Los Irracionales Como Objeto Matemático.

Desarrollo Histórico

Luis Carlos Bravo Melo

Javier Armando Lozano Rodríguez

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2009

Los Irracionales Como Objeto Matemático.

Desarrollo Histórico

Luis Carlos Bravo Melo

Javier Armando Lozano Rodríguez

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Andrés Chaves

Asesor

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2009

Nota de Aceptación

Jurado

Jurado

Asesor

San Juan de Pasto, Mayo de 2009

TABLA DE CONTENIDO

Resumen

En este trabajo de grado, se abordan algunos aspectos de corte historiográfico y epistemológico sobre el proceso histórico que tuvieron los números irracionales, desde las llamadas magnitudes inconmensurables, hasta la construcción elaborada por G. Cantor, que fue esencial para adquirir el reconocimiento de número u objeto matemático.

Históricamente, se considera que los trabajos realizados por G. Cantor y R. Dedekind sobre la construcción de los números reales, dieron la puntada final en la consolidación de los irracionales como números. En este sentido se realiza un recorrido historiográfico de la concepción de número tomando los aportes más influyentes hacia la aparición de los irracionales, con las medidas inconmensurables de los griegos, finalizando en la construcción de los reales por parte de G. Cantor. Posteriormente se hace un análisis epistemológico de dicha construcción, tomando como referencias principales la obra de Boniface *Les Constructions des Nombres Réels dans le Mouvement d'Arithmétisation de l'Analyse*; y la traducción comentada de *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* realizada por Ferreirós.

Introducción

La cardinalidad del conjunto de los números irracionales es mayor a la del conjunto de los números racionales, pero en la cotidianidad son más conocidos y manejados los números racionales, esto debido a la naturaleza complicada de los irracionales, lo que ha generado inconvenientes en su concepción. Esta situación no es reciente, incluso fue tal la dificultad que presentaron estos números para ser considerados como tales, que fue necesario todo un proceso que perduró por más de 2500 años.

Los primeros registros conocidos respecto a este inconveniente en la incorporación de los irracionales como números se ubican en la antigüedad griega, concretamente en la escuela pitagórica, donde el estudio del llamado pentagrama pitagórico, símbolo distintivo de esta escuela, genera una irracionalidad al tratar la razón entre la diagonal del pentágono y uno de sus lados, esta razón corresponde actualmente al número $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, llamado también número dorado.

En la antigüedad griega los números irracionales se presentaban como magnitudes inconmensurables, las cuales son abordadas dentro del diálogo publicado por Platón, el *Teeteto*, en una discusión entre algunos pensadores acerca de la naturaleza de éstas, tratando principalmente las raíces cuadradas. En esta época todo estaba muy ligado a cuestiones filosóficas y ontológicas, y aunque por una parte estas magnitudes contradecían aspectos de dichas cuestiones, también refutaban la teoría de proporciones que se manejaba hasta entonces. Así, Eudoxo se consolidó como uno de los matemáticos más relevantes de la antigüedad griega, al establecer si cuatro magnitudes estaban en proporción sin importar la conmensurabilidad o inconmensurabilidad entre éstas, lo cual sirvió para elaborar y resolver problemas y demostraciones matemáticas que trataran con estas magnitudes, estableciendo con esto una nueva y mejorada teoría de proporciones.

Para poder considerar números a las magnitudes inconmensurables era necesario reformar el concepto que se manejaba de número, del cual se puede tener conocimiento gracias a la concepción del filósofo griego Aristóteles, quien tenía una noción muy definida sobre éste y además trató con los conceptos más conflictivos de la época, el continuo y el infinito. Siguiendo las bases teóricas de la filosofía aristotélica, Euclides publica una de las obras más célebres de la matemática, *Los Elementos*, en la cual utilizó la teoría de proporciones de Eudoxo y de manera aislada trabajó la teoría concerniente a números y magnitudes.

La noción que se tenía sobre número y magnitud continuó con el pasar del tiempo sin ningún cambio importante, sólo hasta el siglo XVI se logró un cambio radical con Simon Stevin al introducir al cero y al uno como números. Además fue el primero que aceptó y dio a conocer a los números negativos como tales. También proporcionó definiciones que ayudaron a incluir a las magnitudes numéricas en problemas matemáticos, empezando con esto, a desligarlas de su vínculo geométrico.

Ahora bien, la preocupación por manejar conceptos matemáticos libres de referentes geométricos continuó durante los tres siguientes siglos. Así entre los siglos XVII y XVIII, se trató de dar bases sólidas al naciente cálculo, dentro del cual Newton y Leibniz intentaron dar a sus razonamientos explicaciones rigurosas. Al no lograrse una plena rigorización en este campo, sus fundamentos eran inconsistentes aún.

Posteriormente, en el siglo XIX se emprendió la labor de fundamentar el análisis sobre cimientos aritméticos, en lo cual, Augustin Louis Cauchy fue el precursor gracias a sus trabajos sobre límite y función continua. De igual forma se definieron éstos y otros conceptos mediante los números reales, pero estos números no habían sido completamente establecidos sobre bases puramente aritméticas, puesto que algunos de sus elementos no estaban consolidados, como el caso de los números irracionales.

A finales del siglo XIX surgen conjuntamente dos construcciones de los números reales mediante la extensión de los números racionales, una a partir de sucesiones de Cauchy y otra mediante cortaduras, construcciones que satisfacían completamente los requisitos de la época anteriormente mencionados. Estos trabajos fueron realizados respectivamente por G. Cantor y R. Dedekind[1] logrando, en consecuencia, terminar con la problemática que rodeaba a los irracionales, permitiendo que finalmente se consoliden como números.

En este sentido, este trabajo pretende estudiar y describir parte del proceso histórico por el que pasaron los números irracionales para adquirir el reconocimiento de número u objeto matemático. Específicamente, dentro del trabajo se presenta un recorrido histórico acerca de los números irracionales desde la antigüedad griega hasta finales del siglo XIX, en donde se centrará el interés de análisis en la construcción de los números reales elaborada por G. Cantor.

En el primer capítulo se realiza un recorrido historiográfico resaltando los principales momentos por los que atravesaron las llamadas magnitudes inconmensurables en la antigüedad griega, hasta ser considerados, o elevados al estatus de número y adquirir el nombre de números irracionales a finales del siglo XIX. Asimismo, se destaca a los protagonistas de mencionados momentos y se presentan comentarios acerca de algunos de sus desarrollos e ideas más significativas, no necesariamente matemáticas, para lograr la consolidación de los irracionales como números.

[1]Otros autores como Weierstrass y Meray habían realizado también construcciones similares a las de Cantor y Dedekind, pero fueron mas acogidas y/o aceptadas las de estos dos últimos autores.

En el segundo capítulo se realiza un análisis epistemológico de la construcción elaborada por G. Cantor acerca de los números reales, la cual fue exhibida en dos versiones, la primera en 1872 y posteriormente en 1883. Así, se presentan los aspectos más importantes de su trabajo, en donde para mayor claridad, éstos han sido afectados con ideas y resultados modernos. De la misma manera, con el fin de explicar algunos de estos aspectos, se muestran ejemplos realizados con herramientas matemáticas actuales. Además se exhiben comentarios y observaciones de corte histórico acerca de esta construcción. Con lo cual se trata de proporcionar una construcción renovada y más clara, en sentido moderno, del trabajo realizado por G. Cantor.

Conjuntamente se establecen conclusiones con el fin de destacar y comentar los aspectos más relevantes presentes en los dos primeros capítulos (Capítulos 1 y 2). El propósito de éstas, es impulsar el interés por el estudio de aspectos tratados en este trabajo, generando preguntas abiertas para futuras investigaciones. Por último se presenta un anexo donde se realiza la demostración[2] de la irracionalidad de, valga la redundancia, los números irracionales más comunes, π y e, con el objeto de mostrar su importancia y utilidad. Esto justificado además en el hecho de que estas demostraciones son poco conocidas y enseñadas, y aun más escasamente en el nivel de educación media.

[2]Estas demostraciones se basan en las realizadas por Spivak en [18].

Capítulo 1

Recorrido histórico

El concepto y/o noción de número estuvo a lo largo de la historia afectado por distintos campos del conocimiento, creencias y filosofías, entre otras. Por lo cual su concepción fue renovada en varias ocasiones, siendo necesario periodos largos de tiempo para establecer un concepto de número generalmente acogido. Y obviamente los números irracionales estuvieron inmersos dentro de este proceso de aceptación.

1.1. Antigüedad Griega

En las grandes civilizaciones antiguas, la matemática era considerada una herramienta para fines útiles, pero pocas de ellas se preocuparon por generalizar u organizar estos conocimientos. Sólo los antiguos griegos se inquietaron por esto, mediante la derivación de unos conocimientos a partir de otros, de modo que resultara una construcción comprensible y no un mero conjunto de fórmulas, lo cual proporcionaba una explicación racional a los conocimientos propios y de otras culturas.

Esta nueva manera de concebir las matemáticas se dio gracias a los trabajos de muchos pensadores durante más de cinco siglos, época conocida como la antigüedad griega, la cual se divide en tres periodos:

- **Filósofos presocráticos**

  Tales de Mileto (640 - 550 a. C.)

Pitágoras de Samos (569 - 500 a. C.)

Anaxágoras de Clazómene (500 - 428 a. C.)

Zenón de Elea (495 - 435 a. C.)

Demócrito de Abdera (470 - ? a. C.)

- **Escuela de Atenas**

  Platón (429 - 348 a. C.)

  Eudoxo (408 - 355 a. C.)

  Aristóteles (384 - 322 a. C.)

- **Escuela de Alejandría**

  Euclides (330- 275 a. C.)

  Arquímedes (287 - 212 a. C.)

  Diofanto (236 - 152 a. C.)

La escuela de Mileto fue la escuela de los primeros matemáticos y filósofos, de donde cabe destacar a Tales, que es conocido como el primero que se interesó por las matemáticas en Grecia, donde introdujo la geometría conocida en Egipto, la cual Pitágoras comenzaría a organizar posteriormente.

Pitágoras es reconocido, entre otras cosas, por fundar una de las escuelas más célebres e influyentes de la antigüedad griega y de la historia en general, *La escuela pitagórica*, la cual fue una hermandad o sociedad religiosa dedicada al ascetismo y al estudio de las matemáticas, manteniendo en secreto sus enseñanzas y descubrimientos que eran atribuidos a su fundador. El principio fundamental o doctrina de esta escuela era que la esencia de todas las cosas es explicable mediante números y sus razones, en otras palabras *los números constituyen el universo entero* [5, pág. 108]. El símbolo distintivo de la escuela pitagórica era el pentágono regular estrellado, más conocido como *pentagrama pitagórico*, en el cual, la razón de la diagonal a su lado es la llamada *proporción áurea*. Ésta fue, al parecer,[1] la primera inconmensurabilidad conocida, la cual le dio posteriormente, un lugar hegemónico a la geometría dentro de las matemáticas.

Aun así, los desarrollos conceptuales de Tales y Pitágoras no son conocidos con claridad, esto se debe a dos razones: primero porque los desarrollos alcanzados en la escuela pitagórica eran atribuidos al mismo Pitágoras, sin ser posible así, diferenciar entre los descubrimientos de éste y los de sus alumnos y/o discípulos. Segundo porque no se conocen, de fuentes primarias, trabajos realizados por estos pensadores, lo que se conoce de ellos se debe a Platón y Aristóteles y a historiadores como Proclo.

Por otro lado, ni Platón ni su discípulo Aristóteles hicieron alguna contribución específica de tipo técnico a resultados matemáticos, a pesar de esto, no se puede negar la gran influencia que estos pensadores tuvieron en el desarrollo de las matemáticas. Mientras que Platón es visto como hacedor de matemáticos, Aristóteles puede ser considerado como promotor de desarrollos matemáticos. Así, se hace esta última afirmación sobre Platón debido a que de la Academia fundada en Atenas por él, la llamada *Academia Platónica*, surgieron los principales maestros e investigadores de la época (siglo IV a. C.), por lo cual se le consideró a esta academia el eje central de las matemáticas en el mundo. Además es de aquí de donde surge el discípulo de Platón y posteriormente estimado el matemático y astrónomo más reconocido y brillante de la Época Helénica, Eudoxo de Cnido.

El descubrimiento de las magnitudes inconmensurables había causado inmensa problemática, derrumbando la teoría de las proporciones manejada hasta entonces. Eudoxo, en este sentido, es el primero que renueva mencionada teoría, permitiendo así manipular a las magnitudes inconmensurables para la solución de problemas matemáticos.

[1]Como lo dan a entender Luis Recalde en [17, pág. 45] y Boyer en [5, pág. 107].

La renovada teoría es utilizada por Euclides en el Libro V, y aunque define el término razón que no había sido determinado antes, esta definición fue insuficiente. Motivo por el cual adquiere más importancia el hecho de que haya establecido razones entre magnitudes a partir de múltiplos. Así, Euclides presenta la teoría referente a magnitudes en el Libro V de los Elementos, mientras que la teoría de números la desarrolla en sus Libros VII, VIII y IX, sólo hasta su Libro X establece una conexión entre magnitudes y números. Debido a esto, Euclides ha sido criticado por varios analistas, por repetir algunas de sus proposiciones en algunos de estos libros sin tener en cuenta que en la época pertenecían a dos líneas teóricas de distinta naturaleza.

1.1.1. Pitágoras de Samos (569 - 500 a. C.)

Denominado por sí mismo filósofo, amante de la sabiduría, fundó, junto a algunos de sus colegas, la escuela itálica o pitagórica en la Magna Grecia (Sur de Italia y Sicilia) al trasladarse aquí por la invasión persa de Jonia y destrucción de Mileto. La corriente filosófica manejada en dicha escuela se desarrolla en dos sentidos: el misticismo y el racionalismo, los cuales se convertirían posteriormente en vertientes de ésta. En términos generales se dice que la doctrina directora de la escuela pitagórica fue la de considerar a los números[2] como las cosas mismas, como el principio de las cosas, y al parecer, el principio de los seres en el sentido material. Así, para el pitagorismo, éstos son el principio de organización dentro de la matemática y dentro de la naturaleza, todos los asuntos teóricos y prácticos del hombre son explicables en términos de propiedades de números y sus razones. De modo que el estudio de los números es comparado con la realidad concreta, siendo ahora el mundo de las relaciones cuantitativas el verdadero objeto de la ciencia y no la naturaleza tal como se presenta a los sentidos. De esta forma se ve reflejada, en su filosofía y ontología, la importancia y trascendencia que tienen los números, sus relaciones y propiedades, cuando algunos pitagóricos concedían de dos en dos, los principios fundamentales:

[2]En la antigüedad griega, lo que se aceptaba como números son, en la actualidad, los números naturales excluyendo el cero y el uno.

