construcciones, condensando todos los pasos seguidos para su realización en un solo comando.
- La “herramienta Lugar” que permite al usuario la construcción de los lugares geométricos de puntos o de objetos cuando varían en función de un punto “libre” que varía sobre una figura rectilínea o curvilínea.

5.3.3. Características conceptuales. La filosofía de CABRI se sustenta principalmente en la noción de figura geométrica, entendida como una entidad dicotómica que se define a partir de la relación establecida entre un objeto teórico del dominio geométrico y un objeto empírico del mundo sensible (Laborde, 1996), lo que remite inmediatamente a la dialéctica entre las propiedades geométricas y espaciales que determinan el significado de los objetos geométricos.

El provecho de los conocimientos geométricos en detrimento de los conocimientos espaciales desdeña la posibilidad de una lectura intuitiva de las representaciones gráficas, restringiendo la interpretación de la evidencia perceptiva al mero control perceptual. Por eso, CABRI permite articular los aspectos teóricos y empíricos de las figuras geométricas.

5.3.4. Herramientas especiales. En CABRI las herramientas especiales están disponibles para construir y analizar las figuras. Entre estas herramientas se distinguen tres tipos (Capponi, 1992):

5.3.4.1. Herramientas geométricas. Estas herramientas permiten simular las construcciones con regla y compás de hace más de dos mil años sin la prolijidad técnica que demanda la utilización de estos instrumentos en los ambientes tradicionales de lápiz y papel. Además, pueden ser complementadas con herramientas que el usuario construye mediante la elaboración de macro-construcciones. Las herramientas geométricas se dividen en cuatro grupos:

- Transformaciones: Simetría axial; Simetría central; Traslación; Rotación; Homotecia; Inversión.
- Construcciones: Recta perpendicular; Recta paralela; Punto medio; Mediatriz; Bisectriz; Suma de dos vectores; Compás; Transferencia de medidas.
- Curvas: Círculo; Arco; Cónicas.
- Líneas: Recta; Segmento, Semirrecta; Vector; Triángulo; Polígono; Polígono regular.
- Punto: Punto; Punto sobre un objeto; Punto(s) de intersección.

5.3.4.2. Herramientas numéricas. Estas herramientas permiten trabajar con “números reales”, eventualmente acompañados de una unidad. Los números son mostrados como elementos dinámicos insertados en un texto. Al momento de la creación de un número, CABRI crea un texto que contiene únicamente ese número. Se puede seguidamente editar el texto. Éstas son de especial interés debido a la variación de las magnitudes con el desplazamiento de los objetos. Las herramientas numéricas son: Distancia o longitud; Área; Pendiente; Medida de ángulo; Coordenadas o Ecuación; Calculadora; Aplicar una expresión; Tablas.

5.3.4.3. Herramientas de exploración. Estas herramientas se utilizan para verificar propiedades. Las herramientas de exploración son: Traza; Fijar/Liberar; Animación; Animación Múltiple; Redefinir un objeto; ¿Alineados?; ¿Paralela?; ¿Perpendicular?; ¿Equidistantes?; ¿Pertenece?

6. MARCO DIDÁCTICO

En un sentido amplio, la Didáctica, como señala Brousseau (2004), se interesa en la producción, difusión y aprendizaje de un conocimiento, una ciencia o un arte. Asimismo, se ocupa de estudiar las actividades que los facilitan. Pues bien, en este capítulo se presentan algunos avances teóricos alcanzados en Didáctica de las Matemáticas, que se consideran esenciales para el desarrollo de esta investigación. A saber, estos son seis: (i) los Recursos Pedagógicos Vivientes; (ii) la noción de medio; (iii) Representaciones Matemáticas; Visualización y Cognición; (iv) la Transposición Informática; y (v) el diseño de tareas con CABRI.

6.1. RECURSOS PEDAGÓGICOS VIVIENTES

Complementando la definición de recursos pedagógicos vivientes, esbozada en la página 25, es oportuno señalar que su noción alude intrínsecamente, desde un punto de vista técnico, al concepto de objeto de aprendizaje,⁶ el cual, debe tener además una intención pedagógica para que sea significativo y promueva el aprendizaje (Trgalova, y otros, 2009).

Es así que, Guin y Trouche (2007), caracterizan la noción de recurso pedagógico viviente por medio de dos matices:

1. Como un tipo de material didáctico reutilizable que no se reduce a la simple descripción de una situación de aprendizaje, sino que además incluye alguna documentación sobre ciertos aspectos pedagógicos, tales como la descripción del ambiente tecnológico, para así facilitar su aplicación.
2. Como un tipo de material adaptable a las necesidades individuales de cada profesor, siendo la adaptación la fuente potencial para el enriquecimiento de tales recursos pedagógicos, cuya actualización implica su creación y discusión en verdaderas comunidades de práctica. Esto hace que los recursos pedagógicos evolucionen y por tanto se les considere vivientes.

La elaboración de recursos pedagógicos vivientes se inscribe en un proceso que está sustentado teóricamente sobre la base de tres dimensiones (Guin, y otros, 2007). A continuación se explica de manera sucinta cada una de ellas:

6.1.1. Dimensión didáctica. La producción de conocimientos matemáticos se produce por el efecto de situaciones didácticas (Brousseau, 2000). Estas situaciones encuentran su asidero en los problemas presentados por el profesor, de manera que el saber enseñado se convierte en un factor clave para los procesos resolutivos, que son los que conducen a nuevos aprendizajes.

⁶ Ver página 32 de este documento.

6.1.2. Dimensión ecológica. Los ambientes de aprendizaje informáticos son espacios físicos o virtuales que albergan individuos y artefactos que interactúan entre sí, aunque regularmente el sistema didáctico aparece hostil ante los nuevos artefactos (Chevallard, 1992). Los individuos por su parte intentan colaborar unos con otros para la consecución de algún objetivo de aprendizaje común. Sin embargo, los artefactos no están necesariamente diseñados para el aprendizaje, además, no todos son informáticos. Esto hace que se trate de un ambiente complejo.

6.1.3. Dimensión instrumental. La integración de las TIC en la Educación Matemática demanda la renovación de las prácticas profesionales de los profesores, pero esto solo es posible si los docentes elaboran nuevos instrumentos matemáticos a partir de los artefactos informáticos, lo que a su vez requiere el desarrollo de nuevas técnicas que tienden a estabilizarse solo bajo la forma de rutinas. En estos términos, un instrumento, tal como señala Rabardel (1996), es una entidad compuesta por una parte material (artefacto) y una parte psicológica (esquemas de uso).

La articulación de estas tres dimensiones conduce a un enfoque multidimensional para el diseño de recursos pedagógicos vivientes. Enseguida se expone los elementos de dicho enfoque que han sido considerados en esta investigación.

6.1.4. Aproximación Instrumental, Didáctica, Ecológica (AIDE). Este enfoque es un modelo propuesto por investigadores (Guin, y otros, 2007) de la Escuela Francesa de Didáctica de las Matemáticas, para iluminar la creación colaborativa de recursos pedagógicos con vistas a preparar y acompañar a los profesores de matemáticas en la integración de las TIC en sus prácticas habituales. El modelo consta de cuatro fases, las dos primeras hacen referencia a la etapa de diseño, lo que es competencia del presente estudio. Las dos últimas tienen que ver con la puesta en acto de los recursos y su análisis a posteriori, por esa razón no son tratadas en este apartado.

- En la primera etapa se analizan las potencialidades y limitaciones del artefacto con respecto al aprendizaje esperado. Esto supone el estudio de la transposición informática (Balacheff, 1994), como se definirá en este capítulo en la página 46.
- En la segunda etapa se diseña una secuencia didáctica tratando de aprovechar las potencialidades y limitaciones detectadas.

6.1.5. Las Fichas de estado. Dentro del modelo se contempla también la elaboración de una serie de fichas que documentan diferentes aspectos del recurso pedagógico y que se van enriqueciendo a través de la experiencia. Las cuatro primeras fichas (Ver figuras 1, 2, y 3) son fundamentales para dar vida a un recurso nuevo, ya que en ellas se encuentran las especificaciones más básicas sobre el recurso, para que así el usuario pueda utilizarlo adaptándolo a sus propias necesidades. En el modelo existen también otras Fichas con un nivel de complejidad mayor pero que se desarrollan conforme vaya evolucionando el recurso, como es el Guión de uso, una Ficha en la que se muestra la organización de los recursos tecnológicos y las actividades en el tiempo asignado.

Figura 1. Estructura de la Ficha Identificación

| | |
|-------------------------------------|---|
| Tipo | “indicar el tipo de actividad que se propone” |
| Nivel | “indicar el grado al que va dirigido” |
| Palabras clave | “indicar algunas palabras que se consideren significativas” |
| Objetivos pedagógicos generales | “indicar los objetivos generales en cuanto a los saberes conceptuales o técnicos en juego” |
| Método | “indicar las condiciones para la ejecución de la actividad” |
| Dispositivo técnico | “indicar aquí los medios materiales e informáticos necesarios” |
| Lista y descripción de los archivos | “indicar todos los archivos de datos, precisar su tipo y hacer una descripción breve de su contenido” |
| Descripción de la actividad | “indicar a grandes rasgos en qué consiste el desarrollo de la actividad” |

Esquema general de una ficha de identificación de un recurso pedagógico. Es un documento en el que se reseña el contenido del recurso. En ella se describen las características generales de la actividad para facilitar al usuario una visión global del recurso. Adaptado de *Conception et réalisation de ressources pédagogiques vivantes: des ressources intégrant les TICE en mathématiques*, por M. Joab, D. Guin y L. Trouche, 2003, *Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain*, Strasbourg, 4, p. 265. Copyright 2003 por Association of Information Technologies for Education and Training.

Figura 2. Estructura de la Ficha del Profesor

| | |
|---|--|
| Programa oficial | <ul style="list-style-type: none"> ▪ Habilidades requeridas: “indicar aquí las competencias requeridas en referencia explícita a la categoría del plan de área” ▪ Comentarios: «indicar aquí los comentarios — si los hay— relacionados con el plan de área» |
| Objetivos pedagógicos generales | “precisar los objetivos generales presentados en la ficha de identificación del recurso” |
| Prerrequisitos | “indicar aquí los requisitos previos (saberes y conocimientos técnicos)” |
| Interés | <p>“indicar cómo la actividad propuesta contribuye a alcanzar los objetivos pedagógicos”</p> <p>“indicar posibles vínculos con extractos de informes de experimentaciones que demuestran el interés”</p> |
| Descripción de la actividad instrumentada | “precisar la actividad descrita en la ficha de identificación poniendo de relieve el papel de los instrumentos.” |

Esquema general de una ficha de profesor de un recurso pedagógico. Es un documento que permite al profesor conocer y apropiarse de los propósitos pedagógicos de la actividad. Adaptado de *Conception et réalisation de ressources pédagogiques vivantes: des ressources intégrant les TICE en mathématiques*, por M. Joab, D. Guin y L. Trouche, 2003,

Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain, Strasbourg, 5, p. 265. Copyright 2003 por Association of Information Technologies for Education and Training.

Figura 3. Estructura de la ficha técnica

| | |
|------------------------|---|
| Nombre de los archivos | “indicar los nombres de los archivos necesarios” |
| Software utilizado | “indicar el programa informático y la configuración necesaria” |
| Descripción | “Hacer una descripción general del contenido de los archivos” |
| Instrucciones | “Indicar como utilizar el recurso” |
| Modalidad | “Indicar el modo en que se desarrollará la actividad” |
| Documentación | “indicar los vínculos con los manuales de usuario, los programas informáticos explotados, las descripciones generales de los dispositivos técnicos” |

Esquema general de una ficha técnica de un recurso pedagógico. Es un documento que busca facilitar al usuario la apropiación técnica del recurso. Adaptado de Conception et réalisation de ressources pédagogiques vivantes: des ressources intégrant les TICE en mathématiques, por M. Joab, D. Guin y L. Trouche, 2003, Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain, Strasbourg, 6, p. 266. Copyright 2003 por Association of Information Technologies for Education and Training.

La ficha del estudiante no tiene formato definido ya que ésta puede variar dependiendo de la actividad y del criterio personal de quien la diseña. Este documento tiene la finalidad de orientar al estudiante en el desarrollo de la actividad propuesta.

6.2. LA NOCION DE MEDIO

En la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1997), el aprendizaje surge cuando el estudiante es enfrentado a una situación problema que requiere la adaptación de conocimientos previos o la producción de nuevos conocimientos para así lograr obtener alguna solución. Brousseau (1997) señala que la evolución de los procesos resolutivos puede describirse — o mejor explicarse— en términos de interacciones entre dos sistemas, el estudiante y otro sistema opuesto llamado medio — o en francés milieu —. El medio facilita algunas acciones del estudiante y dificulta las demás. A la inversa, el estudiante recibe múltiples y diversas retroacciones del medio.

6.2.1. El caso de CABRI. El concepto de medio es muy amplio y puede referirse al aspecto material con el que el estudiante interactúa, así como a la noción más amplia de medio cultural. Desde la primera perspectiva, CABRI hace parte de un medio que interactúa con el estudiante y que por tanto, corresponde a sus características específicas y herramientas especiales para promover diferentes tipos de interacciones.

El modo de arrastre es una de las herramientas de CABRI que ofrece retroacciones a las acciones del estudiante. Ahora, como el uso de esta herramienta está subordinado a una teoría geométrica — principalmente euclidiana—, la retroacción externa⁷ es mucho más rica que en un ambiente de lápiz y papel, donde las nuevas acciones son emprendidas por la movilización de los propios conocimientos del estudiante.

Por otra parte, las acciones del usuario son espontáneas y las retroacciones que recibe le proporcionan información, lo que en cierto modo constituye un modelo experimental condicionado por el software. Pues bien, la experimentación en CABRI conjuga el uso de objetos primitivos y del modo arrastre, lo que hace que el campo de experimentación sea más amplio que el ofrecido por el lápiz y el papel, por lo tanto hace que aumenten las posibilidades de acción y retroacción.

En este sentido, las situaciones matemáticas (Brousseau, 2000) en CABRI deben apuntar a que las estrategias heurísticas se basen en conocimientos geométricos, de tal forma que éstos parezcan más eficaces que las estrategias empíricas o basadas solo en la percepción. Esto quiere decir que las situaciones deben intentar dar sentido a la noción de figura geométrica, o lo que Fishbein (1993) llama concepto figural.

6.2.2. El caso de MOODLE. Al igual que CABRI, la plataforma MOODLE hace parte del medio material con el que interactúa el estudiante, aunque el tipo de retroacciones no tienen el mismo alcance, dado que son del estilo falso/verdadero. Pues es bien cierto que MOODLE esencialmente es un conjunto de herramientas informáticas que facilita la gestión de cursos virtuales y sobretodo favorece la comunicación en línea entre los actores del proceso formativo. Con todo, el establecimiento de un conjunto adecuado de normas socio-técnicas y matemáticas que den prioridad a la colaboración es vital para el aprovechamiento didáctico de la conectividad (Hoyles, y otros, 2010).

6.3. REPRESENTACIONES MATEMÁTICAS

La tradición racionalista presente en el pensamiento occidental, desde Platón hasta Piaget, ha dado por supuesta la existencia de una entidad intermedia entre el sujeto cognoscente y el objeto de cognición, a la cual suele designarse con el término “representación”.

El concepto de representación, tal como señala Kaput (1987), involucra la consideración de dos entidades mutuamente relacionadas pero funcionalmente divergentes: el “objeto representativo” (símbolo) y el “objeto representado” (significado). Igualmente, implica cierta correspondencia entre el mundo de los objetos representados y el mundo de los objetos representantes. De aquí que la noción de representación deba describir al menos las siguientes cinco entidades:

⁷ La retroacción externa, según Laborde (1996), es uno de los principales rasgos característicos que distinguen a CABRI de los ambiente de lápiz y papel. Este tipo de retroacción visual es la que se obtiene del software cuando el usuario ejecuta una acción sobre éste para luego asimilarla por medio de la percepción visual. Algo que es imposible de realizar en un ambiente de lápiz y papel.

- los objetos representados;
- los objetos representativos;
- qué aspectos del mundo representado se representan;
- qué aspectos del mundo representativo realizan la representación; y
- la correspondencia entre los dos mundos.

6.3.1. Representaciones internas y externas. Una idea ampliamente aceptada en la comunidad internacional de educadores matemáticos es que los estudiantes deben pensar matemáticamente. Sin embargo, el aprendizaje comprensivo es algo que excede los límites de la Educación Matemática:

Para pensar y comunicar ideas matemáticas es preciso representarlas de alguna manera. La comunicación requiere que las representaciones sean externas, tomando la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos. [...] Para pensar ideas matemáticas es preciso representarlas internamente, de manera que la mente pueda operar sobre ellas (Hiebert, y otros, 1992 pág. 66).

Esto remite a la distinción entre sistemas de representación interna y externa, que tan importante es para la “psicología del aprendizaje” y el “hacer matemático”. A veces, en psicología, esta diferenciación es caracterizada con la distinción entre significado (interno) y significante (externo). Pero la relación de “significación” es insuficiente para comprender la magnitud de tal distinción en el ámbito de la Educación Matemática, puesto que resulta bastante inestable, multidireccional, variable e irreversible. Así, para dar un matiz que armonice con el contexto de la Educación Matemática, Goldin y Kaput (1996, pág. 399) introducen los términos representación interna y representación externa.

Las primeras hacen referencia a las posibles operaciones mentales que se realizan en los procesos de aprendizaje o en la resolución de problemas. Por supuesto, al ser internas, tales operaciones no son directamente observables más que por vía introspectiva. Por lo tanto, solo pueden inferirse a partir de los comportamientos verbal y matemático.

Las segundas, por su parte, se refieren a las manifestaciones físicas u operaciones observables, tales como palabras, gráficas, imágenes, ecuaciones o micromundos computacionales (Balacheff, y otros, 1996). Por ello, son en principio, susceptibles de ser observadas por cualquier persona que posea los conocimientos necesarios. De acuerdo con esto, la interpretación de representaciones externas como sistemas estructurados junto al sentido que toman las relaciones de representación, no es “objetiva” o “absoluta”, sino que depende de la lectura personal.

Algunas veces las personas exteriorizan físicamente ideas matemáticas por medio de interacciones derivadas de sus estructuras internas, es decir, a través de la escritura, de la comunicación oral, de la manipulación de objetos concretos, etc. Otras veces, las personas interiorizan conceptos matemáticos mediante interacciones con las estructuras físicas de un sistema de representación externa, como la lectura de texto, la interpretación de ecuaciones

y gráficas, etc. A menudo, las interacciones que se presentan entre las representaciones internas y externas suceden simultáneamente en ambas direcciones.

6.3.2. Representaciones en geometría elemental. La mente humana puede interpretar el mundo de sus experiencias solo a través de la construcción de modelos. Laborde (1992) distingue dos funciones complementarias en los procesos de modelización:⁸ uno de abstracción y otro de representación. En el caso de los modelos matemáticos existen objetos cuyo desarrollo teórico se produce por la interacción de los mismos con los modelos.

La geometría elemental es un ejemplo de ello. Las representaciones visuales en geometría permiten modelar abstracciones derivadas de la práctica, más concretamente, de objetos físicos. Esto quiere decir que las representaciones en la geometría elemental son representaciones icónicas (Glaserfeld, 1987). Es oportuno aclarar que no se trata de los mismos objetos que estudia la física, pues mientras ésta estudia características intangibles para la percepción sensorial (masa, velocidad, peso, etc.), la geometría elemental estudia las formas, es decir, objetos ostensibles (Chevallard, y otros, 1990).

Así, queda claro que los objetos del espacio geométrico no son los mismos del espacio físico. Ahora, la interiorización de estos objetos se da en dos sentidos opuestos, uno abstracto y otro concreto. Por un lado están las propiedades geométricas (teoremas, axiomas, postulados, etc.) y por otro están las propiedades espacio-gráficas (longitud, orientación, ubicación, forma, etc.). Luego, las representaciones internas — conceptos figurales o figuras geométricas— de los objetos geométricos surgen del ajuste e interacción entre estas dos dimensiones.

6.3.3. Representaciones en CABRI. La representación externa de objetos geométricos utilizando CABRI posee ciertas cualidades que las hacen particularmente productivas para el aprendizaje. Estas representaciones son ejecutables (Lupiáñez, y otros, 2001), es decir, tienen la potencia de simular acciones cognitivas independientemente de quien sea el usuario del software. Con esto, desaparece el carácter estático de las representaciones tradicionales, ya que las otras permiten ser manipuladas directamente y actuar sobre ellas.

En resumidas cuentas, la ejecutabilidad de las representaciones digitales lo que hace es incrementar la expresividad matemática, con lo cual se aumenta las posibilidades de abstracción, experimentación y comunicación matemática para el estudiante. Esto supone transformaciones sustanciales en la manera de concebir y gestionar las actividades matemáticas en clases. Por otra parte, la ejecutabilidad, hace posible la exteriorización de ciertas funciones cognitivas que se traducen en acciones y por tanto, producen retroacciones de parte del sistema, lo cual posibilita el trabajo conjunto del usuario con el artefacto utilizado.

⁸ Se entiende por “modelización matemática” como el proceso de elaboración de modelos matemáticos que buscan explicar de alguna forma fenómenos de un dominio real.

6.4. VISUALIZACIÓN Y COGNICIÓN

Como expresan Hilbert y Cohn-Vossen (1990) en el prefacio del libro *Geometría e Imaginación*, en matemáticas se pueden encontrar dos tendencias: una hacia la abstracción, que busca cristalizar y sistematizar las relaciones lógicas inherentes a los objetos matemáticos; y otra hacia la comprensión intuitiva, que enfatiza en el significado concreto de sus relaciones. Luego, los mismos autores añaden que a pesar de que la geometría moderna hace uso extensivo del razonamiento abstracto y el cálculo simbólico, la comprensión intuitiva sigue desempeñando un papel importante en geometría, no solo para quien la investiga sino también para quien desea aprenderla.

Haciendo paráfrasis de esta idea de Hilbert y Cohn-Vossen (1990), que con claridad capta el espíritu de la visualización en matemáticas, Zimmermann y Cunningham (1991) la describen como el proceso de producir o utilizar representaciones gráficas de conceptos matemáticos con o sin la mediación de la tecnología, para luego usarlos efectivamente en la modelación de principios o problemas matemáticos.

6.4.1. Visualización y Educación Matemática. Como puede advertirse la noción de visualización está fuertemente ligada a la formación de imágenes mentales y con soporte material, lo que hace suponer que debe de tener un papel de no desestimar en los procesos de pensamiento humano. Es por eso por lo que la relación del conocimiento matemático con la visualización ha sido objeto de interés para especialistas e investigadores del campo de la psicología y de las matemáticas.

Castro y Castro (1997), por ejemplo, aducen que entre investigadores y especialistas, aunque con distintos matices, hay una convergencia de opinión en cuanto a que el desarrollo de las capacidades que caracterizan a la visualización brinda a los estudiantes rutas de pensamiento alternas y nuevas formas de hacer matemáticas, en especial, en los procesos de razonamiento inductivo y deductivo.

