ESTUDIO HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL:

CAUCHY - RIEMANN - LEBESGUE

Gabriela Maricel Chamorro Chamorro

Mónica Andrea Obando López

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2009

ESTUDIO HISTÓRICO - EPISTEMOLÓGICO DEL CONCEPTO DE INTEGRAL:

CAUCHY - RIEMANN - LEBESGUE

Gabriela Maricel Chamorro Chamorro

Mónica Andrea Obando López

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Andrés Chaves
Director

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO

2009

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Agosto de 2009

Tabla de Contenido

Resumen

A lo largo de este trabajo, se va a considerar las circunstancias históricas en las que se desarrollaron los trabajos de figuras importantes como: Cauchy, Riemann y Lebesgue; discutiendo con un cierto detalle sus contribuciones a la evolución del concepto de integral, que tuvo lugar hacia los siglos XIX y XX.

Aunque algunas de dichas contribuciones se formularon en el contexto del espacio n-dimensional, sólo se va a remitir al estudio del caso especial de la integral de funciones definidas sobre subconjuntos de la recta real. Inicialmente, se presentará la noción de integral dada por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy, alrededor de la idea de función continua, luego, como extensión de la noción de integral de Cauchy, se considera la concepción de integral establecida por el matemático alemán Bernhard Riemann, quien instauró una definición de integral que acoge funciones discontinuas. Finalmente y puesto que la integral de Riemann llevó a ciertas limitaciones, se introduce la noción de integral dada por el matemático frances Henri Lebesgue, que constituye una salida a dichos problemas.

Además, para justificar el desarrollo del concepto de integral promovido por estos matemáticos, se presentarán ejemplos de funciones: integrable en el sentido de Riemann y no de Cauchy, integrable en el sentido de Lebesgue y no de Riemann y otra no Lebesgue integrable.

Introducción

Durante los siglos XVII y XVIII los matemáticos se esforzaron por caracterizar dos conceptos íntimamente relacionados: el de función y el de integral, cuya presencia dentro de las matemáticas, demandaba un tratamiento especial y una categoría de objeto matemático.

Específicamente, fue con Euler y Cauchy donde se dieron los intentos más importantes de caracterizar el concepto de función como un objeto matemático con su respectiva representación simbólica y significado. Euler, al considerar el concepto de función como una dependencia cualquiera de una cantidad respecto a las cantidades variables, fue conducido a la clasificación de funciones en continuas y discontinuas, no obstante, en la búsqueda por obtener el mayor rigor posible, Cauchy define conceptos como: cantidad, cantidad variable y límite, con lo cual amplía la definición de función dada por Euler y, con el fin de diferenciar lo continuo de lo discontinuo, logra dar una salida al problema de la caracterización de estas funciones, sin embargo, el punto central de su análisis es el estudio de las funciones continuas. Por su parte, a quien de verdad inquietó el tratamiento de las funciones discontinuas fue a Fourier. Él, al encaminar sus ideas a tales funciones, y puesto que cualquier evolución en el concepto de función lo era también en el concepto de integral e inversamente, tuvo que reconsiderar el significado de las integrales. De esta manera, Fourier debía considerar si se podía establecer la integral como área, cuando se admite funciones con cada vez mayor grado de discontinuidad.

Es así, como en la primera mitad del siglo XIX y en busca de dar una respuesta a lo planteado por Fourier, Cauchy introduce una primera definición formal de integral definida, gracias a sus trabajos sobre límite y función continua. No obstante, Dirichlet extendió la integrabilidad de Cauchy para funciones con infinitas discontinuidades y aunque, pensó que era probable la extensión de la definición de integral no llevó a cabo ningún desarrollo, pero al demostrar que su función característica de los racionales no era integrable en el sentido de Cauchy, otorgó una respuesta negativa a la cuestión expuesta por Fourier.

Ahora bien, hacia finales de este siglo, la integración fue formalizada por Riemann, quien desarrolló una teoría de integración que soportaba funciones altamente discontinuas. Pero a pesar de que su definición acogía algunas funciones con un conjunto denso de discontinuidades, dicha teoría perdió generalidad, cuando se consideraron funciones como la de Dirichlet, para las cuales su definición no se aplica. De esta manera, su noción de integral tenía ciertas limitaciones y esto es justamente el punto de partida de Lebesgue, quien a principios del siglo XX presenta una extensión de la noción de integral basada en la teoría de la medida.

Retomando los trabajos de Jordan y Borel, Lebesgue elaboró su propia teoría de la medida, a partir de la cual desarrolló el concepto moderno de integral. Su definición de integral, hace posible calcular integrales para una clase más amplia de funciones, como lo es la función de Dirichlet.

En términos generales, este trabajo pretende describir parte del proceso histórico del concepto de integral, partiendo de la definición de integral de Cauchy hasta llegar a la concepción de integral de Lebesgue, pasando por la concepción de Riemann. Este recorrido histórico, se desarrolla en cuatro capítulos, que se detallan a continuación:

En el primer capítulo se describen los intentos de poner sobre bases sólidas el cálculo integral, destacando principalmente el trabajo de Cauchy, quien introduce un concepto de integral que acoge funciones continuas y que se puede extender a algunas funciones con infinitas discontinuidades, en intervalos acotados. En el segundo capítulo se muestra, la manera en que Riemann, redefinió la integral dada por Cauchy y la extendió a la integrabilidad de algunas funciones con un conjunto denso de discontinuidades. En el capítulo tres, se presenta la Integral de Lebesgue, que extiende el concepto de integración a una clase mucho más amplia de funciones, así como también extiende los posibles dominios en las cuales estas integrales pueden ser definidas. Finalmente, en el cuarto capítulo se presenta, a manera de conclusiones y/o comentarios, aspectos relevantes de lo estudiado en los tres capítulos anteriores, se plantea en primer lugar unos comentarios de corte histórico y posteriormente otros de tipo técnico.

Es importante señalar, que la revisión del proceso histórico del concepto de integral durante los siglos XIX y XX, admite un estudio tan profundo como se quiera. De igual forma, como las discusiones se centran en la evolución del concepto de integral dentro del contexto de matemáticos importantes como: Cauchy, Riemann y Lebesgue, algunos aportes de otros matemáticos se mencionan superficialmente o no se tratan. [1]

[1] Si se desea un estudio más detallado de dichos autores, se pueden consultar los textos [8] y [12].

Capítulo 1

Integración de Cauchy

Durante el siglo XVII, las matemáticas empiezan a sufrir un proceso de algebrización, debido a la preocupación de manejar conceptos matemáticos libres de referentes geométricos, hecho que da apertura a la formación de un nuevo campo en las matemáticas: el análisis. Cuando Descartes empieza a establecer un cambio cualitativo en la manera de abordar los problemas matemáticos, lo algebraico se convirtió en un medio eficaz para descartar los métodos geométricos.

La incorporación de métodos analíticos, constituye un paso fundamental en la formación del análisis como una disciplina independiente de las matemáticas, dentro del cual Isaac Newton y Gottfried Von Leibniz intentaron dar a sus razonamientos explicaciones rigurosas y desarrollaron algoritmos que involucraban procesos infinitos. Ahora bien, con el surgimiento del cálculo infinitesimal se buscaba establecer el estatuto de una nueva operación ligada a los procesos infinitos, la convergencia y además, se trataba de caracterizar un concepto en proceso de surgimiento, el concepto de función, que aparece junto a la noción de integral.

Tanto Newton como Leibniz identificaron la relación entre diferenciación e integración y a lo largo del siglo XVIII se entendían la integración y la derivación como procesos inversos. Por tanto, el problema de la integración era el de hallar una ecuación que representara la solución de una ecuación diferencial. Luego, con la incorporación de la palabra "función",[1] y debido al tratamiento de funciones cada vez más generales dentro del análisis, resulto necesario cambiar la interpretación de integral, como área, que traía como consecuencia el regreso a un punto de vista orientado a lo geométrico.

Propiamente, el establecimiento del concepto de función como objeto matemático, con su simbología y significado, se da a partir de los trabajos de Euler y específicamente con los de Cauchy. Así, Euler en 1748, define función de la siguiente manera:

> Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta, de cualquier manera que sea, de esta misma cantidad y de números o de cantidades constantes. ([10], pág. 11).

A partir de la definición de Euler, el problema de la integral consiste en determinar una función primitiva de una función dada y posteriormente, esta concepción de función, condujo a Euler a una clasificación de funciones: por un lado estaban la funciones continuas, es decir, aquellas determinadas por una única representación analítica y por otro lado estaban las funciones discontinuas que corresponden a aquellas con representación precisa de varias expresiones analíticas y aquellas que dan cuenta de curvas construidas de cualquier manera. Es decir, para Euler la continuidad de una función no depende de la naturaleza de la curva que representa, sino del hecho que se obtenga a partir de una única expresión analítica.[2]

De otro lado, el francés Joseph Fourier amplia la noción de función y recalca que este concepto no necesariamente debe estar asociado a la idea de expresión analítica y es así como en 1808, presenta la caracterización de funciones arbitrarias:[3]

[1]La palabra función se debe a Leibniz, quien también introdujo el símbolo $\int$ abreviando la palabra "summa".

[2]Muchas de las funciones definidas a trozos, que en la actualidad se aceptan como continuas, no lo serán bajo el punto de vista de Euler.

[3]Entiéndase por función arbitraria, como funciones con cada vez mayor grado de discontinuidad.

> En general, la función $f(x)$ representa una sucesión de valores u ordenadas cada una de las cuales es arbitraria. Como la abscisa x recibe una infinidad de valores, hay un número igual de ordenadas $f(x)$ y todas ellas tienen valores numéricos concretos, ya sean positivos, negativo o nulos.
> No suponemos que estas ordenadas estén sujetas a una ley común a todas ellas; se suceden unas a otras de una manera arbitraria, y cada una de ellas viene dada como si fuera una cantidad aislada. ([4], pág. 199).

Al aventurarse más allá del dominio de las funciones continuas, Fourier, también tuvo que reconsiderar el significado de las integrales. En este sentido, el problema de la integral, ya no era caracterizarlo con base en antiderivadas, si no el de definirlas cuando $f(x)$ es arbitraria. En consecuencia Fourier, tuvo que recurrir a una interpretación geométrica: las integrales deben ser consideradas como áreas. Como para cada x existe una ordenada $f(x)$, estas ordenadas determinan una región del plano, Fourier nunca dudó de que esta región tuviera un área definida. De esta manera, dejó planteado sin proponérselo un problema matemático de gran importancia:

¿Cómo se puede definir la integral de una función arbitraria, como área, cuando x varía en un intervalo?.

En la idea de dar una primera respuesta a dicho problema matemático, uno de los aportes más importantes dentro de la fundamentación del cálculo integral, fue precisamente el establecido, hacia la primera mitad del siglo XIX, por el matemático francés Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857), al introducir una primera definición formal de la integral definida.

En su búsqueda por obtener el mayor rigor posible, Cauchy define conceptos como: cantidad, cantidad variable y límite. De acuerdo a éstos, Cauchy en 1821 amplía la definición de función de Euler, de la siguiente manera:

> Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable. ([10], pág. 19).

Después de definir función, es primordial para Cauchy caracterizar las funciones continuas, para ello incorpora la siguiente definición:

> La función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función continua de esta variable si, para cada valor de x entre esos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+a) - f(x)$ decrece indefinidamente con a. ([10], pág. 21).

Esta definición es independiente de la manera en que venga representada $f(x)$ mediante una o varias ecuaciones, por lo tanto es compatible con la concepción de Fourier de una función como una sucesión de ordenadas. Así, para Cauchy es de gran importancia esta definición, a tal punto que sus desarrollos tienen que ver con las funciones continuas.

Cauchy, procede a presentar la noción de integral definida en base al concepto de función continua, con la cual se plantea una relación entre derivación e integración, aunque ya Newton y Leibniz habían evidenciado esta relación inversa. Es así, como en la idea de fundamentar el análisis sobre bases conceptuales firmes, presenta una demostración propiamente analítica de lo que hoy se denomina el teorema fundamental del cálculo, que constituye el inicio de la construcción de los criterios de rigor del análisis.

> **Teorema:** Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea F una función tal que $F'(x) = f(x)$, para todo x en $[a, b]$. Entonces, $F(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$.

Ahora bien, la cuestión para Fourier, era determinar si se podía extender la definición de integral para funciones con cada vez mayor grado de discontinuidad y en busca de dar una respuesta a estas observaciones, Cauchy en 1823, establece una noción de integral. Su manera de introducir la integral definida venía a demostrar que su existencia no dependía de la existencia o no de una ecuación que defina a la función f, e implicaba además que $\int_a^b f(x)dx$ tiene un valor determinado para cualquier función arbitraria, con tal de que dicha función sea continua en el sentido que él daba. De hecho, la definición de Cauchy se puede extender al caso de una función acotada con un número finito de puntos de discontinuidad en un intervalo.

1.1. Integral de Cauchy

Para establecer la definición de Integral de Cauchy es necesario plantear algunas definiciones.[4]

Definición 1.1. *Sea $I = [a, b]$ un intervalo cerrado y acotado de $\mathbb{R}$, entonces se llama partición de I a todo conjunto finito ordenado $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ de puntos en I tales que*

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Los puntos de la partición P dividen al intervalo I en sub-intervalos de la forma:

$$[a, x_1], \ldots, [x_{i-1}, x_i], \ldots, [x_{n-1}, b].$$

Ejemplo 1. Dado un intervalo $I = [a, b]$, los números reales dados por la fórmula

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i$$

para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, constituyen una partición de I que divide a este intervalo en n partes iguales.

[4] Definiciones que se presentan en terminología y notación moderna.

Definición 1.2. *Sea P una partición del intervalo $I = [a, b]$, la diferencia máxima entre dos puntos consecutivos cualesquiera de la partición, se llama* ***norma de la partición*** *y se denota por $\|P\|$, es decir*

$$\|P\| = max\{x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}.$$

Cauchy define la integral $\int_a^b f(x)dx$ de la siguiente manera:

Definición 1.3 (Integral de Cauchy). *Sea f continua en un intervalo cerrado*[5] *y acotado $[a, b]$. Considérese una partición de este intervalo*

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$$

y la suma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

La integral de Cauchy para f en el intervalo $[a, b]$ será:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} S.$$

Obsérvese que en la definición de integral de Cauchy se presenta la restricción de que f sea continua, sin embargo bajo esta definición se pueden acoger funciones acotadas con un número finito de puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, b]$.

[5] Cauchy habla indistintamente de intervalos sin diferenciar si se acoge o no, los extremos de éstos.