Finito e infinito

Impar y par

Uno y multiplicidad

Izquierdo y derecho

Macho y hembra

Reposo y movimiento

Recto y curvo

Luz y oscuridad

Bien y mal

Cuadrado y no cuadrado.[3]

Por otro lado, el objeto primordial del estudio de Pitágoras y sus discípulos fue encontrar una explicación racional para las cosas a partir de los números y sus razones, organizando y sistematizando tanto los conocimientos propios, como los adquiridos de otras culturas. Esto los apartó de la búsqueda del origen de las cosas, puesto que se preocuparon más por la organización del mundo. A ellos se les atribuye, en la evolución axiomática de la matemática, la organización de los conocimientos aunque haya sido de una manera informal, puesto que no siguieron ninguna línea de una disciplina científica. Asimismo, según los pitagóricos, la matemática se ocupa de lo discreto y de lo continuo:

Lo discreto puede ser o absoluto o relativo.

Lo absoluto lo estudia la aritmética.

Lo relativo lo estudia la música.

Lo continuo es o estable o móvil.

Lo estable lo estudia la geometría.

Lo móvil lo estudia la astronomía.[4]

Así, mientras los números están relacionados con la aritmética, las magnitudes corresponden a la geometría, razón por la cual una magnitud era medida con otra

[3]Tomado de [7, pág. 15].

[4]En [7, pág. 73].

de naturaleza homogénea. Así los ángulos se miden con ángulos, las áreas con áreas, los segmentos con segmentos. Ahora bien, para establecer si dos magnitudes son conmensurables se seguía un proceso de medición que consiste en determinar cuantas veces la magnitud más pequeña cabe un número entero de veces en la más grande, de manera que si sobra un excedente, se procede a determinar cuantas veces éste cabe en la magnitud menor, y así sucesivamente hasta encontrar una magnitud que mida a las dos iniciales. Tal fue la relevancia de este procedimiento para los pitagóricos, que ofrecieron solemnes sacrificios a los dioses como agradecimiento por concederles acceder a él. Lo que notaron, posteriormente, fue que en algunos casos este proceso era interminable, caso en el cual las magnitudes son inconmensurables.

Aunque es discutible la idea de que Pitágoras haya conocido el problema de la inconmensurabilidad, es en gran medida aceptado que ésta se dio en su escuela, causando una gran crisis que derrumbaba las bases del concepto que tenían sobre número y consecuentemente toda su cosmología. Puesto que afirmaban poder expresar todas las cosas mediante números y sus razones, el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables iba totalmente en contra de estas creencias, razón por la cual procuraron mantenerlo en secreto, al igual que todos sus desarrollos, descubrimientos y enseñanzas. Además de esto las magnitudes inconmensurables llevan consigo uno de los conceptos más problemáticos de la antigüedad, el infinito.

Por otro lado no se sabe con exactitud, la forma como supieron acerca de las magnitudes inconmensurables, generalmente se piensa que se descubrió al tratar de encontrar la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal, obteniendo que la comparación de estas dos magnitudes no es conmensurable. O al aplicar el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo isósceles. Aun así, el camino al descubrimiento pudo darse en el mencionado pentagrama pitagórico, debido a que éste era el símbolo distintivo de la escuela o hermandad, ya que representaba la salud y la confraternidad pitagórica. En cada punta de la estrella que se forma con las diagonales del pentágono regular, escribían una de las letras de la palabra griega salud. Además, La razón que existe entre la diagonal y el lado del pentágono regular es la llamada *razón áurea*, símbolo de armonía y belleza. Esta inconmensurabilidad se puede deducir por simple observación, al trazar las diagonales de un pentágono regular, se forma otro pentágono regular más pequeño entre éstas, a su vez se traza las diagonales de este último y se forma nuevamente un tercer pentágono regular. Este proceso se puede continuar indefinidamente, puesto que cada vez que se trace las diagonales de un pentágono regular, la intersección de éstas formarán un nuevo pentágono, así se concluye que la razón de la diagonal al lado de un pentágono regular no es conmensurable, es inconmensurable.

1.1.2. Platón (429 - 348 a. C.)

Platón fue, en mayor medida, influenciado matemáticamente por Arquitas. Platón se convirtió en muy buen amigo de Teeteto, el cual muere en Atenas en el año 369 a.C. A causa de este suceso Platón otorga, como acto memorable a su amigo, el nombre de *Teeteto* al diálogo (*Diálogo Platónico*) escrito por él. En este diálogo se presenta una discusión[5] entre Teeteto, Sócrates (maestro de Platón) y Teodoro de Cirene (maestro, también, de Platón y Teeteto), acerca de las magnitudes inconmensurables y su naturaleza. Aquí se exhiben y/o se establecen ciertas distinciones entre magnitudes conmensurables e inconmensurables y también, entre magnitudes que al ser inconmensurables en longitud, pueden o no, ser conmensurables en cuadrado, tratando, entre otras cosas, con las raíces cuadradas, actualmente hablando. Ahora, gracias a [7, pág. 305 - 306], se puede observar, parte del dialogo que tienen Sócrates y Teeteto:

- *Teeteto: Con respecto a las raíces, Teodoro nos hizo un dibujo para demostrarnos que las de tres y las de cinco pies no son conmensurables en longitud con las de uno, y las fue eligiendo así, una a una, hasta la de diecisiete pies. Pero se detuvo en ésta por alguna razón. Así, es*

[5] Discusión sucedida, como lo señala Boyer en [5, pág. 123], 30 años atrás.

que se nos ocurrió que podríamos intentar reunir todas las raíces ya que parecían ilimitadas en número, bajo la denominación en un mismo término.

- *Sócrates: ¿Y encontrasteis algo con esas características?*
- *Teeteto: Yo creo que sí, pero examínalo tú mismo.*
- *Sócrates: Dime.*
- *Teeteto: Dividimos todos los números en dos clases. El que se obtiene multiplicando un número por sí mismo lo representamos en la figura de un cuadrado y lo denominamos cuadrado y equilátero.*
- *Sócrates: Muy bien.*
- *Teeteto: Pero los números intermedios, como son el tres, el cinco y todo el que no puede obtenerse multiplicando un número por sí mismo, sino multiplicando uno menor por otro mayor, o uno mayor por otro menor, estos, que quedan comprendidos en lados mayores y menores, los representamos, a su vez, en la figura de un rectángulo y les damos el nombre de número rectangular.*
- *Sócrates: Estupendo. Pero, ¿qué hiciste a continuación de esto?*
- *Teeteto: Todas las líneas que representan en el plano un número bajo la forma de un cuadrado equilátero, las definimos como longitudes. En cambio, las que constituyen una figura de longitudes desiguales, las definimos como raíces, puesto que en longitud no son conmensurables con aquellas, pero sí lo son en superficie. Y con respecto a los sólidos hacemos algo parecido.*
- *Sócrates: Extraordinario, muchachos. Me parece que Teodoro no va a tener que ser acusado de prestar falso testimonio.*

Este pasaje y en general el diálogo platónico, hace referencia, como se mencionó anteriormente, también a un matemático admirado por Platón y que fue maestro tanto de él, como de su amigo Teeteto. Se trata de Teodoro de Cirene, quien gracias a su ingenio, se dio un indiscutible avance en la teoría de las magnitudes inconmensurables. Esto se sabe ya que como en el pasaje anterior y como lo dice Platón en otras partes del *Teeteto*, Teodoro determinó y/o demostró la inconmensurabilidad (o irracionalidad, como diríamos actualmente) de las raíces cuadradas de los números que no son cuadrados perfectos, iniciando con el 3 y finalizando[6] con el 17, esto mediante la comparación entre magnitudes.

Ahora bien, particularizando, Platón dentro de su concepto de número aritmético distingue dos elementos, el *número numerado* y *número ideal*. *Número numerado* es el que permite contar los objetos que están en nuestra realidad empírica, en otras palabras, es el que se usa para contar objetos presentes en el mundo sensible. El *número ideal*, en cambio, es un ente de naturaleza abstracta, perteneciente al mundo de las ideas y por tanto permite contar objetos pertenecientes a éste. Para entender esta división que tiene el concepto platónico de número aritmético, es necesario explorar conjuntos particulares de objetos, así por ejemplo, como lo plantea L. Recalde, en [17, pág. 41], *en un conjunto de tres sillas, para nosotros no es problemático aceptar la unidad representada en una silla, así las sillas no sean exactamente iguales, porque nos basta identificarla por su funcionalidad* aquí, entonces, tiene cabida el concepto de *número numerado*. Por otro lado, el *número ideal* se forma por la agrupación de unidades completamente iguales, lo cual exigiría que dichas sillas tengan el mismo color, desgaste, aspecto, tamaño, la misma forma, los mismos defectos, etc.

Así, aunque Platón no contribuyó con algún resultado matemático técnico específico, se convirtió en uno de los personajes más prestigiosos de las matemáticas, gracias a su influencia e inspiración sobre otros maestros e investigadores, convirtiendo de esta

[6]Se desconoce, el por qué Teodoro se detuvo en el 17 y no prosiguió o generalizó su demostración. Además tampoco se sabe como hizo tales demostraciones. Otro aspecto importante del que se pude tratar, es la razón por la cuál no se tiene en cuenta a $\sqrt{2}$. Campos en [7, pág.306] señala, en este caso, que para el tiempo en el que se presentó el *Teeteto*, este tema ya había sido manejado y que por tanto era una cosa muy conocida.

forma, a su academia (*Academia Platónica*), ubicada en Atenas, en el eje central de las matemáticas en el mundo del siglo IV a.C. Entre dichos maestros e investigadores estaban Aristóteles y Eudoxo de Cnido. Este último fue uno de sus alumnos más grandes y reconocidos, no solo dentro de las matemáticas, con su teoría de las proporciones y el método exhaustivo, entre otros, sino también en la astronomía.

1.1.3. Eudoxo (408 - 355 a. C.)

Se sabe por el *Teeteto* de Platón que los maestros y amigo de Platón, al igual que él, ya tenían conocimiento acerca de las magnitudes inconmensurables, las cuales, como se ha dicho, se convirtieron en un devastador descubrimiento por ir en contra de la teoría de las proporciones que se manejaba en ese momento, y aunque pensadores como Teodoro, Sócrates y Teeteto habían tratado con éstas, el problema no había terminado aún.

Es aquí donde aparece Eudoxo, alumno y/o integrante de la *Academia Platónica*, de quien se puede decir que fue, dentro de las matemáticas, el estudiante más destacado de Platón; tanto, que se asegura que gracias a él se dio una reforma en las matemáticas.

Se dice que era factible, antes de Eudoxo, establecer si cuatro magnitudes conmensurables estaban en proporción, o sea si tomadas dos a dos, cada pareja tiene la misma razón. Así por ejemplo, para saber si $a : b = c : d$, se procede a comprobar si el mismo número entero de veces la menor en cada una de las dos razones, alcanza en la mayor y si sobra un excedente, determinar si el mismo número entero de veces, en cada caso, cabe este último excedente en la menor y así sucesivamente. Pero surgió entonces, el problema de hacer esto mismo para magnitudes que, por el contrario, eran inconmensurables. Eudoxo,[7] presenta una solución a este problema mediante la siguiente formulación:

[7] Para Eudoxo, al igual que para su maestro y antiguos griegos, acepta los números naturales sin el cero y el uno.

> *Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente* [5, pág. 127].

La anterior definición sobre igualdad de razones, fue inmediatamente aceptada; por lo que se estaba hablando de una *nueva Teoría de Proporciones*, a través de la cual se permite manipular a las magnitudes inconmensurables para la solución y elaboración de problemas y demostraciones matemáticas. Esta teoría es utilizada por Euclides en el libro V de sus *Elementos*, en donde se encuentra la formulación de Eudoxo que se presentó anteriormente.

Es importante señalar que Eudoxo, en su idea de razón, nunca da una definición de ésta. Pero lo que si deja claro con dicha idea, es lo que significa magnitudes homogéneas, en otras palabras, esclareció que, en términos de razón, un segmento debe compararse exclusivamente con otros segmentos y de igual forma para las áreas con áreas, volúmenes con volúmenes y en general para todas la magnitudes.

A pesar de la sencillez que en la actualidad tiene la definición de Eudoxo, la cual es $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, no se le debe quitar absolutamente nada de genialidad y agudeza a Eudoxo, ya que sus resultados causaron, como se dijo anteriormente, una completa renovación en las matemáticas.

Cabe mencionar que Eudoxo no obtuvo su fama y prestigio dentro de las matemáticas nada más por la teoría de proporciones, sino también por el método exhaustivo, el cual es un antecedente al cálculo integral. Además, no solo fue un gran matemático; también es considerado de vital importancia dentro de la astronomía y la geometría.

1.1.4. Aristóteles (384 - 322 a. C.)

Aristóteles, al igual que Eudoxo, integró la *Academia Platónica*, por ende fue alumno de Platón y se vio influenciado por él. Aunque su interés primordial no fue el estudio de las matemáticas, hizo importantes aportes en la discusión sobre el infinito, el número y magnitud, el continuo, entre otras.

Aristóteles define al número como una colección o multitud de unidades, definición que conlleva a ciertas consideraciones:

- El uno no es número, ya que no cumple con la definición pues genera una confusión entre la singularidad (unidad) y la pluralidad (número).
- El cero no es número, no sólo por no cumplir con la definición dada, sino también por aspectos filosóficos que rodeaban a los griegos sobre la nada.
- Los números aceptados por los griegos en la antigüedad corresponden a nuestros días a los números naturales exceptuando el cero y el uno: $\mathbb{N} - \{0, 1\}$

Con esta concepción Aristóteles estaría cayendo en una imprecisión (confusión) lógica, al considerar al número como la colección de algo que en sí mismo no es número, en otras palabras, la parte esencial de esta definición es la unidad y si ésta no es considerada número, una colección de éstas tampoco lo sería. Para entender de una forma más detallada la imprecisión (confusión) mencionada, hágase una analogía entre el concepto aristotélico de número y el agua, así como el número se define como una multitud de unidades, el agua se puede definir como una multitud de gotas de agua, por tanto la unidad estaría, en este caso, representada por una gota de agua, entonces aplicando la definición se diría que una gota de agua no es agua.

Ahora bien, el infinito y el continuo son dos conceptos muy importantes dentro de las matemáticas, y aunque para los antiguos griegos, éstos causaron grandes problemas, no les eran apáticos, puesto que para ellos los números eran infinitos y la recta continua. El infinito, como se mencionó anteriormente fue uno de los conceptos que preocupó y generó polémica entre los pensadores griegos con la aparición y estudio de las magnitudes inconmensurables y las paradojas de Zenón. Es así como Aristóteles en su *Física* introduce argumentos tratando de refutar estas situaciones, mediante bases de sentido común.

Para Aristóteles las características y naturaleza finitas del hombre le hacen imposible acceder al infinito como un todo. Por lo cual acepta el infinito potencial y desecha el infinito actual, puesto que para él, el infinito existe como un proceso, como entidad en potencia y no como algo acabado, que se pueda tomar en un acto. En consecuencia, Aristóteles afirma,

> *El infinito es, o lo que no se puede recorrer, porque está en su naturaleza el no poder ser recorrido, de la manera como el sonido es invisible; o lo que no se puede acabar de recorrer; o bien lo que no se recorre sino difícilmente; o, en fin, lo que no tiene término, ni límite, aunque sea susceptible de tenerlo por naturaleza.*[7, pág. 433].