6.4.2. Visualización con CABRI. Como es señalado reiteradamente por los investigadores, la principal virtud de CABRI es que permite la manipulación directa de representaciones construidas en pantalla con ayuda de la función “modo de arrastre”, sin que ello suponga alterar las relaciones estructurales entre las partes constitutivas de la figura, puesto que el código interno de CABRI mantiene cohesionadas dichas relaciones. Esto hace posible la experimentación en dominios que antes eran inaccesibles para el estudiante. Además, su conocimiento queda marcado por la relación dialéctica que se establece entre percepción y conceptualización durante la interacción con la interface del sistema.

6.5. TRANSPOSICIÓN INFORMÁTICA

El impacto epistemológico de las TIC sobre los objetos matemáticos ha sido mucho mayor de lo previsible. Esto hizo que fuera necesario ampliar el concepto de transposición didáctica al contexto tecnológico, dando lugar a la noción de transposición informática. En

este apartado se abordan algunos aspectos relativos a este asunto que se valora importante para el desarrollo de esta investigación.

6.5.1. Principio de mediación instrumental. Uno de los rasgos característicos que define a la cognición humana es que su funcionamiento y desarrollo a través de la historia ha estado mediado por instrumentos materiales y simbólicos (Moreno, 2001). Desde la perspectiva socio-cultural (Wertsch, 1993), esta tesis plantea, además, que la incorporación de instrumentos mediadores a la actividad humana no se limita tan solo a facilitar la acciones físicas o cognitivas sino que también altera toda la afluencia y la estructura de las funciones físicas y mentales.

En línea con estos planteamientos, Moreno (2002, pág. 92) sostiene que el estudiante auxiliado por los instrumentos computacionales construye una versión propia del conocimiento, y por lo tanto, el aprendizaje depende en su construcción e interpretación, de la especificidad del contexto en el que se produce. Por tal razón, es indispensable la intervención del profesor. De allí que sea importante considerar los aspectos relacionados a la mediación instrumental en la formación inicial y permanente de profesores.

El principio de mediación instrumental se expresa en los siguientes términos: “Todo acto cognitivo está mediado por instrumentos, bien sean materiales o bien simbólicos.”

6.5.2. Nuevo realismo matemático. Como es sabido, el impacto epistemológico de las TIC es mucho más profundo de lo que se esperaba hace tres o cuatro décadas. Este impacto, tal como es señalado por Balacheff y Kaput (1996), se debe esencialmente al proceso de reificación⁹ de los objetos matemáticos y las interrelaciones que el estudiante puede activar en los ambientes de aprendizaje informáticos, donde la actividad matemática es más directa que la que era posible anteriormente. En efecto, la manipulación directa de las representaciones externas de los objetos matemáticos junto a la reificación del conocimiento permite un tipo de experimentación que no exige técnicas elevadas o grandes conocimientos.

Este nuevo realismo matemático hizo necesario la extensión del proceso de la transposición didáctica (Chevallard, 1998) de las matemáticas hasta los contextos computacionales, dando lugar a la transposición informática (Balacheff, 1994), que en un sentido general, consiste en elaborar nuevos modelos de conocimiento que puedan articularse adecuadamente en la práctica docente real. Dicho en otras palabras, la transposición informática es el proceso por el cual se construyen nuevos objetos de enseñanza consustanciales con la naturaleza de los objetos matemáticos en su versión computarizada.

6.5.3. CABRI: Una nueva relación con la geometría. CABRI ha sido concebido principalmente para permitir distinguir los aspectos espacio-gráficos de los aspectos

⁹ En el contexto de las TIC en la Educación Matemática, el término reificación se define como el proceso mediante el cual las representaciones semióticas de los objetos matemáticos en su versión computarizada se transforman en conceptos matemáticos para el usuario de tales tecnologías.

geométricos, una asociación que difícilmente podría adquirir sentido en un ambiente de lápiz y papel. Con todo, el reconocimiento de la duplicidad de una figura geométrica no es algo que surge espontáneamente y por eso debería ser considerado como objeto de aprendizaje.

Como aduce Laborde (1996), las razones por las cuales las posibilidades ofrecidas por CABRI permiten configurar ambientes de aprendizaje que pueden favorecer el control de las dos clases de aspectos, son las siguientes:

- los fenómenos visuales adquieren especial importancia por el dinamismo de las representaciones;
- estos fenómenos están controlados por una teoría, ya que son el resultado de una modelización gráfica de ciertas propiedades de la geometría elemental; y
- el sinnúmero de posibilidades para crear situaciones geométricas que pueden ser visualizadas con varios objetos y en forma precisa.

Dentro de estas posibilidades se destacan en concreto las ofrecidas por el modo arrastre. Por un lado, cuando el usuario arrastra algún objeto primitivo de la construcción en pantalla no solo puede observar en tiempo real las modificaciones de una figura, sino que cada dibujo muestra un caso particular de la misma. Por otro lado, esto proporciona al usuario una herramienta para validar las propiedades que se aprecian en pantalla. Una propiedad puede ser válida solo si se mantiene su configuración durante el arrastre. En otros términos, una propiedad geométrica es una invariante perceptual.

Sin embargo, la construcción de instrumentos matemáticos a partir de las herramientas provistas por CABRI, conduce a un cambio sustancial de los problemas que usualmente se plantean, más que a una transformación de las matemáticas en sí, como a veces suele afirmarse. A este respecto, Balacheff (2000) distingue dos cambios que deberían tenerse en cuenta:

- La tecnología informática ofrece la oportunidad de tratar problemas y experimentar situaciones que no serían accesibles por otro medio distinto.
- Esta tecnología permite adoptar un enfoque experimental de las matemáticas, y como consecuencia cambia la naturaleza de su aprendizaje.

6.6. DISEÑO DE TAREAS CON CABRI

No cabe duda que los problemas pueden desempeñar un papel importante en la producción de conocimiento matemático de parte del estudiante, claro está, en la medida en que le permitan involucrar sus propias ideas y probar la validez y eficacia de las mismas durante el proceso de resolución. En este sentido, las tareas ocupan un lugar central en el desarrollo de la actividad matemática en clases (Christiansen, y otros, 1986).

En CABRI la resolución de problemas es también posible, especialmente por sus potentes posibilidades gráficas, pero dada la naturaleza de los procesos asociados a la reificación de

los objetos abstractos, más sofisticados que en un ambiente de lápiz y papel, el diseño de situaciones problema requiere un nuevo análisis de los objetos matemáticos y sus operaciones.

6.6.1. Tipo de tareas. Basándose en los desarrollos investigativos sobre las tareas que usualmente pueden proponer los profesores novicios y expertos con CABRI, se pueden establecer cuatro categorías de tareas (Laborde, 1998; 2001). Fernández y Garzón (2007) haciendo una adaptación de estas categorías proponen la siguiente tipificación de tareas:

6.6.1.1. Tareas tipo I: construcciones. Consiste en producir figuras y realizar variaciones durante la gestión que se desarrolla para la realización de éstas. A su vez se subdivide en tres:

1. La construcción de una figura geométrica donde sea ostensible la permanencia de las invariantes geométricas cuando se somete al modo de arrastre.
2. La construcción de una figura pero cumpliendo ciertas condiciones geométricas.
3. La construcción de una figura pero usando ciertas herramientas, ya que el profesor puede deshabilitar intencionalmente las herramientas del programa que podrían hacer aparecer trivial la actividad propuesta, lo que eventualmente haría que resulte poco significativa para lograr el aprendizaje esperado en el estudiante.

Este tipo de tareas es importante en la actividad geométrica mediada por CABRI, dado que las construcciones inciden en el desarrollo de esquemas mentales para la construcción, experimentación y conceptualización de propiedades y objetos geométricos, a la vez que permiten conjeturar soluciones parciales que gradualmente conducen a la solución efectiva de un determinado problema.

6.6.1.2. Tareas tipo II: descripción verbal. Se dirigen a la argumentación o demostración de parte de los estudiantes, de los hechos geométricos que aparecen en pantalla cuando ellos exploran una construcción dada. Los hechos geométricos pueden encontrarse cuando la figura en pantalla es sometida al arrastre. Por ejemplo, el lugar geométrico descrito por un punto cuando se mueve una configuración geométrica conectada con dicho punto.

6.6.1.3. Tareas tipo III: cajas negras o macros. Esta clase de actividad consiste en presentar a los estudiantes una figura construida automáticamente (macro-construcción) y pedirles que la reproduzcan o que encuentren alguna propiedad. Como es obvio, por ser una macro la función “Revisar construcción” no opera de la misma manera que lo hace con una construcción cualquiera, es decir, no reconstruye paso a paso las etapas de su realización sino que la presenta como una configuración acabada.

Esta actividad exige a los estudiantes dos tipos de operaciones:

- Explorar la figura desconocida y encontrar el comportamiento cuando se arrastra, hacer un análisis de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo los efectos del

arrastre, y en particular hacer la distinción entre lo que es eventual y lo que es necesario en la apariencia visual de la figura bajo el modo de arrastre.

- Verificar si las propiedades geométricas supuestas de la figura se satisfacen utilizando otros recursos del software.

6.6.1.4. Tareas tipo IV: enunciados de teoremas y su validación. Este tipo de actividades está siendo actualmente investigado en muchas partes del mundo con el renacimiento de la geometría por la puesta en escena de los ambientes de geometría dinámica. Tiene que ver con los procesos de argumentación y demostración en geometría.

Investigaciones en este sentido (Coutat, 2005), han puesto de manifiesto la dificultad que representa para los estudiantes discernir entre la hipótesis y la tesis del enunciado de un teorema dado. Asimismo, los hallazgos en esta materia han mostrado la efectividad de realizar conexiones entre los enunciados, la exploración sistemática en el ambiente, la construcción geométrica, y la verificación del teorema para favorecer los procesos de argumentación y demostración en los estudiantes.

En la presente investigación se contempla la elaboración de un recurso pedagógico sobre la parábola, el cual describe una secuencia didáctica que comprende los cuatro tipos de tareas con CABRI arriba referidos (Ver página 84).

7. MARCO PEDAGÓGICO

Así como la Didáctica es la ciencia que se ocupa de estudiar cuestiones relacionadas a la difusión de los conocimientos útiles a las personas que viven en sociedad (Brousseau, 2004), la Pedagogía como ciencia tiene por objeto el estudio del proceso educativo en su conjunto, centrándose en la formación del ser humano. Para ello se rige de acuerdo con las normas establecidas y aceptadas socialmente en un determinado tiempo y lugar (Arboleda Toro, 2005).

En este capítulo se expone algunos elementos de las teorías pedagógicas constructivistas más significativas para el desarrollo de esta investigación, las cuales han sido ampliamente difundidas en el ámbito de la Educación Matemática, y que en la actualidad son de especial atención debido a la potencia pedagógica que se deriva de las nuevas herramientas informáticas aplicadas a la educación, como es el caso de las plataformas e-learning, y en particular, de MOODLE, cuyo diseño se sustenta en el constructivismo genético y el social constructivismo.

7.1. VISIÓN CONSTRUCTIVISTA DEL APRENDIZAJE

Con el término “Constructivismo” se designa a una variedad de escuelas de pensamiento, algunas veces diametralmente opuestas a las demás. Lo que une a muchas de ellas es la metáfora que compara la construcción con la carpintería o la arquitectura. Esta metáfora se refiere a la construcción de estructuras a partir de piezas predispuestas posiblemente de manera especial para llevar a cabo tal tarea.

En su forma más simple, la metáfora define al aprendizaje como un proceso mediante el cual se construyen nuevas estructuras mentales. Aquí el término “reestructuración” es usado como sinónimo de acomodación o cambio conceptual, términos propios del argot del Cognitivismo. Lo que la metáfora no tiene por qué dar cuenta en la mayoría de corrientes es que el aprendizaje sucede gracias a las piezas que el sujeto cognoscente recibe del objeto cognoscible.

El proceso en sí es recurrente, por lo que los bloques de conocimiento construidos son el producto de actos previos de construcción. Así, la distinción entre estructura y contenido sólo puede ser relativa. Las estructuras construidas previamente se convierten en el contenido de construcciones subsecuentes. Los significados, las estructuras y el conocimiento son emergentes.

En este sentido, el conocimiento no se recibe pasivamente sino que es construido activamente por el sujeto cognoscente. A pesar de que tales posiciones simplistas de interpretar el constructivismo basándose tan solo en este principio pueden ser consideradas

sencillas, representan un paso adelante, muy significativo además, del empirismo ingenuo o del conductismo clásico.

Lo que se ha denominado “constructivismo simple” puede describir hasta cierto punto algunas teorías de aprendizaje neo-conductistas y cognitivistas, aunque por ello no deben descartarse a la ligera. Los modelos de cognición presentes en los trabajos de Ausbel, Gagné y otros, son exiguos pero complejos.

Un principio compartido en la mayoría de corrientes constructivistas es aquella tesis que supone que los conocimientos previos y la comprensión son prácticamente la base de todo aprendizaje posterior.

Como sea, el constructivismo ha sido una de las teorías principales o si no la filosofía dominante en la comunidad de investigadores en Educación Matemática desde la polémica conferencia internacional PME celebrada en Montreal en el año de 1987. Por otra parte, la visión constructivista del aprendizaje activo constituye uno de los planteamientos pedagógicos que ha llevado al desarrollo de la plataforma MOODLE.

No obstante, como es señalado por Seoane y García (2007), ni la utilización de MOODLE ni de ninguna otra herramienta e-learning garantiza la construcción de conocimiento ni fomenta la consecución de objetivos determinados. Es muy poco probable que la intención de quien construye la herramienta pueda estar en sintonía con los usos posibles del usuario y sus respectivos resultados.

7.2. CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE CONOCIMIENTO

Hay una variedad de posturas con relación al constructivismo social, todas ellas basadas en los trabajos de Vygotski. Sin embargo por su simplicidad es plausible tratarlas como una sola. El constructivismo social, en particular, hace referencia a la mutua conexión que se establece naturalmente entre el individuo y el mundo limitado por el contexto cultural en que habita, vínculo que desde esta perspectiva se considera indisoluble.

El ser humano se forma interactuando con los demás miembros de su grupo social, así como por sus procesos de cognición individuales. Por lo tanto no existe un modelo subyacente de la mente individual aislada socialmente. Aquí, la metáfora es dialógica, pues relaciona la construcción de conocimiento con una “conversación informal”, en la que las personas se involucran en interacciones significativas de tipo lingüístico y extra-lingüístico.

En este enfoque se considera que de las interacciones sociales surgen instrumentos simbólicos y materiales que son creados colaborativamente, por lo tanto suscitan la adquisición, estructuración y uso de sistemas semióticos compartidos. En estos términos, el aprendizaje es un proceso de negociación de significados de los productos culturales, es allí donde se inscribe la construcción de conocimiento.

8. MARCO CURRICULAR

El término currículum se refiere a un conjunto de elementos diversos que confluyen en el desarrollo de los procesos educativos. Asimismo, tiene que ver con los distintos actores que intervienen en tales procesos. En este capítulo son tratados tres asuntos que conciernen a la dimensión curricular del módulo propuesto en el marco de la presente investigación: (i) formación docente en matemáticas y tecnología; (ii) cultura geométrica en el contexto escolar; e (iii) historia de las matemáticas y formación docente.

8.1. FORMACIÓN DOCENTE EN MATEMÁTICAS Y TECNOLOGÍA

La formación de profesores en Matemáticas y Tecnología es uno de los puntos más importantes a tener en cuenta para el diseño del módulo propuesto, ya que es ampliamente considerado como un asunto vital para lograr la integración efectiva de las TIC en la Educación Matemática en todo nivel. En este apartado se desarrollan algunas cuestiones sobre este respecto.

8.1.1. Desarrollo profesional de los profesores. La profesionalización docente en el contexto de las TIC tiene que ver particularmente con el desarrollo de habilidades que los profesores deben movilizar para hacer efectiva la integración de las TIC en sus clases. Es por esa razón que se considera que la formación de profesores está vinculada estrechamente con la noción de “competencia”.

Ser competente, en términos generales, es saber hacer y saber entender lo que se hace; saber aplicar reglas o hacer operaciones no basta. Ahora, la noción de competencia extrapolada al ámbito educativo adquiere un matiz más amplio. Enseñar o formar no es un oficio como cualquier otro, cuya tarea principal consista en transformar materia prima o producir bienes materiales o inmateriales. Se trata, en un sentido extenso, de transmitir conocimientos en una situación colectiva de interacción humana, por lo general compleja.

Con base en el estado del arte que hace Lévy (2004) sobre este respecto, se puede inferir que la formación docente en el escenario tecnológico actual exige a los profesores y formadores tres tipos de competencias:

- Competencias técnicas: por un lado, saberes relacionados al dominio práctico de las TIC — software, recursos multimedia e Internet principalmente— y su aplicación racional en el ejercicio de la profesión; y por otro, habilidades meta-cognitivas que promuevan la toma de conciencia y el pensamiento reflexivo sobre la propia práctica.
- Competencias didácticas: saberes focalizados en el desarrollo de destrezas y habilidades que permitan la planificación adecuada del proceso de enseñanza y aprendizaje, lo cual se concretiza en la capacidad para diseñar situaciones didácticas.

- Competencias pedagógicas: saberes referentes a la identificación y desarrollo de disposiciones estables que permitan gestionar, en primera instancia, conocimientos y recursos en el espacio y tiempo asignados para una actividad académica determinada; y en segunda, los métodos de intervención y gestos necesarios en función de las situaciones planteadas.

8.1.2. Legitimidad educativa de las TIC. Las matemáticas concebidas como un modelo puramente científico a menudo comunican la imagen de un edificio teórico cimentado sobre bases pobres en tecnología. Sin embargo, la actividad matemática se sustenta en el desarrollo y aprovechamiento de instrumentos materiales y simbólicos. Efectivamente, existe una larga tradición de matemáticos que hacen uso de herramientas tecnológicas, y en reciprocidad, el uso de éstas ha dado lugar a nuevos problemas.

No obstante, el concepto más usual entre los profesores con respecto a la enseñanza de las matemáticas, y en particular de la geometría, es más próximo a la imagen de un territorio absoluto e infalible que a la actividad matemática misma (Barrantes, y otros, 2004). No sorprende entonces, que el uso de las TIC de parte de estudiantes y profesores, a pesar de que sea cada vez más frecuente en la realización de sus actividades fuera de clases, dentro del aula siga siendo considerado un acto innecesario e incluso ajeno a la enseñanza de las matemáticas.

Precisamente es esta circunstancia la que ha originado tradicionalmente el conflicto entre la legitimidad social y educativa de cualquier objeto o innovación que se haya intentado insertar en el ámbito escolar. Adoptando el enfoque ecológico, esto puede explicarse como un problema de viabilidad (Chevallard, 1992). Esto quiere decir que los nuevos objetos deben adquirir un estatuto epistemológico y didáctico como lo tienen otros instrumentos, como por ejemplo, la regla y el compás.

Sin embargo, esto no es una tarea sencilla, pues como señala Laborde (2001), las TIC no son un elemento adicional al sistema didáctico sino que se sitúan en el corazón del sistema, relacionándose con todos sus componentes. Por lo cual se precisa hablar mejor en términos de “integración” en vez de “incorporación”. Ahora bien, entre los profesores la tendencia natural a rechazar toda nueva tecnología hace que la realización de este proceso se dificulte aún más. Por tal razón, la formación docente en Matemáticas y Tecnología es un factor clave para superar esta dificultad (Artigue, 1998).

8.2. CULTURA GEOMÉTRICA EN EL CONTEXTO ESCOLAR

Otro aspecto que es de relevancia para orientar el diseño del módulo propuesto hace referencia al papel que ocupa actualmente la enseñanza de la geometría en el ámbito educativo y las demandas que surgen de dicha situación. En este apartado se toca algunos temas relacionados a la situación actual de la enseñanza de la geometría en general.

8.2.1. La “matemática moderna”. “Aunque algunos piensan que esa reforma [hacia la matemática moderna entre 1970 y 1980] ya no tiene nada que ver con lo que pasa en la

educación matemática de hoy en día, la realidad es que buena parte de los matemáticos y educadores en el mundo fuimos formados intelectualmente en ese marco, para bien o para mal y, además, buena parte de los textos y el currículo de nuestras escuelas y colegios todavía llevan su impronta de una manera muy clara” (Barrantes, y otros, 1997).

Como es sabido, el clima social y político marcado por el desarrollo de la Guerra Fría, incidió decisivamente para que a escala mundial se emprendieran acciones institucionales encaminadas a situar la formación matemática en el contexto científico y tecnológico de las principales sociedades occidentales.

Esta situación concitó la atención de la comunidad de matemáticos profesionales, quienes consideraron oportuno introducir la “matemática moderna” en el currículo escolar como una estrategia adecuada para establecer un puente entre las matemáticas preuniversitarias y universitarias.

El movimiento de renovación hacia la matemática moderna, inspirado en la ideología Bourbaki, produjo así un desmantelamiento progresivo de los programas de geometría elemental, sobre todo en Educación Secundaria y Media. Los contenidos geométricos, como indica Sánchez Vázquez (1997), se convirtieron, especialmente en la Educación Media, en capítulos de álgebra lineal.

En general, las cuestiones relativas a las figuras geométricas y sus relaciones fueron prácticamente suprimidas, en particular, aquellas que no encajaban dentro de la teoría de los espacios lineales, como por ejemplo, el estudio de las secciones cónicas y de otras curvas notables. De esta manera, los problemas geométricos fueron siendo gradualmente sustituidos por ejercicios muy cercanos a la simple memorización de términos y axiomas.

Como consecuencia, el detrimento de la enseñanza de la geometría elemental puede percibirse aún en los profesores formados en años recientes, al menos en los países con menor tradición escolar. Lo que, como es comprensible, tiende a ser replicado de forma natural en sus prácticas profesionales. Síntomas de ello se puede encontrar en las pruebas TIMSS 2007, donde Colombia tiene en álgebra un puntaje promedio que excede al de geometría en veintiún puntos. Aunque la diferencia no sea tan significativa ni mucho menos generalizable, si se puede tomar como un punto de referencia.¹⁰

8.2.2. La formación docente en geometría. La formación inicial y continuada de profesores es, desde luego, un tema de vital importancia para mejorar la calidad de la enseñanza de las matemáticas. Durante los primeros años de la reforma hacia la “matemática moderna”, la preparación de profesores en servicio y en formación inicial estuvo centrada en la aprehensión de los nuevos conceptos y el nuevo lenguaje que se quería impartir en los colegios.

¹⁰ nces.ed.gov/pubs2009/2009001.pdf

En cuanto al aspecto didáctico, los “cursillos de actualización” no tuvieron otro propósito que el de mostrar a los profesores la necesidad de atender a su propia profesionalización. Lo que en cierto modo, no puede observarse inapropiado, pero sí insuficiente.

A partir de la década de 1970 se comenzó a sentir, en la comunidad internacional de educadores de matemáticas, la necesidad de que los profesores manejaran también aspectos psicológicos y pedagógicos. Pese a ello, la pretensión de enseñar estructuras algebraicas, llevó a que en los cursos de geometría se intentara poner fin al “método deductivo axiomático” para su enseñanza, creyendo que así ésta se alejaría de la exposición razonada de lemas, teoremas y corolarios. Pero con el tiempo se observó que los objetivos no sólo se incumplieron, sino que se cayó en un nuevo formalismo, más rígido y vacío que el anterior.