1.2. Ejemplos

1.2.1. Funciones Cauchy Integrables

Funciones Cauchy Integrables con Finitas discontinuidades

Ejemplo 2. Calcular la integral $\int_0^1 f(x)dx$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [0,1), \\ 0, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición del intervalo $[0,1]$. La suma de Cauchy correspondiente es

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= f(x_o)(x_1 - x_o) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}(x_1 - x_o) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1) + \ldots + \frac{1}{2}(x_n - x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{2}[(x_1 - x_o) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_n - x_{n-1})] \\ &= \frac{1}{2}[x_1 - x_o + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}] \\ &= \frac{1}{2}[x_n - x_o] \\ &= \frac{1}{2}[1 - 0] \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} \lim_{\|P\| \to 0} S &= \lim_{\|P\| \to 0} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

por tanto

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Geométricamente la suma i-ésima de Cauchy se puede ilustrar, como sigue:

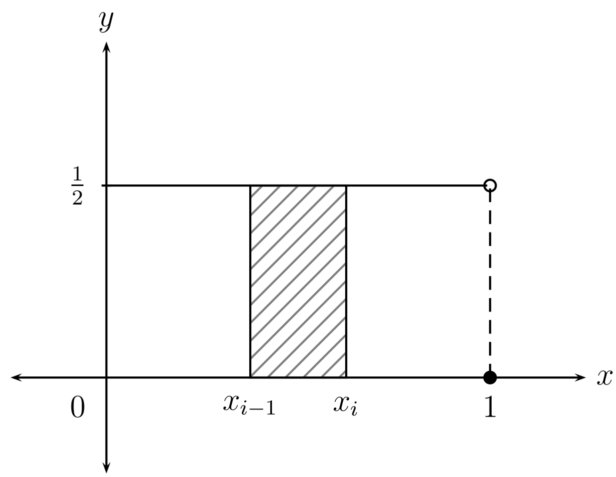

Figura 1.1: f

Cauchy inicia con una partición cualquiera del intervalo I, de la cual elabora la construcción de los rectángulos con base $(x_i - x_{i-1})$ y altura $f(x_{i-1})$ y puesto que en el ejemplo (función f) el punto de discontinuidad en ningún momento va a ser un extremo izquierdo de los sub-intervalos de la partición, las sumas de Cauchy no se afectan y la integral surge por definición.

Esta afirmación permite concluir que

$$\int_{[0,1]} f(x)dx = \int_{[0,1)} f(x)dx.$$

Ejemplo 3. Calcular la integral $\int_0^1 g(x)dx$, si

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

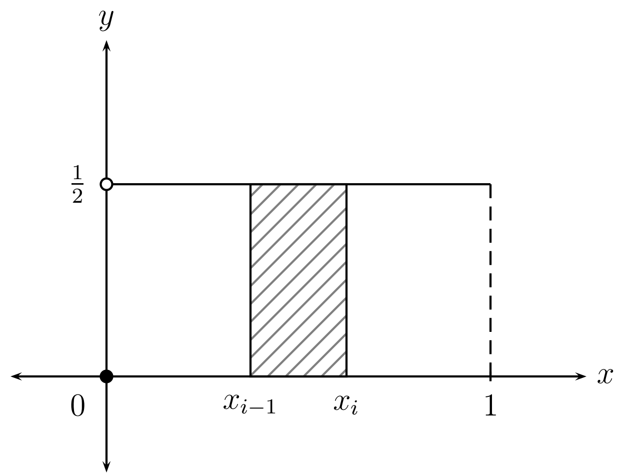

Figura 1.2: g

El punto de discontinuidad de g se presenta en el extremo izquierdo del dominio. Si se considera cualquier partición $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ del intervalo $[0, 1]$, entonces el punto de discontinuidad coincide con un extremo izquierdo, en particular coincide con x_0. Así, la suma de Cauchy llega a ser

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &= g(0)(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
\lim_{\|P\|\to 0} S &= \lim_{\|P\|\to 0}\left(g(0)(x_1 - x_0) + \sum_{i=2}^{n} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\right)\\
&= \lim_{\|P\|\to 0} g(0)(x_1 - x_0) + \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=2}^{n} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\right)
\end{aligned}$$

ahora, como $\|P\| \longrightarrow 0$, entonces $(x_1 - x_0) \longrightarrow 0$ y por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0} g(0)(x_1 - x_0) = 0$$

finalmente

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g(x)dx &= \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=2}^{n} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\right)\\
&= \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n} g(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})\right)
\end{aligned}$$

que es la misma suma de Cauchy. Luego

$$\int_0^1 g(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Esto significa que aunque el punto de discontinuidad coincida con un extremo izquierdo no afecta la suma de Cauchy. En otros términos

$$\int\limits_{[0,1]} g(x)dx = \int\limits_{(0,1]} g(x)dx.$$

Se ha mostrado ejemplos de funciones Cauchy integrables, donde el punto de discontinuidad se presenta en los extremos del dominio de las funciones, sin embargo, si el punto de discontinuidad no está ubicado en algún extremo del intervalo de definición, también se satisface la integrabilidad de Cauchy. Este es el caso por ejemplo, de calcular la integral $\int_0^1 h(x)dx$ de la función definida como sigue.

Ejemplo 4.

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \neq 1/2, \\ \frac{1}{4}, & \text{si } x = 1/2. \end{cases}$$

La representación gráfica de h sería

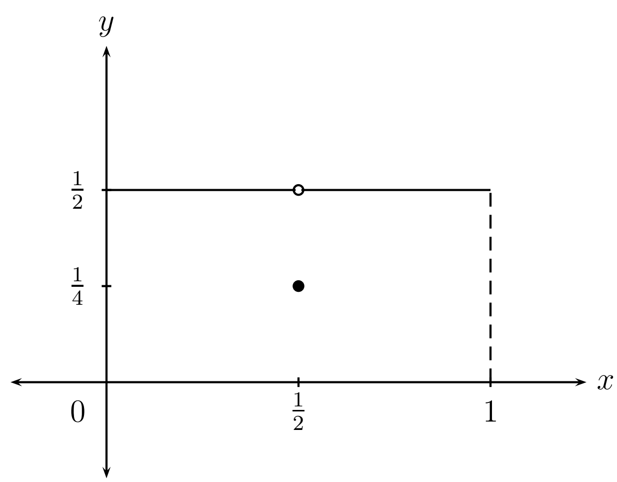

Figura 1.3: h

Sea $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición del intervalo $I = [0, 1]$.

Considérese el intervalo $[0, 1] = [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1]$ y sean

$$P' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1}, x'_n\},$$
$$P'' = \{x''_0, x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n-1}, x''_n\}$$

particiones de los sub-intervalos $[0, \frac{1}{2}]$ y $[\frac{1}{2}, 1]$ respectivamente, tales que $P = P' \cup P''$.

Para el sub-intervalo $[0, \frac{1}{2}]$ se tiene que el punto de discontinuidad coincide con un extremo derecho del dominio y por tanto, como se mencionó en el ejemplo 2, las sumas de Cauchy para h en dicho sub-intervalo no se afectan. Así,

$$\int_{[0,\frac{1}{2}]} h(x)dx = \int_{[0,\frac{1}{2})} h(x)dx = \frac{1}{4}$$

mientras que en el sub-intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$ la discontinuidad se presenta exactamente en el extremo izquierdo, es decir en $x = \frac{1}{2}$. Para este caso al igual que en el ejemplo de g sus sumas no se ven afectadas.

$$\int_{[\frac{1}{2},1]} h(x)dx = \int_{(\frac{1}{2},1]} h(x)dx = \frac{1}{4}.$$

Luego, la integral para la partición P en el intervalo $I = [0, 1]$ llega a ser,

$$\begin{aligned}
\int_{[0,1]} h(x)dx &= \int_{[0,\frac{1}{2})} h(x)dx + \int_{(\frac{1}{2},1]} h(x)dx \\
&= \int_{[0,\frac{1}{2}]} h(x)dx + \int_{[\frac{1}{2},1]} h(x)dx \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

En vista de los ejemplos anteriores, se puede establecer de una forma general, que si $x \in [a, b]$ es un punto de discontinuidad de una función cualquiera,la integral es independiente del lugar donde se encuentre este punto:

$$\int_{[a,b]} \varphi(x)dx = \int_{[a,b)} \varphi(x)dx + \int_{\{x\}} \varphi(x)dx + \int_{(a,b]} \varphi(x)dx, \quad \text{donde} \quad \int_{\{x\}} \varphi(x)dx = 0.$$

Con lo anterior, se evidencia que funciones con un número finito de puntos de discontinuidad son Cauchy integrables. De hecho, la definición de integral de Cauchy se puede extender fácilmente al caso de algunas funciones acotadas con un número infinito de puntos de discontinuidad en el intervalo $[a, b]$. Este es el caso de funciones escalonadas.

Función Cauchy Integrable con Infinitas Discontinuidades

Ejemplo 5 (Función Escalonada). Dada

$$j(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ \frac{1}{n+1}, & \text{si } x \in \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right), \quad n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \end{cases}$$

¿Qué significaría encontrar la integral de j restringida al intervalo $[0, 1]$?

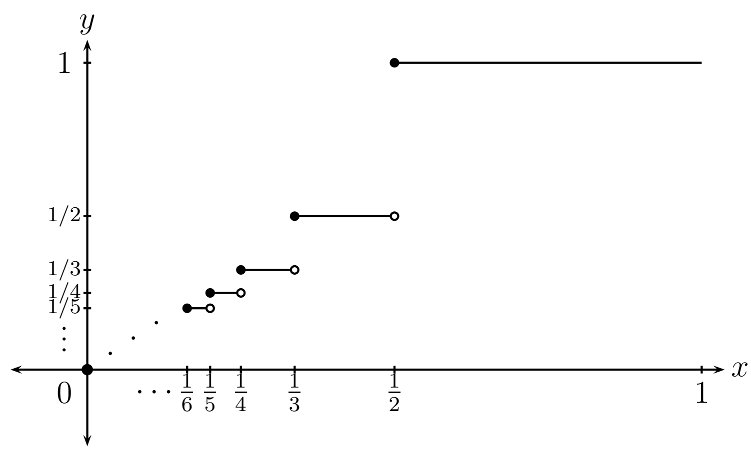

Figura 1.4: Función Escalonada (j)

Obsérvese que j es acotada ya que $|j(x)| \leq 1$, para todo x. Además, en los puntos de la forma $x = \frac{1}{n+2}$, con $n \in \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ la función es discontinua, sin embargo en cada uno de los sub-intervalos $\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right)$ la función es continua.

Recuérdese que la integral de Cauchy está motivada en la extensión de área bajo una curva, así, debe acogerse a la idea de que si una región se divide en sub-regiones, el área total debe ser igual a la suma de las áreas de las sub-regiones. Luego, encontrar el valor de la integral sería equivalente a encontrar el valor de la suma del área de los rectángulos de base $\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$ y altura $j\left(\frac{1}{n+2}\right)$. Así,

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{\infty} j\left(\frac{1}{n+2}\right)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\\
&= 1\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\ldots\\
&= \left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{(2)(3)}+\frac{1}{(3)(4)}+\ldots+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right)\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}\\
&= \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{i(i+1)}\right)\\
&= -1+\frac{\pi^2}{6}.
\end{aligned}
$$

Para los puntos $x=\dfrac{1}{n+2}$, se tiene que $x\neq 0$, sin embargo la integral se debe considerar para el intervalo $[0,1]$ es decir, debe acoger al punto $x=0$, así la suma S se puede modelar bajo la suma infinita de integrales de Cauchy, de la siguiente forma:

$$
\int_{[0,1]} j(x)dx = \int_{[\frac{1}{2},1]} j(x)dx + \int_{[\frac{1}{3},\frac{1}{2})} j(x)dx + \ldots + \int_{[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1})} j(x)dx + \ldots + \int_{\{0\}} j(x)dx
$$

$$
= \sum_{n=0}^{\infty}\int_{[\frac{1}{n+2},\frac{1}{n+1}]} j(x)dx + \int_{\{0\}} j(x)dx, \quad \text{donde} \quad \int_{\{0\}} j(x)dx = 0.
$$

De esta manera, la noción de integral dada por Cauchy, acoge funciones continuas y se puede extender a algunas funciones con infinitas discontinuidades, en intervalos acotados. No obstante, las consideraciones formuladas por Fourier, proponen un problema más general incluso que el que viene a resolver la definición de Cauchy:

¿Puede definirse la integral $\int_a^b f(x)dx$ para cualquier sucesión de ordenadas $x \to f(x)$?

Un análisis respecto a esta cuestión estaba sugerido por el matemático alemán Peter Gustav Lejeune-Dirichlet, quien aceptó el enfoque del análisis de Cauchy y también la interpretación literal de la definición de Fourier de lo que es una función arbitraria f. Para Dirichlet f es una función, si ella hace corresponder a todo valor de x un valor bien determinado $f(x)$, sin que necesariamente esté sujeto a ninguna ley analítica.

1.2.2. Una función no Cauchy Integrable

Dirichlet pensaba que era posible extender la definición de la integral de Cauchy, de modo que acogiera algunas funciones con cada vez mayor grado de discontinuidad en un intervalo acotado. Sin embargo, en busca de una respuesta al problema de la integrabilidad de funciones arbitrarias presenta en 1829, la función característica del conjunto de números racionales, que no es Cauchy integrable.

Ejemplo 6 (**Función Característica de los Racionales**).

$$X_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Al contrario de los ejemplos anteriores, $X_{\mathbb{Q}}$ es una función cuya representación gráfica no puede ser elaborada, ya que esta función es discontinua en cada punto de su dominio, es decir no tiene tramos de continuidad, que se considera un requisito para ser Cauchy integrable.

Según Dirichlet $\int_0^1 X_{\mathbb{Q}}(x)dx$ no tiene sentido bajo la definición de Cauchy, ya que para toda partición P de $[0,1]$ con todas las diferencias $(x_i - x_{i-1})$ arbitrariamente pequeñas y tal que todos los puntos distintos de 0 y 1 sean irracionales, la suma de Cauchy correspondiente sería:

$$S = \sum_{i=1}^{n} X_{\mathbb{Q}}(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(0)(x_i - x_{i-1}) = 0(1-0) = 0.$$

Por otro lado, para toda partición P' de $[0,1]$ con todos los $(x'_i - x'_{i-1})$ arbitrariamente pequeños y todos los puntos racionales, la suma S' es:

$$S' = \sum_{i=1}^{n} X_{\mathbb{Q}}(x'_{i-1})(x'_i - x'_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}(1)(x'_i - x'_{i-1}) = 1(1-0) = 1.$$

Así, para dichas particiones, las sumas S y S' no se aproximan a un valor límite único. Por consiguiente la integral $\int_0^1 X_{\mathbb{Q}}(x)dx$ en el sentido de Cauchy no existe.