Aristóteles aborda el infinito a través de la siguiente definición: "Una cantidad es infinita si es tal que se puede tomar siempre una parte fuera de la que ya ha sido tomada" [7, pág. 431] (Física III). Lo cual deja en evidencia el hecho de que jamás se podrá tomar al infinito como algo ya acabado o en un acto. Al mismo tiempo que esboza esta definición plantea dos tipos de infinito: El infinito respecto de los números; infinito por adición, y el infinito correspondiente a las magnitudes; infinito por división. El primer tipo de infinito se detecta cuando al tener un número se obtiene uno mayor que éste si tan sólo se le añade una unidad. Este infinito es evidente dentro del proceso de contar. El segundo tipo de infinito emerge cuando se divide magnitudes, ya que si por ejemplo, se toma un segmento y se lo divide en dos o más segmentos, cada uno de éstos se pueden seguir dividiendo en nuevos segmentos y así sucesivamente.

A pesar de la genialidad o brillantez de Aristóteles, no fue considerado un matemático excepcional, ya que se interesó en mayor medida por la filosofía y la biología. Pero si es reconocido como el promotor de importantes desarrollos matemáticos y como el sabio con más amplios conocimientos de todos los tiempos. Aristóteles tuvo gran influencia sobre el pensamiento y en consecuencia sobre los desarrollos de Euclides, ya que este último, entre otros aspectos, no sólo siguió su misma línea filosófica sino que además, tenía el mismo concepto sobre número. Con la muerte de Aristóteles se da por terminada la Época Helénica.

1.1.5. Euclides (330 - 275 a. C.)

Euclides nació en Tiro, estudió en Atenas y enseñó en Alejandría donde fue nombrado el jefe del Departamento de Matemática de la Universidad de la misma ciudad, la cual fue fundada estratégicamente por Alejandro Magno en el continente africano, con el fin de convertirla en el centro mercantil e intelectual del mundo griego. Por lo tanto Euclides tuvo acceso a grandes cantidades de información que era decomisada y copiada para ser almacenada en la famosa biblioteca de Alejandría y para posteriormente, utilizar en su universidad.

Hacia el siglo III a. C. Euclides escribe uno de los monumentos teóricos más importantes de todos los tiempos; *Los Elementos*. Esta obra ha sido durante muchos siglos el principal eje del estudio de las matemáticas y durante veintidós siglos el modelo de axiomatización, hasta que en el siglo XX aparece la propuesta formalista de Hilbert. Euclides no fue el primero en utilizar el método deductivo en matemáticas, puesto que Platón y Aristóteles ya manejaban esta técnica. Además, la simbología que manejaba Euclides, especialmente en los *Elementos*, era muy retórica, tal vez por falta de herramientas simbólicas.

Los *Elementos* constituyen el primer compendio sistemático de la teoría de la medida[8] siguiendo las directrices de la filosofía aristotélica: primero hace una distinción tajante entre número y magnitud, de donde surgen las dicotomías:

$$\begin{aligned} \text{Aritmética} &\ - \ \text{Geometría} \\ \text{Discreto} &\ - \ \text{Continuo} \\ \text{Finito} &\ - \ \text{Infinito} \\ \text{Contar} &\ - \ \text{Medir} \end{aligned}$$

En el sentido mencionado anteriormente, los números están relacionados con la aritmética desde la filosofía pitagórica, pasando por la aristotélica y continuando en las bases del trabajo euclidiano. De igual forma ocurre con la correspondencia entre magnitud y geometría. Asimismo, para Euclides los números son discretos, puesto que, al igual que Aristóteles, acoge al número como una pluralidad de unidades. Por otro lado las magnitudes son continuas pues se pueden dividir en magnitudes más pequeñas indefinidamente, mientras que los números solamente se pueden dividir un número finito de veces debido a que en algún momento se llegará a la unidad, la cual no cumplía con su idea de número. Además los números eran usados para contar y las magnitudes para medir, siguiendo el principio de homogeneidad aristotélico, que establece que los segmentos se miden con segmentos, los ángulos con ángulos, entre otros.

Euclides estudia por separado dos corrientes teóricas: una respecto a magnitudes y otra a números. La primera es desarrollada en su libro V. Éste es titulado *Teoría de la Proporción*, el cual contiene temas de importancia fundamental para toda la matemática partiendo de los trabajos de Eudoxo, quien logró evitar el problema de las magnitudes inconmensurables a partir de proporciones. Lo que hace Euclides, a diferencia de Eudoxo, es definir de manera insatisfactoria el término razón, y aunque no precisa lo que es magnitud, define la razón entre dos magnitudes homogéneas.

[8]Esto teniendo en cuenta que se mide mediante números, por esa razón el estudio de Euclides ayuda a fundamentar la teoría sobre números reales, y en consecuencia sobre los números irracionales.

En la manera presentada por Euclides, la forma de medir dos magnitudes consiste en compararlas cuantitativamente de acuerdo con las siguientes definiciones, presentadas en notación actual, para magnitudes lineales, es decir segmentos:

Definición 1.1. *Un segmento B mide a otro segmento A, si $A = nB$, para algún número n.*

Definición 1.2. *Dos segmentos A y B se dicen conmensurables si existen números n y m, tales que $nA = mB$.*

En estas definiciones es necesario tener en cuenta que en la época era imposible multiplicar un número por un segmento, porque no cumplían con el principio de homogeneidad, por lo tanto el número n al que se hace mención, aparte de ser un número natural, cumple una función de escalar dilatador, es decir que solamente muestra cuantas veces alcanza el segmento más pequeño en el más grande.

Así, el proceso para medir un segmento A mediante un segmento B, consiste en tomar a B como unidad de medida. Puede darse que B esté contenido un número natural c, en el segmento A, lo cual se lo escribe como $A = cB$. Puede darse también que B esté contenido c veces en A y sobre un excedente D, lo cual se escribe $A = cB + D$. Si la medida común de B y D es la medida común de A y B se dice que hay conmensurabilidad. Si en la relación $A = cB + D$, $D = D_1$ no divide exactamente a B, se tiene $B = c_2D_1 + D_2$, donde c_2 es un número natural. Así sucesivamente se tendrán las siguientes relaciones:

$$
\begin{array}{ll}
A = c_1B + D_1 & \qquad 0 < D_1 < B \\
B = c_2D_1 + D_2 & \qquad 0 < D_2 < D_1 \\
D_1 = c_3D_2 + D_3 & \qquad 0 < D_3 < D_2 \\
D_2 = c_4D_3 + D_4 & \qquad 0 < D_4 < D_3 \\
\ldots\ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

$$D_{n-2} = c_n D_{n-1} + D_n \qquad\qquad 0 < D_n < D_{n-1}$$
$$D_{n-1} = c_{n+1} D_n + 0$$

Teniendo en cuenta que hubiera residuo cero, se ve por cadena de desigualdades, con números naturales:

$$B > D_1 > D_2 > D_3 > D_4 > ... > D_n > 0$$

De esta manera, la medida común es basada, en términos modernos, en el máximo común divisor de números A y B, que para Euclides eran rectas, o magnitudes lineales, según las relaciones escritas sería D_n. Este procedimiento para encontrar la medida común de dos magnitudes dadas es conocido como el *algoritmo de Euclides.*

Cuando no se puede llegar al residuo cero, se obtiene que este proceso es interminable, es decir, cuando no hay una medida común a las dos magnitudes A y B, éstas son inconmensurables.

Por otro lado, la segunda corriente teórica, correspondiente a los números la trabaja en los libros VII, VIII y IX, en los cuales deja a un lado el desarrollo axiomático, para dedicarse a la aritmética. En éstos se estudia a los números naturales, excluyendo el cero y el uno, sus propiedades y relaciones. Se aparta la relación directa entre números y magnitudes, puesto que las demostraciones realizadas en estos libros no se apoyan en argumentaciones geométricas. Además, dichas demostraciones se desarrollan en forma retórica, al igual que en sus demás libros, por la falta de una simbología algebraica apropiada.

1.2. Simon Stevin (1548 - 1620)

Nacido en Brujas (Bélgica), se lo reconoce como el padre de los números negativos, debido a que fue el primero en aceptar los negativos como números. Propuso una notación para los números decimales, pero por su complejidad no tuvo éxito, por lo que se adoptaron terminologías propuestas por Bartolomeo Pitiscus y John Napier que se usan en la actualidad. Además mostró cómo el empleo de fracciones decimales podría emplearse para extraer la raíz cuadrada de un número.

Stevin hizo contribuciones originales en áreas como en la estática, la hidrostática, la teoría de mareas, la navegación y la tecnología. En cuanto a desarrollos matemáticos se refiere, escribió libros de contabilidad solicitados por el príncipe Mauricio, pero su principal obra en matemáticas, es llamada *La disme*, la cual consta de dos partes, la primera sobre cuatro definiciones, y la segunda sobre las cuatro operaciones fundamentales. Se profundizará entonces, en la primera parte que corresponde a trabajos y concepciones aritméticas de número. En ella Stevin enuncia:[9]

Definición 1.3. *La aritmética es la ciencia de los números.*

Definición 1.4. *El número es por lo que la cantidad de cada cosa se revela.*

Con esta última definición empieza a cambiar la concepción que se tenía sobre número. Stevin defiende su nuevo concepto afirmando que la parte es "del mismo material" que el todo; la unidad es una parte de una multitud de unidades; por consiguiente la unidad es "del mismo material" como una multitud de unidades; pero el "material" de una multitud de unidades es el "número" por consiguiente el "material" de la unidad, y así la propia unidad, es "número". Quien niega este último paso puede compararse a alguien que niega "que un pedazo de pan es pan". Por esta razón la unidad es de la misma naturaleza que los números y por consiguiente es número en sí misma.

Además, Stevin afirma que se ha malinterpretado el signo llamado "punto" que ha sido heredado de la "edad sabia "[10] y era idéntico al signo actual cero (0). Se entendió a los

[9]En [14, pág. 191].

[10]Stevin menciona dos edades que, según él influyeron en el desarrollo y decadencia de las ciencias, la primera la denomina "edad sabia" y la define como sigue: "Nosotros llamamos la edad sabia al hecho de que los hombres tenían un conocimiento maravilloso de ciencia que nosotros reconocemos sin fallo a través de ciertas señales, a pesar de no saber quiénes eran ellos, o en qué lugar, o cuando." [14, pág. 187].

“puntos” como “unidades”, así el punto geométrico es el principio de la línea geométrica y no es por si mismo línea, de igual manera se interpretó al “uno” como el principio de los números y por consiguiente no a sí mismo como número. Así, Stevin transfiere el papel de principio al cero, quitándole esta asignación a la unidad.

Igualmente, Stevin esclarece esta idea enfatizando en que al igual que una línea no es extensible por la adición de un punto, un número no es extensible por la adición de ceros. Por lo tanto no pueden, infinitamente, muchos puntos “tomados juntos” formar una línea, de igual forma, la unión infinita de ceros no forman un nuevo número, lo que se puede hacer tan sólo con dos unidades.

También mencionó que la unidad es divisible como un asunto irrefutable, respecto a lo cual le llamó la atención a Diofanto a establecer la divisibilidad de la unidad en general, ya que él solamente lo aceptaba en algunos problemas. Precisamente por esta razón se empieza a desligar a los números de la época de la estructura discreta que poseían, adquiriendo así, un carácter de continuos, pues la vista antigua de lo discreto de los números se basa en la indivisibilidad de la unidad. De igual forma como un pedazo de pan es en sí mismo pan, un pequeño segmento, que es parte de otro segmento es segmento por sí mismo, así un número por pequeño que sea va a ser número, por ejemplo los números fraccionarios. A partir de lo mencionado, para Stevin, surge la correspondencia completa entre número y magnitud geométrica, con lo cual ataca la denominación de “absurdo” o irracional a los números conocidos ahora como irracionales, pues según Stevin la “inconmensurabilidad no es causa de que términos inconmensurables sean irracionales”. Igualmente sigue la distinción entre número aritmético[11] y número geométrico,[12] pero desecha los términos diofánticos de “cuadrado”[13] y “cubo”[14] entre otros. Así por ejemplo Stevin dice que toda raíz es

[11] Correspondientes a los números enteros.
[12] Equivalentes a los números fraccionarios e irracionales.
[13] Corresponden raíces cuadradas de números racionales positivos.
[14] Raíces cúbicas de números racionales positivos.

número, para generalizar esto establece las siguientes definiciones:[15]

Definición 1.5. *Un número aritmético es un número expresado sin un adjetivo de su tamaño.*

Definición 1.6. *El comienzo de cada cantidad es cada número aritmético o algún radical.*

A partir de esto, los números geométricos incursionan a entrar en cálculos aritméticos, para lo cual hace una correspondencia con el hecho de que el cero es el principio de los números aritméticos. Entonces cada número geométrico tiene su propio "principio", el cual corresponde a un número entero o radical según la definición. Por ejemplo, en términos modernos, si una magnitud equivale al número irracional $\sqrt{2}$, a éste se le asigna su principio para poderlo operar, el cual equivale a un número que bien puede ser radical, caso en el cual sería el mismo, o un entero que equivaldría, en este caso, a uno (1).

Así, se dio un paso importante en la evolución del concepto de número, incluyendo ahora al uno y al cero, los cuales fueron excluidos desde la antigüedad griega y sólo hasta los trabajos de Stevin se logró un cambio en esta concepción. Además, como Stevin fue quien empezó a observar la resta de un número como la adición de un número negativo, sus trabajos dieron pie para establecer a los números enteros como números. Por otro lado con las dos últimas definiciones presentadas promueve la indagación de la naturaleza numérica de las magnitudes inconmensurables, tratando de desligarlas de su referente geométrico para tratarlas independientemente en operaciones aritméticas. Tal vez fue este trabajo el que promovió la preocupación de indagar en este aspecto, que retomaron varios matemáticos[16] del siglo XIX, y que llegó a su apogeo con G. Cantor y R. Dedekind, quienes gracias a sus estudios y trabajos, los irracionales adquirieron definitivamente el estatus de número u objeto matemático.

[15] En [14, pág. 196].

[16] Weierstrass, Meray, Kronecker, entre otros.

1.3. Richard Dedekind (1831 - 1916)

Julius Wilhelm Richard Dedekind, matemático alemán, nació en Brunswick en 1831, aprendió matemáticas en los departamentos de matemáticas y física de la Universidad de Gotinga. Su tesis doctoral, asesorada por Gauss, llevaba como titulo *Über die Theorie der Eulerschen Integrale* (*Sobre la Teoría de las Integrales Eulerianas*). Dedekind recibió su doctorado en 1852. Estudió la teoría de los números con Gustav Dirichlet, las funciones abelianas y elipticas con Bernhard Riemann. Sus principales campos de trabajo fueron el álgebra y la teoría de números algebraicos.