Años más tarde, con el crecimiento demográfico, la enseñanza tradicional de la geometría abstracta se hizo más difícil e inapropiada para las expectativas de las nuevas generaciones de educandos, dado que ésta ya no se impartía a un selecto grupo de estudiantes sino a grupos numerosos. Al mismo tiempo, la ampliación de la cobertura del sistema educativo demandaba la pronta formación de más profesores, lo que incidió negativamente en su preparación universitaria, en particular, con relación a la geometría elemental.

Desde que los profesores más jóvenes aprendieron matemáticas bajo estos lineamientos curriculares que han descuidado la geometría elemental, hace falta mayor fundamentación en este campo, lo cual ha generado la tendencia en las nuevas generaciones de profesores a descuidar la enseñanza de la geometría. Pues como se ha comprobado, los profesores tienden a reproducir los mismos modelos que experimentaron de estudiantes.

8.3. HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y FORMACIÓN DOCENTE

Las investigaciones en Didáctica de las Matemáticas reconocen la importancia del estudio de la historia de los conceptos matemáticos a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto (Rojano, 1994 pág. 46).

Al estudiar la génesis histórica se pone de manifiesto que para un mismo concepto matemático se han ido sucediendo una diversidad de puntos de vista sobre el mismo que, en su momento, fueron considerados como correctos y posteriormente han sido rechazados o revisados. Por su parte, la epistemología ayuda a establecer la configuración de los elementos constitutivos de la significación de un determinado concepto, analizando los diferentes sentidos con los que ha podido aparecer y su adaptación a la resolución de los distintos problemas (Rojano, 1994 pág. 47).

Otro acercamiento a la investigación histórico – epistemológica, intenta determinar concepciones y obstáculos ligados al desarrollo de una noción matemática, como una herramienta útil para el análisis didáctico de las concepciones y obstáculos que se pueden presentar en los alumnos. Se acepta empero que existen marcadas diferencias entre el desarrollo histórico de un concepto y su aprendizaje escolar, pero a la vez se considera que

identificar obstáculos en la historia permite diseñar modelos didácticos de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes.

En este sentido, el diseño del módulo propuesto reconoce que la historia es un elemento importante que puede contribuir a organizar adecuadamente los contenidos y comprender mejor los objetos de enseñanza del saber matemático. En este apartado se hacen algunas reflexiones sobre este particular.

8.3.1. El papel de la historia en matemáticas. Una célebre máxima del materialismo histórico contemporáneo es la suscrita por Pierre Vilar y que enuncia, así: “hay que comprender el pasado para conocer el presente” (Madariaga Orbea, 2003). En este sentido, se coincide con Lusa Monforte (1984) en que la historia de la ciencia y la técnica es esencial para la comprensión completa y profunda de los conceptos fundamentales de cada disciplina científica y técnica, para captar así el sentido procesual y dinámico de la actividad científica.

Particularizando al campo de las matemáticas el aforismo histórico arriba referido, Bell (1945 pág. 45) realiza la siguiente alusión: “ningún tema pierde tanto cuando se le divorcia de su historia como las matemáticas”. En efecto, se asume con De Guzmán (2007 pág. 29) que:

Normalmente, la historia nos proporciona una magnífica guía para enmarcar los diferentes temas, los problemas de los que han surgido los conceptos importantes de la materia, y nos da luces para entender la razón que ha conducido al hombre para ocuparse de ellos con interés. Si conocemos la evolución de las ideas de las que pretendemos ocuparnos, sabremos perfectamente el lugar que ocupan en las distintas consecuencias, aplicaciones interesantes que de ellas han podido surgir, la situación reciente de las teorías que de ellas han derivado.

Sobre este respecto, es pertinente señalar que Río Sánchez (1994 pág. 50), tras haber realizado un estudio histórico de los conceptos y procedimientos relacionados con el tema de los lugares geométricos, reconoce que los conceptos, y sobre todo, los procedimientos, se van construyendo lentamente a partir de tanteos, exploraciones, aproximaciones, formulaciones de conjeturas, etc. Muchas veces [añade el autor], en una primera etapa se producen “errores” que se van corrigiendo cuando se formalizan posteriormente.

Finalmente, la historia permite constatar que las matemáticas han sido construidas por personas sumidas en un mundo con características concretas que condicionan su trabajo; y que en esas personas, no necesariamente matemáticos profesionales o científicos, ha existido mucha curiosidad por investigar y resolver problemas.

8.3.2. La historia como instrumento para la formación docente. La Didáctica de las Matemáticas se interesa en principio en los fenómenos relativos a la producción y transmisión de conocimientos. Pero, debido a que la Educación Matemática soporta

diferentes campos del conocimiento, no es posible separar la didáctica de lo que se ha llamado tradicionalmente “epistemología de las matemáticas”. Por lo tanto, la didáctica comparte con la epistemología y la historia, un mismo objeto de estudio. Lo que diferencia estas disciplinas es el tipo de fenómenos que estudian, las preguntas que plantean y los problemas que construyen para explicar dichos fenómenos.

Es por esa razón que el estudio de la historia de las matemáticas, como expresa Gómez Urbaneja (2004), destacado profesor e historiador de matemáticas, puede ser un elemento importante en la formación permanente de los profesores, así como un instrumento de enorme utilidad para orientar la actividad docente.

De Guzmán (2007), por su parte, se refiere a este mismo asunto de la siguiente manera:

A mi parecer, un cierto conocimiento de la historia de la matemática debería formar parte indispensable del bagaje de conocimientos del matemático en general, y del profesor de cualquier nivel, primario, secundario o terciario, en particular. Y, en el caso de este último, no sólo con la intención de que lo pueda utilizar como instrumento en su propia enseñanza, sino primariamente porque la historia le puede proporcionar una visión verdaderamente humana de la ciencia y de la matemática, de lo cual suele estar también el matemático muy necesitado.

En otro orden de ideas, se precisa destacar que el estudio histórico de las primeras caracterizaciones de las cónicas, al parecer, promueve la activación de conocimientos geométricos en los profesores (Bongiovanni, 2002), pues como señala Gómez Urbaneja (2004): “el conocimiento de la historia favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos, a través de la intelección del proceso real de creación de los conceptos”.

9. DESCRIPCIÓN DEL MÓDULO

El módulo Las Cónicas va dirigido principalmente a docentes del área de matemáticas con formación y experiencia en Educación Media, además de aquellos que se interesan por la integración de software educativo en el ámbito de la geometría escolar. Es, pues, de considerar que, dentro del sistema educativo la función de facilitar la educación geométrica es responsabilidad profesional de los profesores de matemáticas. En este sentido, el conocimiento disciplinario de los profesores puede considerarse como la base epistemológica de la didáctica de la geometría.

Por otro lado, la formación geométrica de los profesores debe responder a la demanda de nuevas competencias profesionales para afrontar la compleja realidad de la sociedad actual, sostenida fundamentalmente por el desarrollo tecnológico. Desde una visión estratégica, que apunta al fortalecimiento de la cultura geométrica y tecnológica en los profesores, las cónicas se estiman como objetos idóneos para la concepción de un proceso de formación continua que persiga tales fines.

En primer lugar, el estudio de las cónicas remite y relaciona diversos conocimientos del saber geométrico. Y en segundo lugar, la puesta en escena de los ambientes de geometría dinámica ha generado un nuevo campo de experimentación muy conveniente para la exploración de estos objetos que tradicionalmente han sido poco difundidos en el ámbito escolar. Así pues, el contenido del módulo tiene dos propósitos: por un lado, contribuir a profundizar en el conocimiento matemático de las cónicas, y por otro, ampliar la perspectiva didáctica con relación a estos objetos.

Para ello se adopta un punto de vista histórico. Asimismo, se abordan cuestiones que desde la Didáctica de las Matemáticas se valoran pertinentes en cuanto a la integración de CABRI. En cuanto a la gestión del proceso formativo, esta será regulada por medio de la plataforma e-learning MOODLE. De esta manera, bajo tales premisas, se espera entonces que el módulo promueva el desarrollo de competencias que permitan la madurez del aspecto profesional en los docentes y los prepare para un proceso de mejora continua de sus conocimientos matemáticos así como de sus habilidades tecnológicas aplicadas al ejercicio de la docencia.

9.1. OBJETIVOS DEL MÓDULO

En este apartado se indican los objetivos generales y específicos del módulo propuesto en el contexto del desarrollo de la presente investigación.

9.1.1. Objetivos generales. El módulo tiene por objeto:

- Desarrollar estrategias y actividades encaminadas a fomentar en los docentes la aplicación de conocimientos disciplinarios y la planificación de acciones didácticas con relación al saber matemático de las cónicas.
- Promover el uso de las TIC en el manejo, análisis, integración y evaluación de información para apoyar el desarrollo profesional personal con relación al saber matemático de las cónicas.

9.1.2. Objetivos específicos. Para alcanzar los objetivos generales propuestos con este módulo se busca concretamente:

- Profundizar en el concepto de cónicas como objetos matemáticos a través del estudio histórico de sus primeras caracterizaciones geométricas.
- Promover la reflexión en torno a la enseñanza y aprendizaje de las cónicas, tomando como base el estudio histórico de sus primeras caracterizaciones geométricas.
- Proporcionar una base teórica para orientar el diseño de tareas sobre cónicas con Cabri-Géomètre II, fundamentada en los desarrollos de la Didáctica de las Matemáticas.
- Elaborar un recurso pedagógico debidamente estructurado, tanto en su aspecto técnico como conceptual, para poder ser utilizado en la enseñanza de cónicas con el ambiente Cabri-Géomètre II.

9.2. ESTRUCTURA DEL MÓDULO Y CONTENIDOS

El módulo Las Cónicas está dividido en tres unidades temáticas y una de presentación. En la tabla 1 se muestra una relación entre cada una de las unidades y su respectivo eje temático. Más abajo se hace una descripción detallada de cada una de las unidades temáticas.

Tabla 1
Estructura global del módulo

| Unidades | Eje Temático |
|----------|---|
| Cero | Aspectos Generales |
| Uno | Perspectiva histórica – epistemológica: aproximación al significado de las cónicas. |
| Dos | Enseñanza y aprendizaje de las cónicas integrando Cabri-Géomètre II plus. |
| Tres | Diseño de recursos pedagógicos sobre cónicas. |

9.2.1. Unidad 1. En esta unidad se ilustra, mediante modelos dinámicos realizados con CABRI, algunas de las caracterizaciones que se han hecho de las cónicas en distintos periodos históricos y que además se consideran pertinentes para contribuir a profundizar en su conocimiento epistemológico. Esperando que con esta temática se posibilite la reflexión con vista a establecer implicaciones didácticas derivadas del estudio histórico de las cónicas.

Los contenidos temáticos de esta unidad se agrupan en tres bloques:

A. PERIODO GRIEGO

Periodo pre-apoloniano

- La aplicación de áreas.
- El origen de las cónicas.
- Primera caracterización.
- Las cónicas en Arquímedes.

Periodo clásico

- El cono doble.
- Las secciones circulares.
- La construcción de cónicas.
- La propiedad fundamental.
- Los nombres de las cónicas.

Época de los comentaristas

- La propiedad foco-directriz.

B. MEDIOEVO Y RENACIMIENTO

- Las cónicas en el Mundo Islámico.
- Perspectiva renacentista.

C. SIGLO XVII

- Las cónicas en Fermat
- Las cónicas en Descartes.
- Las cónicas en Witt
- Las cónicas en Wallis
- Las cónicas en Van Schooten.
- Las cónicas en L'Hospital.

9.2.2. Unidad 2. En esta unidad se puntualizan algunas cuestiones sobre la integración de CABRI en la enseñanza y aprendizaje de las cónicas, especialmente en aquellos puntos que desde la óptica de la Didáctica de las Matemáticas se consideran relevantes para el diseño de tareas con CABRI, debido a que estas se estiman como la actividad objetiva que configura las situaciones de aprendizaje. Con esta temática se busca proveer de criterios y metodología para la concepción reflexiva de tareas mediadas con CABRI.

Los contenidos temáticos de esta unidad se agrupan en cuatro bloques:

ASPECTO EPISTEMOLÓGICO

- Las cónicas como “saber sabio”.
- Las cónicas como “saber a enseñar”.
- Las cónicas como “saber enseñado”.

ASPECTO COGNITIVO

- Conocimientos previos.
- Ideas previas o preconceptos.
- Concepciones erróneas.

ASPECTO DIDÁCTICO

- Representación y Visualización.
- Construcción y Demostración en Geometría.
- El ‘Milieu’ y las Retroacciones.
- Las tareas en el ambiente CABRI.

ASPECTO INSTRUMENTAL

- El modo arrastre.
- Construcciones blandas y robustas.
- Macro-construcciones.

9.2.3. Unidad 3. En esta unidad se busca introducir a los docentes en la fase de diseño y concepción de un recurso pedagógico para el ambiente de geometría dinámica CABRI. Con esto se espera que el profesor novicio sea capaz de desarrollar su capacidad de análisis y síntesis de los contenidos temáticos que se han abordado hasta aquí, para que finalmente los elementos teóricos adquiridos sean puestos en práctica.

9.2.4. Evaluación. La evaluación en el módulo se concibe como un proceso continuo de carácter formativo que contribuye a la reflexión y toma de decisiones con respecto a las acciones que se efectúen sobre la información presentada, y finalmente a la aplicación de los nuevos conocimientos adquiridos. El seguimiento del proceso de formación se hace a través de diferentes tipos de tareas y canales de comunicación provistos por la plataforma MOODLE.

Para cada tema se proponen actividades evaluativas que pueden ser dispuestas y detalladas por el tutor conforme al cronograma establecido.

9.2.5. Actividades. En el módulo se proponen actividades por cada una de las unidades.

9.2.5.1. Actividades de la unidad uno. El propósito de las actividades que se proponen en la unidad uno es sobretodo permitir a los docentes que consigan una perspectiva

epistemológica más amplia del concepto de cónicas, con el fin de establecer algunas implicaciones didácticas. En este sentido, la historia se convierte en un valioso recurso didáctico para ampliar la comprensión con respecto a la naturaleza geométrica de dichos objetos.

Las actividades propuestas son de dos tipos:

- Actividades individuales: lecturas y videos.
- Actividades colectivas: foros y glosario.

9.2.5.2. Actividades de la unidad dos. El propósito de las actividades que se proponen en la unidad dos es facilitar a los docentes algunos elementos que les permita reflexionar acerca del acto de integrar CABRI en el ejercicio de la docencia matemática, y en particular, de la enseñanza de las cónicas. Asimismo, se espera proveer un sustento teórico para la organización y planeación de tareas con CABRI. En este apartado se hace una descripción técnica acerca de su tipología.

Las actividades propuestas son de dos tipos:

- Actividades activas: módulos de actividades MOODLE.
- Actividades expositivas: lectura de contenidos temáticos.

9.2.5.3. Actividades de la unidad tres. En esta unidad las actividades están encaminadas a complementar los conocimientos adquiridos a través del desarrollo de una serie de actividades que tienen como objetivo la creación colaborativa de recursos pedagógicos sobre la elipse y la hipérbola.

- Actividad de ampliación. Está dirigida a complementar el componente instrumental del diseño de tareas. Para ello se enfatizará en la noción de recurso pedagógico y las implicaciones del diseño de tareas en ambientes de geometría dinámica.
- Actividad de profundización. En este apartado se propone un ejemplo de un recurso pedagógico para la enseñanza de la parábola y el cual debe ser estudiado por los profesores novicios. El propósito de esto es ofrecer una vista más concreta de su estructura, para así favorecer su conceptualización.
- Actividad de aplicación. Esta actividad consiste en un taller grupal diseñado para involucrar a los usuarios del módulo en la creación colectiva de un recurso pedagógico, uno sobre la elipse y otro sobre la hipérbola. Por ello, la actividad requiere la división del grupo en dos.

9.2.6. Materiales y recursos. Los materiales didácticos son aquellos objetos que se diseñan con fines estrictamente educativos, esta peculiaridad es lo que los diferencia de los recursos, los cuales no son creados justamente para educar pero sí pueden ser utilizados para ese fin (Ver tabla 2). Con todo, cuando los materiales didácticos trascienden la intención de uso original y admiten otras aplicaciones, es difícil establecer claramente un

extremo que delimite al recurso del material (Coriat, 2000). Por esa razón se emplea aquí los dos términos.

Tabla 2
Materiales y recursos distribuidos por categoría y unidades

| Tipo | Unidad 1 | Unidad 2 | Unidad 3 | Total |
|----------------------|----------|----------|----------|-------|
| Guías introductorias | 1 | 1 | 1 | 3 |
| Archivos CABRI | 44 | 3 | 3 | 50 |
| Ventanas emergentes | 16 | 12 | 0 | 28 |
| Videos | 2 | 1 | 3 | 6 |
| Presentaciones | 0 | 3 | 2 | 5 |
| Fichas de estado | 0 | 0 | 4 | 4 |
| Documentos SWF | 0 | 4 | 0 | 4 |
| Documentos PDF | 0 | 3 | 4 | 7 |
| Foros | 9 | 0 | 0 | 9 |
| Glosarios | 1 | 0 | 0 | 1 |
| Patatas | 0 | 13 | 0 | 13 |
| Talleres | 0 | 0 | 2 | 2 |
| Consultas | 0 | 1 | 0 | 1 |

- Las guías introductorias son documentos elaborados para orientar los posibles itinerarios de aprendizaje del usuario, para el logro de los objetivos marcados en la programación.
- Los archivos CABRI son ilustraciones dinámicas que tienen por objeto dar a conocer algunas propiedades particulares de los objetos geométricos tratados, lo que posiblemente permitirá una mayor comprensión que las imágenes estáticas.
- Las ventanas emergentes brindan información complementaria a las ideas expuestas en el contenido principal.
- Los videos son la mayoría de Google Videos y Youtube. Éstos se consideran indispensables para el desarrollo de las actividades. El único video original realizado por el investigador, enseña a resolver un problema de “lugar geométrico oculto”, en concreto, a encontrar el foco y la directriz de una parábola dada, siendo el único dato la curva misma.
- Las presentaciones también son necesarias para el desarrollo de las actividades. Incluso tres de ellas se utilizan para lecciones.
- Las Fichas de estado son los documentos que conforman el recurso pedagógico propuesto por el investigador.
- Los documentos SWF son textos digitales que tienen la facultad de simular el efecto de revista, es decir, del movimiento de la hoja cuando se cambia de página. Estos documentos contienen información relativa al aspecto didáctico: representaciones, visualización, milieu, etc.
- Los documentos PDF son las demás lecturas, soportadas en el ampliamente difundido formato para ADOBE ACROBAT.
- Los foros son espacios concebidos para la discusión y el debate.

- El glosario es un ejercicio en el cuál se puede aportar conceptos o enriquecerlos colaborativamente.
- Las patatas son una serie de cuestionarios de diversos tipos: falso/verdadero, de respuesta corta, de selección múltiple, etc.
- Los talleres constituyen la última actividad del módulo y deben desarrollarse necesariamente en grupo.
- La consulta es una especie de encuesta, en este caso, relativa a las concepciones previas sobre el conocimiento matemático de las cónicas.

10. METODOLOGÍA

La elaboración de módulos de aprendizaje es una acción pedagógica que requiere el desarrollo de un proceso permanente de planificación o diseño de material, de uso o experimentación, y de revisión y actualización para mejorarlo. La fase de planificación o diseño (Area Moreira, 2002) persigue básicamente crear una versión primigenia del módulo. Ésta es una fase que a su vez consta de distintos pasos.

La propuesta metodológica para la elaboración del módulo propuesto, en adelante “Módulo. Las Cónicas” como ha sido registrado, está basada en un “modelo para la elaboración de módulos electrónicos para Internet” (Area Moreira, 2002), así como en la “metodología para elaborar textos de autoestudio” (Arboleda Toro, 2005), y en el “modelo para la construcción de módulos de aprendizaje” propuesto en el marco del Plan de Acciones para la Convergencia Europea (ICE-ASIC, 2008).

10.1. EVALUACIÓN DEL CONTEXTO

En este apartado se presenta la evaluación diagnóstica que se efectuó con miras a orientar el proceso para la formulación de los objetivos de aprendizaje previstos en el módulo en cuestión.

10.1.1. Análisis de necesidades. La primera medida para la elaboración del Módulo Las Cónicas fue buscar un acercamiento a las necesidades formativas de los profesores de matemáticas de Educación Secundaria y Media. Para ello fue preciso documentarse sobre la base de referencias provistas por los resultados de algunas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas y en las reflexiones de autores e investigadores destacados en la materia. Así pues, revisando el corpus inicial, se percibió que, entre muchas otras necesidades, dos de ellas, a criterio personal del investigador, requerían especial atención y por eso era importante abordarlas.

Una de ellas se sustenta en la amplia aceptación que existe dentro de la comunidad internacional de educadores de matemáticas, con respecto a la idea de desarrollar acciones encaminadas a promover la renovación de las prácticas profesionales de los docentes con miras a la integración efectiva de las TIC en Educación Matemática. Además, como ya han demostrado los desarrollos investigativos en Didáctica de las Matemáticas, esto es un asunto muy serio y requiere bastante cuidado.

Otra acuciante necesidad que se observó fue la de mejorar la calidad de la enseñanza de la geometría, puesto que a pesar de que en los últimos años no se han escatimado esfuerzos por conseguir esa meta, al parecer, sigue siendo usual que los programas de formación docente permanezcan totalmente permeados por la “matemática moderna”, y por lo tanto, se continúe privilegiando el estudio del álgebra en detrimento de la geometría elemental.

10.1.2. Perfil del usuario. Dado que el módulo está dirigido a la comunidad de docentes de matemáticas en general, se trata entonces de una población bastante heterogénea, por lo cual resulta difícil realizar un diagnóstico personalizado o estandarizar los rasgos característicos que la definen. Sin embargo, está claro que la mayoría de profesores ofrecen cierta resistencia, incluso de manera inconsciente, a cualquier intento de innovación que represente de una u otra forma algún tipo de cambio accionario que afecte el control de sus prácticas habituales, como es el caso de la integración de las TIC.

Por otra parte, los profesores que acceden a trabajar integrando las TIC por lo general prefieren utilizar tecnologías cuyo manejo básico no les resulte “tan complicado” de aprender (Darricarrère, y otros, 2010). Esto se entiende, dado que en su profesión la tecnología no es precisamente un asunto central, como sí lo es, por ejemplo, para el profesor de informática o el ingeniero de sistemas.

Otro punto para subrayar es el que tiene que ver con los profesores innovadores, debido a que sus esfuerzos pueden no resultar suficientes. Como ha sido señalado por Artigue (1998), es usual que aquellos profesores tiendan a resaltar las potencialidades de las TIC y omitir sus restricciones, lo que genera una pseudo – integración, que constituye un estadio en el que difícilmente el proceso de integración puede alcanzar la madurez.