A pesar de haber presentado el anterior contraejemplo, Dirichlet afirma, que una función no necesita ser continua, ni tener como máximo un número finito de puntos de discontinuidad para que la integral definida en un intervalo exista. En vista de esto, parecía necesario imponer algún tipo de restricción, para garantizar la integrabilidad de una función. La observación de Dirichlet (en términos modernos), se hace respecto a la densidad del conjunto de puntos de discontinuidad de la función. En otras palabras: si el conjunto de puntos de discontinuidad contiene un sub-conjunto denso,[6] entonces f no es integrable en el sentido de Cauchy.

El interés de Dirichlet en extender el concepto de integral a funciones discontinuas, estaba estrechamente ligado a su deseo de confirmar las afirmaciones de Fourier para una clase de funciones arbitrarias tan amplia como fuera posible. No obstante, aunque Dirichlet se propuso generalizar la definición de integral, no lo logró, sin embargo, esto le correspondió a un estudiante suyo, Bernard Riemann.

[6] Dirichlet, caracterizaba un conjunto diseminado (denso) de la siguiente forma: "si a y b representan dos cantidades arbitrarias incluidas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, siempre es posible encontrar otras cantidades r y s entre a y b, lo suficientemente próximas para que la función permanezca continua en el intervalo de r a s". [4], pág. 203

Capítulo 2

Integración de Riemann

La generalización de la definición de integral de Cauchy, que Dirichlet, pensaba era posible extenderla para cualquier función arbitraria, y de la cual no llevó a cabo ninguna demostración definitiva, fue reconsiderada por el alemán Bernhard Riemann.

El brillante matemático Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), estudiante de Dirichlet, fue un pensador y generador de métodos, teoremas y conceptos que llevan su nombre. Además de su trabajo en geometría, hizo contribuciones básicas a la teoría de las funciones de una variable compleja, a la física matemática y a la teoría de números. Clarificó la noción de Integral, definiendo lo que ahora se denomina Integral de Riemann.

El trabajo de Riemann significaba ir más allá de los resultados de Dirichlet, es decir suponía considerar "funciones arbitrarias más generales". En este sentido Riemann se vió obligado a reconsiderar las condiciones en las cuales se puede definir la integral de funciones con cada vez mayor grado de discontinuidad.

2.1. Integral de Riemann

La caracterización de la integrabilidad en el sentido de Riemann sugiere considerar primero algunas definiciones y algunos aspectos de terminología y notación.

2.1.1. Sumas superior e Inferior

Definición 2.1 (Sumas inferior y superior). *Sea $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ una función definida y acotada en I y sea $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de este intervalo. Para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, se denota*

$$m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

La ***suma inferior*** *de la función f respecto a la partición P, designada por $L(f, P)$, se define como*

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}).$$

Y la ***suma superior*** *de la función f respecto a la partición P, designada por $U(f, P)$, se define como*

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

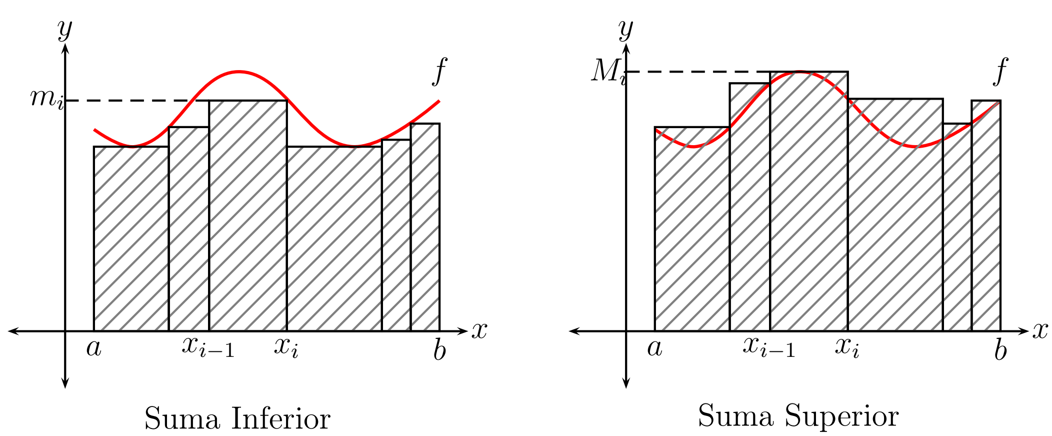

Figura 2.1: Sumas Superiores e Inferiores

En la Figura 2.1 se representa los rectángulos formados por $L(f,P)$ y $U(f,P)$.

Observación 1. La condición de que f esté acotada sobre $[a,b]$ es esencial para que los números m_i y M_i queden definidos. Además, ha sido necesario definir m_i y M_i como ínfimos y supremos en lugar de mínimos y máximos ya que la definición no exige que f sea continua.

En las sumas superior e inferior, se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad 2.1. *Si $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$ es acotada sobre I y P es una partición cualquiera de I, entonces $L(f,P) \leq U(f,P)$, (Una suma inferior es menor o igual que una suma superior si ambas sumas corresponden a la misma partición).*

Ejemplo 7. Considérese una función constante $f(x) = c$ en un intervalo $I = [a,b]$. Entonces, para cualquier partición $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ de I y para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, se tiene

$$m_i = c \qquad \text{y} \qquad M_i = c$$

por tanto

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = U(f,P)$$

ahora bien

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) &= c[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \ldots + (b - x_{n-1})] \\ &= c(b-a)\end{aligned}$$

luego

$$L(f,P) = U(f,P) = c(b-a).$$

Definición 2.2. *Si $P = \{x_o, x_1, \ldots, x_n\}$ y $P' = \{y_o, y_1, \ldots, y_n\}$ son dos particiones de $I = [a,b]$, se dice que P' es mas fina que P si $P \subseteq P'$.*

Ejemplo 8. Los conjuntos $P = \{0, 1\}$, $P' = \{0, 1/3, 1\}$ y $P'' = \{0, 1/3, 1/2, 1\}$ son tres particiones del intervalo $[0, 1]$. P'' es una partición más fina que P' y ésta es más fina que P, ya que $P \subseteq P' \subseteq P''$.

2.1.2. Definición de Integral de Riemann

La teoría de integración de Riemann fue derivada de la de Cauchy. Mientras Cauchy se limitó al análisis de funciones continuas,[1] Riemann instauró, hacia mediados del siglo XIX, una definición de integral que acoge funciones con alto grado de discontinuidad.

Es así como en 1854 presenta la siguiente definición:

Definición 2.3 (Integral de Riemann). *Una función f definida y acotada en el intervalo $[a, b]$ es Riemann integrable, si para cada partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de este intervalo la suma*

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

se aproxima a un límite único cuando $\|P\| \longrightarrow 0$.

Así, la Integral de Riemann estaría dada por

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} S.$$

Observación 2. Si en cada sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición de I, se toma un punto arbitrario t_i, de tal manera que se formen los productos

$$f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq n$$

[1]El enfoque del análisis de Cauchy estaba en la idea de función continua, sin embargo como se evidencia en los ejemplos presentados en el capítulo 1, bajo su definición se admite la integrabilidad de algunas funciones con infinitas discontinuidades.

la suma de Riemann, corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos de altura $f(t_i)$ y base $[x_i - x_{i-1}]$, es decir

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

2.1.3. Condiciones $(\mathbf{R}_1)$ y $(\mathbf{R}_2)$ de Riemann

Riemann, formuló dos condiciones equivalentes a su definición, que pueden ser utilizadas para determinar si una función es o no integrable.

$(\mathbf{R}_1)$ La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si

$$\lim_{\|P\|\to 0}(D_1\Delta x_1 + D_2\Delta x_2 + \ldots + D_i\Delta x_i + \ldots + D_n\Delta x_n) = 0$$

en la que:

- $D_i = M_i - m_i$, denota la oscilación de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, donde

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$
$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Demostración.

a) (R_1) es condición suficiente para la integrabilidad en el sentido de Riemann puesto que si,

$$\lim_{\|P\|\to 0}(D_1\Delta x_1 + D_2\Delta x_2 + \ldots + D_i\Delta x_i + \ldots + D_n\Delta x_n) =$$
$$\lim_{\|P\|\to 0}((M_1 - m_1)\Delta x_1 + \ldots + (M_n - m_n)\Delta x_n) = 0$$

y

$$\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \quad t_i \in [x_{i-1}, x_i]$$

se tendrá que

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}), \quad \text{existe.}$$

b) (R_1) es condición necesaria para la integrabilidad en el sentido de Riemann puesto que, $\forall\epsilon > 0$, $\forall i \in \mathbb{N}$, existe $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que $f(t_i) > M_i - \epsilon$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) &> (M_1 - \epsilon)\Delta x_1 + \ldots + (M_n - \epsilon)\Delta x_n \\
&= M_1\Delta x_1 - \epsilon\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n - \epsilon\Delta x_n \\
&= M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n - \epsilon(\Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n) \\
&= M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n - \epsilon(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) \\
&= M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n - \epsilon(x_n - x_0) \\
&= M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n - \epsilon(b - a)
\end{aligned}$$

y así

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) > M_1\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n - \epsilon(b - a)$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n}(M_i - f(t_i))(x_i - x_{i-1}) < \epsilon(b - a)$$

por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}). \qquad \textbf{(1)}$$

Por otro lado, $\forall\epsilon > 0$ y $\forall i \in \mathbb{N}$, existe $h_i \in [x_{i-1}, x_i]$, tal que $f(h_i) < m_i + \epsilon$, así se tiene que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(h_i)(x_i - x_{i-1}) &< (m_1 + \epsilon)\Delta x_1 + \ldots + (m_n + \epsilon)\Delta x_n \\
&= m_1\Delta x_1 + \epsilon\Delta x_1 + \ldots + M_n\Delta x_n + \epsilon\Delta x_n \\
&= m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n + \epsilon(\Delta x_1 + \ldots + \Delta x_n) \\
&= m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n + \epsilon(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n-1}) \\
&= m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n + \epsilon(x_n - x_0) \\
&= m_1\Delta x_1 + \ldots + m_n\Delta x_n + \epsilon(b - a)
\end{aligned}
$$

luego

$$\sum_{i=1}^{n} f(h_i)(x_i - x_{i-1}) < m_1\Delta x_1 + \cdots + m_n\Delta x_n + \epsilon(b - a)$$

de donde

$$\sum_{i=1}^{n} (f(h_i) - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon(b - a)$$

por lo tanto

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(h_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}). \qquad \mathbf{(2)}$$

A partir de los resultados anteriores **(1)** y **(2)** y dado que f es integrable, se tiene

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(h_i)(x_i - x_{i-1})$$

lo que demuestra finalmente que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\|P\|\to 0} ((M_1 - m_1)\Delta x_1 + \ldots + (M_n - m_n)\Delta x_n) = \\
&\qquad\qquad \lim_{\|P\|\to 0} (D_1\Delta x_1 + D_2\Delta x_2 + \ldots + D_n\Delta x_n) = 0.
\end{aligned}
$$

$\square$

Observación 3. En términos de las sumas superior e inferior; para una función f definida y acotada en el intervalo $I = [a, b]$, la condición (R_1) se verifica cuando, para todo $\epsilon > 0$, existe una partición P de I tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon.$$

($\mathbf{R}_2$) La función f es integrable en el intervalo $[a, b]$ si y sólo si, para todo $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $d > 0$, tal que si para toda partición P, con $\|P\| < d$, entonces $S(P, \sigma) \leq \epsilon$, donde $S(P, \sigma)$ denota la suma de las componentes de $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ en las cuales $D_i > \sigma$.

Demostración.

a) Demostremos que (R_2) es condición suficiente, es decir que dados $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$, existe $d > 0$, tal que para toda partición P, $\|P\| < d$ se tiene que $S(P, \sigma) < \epsilon$, donde $S(P, \sigma)$ denota la suma de las componentes de $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ en las cuales $D_i > \sigma$.

   Como $S(P, \sigma) \geq 0$ y si se denota por D a la oscilación en el intervalo $[a, b]$, se tiene que

$$D.S(P, \sigma) \geq 0 \tag{3}$$

   Además, $b - a = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n$ y como $\sigma < D_i$, entonces

$$\sigma(b - a) < D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \ldots + D_n \Delta x_n, \tag{4}$$

   de **(3)** y **(4)**, se obtiene[2]

$$D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \ldots + D_n \Delta x_n \leq D.S(P, \sigma) + \sigma(b - a)$$

[2] Este resultado se logra al establecer la diferencia entre las inecuaciones $0 \leq D.S(P, \sigma)$ y $\sigma(b - a) < D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \ldots + D_n \Delta x_n$.

finalmente

$$D_1\Delta x_1 + D_2\Delta x_2 + \ldots + D_n\Delta x_n \leq D.\epsilon + \sigma(b-a), \quad \text{ya que} \quad S(P,\sigma) < \epsilon.$$

Resultado que significa haber verificado la condición (R_1) y así f es integrable.

b) Demostremos que (R_2) es condición necesaria.

Sea $d > 0$ un número fijo y $\{\wp_n\}$ una colección de particiones de $I = [a,b]$.

Si se considera una partición $P \in \{\wp_n\}$, tal que $\|P\| \geq \|P_n\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ entonces, se define $\triangle(d)$ como:

$$\triangle(d) = \{D_1\Delta x_1 + D_2\Delta x_2 + \ldots + D_n\Delta x_n : \|P\| < d\}.$$

Sean $\sigma > 0$ y una partición $P \in \{\wp_n\}$; se define $S(P,\sigma)$ como la suma de las componentes de $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ en las cuales $D_i > \sigma$.

Dado que $S(P,\sigma)$ corresponde a la suma de un conjunto de intervalos contenido en el conjunto total de intervalos producidos por la partición P, se tiene que

$$S(P,\sigma) \leq \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n$$

y como $\sigma < D_i$, entonces

$$\sigma.S(P,\sigma) \leq D_1\Delta x_1 + D_2\Delta x_2 + \ldots + D_n\Delta x_n \leq \Delta(d)$$

luego

$$S(P,\sigma) \leq \frac{\Delta(d)}{\sigma}.$$

Como por hipótesis f es integrable, entonces se verifica la condición (R_1) es decir

$$\lim_{d\to 0}\frac{\Delta(d)}{\sigma} = 0$$

por tanto, existe un d, tal que para cualquier $\epsilon > 0$, $S(P,\sigma) < \epsilon$, cuando $\|P\| < d$.