En 1872, bajo el contexto de rigorización del anlisis[17], presenta su construcción de los números reales y en consecuencia de los números irracionales. Ésta consiste, a groso modo, en extender el conjunto de lo números racionales mediante *cortaduras* en este mismo conjunto. Inicialmente, Dedekind señala y/o resalta tres propiedades de los números racionales:

Para todo $a,\ b,\ c \in \mathbb{Q}$

1. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.
2. Entre cualesquiera a y c existen infinitos números b.
3. Cada número a divide el sistema de los números racionales $\mathbb{Q}$ en dos clases: A_1 y A_2.

Así, la esencia de la construcción se basa en la tercera propiedad, la cual origina una *cortadura*, de tal forma que divide a los números racionales, mediante un número a, en dos conjuntos infinitos bien diferenciados, que corresponden a las clases A_1 y A_2. De manera que los números de la clase A_1 son menores a los números de la clase A_2, en cuyo caso la primera clase tiene un último elemento y la segunda tiene un primer elemento, en donde ese último y primer elemento corresponden al número a. Por tanto,

[17]El cual consistió en fundamentar el análisis sobre bases absolutamente aritméticas

el número a genera la cortadura (A_1, A_2).

Por otro lado, Dedekind introduce como un axioma la continuidad de la recta L, que actualmente equivale a la recta real. Posteriormente establece una relación entre puntos de esta recta y los números racionales[18].

Ahora, traslada las propiedades mencionadas anteriormente a los puntos de la recta L, teniendo en cuenta que ya no habla de relaciones de orden (*mayor y menor que*), sino relaciones de posición (*derecha ó izquierda de*). De la siguiente manera:

Sean a, b y c tres puntos distintos de la recta L, se tienen las siguientes leyes:

1. Si a está a la derecha de b, y b a la derecha de c, entonces también a está a la derecha de c; y se dice que b está entre los puntos a y c.

2. Si a, c son dos puntos distintos, hay siempre infinitos puntos b que están entre a y c.

3. Si a es un determinado punto de L, todos los puntos de L se descomponen en dos clases, A_1, A_2.

De este modo, es posible afirmar que a cada número racional le corresponde un único punto de la línea recta. Sin embargo, Dedekind resalta la importancia de advertir que no se tiene la afirmación recíproca, es decir, que existen infinitos puntos de la recta que no corresponden a números racionales.

Ahora bien, esta analogía entre los números racionales y los puntos de la recta, es lo que le permite a Dedekind observar que existen *lagunas* en esta última, razón por la cual, advierte la necesidad de crear nuevos números que completen el dominio de los

[18] Relación que consiste en representar un número como un punto en la recta L, de tal forma que este número corresponda a la longitud entre el origen y el punto. Habiendo establecido, de antemano, un segmento como unidad.

números racionales de manera tal, que se adquiera la misma continuidad de la recta. Así, Dedekind señala que es sencillo mostrar que existen infinitas cortaduras que no pueden ser determinadas por números racionales, para cada una de las cuales crea un nuevo número *irracional*, el cual está definido por la cortadura, es decir que el número irracional corresponde o produce esta cortadura. De esta manera, construye al conjunto de los números reales como el conjunto de todas las cortaduras de racionales.

Posteriormente, Dedekind define las propiedades mencionadas anteriormente para este nuevo dominio, el cual corresponde al conjunto de los números reales, logrando establecer las relaciones de orden y la densidad de los números reales. Además, expone la continuidad de los números reales afirmando que cada cortadura es producida por un único número. Seguidamente, extiende las operaciones fundamentales con los números reales, definiendo solamente la adición y afirmando que a partir de ésta se puede realizar, de manera análoga, la definición de las demás operaciones.

Con esto, Dedekind ha elaborado una acertada construcción de los números reales y por ende, de los números irracionales, determinando también su unicidad y completez, cumpliendo con los requisitos de la época.

1.4. Georg Cantor (1845 - 1918)

Cantor nació en el año de 1845 en San Petersburgo, fue alumno de Kummer, Kronecker y Weierstrass, los cuales eran profesores de la Universidad de Berlin, en donde estudió y se graduó Cantor. Fue este último profesor la persona que más influyó dentro de los estudios y desarrollos de Cantor, entre los que se encuentran: *La Construcción de los Números Reales*, los *Números Transfinitos* y la *Teoría de Conjuntos*. Se interesó en mayor medida, dentro de las matemáticas, por el análisis y las series trigonométricas.

En 1872 Cantor conoce a Dedekind en Suecia, con quien establece buena amistad y comienza una correspondencia mutua. En este mismo año presenta un artículo titulado *Uber dier Ausdehnung eines Satzes aus der trigonometrischen Reihen (Sobre la extensión de un teorema de la teoría de series trigonométricas)*, dentro de la revista *Mathematische Annalen* tratando de dar solución al problema de análisis que E. Heine había planteado, el cual consistía en determinar la unicidad de una serie trigonométrica que estaría representando a una función arbitraria dada (*Teorema de unicidad*). En este artículo, Cantor elabora una construcción de los números reales y en consecuencia de los números irracionales, como una herramienta obligatoria, con el objeto de aclarar el teorema referente a las series trigonométricas (teorema de unicidad).

Tanto Cantor como Dedekind,[19] se preocuparon por la elaboración de una construcción de números reales, la cual sólo estuviera basada sobre cimientos aritméticos, debido a que en ese tiempo se estaba presentando un cambio en las matemáticas mediante el rigor en el análisis.

En 1883, en relación a problemas de la teoría de conjuntos, nuevamente, dentro de la revista *Mathematische Annalen* en un artículo llamado *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre (Fundamentos de una teoría general de conjuntos)*, Cantor exhibe una construcción de los números irracionales más actualizada, pero con la misma esencia que la de 1872. Además presenta una comparación crítica con los resultados obtenidos por Weierstrass[20] y Dedekind, e igualmente dedica unas líneas con motivo de enseñar la definición que tiene para número irracional. G. Cantor extendió el conjunto de los números naturales para evidenciar la existencia de otra clase de números, los números cardinales. Este mismo método -el de extender un conjunto de números ya establecidos- lo utilizó para introducir a los números irracionales, razón por la cual, Cantor considera a los números irracionales como una extension de los números racionales.[21]

[19]Dedekind elabora una acertada construcción de los números irracionales, mediante cortaduras en los números racionales, las cuales primitivamente, son definidas en la teoría de proporciones de Eudoxo.

[20]Weierstrass, Méray y Cantor coinciden en elaborar una construcción de los números irracionales, utilizando sucesiones de racionales.

[21]Análogamente a otros autores como Weierstrass, Méray, Heine y Dedekind.

La principal preocupación de Cantor, en sus dos construcciones, consistió en evitar caer en el *error lógico*[22] de definir a los números irracionales como límites de sucesiones infinitas de números racionales, que es equivalente a suponer así, la existencia inmediata de los números irracionales, sin antes haber definido dichos números o el "conjunto" al que éstos pertenecen.

Ahora bien, una de las mayores discusiones que se dio en el siglo XIX, entre los matemáticos, fue acerca del término *magnitud*. Dedekind aseguraba que este término causaba grandes confusiones e inconsistencias en los estudios en donde se utilizaba, siendo además inconsistente en sí mismo, puesto que en ningún momento, en ningún lugar, se presenta una definición formal de éste. Y aunque tanto Cantor como Weierstrass optan al inicio de sus construcciones y resultados por utilizar el señalado término, en algún momento, deciden (en especial G. Cantor) desecharlo y/o sustituirlo. En el caso de Cantor, sustituye la expresión *magnitud numérica*, por *número*.

G. Cantor, no sólo es reconocido por sus construcciones de los números reales y los transfinitos, su fama en mayor parte, radica en la elaboración de la *Teoría de Conjuntos*.

Así, gracias al ingenio y dedicación de matemáticos como: Weierstrass, Heine, Méray, Cantor, Dedekind, entre otros. En especial estos dos últimos, los irracionales dejaron de verse y asociarse con referentes geométricos, específicamente con magnitudes, para ser considerados y elevados hasta el estatus de número. En otras palabras, los irracionales, después de tan largo y arduo proceso, ahora eran un objeto matemático más, llamado *números irracionales*.

[22]Según G. Cantor el único que había evitado este error era Weierstrass. Aun así, Méray también lo había evitado otorgándole a cada sucesión de racionales que no convergiera a uno de estos mismos números, un *limite ficticio*.

Capítulo 2

La Construcción de Los Números Reales Por Georg Cantor

En la elaboración de una construcción de números reales, la cual sólo estuviera basada sobre cimientos aritméticos,[1] la principal preocupación del matemático alemán G. Cantor consistió en desarrollar una teoría sobre los números irracionales que resulte ser apropiada, evitando caer en el error lógico de definir a los números irracionales como límites de sucesiones infinitas de números racionales, que es equivalente a suponer así, la existencia inmediata de los números irracionales, sin antes haber definido dichos números o el conjunto al que éstos pertenecen:

> (...)*el número a definir b no se identifica de antemano con la suma $\sum a_v$ de la serie infinita (a_v); esto hubiera constituido un error lógico, porque, antes bien, la definición de la suma $\sum a_v$ sólo se obtiene por equiparación con el número dado b, que necesariamente debe haberse definido con anterioridad.* [6, pág. 110].

Teniendo cuidado de no caer en el mencionado *error lógico*, G. Cantor presentó su construcción de los números reales en dos versiones.[2] La primera es presentada en 1872 dentro de la revista *Mathematische Annalen* en un artículo titulado *Sobre la*

[1] Interés motivado por la introducción del rigor en el análisis en el siglo XIX.

[2] Se precisa en este momento, que en el desarrollo de este capítulo se tendrán en cuenta las dos versiones asociadas: la primera tomada de el libro de Boniface [4] y la segunda del libro traducido y comentado por Ferreirós [10].

extensión de un teorema de la teoría de series trigonométricas, tratando de dar solución al problema del análisis que E. Heine[3] había planteado, el cual consistía en determinar la unicidad de una serie trigonométrica que estaría representando a una función arbitraria dada (teorema de unicidad). Dentro de la solución a este problema, Cantor se vió en la necesidad de desarrollar una teoría satisfactoria de los números reales:

> *En lo que sigue, daré parte de una cierta extensión del teorema según el cual las representaciones en series trigonométricas son unívocas.* (...) *Pero en este objetivo estoy obligado a dar explicaciones preliminares, aunque esto no es para la mayoría más que simples indicaciones, que pueden servir para poner en evidencia las relaciones que aparecen siempre, en cuanto a las magnitudes numéricas, en cantidad finita o infinita, son dadas; soy conducido por aquí a dar ciertas definiciones, que serán adelantadas aquí con el solo fin de una presentación tan concisa como sea posible del teorema considerado, cuya demostración es dada en el* §3.[4] [4, pág. 73].

La segunda versión fue publicada en 1883, en relación a problemas de la teoría de conjuntos, nuevamente, dentro de la revista *Mathematische Annalen* en un artículo llamado *Fundamentos de una teoría general de conjuntos*,[5] en donde presenta también una comparación crítica con los resultados obtenidos por Weierstrass y Dedekind, y además dedica unas líneas con motivo de enseñar la definición que tiene para número irracional.

G. Cantor en sus dos versiones, y análogamente a otros autores,[6] considera al número irracional como una extensión del número racional.

[3]Edward Heine, colega de Cantor, trabajaba sobre problemas relativos a la teoría de series trigonométricas.

[4]Capítulo tres o tercero.

[5]Conocidos también como los *Grundlagen.*

[6]Weierstrass, Méray, Heine y Dedekind.

Se presenta en lo que sigue los aspectos más importantes de la construcción de los números irracionales elaborada por Georg Cantor.

Nota: Se precisa en este momento que los ejemplos que se indicarán en adelante, se han elaborado con la teoría ya terminada, en otras palabras, con terminología y bases modernas.

2.1. Construcción de Los Números Irracionales

G. Cantor considera irrelevante introducirse e indagar sobre el *dominio de los números racionales*, al que llama *dominio A*, ya que este *dominio* tiene unas bases aritméticas bien definidas, y que además, otros autores como H. Grassmann (*Lehrbuch der Arithmetik*, Berlín 1861) y J. H. T. Müller (*Lehrbuch der allgemeinen Aithmetik*, Halle 1855), ya han tratado.

Aclarado lo anterior, G. Cantor inicia estableciendo sucesiones[7] infinitas de racionales,

$$a_1, a_2, ..., a_n, ...$$

A continuación, de estas sucesiones considera sólo aquellas que llegan a ser lo que él denomina *sucesiones fundamentales*:

Definición 2.1. *La sucesión infinita* $\{a_n\}$ *se llama una* sucesión fundamental *si existe un entero* N *tal que para cualquier* $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q}$*, se tiene que:*

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon, \text{ para todo } m, \text{ y para todo } n > N.$$

[7]En la época (S. XIX), el término *Reihe* era empleado para series y sucesiones. A lo cual hace mención Ferreirós en [11, pág. 150].

Ejemplo: La sucesión $\{a_n\}$, donde $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$ es una *sucesión fundamental*.

Así, si se tiene

$$\left| \sum_{i=1}^{n+m} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} + \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{1}{2^i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+m} \frac{1}{2^i} \right| = \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^{n+i}} \right| < \varepsilon.$$

De donde se obtiene la desigualdad,

$$\left| \frac{1}{2^n} \right| \cdot \left| \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{2^i} \right| < \varepsilon. \tag{2.1}$$

Ahora bien, como

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} \right) = 1,$$

entonces en (2.1) se tiene

$$\left(\frac{1}{2^n} \right) .(1) < \varepsilon,$$

lo que equivale a:

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

Por lo tanto:

$$\log_2 \frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Así, para $N = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon} \right]$, donde $[x]$ denota el menor de los enteros mayor o igual que x, se satisface la definición para la sucesión dada.

Ahora bien, son estas sucesiones fundamentales las que le permiten ampliar el dominio A hasta conseguir los números irracionales y en consecuencia obtener un nuevo dominio el cual consistirá en el de los números reales:

> *Hablaré de magnitud numérica en sentido amplio para abordar el caso donde se tiene una sucesión infinita de números racionales:*
>
> $$a_1, a_2, ..., a_n, ... \tag{1}$$
>
> *dada mediante una ley que tiene por propiedad que la diferencia $a_{n+m} - a_n$ deviene infinitamente pequeña cuando n crece, donde m es un número entero cualquiera, o, en otros términos, que para un ε (racional positivo) cualquiera, existe un número entero n_1 tal que $(a_{n+m} - a_n) < \varepsilon$, si $n \geq n_1$, y si m es un número entero positivo cualquiera. Expreso así esta propiedad de la sucesión (1): "La sucesión (1) tiene un límite determinado b".* [4, pág. 74].

Este criterio o condición propuesta por G. Cantor para determinar *sucesiones fundamentales* es equivalente a la llamada *condición de Cauchy* [8] para determinar sucesiones de Cauchy.