10.1.3. Aspectos pedagógicos, didácticos y curriculares. La elaboración del módulo se ejecutó bajo los siguientes planteamientos:

El “principio de la mediación instrumental”. Situado en el marco de la perspectiva socio – cultural (Wertsch, 1993), se asumió con Guin y Trouche (2007), que la apropiación de las herramientas tecnológicas actuales por parte de los profesores para su aprovechamiento didáctico, es conveniente concebirla no como un fenómeno aislado e individual sino como un proceso social que demanda la constitución de comunidades de prácticas (Wenger, 1998) conformadas por formadores y profesores e involucra la interacción de los miembros del grupo en torno a la creación colaborativa de recursos pedagógicos.

La “estimulación para la acomodación cognitiva”. Asumiendo que CABRI forma parte del medio material se consideró pertinente en primer lugar, dar a conocer y experimentar con los diferentes tipos de tareas realizables bajo la mediación de las herramientas de CABRI; y en segundo lugar, partir del supuesto de que la producción de conocimientos geométricos se traduce en la construcción de conceptos figurales (Fischbein, 1993), lo cual, en CABRI, resulta de un proceso de asimilación y acomodación determinado por el ciclo “construcción blanda → construcción robusta” (Healy, 2000).

La historia de las matemáticas como un medio para enriquecer la cultura profesional del docente. Se acoge el apotegma del materialismo histórico que expresa la necesidad de comprender el pasado para entender el presente. Idea que ha sido valorada, por destacados educadores e historiadores de matemáticas como un concepto esencial para aplicarlo en la profesionalización de los docentes de matemáticas (González Urbaneja, 2004).

10.2. FORMULACIÓN DE COMPETENCIAS DE APRENDIZAJE

Siguiendo con las fases establecidas para la elaboración del módulo propuesto, se procedió a formular las competencias de aprendizaje que se estiman pertinentes. Esto, a fin de establecer los objetivos de aprendizaje, generales y específicos, que se aspira a lograr por parte de los destinatarios del módulo, es decir, la comunidad de profesores matemáticas.

10.2.1. Competencias técnicas. Estas se relacionan con el conocimiento técnico y uso reflexivo de las herramientas de CABRI y MOODLE para la gestión de la información y los procesos formativos. Asimismo tienen que ver con el manejo básico de las herramientas provistas por dichas herramientas:

- Habilidad para comunicarse y colaborar utilizando las herramientas de comunicación de la plataforma MOODLE.
- Capacidad para la organización y planificación de la información publicada en MOODLE.
- Conocimientos generales sobre las herramientas de CABRI.
- Habilidades para explorar la herramienta arrastre y encontrar diversos usos de la misma.
- Capacidad para evaluar la precisión y utilidad de las herramientas provistas por MOODLE y CABRI.
- Disposición a interactuar y trabajar en comunidades de aprendizaje virtuales.

10.2.2. Competencias didácticas. Este tipo de competencias hace referencia al desarrollo de saberes disciplinares con respecto al uso de CABRI y descansan sobre la base de los aportes teóricos obtenidos en el campo de la Didáctica de las Matemáticas:

- Creación y adaptación de situaciones problemáticas que promuevan la contextualización de los contenidos matemáticos.
- Definir, enunciar y justificar conceptos, procedimientos y propiedades matemáticas, teniendo en cuenta las nociones previas necesarias y los procesos implicados en su generación.
- Conocer las aportaciones de la Didáctica de las Matemáticas a la enseñanza y aprendizaje de los bloques de contenidos y procesos matemáticos tratados.
- Valorar la idoneidad de los procesos de enseñanza planificados en sus distintas dimensiones (epistemológica, cognitiva, didáctica e instrumental).

10.2.3. Competencias pedagógicas. Estas tienen que ver principalmente con la gestión de recursos tecnológicos para la concepción y desarrollo de procesos formativos. De igual manera, se refieren a la adecuada aplicación de saberes disciplinares en la actividad docente así como en la propia profesionalización:

- Capacidad de desempeñar un papel de liderazgo en la autoformación y formación de los demás miembros de la comunidad de aprendizaje.

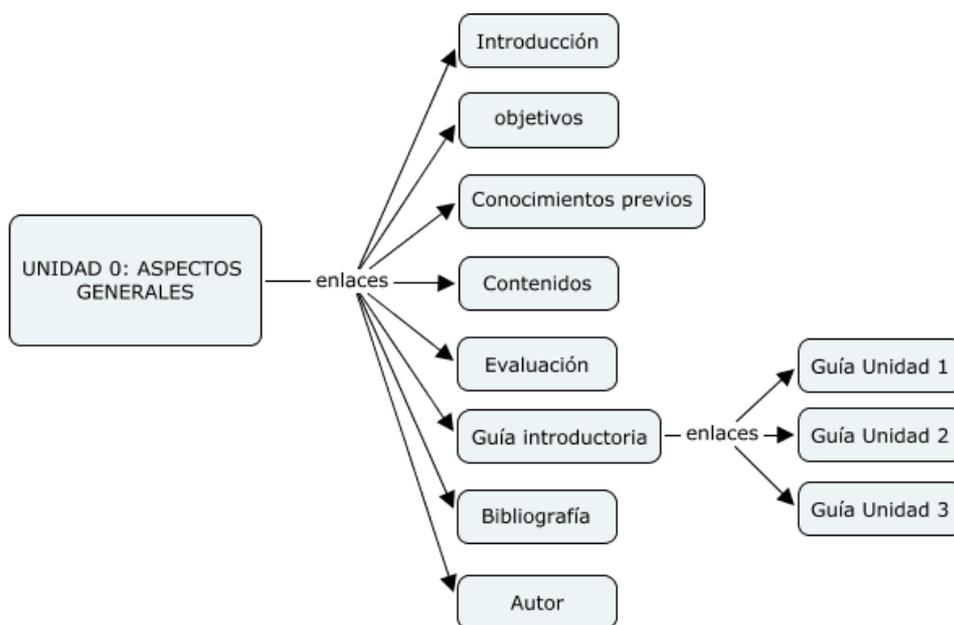
- Habilidad para gestionar y modelar abiertamente la estructuración de recursos pedagógicos que permitan el desarrollo de competencias cognitivas.
- Capacidad para adaptarse a nuevas situaciones y para generar nuevas ideas.
- Dominio de los conocimientos disciplinarios y profesionales.
- Capacidad de aplicar los conocimientos disciplinarios y profesionales en la práctica.
- Toma de decisiones.

10.3. ESTRUCTURACIÓN DE LAS UNIDADES DIDÁCTICAS

Para el desarrollo de esta etapa fue necesario analizar y reflexionar sobre la manera de articular los objetivos de aprendizaje con los contenidos temáticos y las actividades, para así establecer una secuencia de aprendizaje estructurada, que pueda enmarcarse en un plan estratégico en el que el todo y sus partes se relacionen de forma coherente y complementaria.

En las figuras 4, 5, 6 y 7 es ilustrada la estructura de cada unidad.

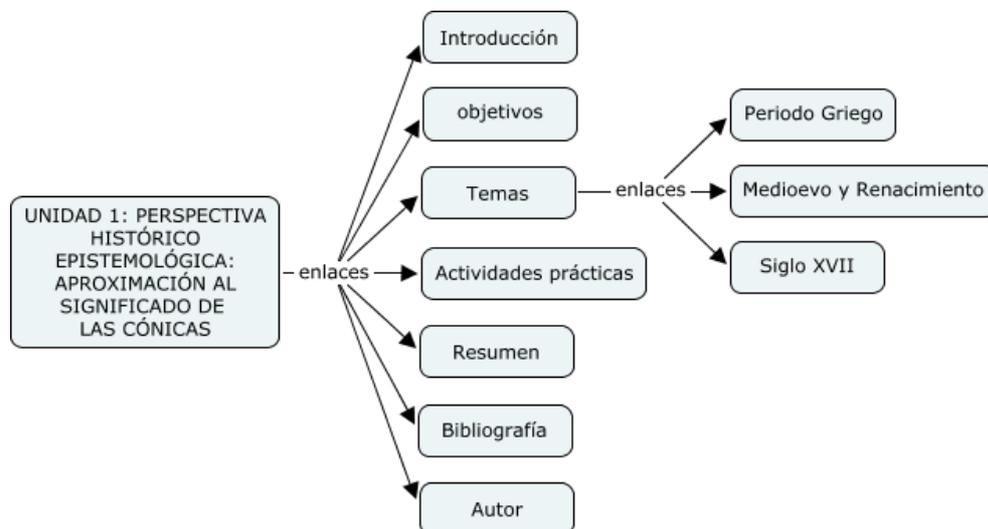
Figura 4. Estructura de la unidad cero



Esquema general de la unidad cero del Módulo Las Cónicas. En esta unidad se dan indicaciones con respecto a los objetivos generales, los conocimientos previos requeridos, la temática general que se aborda en cada una de las demás unidades didácticas, la forma de evaluar, la bibliografía utilizada por el autor en esa unidad, y los datos personales del autor. Asimismo, se presenta una guía introductoria o de aprendizaje por cada unidad, donde el estudiante puede consultar el cronograma de actividades, la metodología, y los criterios de

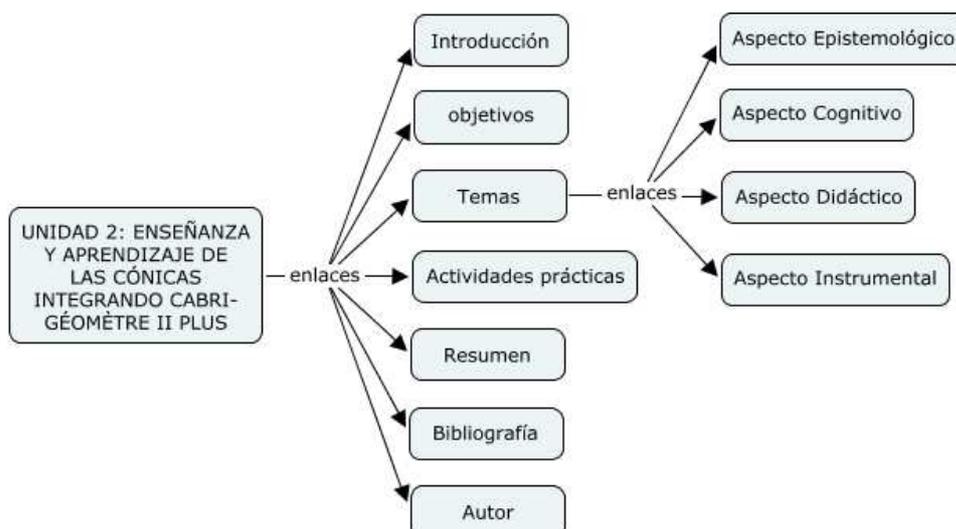
evaluación, entre otras cosas. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Figura 5. Estructura de la unidad uno



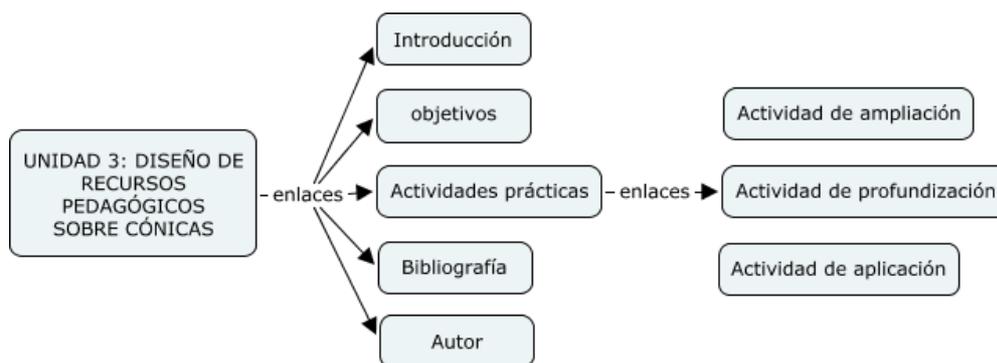
Esquema general de la unidad uno del Módulo Las Cónicas. En esta unidad se estudian las principales caracterizaciones hechas de las cónicas durante tres importantes periodos para la ontogénesis de estos objetos. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Figura 6. Estructura de la unidad dos



Esquema general de la unidad dos del Módulo Las Cónicas. En esta unidad se estudian los aspectos que se valoran más pertinentes desde la Didáctica de las Matemáticas para la integración de CABRI. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Figura 7. Estructura de la unidad tres



Esquema general de la unidad tres del Módulo Las Cónicas. Esta unidad es completamente práctica y fue pensada para la creación colaborativa de recursos pedagógicos, en concreto, sobre la elipse y la hipérbola. Para ello se debe tomar como referencia un recurso pedagógico propuesto para la enseñanza de la parábola, que a su vez también es objeto de estudio. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.4. DEFINICIÓN DE CRITERIOS DE EVALUACIÓN

En esta fase se siguió a determinar los criterios que serían utilizados para evaluar los logros de aprendizaje. Para ello fue necesario, primero que todo, definir el tipo de contenido de cada una de las unidades. Luego, pensar en los posibles instrumentos de evaluación que se podían elaborar, y así, finalmente, identificar y proponer dichos criterios.

10.4.1. Tipos de contenido. Considerando que no es recomendable combinar diferentes tipos de contenidos en una sola unidad didáctica (ICE-ASIC, 2008), y teniendo en cuenta las competencias de aprendizaje establecidas previamente, se decidió que los objetos de aprendizaje que integrarían la unidad uno constituirían contenidos de carácter actitudinal, mientras que los objetos de la unidad dos conformaría contenidos conceptuales y los de la unidad tres, procedimentales.

A continuación se describe cada uno de estos tipos de contenido:

- Contenido actitudinal. Las actitudes son tendencias o disposiciones adquiridas y relativamente duraderas, a evaluar de un modo determinado un objeto, una persona, suceso o situación y actuar en consonancia a dicha evaluación. Así, en la primera unidad, el objeto de evaluación, se previó que deberían ser las posibles actitudes o posturas de los usuarios

del módulo con relación a las implicaciones didácticas y epistemológicas que puedan establecer respecto al estudio histórico de las primeras caracterizaciones de las cónicas.

- Contenido conceptual. Un concepto se adquiere cuando se “es capaz de dotar de significado a un material o a una información que se presenta”; se trata de traducir el concepto al contexto individual de cada uno de los usuarios del módulo. En este sentido, el contenido de la unidad dos se previó que debería estar compuesto por una serie de informaciones e ilustraciones, que buscaran favorecer la conceptualización de algunos de los desarrollos investigativos en Didáctica de las Matemáticas, valorados como más significativos y útiles para abordar el asunto particular de la integración de CABRI.

- Contenido procedimental. Un procedimiento es “un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta”, por consiguiente, hablar de procedimientos implica el aprendizaje de un “saber hacer”, con un propósito claramente definido y que se espera realizar de manera planificada. Esto quiere decir que es algo práctico. De este modo, el contenido de la unidad tres se pensó para crear recursos pedagógicos sobre cónicas.

10.4.2. Instrumentos de evaluación. La plataforma MOODLE cuenta con variados instrumentos para realizar la evaluación en cualquier momento del proceso., tales como, tareas, cuestionarios, talleres, etc. Dependiendo del método utilizado para el análisis de datos y la técnica usada para su recogida, hay ciertos instrumentos que se ajustan en mayor medida a los propósitos evaluativos.

En la tabla 3 se sintetiza la relación arriba aludida:

Tabla 3
Modelo de evaluación propuesto

| | Técnica | Instrumento |
|-------------------|--------------|---|
| Recogida de datos | Observación | – Foro – Glosario |
| | Cuestionario | – Consulta grupal |
| | Método | Instrumento |
| Análisis | Cuantitativo | – Cuestionarios cerrados – Registro automático |
| | | – Construcciones con CABRI |
| | Cualitativo | – Talleres abiertos – Observaciones |
| | | Redes sociales |

10.4.3. Criterios de evaluación. Sobre la base de esta información se procedió a establecer los criterios de evaluación, como se indican en las tablas 4, 5 y 6:

Tabla 4
Criterios de evaluación para la unidad uno

| UNIDAD UNO | |
|--------------|---|
| Instrumentos | Criterios para la evaluación |
| Foros | – Claridad en la exposición de las ideas. |
| Glosario | – Pertinencia de las ideas expuestas. |

Tabla 5
Criterios de evaluación para la unidad dos

| UNIDAD DOS | |
|---------------|---|
| Instrumentos | Criterios para la evaluación |
| Cuestionarios | |
| Consulta | |
| Lecciones | – Evaluación sumativa, categoría numérico de 0 a 100. |
| Tareas | |
| Crucigrama | |

Tabla 6
Criterios de evaluación para la unidad tres

| UNIDAD TRES | |
|--------------------|---|
| Instrumentos | Criterios para la evaluación |
| Recurso Pedagógico | <ul style="list-style-type: none"> – Idoneidad del contenido con los objetivos del recurso. – Idoneidad de las figuras dinámicas con las actividades propuestas. – Uso y función del modo arrastre. – Características especiales. |

10.5. SELECCIÓN DE CONTENIDOS

Una vez formuladas las competencias de aprendizaje, determinados los tipos de contenido, y definidos los criterios de evaluación, se hizo necesario seleccionar y organizar los contenidos que permitirían la articulación de estos tres componentes. Así pues, los contenidos adquieren aquí la dimensión de herramientas para el desarrollo de las competencias, no solo en términos de objetivos de aprendizaje, sino también en términos de fines educativos.

Para empezar, se formuló la siguiente pregunta: ¿qué necesitan aprender los profesores de matemáticas que ejercen su profesión en el nivel de Educación Media para lograr un saber hacer reflexivo y fundamentado?

La búsqueda de una respuesta a tal interrogante le permitió al investigador identificar, a partir del análisis de necesidades, un conjunto de actitudes, conceptos y procedimientos que constituirían los contenidos del módulo (Ver Tabla 7).

Tabla 7

Necesidades formativas del orden actitudinal, conceptual y procedimental

| Contenido | Necesidades formativas |
|---------------|--|
| Actitudinal | Conciencia reflexiva sobre los usos educativos de las TIC. |
| | Valoración de la importancia de la profesionalización. |
| | <u>Aptitudes y actitudes favorables hacia el trabajo colaborativo.</u> |
| Conceptual | <u>Dominio disciplinario de los conocimientos geométricos.</u> |
| | Dominio disciplinario de las herramientas informáticas. |
| | <u>Conocimiento de los aportes de la Didáctica de las Matemáticas.</u> |
| Procedimental | <u>Planificación de acciones didácticas bien fundamentadas.</u> |

10.5.1. Bibliografía consultada. Para elaborar el contenido de cada una de las unidades didácticas, fue preciso hacer una cuidadosa y extensa revisión bibliográfica sobre Historia y Didáctica de las Matemáticas. La literatura consultada en su mayoría se encuentra escrita en inglés. También fueron revisados varios documentos en lengua francesa, y en menor medida en español, ya que es escaso este tipo de literatura en esta última lengua, especialmente en lo referente a la historia de las cónicas.

Para el estudio histórico de las cónicas, el investigador se apoyo en los siguientes documentos:

- « Episodes in the mathematics of medieval Islam ». (2003). (Compuesto por J. Lennart Berggren).
- « Étude historique des premières caractérisations des coniques ». (2007). (Compuesto por Vincenzo Bongiovanni).
- « A History of Mathematics ». (1989). (Compuesto por Carl Boyer y Uta Merzbach).
- « Selections Illustrating the History of Greek Mathematics, Vol. 2 ». (1957). (Compuesto por Ivor Bulmer-Thomas).
- « La geometría de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones ». (2006). (Compuesto por Carlos Alberto Cardona y Adelina Ocaña).
- « Historia de las Matemáticas, Vol. 2 ». (1993). (Compuesto por Jean-Paul Collette).
- « A History of the Conic Sections and Quadric Surfaces ». (1945). (Compuesto por Julian Lowell Coolidge).
- « Oeuvres de Descartes, Vol. 5 ». (1824). (Compuesto por René Descartes y publicado por Victor Cousin).
- « Euclid's elements of geometry. The Greek text of J.L. Heiberg (1883–1885) from Euclidis Elementa ». (2007). (Compuesto por Richard Fitzpatrick).
- « A History of Greek mathematics ». (1921). (Compuesto por Thomas Little Heath).

- « Apollonius of Perga. Treatise on conic sections ». (1896). (Compuesto por Thomas Little Heath).
- « L'étude des sections coniques dans la tradition Arabe ». (1998). (Compuesto por Jan P. Hogendijk).
- « Mathematical thought from ancient to modern times, Vol. 1". (1972). (Compuesto por Morris Kline).
- « Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la resolution des equations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez ». (1720). (Compuesto por Guillaume de L'Hospital).
- « Apollonius de Perge, Coniques: Commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe, Libro 1, Volumen 1 ». (2008). (Compuesto por Rosdhi Rashed).
- « Ibrāhīm Ibn Sinān, logique et géométrie au Xe siècle ». (2000). Compuesto por Rosdhi Rashed y Héléne Bellosta).
- « Le tracé continu des sections coniques à la Renaissance: applications optico-perspectives, héritage de la tradition mathématique arabe ». (2007). (Compuesto por Dominique Raunaud).
- « Apollonius of Perga. Conics: books one-seven, Vol. 1 ». (2007). (Compuesto por Boris Rosenfeld).
- « Book II of Euclid's Elements in the light of the theory of conic sections ». (1985). (Compuesto por Ken Saito).
- « De organica conicarum sectionum in plano descriptione: tractatus ». (1646). (Compuesto por Frans Van Schooten).
- « De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus ». (1665). (Compuesto por John Wallis).
- « Jan de Witt's Elementa curvarum linearum, liber primus ». (2000). (Compuesto por Jan de Witt y traducido por Albert W. Grootendorst).
- « Jan de Witt's Elementa curvarum linearum, liber secundus ». (2003). (Compuesto por Jan de Witt y traducido por Albert W. Grootendorst).

En cuanto a la bibliografía sobre Didáctica de las Matemáticas, se enuncia a continuación los documentos que se estiman más significativos desde la perspectiva asumida por el investigador:

- « Computer-Based Learning Environment in Mathematics ». (1996). (Compuesto por Nicolas Balacheff y James J. Kaput).
- « Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas ». (2000). (Compuesto por Nicolas Balacheff).
- « La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique ». (1994). (Compuesto por Nicolas Balacheff).
- « The meaning of conics: historical and didactical dimensions ». (2005). (Compuesto por Maria G. Bartolini-Bussi).
- « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques ». (1986). (Compuesto por Guy Brousseau).
- « Theory of Didactical Situations in Mathematics, 1970 – 1990 ». (1997). (Compuesto por Guy Brousseau).