$\square$

2.2. Ejemplo de una Función R-integrable

Para Riemann, una función podría ser mucho mas discontinua de lo que había imaginado Dirichlet, y ser sin embargo integrable. En este sentido la observación de integrabilidad establecida por Dirichlet no era realmente necesaria (véase cap. 1, pág. 16). De hecho, como se diría en términos modernos, una función podría ser integrable, aunque el conjunto de puntos de discontinuidad en cualquier intervalo, por pequeño que fuera, forme un conjunto denso.[3]

Una función R-integrable y no Cauchy integrable

Como este tipo de funciones mencionadas, no habían sido consideradas hasta el momento, Riemann presenta un ejemplo de una función R-integrable, con el que se hace evidente que bajo su definición se acogen funciones de alto grado de discontinuidad.

Para construir su ejemplo, Riemann se basa en la siguiente función:

$$g(x) = \begin{cases} x - n, & \text{donde } n \text{ es el entero más cercano a } x, \\ 0, & \text{cuando } x = \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2}, \ldots \end{cases}$$

Con base en $g(x)$ se define la sucesión $\{g_n(x)\}$, donde $g_n(x) = g(nx)$ para $n \in \mathbb{N}$.

La representación gráfica de las funciones $g_1(x), g_2(x)$ se ilustran a continuación:

[3] En la década de los 1870 la teoría de conjuntos aún no se había desarrollado. El enfoque conjuntista se lleva a cabo con los trabajos de George Cantor (1872). Para un estudio mas detallado del desarrollo de la teoría de conjuntos de Cantor, véase [4], cap. 5.

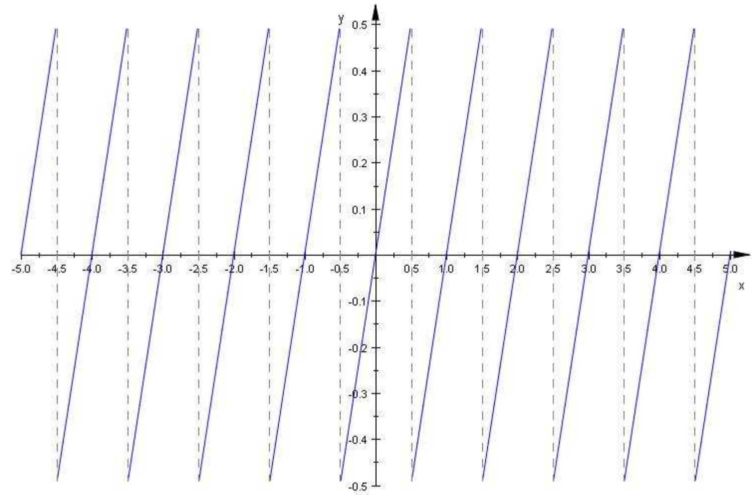

Figura 2.2: g_1

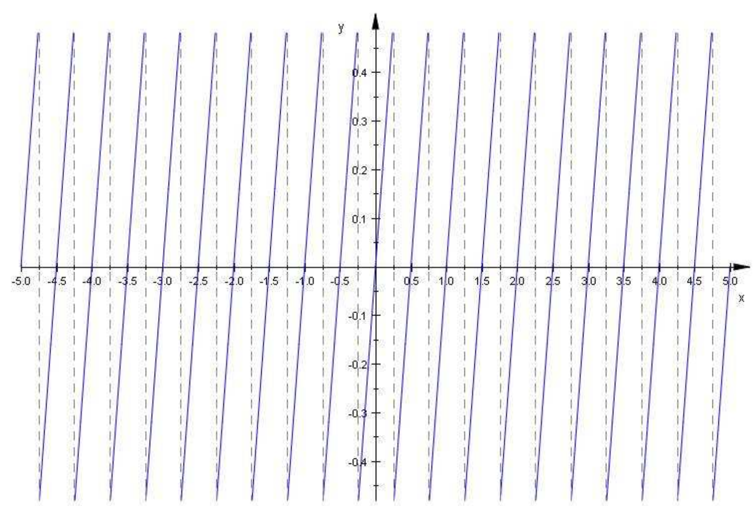

Figura 2.3: g_2

La idea de Riemann, es sumar estas funciones para obtener otra función con alto grado de discontinuidad.

Así, a partir de las funciones $g_n(x)$ define la función:

$$f(x) = g_1(x) + \frac{g_2(x)}{2^2} + \frac{g_3(x)}{3^2} + \ldots + \frac{g_n(x)}{n^2} + \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$$

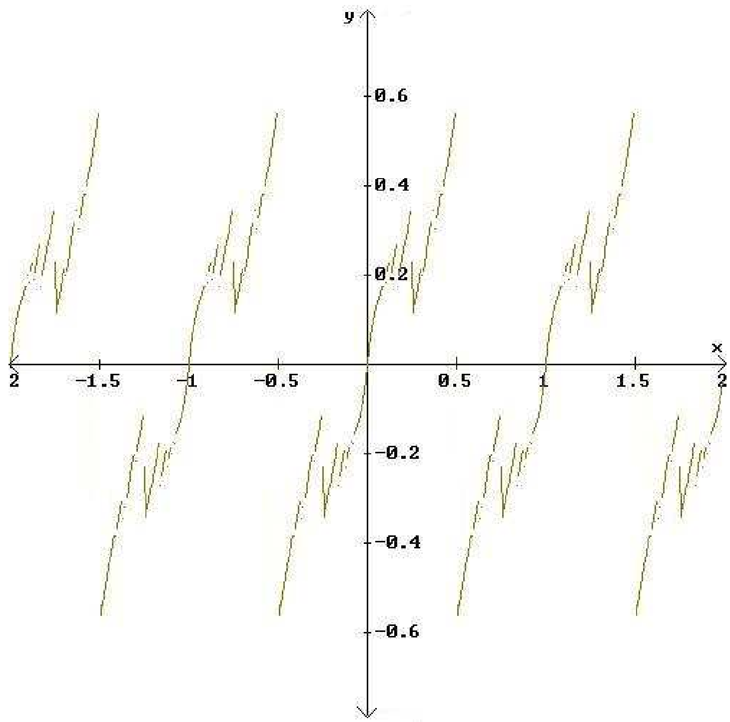

Figura 2.4: $\sum_{n=1}^{100} \frac{g_n}{n^2}$

La Figura 2.4 es un acercamiento al comportamiento de la gráfica de la función f.

Los puntos de discontinuidad de f son todos los puntos de discontinuidad de las g_n, es decir, los puntos x de la forma $\dfrac{p}{2q}$, donde p es impar y $(p, q) = 1$.

Para demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es discontinua en $x = \dfrac{p}{2q}$, se debe verificar que $D_f(x) > 0$, donde $D_f(x)$ denota la oscilación de f en x.[4] En términos modernos

[4]Sea f una función definida y acotada en un intervalo S. La oscilación de f en x se define como el número $D_f(x) = \lim_{h\to 0^+} D(B(x;h) \cap S)$. ([1], pág. 207)

sería probar lo siguiente:[5]

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(x \pm \epsilon) - f(x) > 0$$

Demostración.

Considérese

$$f(x+\epsilon) - f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{g(n(x+\epsilon)) - g(nx)}{n^2}.$$

Como $g_n(x) = g(nx)$, para $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ cuando $n \in \{1, 2, \ldots, q, \ldots\}$ en $x = \dfrac{p}{2q}$ se presentan los siguientes casos:

1) Para $n < q$, se tiene que q no divide a n, luego:

   a) si $(q, n) = 1$, entonces $\dfrac{np}{2q}$ es una fracción irreducible, luego no es de la forma $\dfrac{p}{2}$ y en consecuencia nx no genera discontinuidad en g_1.

   b) si $(q, n) = d$, es decir $n = dk$ y $q = ds$ con $(k, s) = 1$ y $(s, p) = 1$. Entonces, $\dfrac{np}{2q} = \dfrac{dkp}{2ds}$, luego $\dfrac{kp}{2s}$ es una fracción irreducible y no es de la forma $\dfrac{p}{2}$, así nx no genera discontinuidad en g_1.

Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{q-1} a_n = \frac{g_1(x+\epsilon) - g_1(x)}{1^2} + \frac{g_2(x+\epsilon) - g_2(x)}{2^2} + \ldots + \frac{g_{(q-1)}(x+\epsilon) - g_{(q-1)}(x)}{(q-1)^2} \qquad \textbf{(5)}$$

2) Cuando $n = q$, $\dfrac{np}{2q} = \dfrac{p}{2}$, luego nx genera discontinuidad en g_1. Así

[5]Hipótesis equivalente a $f(x \pm 0) - f(x)$, donde el símbolo "0"fue incorporado por Newton para representar, en el desarrollo operativo,una cantidad muy pequeña pero diferente de cero.

$$
\begin{aligned}
a_q &= \frac{g(q(x+\epsilon)) - g(qx)}{q^2} \\
&= \frac{g(\frac{p}{2} + q\epsilon) - g(\frac{p}{2})}{q^2} \\
&= \frac{\frac{p}{2} + q\epsilon - \frac{p+1}{2}}{q^2} \quad \text{donde} \quad \frac{p+1}{2} \quad \text{es el entero más cercano} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + q\epsilon}{q^2} \\
&= -\frac{1}{2q^2} + \frac{\epsilon}{q}
\end{aligned} \qquad \textbf{(6)}
$$

3) Cuando $n > q$, puede darse el caso:

a) Si $n = qk$, donde k es impar, entonces $nx = \dfrac{np}{2q} = \dfrac{kp}{2}$ genera discontinuidad en g_1.

b) Si $n = qk$ donde k es par, entonces $nx = \dfrac{np}{2q} = \dfrac{kp}{2} \in \mathbb{Z}$.

Por consiguiente

$$
\sum_{n=q+1}^{\infty} a_n = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=(2r-1)q+1}^{(2r+1)q-1} a_n + \sum_{r=1}^{\infty} a_{(2r+1)q} \qquad \textbf{(7)}
$$

donde

$$
\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=(2r-1)q+1}^{(2r+1)q-1} a_n =
$$

$$
\sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{g_{((2r-1)q+1)}(x+\epsilon) - g_{((2r-1)q+1)}(x)}{((2r-1)q+1)^2} + \ldots + \frac{g_{((2r+1)q-1)}(x+\epsilon) - g_{((2r+1)q-1)}(x)}{((2r+1)q-1)^2} \right)
$$

y

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{\infty} a_{(2r+1)q} &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{g(((2r+1)q)(x+\epsilon)) - g((2r+1)qx)}{((2r+1)q)^2} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\frac{(2r+1)p}{2} + (2r+1)q\epsilon - \frac{(2r+1)p+1}{2}}{((2r+1)q)^2}, \quad \frac{(2r+1)p+1}{2} \text{es el entero más cercano} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{-\frac{1}{2} + (2r+1)q\epsilon}{((2r+1)q)^2} \\
&= \sum_{r=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2((2r+1)q)^2} + \frac{(2r+1)q\epsilon}{((2r+1)q)^2} \right).
\end{aligned}$$

Entonces de **(5)**, **(6)**, y **(7)**, la oscilación de f en x es

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon \to 0} f(x+\epsilon) - f(x) &= \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{n=1}^{q-1} a_n + a_q + \sum_{n=q+1}^{\infty} a_n \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{n=1}^{q-1} a_n + a_q + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=(2r-1)q+1}^{(2r+1)q-1} a_n + \sum_{r=1}^{\infty} a_{(2r+1)q} \right) \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{n=1}^{q-1} a_n + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=(2r-1)q+1}^{(2r+1)q-1} a_n \right) + \lim_{\epsilon \to 0} \sum_{r=1}^{\infty} a_{(2r-1)q}
\end{aligned}$$

Ahora, para $\epsilon \to 0$ se tiene que x y $x+\epsilon$ tienen el mismo entero más cercano. Luego

$$\lim_{\epsilon \to 0} g_n(x+\epsilon) = \lim_{\epsilon \to 0} g(n(x+\epsilon)) = g(nx) = g_n(x)$$

por lo tanto

$$\lim_{\epsilon \to 0} \left(\sum_{n=1}^{q-1} a_n + \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{n=(2r-1)q+1}^{(2r+1)q-1} a_n \right) = 0$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=1}^{\infty} a_{(2r-1)q} &= \lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2((2r-1)q)^2}+\frac{(2r+1)q\epsilon}{((2r+1)q)^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2q^2}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(2r-1)^2}\right)+\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{(2r+1)q\epsilon}{((2r+1)q)^2}\right).\end{aligned}$$

Siendo $(2r+1)q\epsilon = \delta$ y como $\epsilon \to 0$ entonces $\delta \to 0$, y así

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{(2r+1)q\epsilon}{((2r+1)q)^2}\right) &= \lim_{\delta\to 0}\sum_{r=1}^{\infty}\left(\frac{\delta}{((2r+1)q)^2}\right)\\ &= \lim_{\delta\to 0}\quad\delta\left(\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{((2r+1)q)^2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

finalmente

$$\lim_{\epsilon\to 0} f(x+\epsilon)-f(x) = -\frac{1}{2q^2}\lim_{\epsilon\to 0}\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{(2r-1)^2}$$

donde $\sum_{r=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2r-1)^2}$ por serie de Euler[6] converge a $\dfrac{\pi^2}{8}$. De una forma análoga se verifica para $f(x-\epsilon)-f(x)$.

Por consiguiente

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0} f(x\pm\epsilon)-f(x) &= \mp\frac{1}{2q^2}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\pi^2}{8}\right)\\ &= \mp\frac{\pi^2}{16q^2}\end{aligned}$$

Así, $\lim_{\epsilon\to 0} f(x\pm\epsilon)-f(x) > 0$. Resultado que significa que en los puntos $x=\dfrac{p}{2q}$, p impar y $(p,q)=1$, f es discontinua.

$\square$

[6]El matemático Leonhard Euler descubrió el resultado de una famosa serie infinita de sumas, la de los inversos de los cuadrados de los números enteros positivos $(1/1^2+1/2^2+1/3^2...)$, que aunque tiene infinitos términos, el resultado no es infinito sino un número real. Es decir, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

A continuación se demuestra que los únicos puntos de discontinuidad de la función son de la forma $\dfrac{p}{2q}$, para los demás puntos f es continua.

Para ello se debe probar primero que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{g_n(x)}{n^2}$ converge uniformemente. Utilizando el Criterio de Weierstrass:[7]

$$\left|\frac{g_n(x)}{n^2}\right| = \frac{|g_n(x)|}{n^2}$$

como $|g_n(x)| < \dfrac{1}{2}$, se tiene que

$$\frac{|g_n(x)|}{n^2} < \frac{1}{2n^2}$$

y así

$$\left|\frac{g_n(x)}{n^2}\right| < \frac{1}{2n^2}$$

y como $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n^2}$ converge a $\dfrac{\pi^2}{16}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{g_n(x)}{n^2}$ converge uniformemente.

Demostración.