Cantor precisa que con lo dicho aún no está definiendo un límite b para la sucesión $\{a_n\}$, sino que tan solo le está asociando a cada sucesión fundamental un "símbolo" b. Cantor se preocupó porque se entienda rigurosamente la naturaleza nominal de b, ya que si a este símbolo se lo entendía como el límite de la sucesión $\{a_n\}$, se estaría cayendo en el círculo vicioso -de suponer la existencia del límite, el cual al ser irracional, sólo

[8] Una sucesión de números reales $\{x_n\}$, se llama sucesión de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{Z}$ tal que $|x_m - x_n| < \varepsilon$ si $n, m \geq N$. A partir de esta definición se puede verificar que la sucesión $\{x_n\}$, tal que $x_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}$ es sucesión de Cauchy. Mientras que la sucesión $\{x_n\}$, donde $x_n = (-1)^n$ no es sucesión de Cauchy.

tendría una existencia lógica una vez definidos los irracionales- que tanto había tratado de evadir. Por lo tanto aclara:

> *Estas palabras no tienen pués, otro sentido que el de expresar esta propiedad de la sucesión, y del hecho que asociemos a la sucesión (1) un signo particular b, se sigue que se debe también formar, para diferentes sucesiones de este tipo, diferentes signos b, b', b''.* [4, pág. 74].

Teniendo en cuenta lo anterior, Cantor presenta enseguida unas comparaciones de orden entre las sucesiones fundamentales y en consecuencia entre los símbolos b asociados a cada una de ellas.

Sean las sucesiones fundamentales $\{a_n\}$, asociada con b y $\{a'_n\}$, asociada con b'. Entonces:

1. $b = b'$ si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a'_n| < \varepsilon$, si $n \geq N$.
2. $b > b'$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a_n - a'_n) \geq \varepsilon$.
3. $b < b'$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a_n - a'_n) \leq -\varepsilon$.

Ejemplos:

1. $b = b'$ si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a'_n| < \varepsilon$, si $n \geq N$.

   Sean las sucesiones fundamentales con sus respectivos valores asociados (b y b')

   $a_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1}}{i2^i}$, $b = \log \frac{1}{2}$ y

   $a'_n = -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}$, $b' = -\log 2$.

Entonces

$$|a_n - a'_n| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1}}{i2^i} - \left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1}}{i2^i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i2^i}\right|$$

$$= \left|\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{(-1)^{2i-1}}{i2^i} + \frac{1}{i2^i}\right)\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1}+1}{i2^i}\right|.$$

Ahora se tiene que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1}+1}{i2^i}\right) = 0,$$

con lo cual, para todo $\varepsilon > 0$ se obtiene

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{2i-1}+1}{i2^i}\right| = 0 < \varepsilon.$$

2. $b > b'$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a_n - a'_n) \geq \varepsilon$.

   Sean las sucesiones fundamentales con sus respectivos valores asociados

   $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}$, $b = \log 2$ y

   $a'_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i}}{i}$, $b' = -\log 2$.

   Además, sea $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$.

   Entonces

$$a_n - a'_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i}}{i}.$$

Ahora, como $(-1)^{i-1} = -(-1)^i$, se tiene

$$\begin{aligned} a_n - a'_n &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{-(-1)^i}{i} \right) - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i}. \end{aligned}$$

Como,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} \right) = (-\log 2).$$

Así

$$\begin{aligned} a_n - a'_n = -2 \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i} &= -2(-\log 2) \\ &= 2 \log 2 > \varepsilon. \end{aligned}$$

3. $b < b'$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $(a_n - a'_n) \leq -\varepsilon$. El ejemplo de esta relación de orden, se desarrolla de forma análoga al ejemplo de la relación anterior. Tomando a_n como a'_n y viceversa, y b como b' y viceversa.

Seguidamente y de forma similar, Cantor presenta comparaciones entre las sucesiones fundamentales y los números del dominio A:

Sean $\{a_n\}$ una sucesión fundamental asociada con b y $a \in A$. Entonces:

1. $b = a$ si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$, si $n \geq N$.

2. $b > a$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a_n - a) \geq \varepsilon$.

3. $b < a$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a_n - a) \leq -\varepsilon$.

Ejemplos:

1. $b = a$ si para todo $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - a| < \varepsilon$, si $n \geq N$.

   Sean $a_n = \dfrac{3n}{2n+1}$, $b = \dfrac{3}{2}$ y $a = \dfrac{3}{2}$. Y sea $\varepsilon > 0$. Así,

   $$|a_n - a| = \left|\frac{3n}{2n+1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{6n - 6n - 3}{4n+2}\right| = \left|\frac{-3}{4n+2}\right|.$$

   Dado que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{-3}{4n+2} = 0$, se tiene que

   $$|a_n - a| = \left|\frac{-3}{4n+2}\right| = 0 < \varepsilon \text{ (cuando } n \to \infty).$$

2. $b > a$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a_n - a) \geq \varepsilon$.

   Sean $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $b = e$ y $a = \dfrac{1}{2}$. Y sea $0 < \varepsilon < 1$. Como se puede llegar a

   demostrar $a_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ es creciente y acotada; acotada inferiormente por 2.

   Además $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, donde $e < 3$.

   Así,

   $$2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

   Restando $\dfrac{1}{2}$ se tiene,

   $$2 - \frac{1}{2} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2} < 3 - \frac{1}{2}.$$

   Observando solo la parte izquierda de la desigualdad

   $$\frac{3}{2} \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2},$$

que equivale a

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2} \geq \frac{3}{2},$$

donde $\frac{3}{2} > \varepsilon$, por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

3. $b < a$ si existe $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $(a_n - a) \leq -\varepsilon$.

Sean $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b = e$ y $a = 5$, además de $0 < \varepsilon < 1$, multiplicando por (-1), se obtiene $-1 < -\varepsilon < 0$. Como se puede llegar a demostrar, la sucesión $\{a_n\}$ es creciente y acotada (acotada inferiormente por 2). Además $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, donde $e < 3$.

Así,

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3.$$

Restando 5 se tiene,

$$2-5 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 5 < 3-5.$$

Observando sólo la parte derecha de la desigualdad:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 5 < -2,$$

donde $(-2) < -\varepsilon$, por tanto,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 5 < -\varepsilon.$$

Estas últimas comparaciones tienen como fin evidenciar la semejanza que tienen los números racionales y los b, ya que todo número racional a puede ser reconocido por medio de la sucesión constante[9] $\{a\}$, lo cual refleja el hecho de que todo racional a tiene el mismo comportamiento que un b. Es por esta razón que Cantor deja a un lado el nombre de *signo* o *símbolo* y llama *magnitudes numéricas*[10] a todos y a cada uno de los b. Al mismo tiempo, al conjunto de todas las magnitudes numéricas b, lo llama *dominio* B.

En este aspecto, cabe señalar que la utilización de la palabra *magnitud* en la época del siglo XIX, llevaba consigo un cambio sobre su noción, ya que ésta comenzaba a ser vista en un sentido abstracto, al desligarse cada vez más del contexto geométrico. Esto se evidencia en el hecho de que al usar la palabra *magnitud*, el significado de ésta se desenlazaba cada vez más de lo empírico e intuitivo, para referirse a un significado que radicaba en una idea netamente mental. Sobre este aspecto, Dedekind se sentía insatisfecho, puesto que la noción de magnitud no quedaba nunca definida con claridad, y en especial la continuidad de las magnitudes del análisis no se definía ni se empleaba realmente en las demostraciones.

Es tal vez por esto que Cantor decide en su versión de 1883 cambiar el término *magnitudes numéricas* por *números*,[11] para referirse a los elementos del dominio B. En esta misma vía, Bell subraya:

> *Las "magnitudes", como hemos visto, fueron reemplazadas por "números", y se expulsaron las intuiciones geométricas para hacer sitio a las de la lógica tradicional.* [2, pág. 307].

Ahora bien, continuando con la construcción elaborada por Cantor, éste exhibe que las operaciones elementales de los números racionales, pueden ser extendidas al dominio B:

[9]Teniendo en cuenta, además, que toda sucesión constante es una sucesión fundamental.

[10] *Zahlengrössen*, en la terminología utilizada por Cantor (y por Weirstrass), principalmente en la versión de 1872 sobre la construcción de los reales. A esto hace mención Ferreirós en [11, pág. 147].

[11]En su versión de 1883, en los *Fundamentos de una teoría general de conjuntos.*

Sean los números b, b' y b'' del dominio B, asociados a las sucesiones fundamentales $\{a_n\}$, $\{a'_n\}$, y $\{a''_n\}$ respectivamente, se definen:

1. $b \pm b' = b''$; si $\text{lím}(a_n \pm a'_n - a''_n) = 0$.

2. $b.b' = b''$; si $\text{lím}(a_n a'_n - a''_n) = 0$.

3. $\dfrac{b}{b'} = b''$, con $b' \neq 0$; si $\text{lím}\left(\dfrac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) = 0$.

Ejemplos: Se proponen a continuación ejemplos para el caso de la multiplicación y la división.

1. $b.b' = b''$. Así, $\text{lím}(a_n a'_n - a''_n) = 0$.

   Sean

   $a_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i+1}}{2(i+1)}$, $b = -\dfrac{1}{2}\log 2$

   $a'_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i}}{i}$, $b' = -\log 2$

   $a''_n = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{(-1)^{i-1}}{i}$, $b'' = \dfrac{1}{2}(\log 2)^2$.

   Ahora,

$$\begin{aligned}
\text{lím}(a_n a'_n - a''_n) &= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{2(i+1)}.\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i} - \sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{2(i+1)}.\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i}\right) - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\\
&= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i+1}}{2(i+1)}.\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i}}{i} - \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^{i-1}}{i}\\
&= -\frac{1}{2}\log 2.(-\log 2) - \frac{1}{2}(\log 2)^2\\
&= \frac{1}{2}(\log 2)^2 - \frac{1}{2}(\log 2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

2. $\dfrac{b}{b'} = b''$ si $b' \neq 0$. Así, $\text{lím}(\dfrac{a_n}{a'_n} - a''_n) = 0$.

Sean $a_n = \left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$, $b = e^3$

$a'_n = \left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$, $b' = e^2$

$a''_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, $b'' = e$

Así,

$$\begin{aligned}
\lim\left(\frac{a_n}{a'_n} - a''_n\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} - \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
&= \frac{e^3}{e^2} - e\\
&= e - e\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Como se mostró, los números a se pueden expresar a través de sucesiones fundamentales, al igual que los números b. Además sobre el conjunto de cada uno se verifican las operaciones elementales. Así estas operaciones se pueden trabajar indistintamente con números b y/o a. Esto consiste en cambiar un (o unos)[12] b (b, b', b'') por un número a, y su respectiva sucesión asociada ($\{a_n\}, \{a'_n\}$, y $\{a''n\}$) por una sucesión constante $\{a\}$.

[12] Igualmente es válido el hecho de cambiar más de un b (b, b', b'') por números a determinados y consecuentemente sus sucesiones asociadas.

Con lo anterior se evidencia que un número a, al cumplir con todas las características de un número b, se constituye claramente en un elemento del dominio B. Esto es lo que finalmente conlleva a evidenciar que el dominio de los números racionales (A) está inmerso en el dominio B.

A partir de los resultados y análisis obtenidos anteriormente, Cantor afirma:

> *Después de todos estos prolegómenos, se obtiene como primera proposición rigurosamente demostrable que, si b es el número determinado por la sucesión fundamental* $\{a_v\}$*, entonces con v creciente,* $b - \{a_v\}$ *se hace menor en valor absoluto que cualquier número racional concebible, o lo que es lo mismo, que:* $\lim\limits_{v=\infty} a_v = b$. [6, pág. 112].

Así, Cantor ha logrado evitar el mencionado *error lógico*, obteniendo una justificación apropiada y suficiente de la asociación dada entre el número b y la sucesión fundamental $\{a_n\}$. En otras palabras ha justificado satisfactoriamente la expresión "La sucesión (1) tiene un límite determinado b". Además, con esto Cantor solidifica el significado de límite, afirmando:

> *(...)el concepto de b ha sido establecido sobre los números racionales mediante nuestras definiciones precedentes con tales propiedades y relaciones, que de ellas puede extraerse con evidencia lógica la conclusión de que* $\lim\limits_{v=\infty} a_v$ *existe y es igual a b (...) el número irracional, en virtud de las características que le confieren las definiciones, tiene una realidad tan definida en nuestra mente como los números racionales, e incluso los racionales enteros, y no necesitamos obtenerlos por un proceso de paso al límite; sino que más bien, al contrario, por su posesión nos convencemos de la posibilidad y la evidencia de los procesos de paso al límite en general.* [6, pág. 113].

2.2. Unicidad y Completez

A partir de lo mencionado, Cantor se ocupa de la unicidad y completez de los números reales:

> *Si* (b_v) *es un conjunto de números racionales o irracionales cualesquiera con la característica de que* $\lim_{v=\infty}(b_{v+\mu} - b_v) = 0$ *(cualquiera que sea u), entonces existe un número b determinado por una sucesión fundamental* (a_v)*, tal que:*
>
> $$\lim_{v=\infty} b_v = b$$
>
> *Se muestra por tanto que los mismos números b, definidos sobre la base de sucesiones fundamentales* (a_v) *-a las que llamo sucesiones fundamentales de primer orden -de tal modo que resultan ser los límites de los* a_v*, se pueden representar también de múltiples maneras como límites de sucesiones* (b_v)*, donde cada* b_v *viene definido por medio de una sucesión fundamental de primer orden* (a_μ^v) *(con v fijo). A un conjunto* (b_v) *tal, si tiene la propiedad de que* $\lim_{v=\infty}(b_{v+\mu} - b_v) = 0$ *(para un* μ *cualquiera), lo llamo en consecuencia una sucesión fundamental de segundo orden.* [6, pág. 113].

Con lo anterior, Cantor realiza una definición de sucesiones fundamentales de primer y segundo orden, las cuales convergen a un número real determinado por una sucesión fundamental de elementos de A.

Definición 2.2. *La sucesión fundamental* $\{a_n\}$ *es de primer orden, si existe un entero* N *tal que para cualquier* $\varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R}$*, se tiene que:*

$$|a_{n+m} - a_n| < \varepsilon, \text{ para todo } m, \text{ y para todo } n > N.$$

Y además todo elemento de $\{b_n\}$*, pertenece a* B*.*

En otras palabras una sucesión fundamental es de primer orden si al cumplir con la condición de que sus elementos se agrupan a partir de un determinado término, todos los elementos de esta sucesión pertenecen al primer dominio, es decir a A, sin que esto implique que la sucesión converja en este mismo dominio. De igual forma, una sucesión fundamental es de segundo orden si al cumplir con la misma condición (de agrupación), sus elementos pertenecen al segundo dominio, es decir a B. En este caso se sabe que como los elementos de esta sucesión son reales, entonces va a converger en el mismo dominio. Así recíprocamente, el orden de una sucesión fundamental lo determina el *orden del dominio*[13] al que pertenezcan los elementos de dicha sucesión.

De esta forma, Cantor considera sucesiones fundamentales a partir del dominio B extendido recientemente ($\mathbb{R}$), es decir, con números racionales e irracionales a la vez, ya que $A \subset B$. A cada una de estas sucesiones él asocia un nuevo símbolo c,[14] de esta manera le asocia a cada sucesión $\{b_n\}$[15] un número c. De este modo es construido un nuevo dominio C, constituido por los números c generados a partir de B. Igualmente, se definen sobre el dominio C las relaciones de orden y operaciones elementales definidas para los dominios A y B, generando un nuevo dominio D, de la misma manera y bajo el mismo procedimiento A, B, C y D constituyen el dominio E. Así, mediante λ construcciones se obtiene un dominio L.