- « Les propriétés didactiques de la géométrie ». (2000). (Compuesto por Guy Brousseau).
- « Autour de l'enseignement de la géométrie au collège ». (1990). (Compuesto por Yves Chevallard y Michel Jullien).
- « La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado ». (1998). (Compuesto por Yves Chevallard y traducido por Claudia Gilman).
- « Task and activity ». (1986). (Compuesto por Bent Christiansen y Guenther Walther).
- « Dynamic Geometry as a Bridge from Euclidean Geometry to Analysis ». (1997). (Compuesto por Albert Cuoco y Paul Goldenberg).
- « The theory of figural concepts ». (1993). (Compuesto por Efraim Fischbein).
- « A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics ». (1996). (Compuesto por Gerald Goldin y James J. Kaput).
- « Technology and the learning of geometry at the secondary level ». (2008). (Compuesto por Karen Hollebrands, Colette Laborde y Rudolf SträBer).
- « Locus and Trace in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations ». (2002). (Compuesto por Ana Paula Jahn).
- « Representation systems and mathematics ». (1987). (Compuesto por James J. Kaput).
- « Integration of technology in design of geometry tasks with Cabri ». (2001). (Compuesto por Colette Laborde).
- « Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments ». (2005). (Compuesto por Colette Laborde).
- « Teaching and learning geometry with technology ». (2006). (Compuesto por Colette Laborde, Chronis Kynigos, Karen Hollebrands y Rudolf SträBer).
- « Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study ». (1998). (Compilado por Carmelo Mammana y Vinicio Villani).
- « Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización ». (2002). (Compuesto por Luis Moreno Armella).
- « Les Hommes et les technologies une approche cognitive des instruments contemporains ». (1996). (Compuesto por Pierre Rabardel).
- « Ideas previas en Matemáticas: una investigación sobre las Cónicas ». (1989). (Compuesto por José del Río Sánchez).
- « Environments informatises et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages ? ». (2004). (Compuesto por Luc Trouche).

10.6. DISEÑO DE LA INTERFAZ

Esta etapa de la elaboración del módulo tenía que ver con la toma de decisiones respecto a los asuntos formales del diseño Web. A pesar de no ser una materia relacionada directamente con el saber matemático, tiene gran importancia ya que este diseño es el que condiciona la forma de navegación y acceso a la información.

Para el desarrollo de esta etapa se utilizó el siguiente software:

- Adobe Dreamweaver: aplicación informática para el diseño de sitios web.
- Adobe Photoshop: aplicación informática para la edición gráfica.

- Adobe Firework: aplicación informática para la creación de interfaces.

El primer paso fue hacer el boceto de la interfaz (Ver Figura 8):

Figura 8. Esquema del formato de presentación o interfaz

| | |
|----------------------------|------------------|
| título del módulo | |
| banner | número de unidad |
| título de la unidad | |
| logo de la “U” | área de texto |
| barra de navegación | |
| año de registro de la obra | |

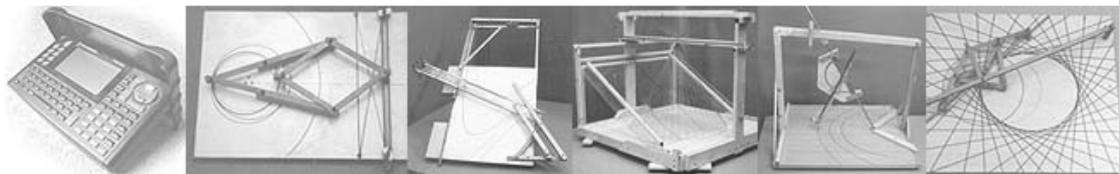
Cada uno de los espacios arriba señalados se conoce como capas. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

El siguiente paso fue la creación de las distintas imágenes con que se llenarían las capas de títulos, banner, número de unidad, logo de la “U” y año de registro de la obra.

En la figura 9 se muestran algunos ejemplos de esto:

Figura 9. Imágenes para el formato de presentación o interfaz



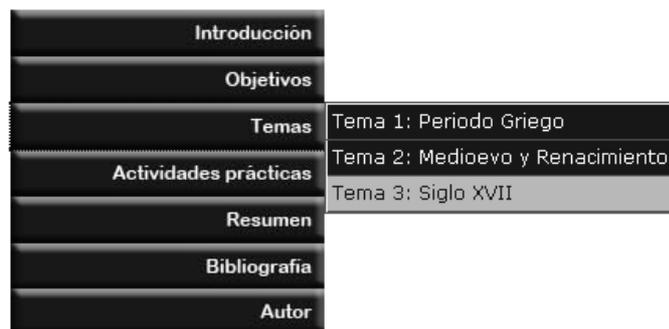


Todas estas imágenes fueron editadas con PHOTOSHOP. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

El tercer paso fue elaborar la barra de navegación, la cual es diferente para cada una de las unidades, en el sentido de que las etiquetas de algunos de los botones cambian, dependiendo del contenido al cual enlazan dichos botones.

En la figura 10 se muestra un ejemplo de barra de navegación.

Figura 10. Barra de navegación de la plantilla para la unidad dos



El diseño de esta barra de navegación con menú desplegable se hizo con ayuda de ADOBE FIREWORS. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Finalmente, se definió el color del área de texto y se procedió a insertar cada una de las imágenes en la respectiva capa, llegando a obtener cuatro plantillas para cada una de las unidades: cero, uno, dos y tres.

10.7. DISEÑO DE LOS COMPONENTES TEMÁTICOS

En este apartado se explica cada uno de los componentes temáticos que se diseñaron para configurar el módulo y articular el ambiente de aprendizaje informático que lo integra.

10.7.1. Ilustraciones con CABRI. Luego de haber realizado el respectivo seguimiento histórico de la evolución del concepto de cónicas, se encontraron las siguientes particularidades:

- El nacimiento de las cónicas está vinculado al famoso problema de la duplicación del cubo o problema délico.
- La mayoría de elementos notables de las cónicas fueron obtenidos a partir del cono.
- El *latus rectum* fue un elemento central para el desarrollo de la teoría de cónicas.
- La primera caracterización de las cónicas como lugares geométricos se hizo a partir de la propiedad fundamental, la que a su vez se constituyó en el puente que permitiera la conexión de la geometría clásica con la geometría analítica del siglo XVII. Esto sucedió en el siglo III antes de nuestra era.
- La segunda caracterización de las cónicas como lugares geométricos se hizo a partir de la propiedad monofocal, es decir, de la propiedad foco, directriz y excentricidad. Esto sucedió en el siglo IV de nuestra era.
- La caracterización de la hipérbola y la elipse a partir de la conocida propiedad bifocal solo fue posible hasta el siglo IX de nuestra era.

Con estos resultados se procedió a elaborar una serie de archivos CABRI que ilustraran algunos de los pasajes más importantes de la evolución conceptual de las cónicas. En un principio se utilizó el programa CABRI JAVA.

Sin embargo, ante las posibilidades tan limitadas del software se decidió hacer páginas HTML que incluyeran APPLETS, utilizando el código que se puede obtener de la página oficial de CABRI.¹¹

Pero, debido a que el plug-in requerido para esta operación solo funciona con los navegadores Internet Explorer y Safari, se optó por presentar las ilustraciones como archivos descargables, para que el usuario pueda manipular su contenido sin ninguna clase de limitación técnica externa a CABRI.

Estos archivos realizados en CABRI y cuya extensión es denotada con la abreviatura FIG, se dispusieron en un número promedio de tres por cada uno de los subtemas que integran los diferentes periodos históricos tratados en el módulo. Es por esta razón por la que se hizo

¹¹ www.cabri.com.es/descargar-cabri-2-plus.html

preciso agruparlos en archivos ZIP que llevan el mismo nombre del subtema al cual corresponden.

En la figura 11 se muestra un ejemplo de una de las ilustraciones:
 Figura 11. Ilustración dinámica del problema de la duplicación del cubo

EL PROBLEMA DE LAS MEDIAS GEOMÉTRICAS

El nacimiento de las cónicas está ligado al famoso problema de *duplicar un cubo*, el cual inicialmente se intentara resolver doblando la arista. Sin embargo, el resultado era que el volumen del cubo reproducido se octuplicaba. Más tarde, **Hipócrates de Quios** (470-400 AEC), redujo el problema a encontrar dos medias geométricas entre dos magnitudes: el volumen del cubo original y el volumen del cubo reproducido.

En esta nueva forma, el problema remite al sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y^2 = 2ax \\ x^2 = ay \end{cases} \text{ tal que } x^3 = 2a$$

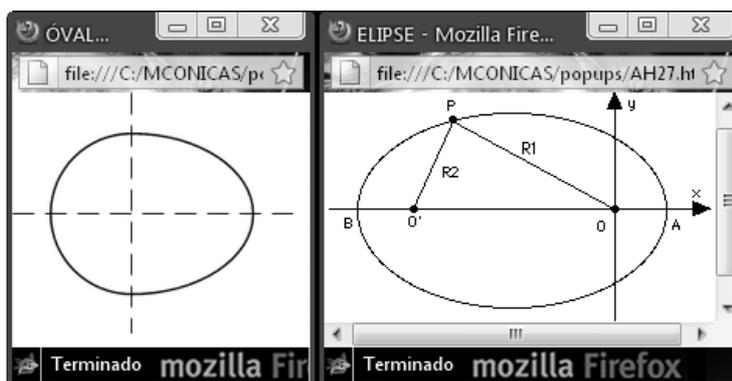
Ilustración de la duplicación del cubo. La construcción se hizo utilizando técnicas proyectivas y muestra como es inviable la duplicación de la arista para solucionar el problema. En la parte de la derecha se explica la razón de esta imposibilidad utilizando el lenguaje algebraico moderno. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.7.2. Ventanas emergentes. Este término propio de la terminología Web, traducido del inglés pop-up, denota un elemento de tamaño estandarizado que emerge automáticamente, por lo general, sin que el usuario lo solicite, aunque también es posible que suceda lo contrario. El uso más frecuente de las ventanas emergentes se relaciona con la difusión de avisos publicitarios. De igual manera, en algunas ocasiones, suelen asociarse con virus y troyanos. No obstante, en el contexto educativo son muy útiles.

En el módulo Las Cónicas, las ventanas emergentes se utilizaron en la unidad uno para presentar información secundaria, particularmente para ilustrar sobre algunos aspectos históricos que se consideran relevantes para comprender la evolución histórica del conocimiento geométrico en su génesis. Igualmente estas ventanas se usaron para organizar

alguna información primaria de la unidad dos. Para acceder a ellas el usuario simplemente debe clicar los enlaces respectivos.

En la figura 12 se muestran dos ejemplos de ventanas emergentes:
Figura 12. Imagen de un óvalo (izquierda) y de una elipse (derecha)



Este par de ventanas emergentes se crearon con el fin de ilustrar de manera visual una de las concepciones erróneas que usualmente pueden presentarse entre los estudiantes de edad escolar: confundir la elipse con el óvalo. Esto se debe a que los estudiantes tienden generalmente a conceptualizar los objetos geométricos tan solo de manera perceptiva. Cabe señalar, que las dos ventanas emergen individualmente cuando el usuario hace clic sobre cualquiera de sus respectivos enlaces. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.7.3. Videos. Los videos son un sistema de grabación y reproducción de imágenes, acompañadas o no de sonidos, mediante cintas electromagnéticas. Aunque hoy en día este tipo de recursos pueden ser soportados también por en formato digital. De hecho, en el mercado actualmente solo es posible encontrar videograbadoras digitales, las cuales desplazaron definitivamente a las videograbadoras basadas en tecnología análoga.

Por otra parte, las potentes herramientas que ofrece la Internet han permitido que las personas puedan subir de una manera sencilla sus propios videos al ciberespacio y compartirlos con las demás personas que acceden a la Web. También es de destacar que muchos de los computadores que se producen hoy en día, principalmente portátiles, integran herramientas para la grabación y producción de videos.

Los videos utilizados en el módulo son la mayoría de Google Videos y Youtube, sitios Web en los cuales los usuarios pueden subir y compartir sus videos sin ningún costo. Estos sitios utilizan un reproductor en línea basado en Adobe Flash¹² para servir su contenido.

¹² El software Adobe Flash es una plataforma multimedia en forma de estudio que trabaja sobre “fotogramas” y está destinado al diseño, producción y publicación de animaciones, videos y demás contenidos interactivos para páginas Web.

Asimismo, permiten obtener el código HTML para poder insertar los videos libremente en cualquier aplicación Web.

En la figura 13 se muestra un video de Google incrustado en una página Web del módulo:

Figura 13. Página Web del módulo Las Cónicas con un video de Google



Este video muestra, entre muchas otras cosas, cómo las curvas cónicas, en especial, la elipse, contribuyeron en la ciencia del Renacimiento a describir la mecánica celeste. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

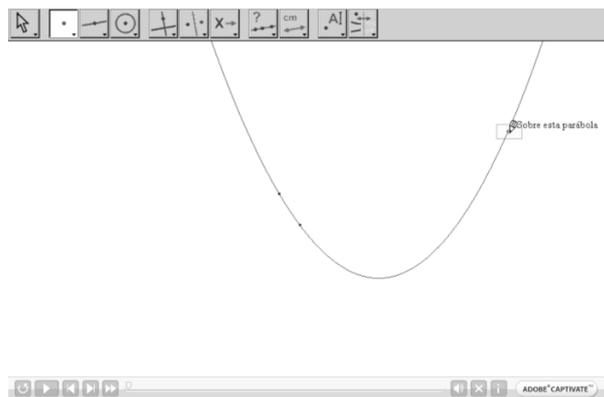
Para configurar la unidad dos conforme a los objetivos que persigue, se pensó en realizar un video que ilustrara los pasos a seguir en un proceso de resolución de un problema propuesto por el investigador donde se utiliza el modo de arrastre conocido como “lugar geométrico oculto”.¹³ Así, el problema en cuestión consiste en encontrar el foco y la directriz de una parábola dada. Por lo general, en este tipo de problemas se presenta como datos adicionales el foco o la directriz. Sin embargo, el problema aquí planteado y resuelto por el propio

¹³ Este tipo de arrastre consiste en desplazar libremente los objetos primitivos de una configuración particular de una construcción sobre la pantalla, con el fin de encontrar algún elemento cuya trayectoria revele un lugar geométrico que pueda contribuir de algún modo a encontrar una respuesta parcial o definitiva al problema planteado con dicha construcción.

investigador tiene un nivel de complejidad mayor, por lo cual se consideró que no era conveniente proponerlo como una tarea para ser desarrollada por profesores novicios.

En la figura 14 se muestra una imagen del video elaborado por el investigador y autor del módulo:

Figura 14. Imagen de video sobre problema de lugar geométrico oculto

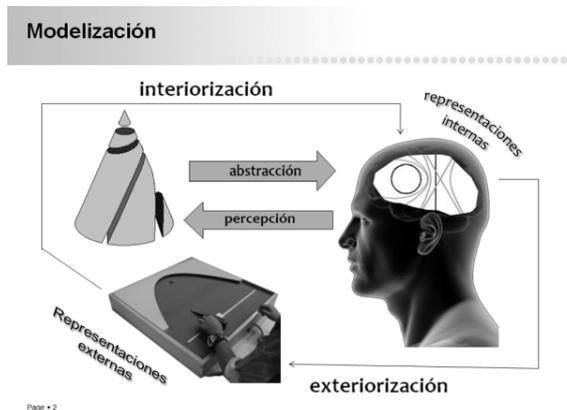


Este tipo de problema se inscribe dentro de la categorización de los diferentes modos de arrastre que se han detectado en la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. El video fue creado y editado por el investigador, utilizando el software ADOBE CAPTIVATE. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.7.4. Presentaciones. Las presentaciones son contenidos multimedia que se organizan mediante una serie de diapositivas para ser utilizadas en la comunicación de información referente a un tema específico. Las presentaciones que se elaboraron para el módulo tienen el objetivo de apoyar las lecciones en MOODLE y la creación de recursos pedagógicos.

En la figura 15 se muestra una de las diapositivas utilizada en una lección:

Figura 15. Imagen de diapositiva que explica el proceso de modelización



El proceso que ilustra la diapositiva de la figura hace referencia a la modelización de los objetos geométricos, e indica la relación dialéctica existente entre las representaciones internas y externas. La diapositiva fue diseñada con MICROSOFT POWER POINT y contiene varios efectos que a criterio del investigador pueden favorecer la ilustración de dicho proceso. Esta diapositiva es un complemento del tema sobre Representación y Visualización. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.7.5. Fichas de Estado. En este apartado se indican los elementos que componen cada una de las fichas de estado que constituyen un recurso pedagógico sobre la parábola utilizando CABRI, el cual fue diseñado por el investigador y autor del módulo.

10.7.5.1. Ficha de identificación. En la página 41 se hace una descripción general de este tipo de ficha.

TIPO

Construcción – Descripción verbal– Demostración – Caja Negra

NIVEL

Enseñanza media

PALABRAS CLAVE

Lugar geométrico, directriz, foco, vértice, eje de simetría, latus rectum, parámetro, mediatriz, diámetro, cuerdas, propiedad fundamental.

OBJETIVOS PEDAGÓGICOS GENERALES

Caracterizar la parábola como lugar geométrico plano

MODALIDAD

Sesión en el aula de informática

DISPOSITIVO TÉCNICO

Aula de informática con Cabri-Géomètre II Plus instalado

AUTOR

Mario Andrés España González.

LISTA Y DESCRIPCIÓN DE FICHAS

- actividad2.fig: Tarea tipo construcción y descripción verbal.
- actividad3.fig: Tarea tipo demostración y descripción verbal.
- actividad4.fig: Tarea tipo caja negra.
- AFI.pdf: Ficha de identificación.
- AFP.pdf: Ficha del profesor.
- AFE.pdf: Ficha del estudiante.
- AFT.pdf: Ficha técnica.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD

La secuencia didáctica está encaminada a descubrir y comprobar relaciones métricas y geométricas que caracterizan la parábola estudiada como lugar geométrico plano.

10.7.5.2. Ficha del profesor. En la página 22 se hace una descripción general de este tipo de ficha.

COMPETENCIAS REQUERIDAS

- Reconocer el lugar geométrico de un punto A como el conjunto de posiciones que este asume en función de un punto M que varía sobre un objeto y determinar los hechos geométricos que lo condicionan.
- Comprender las nociones de semejanza, congruencia y simetría.
- Aplicar las condiciones de pertenencia e intersección, y las relaciones espaciales fundamentales (perpendicularidad y paralelismo).

OBJETIVOS PEDAGÓGICOS GENERALES

- Abordar el concepto de parábola desde su caracterización como lugar geométrico plano.
- Formular y evaluar conjeturas.
- Utilizar el método de ensayo y error, y exploración sistemática de alternativas o posibilidades.
- Asumir una actitud crítica ante figuras que pudieran representar una parábola.

PRERREQUISITOS

- Definición y construcción de la mediatriz de un segmento.
- Saber construir una recta perpendicular que pasa por un punto.
- Conocer y distinguir la simetría central y axial.

INTERÉS

Emprender el estudio de la parábola sin recurrir al sistema de referencia cartesiano, como suele hacerse habitualmente.

DESCRIPCIÓN DE LA ACTIVIDAD INSTRUMENTADA

La secuencia didáctica consta de cuatro actividades (Ver Ficha del estudiante) acerca del concepto de parábola como lugar geométrico plano.

En la primera actividad se introduce la propiedad foco directriz como primera caracterización de la parábola, aprovechando principalmente la herramienta “Lugar”. Se hace importante el arrastre para verificar que el lugar geométrico satisfaga las condiciones que determinan la parábola.

En la segunda actividad se trabajan los elementos notables de la parábola, como son: eje de simetría, cuerdas, vértice, perímetro, latus rectum. La manipulación dinámica de valores numéricos permite generalizar la relación de proporcionalidad entre perímetro y latus rectum.

En la tercera actividad se introduce la propiedad fundamental como segunda caracterización de la parábola, buscando establecer un puente entre su representación geométrica y algebraica.

En la última actividad se deben poner en práctica los conocimientos producidos hasta el momento para determinar el eje y el foco de una parábola dada (“actividad4.fig”).

Para la actividad 1 el estudiante deberá crear una hoja de trabajo nueva en CABRI, mientras que para las restantes actividades se deberán utilizar los archivos “actividad2.fig” “actividad3.fig” y “actividad4.fig”.

Los resultados de la experimentación serán registrados por el estudiante en una hoja de papel suministrada por el profesor.

10.7.5.3. Ficha del estudiante. Como ya se ha mencionado en la sección MARCO DIDÁCTICO (Ver página 41), el diseño de esta ficha depende de quién elabore el recurso, para este caso, esta fue una tarea que correspondió realizar al investigador y autor del módulo.

ACTIVIDAD 1

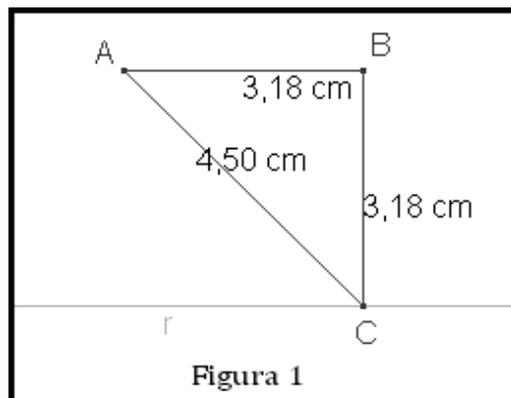
Definición de parábola a partir de su propiedad foco-directriz requeridas

INFORMACIÓN

- Una parábola es el lugar geométrico determinado por el conjunto de posiciones asumidas por un punto móvil P que equidista de un punto fijo F , llamado foco, y de una recta fija d , llamada directriz, la cual no pasa por F .
- Sea w una recta dada y Z un punto exterior a ella, Z' es la proyección ortogonal de Z en w si y solo si $Z' \in w$ y ZZ' es perpendicular a w para cualquier posición de Z . Además, la distancia de Z a w es igual a la longitud de ZZ' .

TAREA

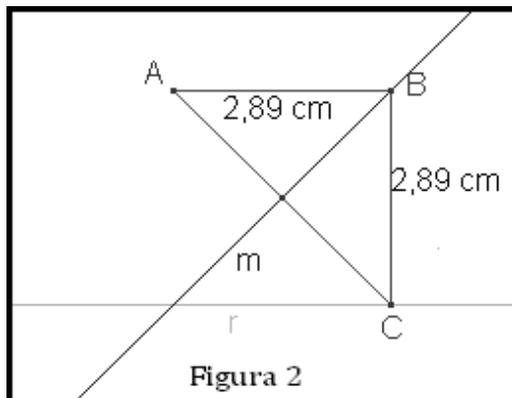
- Dada una recta r y dos puntos exteriores A y B , construye un triángulo isósceles ABC tal que AB y BC sean los catetos y C sea la proyección ortogonal de B en r . Ver “Figura 1”.



- Ahora responde:

- ¿Puedes arrastrar B de tal manera que ABC se conserve isósceles durante todo el recorrido? ¿Por qué?
- ¿Cómo imaginas que sea el lugar geométrico definido por el conjunto de posiciones de B que cumplen con la condición de que AB y BC sean siempre iguales? Realiza un dibujo.

- Construye un triángulo isósceles ABC tal que A sea un punto exterior a r , C un punto libre en r , y B un punto libre situado sobre la mediatriz m del segmento AC . Ver “Figura 2”.



▪ Ahora responde:

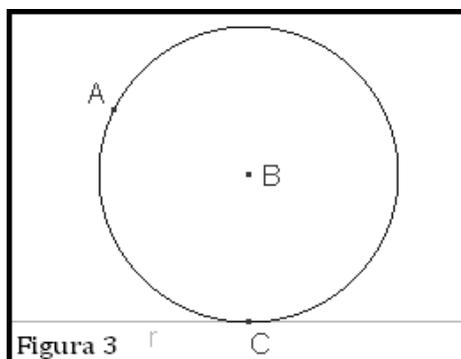
- c) ¿Qué sucede con las longitudes AB y BC cuando B varía en m? ¿Por qué?
- d) ¿Qué sucede con las longitudes AB y BC cuando C varía en r? ¿Por qué?
- e) ¿El lugar geométrico de B cuando C varía en r es una parábola? Justifica tu respuesta.