Si $x_0 \neq \dfrac{p}{2q}$, se debe probar que en x_0 f es continua, es decir $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Entonces

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x)}{n^2}$$

como f converge uniformemente se tiene

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} \frac{g_n(x)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \lim_{x\to x_0} g_n(x)$$

[7] Sea $\{M_n\}$ una sucesión de números no negativos, tal que $0 \leq |f_n(x)| \leq M_n$, para $n \in \{1, 2, \ldots\}$ y cada x de S. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en S si $\sum_{n=1}^{\infty} M_n(x)$ converge. ([1], pág 271.)

ahora, como $g_n(x)$ es continua en x_0 para todo $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ entonces

$$\lim_{x \to x_0} g_n(x) = g_n(x_0)$$

luego

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} g_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n(x_0)}{n^2} = f(x_0).$$

Así, entonces f es continua en los puntos $x_0 \neq \dfrac{p}{2q}$, por lo tanto los únicos puntos de discontinuidad de f son de la forma $\dfrac{p}{2q}$, donde p impar y primo relativo con q.

$\square$

De esta forma, f es discontinua en una infinidad de puntos en cualquier intervalo.

Ahora, se demuestra a través de (R_2) que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{g(nx)}{n^2}$ es R-integrable.

Demostración.

Si se considera las componentes $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\} \subset [0, 1]$ en las cuales $D_f(x) > \sigma$, y si para una partición P con $\|P\| < d$, $d > 0$, la suma de Δx_i, donde $D_i > \sigma$, es menor que ϵ, es decir $S(P, \sigma) \leq \epsilon$, para todo $\epsilon > 0$ y $\sigma > 0$ entonces f es R-integrable.

Sea $A = \{x / D_f(x) > \sigma\}$ y por lo visto en la demostración de que f es discontinua en $x = \dfrac{p}{2q}$, se tiene que

$$D_f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x \pm \epsilon) - f(x) = \lim_{\epsilon \to 0} f(x - \epsilon) - f(x + \epsilon) = \frac{\pi^2}{8q^2}$$

luego en $\Delta x_i, D_f(x) = \dfrac{\pi^2}{8q^2} > \sigma$, para todo $\sigma > 0$, de lo cual se sigue que

$$q < \frac{\pi}{2\sqrt{2\sigma}}.$$

Ahora, como los puntos de discontinuidad de f son de la forma $\dfrac{p}{2q}$, se tiene que en el intervalo $[0,1]$, $p < 2q$. Por lo tanto $p < 2q < \dfrac{\pi}{\sqrt{2\sigma}}$, resultado que significa que existe un número finito de puntos $x = \dfrac{p}{2q}$ en los cuales $D_f(x) > \sigma$.

Sean $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\} \subset [0,1]$ las componentes que contienen al conjunto finito de puntos $x \in A$ y sea n el número de sub-intervalos Δx_i.

Además cada $\Delta x_i \leq \|P\|$ y así

$$S(P,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \leq n\,\|P\|$$

y como $\|P\| \longrightarrow 0$, entonces $n\,\|P\| < \epsilon$. Luego $S(P,\sigma) < \epsilon$.

Por lo tanto $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{g(nx)}{n^2}$ es R-integrable en $[0,1]$.

$\square$

En base en la función f se define una nueva función r que es Riemann integrable más no Cauchy integrable. Para ello se va a recurrir al artificio de que si A es el conjunto de discontinuidad de f, $A = \{x/x = \dfrac{p}{2q}, p \text{ impar y } (p,q) = 1\}$, entonces

$$r(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \quad \text{ó} \quad x = 0. \end{cases}$$

En primer lugar, se debe probar que r al igual que f es discontinua en los puntos de la forma $\frac{p}{2q}$, donde p impar y $(p, q) = 1$, y continua en otro caso.

Por un lado, sea $x_0 = \frac{p}{2q}$ y $\epsilon < \frac{1}{q}$, en el cual q permanece fijo.

Entonces

$$\left| r(x) - r\left(\frac{p}{2q}\right) \right| = \left| r(x) - \frac{1}{q} \right|$$

y como, para todo $\delta > 0$ se tiene que el intervalo $\left(\frac{p}{2q} - \delta, \frac{p}{2q} + \delta\right)$ contiene puntos que no pertenecen a A y siendo así

$$\left| r(x) - \frac{1}{q} \right| = \left| \frac{1}{q} \right| > \epsilon.$$

Así, r es discontinua en los puntos de A.

Por otro lado, sea $x_0 \notin A$, entonces

$$|r(x) - r(x_0)| = |r(x) - 0| = |r(x)|$$

ahora, para todo $\delta > 0$ se tiene que el intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ contiene puntos de A, por lo tanto

$$\left| \frac{1}{q} \right| = \frac{1}{q} < \epsilon, \quad \text{con} \quad 0 < q < \infty.$$

En general, si $x \notin A$, entonces

$$|r(x)| = |0| = 0 < \epsilon$$

por consiguiente r es continua en los puntos $x \notin A$.

De esta manera, r es discontinua en los puntos $x \in A$ y continua en $x \notin A$.

En segundo lugar, se verifica a través de R_2 que r es Riemann integrable. Para ello, se considera $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, \ldots, x_n\}$ una partición del intervalo $[0,1]$, en donde para cada $[x_{i-1}, x_i]$, la oscilación ($D_i = M_i - m_i$) llega a ser $D_i = \dfrac{1}{q} > \sigma$, de la cual $q < \dfrac{1}{\sigma}$.

Como $\dfrac{p}{2q} \in [0,1]$ entonces $p < 2q < \dfrac{2}{\sigma}$, luego, el conjunto de puntos $x = \dfrac{p}{2q}$ tales que $D_i > \sigma$, es finito. En consecuencia el número de sub-intervalos $[x_{i-1}, x_i]$, en donde $D_i > \sigma$ también es finito. Supóngase entonces, que m es el número de sub-intervalos Δx_i y como cada $\Delta x_i < \|P\|$, se sigue que

$$S(P,\sigma) = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_m \leq m\,\|P\|$$

además, $\|P\| \to 0$, entonces $m\,\|P\| < \epsilon$, de lo cual se consigue

$$S(P,\sigma) = \sum_{i=1}^{m} \Delta x_i \leq m\,\|P\| < \epsilon.$$

Finalmente, $S(P,\sigma) < \epsilon$. Luego, r es Riemann integrable.

Por último, se demuestra que la función r, R-integrable, no es Cauchy integrable.

Demostración.

Por un lado, sea $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\}$ una partición del intervalo $I = [0,1]$.

Considérese además $I = [0,1] = \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ y sean

$$P_1 = \left\{0, \frac{1}{\sqrt{2}n}, \frac{2}{\sqrt{2}n}, \frac{3}{\sqrt{2}n}, \ldots, \frac{n-1}{\sqrt{2}n}\right\} \quad \text{y}$$
$$P_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}n}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(n-1)(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}n}, 1\right\}$$

para $n \in \mathbb{N}$, particiones de los sub-intervalos $\left[0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ y $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ respectivamente, tales que $P = P_1 \cup P_2$.

Para el intervalo $I=[0,1]$ la suma de Cauchy, llega a ser:

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n-1} r\left(\frac{i}{\sqrt{2}n}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) + \sum_{i=0}^{n-1} r\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}n}\right)\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}n}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Por otro lado, sea

$$P' = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{3}{2n}, \ldots, \frac{2n-1}{2n}, 1\right\}$$

otra partición del intervalo $[0,1]$, para la cual la suma de Cauchy correspondiente es

$$
\begin{aligned}
S'_n &= r(0)\frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{n-1} r\left(\frac{2i-1}{2n}\right)\frac{1}{n} + r\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\frac{1}{2n} \\
&= 0 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2n^2}
\end{aligned}
$$

Finalmente, para dichas particiones

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_n = 0$$

y

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|P\|\to 0} S'_n &= \lim_{\|P\|\to 0}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{2n^2}\right)\right) \\
&= \lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n^2} + \lim_{\|P\|\to 0}\frac{1}{2n^2}
\end{aligned}
$$

y como $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\frac{1}{2n^2} = 0$ y ademas, por serie de Euler $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n-1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, entonces se tiene que

$$\lim_{\|P\|\to 0} S'_n = \frac{\pi^2}{6}$$

Luego

$$\lim_{\|P\|\to 0} S_n \neq \lim_{\|P\|\to 0} S'_n$$

ya que que los resultados dependen de la partición que se escoja. Así, las sumas S_n y S'_n no se aproximan a un valor limite único y por consiguiente la integral $\int_0^1 r(x)dx$ no tiene sentido bajo la definición de Cauchy.

$\square$

El trabajo de Riemann con su manera de presentar el sorprendente ejemplo de función integrable, impresionó fuertemente a los matemáticos de la época. Así, se llegó a pensar que el concepto de integral había alcanzado su máxima generalización y de hecho, resultaba imposible imaginarse la integrabilidad de funciones definidas de cualquier otra manera más general.

De otro lado, Cauchy había probado el teorema fundamental del cálculo para funciones continuas. En base a ello se buscaba que las funciones con derivada $F'(x) = f(x)$ acotada e integrable en el sentido de Riemann en el intervalo $[a, b]$, satisfacieran que:

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Teorema que fue demostrado por Gaston Darboux en 1875. La demostración de este teorema parecía ser el indicativo de que, efectivamente, Riemann había logrado caracterizar completamente el concepto de integral; sin embargo, el matemático italiano Ulisse Dini empezó a estudiar, a la luz del teorema fundamental del cálculo demostrado por Darboux, algunas propiedades de las funciones acotadas y sus derivadas, que serviría de base para construir contraejemplos. Es decir, con el objetivo de proponer un ejemplo de una función no R–integrable.

2.3. Limitaciones de la Integral de Riemann

Dini notó que si una función f tiene la propiedad de que: en todo intervalo, existen puntos t, tales que $f'(t) = 0$ y f' es acotada, entonces para todo $x \in [a, b]$ se tiene que

$$\int_a^b f'(t)dt = 0.$$

Así, en las sumas que definen la integral,

$$S = \sum_{i=1}^{n} f'(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

se pueden tomar siempre los t_i tales que $f'(t_i) = 0$. Estas sumas se aproximan a un límite único, sólo cuando el límite es cero, por lo tanto

$$\int_a^x f'(t)dt = 0$$

y por el teorema fundamental se sigue que

$$f(x) - f(a) = 0$$

de donde $f(x) = f(a)$ para todo $x \in [a, b]$, lo que significa que f es constante en el intervalo $[a, b]$.

De esta manera, si f cumple con la propiedad mencionada ($f'(t) = 0$ y f' es acotada), las únicas posibles alternativas son: f es constante ó f' no es integrable en el sentido de Riemann. Sin embargo, Dini presentía que podían existir funciones no constantes que cumplan dicha propiedad, para las cuales f' no era integrable.

Efectivamente, un ejemplo particular de este tipo de funciones fue construido por el matemático sueco T. Broden hacia el año de 1896.

Broden empieza la construcción de su ejemplo con la función $\phi(x) = x^{1/3}, x \in [-1, 1]$.

Para ϕ, la derivada $\phi'(x) = \dfrac{1}{3x^{2/3}}$, existe para todo $x \in [-1, 1] - \{0\}$. Es decir en $x = 0$, $\phi'(x)$ es infinita, para los demás valores ϕ' existe y es finita. Geométricamente en la gráfica ϕ tiene una tangente vertical en cero.

Sea ahora, $\{a_n\} \subset [-1, 1]$ un subconjunto denso y se define

$$\phi_n(x) = \phi_n(x - a_n)^{1/3}, \quad \text{para} \quad n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

la derivada $\phi'_n(x) = \dfrac{1}{3(x-a_n)^{2/3}}$, en $x = a_n$, $\phi'_n(a_n)$ es infinita y en los demás valores ϕ'_n existe y es finita.

Luego, se define α sobre $[-1, 1]$ de la forma

$$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)}{2^n}$$

para α, la derivada

$$\begin{aligned}\alpha'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi'_n(x)}{2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3)(2^n)(x-a_n)^{2/3}}\end{aligned}$$

existe y es finita para todo $x \neq a_n$. Así, para cada a_n, $\alpha'(a_n)$ es infinita. Desde un punto de vista geométrico, la gráfica de α tiene tangentes verticales en un conjunto denso de puntos.

Debido a que ϕ es estrictamente creciente, todas las ϕ_n también lo son, luego α es estrictamente creciente y por lo tanto es biyectiva. Así, α tiene una inversa continua $\beta = \alpha^{-1}$, definida en el intervalo $[\alpha(-1), \alpha(1)]$.

Siendo $\alpha(x) = y$ y la inversa $\beta(y) = x$, se tiene que

$$\begin{aligned}(\alpha \circ \beta)(y) &= y \\ \alpha(\beta(y)) &= y \\ \frac{d}{dy}[\alpha(\beta(y))] &= \frac{dy}{dy} \\ \alpha'(\beta(y))\beta'(y) &= 1 \\ \beta'(y) &= \frac{1}{\alpha'(\beta(y))} \\ \beta'(y) &= \frac{1}{\alpha'(x)}\end{aligned}$$

Ahora, sea $\{b_n\} = \{\alpha(a_n)\} \subset [\alpha(-1), \alpha(1)]$ un subconjunto denso, entonces

$$\beta'(y) = \frac{1}{\alpha'(x)}$$

$$\beta'(b_n) = 0, \quad \text{para} \quad b_n, n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Geométricamente, si se establece una relación entre las gráficas de α y β, se tiene que β tiene tangentes horizontales en un conjunto denso de puntos.

Relacionando α' y β' se tiene que $\alpha'(x) = \infty$ en $x = a_n$ y para todo $x \neq a_n$, $\alpha'(x)$, existe y es finita. Para $y \neq b_n$, β' existe y es finita, y se anula en un conjunto denso de puntos $\{b_n\}$, es decir $\beta'(y) = 0$ en $\alpha(a_n) = b_n$. Luego β' es acotada, además es estrictamente creciente, luego no es constante y por lo tanto no es R-integrable.

Con el trabajo de Dini y más específicamente con el ejemplo de Broden, se dejó claro que existen funciones con derivadas acotadas no integrables, por lo que el teorema fundamental del cálculo se torna inútil para estas nuevas funciones.

Una función no R–integrable.

En esta misma dirección, se prueba que la función característica de los racionales planteada por Dirichlet, no es R-integrable.

Obsérvese que

$$X_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

no es R-integrable en $[0, 1]$ ya que la condición (R_1)

$$\lim_{\|P\| \to 0} (D_1 \Delta x_1 + D_2 \Delta x_2 + \ldots + D_i \Delta x_i + \ldots + D_n \Delta x_n) = 0$$

no se verifica.

Así, si P es una partición cualquiera de I, entonces en el sub-intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el ínfimo $m_i = 0$ y el supremo $M_i = 1$, $1 \leq i \leq n$, de esta manera la oscilación $D_i = 1$.