Ahora bien, los elementos que constituyen los dominios de orden superior a B, es decir $C, D, E, ..., L$, están determinados por sucesiones fundamentales de orden menor en una unidad al orden del domino al que pertenecen, en otras palabras, los elementos que conforman a estos dominios están determinados por sucesiones fundamentales de elementos del dominio inmediatamente anterior, pero estos elementos bien podrían definirse sólo a partir de sucesiones fundamentales de segundo orden, es decir, con elementos del dominio B ya que si estas sucesiones (fundamentales de segundo orden)

[13]El orden de un dominio es establecido por el orden alfabético de la letra asociada a éste. Ejemplo: el dominio A es de primer orden, el dominio B es de segundo orden, el dominio C es de tercer orden, y así sucesivamente hasta L.

[14]En la versión de 1883 Cantor sugiere que para cualquiera que sea el orden del dominio al que pertenece un determinado símbolo $(c, d, e, .., l)$ éste siga siendo llamado b, así la terminología sería más rica y comprensible.

[15]La sucesión $\{b_n\}$ está constituida por elementos de B, donde cada uno de éstos viene definido por una sucesión fundamental de primer orden.

cumplen con la característica de que $\lim_{v=\infty}(b_{v+\mu}-b_v)=0$, entonces existe algún b definido a partir de una sucesión de primer orden (es decir, b pertenece a B) al cual convergen las sucesiones (de segundo orden) de éstos (elementos de B) van a converger en B.

En otras palabras, las sucesiones de elementos de B convergen en B, así los elementos de C (definidos por sucesiones de elementos de B) van a ser iguales a los elementos de B (mas no idénticos)[16] y de esta forma, los elementos de D (definidos por elementos de C) van a ser iguales (mas no idénticos, nuevamente) a los elementos que constituyen C por la misma razón. De manera equivalente se puede observar que los elementos de orden superior al del dominio B, van a ser iguales, mas no idénticos, a los elementos del dominio de orden inmediatamente menor, hasta llegar al dominio B, así cada uno de estos dominios es equipotente al dominio B.

Para aclarar lo mencionado anteriormente véase que los elementos de dominios de orden superior al dominio B, son iguales mas no idénticos a los elementos de orden inmediatamente menor, hasta llegar a igualarlos a los elementos del dominio B, es decir, los elementos de los dominios $C, D, E, ..., L$ son iguales a los del dominio B (incluso entre elementos de B) y recíprocamente. Puesto que éstos pueden estar asociados a sucesiones fundamentales diferentes que converjan al mismo límite.

Asimismo, al comparar que la igualdad entre dos elementos de B no implica su identidad, debe hacerse una distinción similar a la de la vía anterior (iguales pero no idénticos), entre dominios de orden superior o igual al del dominio B. Refiriéndose a lo anterior Cantor, citado en Boniface, compara los dominios B y C. La distinción explicada anteriormente es mencionada por Cantor en su versión de 1872, pero sólo expone una explicación de ésta en 1883.

[16]Dos elementos de dominios iguales o diferentes pueden ser iguales sin que esto implique que sean idénticos, ya que pueden ser determinados por sucesiones diferentes, por ejemplo cero puede ser determinado por las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$, donde $a_n = \frac{1}{n}$ y $b_n = \frac{1}{2n}$, con lo que se puede afirmar, dentro de este contexto, que el cero asociado a a_n es igual al cero asociado a b_n, mas no idéntico.

En cada dominio de orden superior a B se conservan las relaciones de orden y las operaciones elementales, y además estos dominios son equipotentes con B, razón por la cual, el paso de B a C, y de éste a D y así sucesivamente hasta el paso a L (después de λ pasos o construcciones) no produce extensión del dominio, contrario a lo que ocurrió al pasar de A a B.

El objetivo de Cantor al introducir dominios de orden superior al de B, compuestos por elementos definidos por sucesiones fundamentales de orden superior a dos, siendo éstos determinables por sucesiones de segundo orden -como ya se aclaró- era evidenciar que no había necesidad de extender el dominio B, puesto que en éste ya estarían contenidos todos los números reales. Así, cualquier número designado por una sucesión fundamental de orden mayor a dos, podría ser definido por una sucesión fundamental de segundo orden. De esta manera el dominio B es no extensible, es decir, es *completo*, en otras palabras, no existe la necesidad de crear un nuevo dominio en el que converjan las sucesiones fundamentales de segundo orden, ya que como se mostró, las sucesiones fundamentales de elementos de B convergen en B. Sin embargo, el hecho de que Cantor haya creado nuevos dominios a partir de B, siendo éstos equipotentes con B llegó a ser una cuestión criticada por Dedekind en el prefacio de su obra *Continuidad y números irracionales.*

2.3. Objetividad

Ahora, Cantor presenta una analogía entre los elementos del dominio B (números reales) y los puntos de la recta geométrica, no para mostrar su existencia o dependencia con el referente geométrico, si no para darle a este nuevo dominio una objetividad.[17] Esta objetividad entendida como un modo de representación para los números que acaba de definir, ya que como los racionales eran totalmente aceptados como números y eran

[17]Principalmente en su versión de 1872, después de desarrollar y/o presentar su construcción de los números reales.

fácilmente representables en la recta geométrica (recta real), Cantor quería acabar de mostrar que los nuevos números tenían una naturaleza similar a la de los racionales[18] y que por tanto debían ser igualmente aceptados.

En primera instancia, Cantor define, para la recta, un origen determinado como punto fijo, y una unidad de medida para establecer la ubicación de cada uno de sus puntos, así:

> *Los puntos de una línea recta están definidos por el hecho de que, tomando por base una unidad de medida, se señala sus distancias a un punto fijo 0 de la línea recta, las abscisas, con signo + o −, según que el punto considerado se encuentre en la parte (fijada por anticipado) positiva o negativa a partir de 0.* [4, pág. 77].

Posteriormente, Cantor establece una relación, en el sentido de Euclides, entre los puntos de la recta y los números racionales, pues si entre estos dos elementos se daba una relación conmensurable, el punto podría ser representado por un número[19] del dominio A, es decir, por un número racional. Pero si esta relación no era conmensurable, el punto debía ser indicado por una sucesión fundamental de primer orden $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, con la cual, cuando n crece, esta sucesión se aproxima a la longitud de la distancia entre 0 (cero) y el punto a determinar. Ahora, como cada sucesión fundamental de primer orden $\{a_n\}$ tiene como límite un número b (racional o irracional), entonces, a éstos también se los puede relacionar con los puntos de la recta mediante estas sucesiones.

Enseguida, Cantor aclara que las mismas relaciones de orden establecidas en su construcción para el dominio B, se mantienen para las distancias determinadas por cada punto de la línea recta. Con esto se deduce que existe una correspondencia unívoca

[18] Como menciona Cantor: *El número irracional se establece en nuestro espíritu con la misma precisión, distinción y claridad que el número racional.* En [6, pág. 110].

[19] A los cuales Cantor aun los llamaba *magnitudes numéricas*, pues este análisis lo presenta en su versión de 1872.

entre los puntos de la línea recta y los números del dominio B. Ya que el recíproco de esto no es de naturaleza demostrable, como lo dice Cantor, lo introduce entonces como un axioma:

> *A fin sin embargo de completar la concordancia, expuesta en este §, del dominio de las magnitudes numéricas definido en el §1, con la geometría de la línea recta, sólo queda añadir un* axioma*, que consiste simplemente en que recíprocamente a cada magnitud numérica corresponde un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esta magnitud numérica, es decir igual en el sentido expuesto en este §. Llamo esta proposición un axioma porque está en su naturaleza no ser, en general, demostrable.* [4, pág. 77].

Con esto Cantor concluye:

> *Se llega con esto a una cierta objetividad para las magnitudes numéricas, de la cual ellas son totalmente independientes.* [4, pág. 78].

En esta medida y para finalizar, es válido unirse a la consideración que hace Boniface, teniendo en cuenta lo desarrollado sobre aspectos aquí expuestos:

> *No es la representación geométrica de las magnitudes numéricas por los puntos de una recta lo que hace que existan estas magnitudes, éstas son independientes de los puntos que las representan, Cantor se aparta de una definición de los "números reales" basada en consideraciones geométricas. Pero esta representación geométrica provee a estas magnitudes, cuya existencia hasta ahora abstracta y formal, una objetividad, garantizándoles un referente concreto.* [4, pág. 73].

Capítulo 3

Conclusiones y Comentarios

Este capítulo se divide en tres apartados, el primero corresponde a conclusiones derivadas del recorrido histórico expuesto en el primer capítulo, específicamente lo que concierne a la antigüedad griega, el segundo apartado corresponde a conclusiones de la última parte de este recorrido, en esencia lo que se referenció acerca de Stevin, Dedekind y Cantor. Todas éstas han sido motivadas, en cierta medida, en comentarios de autores que han estudiado desde diversos contextos el surgimiento y la consolidación de los números reales y en consecuencia de los números irracionales. Por último, en el tercer apartado se presentan conclusiones de tipo técnico del trabajo de Cantor, sobre números reales, expuesto en el segundo capítulo.

3.1. Antigüedad griega

- La aparición de las magnitudes inconmensurables causó una inmensa problemática tanto en la antigüedad griega como en tiempos posteriores, ya que éstas involucran uno de los conceptos matemáticos más conflictivos de la historia, el concepto de infinito.

  Para los pitagóricos la aparición de las magnitudes inconmensurables fue algo devastador, ya que iban en contra de sus creencias filosóficas, religiosas y conceptuales por lo que éstas fueron "repudiadas" y "escondidas" por parte de la escuela pitagórica. Aun así, también fueron estudiadas y manipuladas.

Gracias al *Teeteto* de Platón, se puede conocer que personajes como Teodoro y Teeteto, dieron tratamiento a las magnitudes inconmensurables mediante raíces cuadradas (en sentido moderno). Además, como se tenían o existían distinciones y separaciones tajantes entre magnitud y número, entre lo aritmético y lo geométrico, las magnitudes inconmensurables al pertenecer al contexto geométrico, no podrían ser vistas como números.

Ahora bien, dichas magnitudes contradecían la teoría de proporciones que se manejaba hasta entonces, pero es hasta Eudoxo que sucede este problema, ya que él presenta una nueva definición para determinar razones entre cuatro magnitudes tomadas dos a dos sin importar si las magnitudes son o no conmensurables. A continuación, la renovada teoría de proporciones es utilizada por Euclides en su obra *los Elementos*, en el libro V, en donde además presenta una definición errónea del término *razón*.

Así, las magnitudes inconmensurables siguieron causando inconvenientes de orden ontológico hasta llegar a Stevin en el s. XVI, quien amplía el concepto de número y promueve la inclusión del 0, el 1 y los números negativos dentro de dicho concepto. Además, mediante dos definiciones, que él presenta en una de sus obras, da pie a que a se transforme la concepción concerniente a los números irracionales (las magnitudes inconmensurables). Posteriormente, en el siglo XIX dentro del contexto de rigorización del análisis, aparecen personajes como Cauchy, Weierstrass, Meray, Dedekind, Cantor, entre otros, quienes se preocuparon por mencionado aspecto. Asimismo, matemáticos como Dedekind y Cantor se interesaron y lograron presentar una construcción de los números reales, libre de todo referente geométrico, basándose únicamente en los números racionales, los cuales ya eran reconocidos y aceptados como números.

Así, se dio fin a ese largo proceso el que se embarcaron forzosamente las magnitudes inconmensurables hasta llegar a ser aceptadas y conocidas como números irracionales. Al respecto, Luis Recalde menciona:

> *Se puede decir que las magnitudes inconmensurables al ser el primer antecedente de los números irracionales y aparecer como entes contradictorios de los números razonables o racionales, es decir, aquellos que pueden expresarse por razones de números naturales, tuvo que ver con el nombre que adquirieron cuando históricamente se paso del concepto de magnitud al de número. En otras palabras, cuando se paso del contexto geométrico al aritmético.* [17, pág. 47].

- Las concepciones matemáticas de los antigüos griegos estaban, en gran medida, influenciadas por aspectos y creencias filosóficas y religiosas, tales como: la armonía de la naturaleza, el no ser, la nada, la finitez y terrenalidad del hombre, el mundo de las ideas[1], entre otras. Lo cual provocó que muchos resultados y/o aspectos matemáticos, entre los cuales se encuentran los números irracionales o lo que para ellos fueron *magnitudes inconmensurables*, carecieran de acogida y, en cierta medida, de interés de estudio.[2] Así, dicha carencia generó un inmenso obstáculo en los estudios y desarrollos de los investigadores y pensadores griegos dentro de las matemáticas y, probablemente, dentro de otras ciencias.

- La principal causa del revuelo que provocó el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables en el desarrollo matemático de la antigüedad griega, consiste en que dichas magnitudes están relacionadas con uno de los conceptos matemáticos más preocupantes y problemáticos de la historia[3] (hasta nuestros días); *el*

[1]Teoría filosófica planteada por Platón. Quien asegura que las matemáticas no son creadas, sino descubiertas, extraídas de ese *mundo de las ideas*.

[2]Como lo indica L. Recalde, en su obra sin publicar [17], para el caso del cero y el uno.

[3]Como lo señala L. Recalde en la obra *Lecciones de historia de las matemáticas*[17].

infinito. Además, tal descubrimiento iba, como se dijo anteriormente, en contra de creencias y concepciones filosóficas y religiosas como las de la escuela pitagórica, para quienes el principio fundamental o doctrina era que la esencia de todas las cosas es explicable mediante números y sus razones, que "los números constituyen el universo entero". Por lo que las magnitudes inconmensurables (los números irracionales) se convirtieron en el "monstruo" de las matemáticas en la antigüedad griega.

- Aunque no se sabe a ciencia cierta cuándo y dónde se presentó la primera inconmensurabilidad, y especialmente cuál fue ésta, se asume[4] que apareció entre los años 500 y 430 a.C. Además, todo apunta a que se presentó dentro de la escuela pitagórica al comparar y/o medir la diagonal de un pentágono regular a partir de uno de sus lados (ligada, en términos modernos, al número irracional $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), lo cual genera también, la llamada razón o proporción dorada. Esta aseveración de la primera inconmensurabilidad tiene gran acogida ya que el símbolo distintivo de la escuela pitagórica era el pentágono regular estrellado, más conocido como *pentagrama pitagórico*. Lo cual hace evidente que los pitagóricos lo hayan manejado y estudiado. Por otro lado, esta posición desplaza a la idea que comúnmente se maneja, o se presenta en los ambientes escolares, la cual afirma que la primera inconmensurabilidad se dio al comparar la diagonal de un cuadrado con respecto a uno de sus lados y está ligada, en sentido moderno, al número irracional $\sqrt{2}$.