▪ Construye un triángulo isósceles ABC tal que A sea un punto exterior a r, C un punto libre sobre r, y BC un segmento perpendicular a r para cualquier posición de C.

▪ Ahora responde:

- f) ¿Qué sucede con las longitudes AB y BC cuando C varía en r? ¿Por qué?
- g) Prueba que el lugar geométrico de B cuando C varía en r es una parábola e identifica cuál es el foco y cuál es la directriz. Expone tus argumentos.
- h) ¿Qué sucede con la parábola cuando arrastras el foco muy cerca de la directriz?
- i) ¿Qué sucede con la parábola cuando el foco se aleja de la directriz?
- j) Y en el caso de que el foco cruce al otro lado de la directriz, ¿qué ocurre con la parábola?
- k) ¿Cómo es la mediatriz m del segmento AC con respecto de la parábola?

▪ Construye una circunferencia B_{AB} que sea tangente a r en un punto libre C y pase por un punto exterior A. Ver “Figura 3”.



- Ahora responde:

l) ¿Cómo se comporta la razón AB / BC cuando C varía en r ?

m) Verifica que el lugar geométrico de B cuando C varía en r es una parábola. Justifica tu respuesta.

n) Considerando la última construcción, ilustrada en la “Figura 3”, formula una nueva definición para el concepto de parábola.

ACTIVIDAD 2

Elementos notables de la parábola

INFORMACIÓN

- El vértice es el punto V situado sobre la parábola, que se encuentra a mitad de distancia entre el foco F y la directriz d .
- El eje de simetría es la recta s que pasa por el foco F y el vértice V perpendicularmente a la directriz d .
- El parámetro es la distancia p comprendida entre el vértice V y el foco F .
- Una cuerda es el segmento que une cualquier par de puntos situados sobre la parábola.
- Una cuerda focal es aquella que pasa por el foco F .
- El latus rectum puede interpretarse geoméricamente como la medida de longitud l de la mínima cuerda focal.

TAREA

- Abre el archivo “actividad2.fig” y activa “Traza” sobre los puntos P y P' . Puedes utilizar también la herramienta “Lugar”.
- Experimenta con la construcción y responde:

a) ¿Podría afirmarse que la trayectoria descrita por P es simétrica respecto de s ? Justifica tu respuesta.

b) Explica por qué el conjunto de posiciones de los puntos P y P' determinan una parábola.

c) ¿Podrías construir una parábola tal que $BP' = 2PB$? ¿Por qué?

d) Construye el vértice de la parábola y explica cómo lo hiciste.

e) Construye la mínima cuerda focal y determina el latus rectum. Explica detalladamente como lo obtuviste.

f) Calcula el valor de la razón l / p , arrastra C por la pantalla y observa el comportamiento de dicho valor numérico. Propone una expresión que represente simbólicamente la relación entre latus rectum y parámetro.

ACTIVIDAD 3

La propiedad fundamental de la parábola

INFORMACIÓN

- Sea una parábola de vértice V y eje de simetría s , si P' es la proyección ortogonal un punto libre P sobre dicha parábola y l el latus rectum, se tiene que: $P'P^2 = l \cdot PV$
- Un polígono es cualquier región plana delimitada por segmentos que se unen en los extremos. A los segmentos se les llama lados del polígono y a los extremos se les llama vértices.
- Un cuadrilátero es un polígono con cuatro vértices cuatro lados, y cuatro ángulos.
- Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que ambos pares de lados opuestos son paralelos.
- Un rectángulo es un paralelogramo con cuatro ángulos rectos.
- Un cuadrado es un rectángulo que tiene sus cuatro lados congruentes (de igual longitud).
- Una diagonal es un segmento que une dos vértices no adyacentes de un polígono.

TAREA

- En el archivo “actividad3.fig” encontrarás una parábola y un cuadrilátero RZTL.
- Ahora investiga la construcción y responde:
 - a) ¿Por qué RZTL es un paralelogramo? Explícalo.
 - b) Cuando arrastras M , ¿qué características cambian y cuáles se conservan del cuadrilátero PZWM?
 - c) ¿Qué tipo de cuadrilátero es PZWM? ¿Por qué?
 - d) Verifica que PZWM y VMSL son equiextensos (de igual área) para cualquier posición de P .
 - e) Argumenta lógicamente la razón por la cual PZWM y VMSL son equiextensos.
 - f) Calcula el latus rectum y compáralo con la longitud d (VL). Explica por qué la longitud del segmento VL es constante.
 - g) ¿Cómo interpretas la expresión $MP^2 = VL \cdot VM$?
 - h) Si hacemos que $VL = l$, $MP = x$, y $VM = y$, ¿podrías obtener una expresión semejante a la del literal (g)? ¿Cuál?
 - i) Utiliza la propiedad foco-directriz para verificar que el conjunto de posiciones de P corresponde a una parábola.

AYUDA

- Para efectuar la demostración del literal (e) tenga en cuenta que todo cuadrilátero es dividido en dos triángulos iguales y semejantes por cualquiera de sus diagonales.
- Recuerda que en Matemáticas el todo es igual a la suma de sus partes.

ACTIVIDAD 4

La propiedad construcción del eje, el foco y la directriz de una parábola dada

INFORMACIÓN

Un diámetro es una recta t que pasa por los puntos medios de cualquier par de cuerdas paralelas, es decir, las biseca.

TAREA

Dada una parábola (“actividad3.fig), construye su eje de simetría y su foco.

AYUDA

Todos los diámetros de la parábola son paralelos al eje de simetría.

SUGERENCIA

- Empieza construyendo un diámetro.
- Utiliza la propiedad fundamental para construir el foco y la directriz.

7.8.5.4. Ficha técnica. En la página 42 se hace una descripción general de este tipo de ficha.

NOMBRE DE LOS ARCHIVOS

- actividad2.fig
- actividad3.fig
- actividad4.fig

SOFTWARE UTILIZADO

Cabri Géomètre II Plus v.1.2.5.

DESCRIPCIÓN

Las tres figuras representan la parábola generada de distintas maneras.

INSTRUCCIONES

El estudiante desarrolla la actividad a su propio ritmo. Para ello debe leer los enunciados y la información suministrada en cada actividad. Asimismo deberá experimentar con las construcciones provistas y propias.

MODALIDAD

Sesión en el aula de informática.

DOCUMENTACIÓN

http://download.cabri.com/data/pdfs/manuals/cabri2plus140/Man_es_PDF3.pdf

©2007 CABRILOG SAS

Manual de Cabri II Plus

Autor inicial: Eric Bainville

Actualizaciones: Julio Moreno, Marzo 2007

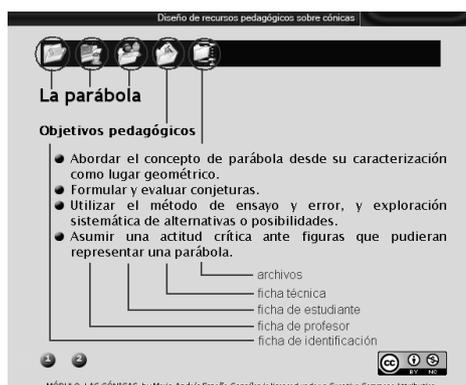
Evoluciones: www.cabri.com

Errores a señalar: support@cabri.com

Creación gráfica, configuración de página y relecturas: Cabrilog

En la figura 16 se indica la disposición de estas fichas a modo de repositorio.¹⁴ En tanto que la figura 17 muestra un ejemplo del diseño artístico de una de las fichas que se diseñaron para un recurso pedagógico propuesto dentro de esta investigación, el cual se elaboró para enseñar conocimientos geométricos relacionados a la parábola. Esto con el fin de ilustrar de una mejor manera al lector sobre este aspecto de la investigación.

Figura 16. Interfaz de acceso a los documentos de un recurso pedagógico



En esta página Web del módulo se simula un repositorio. Cada uno de los íconos es un enlace a una de las cuatro fichas y el último a los archivos CABRI. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Figura 17. Imagen de Ficha de identificación

¹⁴ La palabra repositorio hace alusión a un lugar donde se guarda algo. Pues bien, el contexto del modelo de Recursos Pedagógicos Vivientes, un repositorio es un lugar en el ciberespacio donde los profesores subir los recursos que hayan creado, y así mismo, utilizar los recursos creados por los demás.

|  Caracterización de la parábola como lugar geométrico plano ⁴ Ficha de identificación  | |
|---|--|
| Tipo | Construcción – Descripción verbal– Demostración – Caja Negra |
| Nivel | Enseñanza media. |
| Palabras claves | Lugar geométrico, directriz, foco, vértice, eje de simetría, <i>latus rectum</i> , parámetro, mediatriz, diámetro, cuerdas, propiedad fundamental. |
| Objetivos pedagógicos generales | Caracterizar la parábola como lugar geométrico plano. |
| Modalidad | Sesión en el aula de informática. |
| Dispositivo técnico | Aula de informática con Cabri-Géomètre II Plus instalado. |
| Autor | Mario Andrés España González Universidad de Nariño |
| Lista y descripción de fichas | <ul style="list-style-type: none">  actividad2.fig: Tarea tipo construcción y descripción verbal.  actividad3.fig: Tarea tipo demostración y descripción verbal.  actividad4.fig: Tarea tipo caja negra.  AFI.pdf: Ficha de identificación.  AFP.pdf: Ficha del profesor.  AFE.pdf: Ficha del estudiante.  AFT.pdf: Ficha técnica. |
| Descripción de la actividad | La secuencia didáctica está encaminada a descubrir y comprobar relaciones métricas y geométricas que caracterizan la parábola estudiada como lugar geométrico plano. |

⁴ Recurso pedagógico diseñado por Mario Andrés España González con fines investigativos no comerciales.

Diseño gráfico de la ficha de identificación. Todas las fichas están digitalizadas en formato PDF. Las filas de títulos (columna izquierda) no son del mismo color en todas las fichas, para así facilitar su identificación. Adaptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.7.6. Documentos SWF. Estos documentos diseñados con ADOBE INDESIGN tienen la particular característica de simular el efecto de revista al cambiar de hoja.⁵ El diseño de este tipo de material se hizo con el objeto de facilitar la organización de los contenidos más extensos, dado que en cuales en una página Web resultaban ser demasiado densos y poco atractivos para el lector. Es importante destacar que esta clase de documentos puede incorporar tanto texto como imágenes.

En el módulo se incluyeron cuatro documentos SWF. A continuación se listan los contenidos de cada uno de ellos:

REPRESENTACIÓN Y VISUALIZACIÓN

- Devenir histórico
- Modelos geométricos
- Modelización del espacio
- Representación interna y externa
- De lo visual a lo simbólico
- La representación de cónicas
- Visualización en ambientes de geometría dinámicos

CONSTRUCCIÓN Y DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA

- Los Elementos de Euclides
- Epistemología y cognición
- La noción de construcción
- Construcciones y pensamiento matemático
- Diagramas y figuras
- Las construcciones en CABRI
- La demostración en ambientes de geometría dinámica

EL ‘MILIEU’ Y LAS RETROACCIONES

- La teoría de situaciones didácticas
- La influencia piagetiana
- La noción de ‘milieu’
- El papel de las retroacciones

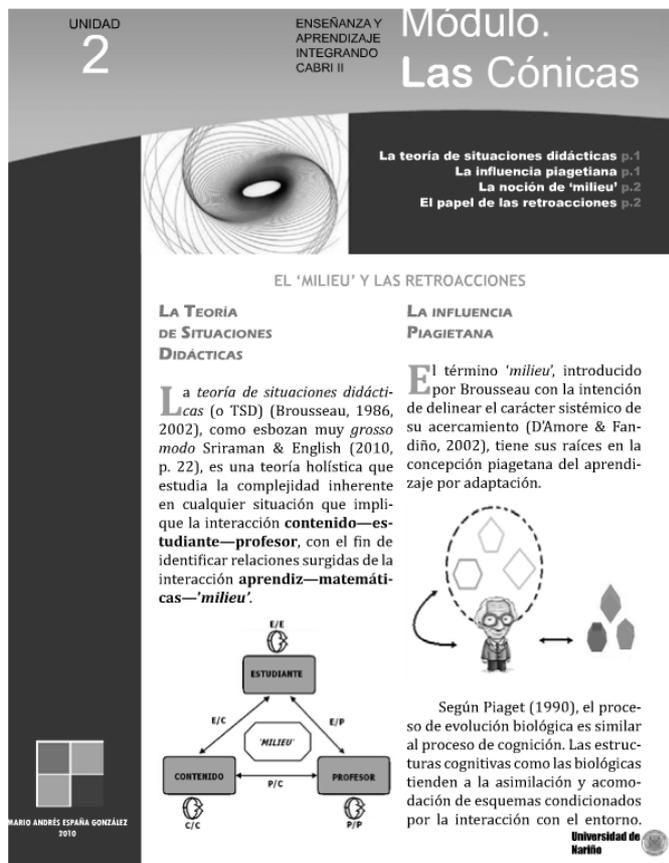
LAS TAREAS EN EL AMBIENTE CABRI

- La resolución de problemas
- El quehacer matemático
- El concepto de tarea
- Tipos de tarea con CABRI
- Variables didácticas

Los documentos SWF utilizados para dar soporte material a estas cuatro sub-temáticas, que a su vez constituyen uno de los cuatro temas de la unidad dos, contienen los textos de mayor extensión en esta parte del módulo, ya que fue considerado conveniente su ampliación para lograr en el usuario un mayor entendimiento con respecto a la dimensión de tales aspectos, tan importantes desde el punto de vista didáctico, que es la perspectiva transversal de la unidad dos.

En la figura 18 se muestra la portada de uno de estos documentos SWF:

Figura 18. Portada del documento SWF: El ‘Milieu’ y las Retroacciones



Para cambiar de página basta con clicar una vez en alguno de los extremos de la página o, desplazarlos haciendo clic sostenido sobre cualquiera de ellos (arrastre). Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.7.7. Documentos PDF. El formato PDF se utilizó para dar soporte a documentos proporcionalmente menos densos, a saber: las fichas de estado y tres escritos breves explicativos sobre el modo arrastre, las construcciones blandas y robustas, y las macro-construcciones.

En la figura 19 se muestra una página de uno de estos documentos:

Figura 19. Portada del documento PDF: Macro-construcciones



MACRO-CONSTRUCCIONES ¹

Cabri-géomètre II facilita la reproducción de figuras sin necesidad de repetir todas las etapas de construcción, gracias al paquete de herramientas [Macro].



A continuación ofrecemos una descripción *grasso modo* de la función de cada herramienta del paquete:

| Herramienta | Icono | Descripción |
|-----------------------|-------|--|
| Objeto(s) inicial(es) | X→ | Seleccionar el conjunto de los objetos iniciales a utilizar en la macro construcción. |
| Objeto(s) final(es) | →Y | Seleccionar el conjunto de los objetos finales de una macro construcción. |
| Validar una macro... | X→Y | Después de la definición de los objetos iniciales y finales, permite validar la macro. |

UN EJEMPLO DE MACRO CONSTRUCCIÓN

Automatizar la construcción de un cuadrado a partir de un segmento que será una de sus diagonales:

Construcción

- Segmento AB.
- Punto medio M del segmento AB.
- Circunferencia con centro M y diámetro AB.
- Recta s perpendicular al segmento AB por M.
- Puntos de intersección C y D de la recta s con la circunferencia M_{AB} .
- Polígono ABCD.

¹ Documento elaborado por MARIO ANDRÉS ESPAÑA GONZÁLEZ con fines académicos no comerciales.

En promedio este tipo de documentos no exceden las tres páginas. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

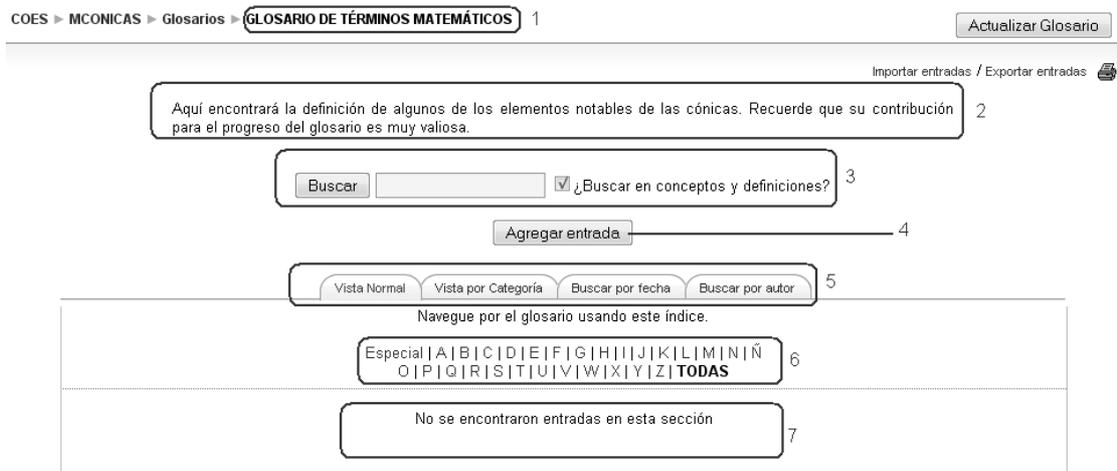
10.8. DISEÑO DE ACTIVIDADES EN MOODLE

En este apartado se detalla cada una de las actividades que fueron diseñadas para ser trabajadas en la plataforma e-learning MOODLE.

10.8.1. Glosario. Este es un espacio para que los usuarios publiquen conceptos y definiciones relacionados a los elementos notables de las cónicas. Los aportes que ellos hagan se van cerniendo con el transcurso del tiempo, es por eso que se tiene como una actividad para estar abierta durante todo el tiempo que dure el desarrollo de la unidad.

El glosario (Ver Figura 20) facilita la acción colaborativa de todos los participantes al permitir sugerir mejoras o hacer correcciones de las definiciones publicadas.

Figura 20. Glosario de términos matemáticos



Interfaz del módulo glosario en MOODLE. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Abajo se especifica cada una de las partes enumeradas en la figura 20.

1. Nombre del glosario.
2. Descripción detallada del glosario.
3. Buscador de términos.
4. Botón para agregar los nuevos términos y sus respectivas definiciones.
5. Distintas opciones para hacer la búsqueda.
6. Herramienta para navegar por el glosario utilizando un índice.
7. Espacio donde aparecen los conceptos buscados.

10.8.2. Foros. Los foros se establecieron como un espacio para el intercambio de ideas respecto a las implicaciones didácticas de los elementos históricos que se abordan en la unidad uno. En esta unidad se crearon ocho foros, todos del tipo “Pregunta y Respuesta”, por tener esta categoría dos ventajas importantes:

1. Las preguntas solo pueden ser propuestas por el profesor, evitando así posibles preguntas de los estudiantes que conlleven a un distanciamiento de la idea principal que sirve de hilo conductor para el desarrollo del foro. No es que esto sea malo, sino que el tiempo asignado no admite llegar hasta esas instancias.
2. Este foro fuerza a la suscripción y participación de todos los usuarios. Primero, el sistema suscribe automáticamente a todos los usuarios. Y segundo, un usuario que desee conocer las respuestas dadas por los demás, debe primero responder a la pregunta formulada inicialmente por el profesor.

A continuación se presentan las preguntas formuladas en cada uno de los foros:

10.8.2.1. Periodo Griego. Los foros diseñados para suscitar la reflexión didáctica en torno a la evolución conceptual de las cónicas en esta etapa parten de las siguientes cuestiones:

FORO 1: ¿ESTUDIAR LAS CÓNICAS EN EL PLANO O EN EL ESPACIO?

En el periodo griego se distinguen dos formas de caracterizar geoméricamente las cónicas: una, a partir del espacio; y otra, a partir del plano. Cada una de estas maneras comporta sus propios métodos: estereométricos y planimétricos respectivamente. Desde un punto de vista didáctico y basándose en su propia experiencia como maestro, ¿cuál de estos dos enfoques considera usted que sea susceptible de mayor aprovechamiento en clases? ¿Por qué?

FORO 2: APOLONIO Y EL MÉTODO ANALÍTICO

Según Piaget y García (1994 pág. 96),¹⁵ Apolonio aporta, en sus "Éléments de coniques", no sólo una impresionante cantidad de resultados nuevos, sino también una metodología y una renovación conceptual en las cuales puede encontrarse el germen lejano de la geometría analítica del siglo XVII. ¿En qué aspectos se asemeja y en cuáles difiere el método de Apolonio del método de la geometría analítica?

FORO 3: ¿ESTUDIO GENERAL O ESTUDIO PARTICULAR?

El significado de las cónicas como lugares geoméricos admite dos lecturas distintas. Por un lado, está la bien conocida caracterización bifocal de la elipse y la hipérbola, además de la propiedad foco-directriz de la parábola. Por otro lado, está la caracterización dada a conocer por Pappus, basada en el concepto de excentricidad. Esta reflexión nos conduce a considerar dos opciones para el tratamiento escolar de las cónicas: estudio particular o estudio general. De acuerdo a su criterio, ¿qué resultaría más conveniente: (1) Enseñar las definiciones particulares de parábola, hipérbola y elipse; o (2) Enseñar una definición común a las tres cónicas. Justifique su respuesta.

10.8.2.2. Renacimiento y Medioevo. Los foros diseñados para suscitar la reflexión didáctica en torno a la evolución conceptual de las cónicas en esta etapa parten de las siguientes cuestiones:

FORO 1: EL TRAZADO DE CÓNICAS

El trazado de cónicas posiblemente es tan antiguo como la teoría misma. No obstante, el estatuto científico de la construcción material de curvas cónicas se alcanza sólo hasta el siglo IX. En este sentido, ¿cuál es el aporte que hace Ibrahim Ibn Sinán a este componente "intuitivo" del conocimiento matemático de las cónicas?

¹⁵ PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1996). El desarrollo histórico de la geometría. En PIAGET, Jean y GARCÍA, Rolando. Psicogénesis e historia de la ciencia. Buenos Aires: Siglo XXI, 1996.págs. 88-107.

FORO 2: LAS CÓNICAS EN ALBERTO DURERO

Si bien es cierto que los fines de Alberto Durero eran principalmente artísticos antes que geométricos, ¿podría afirmarse que sus construcciones conservan algo del carácter científico que los árabes le imprimieron al trazado de cónicas? Justifique.

FORO 3: EL PAPEL DE LA INTUICIÓN

La noción de Kepler sobre la generación de cónicas mediante lo que hoy llamaríamos transformaciones afines es una muestra de la potencia que tiene la intuición en la actividad matemática. ¿Cómo explica usted el papel que ha desempeñado la intuición en la evolución del significado de las cónicas?

10.8.2.3. Siglo XVII. Los foros diseñados para suscitar la reflexión didáctica en torno a la evolución conceptual de las cónicas en esta etapa parten de las siguientes cuestiones:

FORO 1: LUGARES GEOMÉTRICOS O SECCIONES DEL CONO

Descartes en la descripción que hace del método del jardinero alude la ventaja de comprender el concepto de cónicas a partir de su caracterización como lugares geométricos frente a la concepción de secciones planas del cono. ¿Qué opina acerca de esta afirmación?