Por tanto

$$\lim_{\|P\| \to 0} \left(\sum_{i=1}^{n} D_i \Delta x_i \right)$$

$$\lim_{\|P\| \to 0} 1(1-0) = 1 \neq 0.$$

Luego $X_{\mathbb{Q}}(x)$ no es Riemann integrable.

A pesar de que Riemann logró una extensión del concepto de integral, mediante la formulación de unas condiciones necesarias y suficientes que garantizan la integrabilidad de una función, y a pesar de que esta teoría fue dominante durante el siglo XIX, su generalización no fue lo suficientemente satisfactoria y como vienen a indicar los ejemplos anteriores, la teoría de integración de Riemann llegó a ciertas limitaciones, que abrieron las puertas a nuevas perspectivas y en definitiva sugerían la idea de una nueva generalización.

Capítulo 3

Integración de Lebesgue

Después de que la teoría de integración de Riemann se encontró como lo insuficientemente general y aunque hacia 1872 la teoría de conjuntos, introducida por George Cantor, formaba parte ya de la matemática, nadie hablaba explícitamente de conjuntos y de sus medidas. En efecto, nadie se atrevía a llevar a cabo una teoría de integración con un enfoque propiamente conjuntista. Sólo hacia 1902 fue cuando el matemático francés Henri Lebesgue (1875 - 1941), fundó su propia teoría de integración que de alguna u otra manera corregía los defectos de la integral de Riemann.

Justamente el punto de partida de Lebesgue fue la teoría de la medida, teoría que empezó a fundamentarse con los trabajos de Camille Jordan y Émilé Borel. Es decir, Lebesgue para establecer una definición de integral que solucionase los problemas implícitos en la integral de Riemann, se apoya en el concepto de contenido de Jordan y la noción de medida de Borel.

3.1. Preliminares

Contenido de Jordan

Camille Jordan, en 1882, introduce las definiciones de contenido interior y contenido exterior de un conjunto $E \subseteq [a,b]$.

Definición 3.1. *Sea E un subconjunto de $[a,b]$ y $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ una partición de este intervalo, en intervalos I_k, tal que*

$$[a,b] = \bigcup_{k=1}^{n} I_k.$$

Se definen los contenidos interior y exterior de E, denotados $C_i(E)$ y $C_e(E)$ respectivamente, como:

$$C_i(E) = \sup \sum_{I_k \subset E} l(I_k), \qquad C_e(E) = \text{ínf} \sum_{I_k \bigcap E \neq \phi} l(I_k),$$

donde $l(I_k) = x_k - x_{k-1}$ (longitud del k-ésimo sub-intervalo).

El contenido interior de E se obtiene considerando, aquellos intervalos contenidos completamente en E y el contenido exterior, se obtiene considerando todos los intervalos que contienen puntos de E.

Para Jordan, el conjunto E se dice J-medible si $C_i(E) = C_e(E)$ y en este caso su contenido es único, el cual se representa por $C(E)$.

La noción de contenido de Jordan, sugiere la caracterización de la integral de Riemann en términos de sumas más generales. Así, para una partición P de $[a,b]$ en conjuntos medibles disjuntos, se definen las sumas superior e inferior para una función acotada f de la siguiente manera:

$$L(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i C(E_i) \quad \text{y} \quad U(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i C(E_i)$$

donde los conjuntos E_i son J-medibles, disjuntos dos a dos y tales que $[a,b] = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$.

Es evidente, que Jordan, acepta la concepción dada por Riemann, sólo que la establece para dominios más generales. Mientras que, Las sumas de Riemann inferior y superior $L(f,P)$ y $U(f,P)$ (sección 2.1.1), estaban definidas para particiones P del intervalo $[a,b]$ en sub-intervalos, la caracterización de Jordan, involucra particiones en conjuntos medibles.

La Medida de Borel

A partir de las investigaciones sobre ciertos conjuntos del intervalo $[0,1]$, el matemático frances Emile Borel, en 1898, introduce los llamados conjuntos borelianos o conjuntos B-medibles.[1] Así, la generalización de conjuntos B-medibles parte de la generalización de la longitud de un segmento. En este sentido, si se considera el intervalo $[a,b]$, la medida de dicho intervalo sera $b-a$. Siguiendo con este resultado, Borel pretendía asignar medidas a subconjuntos más generales que los sub-intervalos, y afirma que una definición de medida sólo puede ser válida, si ésta verifica ciertas propiedades fundamentales:

> La medida de dos conjuntos sin puntos comunes y con medidas s y s', es $s+s'$. En general, la medida de la unión de una infinidad numerable de conjuntos disjuntos entre si y con medidas $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, respectivamente, es $s_1 + s_2 + \ldots + s_n + \ldots$. La medida de la diferencia de dos conjuntos es igual a la diferencia de sus medidas. La medida jamás será negativa. ([10], pág. 53).

Por otra parte, con objeto de estudiar los conjuntos (de números reales) de medida nula, que define como aquellos que pueden ser recubiertos por una familia numerable de intervalos cuya suma de longitudes sea arbitrariamente pequeña, y luego de definir la medida para la intersección de conjuntos, Borel se encuentra ya en las ideas básicas con

[1]Borel mismo no utilizó el nombre de conjuntos borelianos, fue Lebesgue quien los denominó de esta manera.

las que estableció los cimientos de la teoría de la medida que llevará a cabo Lebesgue.

En el trabajo desarrollado por Borel, se percibe claramente una gran influencia de las ideas de Cantor, en particular en lo relativo a los conjuntos numerables. Esta influencia es evidente, cuando Borel demuestra que los conjuntos numerables tienen medida cero. Sin embargo, no se entrará en ningún detalle acerca de estas demostraciones llevadas a cabo.

Cabe señalar que Borel no hace absolutamente ninguna referencia o insinuación sobre una posible conexión entre su concepto de medida y la teoría de integración.

La Medida de Lebesgue

En el intento de la caracterización de la medida de conjuntos numerables, se llegó a un resultado de carácter paradójico, así por ejemplo, el conjunto $E = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ es a la vez numerable y denso, y tenía la propiedad de que $C_e(E) = 1$ y $C_i(E) = 0$, luego E no tendría una J-medida ya que no puede ser recubierto por un número finito de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña. Sin embargo, eso es posible por medio de un recubrimiento con un conjunto infinito enumerable de intervalos. Posteriormente, Borel mostró que ciertos conjuntos infinitos no son enumerables y por lo tanto los conjuntos enumerables, en cierto sentido, deberían tener medida cero. Y puesto que la medida de un punto es cero, una medida debería ser enumerablemente aditiva. Justamente, éste es el punto de partida de la teoría de la medida de Lebesgue.

Al igual que Borel, Lebesgue en 1901 establece una teoría de la medida para los conjuntos lineales a partir de la generalización de la noción de longitud. Él, no sólo transcribe los desarrollos de estos dos matemáticos (Jordan y Borel), sino que les da una forma más concreta con el objetivo de otorgar una salida más general al problema conceptual de la medida.

Para Lebesgue el problema de la medida, desde el punto de vista analítico, consiste en asignarle a cada conjunto acotado un número mayor o igual a cero. Más específicamente, se trata de definir una función medida μ

$$\mu : \{X/X \subset \mathbb{R} \text{ es acotado}\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\},$$

que satisfaga las siguientes condiciones:

L1) Existe un conjunto cuya medida es diferente de cero. $\mu(E) \neq 0$, para algún E.

L2) La medida es invariante bajo traslaciones. Es decir, cualquiera que sea el subconjunto de la recta real E, se tiene $\mu(E + a) = \mu(E), \forall a \in \mathbb{R}$ siendo $E + a = \{x + a : x \in E\}$

L3) La medida de la unión de un número finito o infinito numerable de conjuntos disjuntos dos a dos, es la suma de las medidas de estos conjuntos.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), \quad \text{con} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \phi.$$

A continuación Lebesgue introduce algunas definiciones necesarias para establecer la medida de subconjuntos acotados de $\mathbb{R}$.

Definición 3.2. *Sea un subconjunto E acotado de $\mathbb{R}$. Se define la medida exterior de E, denotada $\mu_e(E)$, como la cota inferior más grande de las medidas de todos los conjuntos abiertos acotados que contienen al conjunto E:*

$$\mu_e(E) = \inf_{E \subset G} \{m(G) : G \text{ es abierto}\}.$$

Definición 3.3. *Sea E un subconjunto acotado de $\mathbb{R}$. Se define la medida interior de E, denotada $\mu_i(E)$, como la cota superior más pequeña de las medidas de todos los conjuntos cerrados contenidos en E:*

$$\mu_i(E) = \sup_{F \subset E} \{m(F) : F \text{ es cerrado}\}.$$

Basándose en estas dos definiciones, Lebesgue incorpora la definición de conjuntos medibles, como aquellos subconjuntos de la recta real cuyas medidas interior y exterior coinciden y son finitas, así, la medida de un conjunto medible es el valor común de sus medidas interior y exterior:

Definición 3.4. *Sea un subconjunto E acotado de $\mathbb{R}$. Se dice que E es medible (Lebesgue medible o L-medible), si $\mu_i(E) = \mu_e(E)$.*

3.2. Integral de Lebesgue

Un año después de que Lebesgue introdujo la teoría de la medida que lleva su nombre, desarrolló el concepto moderno de la integral.

Para Lebesgue, geométricamente el problema de la integral es el siguiente:

> Dada una ecuación $y = f(x)$ de una curva C. Encontrar el área de un dominio limitado por un arco de C, un segmento de Ox y dos paralelas al eje y, de abscisas dadas por a y b, ($a < b$. ([12], pág. 24).

Para definir el concepto moderno de integral, Lebesgue realiza un proceso inverso a los establecidos por Riemann y Cauchy. Es decir, realiza la partición, no sobre el intervalo en el cual se busca integrar la función, sino sobre el codominio y define la integral, no como la suma de rectángulos sino como la suma de la medida de una familia de conjuntos.

Definición 3.5 (Integral de Lebesgue). *Sea f una función definida y acotada en el intervalo $[a, b]$, tal que:*

1. *Existen m y M tales que $m \leq f(x) \leq M$, para todo $x \in [a, b]$.*

2. *Para todo c, d entre m y M, el conjunto $\{c \leq f \leq d\}$ es medible.*

Se considera una partición $P = \{y_0, y_1, \ldots, y_n\}$ *de* $[m, M]$ *tales que*

$$m = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_{n-1} < y_n = M.$$

Se define el conjunto medible $e_i = \{x \in [a,b] : y_i \leq f(x) < y_{i+1}\}$, *para* $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ *y sean las sumas:*

$$\sigma_n = \sum_{i=o}^{n-1} y_i m(e_i), \qquad \delta_n = \sum_{i=o}^{n-1} y_{i+1} m(e_i).$$

Entonces f *es integrable, si cuando* $\|P\| \longrightarrow 0$ *(*$n \to \infty$ *y* $(y_i - y_{i-1}) \to 0$*), las dos sumas* σ_n *y* δ_n *se aproximan a un valor límite único. Así, la integral estaría dada por:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sigma_n = \lim_{\|P\| \to 0} \delta_n.$$

A las funciones que cumplen la anterior propiedad se les llama funciones L-integrables.

De esta forma, Lebesgue extiende la integral de Riemann a todas aquellas funciones para las cuales, la preimagen de un conjunto L-medible es L-medible.

3.3. Criterio de Lebesgue para la Integrabilidad de Riemann

Naturalmente, con el ejemplo presentado en el apartado 2.2, Lebesgue evidencia que existen funciones acotadas con un conjunto denso de discontinuidades que son integrables bajo el sentido de Riemann. En vista de esto parece necesario preguntarse: ¿Qué condiciones debe tener el conjunto de discontinuidades de una función para ser R-integrable?.

El teorema definitivo respecto a este interrogante lo introduce Lebesgue, en el cual se hace patente la condición que se impone al conjunto de discontinuidades de una función para que sea Riemann integrable.

La idea que se halla detrás de este teorema es la misma que introdujeron en algún momento matemáticos como Hankel, Axel Harnack, entre otros, quienes trabajaban en el desarrollo y exposición de la teoría de integración de Riemann. La idea es que una función acotada es integrable si el conjunto de puntos de discontinuidad puede ser encerrado en un conjunto enumerable, de intervalos de longitud total arbitrariamente pequeña. A este teorema se lo ha denominado, *Criterio de Lebesgue para la Integrabilidad de Riemann.*

Para formular dicho criterio, resulta necesario introducir las siguientes definiciones y teoremas.[2]

Definición 3.6. *Un conjunto S de números reales posee medida cero si, para cada $\epsilon > 0$, existe un recubrimiento numerable de S por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes sea menor que ϵ.*

Teorema 3.1. *Sea F una colección numerable de conjuntos de $\mathbb{R}$, cada uno de los cuales tiene medida cero. Entonces su unión*

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

tiene medida cero.

Teorema 3.2. *sea f una función definida y acotada en $[a, b]$, y sea $\epsilon > 0$ un número real dado. Supóngase que $D_f(x) < \epsilon$ para cada x de $[a, b]$. Entonces existe $\delta > 0$ (que depende tan sólo de ϵ) tal que para cada sub-intervalo cerrado $\mathrm{T} \subseteq [a, b]$, se tiene que $\Omega_f(\mathrm{T}) < \epsilon$ siempre que la longitud de T sea menor que δ.*

Teorema 3.3. *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$. Para cada $\epsilon > 0$ se define el conjunto J_ϵ como sigue:*

$$J_\epsilon = \{x : x \in [a, b], D_f(x) \geq \epsilon\}.$$

[2] [1], págs. 206, 207 y 208.

Entonces J_ϵ es un conjunto cerrado.

Teorema 3.4. ***(Criterio de Lebesgue para la integrabilidad de Riemann.)*** *Sea f una función definida y acotada en $[a, b]$ y se D el conjunto de las discontinuidades de f en $[a, b]$. Entonces f es R-integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, D tiene medida cero.*

Demostración.