- Gracias al *Teeteto* de Platón se puede evidenciar que algunos de los personajes que más se interesaron y profundizaron en el estudio y tratamiento de las magnitudes inconmensurables, mediante raíces cuadradas, fueron Teodoro de Cirene y su discípulo Teeteto. No se conocen registros de que Teodoro o Teeteto hayan analizado la inconmensurabilidad (o en sentido moderno, la irracionalidad) de $\sqrt{2}$, ya que estos dos pensadores analizaron la inconmensurabilidad de las raíces

[4]Como se presenta en [17, pág. 45] y en [8, pág.107].

de la forma $\sqrt{n}$, a partir de $\sqrt{3}$ y terminaron en $\sqrt{17}$. En este sentido, teniendo en cuenta lo afirmado por el profesor A. Campos en [7, pág. 306], se cree que lo concerniente a $\sqrt{2}$ ya había sido, hasta esos días, tratado y que por consiguiente no era necesario dedicarse más en este punto. De igual forma, se desconoce la razón por la cual detuvieron sus estudios en $\sqrt{17}$ y no continuaron con raíces de números mayores. Aun así, tanto Teodoro como su discípulo, lograron realizar un indiscutible aporte en torno a la consolidación de los números irracionales, ya que estaban mostrando que estos "números" no eran tan apáticos y atroces, y que a pesar de su naturaleza, podían se analizados y manipulados al igual que otros números.

- Eudoxo marca un antes y un después en las matemáticas de la antigüedad griega. Esto debido a que antes de Eudoxo, era posible establecer si cuatro magnitudes conmensurables estaban en proporción, o sea si tomadas dos a dos, cada pareja tiene la misma razón. Ahora bien, hacer esto con las magnitudes inconmensurables, era una tarea imposible ya que éstas iban en contra de la teoría de las proporciones que se manejaba hasta ese momento. Y es en este punto donde Eudoxo presenta una solución a este problema mediante su formulación o definición, la cual permitía determinar si cuatro magnitudes están en proporción, sin importar que tipo de magnitudes sean; conmensurables o inconmensurables. De esta manera, la anterior definición sobre igualdad de razones, fue inmediatamente aceptada; por lo que, uniéndose a la aserción de C. Boyer presente en su libro *Historia de La Matemática* [5], se estaba hablando de una *nueva Teoría de Proporciones*, a través de la cual se permite manipular a las magnitudes inconmensurables para la solución y elaboración de problemas y demostraciones matemáticas.

  Esta novedosa teoría es utilizada por Euclides en el libro V de sus *Elementos*, en donde se encuentra la formulación que Eudoxo presentó. Formulación que en la actualidad es vista con gran sencillez; así, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad = bc$, pero ésta

solo demuestra la genialidad y agudeza de Eudoxo ya que sus resultados causaron, sin lugar a duda, una completa renovación y/o reforma en las matemáticas.
Así, es lógico que Eudoxo sea considerado el matemático más reconocido y brillante de la Época Helénica.

3.2. Sobre Stevin - Cantor

- Gracias a S. Stevin se dió un paso trascendental en la evolución del concepto de número, al incluir al cero (0) y al uno (1), los cuales fueron excluidos desde la antigüedad griega y sólo hasta los trabajos de éste se logró un cambio en esta concepción. Además, como Stevin fue el primero en observar la resta de un número como la adición de un número negativo, sus trabajos establecieron las bases para aceptar a los enteros como números. Por otro lado con las dos últimas definiciones[5] presentadas por Stevin se da pie para indagar sobre las características numéricas de las magnitudes inconmensurables, tratando de desligarlas de su referente geométrico para tratarlas independientemente en operaciones aritméticas. Tal vez fue este trabajo el que promovió la preocupación de indagar en este aspecto, que retomaron varios matemáticos[6] del siglo XIX, y que llegó a su apogeo con G. Cantor y R. Dedekind, quienes gracias a sus estudios y trabajos, los irracionales adquirieron definitivamente el estatus de número u objeto matemático.

- La consolidación de los irracionales como números u objeto matemático, pudo darse gracias a que en el siglo XIX los investigadores matemáticos como Cauchy, Weierstrass, Meray, Dedekind, Cantor, entre otros, vieron la necesidad de fundamentar el análisis sobre bases totalmente aritméticas. Por lo cual se necesitaba desligar a las definiciones y demostraciones del análisis, de todo referente geométrico. En otras palabras, en el siglo XIX se estaba construyendo una teoría matemática rigurosa, estableciendo una rigorización en el análisis.

[5]Definiciones 1.5 y 1.6 presentes en el apartado 1.2 concerniente a Stevin.
[6]Weierstrass, Meray, Kronecker, entre otros.

Es por esto que tanto Cantor como Dedekind (al igual que Weierstrass, Meray, entre otros) se preocuparon por la elaboración de una construcción de números reales, la cual sólo estuviera basada sobre cimientos aritméticos. Logrando así, que los irracionales dejen de ser vistos como *magnitudes inconmensurables*, y ahora obtengan el estatus de *número.*

- La evolución de la simbología matemática alcanzada hasta el siglo XIX, fue un aspecto de gran importancia para elaborar una apropiada construcción de los números reales y en consecuencia de los números irracionales, que era el objetivo fundamental del movimiento de rigorización del análisis, ya que permitió que los procesos y cálculos se elaboraran más rápida y satisfactoriamente. Lo anterior se evidencia en el uso de símbolos para denotar límites, series, sucesiones, cantidades pequeñas (caso para el cual se utiliza la letra griega epsilon (ε)), entre otros.

3.3. Sobre el trabajo de Cantor

- El método usado por G. Cantor para elaborar una construcción de los números reales consiste, a groso modo, en extender el dominio de los ya reconocidos y aceptados números racionales (A), usando para ello un tipo de *sucesiones* llamadas por él, *fundamentales*, las cuales son equivalentes a las sucesiones de Cauchy. Estas sucesiones convergen en un nuevo dominio (B), el cuál cumple con las relaciones de orden y operaciones elementales -tanto entre elementos de este dominio, como entre elementos de éste y de los números racionales- de la misma forma que lo hace los números racionales. Además este nuevo dominio no es extensible, o en otras palabras es completo (lo cual implica contener también a los números racionales). Así, el dominio B corresponde al de los números reales $\mathbb{R}$.

- Identificar y exponer el hecho de que el nuevo dominio B y el dominio de los números racionales son de naturaleza similar, en el sentido en que cumplen con las mismas operaciones elementales y propiedades, y que además tienen una forma de representación en la recta geométrica, permite que al igual que los números racionales a los elementos del dominio B se los reconozca como números.

- Cantor introduce dominios de orden superior al de B no con el propósito de extender el dominio de los números reales, sino para mostrar que este dominio es completo. Para extender los dominios, Cantor empieza definiendo sucesiones fundamentales (equivalentes a las sucesiones de Cauchy) de elementos del dominio A, las cuales pueden converger o no en este mismo dominio. Si no convergen en A son, los que Cantor llama, elementos del dominio B. Ahora bien, toda sucesión de Cauchy de racionales es convergente, pero no necesariamente en $\mathbb{Q}$, éstas tienen un límite en $\mathbb{R}$. Ahora, toda sucesión de Cauchy de números reales converge en $\mathbb{R}$, este conjunto es el que Cantor nombra dominio B. Luego define a los límites de sucesiones de Cauchy sobre B, como los elementos del nuevo dominio C y así sucesivamente hasta definir el dominio L. Cada uno de los dominios entre C y L están compuestos por elementos que podrían ser definidos a partir de elementos de A, en otras palabras estos dominios son equipotentes al dominio B. Así la creación de nuevos dominios de orden superior a B no tiene otro objetivo que el de mostrar que el dominio B no se puede extender, pues los dominios posteriores son equipotentes a este dominio, es decir B, y por lo tanto $\mathbb{R}$, es completo. Por otro lado se debe tener en cuenta que la equivalencia mencionada entre dominios no establece la identidad entre éstos, ni entre los elementos que los componen.

- La construcción de los números reales, y en consecuencia de los números irracionales, no fue el interés central de los trabajos de G. Cantor, ya que como se puede evidenciar, la primera construcción elaborada en 1872 surgió bajo sus estudios en series trigonométricas, puesto que para analizar algunos aspectos de estos estudios, necesitaba un sistema numérico basado únicamente sobre cimientos aritméticos, en otra palabras, necesitaba un sistema numérico libre de referentes geométricos. Nuevamente, la construcción presentada por G. Cantor en 1883, tenía como objeto central la fundamentación de la teoría de conjuntos.

- G. Cantor es claro en la escritura que utiliza, pero su simbología y terminología difiere en detalles a la utilizada actualmente. Por ejemplo cuando se refiere a límites, lo que actualmente se conoce como “tiende a infinito” y se simboliza con una flecha ($\rightarrow$), Cantor lo simboliza, en algunos casos, con el símbolo de igualdad lo cual puede indicar la concepción cantoriana de acoger el infinito en acto, mientras que la flecha ($\rightarrow$) usada actualmente denota más una concepción del límite acercada al infinito potencial. Además, el término que él manejaba para determinar sucesiones (*Reihe*), era el mismo que se utilizaba para series. Por otro lado, en 1872 G. Cantor usó el término *magnitudes numéricas* (*Zahlengrössen*), que en 1883 simplemente lo cambió por término *números*, para determinar a los elementos del dominio que acababa de definir.

Apéndice A

Irracionalidad de Números "Típicos"

El comúnmente llamado *número de Euler* fue estudiado inicialmente por el matemático escocés John Napier, quien introdujo el concepto de logaritmo al cálculo matemático, de hecho las primeras reseñas acerca de esta constante se encuentran en un trabajo de Napier sobre logaritmos publicado en 1618. Aun así, el descubrimiento de la constante es atribuido a Jacob Bernoulli, debido a que en el trabajo de Napier no aparece el valor de la constante.

El uso de la letra e para identificar a esta constante fue utilizada inicialmente por Leonhard Euler en 1727, y fue usada por primera vez en una publicación titulada *Mechanica*, de Euler, en 1736. Así, a pesar de que otros investigadores trataron de denotar a la constante con la letra c, la notación de Euler fue la más común y/o aceptada por lo que se convirtió en la terminología usual; lo que puede ser la razón por la que muchos llaman a e *número de Euler*. Esta constante o número e, es comúnmente representado como número real en diversas formas como fracción continua, serie infinita, producto infinito o como el límite de una sucesión.[1]

La introducción del número e, base de los logaritmos naturales o neperianos, es esencial en el cálculo, debido a que es el único número real que siendo usado como base de una función exponencial hace que la derivada de ésta en cualquier punto coincida

[1]Las anteriores representaciones se pueden observar en: serie infinita en [1, pág. 09]; límite de una sucesión en [19, pág. 11].

con el valor de dicha función en ese punto. En otras palabras la función exponencial $f(x) = e^x$ es la única función no trivial que es su propia derivada, y por lo tanto su propia antiderivada también. Por lo que dicha función suele aparecer en el resultado de ecuaciones diferenciales sencillas.

El número e y por consiguiente la función exponencial están presentes al modelar acontecimientos de la naturaleza, por ejemplo la velocidad de vaciado de un depósito de agua, el movimiento del sistema de amortiguación de un automóvil o la vibración de una construcción ante movimientos sísmicos, crecimiento poblacional, concentración de iones, entre otros. Con lo cual, se evidencia que la aplicabilidad del número e en campos como la biología, la química, la ingeniería, entre otros.

Justamente por lo anterior y por otras razones, el número e, junto con el número π, el 0, el 1 y la unidad imaginaria i, es uno de los números más importantes dentro de las matemáticas; lo que hace sorprendente el hecho de que la identidad de Euler los relacione así: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Además, el número e, al igual que el numero π, es irracional y trascendente, lo que significa que no puede ser obtenido directamente mediante la resolución de una ecuación algebraica (polinómica de coeficientes racionales).

El número π es, al parecer, el número irracional más tratado de toda la historia; su aproximación surgió al tratar de encontrar la razón de cualquier circunferencia a su diámetro. Esta constante ha sido conocida durante tanto tiempo que es casi imposible afirmar cual fue su primera aproximación y por quien fue hecha. Su referencia más primigenia data del año 1700 a. C en uno de los textos matemáticos más antiguos, el papiro de Rhind, que muestra al escriba Ahmés cotejando la evaluación del área de un círculo inscrito en un cuadrado. Otra reseña de su valor viene dada por la siguiente cita bíblica: "Hizo el Mar de metal fundido que tenía diez codos de borde a borde; era enteramente redondo y de cinco codos de altura; y ceñido todo alrededor de un cordón de treinta codos" (I Reyes 7,23). Con lo cual la Biblia le asigna a π el valor de 3.

Luego en Babilonia $3\left(\frac{1}{8}\right)$; en Egipto $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$; los Siddhantas 3,1416; en Brahmagupta 3,162277; y en China 3,1724.

Sin embargo, en Grecia es donde la exacta relación entre el diámetro y el perímetro de una circunferencia comenzó a consolidarse como uno de los más interesantes enigmas a resolver. Antiphon, inscribe en el círculo un cuadrado, luego un octógono e imagina doblar el número de lados hasta el momento en que el polígono obtenido coincida prácticamente con el círculo. Pero el primer cálculo teórico parece haber sido llevado a cabo por Arquímedes, obteniendo que el valor de π está comprendido entre $\frac{223}{71} = 3,14084$ y $\frac{22}{7} = 3,14285$. Posteriormente, el cálculo infinitlesimal proporcionó fórmulas que, al aportar métodos de cálculo nuevos y mucho más potentes, desvió a π de sus orígenes geométricos y aclaró el papel fundamental que juega en todo el análisis matemático. Viete obtuvo, a finales del siglo XVI, la primer fórmula de π por medio de un producto infinito convergente que no hace figurar mas que a los números 1 y 2. Con esto empezaron a surgir fórmulas matemáticas para π. Una de las primeras fue la de Wallis: $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2}$ y una de las mas conocidas es *la fórmula de Leibniz*: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ la cual es un resultado para $x = 1$ de la fórmula del arco tangente[2] desarrollada en 1670 por James Gregory.

Así, a lo largo de la historia han aparecido varias fórmulas para aproximar el valor de π, en fracciones continuas, series, sucesiones y productos infinitos, entre otros.[3] Hasta nuestros días la competencia por aproximar este valor ha traspasado los límites de la razón, por ejemplo en 2004 Yasumasa Kanada y Daisuke Takahashi calcularon 1.351.100.000.000 decimales de π, ayudados por supuesto por un potente computador. Sin embargo, la precisión de π no es necesaria para exigencias prácticas, con cincuenta

[2] $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$

[3] Las anteriores representaciones se pueden observar en: fracción continua en [9, pág. 91]; serie en [9, pág. 92]; secesión en [19, pág. 313]; producto infinito en [9, pág. 91].

decimales se podría describir la curvatura del Universo con un error más pequeño que el tamaño de un protón.[4]

Al parecer el motivo de esta búsqueda por parte de matemáticos de todos los tiempos fue: o la tendencia vanidosa de demostrar su tenacidad en el cálculo, o el esfuerzo ingenuo de "agarrar por los cuernos", con cálculos directos, el problema de la determinación de la naturaleza del número π. Mostrando con esto, que el hombre no se resigna aún a aceptar cosas que no pueda llegar a comprender, como el infinito.