FORO 2: LA INFLUENCIA DE LOS ARTEFACTOS

Es claro que el conocimiento matemático plantea una simbiosis entre instrumentos técnicos (símbolos) y conceptuales (significados). ¿Cómo analiza usted la incidencia del uso de artefactos sobre dicha simbiosis en la teoría de cónicas? ¿Hubiera sido posible su desarrollo sin ellos? ¿Por qué?

FORO 3: ¿POR QUÉ LOS MÉTODOS SINTÉTICOS?

El alcance del método analítico surgido en los albores de la modernidad hizo parecer superfluo el uso de los métodos sintéticos de la geometría elemental en el estudio de las propiedades de las cónicas (y de otras curvas cuadráticas), principalmente por su potencia para la generalización de resultados parciales. ¿Qué razones se pueden aducir para justificar la insistencia respecto a enseñar las cónicas como objetos geométricos puros?

10.8.3. Patatas. Son ejercicios educativos que se crean con el programa HOT POTATOES y que pueden ser alojados en un sitio Web. Los ejercicios que se pueden crear son del tipo respuesta corta, selección múltiple, texto mutilado, crucigramas y emparejamiento. MOODLE tiene una herramienta que permite agregar este tipo de objetos de aprendizaje. Doce de las actividades propuestas en la unidad dos se basan en esta tecnología. En la tabla 8 se hace una descripción detallada de esto:

Tabla 8

Relación de actividades en las que se utiliza patatas

| Tema | Tipo | ítems | Tiempo |
|---------------------------------|-------------------------------|-------|----------------------|
| La transposición informática | Prueba de opción múltiple | 10 | 20 min |
| Ideas previas sobre cónicas | Prueba de respuestas cortas | 10 | 20 min |
| Representación y Visualización | Prueba de emparejamiento | 10 | 10 min |
| Representación y Visualización | Prueba de texto mutilado | 20 | 20 min |
| Construcción y Demostración | Prueba de emparejamiento | 10 | 10 min |
| Construcción y Demostración | Prueba de texto mutilado | 20 | 20 min |
| El ‘Milieu’ y las Retroacciones | Prueba de emparejamiento | 10 | 10 min |
| El ‘Milieu’ y las Retroacciones | Prueba de texto mutilado | 20 | 20 min |
| Tareas con CABRI | Prueba de emparejamiento | 10 | 10 min |
| Tareas con CABRI | Prueba de texto mutilado | 20 | 20 min |
| Aspecto instrumental | Ejercicio de ordenar palabras | 10 | 5 min por cada frase |
| General | Crucigrama | 22 | 20 min |

10.8.4. Tareas. La herramienta “Tarea” en MOODLE es una forma de evaluar el proceso formativo. Existen cuatro tipos de tarea ofrecidos por la plataforma e-learning. En el módulo Las Cónicas, se ha optado por crear tres tareas del tipo “Subir un archivo único”.

La dinámica de estas tareas consiste en proponer actividades externas a la plataforma, que deben desarrollarse en el tiempo estipulado por el profesor o el tutor, para luego subir el producto final en un archivo único.

Las tareas propuestas en el módulo diseñado en el marco de esta investigación fueron distribuidas así: las dos primeras en la segunda unidad y una tercera que se pensó para la unidad tres.

A continuación se especifica y comenta cada una de las tareas referidas.

PRIMERA “TAREA” DISEÑADA

Esta tarea aparece en el campus virtual, en la sección Actividades de la UNIDAD 2 del curso Las Cónicas, bajo la etiqueta de Actividad 13. Abajo en el cuadro se presenta el enunciado de la tarea.

1. Elaborar una "macro" que permita construir un cuadrado a partir de un segmento dado.
2. Elaborar otra "macro" para automatizar una construcción que usted elija.
3. Colocar todos los archivos en una sola carpeta con el nombre ACTIVIDAD13, luego comprimirla en formato ZIP y subir al campus. No olvide de guardar la macro. Recuerde la extensión de los archivos macros es ".mac".

COMENTARIOS

Ninguno

SEGUNDA "TAREA" DISEÑADA.

Esta tarea aparece en el campus virtual, en la sección Actividades de la UNIDAD 2 del curso Las Cónicas, bajo la etiqueta de Actividad 14. Abajo en el cuadro se presenta el enunciado de la tarea.

Haga clic en los siguientes enlaces para descargar cada uno de los 4 documentos PDF, que contienen tareas sobre cónicas.

[AP11](#)

[AP12](#)

[AP13](#)

[AP14](#)

Lea con atención y establezca semejanzas y diferencias entre las cuatro tareas. Consigne esto en un documento de WORD y llámelo actividad14.doc. Luego súbalo al campus en la fecha establecida.

COMENTARIOS

En la tabla 9 se describe tácitamente cada una de las tareas en mención. Cabe aclarar que la modalidad mixta es una combinación de actividades que incluye tanto, tareas para ser desarrolladas con herramientas informáticas, así como tareas tradicionales para ser resueltas con lápiz y papel.

Tabla 9

Descripción de varias tareas sobre cónicas propuestas por diversos autores

| TITULO | MODALIDAD | RESEÑA | AUTOR/ES |
|--|---------------------------|--|--|
| AP11 | | | |
| Papiroflexia y Geometría dinámica | Mixta | Secuencia de seis actividades de construcción de cónicas a partir de sus envolventes. Algunas son con CABRI y otras con plegado de papel. | María Ruiz Dávila, María Luz Callejo, María Esther González, y Mercedes Fernández. |
| AP12 | | | |
| Visualización y generalizaciones: el caso de la determinación de lugares geométricos | Mixta | Tiene como objetivo la formación del concepto de parábola a partir del planteamiento de una situación problema: determinar los puntos equidistantes de una recta y un punto fuera de ella. | Miguel Díaz Cárdenas |
| AP13 | | | |
| Evaluación Final "Cónicas" | Ambiente de lápiz y papel | Tareas en formato escrito que integran diversos conceptos, procedimientos y actitudes. | José del Río Sánchez |
| AP14 | | | |
| Las cónicas. Prueba sobre procedimientos algorítmicos | Ambiente de lápiz y papel | Tareas de carácter analítico, que admiten el uso de regla y compás | José del Río Sánchez |

TERCERA "TAREA" DISEÑADA

Esta tarea aparece en el campus virtual, en la sección Actividades de la UNIDAD 3 del curso Las Cónicas, bajo la etiqueta de Actividad 5. Abajo en el cuadro se presenta el enunciado de la tarea.

Se recomienda, si es posible, observarla también en el campus.

1. Anotar observaciones y/o recomendaciones con respecto a la secuencia didáctica presentada, en el formato dispuesto [aquí](#).
2. Subir luego al campus.

COMENTARIOS

Aquí, la secuencia didáctica presentada, se refiere a la secuencia que se encuentra descrita en la ficha de estado del estudiante, la cual constituye parte del recurso pedagógico propuesto por el autor del módulo.

10.8.5. Consultas. La consulta es una forma de encuesta que en este caso se propuso como mecanismo de indagación sobre las ideas previas de los usuarios con relación a las cónicas. En un principio se indaga sobre aspectos generales acerca del saber matemático de las cónicas y luego sobre algunas cuestiones específicas. Esta actividad, aunque no lo mencione, tiene por objeto contribuir a los profesores en la elaboración de recursos pedagógicos que deben ser experimentados y validados por sus demás compañeros.

Hay que aclarar que las encuestas no tienen ninguna calificación y por lo general son utilizadas para acordar mediante consenso algunas decisiones que en el desarrollo de un curso en MOODLE deben eventualmente tomarse, como por ejemplo, determinar la fecha de alguna evaluación o ponerse de acuerdo en cuanto a horarios, si el curso así lo admite. Sin embargo, el campo de acción previsto de las herramientas usualmente puede ser extendido a otros dominios, como sucede en este caso.

Fueron elaboradas cuatro consultas:

- Primera “Consulta” propuesta. En esta consulta se presenta una serie de imágenes sobre curvas cónicas y siete frases que refieren algunas cuestiones sobre dichas imágenes. De estas siete proposiciones el estudiante solo puede escoger una, la que a su parecer considere sea verdadera.
- Segunda “Consulta” propuesta. En esta consulta se presenta una serie de imágenes sobre la parábola y seis frases que refieren algunas cuestiones sobre dichas imágenes. De estas seis proposiciones el estudiante solo puede escoger una, la que a su parecer considere sea verdadera.
- Tercera “Consulta” propuesta. En esta consulta se presenta cinco frases que hacen referencia a la hipérbola. De estas cinco proposiciones el estudiante solo puede escoger una, la que a su parecer considere sea verdadera.
- Cuarta “Consulta” propuesta. En esta consulta se presenta seis frases que hacen referencia a la elipse. De estas seis proposiciones el estudiante solo puede escoger una, la que a su parecer considere sea verdadera.

En la figura 21 se muestra un ejemplo de la interfaz de una encuesta.

Figura 21. Consulta sobre ideas previas acerca de la hipérbola

COES ► MCONICAS ► Consultas ► Ideas Previas (La hipérbola) Actualizar Consulta

Ver 0 respuestas

Las siguientes 5 frases hacen referencia a la hipérbola. Seleccione la que considere cierta.

- Una hipérbola se define así: es la curva obtenida al seccionar una superficie cónica completa mediante un plano que no pasa por el vértice y corta a sus dos hojas.
- Una hipérbola no puede formarse con las dos mitades de una elipse enfrentadas entre sí.
- Fijado un punto de una hipérbola, siempre es posible trazar dos tangentes a dicha hipérbola pasando por ese punto.
- Las hipérbolas no aparecen en objetos o fenómenos reales.
- La gráfica de la función $y = 1/x$ es una hipérbola.

Guardar mi elección

Se debe seleccionar una de las opciones y luego clicar el botón “Guardar mi elección”. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

10.8.6. Talleres. El taller es la herramienta más compleja de MOODLE. Usualmente esta herramienta es utilizada para proponer actividades que supongan la creación de algo, puede ser un escrito, un trabajo, etc. Es por eso por lo que en el módulo se consideró como herramienta para realizar el trabajo final. De esta manera fueron propuestos dos talleres para ser trabajados entre dos grupos, tal como se explica a continuación:

TALLER GRUPO 1

1. Elaborar un recurso pedagógico basado en geometría dinámica sobre la elipse, aplicando todos los conocimientos técnicos y conceptuales adquiridos hasta el momento.
2. Resolver la tarea diseñada por el grupo 2 sobre la hipérbola y evaluarlo con base a los criterios establecidos.

TALLER GRUPO 2

1. Elaborar un recurso pedagógico basado en geometría dinámica sobre la hipérbola, aplicando todos los conocimientos técnicos y conceptuales adquiridos hasta el momento.
2. Resolver la tarea diseñada por el grupo 1 sobre la hipérbola y evaluarlo con base a los criterios establecidos.

10.9. ENSAMBLAJE

En esta última etapa del proyecto se procedió a realizar la configuración final del módulo. Es decir, se hizo el montaje de todos los objetos de aprendizaje en la plataforma MOODLE, los cuales fueron ordenados según la secuencia prevista. Para llevar a cabo dicha actividad

fue preciso primero subir los archivos al campus virtual para luego acomodarlos obedeciendo dicha secuencia.

Este trabajo solo es posible hacerlo si se tiene el rol de administrador del curso en MOODLE, porque de tener otro rol solo no se pueden subir archivos , a menos que así lo disponga el tutor, ni mucho menos organizar información o crear actividades utilizando las herramientas del sistema.

En las figuras 22, 24 y 25 se muestran ejemplos del aspecto de las unidades.

Figura 22. Unidad Cero



Aspecto de la unidad cero en MOODLE. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

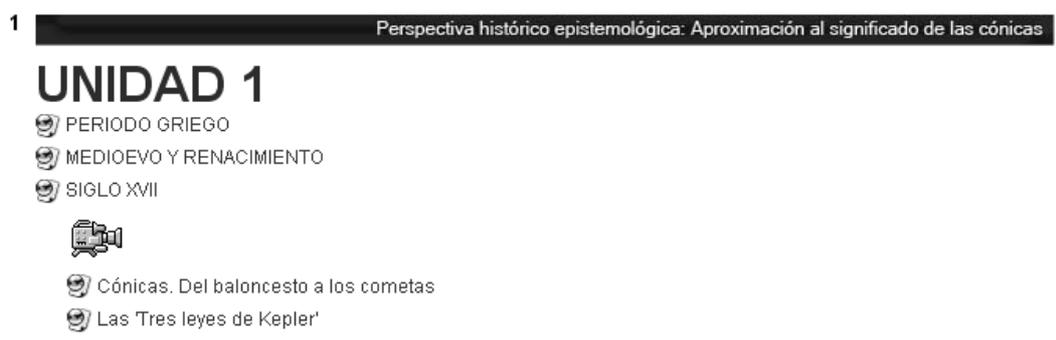
- En el espacio novedades se puede publicar anuncios dirigidos a todos los participantes.
- La cafetería es un foro en el que los usuarios pueden hacer su presentación y mantener un contacto informal con los demás.
- Contacto en línea es un chat en el que los usuarios pueden contactar en tiempo real al profesor o monitor, en los horarios que sean establecidos.
- ASPECTOS GENERALES es un enlace que conecta con la unidad cero del módulo (Ver Figura 23).

Figura 23. Interfaz de la unidad cero



Esta la interfaz del módulo en general. Lo único que cambia en las plantillas de las diferentes unidades son algunos de los botones de la barra de navegación. Cabe señalar que esta interfaz puede correr también sin que el módulo sea necesariamente subido a la plataforma MOODLE, aunque, como es obvio, de esta manera no funcionan las tareas diseñadas para MOODLE. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Figura 24. Unidad Uno



Aspecto del índice del contenido temático de la unidad 1 en la plataforma. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

Figura 25. Actividades Unidad Uno

² Actividades 



 ACTIVIDADES UNIDAD 1

 GLOSARIO DE TÉRMINOS MATEMÁTICOS

PERIODO GRIEGO

 FORO 1: ¿Estudiar las cónicas en el plano o en el espacio?

 FORO 2: Apolonio y el método analítico

 FORO 3: ¿Estudio general o estudio particular?

MEDIOEVO Y RENACIMIENTO

 FORO 1: El trazado de cónicas

 FORO 2: Las cónicas en Alberto Dürero

 FORO 3: El papel de la intuición

SIGLO XVII

 FORO 1: ¿Lugares geométricos o secciones del cono?

 FORO 2: La influencia de los artefactos en el estudio de las cónicas

 FORO 3: ¿Por qué los métodos sintéticos?

Sección en la que se agregaron los recursos para las actividades evaluativas de la unidad uno. Adoptado de Módulo. Las Cónicas, por M. España 2010, Tesis de pregrado. Copyright 2010 por Mario Andrés España González.

11. CONCLUSIONES

La investigación desarrollada en este trabajo se enmarcó dentro de una experiencia de elaboración de un módulo sobre cónicas para la formación docente en Matemáticas y Tecnología, a través de un ambiente de aprendizaje informático configurado por medio de herramientas de la plataforma e-learning MOODLE y el software educativo CABRI. La formación se centró en temas relacionados al saber disciplinario y profesional de la docencia en matemáticas, en particular, con referencia al conocimiento matemático de las cónicas.

El módulo Las Cónicas se pensó para ser dirigido principalmente a profesores de Educación Media. La metodología del proceso formativo propuesto fue concebida para desarrollarse en el interior de una comunidad virtual de aprendizaje. Es por eso que se hizo uso de variadas herramientas de MOODLE que permiten la intercomunicación y la interacción entre los usuarios. De la misma manera, fueron propuestas varias tareas para ser desarrolladas individualmente, ya que la plataforma así lo permite pues su filosofía se basa tanto en el constructivismo genético como en el constructivismo social.

La investigación tuvo como propósitos: primero, proporcionar material didáctico para la formación docente en el contexto de las TIC; y segundo, establecer algunos criterios que puedan servir de sustento teórico a los formadores y autores de cursos para la profesionalización de los docentes de matemáticas.

A continuación se presenta las reflexiones que salen del estudio, se analizan los alcances, limitaciones y perspectivas de la investigación desarrollada, y se exponen algunas consideraciones y recomendaciones que a la luz de la experiencia del investigador podrían ser útiles para el posterior diseño de otros materiales.

11.1. SOBRE EL DISEÑO PEDAGÓGICO

El diseño conceptual de la plataforma e-learning MOODLE y sus diversas herramientas para la interacción, así como su funcionalidad y facilidad de acceso y manejo técnico para crear espacios que propicien la intervención dinámica de los participantes del proceso formativo, resultaron ser cruciales para la apertura de canales de comunicación pedagógica, social, de apoyo tutorial y ayuda técnica, que posiblemente podrán favorecer el aprendizaje basado en el trabajo colaborativo. Lo que es ampliamente aceptado como una posición que necesariamente debe adoptarse para elaborar propuestas de formación e-learning sustentadas en principios socio-constructivistas.

En este sentido, se subraya la importancia de utilizar las herramientas “Foro” y “Taller” en el diseño de actividades concebidas para la consecución de los objetivos educativos establecidos. La primera por ser un instrumento pedagógico idóneo para estimular la

discusión y el debate constructivo. La segunda por permitir la auto-evaluación y la inter-evaluación de la producción académica de los estudiantes. Pero esto no significa que deba darse prioridad a una herramienta frente a otra, sino que se debe desarrollar el proceso comunicativo e interactivo profesional mediante la utilización de las mismas y complementarlo con otras herramientas de MOODLE, para así propender por la estructuración de una estrategia formativa sinérgica.

11.2. SOBRE EL DISEÑO DIDÁCTICO

En Didáctica de las Matemáticas, una situación es un conjunto de relaciones que se establecen de manera explícita y/o implícita entre los estudiantes, el profesor y el medio (Brousseau, 1997), el cual puede incluir componentes abstractos y concretos. Esto con el fin de producir en los estudiantes aprendizajes y conocimientos.

De este modo, el diseño de una secuencia de situaciones de aprendizaje debe ser concebido para constituirse en un proceso que conduzca a los estudiantes al desarrollo de estrategias heurísticas que le permitan resolver satisfactoriamente los problemas planteados en cada situación, las cuales según Brousseau (1997) se van cerniendo en la medida que progresan las interacciones entre el medio y el estudiante.

En estos términos, es oportuno señalar que se coincide con Albano (2005) cuando expresa que las plataformas e-learning tienen la potencia de sumergir a los estudiantes en un contexto de aprendizaje interesante y a la vez estimulante. En efecto, la diversidad de actividades y recursos con que cuenta MOODLE supone una amplia gama de posibilidades y oportunidades para la secuenciación de situaciones.

Por otra parte, dichas situaciones deben ineludiblemente ser enriquecidas por la mediación de las herramientas de software educativo específico, como por ejemplo CABRI, dado que los principios pedagógicos que gobiernan las acciones en las plataformas no representan *per se* una intencionalidad didáctica particular con referencia a la transmisión de saberes matemáticos, sino que su objetivo es permitir la aplicación de las plataformas en variados ámbitos educativos. La adecuación y contextualización de las herramientas de MOODLE es tarea de los autores de cursos e-learning.

En este aspecto, la utilización de CABRI significó una gran ayuda, puesto que aparte de ser un software diseñado justamente para el estudio de la geometría elemental, incluyendo, claro está, a las cónicas, los desarrollos investigativos que se han obtenido en este campo, brindan un valioso corpus teórico para sustentar el diseño de situaciones basadas en el uso de CABRI.

Así pues, cabe destacar que la tipificación de tareas con CABRI (Fernández, y otros, 2007), identificadas y estudiadas a profundidad por Laborde (1998; 2001) constituye un valioso recurso para tal propósito. Además, no se puede omitir que, al parecer, CABRI es, por su fácil manejo básico, una de las tecnologías de mayor aceptación y acogida entre los

profesores novicios (Darricarrère, y otros, 2010). Algo que resulta importante de tener en cuenta para intentar solventar el problema de la legitimidad educativa de las TIC.

11.3. SOBRE EL DISEÑO CURRICULAR

El diseño y producción de recursos y materiales didácticos plantea serias dificultades curriculares (Coriat, 2000), pero en el caso de los módulos de aprendizaje dichas dificultades son aún mayores, dado que estos integran diversos materiales didácticos y recursos tecnológicos, cuya articulación supone la constitución de ambientes de aprendizaje informáticos complejos. Ahora bien, pese a que en Didáctica y Pedagogía se percibe cierto consenso en cuanto a las tendencias formativas que apuntan hacia la integración de las TIC en la práctica docente, en particular, de la Educación Matemática, las decisiones sobre los aspectos curriculares a tener en cuenta al momento de elaborar materiales o módulos continúa siendo un punto crítico en este campo, por lo cual se hace preciso prestar mayor atención a los fenómenos asociados a la orquestación instrumental en la configuración de ambientes de aprendizaje informáticos dirigidos a la formación docente.

De otra parte, es bien sabido que la fundamentación geométrica de los profesores y la preparación que generalmente suelen recibir para llevar a cabo el acto de integrar las TIC a sus prácticas profesionales son, hoy por hoy, dos temas que se han constituido en objetos de especial atención entre los representantes institucionales, investigadores y formadores. Sin embargo, las decisiones curriculares que se han tomado tradicionalmente no han resultado ser tan acertadas, dado que por lo general tienden a subestimar el desarrollo de saberes disciplinarios y tienden a centrarse en el mero desarrollo de saberes técnicos o desconocen la complejidad implícita.

De otra parte, tales decisiones por lo general siguen siendo permeadas hondamente por la “matemática moderna”, tal como puede verse reflejado en las pruebas nacionales e internacionales, en los textos escolares y en los programas de formación de profesores.

Con todo, es válido subrayar que la historia de las matemáticas surge como un importante elemento a considerar en la toma de este tipo de decisiones. De hecho, luego de revisar la literatura sobre cónicas, es posible afirmar que la riqueza didáctica que se puede encontrar en los libros de historia es mucho mayor de la que se encuentra usualmente en los textos escolares. Por eso sería conveniente que para la selección y organización de contenidos el autor, antes de iniciar cualquier análisis didáctico, se documente en primera instancia a partir de la información que pueda obtener de los libros de historia.

11.4. SOBRE EL DISEÑO TECNOLÓGICO

Aunque es perfectamente válido asumir que el diseño tecnológico no debe ser considerado como una labor que pueda ser ejecutada por el mismo autor de la estrategia modular, ni mucho menos por los formadores de docentes, a criterio personal del investigador, es muy probable que en el futuro sea indispensable en los autores y formadores, a lo menos que puedan tener algunos conocimientos básicos del lenguaje HTML y sobre el manejo de herramientas informáticas aplicadas al diseño gráfico.

Esta hipótesis se sustenta en el hecho de que los programas de este tipo son cada vez más fáciles de utilizar para cualquier persona que disponga de unos cuantos conocimientos informáticos. Por eso se considera conveniente que en la concepción de los procesos de capacitación de autores y formadores se contemple también la necesidad de abordar algunas temáticas sobre este respecto.