(Necesidad). En primer lugar se supone que D no tiene medida cero y se demuestra que f no es R-integrable. Si se considera a D_r como el conjunto de puntos x en los cuales $D_f(x) \geq \frac{1}{r}$, es decir

$$D_r = \left\{ x : D_f(x) \geq \frac{1}{r} \right\}$$

entonces se puede escribir D como una reunión numerable de conjuntos D_r:

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r.$$

Si $x \in D$, entonces $D_f(x) > 0$. Ahora bien si D no tiene medida cero, entonces alguno de los conjuntos D_r tampoco la tendrá (en virtud del teorema 3.1). Por consiguiente, existe un $\epsilon > 0$ para el cual cualquier colección numerable de intervalos abiertos que recubra D_r tendrá una suma de longitudes $\geq \epsilon$. Para una partición P de $[a, b]$ se tiene que la diferencia entre las sumas superiores $(U(f, P))$ y las sumas inferiores $(L(f, P))$ viene dada por

$$U(f, P) - L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)] \Delta x_i$$

esta suma puede descomponerse en dos partes S_1 y S_2, en donde S_1 contiene los términos que provienen de sub-intervalos que en su interior contienen puntos de D y S_2 contiene los términos restantes. Así,

$$\sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)] \Delta x_i = S_1 + S_2 \geq S_1.$$

Los intervalos abiertos de S_1 recubren D_r, excepto posiblemente a un subconjuntos finito en D_r de medida cero, luego la suma de sus longitudes Δx_i es $\geq \epsilon$. Pero en estos intervalos se tiene que $[M_i(f) - m_i(f)] \geq \frac{1}{r}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i \geq \frac{\epsilon}{r}$$

es decir, $S_1 \geq \dfrac{\epsilon}{r}$.

Esto significa que para cada partición P,

$$U(f, P) - L(f, P) \geq \frac{\epsilon}{r}.$$

Luego la condición (R_1) de Riemann no se verifica. Por consiguiente, f no es R-integrable. En otras palabras si f es R-integrable, entonces D tiene medida cero.

(Suficiencia). Ahora, se supone que D tiene medida cero y se demuestra que se verifica la condición (R_1) de Riemann. Nuevamente se escribe

$$D = \bigcup_{r=1}^{\infty} D_r \quad \text{donde} \quad D_r = \left\{ x : D_f(x) \geq \frac{1}{r} \right\}.$$

Dado que $D_r \subseteq D$, cada D_r tiene medida cero y así cada D_r se puede recubrir por medio de intervalos abiertos cuyas longitudes sumen $< \dfrac{1}{r}$. En virtud del teorema 3.3, D_r es cerrado y además D_r es acotado, luego D_r es compacto,[3] así un número finito de dichos intervalos recubrirá a D_r.

La reunión de estos intervalos es un conjunto abierto que designaremos A_r. El complementario $B_r = [a, b] - A_r$ es una reunión de un número finito de sub-intervalos cerrados de $[a, b]$. Sea I un sub-intervalo de B_r, si $x \in I$, entonces $D_f(x) < \dfrac{1}{r}$ y entonces, en virtud del teorema 3.2, existe un $\delta > 0$ (que sólo depende de r) tal que I puede ser subdividido en un número finito de sub-intervalos T de longitud $< \delta$ en los que

[3]Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ se llama compacto si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de S contiene un subrecubrimiento finito; esto es, una sub-colección finita que también recubra a S.

$\Omega_f(T) < \dfrac{1}{r}$. Los extremos de todos estos sub-intervalos definen una partición P_r de $[a, b]$. Ahora si P es más fina que P_r se puede escribir

$$\sum_{i=1}^{n}[M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i = S_1 + S_2$$

en donde S_1 contiene los términos que provienen de los sub-intervalos que contienen puntos de D_r, y S_2 contiene los términos restantes, es decir, S_2 contiene solo los sub-intervalos en donde $D_f(x) < \dfrac{1}{r}$ y en particular los sub-intervalos cuyos puntos son todos de continuidad de f. Así, la suma de sus longitudes es $< b - a$ y en el i-ésimo término de S_2, se tiene $[M_i(f) - m_i(f)] < \dfrac{1}{r}$, luego

$$\sum_{i=1}^{n}[M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i < \frac{b-a}{r} \quad \text{es decir} \quad S_2 < \frac{b-a}{r}. \tag{8}$$

Por otro lado, puesto que A_r recubre todos los intervalos que intervienen en S_1, se tiene $[M_i(f) - m_i(f)] < M - m$, donde M y m denotan el supremo y el ínfimo de f en $[a, b]$. Como las longitudes de los intervalos abiertos que recubren a D_r suman una longitud $< \dfrac{1}{r}$, entonces

$$\sum_{i=1}^{n}[M_i(f) - m_i(f)]\Delta x_i < \frac{M-m}{r} \quad \text{luego} \quad S_1 < \frac{M-m}{r}. \tag{9}$$

A partir de la suma de **(8)** y **(9)** se consigue

$$S_1 + S_2 < \frac{M - m + b - a}{r}$$

por consiguiente

$$U(f, P) - L(f, P) < \frac{M - m + b - a}{r}.$$

Así, se verifica la condición (R_1) para cada $r \geq 1$, luego f es R-integrable en $[a, b]$. En otras palabras si el conjunto de puntos de discontinuidad tiene medida cero entonces f es integrable en el sentido de Riemann.

$\square$

Con el criterio de Lebesgue para la integración de Riemann, se facilita la demostración de que la función f (Cap. 2, sección 2.2) altamente discontinua construida por Riemann, definida como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(nx)}{n^2}$$

donde

$$g(x) = \begin{cases} x - n, & \text{donde } n \text{ es el entero más cercano a } x, \\ 0, & \text{cuando } x = \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{3}{2},\ \pm\frac{5}{2}, \ldots \end{cases}$$

es R-integrable.

Así, si se considera $D = \{x/x = \dfrac{p}{2q}, p \text{ impar y } (p,q) = 1\}$ como el conjunto de puntos de discontinuidad de la función f, dicho conjunto es un subconjunto de $\mathbb{Q}$ y dado que el conjunto de los numeros racionarles es numerable,[4] D tambien lo es,[5] y siendo así, tiene medida cero.

Finalmente, como el conjunto de puntos de discontinuidad de f tiene medida cero, f es R-integrable.

La definición de Lebesgue considera una clase diferente de integrales y permite calcular la integral desde un punto de vista más amplio de funciones, que la integral de Riemann. Como se recordará, la integral de Riemann de una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se construye particionando el intervalo $[a,b]$ en sub-intervalos $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y aproximando el valor de la función f en cada sub-intervalo por un valor constante $f(x)$. Entonces, la integral $\int_a^b f(x)dx$ se obtiene por aproximación, como el límite de la suma de las áreas de los rectángulos cuyas bases se corresponden con los sub-intervalos I_k y cuyas alturas son las correspondientes constantes, por exceso y por defecto. Ahora, esta idea de ir cortando en rebanadas el área bajo el gráfico de una función f es natural y puede realizarse de

[4]Una demostración respecto a este enunciado, puede verse en el texto [1], pág 54.

[5]Teorema: todo subconjunto de un conjunto numerable es numerable.([1], pág 47)

dos maneras posibles: una es como se hace para calcular la integral de Riemann, es decir con rebanadas paralelas al eje de las abscisas y la otra es cortando en forma paralela al eje de las ordenadas. Esta última forma fue precisamente la adoptada por Lebesgue, así en la teoría de la integral de Lebesgue es de principal importancia la medida de conjuntos del tipo $f^{-1}(A)$, siendo $A \subset \mathbb{R}$ un subconjunto en el eje y.

3.4. Ejemplos

Se presentan dos ejemplos, de los cuales el primero muestra una función que es Lebesgue integrable mas no Riemann integrable. El segundo muestra una función que no es Lebesgue integrable.

Ejemplo 9 (**Función de Dirichlet**)**.** Considérese la función característica de los números racionales

$$X_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

La función $X_{\mathbb{Q}}(x)$ no es continua en ninguna parte y no es derivable y siendo así:

- No es Riemann integrable en $[0, 1]$, ya que para cualquier partición de $[0, 1]$ en subintervalos, contiene al menos un número racional y al menos un número irracional, dado que dichos conjuntos son densos en $\mathbb{R}$. Entonces las sumas por exceso serán todas iguales a 1 y por defecto serán todas iguales a cero. Por lo tanto, al no coincidir el limite de estas sumas, a un valor único, la integral de $X_{\mathbb{Q}}(x)$ no existe en el sentido Riemann.
- Es integrable en el sentido de Lebesgue[6] en $[0, 1]$, dado que cualquier conjunto medible en y que contenga a 0 o a 1, tiene como pre-imagen un conjunto medible.

[6]Una ampliación de la integrabilidad de la función característica de los racionales, se describe en los comentarios finales, conclusión 6.

Como se evidencia en el ejemplo (característica de los racionales), la integral de Lebesgue permite integrar funciones más generales, y de esta manera, queda establecido que la integral definida por Lebesgue es, en efecto, una generalización de la integral de Riemann.

La definición de la integral de Lebesgue obtenida a partir de la generalización de la teoría de la medida, se veía libre de la mayor parte de los inconvenientes que tenía la integral de Riemann y parecía entonces que Lebesgue había llevado el concepto de integral a su máxima extensión. En efecto, su generalización consiguió confirmar que funciones arbitrarias no quedaban por fuera del marco general del análisis matemático, cuestión que Fourier había planteado en el contexto de la integración de funciones (véase, Cap.1). Sin embargo, Lebesgue mismo se planteó la posibilidad de la existencia de conjuntos no medibles, pero fue Giuseppe Vitali, quien en 1905 presentó un ejemplo que contrarresta esta teoría.

Conjunto de Vitali

Vitali demostró que existen conjuntos para los cuales no son válidas las propiedades $L1$, $L2$ y $L3$ que Lebesgue había formulado para hacer efectiva una teoría de la medida. Así, el conjunto de Vitali constituye un ejemplo de un conjunto no medible en el sentido de Lebesgue.

Sea

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \mathbb{R}$$

en donde se define la siguiente relación binaria, para todo $x, y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$x \sim y \text{ si y sólo si } x - y \in \mathbb{Q}$$

que será una relación binaria de equivalencia,[7] ya que:

1. $x \sim x$ ya que $x - x = 0 \in \mathbb{Q}$.

2. Si $x \sim y$ entonces $y \sim x$. Obsérvese que si $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$, entonces $-(x-y) \in \mathbb{Q}$ luego $y - x \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $y \sim x$.

3. $x \sim y$ si y sólo si $x - y \in \mathbb{Q}$ y $y \sim z$ si y sólo si $y - z \in \mathbb{Q}$, entonces $(x-y) + (y-z) = x - z \in \mathbb{Q}$ si y sólo si $x \sim z$.

Se define el conjunto cociente[8] denotado $\frac{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}{\sim}$, como:

$$\frac{\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]}{\sim} = \left\{[x] : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$$

donde

$$\begin{aligned}
[x] &= \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y \sim x\right\} \\
&= \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y - x \in \mathbb{Q}\right\} \\
&= \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y - x = r, \quad r \in \mathbb{Q}\right\} \\
&= \left\{y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : y = x + r, \quad r \in \mathbb{Q}\right\}
\end{aligned}$$

[7] Sea K un conjunto dado no vacío y $\Re$ una relación binaria definida sobre K. Se dice que $\Re$ es una **relación de equivalencia** si cumple las siguientes propiedades:
Reflexividad: Todo elemento de K está relacionado consigo mismo. Es decir, $\forall x \in K, x \Re x$
Simetría: Si un elemento de K está relacionado con otro, entonces ese otro elemento también se relaciona con el primero. Es decir, $\forall x, y \in K, x \Re y$ entonces $y \Re x$
Transitividad: Si un elemento de K está relacionado con otro, y ese otro a su vez se relaciona con un tercero, entonces el primero estará relacionado también con este último. Es decir, $\forall x, y, z \in K, x \Re y, y \Re z$ entonces $x \Re z$

[8] Se llama **conjunto cociente** al conjunto de todas las clases de equivalencia definidas por $\Re$ sobre K, y se lo representa como $\frac{K}{\Re}$.

que son las clases de equivalencia[9] del conjunto cociente, las cuales son conjuntos disjuntos.

Gracias al axioma de elección,[10] se puede tomar un miembro representativo de cada clase de equivalencia

$$[x] = \left\{ y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] : y = x + r, \quad r \in \mathbb{Q} \right\}$$

y se los colecciona en el conjunto de elección $V \subseteq \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ llamado conjunto de Vitali.[11] Esto es, para cada real x, el conjunto $V \cap [x]$ es un conjunto unitario.

El conjunto V tendrá cardinal no numerable, por haber una cantidad no numerable de clases de equivalencia en el conjunto cociente.

Como el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es numerable, también lo será el subconjunto $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$. Considérese ahora, la sucesión $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de todos los números racionales del intervalo $[-1, 1]$, tal que $r_i \neq r_j$, si $i \neq j$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$ se define el conjunto V_k como el conjunto de puntos

$$V_k = r_k + v = r_k + V, \quad v \in V$$

que son conjuntos trasladados del conjunto de Vitali V al sumarle el número r_k.

La sucesión de conjuntos $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ verifica:

1) $V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j$, es decir, los conjuntos V_k son disjuntos dos a dos.

[9] Si $\Re$ es una relación de equivalencia en K y $x \in K$, se llama **clase de equivalencia** de x a $[x] = \{y \in K : y \Re x\}$

[10] Axioma de Elección: sea un conjunto X no vacío, entonces para cada subconjunto no vacío S de X es posible elegir algún elemento s de S. Esto es, existe una función f que asigna a cada conjunto no vacío S de X un representante $f(S)$ en S.

[11] Para la construcción del conjunto de Vitali hay infinitas posibilidades, lo importante es que el axioma de elección estipula la existencia de al menos una de ellas.

Por reducción al absurdo: si hubiese $v \in V_i \cap V_j$ cuando $i \neq j$, y como $V_k = r_k + V$ se tiene:

$$V_i \cap V_j \neq \emptyset \quad \text{si y sólo si} \quad (r_i + V) \cap (r_j + V) \neq \emptyset,$$

es decir, existen $v_i, v_j \in V$, tal que $v = r_i + v_i = r_j + v_j$, entonces

$$v_i - v_j = r_j - r_i \in \mathbb{Q}, \quad \text{si y sólo si} \quad v_i \sim v_j$$

luego $v_i = v_j$ pues en V solo hay un representante de cada clase, y como $v_i \sim v_j$ entonces $[v_i] = [v_j]$. Y si $v_i = v_j \Rightarrow r_i = r_j$. Por tanto, $V_i = V_j$ lo que implica $i = j$. ***Contradicción***.

Por lo tanto los conjuntos V_k son disjuntos dos a dos.