Por otro lado, desde el siglo XVII esta relación fue identificada con el nombre "Pi" (de periphereia, nombre que los griegos daban al perímetro de un círculo). Oughtred en 1647 uso el símbolo $\dfrac{d}{\pi}$ para la razón del diámetro de un círculo a su circunferencia. David Gregory en 1697 uso $\dfrac{\pi}{r}$ para la razón de la circunferencia de un círculo a su radio. El primer uso de π como la razón de una circunferencia a su diámetro, se debe al matemático galés William Jones en 1706, quien además afirmó "$3,14159 = \pi$". Euler adoptó el símbolo π en 1737 y rápidamente se convirtió en una notación estándar.
En la actualidad, este número es utilizado en numerosas fórmulas, principios y leyes de diferentes ramas de la ciencia, como en la matemática, física y química. Además π es tan reconocido y famoso que el 14 de marzo es denominado por algunos como el día pi.

Así, como se puede evidenciar, el número e y el número π, son los números irracionales y trascendentes más reconocidos[5] dentro y fuera de las matemáticas. Por tal motivo, estos números son frecuentemente usados en diversos cursos académicos como: cálculo, física, química, entre otros, en los distintos niveles educativos. Sin embargo, son pocas las personas que conocen y enseñan la demostración de la irracionalidad de mencionados números.

[4]Bailey, David H., Borwein, Peter B., and Borwein, Jonathan M. (January 1997). "The Quest for Pi". Mathematical Intelligencer (1): 50-57. Donde el tamaño de un protón hace referencia a las dimensiones de éste.

[5]Tal vez, el número π es aún más reconocido que otros números irracionales debido a la facilidad de su origen práctico: la razón entre la circunferencia de un círculo y su diámetro.

A.1. Irracionalidad de e

Teorema A.1. *e es irracional.*

Demostración:

Para todo $n \in \mathbb{N}$, se define,

$$e = e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + R_n, \ donde \ 0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Supóngase que e es racional, eso quiere decir que e es de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros positivos ($a, b \in \mathbb{Z}^+$). Así,

$$\frac{a}{b} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + R_n.$$

Tomemos ahora $n > b$ y también $n > 3$, de modo que

$$\frac{n!a}{b} = n! + n! + \frac{n!}{2!} + ... + \frac{n!}{n!} + n!R_n.$$

En la ecuación anterior se puede observar que todos los términos, a excepción de $n!R_n$, son enteros, en particular el término de la parte izquierda de la ecuación es entero ya que $n > b$. Por tanto, en aras de la igualdad, $n!R_n$ también debe ser entero. Pero

$$0 < R_n < \frac{3}{(n+1)!},$$

de modo que

$$0 < n!R_n < n!\frac{3}{(n+1)!},$$

así

$$0 < n!R_n < \frac{3}{(n+1)},$$

con lo cual

$$0 < n!R_n < \frac{3}{(n+1)} < \frac{3}{4} < 1, \text{ puesto que } n > 3,$$

resultado que es imposible para un entero, en este caso $n!R_n$, por tanto $n!R_n$ no puede ser entero, hecho que surgió de suponer que e es racional. Lo cual significa que e es irracional. ■

A.2. Irracionalidad de π

Deben hacerse dos observaciones antes de la demostración. La primera se refiere a la función

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!},$$

o lo que es lo mismo

$$f_n(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!}\ (x^n(1-x)^n),$$

la cual, evidentemente satisface,

$$0 < f_n(x) < \frac{1}{n!} \text{ para } 0 < x < 1.$$

Se puede observar una propiedad muy importante de la función f_n al considerar la expresión que se obtiene en el desarrollo de $x^n(1-x)^n$. La menor potencia de x que aparece será n, la cual se obtiene al multiplicar x^n por el primer término del desarrollo de $(1-x)^n$, o sea 1; y la mayor será $2n$, que resulta de multiplicar x^n por el último término del desarrollo de $(1-x)^n$, o sea x^n. Así pues, f_n puede escribirse de la forma

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{i=n}^{2n} c_i x^i,$$

donde los números c_i son enteros y representan los respectivos coeficientes de x en el desarrollo de $(1-x)^n$. De esta expresión es evidente que

$$f_n^{(k)}(0) = 0 \text{ si } k < n \text{ ó } k > 2n.$$

Además,

$$f_n^{(n)}(x) = \frac{1}{n!}[n!c_n + \text{términos en } x]$$

$$
\begin{aligned}
f_n^{(n+1)}(x) &= \frac{1}{n!}[(n+1)!c_{n+1} + \text{términos en } x] \\
&. \\
&. \\
&. \\
f_n^{(2n)}(x) &= \frac{1}{n!}[(2n)!c_{2n}].
\end{aligned}
$$

Esto significa que

$$
\begin{aligned}
f_n^{(n)}(0) &= c_n \\
f_n^{(n+1)}(0) &= (n+1)c_{n+1} \\
&. \\
&. \\
&. \\
f_n^{(2n)}(0) &= (2n)(2n-1)...(n+1)c_{2n},
\end{aligned}
$$

donde los números de la derecha son todos enteros. Así pues,

$$f_n^{(k)}(0) \text{ es un } \textit{entero} \text{ para todo } k.$$

La relación

$$f_n(x) = f_n(1-x),$$

indica que

$$f_n^{(k)}(x) = (-1)^k f_n^{(k)}(1-x);$$

por lo tanto,

$$f_n^{(k)}(1) \text{ es también un } \textit{entero} \text{ para todo } k.$$

La demostración de que π es irracional exige una observación más: si a es un número cualquiera($a \in \mathbb{Z}^{+}$), y $\varepsilon > 0$, entonces para n suficientemente grande se tiene

$$\frac{a^n}{n!} < \epsilon.$$

Para demostrar esto, obsérvese que si $n \geqslant 2a$ entonces

$$n + 1 > n \geqslant 2a.$$

Así,

$$n + 1 > 2a.$$

Por propiedades de números enteros positivos se tiene

$$\frac{a}{n+1} < \frac{1}{2}.$$

Multiplicando ambos lados por $\dfrac{a^n}{n!}$, se obtiene

$$\frac{a}{n+1}.\frac{a^n}{n!} < \frac{1}{2}.\frac{a^n}{n!}.$$

O sea

$$\frac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{2}.\frac{a^n}{n!}.$$

Sea ahora n_0 un número natural cualquiera con $n_0 \geqslant 2a$. De igual forma por propiedades de números enteros positivos se tiene

$$n_0 + 2 > n_0 \geqslant 2a.$$

Así

$$n_0 + 2 > 2a,$$

en consecuencia

$$\frac{a}{n_0+2} < \frac{1}{2}.$$

Multiplicando ambos lados por $\dfrac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}$ se obtiene

$$\frac{a}{n_0+2}.\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2}.\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!},$$

entonces

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2}.\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}.$$

Dado que $\dfrac{a^{n+1}}{(n+1)!} < \dfrac{1}{2}.\dfrac{a^n}{n!}$, se obtiene

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2}.\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.$$

Es decir

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2^2}.\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.$$

Entonces, cualquiera que sea el valor de $\dfrac{a^{n_0}}{(n_0)!}$ los valores sucesivos satisfacen

$$\frac{a^{(n_0+1)}}{(n_0+1)!} < \frac{1}{2}.\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

$$\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!} < \frac{1}{2^2}.\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}$$

$$.$$

$$.$$

$$.$$

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k}.\frac{a^{n_0}}{(n_0)!}.$$

Ahora si k es tan grande que

$$\frac{a^{n_0}}{(n_0)!\varepsilon} < 2^k.$$

Lo que es lo mismo

$$\frac{1}{2^k}\frac{a^{n_0}}{(n_0)!} < \varepsilon,$$

entonces

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \frac{1}{2^k}.\frac{a^{n_0}}{(n_0)!} < \varepsilon.$$

Así,

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} < \varepsilon.$$

Que era lo que se quería demostrar. Después de haber hecho estas observaciones, se puede realizar la demostración de la irracionalidad de π.

Teorema A.2. *El número π es irracional.*

Demostración:

Si el número π es irracional ; en efecto π^2 es irracional y viceversa.
Supóngase que π^2 fuese racional de modo que

$$\pi^2 = \frac{a}{b}$$

donde $a, b \in \mathbb{Z}^+$. Sea

$$(1)G(x) = b^n[\pi^{2n} f_n(x) - \pi^{2n-2} f_n''(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - ... + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)].$$

Donde cada uno de los factores de $f(x)$ y sus derivadas pares, son de la forma

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n(\pi^2)^{(n-k)} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = a^{n-k}b^k$$

Cada uno de estos factores $(a^{n-k}b^k)$ es entero, ya que es el producto de dos potencias de enteros[6]. Dado que $f_n^{(k)}(0)$ y $f_n^{(k)}(1)$ son enteros, y los factores en (1) de éstas son enteros, se tiene que $G(0)$ y $G(1)$ son enteros, puesto que son la suma y/o resta del producto de enteros.

Al derivar dos veces la función (1) se obtiene

$$(2)G''(x) = b^n[\pi^{2n} f_n''(x) - \pi^{2n-2} f_n^4(x) + ... + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)].$$

[6]Donde $k < n$ o $k > 2n$, si se da la segunda opción la derivada de $f(x)$ es cero.

Donde el último término$((-1)^n f_n^{(2n+2)}(x))$, es cero, puesto que $f_n^{(2n)}(x)$ es una constante, así la derivada de ésta $(f_n^{(2n+1))}(x))$ es cero, y por consiguiente las derivadas de ésta última son cero.

Si se multiplica (1) por π y a esto le sumamos (2) se obtiene:

$$(3)G''(x) + \pi^2 G(x) = b^n \pi^{2n+2} f_n(x) = \pi^2 a^n f_n(x).$$

Sea ahora

$$H(x) = G'(x)sen(\pi x) - \pi G(x)cos(\pi x).$$

Entonces

$$H'(x) = \pi G'(x)cos(\pi x) + G''(x)sen(\pi x) - \pi G'(x)cos(\pi x) + \pi^2 G(x)sen(\pi x).$$

Simplificando y factorizando se tiene

$$H(x) = [G''(x) + \pi^2 G(x)]sen(\pi x).$$

Según (3) se obtiene

$$H(x) = \pi^2 a^n f_n(x)sen(\pi x).$$

Según el segundo teorema fundamental del cálculo infinitesimal,

$$\int_0^1 H'(x)dx = H(1) - H(0),$$

o sea

$$\begin{aligned}\int_0^1 H'(x) &= \pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x)sen(\pi x)dx \\ &= H(1) - H(0) \\ &= G'(1)sen\pi - \pi G(1)cos\pi - G'(0)sen0 + \pi G(0)cos0 \\ &= \pi[G(1) + G(0)].\end{aligned}$$

Así pues, $\pi^2 \int_0^1 a^n f_n(x)sen(\pi x)$ es entero.

Por otra parte, $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}$ para $0 < x < 1$, de modo que

$$0 < \pi a^n f_n(x) sen(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} \text{ para } 0 < x < 1.$$

En consecuencia,

$$0 < \pi \in_0^1 a^n f_n(x) sen(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!}.$$

Este razonamiento ha sido independiente por completo del valor de n. Ahora bien, si n es suficientemente grande, entonces

$$0 < \pi \int_0^1 a^n f_n(x) sen(\pi x) < \frac{\pi a^n}{n!} < 1.$$

Pero esto es absurdo, puesto que la integral es un entero, y no existe ningún entero entre 0 y 1. Así pues, la suposición original debe haber sido incorrecta: π^2 es irracional.■

Nota: Como lo menciona Spivak en [18], es importante señalar el aspecto místico que se maneja dentro de la demostración de que π es irracional. Puesto que dicho número es usado dentro de la misma demostración, sin siquiera haber dado de antemano una definición de éste, hecho que por el contrario si ocurrió en la demostración de la irracionalidad del número e. Además, para el desarrollo de esta última demostración aparecen consideraciones que no tienen una explicación más inmediata que la conveniencia y que como se dijo anteriormente, surgen de forma misteriosa.

Bibliografía

[1] Apóstol, T. M. *Mathematical Análisis.* Versión española por Dr. José Pla Cabrera. Editorial Reverté, S. A. Segunda Edición. Barcelona, 2001.

[2] Bell, E. T. *Historia de las matemáticas.* Traducción de R. Ortiz. Fondo de Cultura Económica. México, 2002.

[3] Bergé, A. y Sessa, C. *Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica.* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Vol. 6, número 3, noviembre, pp 163 - 197. México, 2003.

[4] Boniface, J. *Les constructions des nombres réelles dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse.* Ellipses. París, 2002.

[5] Boyer, C. *Historia de La Matemática.* Alianza Editorial. Madrid, 1987.

[6] Cantor, G. *Fundamentos para una teoría general de conjuntos. Escritos y correspondencia selecta.* Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. Editorial Crítica, Barcelona, 2006.

[7] Campos, A. *Introducción a la Historia y a la Filosofía de la Matemática. Volumen 1. Lógica y Geometría Griegas.* Universidad Nacional de Colombia, Departamento de Matemáticas y Estadística. Bogotá, 2006.

[8] Collete, J. P. *Histiria de las Matemáticas.* Siglo XXI Editores, México, 1986.

[9] Eves, H. *An introduction to the history of mathematics.* Hult, Rinehart and Winston, Inc. USA, 1969. Tercera Edición.

[10] Ferreirós, J. *El nacimiento de la teoría de conjuntos, 1854-1908.* Ediciones de la Universidad Autónoma de Madrid. Madrid, 1991.

[11] Ferreirós, J. (ed.) *Richard Dedekind: ¿Qué son y para qué sirven los números?* Traducción comentada e introducción de José Ferreirós. Alianza Editorial. Madrid, 1998.

[12] Goffman, C. *Completeness of the real numbers.* Mathematics Magazine, Vol 47, número 1, enero, p. 1-8. 1974.

[13] Grattan-Guinness. *Del cálculo a la teoría de conjuntos 1630-1910. Una introducción histórica.* Alianza Editorial. Madrid, 1982.

[14] Klein, J. *Geek mathematical thought and the origin of algebra.* Translated by Eva Brann. Dover Publications, Inc. New York, 1992.

[15] Kline, M. *El Pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial. Madrid, 1992. Tomos I, II y III.

[16] López, L. E. *Los números reales y la noción de completez en Cantor, Dedekind y Hilbert: un análisis histórico -epistemológico.* Tesis de pregrado, Universidad del Valle. Cali, 2008.

[17] Recalde, L. *Lecciones de historia de las matemáticas.* En prensa, Universidad del Valle. Cali, 2005.

[18] Spivak, M. *Calculus.* Versión española por Dr. Bartolomé Frontra Marqués. Editorial Reverté, S. A. Volumen 2. Barcelona 1975.

[19] Takeuchi, Y. *Sucesiones y series.* Editorial Limusa, S. A. México, 1983. Tomos I y II.