Con esto se quiere decir que no debería separarse tan marcadamente la informática de las matemáticas, pues como señala Santaló (1994 pág. 43): “Con el pensamiento informático [haciendo una comparación con el álgebra] habrá que buscar poesía en el fondo y en la forma de los programas de computadora. Habrá que buscar belleza en la programación y en la simulación de situaciones problemáticas.”

Incluso, en cierto sentido, podría resultar contraproducente separar el diseño artístico del diseño didáctico. Por ejemplo, si se desarrolla separadamente la interfaz del contenido, su ajuste y equilibrio sería más complicado de realizar que en el caso de haber sido diseñados en conjunto por la misma persona o el mismo equipo.

11.5. ALCANCES, LIMITACIONES Y PERSPECTIVAS

Se considera que el trabajo desarrollado hace un aporte al campo investigativo del diseño de cursos e-learning para la formación docente en Matemáticas y Tecnología, principalmente, en el sentido de que provee un módulo de aprendizaje que puede ser puesto en acto o utilizado con fines investigativos. Igualmente, es una fuente primaria de información sobre el diseño de módulos basados en tecnología e-learning, que puede ser compartida y enriquecida por otros autores o investigadores.

En este trabajo se buscó concebir y configurar una estrategia modular que descansa en la elaboración de recursos pedagógicos sobre cónicas. Para ello, fue preciso primero hacer un acercamiento histórico epistemológico de estos objetos matemáticos, con vistas a activar conocimientos geométricos y propiciar espacios para la reflexión y el debate en torno de las implicaciones didácticas que conlleva dicha aproximación. Asimismo, se abordaron algunas cuestiones relacionadas con la integración de CABRI en el aprendizaje y la enseñanza de las cónicas, para proporcionar de este modo un marco teórico que permita orientar la acción de los usuarios del módulo en los procesos de diseño de tareas.

Esta propuesta curricular que integra elementos históricos con elementos didácticos, y los inscribe en el proceso de elaboración de recursos pedagógicos, se considera que es la principal fortaleza del trabajo realizado. El estudio entrega además un modelo para elaborar otros módulos o incluso es susceptible de nuevos ajustes o modificaciones, puesto que este tipo de material debe ser rediseñado y mejorado permanentemente para que adquiera la connotación de recurso pedagógico viviente.

Un aspecto que podría ser una limitante es que no se llevó a cabo la fase de experimentación o prueba piloto con un pequeño grupo de usuarios potenciales. Los

cánones dictan que antes de la publicación definitiva de material didáctico e-learning es conveniente probarlo con algunas personas con la finalidad de observar cómo actúan y navegan ante el mismo. De esta forma, podrían recolectarse algunos datos y obtener pistas que permitan realizar un análisis a priori de posibles acciones y reacciones de los usuarios potenciales ante el módulo elaborado.

Con todo, la complejidad del módulo en cuestión admite, y de hecho es bastante plausible, que la prueba piloto pueda ser desarrollada como parte de un futuro trabajo investigativo.

Finalmente, para los planteamientos interesados en el campo investigativo del diseño de cursos e-learning dirigidos a la formación docente en Matemáticas y Tecnología, se plantean algunas cuestiones que urgen ser atendidas a futuro:

- ¿En qué medida las posibles interacciones establecidas a través de MOODLE pueden favorecer la viabilidad del modelo para la creación de recursos pedagógicos vivientes?
- ¿Cuál es la contribución específica del estudio histórico epistemológico de las cónicas en la activación de conocimientos geométricos de parte de los docentes de matemáticas y la influencia que tiene sobre su práctica profesional?

11.6. CONSIDERACIONES Y RECOMENDACIONES

Al término de este trabajo es permisible delinear algunos aspectos a tener en cuenta en la creación de módulos articulados en ambientes de aprendizaje informáticos dirigidos a la formación docente en Matemáticas y Tecnología.

A continuación se efectúan algunas consideraciones y recomendaciones con respecto a: (i) la historia de las matemáticas; (ii) el diseño de tareas; (iii) la didáctica de las cónicas; y (iv) el pensamiento informático.

La historia de las matemáticas. La mejor manera de conceptualizar el saber matemático es conocer la historia de los objetos que lo conforman y entender su evolución conceptual. Los textos educativos generalmente tienden a presentar las matemáticas como una teoría acabada, omitiendo la riqueza epistemológica que hay detrás de los conceptos modernos de los objetos matemáticos.

El diseño de tareas. La elaboración de recursos pedagógicos como una estrategia de formación docente involucra a los profesores directamente en el diseño de tareas, lo cual es uno de los requisitos primordiales para el éxito de la integración de las TIC en la Educación Matemática. Hay que recordar que el solo discurso no es suficiente para promover la renovación que se requiere de las prácticas profesionales de los profesores.

La didáctica de las cónicas. A pesar de los importantes desarrollos aportados por la Didáctica de las Matemáticas al estudio de las cónicas, estos objetos constituyen un vasto campo de investigación que apenas ha empezado a ser explorado desde hace algunos años. Con todo, se considera de gran relevancia los estudios particulares que hasta ahora se han

realizado sobre la enseñanza y aprendizaje de la parábola. No obstante, sería oportuno e interesante empezar a estudiar con la misma profundidad las cuestiones relacionadas a la enseñanza y aprendizaje de la elipse y la hipérbola. Para luego, de esta manera, tener unas bases teóricas más sólidas y que a su vez faciliten también la investigación sobre el estudio global de las tres cónicas, dado que la relación intrínseca que las vincula es uno de los rasgos más distintivos de estas curvas, pero que ha sido poco estudiado en el campo de la Didáctica de las Matemáticas.

El pensamiento informático. Es inevitable que en el diseño de módulos se deba manejar y organizar grandes cantidades de información, por lo cual se precisa tener algunos conocimientos previos sobre utilización de códigos HTML y manejo de herramientas informáticas para el diseño de interfaces. Para que de esta forma los contenidos se puedan pensar en términos informáticos y así no correr el riesgo de darles el mismo tratamiento de los contenidos de texto impreso.

Bibliografía

AGUADED GÓMEZ, José Ignacio. Aprender y enseñar con las tecnologías de la comunicación [En línea]. - 2005. - 18 de Febrero de 2010. - <http://www.uhu.es/agora/digital/numeros/01/01-articulos/monografico/iaguaded..>

ALBANO, Giovannina. Mathematics and E-Learning: A conceptual framework [En línea]. - Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics, 17-21 de Febrero de 2005. - 25 de Junio de 2009. - <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/19/03/25/PDF/Giovannina-Albano-2005.pdf>.

ALMEIDA, Marcelo. Desarrollo Profesional Docente en Geometría: análisis de un proceso de Formación a Distancia // Tesis de Doctorado. - Barcelona : Universidad de Barcelona, 2002.

AMORÓS POVEDA, Lucía. MOODLE como recurso didáctico [Conferencia] // EDUTEC 2007: Inclusión digital en la Educación Superior: Desafíos y oportunidades en la Sociedad de la Información. - Buenos Aires : Universidad Tecnológica Nacional, 2007.

ARBOLEDA TORO, Néstor. abc de la Educación Virtual y a Distancia [Libro]. - Bogotá, D.C. : Filigrana E.U., 2005.

AREA MOREIRA, Manuel. La Elaboración de Módulos y Materiales Electrónicos para el WWW en la educación de Personas Adultas [En línea]. - 2002. - 26 de Enero de 2009. - <http://webpages.ull.es/users/manarea /Documentos / documento8.htm>. - Documento elaborado para la formación del profesorado del Proyecto RedVEDA.

ARTIGUE, Michèle. Learning Mathematics in a CAS Environment: The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work [Publicación periódica] // International Journal of Computers for Mathematical Learning. - 2002. - 3 : Vol. 7. - págs. 245–274.

ARTIGUE, Michèle. Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies [Sección del libro] // Information and Communications Technologies in School Mathematics / aut. libro TINSLEY, David y JOHNSON, David C / ed. Tinsley David y Johnson David C. - Londres : Chapman & Hall, 1998.

BALACHEFF, Nicolas. Entornos Informáticos para la Enseñanza de las Matemáticas: Complejidad Didáctica y Expectativas [Sección del libro] // Matemáticas y Educación:

retos y cambios desde una perspectiva internacional / ed. GORGORIÓ, Nuria, DEULOFEU, Jordi y BISHOP Alan. - Barcelona : GRAÓ, 2000.

BALACHEFF, Nicolas. La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour la didactique [Sección del libro] // Vingt ans de didactique des mathématiques en France / ed. ARTIGUE, Michèle. - París : La Pensee Sauvage Editions, 1994.

BALACHEFF, Nicolas y KAPUT, James J. Computer-Based Environments in Mathematics [Sección del libro] // International Handbook of Mathematical Education / aut. libro BISHOP Alan J, CLEMENTS Ken y KEITEL Christine / ed. BISHOP Alan J, CLEMENTS Ken y KEITEL Christine. - Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 1996.

BARRANTES, Hugo y RUIZ, Ángel. Historia del Comité Interamericano de Educación Matemática [Libro]. - Bogotá, D.C. : Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 1997.

BARRANTES, Manuel y BLANCO Lorenzo J. Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro [Publicación periódica] // Enseñanza de las Ciencias. - 2004. - 2 : Vol. 22. - págs. 241-250.

BELL, Erick Temple. The development of mathematics [Libro]. - Londres : Mac Graw Hill, 1945. - Segunda edición.

BONGIOVANNI, Vincenzo. Les caractérisation des coniques avec Cabri-géomètre en formation continue [Informe] : Tesis doctoral. - Grenoble : Universite Joseph Fourier, 2002.

BROUSSEAU, Guy. Investigaciones en Educación Matemática [Conferencia] // XII Jornadas Nacionales de Educación Matemática. - Valparaíso : SOCHIAM, 2004.

BROUSSEAU, Guy. Les propriétés didactiques de la géométrie [Conferencia] // Séminaire de Didactique des Mathématiques / ed. KOURKOULOS, Michael, TROULIS, Guil y TZANAKIS, Constantin. - Rétiño : Universidad de Creta, 2000. - págs. 67-83.

BROUSSEAU, Guy. Theory of didactical situations in mathematics: didactique des mathématiques, 1970-1990 [Libro] / trad. BALACHEFF, Nicolas [y otros]. - Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1997.

CAPPONI, Bernard. Modifications de menus dans Cabri-geometre: des symetries comme outils de construction [Publicación periódica] // Petit X. - 1992. - 33. - págs. 37-68.

CASTRO, Encarnación y CASTRO, Enrique. Representaciones y Modelización [Sección del libro] // La educación matemática en la enseñanza secundaria / ed. RICO, Luis [y otros]. - Barcelona : Horsori, 1997.

CHEVALLARD, Yves. Intégration et viabilité des objets informatiques dans l'enseignement des mathématiques [Sección del libro] // L'ordinateur pour enseigner les mathématiques / aut. libro CORNU, Bernard. - París : PUF, 1992.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado [Libro]. - Buenos Aires : AIQUE Grupo Editor S. A., 1998. - Tercera edición.

CHEVALLARD, Yves y JULLIEN, Michel. Autour de l'enseignement de la géométrie au Collège [Publicación periódica] // Petit X. - 1990. - 27. - págs. 41-76.

CHRISTIANSEN, Bent y WALTHER, Guenther. Task and activity [Sección del libro] // Perspectives on mathematics education: papers submitted by members of the Bacomet group / ed. Christiansen Bent, Howson Albert Geoffrey y Otte Michael. - Dordrecht : D. Reidel Publishing Company, 1986.

COLE, Jason y FOSTER, Helen. Using Moodle [Libro]. - Sebastopol : O'Reilly Media, Inc, 2008. - Segunda edición.

CORIAT, Moisés. Materiales, recursos y actividades: un panorama [Sección del libro] // La educación matemática en la enseñanza secundaria / ed. RICO, Luis y CASTRO, Encarnación. - Barcelona : Horsori Editorial, S.l., 2000. - Segunda edición.

COUTAT, Sylvia Gousseau. Connaître et reconnaître les théorèmes de la géométrie [Publicación periódica] // Petit X. - 2005. - 67. - págs. 12-32.

DARRICARRÈRE, Juliana y BRUILLARD, Eric. Utilisation des TIC par des professeurs de mathématiques de collège: discours et représentations [Informe]. - Les Hauts-Geneveys : Société des Enseignants Neuchâtelois de Sciences, 2010.

DE GUZMÁN, Miguel. Enseñanza de las ciencias y la matemática [Publicación periódica] // Revista Iberoamericana de Educación. - 2007. - 43. - págs. 19-58.

DEL RÍO SÁNCHEZ, José. Lugares geométricos. Cónicas [Libro]. - Madrid : Síntesis, 1994.

FERNÁNDEZ, Edinsson y GARZÓN, Diego. Módulo 3: Pensamiento Geométrico y Métrico [Documento electrónico]. - Cali : Universidad del Valle, 2007.

FISCHBEIN, Efraim. The theory of figural concepts [Publicación periódica] // Educational Studies in Mathematics. - 1993. - 2 : Vol. 24. - págs. 139-162.

GARRISON, Donn Randy y ANDERSON, Terry. E-learning in the 21st century: a framework for research and practice [Libro]. - Lóndres : Routledge, 2003. - págs. 32-47.

GARZÓN, Diego. Reflexiones respecto al diseño de materiales a la luz de un modelo que incorpora la concepción de recursos pedagógicos vivientes [Conferencia] // XIX Encuentro

de Geometría y VII Encuentro de Aritmética / ed. LUQUE, Carlos. - Bogotá : Universidad Pedagógica Nacional, 2008.

GLASERSFELD, Ernst. Preliminaries to any Theory of Representation [Sección del libro] // Problems of Representation in the Teaching / ed. JANVIER, Claude. - Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 1987.

GOLDENBERG, Paul y CUOCO, Albert. What Is Dynamic Geometry? [Sección del libro] // Designing learning environments for developing understanding of geometry and space / ed. LEHRER, Richard y CHAZAN, Daniel. - Londres : Routledge, 1998.

GOLDIN, Gerald y KAPUT, James J. A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics [Sección del libro] // Theories of mathematical learning / ed. STEFFE, Leslie y NESHER, Pearla. - Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates, Inc, 1996.

GONZÁLEZ URBANEJA, Pedro. La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza [Publicación periódica] // Suma. - Febrero de 2004. - Vol. 45. - págs. 17-28.

GUIN, Dominique y TROUCHE, Luc. Distance training, a key mode to support teachers in the integration of ICT? Towards collaborative conception of living pedagogical resources. [Conferencia] // Proceedings of CERME 4: Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education / ed. Bosch Marianna. - Sant Feliu de Guíxols : Universidad Ramon Llull, 2005. - págs. 1020-1030.

GUIN, Dominique y TROUCHE, Luc. Integration des tice: concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques [Publicación periódica] // Repères-IREM. - abril de 2004. - 55. - págs. 81-100.

GUIN, Dominique y TROUCHE, Luc. Une approche multidimensionnelle pour la conception collaborative de ressources pédagogiques [Sección del libro] // Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage / ed. BARON, Monique, GUIN, Dominique y TROUCHE, Luc. - París : Hermès - Lavoisier, 2007.

HASPÉKIAN, Mariam y ARTIGUE, Michèle. L'intégration d'artefacts informatiques professionnels à l'enseignement dans une perspective instrumentale : le cas des tableaux [Sección del libro] // Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage / ed. BARON, Monique, GUIN, Dominique y TROUCHE, Luc. - París : Hermès - Lavoisier, 2007.

HEALY, Lulu. Identifying and explaining geometrical relationship: interactions with robust and soft Cabri constructions [Conferencia] // Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. - Hiroshima : Hiroshima University, 2000. - págs. 103-117.

HIEBERT, James y CARPENTER, Thomas. Learning and teaching with understanding [Sección del libro] // Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning / ed. Grouws Douglas. - Nueva York : MacMillan Publishing Company, 1992.

HILBERT, David y COHN-VOSSSEN, Stephan. Geometry and Imagination [Libro] / trad. Nemenyi Paul. - Nueva York : Chelsea Publishing Company, 1990. - Segunda edición.

HOYLES, Cecilia [y otros]. Connectivity and virtual networks for learning [Sección del libro] // Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain / ed. HOYLES, Cecilia y LAGRANGE, Jean Baptiste. - Nueva York : Springer, 2010.

HOYLES, Celia, NOSS, Richard y KENT, Phillip. On the Integration of Digital Technologies into Mathematics Classrooms [Publicación periódica] // International Journal of Computers for Mathematical Learning. - 2004. - 3 : Vol. 9. - págs. 309-326.

ICE-ASIC. Los objetos de aprendizaje como recurso para la docencia universitaria: criterios para su elaboración [Libro]. - Valencia : Universidad Politécnica de Valencia, 2008.

JOAB, Michelle, GUIN, Dominique y TROUCHE, Luc. Conception et réalisation de ressources pédagogiques vivantes: des ressources intégrant les TICE en mathématiques [Conferencia] // Environnements Informatiques pour l'Apprentissage Humain. - Strasbourg : ATIEF, 2003. - págs. 259-270.

KADUNZ, Gert. Macros and Modules in Geometry [Publicación periódica] // Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM). - 2002. - 3 : Vol. 34. - págs. 73-77.

KAPUT James J. Representation System and Mathematics [Sección del libro] // Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics / ed. JANVIER, Claude. - Mahwah : Lawrence Erlbaum Associates, 1987.

LABORDE, Colette. Cabri-Geómetra o una nueva relación con la geometría [Sección del libro] // Investigación y didáctica de las matemáticas / aut. libro Educativa Centro de Investigación y Documentación / ed. PUIG, Luis y CALDERÓN, José. - Madrid : Ministerio de Educación y Ciencia, 1996.

LABORDE, Colette. Enseigner la géométrie: permanences et révolutions [Sección del libro] // Actes du 7e Congrès international sur l'enseignement des mathématiques / ed. GAULIN, Claude [y otros]. - Quebec : Les Presses de l'Université Laval, 1992.

LABORDE, Colette. Integration of technology in design of geometry task with Cabri-geometry [Publicación periódica] // International Journal of Computer for Mathematical Learning. - 2001. - 3 : Vol. 6. - págs. 283-317.

LABORDE, Colette. Visual phenomena in the teaching/learning of geometry in a computer- based environment [Sección del libro] // Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century / ed. MAMMANA, Carmelo y VILLANI, Vinicio. - Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1998.

LAGRANGE, Jean Baptiste [y otros]. Technology and Mathematics Education: A multidimensional study of the evolution of research and innovation [Sección del libro] // Second International Handbook of Mathematics Education / ed. BISHOP, Alan J [y otros]. - Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.

LÉVY, Jean François. "Etat de l'art" sur la notion de compétence [En línea]. - 2004. - 20 de junio de 2009 . - <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/00/31/74/PDF/IntroJFL.pdf>.

LUPIÁÑEZ, José Luis y MORENO, Luis. Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas [Sección del libro] // Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro / ed. GÓMEZ, Pedro y RICO, Luis. - Granada : UGR, 2001.

LUSA MONFORTE, Guillermo. Seminario permanente de la historia de la matemática [Publicación periódica] // Butlletí de la Secció de Matemàtiques de la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques. - Abril de 1984. - Vol. 16. - págs. 4-7.

MADARIAGA ORBEA, Juan. Un pensamiento histórico: el de Pierre Vilar [Publicación periódica] // Revista Internacional de los Estudios Vascos. - 2003. - 48. - págs. 935-939.

MAMMANA, Carmelo y VILLANI, Vinicio. Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. Discussion Document for an ICMI Study [appendix] [Sección del libro] // Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century. - Dordrecht : Kluwer Academic Publisher, 1998.

MORENO, Luis. Cognición y computación; el caso de la geometría y la visualización [Conferencia] // Memorias del seminario nacional de formación de docentes en el uso de nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. - Bogotá, D.C. : Serie Memorias, 2002. - págs. 87-92.

MORENO, Luis. Cognición, mediación y tecnología [Publicación periódica] // Avance y Perspectiva. - 2001. - Vol. 20. - págs. 65-68.

MOUSLEY, Judith, LAMBDIN, Diana y KOC, Yusuf. Mathematics teacher education and technology [Sección del libro] // Second International Handbook of Mathematics Education / ed. BISHOP, Alan J [y otros]. - Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2003.

MUIÑOS GUAL, René. Producción y edición de textos didácticos [Libro]. - San José de Costa Rica : EUNED, 1999.

RABARDEL, Pierre. Les Hommes et les Technologies. Une approche cognitive des instruments contemporains [Libro]. - París : Armand Colin, 1996.

ROJANO, Teresa. La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. [Publicación periódica] // Revista Enseñanza de las Ciencias. - Barcelona : Universidad Autónoma de Barcelona, 1994. - 1 : Vol. 12. - págs. 45-56.

SÁNCHEZ VÁZQUEZ, Gonzalo. La enseñanza de la geometría en el momento actual y en el futuro inmediato [Publicación periódica] // Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. - 1997. - 25. - págs. 17-22.

SANGRÀ, Albert. Los materiales de aprendizaje en contextos educativos virtuales. Pautas para el diseño tecnopedagógico [Libro]. - Barcelona : Editorial UOC, 2005.

SANTALÓ, Luis. La formación de profesores de matemática para la enseñanza media [Sección del libro] // Enfoques: hacia una didáctica humanista de la matemática. - México, D.F. : Editorial Pax, 1994.

SEOANE, Miguel Antonio y GARCÍA, Francisco José. Los orígenes del tutor: fundamentos filosóficos y epistemológicos de la monitarización para su aplicación a contextos de e-learning [Publicación periódica] // Revista Electrónica Teoría de la Educación. Educación y Cultura en la Sociedad de la Información.. - 2007. - págs. 9-30.

TRGALOVA, Jana, JAHN, Ana Paula y SOURY-LAVERGNE, Sophie. Analyse de ressources pédagogiques pour la géométrie dynamique et évaluation de leur qualité : le projet Intergeo [Sección del libro] // Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education / ed. DURAND-GUERRIER, Viviane, SOURY-LAVERGNE, Sophie y ARZARELLO, Ferdinando. - Lyon : INRP, 2009.

TROUCHE, Luc. Environnements informatisés et mathématiques: quels usages pour quels apprentissages? [Publicación periódica] // Educational Studies in Mathematics. - 2004. - 1 : Vol. 55. - págs. 181-197.

WENGER, Etienne. Communities of practice: learning as a social system [En línea]. - 1998. - 3 de Abril de 2009. - <http://www.co-i-l.com/coil/knowledgegarden/cop/lss.shtml>.

WERTSCH, James. Una aproximación sociocultural a la mente [Sección del libro] // Voces de la mente: un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada. - Madrid : Visor, 1993.

ZASLAVSKY, Orit. Mathematics Educators' Knowledge and Development [Sección del libro] // The professional education and development of teachers of mathematics: the 15th ICMI study / ed. EVEN, Ruhama y BALL, Deborah Loewenberg. - Nueva York : Springer, 2009.

ZIMMERMANN, Walter y CUNNINGHAM, Steve. Editors' introduction: What is mathematical visualization? [Sección del libro] // Visualization in teaching and learning mathematics. - Washington, D.C. : Mathematical Association of America, 1991.