2) La unión de todos los conjuntos V_k, contiene al intervalo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y está contenida en el intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$, es decir:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Por un lado:

Sea $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ y como V es un conjunto de elección de

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \bigcup_{disjunta} \left\{[x] : x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right\}$$

se tiene que existe $v \in V$ tal que $[x] = [v]$, si y sólo si $x \sim v$, es decir $x - v \in \mathbb{Q}$ y por lo que

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad -\frac{1}{2} \leq -v \leq \frac{1}{2}$$

entonces

$$-1 \leq x - v \leq 1.$$

Si se denota $q = x - v \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]$, de donde $x = v + q$, entonces

$$x \in V + q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (r_k + V) = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$$

por lo tanto

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k.$$

Por otro lado:

Sea $v' \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$ y en particular $v' \in \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_{k_0}$, entonces $v' = v + r_{k_0}$, $v \in V$

y como

$$-\frac{1}{2} \leq v \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad -1 \leq r_{k_0} \leq 1$$

se tiene que

$$-\frac{3}{2} \leq v + r_{k_0} \leq \frac{3}{2}$$

de donde

$$-\frac{3}{2} \leq v' \leq \frac{3}{2}$$

por lo tanto

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Finalmente, se tiene que la sucesión $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ está formada por conjuntos acotados y disjuntos dos a dos, que cumple

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Por ser V_k congruente por traslación con V, aplicando la propiedad: La medida es invariante bajo traslaciones, se debería cumplir:

$$\mu(V_k) = \mu(r_k + V) = \mu(V), \text{para todo} k \in \mathbb{N}$$

sin embargo se va a probar que no existe dicha función μ.

Por contradicción, supóngase que existe la función μ, entonces, por el axioma de elección existe la sucesión de conjuntos $\{V_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ acotados y disjuntos dos a dos, congruentes por traslación con V, tal que:

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

luego

$$1 = \mu\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right) \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) \leq \mu\left(\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = 3$$

de donde

$$1 \leq \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} V_k\right) \leq 3$$

$$1 \leq \mu(V) \leq 3.$$

Ahora:

- Si $\mu(V) = 0$ entonces $1 \leq 0 \leq 3$. ***Contradicción***.
- Si $\mu(V) > 0$ entonces $1 \leq \infty \leq 3$. ***Contradicción***.

Con el axioma de elección, se ha asegurado la existencia del conjunto de elección V, llamado conjunto de Vitali, no numerable, al cual no se le puede asignar un valor en $[0, \infty]$ compatible con las propiedades $L1$, $L2$ y $L3$ exigidas a μ. Por lo tanto el conjunto V no es medible en el sentido de Lebesgue.

Una vez establecido el conjunto de Vitali (V), se define la función característica de este conjunto, como

$$f_V(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in V, \\ 0, & \text{si } x \notin V. \end{cases}$$

Dado que el conjunto de Vitali no es L-medible, la función f_V no es integrable en el sentido de Lebesgue.

El ejemplo dado por Vitali puso de manifiesto que es imposible construir una medida para todos los subconjuntos de $\mathbb{R}$, que sea además invariante por traslaciones y asigne a cada intervalo su longitud. Resultado que impide a la teoría de la medida de Lebesgue, abarcar todos los subconjuntos de un intervalo acotado de $\mathbb{R}$. Además con la función característica de este conjunto, se permite evidenciar que la integrabilidad de Lebesgue no se satisface para algunas funciones y por lo tanto se abre las puertas a nuevas generalizaciones del concepto de integral.

Capítulo 4

Comentarios Finales

Una vez presentado el panorama general de la evolución histórica del concepto de integral, en el contexto de figuras importantes como Cauchy, Riemann y Lebesgue, se presentan a continuación, algunos comentarios que muestran un análisis global de los tres capítulos anteriores.

1. Los problemas matemáticos, como el cálculo de áreas que se relaciona con la noción de integral, se consideraban principalmente en términos geométricos, en este sentido resultaba necesario instaurar un disciplina que solucionase tales problemas descartando los métodos geométricos. Una salida a dicha cuestión se llevo a cabo en el siglo XVIII, con el surgimiento del análisis como una disciplina independiente de las matemáticas, que tuvo lugar, después de que las matemáticas empiezan a sufrir un proceso de algebrización, es decir, cuando el álgebra se convirtió en una herramienta potente para liberar la matemática de todo referente geométrico. Sin embargo, los resultados de Cauchy, Riemann y Lebesgue dentro de la teoría de integración muestran que el análisis no pudo alejarse completamente de este enfoque.

   Con el auge de la algebrización de las matemáticas, iniciado por Descartes en el siglo XVII, se evidenciaba la presencia de un concepto, el de función, que traía asociado el concepto de integral, y en este sentido, con la incorporación de funciones más generales se tuvo que considerar a las integrales como áreas y por lo tanto recurrir a una interpretación geométrica. Así, Fourier al encaminar sus ideas a dichas funciones, no consideró la ausencia del área cuando f es una función arbitraria puesto que para cada x existe una ordenada $f(x)$ y estas ordenadas determinan una región del plano. De esta manera, el problema que planteó Fourier fue el de establecer la integral definida, como un área cuando f es una función con cada vez mayor grado de discontinuidad.

En busca de dar una respuesta a lo planteado por Fourier, Cauchy introduce una primera definición formal de integral definida, sin embargo, para trabajar con funciones arbitrarias más generales, es necesario generalizar la integral más allá de la idea intuitiva del "área bajo una curva", sólo entonces es posible calcular la integral de una función con un número infinito de discontinuidades, que había planteado Fourier. Riemann desarrolló una teoría de integración que soportaba tales funciones, no obstante, su noción de integral tenía ciertas limitaciones y esto es justamente el punto de partida de la moderna teoría de integración debida a Lebesgue, quien presenta una extensión de la noción de integral basada en la teoría de la medida, pero que no se aleja completamente de lo geométrico.

2. El análisis de Cauchy se restringía al tratamiento de funciones continuas. En términos generales para Cauchy, una función $f(x)$ es continua entre ciertos límites dados de x, si entre estos límites al darse un incremento infinitamente pequeño i de x siempre se obtiene un incremento infinitamente pequeño $f(x+i)-f(x)$ de la función. En esencia se trata de una concepción global de continuidad en la cual se analiza para todo el intervalo, mientras que la definición actual, una función f es continua en un punto x_0, si para todo $\epsilon > 0$, existe δ (que depende de ϵ), tal que $|f(x)-f(x_0)| < \epsilon$ cuando $|x-x_0| < \delta(\epsilon)$, determina la continuidad de

una manera puntual. Así, su diferencia radica en cuanto al objeto sobre el cual se evalúa la continuidad, es decir, mientras que para Cauchy tiene sentido hablar de continuidad en un intervalo, en la forma actual el análisis de continuidad se hace puntualmente y a partir de ahí se determina para intervalos.

Además, los términos usados en la definición de Cauchy, como infinitamente pequeño y decrecimiento indefinido, guardan reminiscencias del movimiento que corresponde a un contexto físico, del cual el análisis se quería desligar. Este impasse se soluciona mediante la reformulación de continuidad que involucra el concepto de límite, que se hace evidente en la definición actual, con la incorporación de las herramientas ϵ, δ.

3. La integral de Riemann comprende como caso particular a la integral de Cauchy. En efecto, para Riemann, una función f definida y acotada en un intervalo $[a, b]$, es integrable si para cada partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ la suma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}),$$

se aproxima a un límite determinado, para cada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ y cuando la norma de la partición $\|P\| \longrightarrow 0$. Dicho límite define

$$\int_a^b f(x)dx$$

Particularmente, se puede considerar $t_i = x_{i-1}$, en cuyo caso la suma

$$S = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})$$

de donde

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

que es la definición de la integral de Cauchy.

De esta forma, la integral de Cauchy se obtiene como caso particular de la integral de Riemann cuando $t_i = x_{i-1}$.

En otros términos, toda función Cauchy integrable es Riemann integrable, por lo que cada función continua, con un número finito de discontinuidades ó con un conjunto de discontinuidades no denso en ninguna parte, es integrable en el sentido de Riemann. Sin embargo, para la integrabilidad de Riemann la condición de continuidad o numerabilidad en el conjunto de discontinuidades de una función, no es una condición estrictamente necesaria, pues existen funciones con un conjunto denso de discontinuidades para las cuales, la integral en el sentido de Riemann existe. Este resultado, hace evidente que las funciones arbitrarias (funciones con cada vez mayor grado de discontinuidad), no quedan por fuera del marco general del análisis, cuestión que inquietaba a Fourier en el tratamiento de dichas funciones.

De un modo similar, así como la integral de Cauchy es un un caso particular de la integral de Riemann, se puede decir que esta última, es acogida por la integral de Lebesgue. Así pues, las funciones integrables en el sentido de Riemann, también lo son según Lebesgue. Además, una función es integrable en el sentido de Lebesgue, si la preimagen de un conjunto medible es medible en este mismo sentido. Ahora bien, el problema de la medida fue creada en principio para llevar a cabo un análisis detallado de la longitud de sub-conjuntos de la recta real, pero como se llega a evidenciar con el ejemplo de Vitali (sección 3.4), realmente resulta imposible asociar una longitud a "cualquier" subconjunto de $\mathbb{R}$ de tal manera que sea invariante bajo traslación.

De una manera retrospectiva; existen funciones que no son Lebesgue integrables, como la función característica del conjunto de Vitali; funciones integrables en el sentido de Lebesgue que no lo son en el sentido de Riemann y así mismo; funciones Riemann integrables que no son Cauchy integrables.

4. La fundamentación de la teoría de conjuntos de Cantor, en la década de 1870, no tuvo efecto inmediato en el problema histórico de la concepción de integral; es decir, para la época, nadie se atrevía a establecer una teoría de integración con un enfoque conjuntista. Sin embargo, los efectos de estos descubrimientos, vienen a vislumbrarse en el contexto de la teoría de la medida que empezó a germinar con los trabajos de Jordan y Borel. En esta dirección, el surgimiento de la teoría de conjuntos tuvo relevancia indirecta en el tratamiento que Lebesgue (1902) hace del problema de la generalización de la noción de integral.

   Dentro del contexto de la teoría de integración de Riemann, en una de las propias condiciones necesarias y suficientes que Riemann introdujo y que considera equivalentes a su definición de integrabilidad: R_2, las componentes del conjunto $\{\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, 1 \leq i \leq n\}$ son intervalos y aunque la longitud de $\Delta x_i \to 0$, sus componentes no dejan de ser intervalos y por este mismo hecho, no tiene sentido hablar de longitud cero. Ahora bien, este impasse respecto a la longitud cero, se soluciona en el contexto de la teoría de la medida, en la cual la medida nula cobra sentido, no precisamente como longitud de intervalos sino como medida de conjuntos.

   Este hecho se hace especialmente evidente, cuando Lebesgue, después de establecer su definición de conjunto medible, demuestra que una función es integrable en el sentido de Riemann cuando el conjunto de sus discontinuidades tiene medida cero, cosa que no excluye la posibilidad que el conjunto de discontinuidades sea denso.

5. Uno de los aportes más importantes a la fundamentación de la integrabilidad de Lebesgue, lo constituye el trabajo de Camille Jordan. Así, Jordan llevó a cabo una reformulación de la noción de integral con un enfoque en la teoría de conjuntos y de la medida, es decir, él acepta la misma definición de integral de Riemann sólo que la establece para conjuntos medibles. De esta manera, el trabajo de Jordan constituye un puente inquebrantable entre la integración de Riemann y la de Lebesgue.

   Ahora bien, mientras que en la noción de integral de Riemann, el intervalo $[a, b]$ se divide en sub-intervalos y se establece la suma de las cantidades obtenidas al multiplicar la longitud de cada sub-intervalo por uno de los valores de y cuando x está en ese intervalo, en la integral de Lebesgue, el análisis de la discontinuidad se hace en "conjuntos" más pequeños dentro del mismo intervalo, los cuales son llamados conjuntos medibles. Así, en lugar de darse la partición en la variación de x (dominio), se da la partición en la variación de y (codominio). Además, la primera noción de integral, considera al dominio de una función como un intervalo cerrado y acotado, y la segunda admite dominios más generales, es decir, una función puede estar ahora definida sobre un intervalo acotado, no acotado, abierto o semiabierto. De ahí una de las diferencias de la noción de integral de Riemann con la establecida por Lebesgue.

6. Como lo plantea Jean Paul Pier en [8], pág.124, para una función característica $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida y acotada en $[a, b]$, es integrable en el sentido de Lebesgue si y sólo si $E \subset [a, b]$ es L-medible y necesariamente $\int_E f(x)dx = \mu(E)$, donde "Una función X_E es característica o indicadora si, dado un conjunto E medible contenido en S, la función toma un valor a para los elementos pertenecientes a S

y b para el resto". Así, la función característica de los racionales definida como

$$X_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

es integrable en el sentido de Lebesgue, sobre $[0, 1]$, dado que $E = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ es medible y además $\mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0$. Luego

$$\int_0^1 X_{\mathbb{Q}}(x)dx = \mu(\mathbb{Q} \cap [0, 1]) = 0.$$

Bibliografía

[1] Apóstol, T. *Mathematical Análisis*. Versión española por Dr. José Pla Cabrera. Editorial Reverté, S. A. Segunda Edición. Barcelona. 2001.

[2] Ballvé, E. y Jiménez Guerra, P. *Borel, Baire y Lebesgue*. Disponible en http://dmle.cindoc.csic.es/pdf/HISTORIADELAMATEMATICA _ 1998 _ 00 _ 00 _ 08.pdf. 1998.

[3] Cordero Zamorano, P. *La integral de Lebesgue en su contexto histórico*. Disponible en http://wwww.uam.es /personal _ pdi /ciencias /barcelo /historia /La20integral20de20Lebesgue.pdf. 2006.

[4] Grattan - Guinness. *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos, 1630 - 1910. Una Introducción Histórica*. Alianza editorial. Madrid. 1984.

[5] Galaz-Garcia, F. *Definiciones Originales de la Integral y Medida de Lebesgue*. Disponible en http://www.math.umd.edu/∼ galazg/comentarios_lebesgue.pdf.

[6] Hawkins, T. *Lebesgue is theory of integration*. Its origins and development. Chelsea Publishing company. New York. Second edition 1979.

[7] Leithold, L. *El cálculo*. Oxford University Press México, S.A. de C.V. Séptima edición en español. 1998.

[8] Pier, Jean-Paul. *Histoire de intégration.* Vingt cinq siècles de mathématiques. Masson, Paris.

[9] Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral*. Editorial Limusa, S.A. de C.V. México. 2004.

[10] Recalde, L. *La Teoría de Funciones de Baire. La Constitución de lo Discontinuo como Objeto Matemático*. Editorial Universidad del Valle. 2004.

[11] Recalde, L. Las raíces Históricas de la Integral de Lesbesgue.*Matemáticas: Enseñanza Universitaria*. Volumen XV. Págs (103 a 127). Universidad del Valle. 2007.

[12] Recalde, L. *Lecciones de Historia de las matemáticas*. Obra sin publicar, Octava Lectura.

[13] *Construcción de un conjunto no medible Lebesgue*. Disponible en http://ocw.unican.es/ciencias-experimentales/ampliacion-de-analisis-de-varias-variables-reales/ampliacion-variables-beatriz-porras/lebesgue-material-de-clase-pantalla/MCP11-nomed2-W.pdf.