

**ANÁLISIS CUALITATIVO
DE UNA GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE HOOKE**

**JHON EVERARDO CERÓN CAICEDO
LUIS HERNÁN GUERRERO LUNA**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

2008

**ANÁLISIS CUALITATIVO
DE UNA GENERALIZACIÓN DE LA LEY DE HOOKE**

**JHON EVERARDO CERÓN CAICEDO
LUIS HERNÁN GUERRERO LUNA**

**Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas**

Mg. SAULO MOSQUERA LÓPEZ
Asesor

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2008**

Nota de Aceptación

Asesor.

Jurado.

Jurado.

San Juan de Pasto, Noviembre de 2008

A mi Dios ...
A nuestros padres

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todas las personas que de manera directa o indirecta tuvieron parte en la realización de este trabajo, a nuestros Maestros de Pregrado y a nuestros compañeros de estudio.

Finalmente agradecemos especialmente a quien fue el Director de esta tesis, y también nuestro Maestro, Mg. Saulo Mosquera López, por su valiosa asesoría y apoyo permanentes.

Atentamente,

JHON EVERARDO CERÓN CAICEDO
LUIS HERNÁN GUERRERO LUNA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Noviembre 2008

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. MARCO TEÓRICO	18
1.1. DEFINICIONES BÁSICAS	18
1.2. LINEALIZACIÓN	19
1.3. EL TEOREMA DE LA VARIEDAD CENTRAL	22
1.4. FUNCIONES DE LIAPUNOV	24
1.5. EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON	26
1.6. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE BIFURCACIÓN	28
1.6.1. Bifurcación de Puntos de Equilibrio	29
1.6.2. Bifurcación de Hopf	30
2. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL	32
2.1. JUSTIFICACIÓN DEL MODELO	32
2.2. CONSIDERACIONES INICIALES	36
2.3. ANÁLISIS DE PENDIENTE NULA	37
2.3.1. Resorte Duro	37
2.3.2. Resorte Suave	39
2.4. ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO A TRAVÉS DE LA LINEALIZACIÓN	44
2.5. ESTABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO EN EL ORIGEN	46
2.5.1. El Flujo Sobre la Variedad Central	46
2.5.2. Funciones de Liapunov y Estabilidad del Origen	48
2.6. ÓRBITAS CERRADAS	49
2.6.1. Órbitas Cerradas y Cálculo Diferencial	49
2.6.2. Órbitas Cerradas y el Teorema de Poincaré-Bendixson	51
2.7. EL PERÍODO DE LAS ÓRBITAS	53
2.8. BIFURCACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO	55
2.9. SIMULACIONES NUMÉRICAS	
COMPARACIÓN DE RESORTES DUROS Y SUAVES	55
2.9.1. Análisis A posteriori: Simulaciones Numéricas Vs Período en Órbitas Cerradas	58
CONCLUSIONES	63
BIBLIOGRAFÍA	66

LISTA DE CUADROS

2.1. Condiciones iniciales Vs Período. Resortes Duros y Resortes Suaves.	59
--	----

LISTA DE FIGURAS

1.1. Estabilidad de los Puntos de Equilibrio.	19
1.2. El Teorema de Hartman-Grobman.	21
1.3. Campo Vectorial en la frontera de U .	25
1.4. Región Anular.	28
2.1. Resortes Verticales.	33
2.2. Resorte Lineal, Resorte Duro y Resorte Suave.	35
2.3. Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_0 . Resorte Duro.	38
2.4. Retrato de Fase. Resorte Duro.	39
2.5. Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_0 . Resorte Suave.	40
2.6. Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_1 . Resorte Suave.	41
2.7. Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_2 . Resorte Suave.	42
2.8. Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_0 , P_1 y P_2 . Resorte Suave.	43
2.9. Retrato de Fase. Resorte Suave.	44
2.10. Órbitas $b = \frac{1}{2}$, $c^2 = 1$. Resorte Duro.	56
2.11. Órbitas $b = -\frac{1}{2}$, $c^2 = 1$. Resorte Suave.	56
2.12. Órbitas $b = 2$, $c^2 = 1$. Resorte Duro.	57
2.13. Órbitas $b = -2$, $c^2 = 1$. Resorte Suave.	58
2.14. Órbitas Cerradas $b = \frac{1}{2}$. Resorte Duro.	60
2.15. Órbitas Cerradas $b = -\frac{1}{2}$. Resorte Suave.	60
2.16. Gráfica Posición-Tiempo $b = \frac{1}{2}$. Resorte Duro.	61
2.17. Gráfica Posición-Tiempo $b = -\frac{1}{2}$. Resorte Suave.	61
2.18. Gráfica Velocidad-Tiempo $b = \frac{1}{2}$. Resorte Duro.	62
2.19. Gráfica Velocidad-Tiempo $b = -\frac{1}{2}$. Resorte Suave.	62

RESUMEN

En este trabajo se discute la estabilidad y bifurcación de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx + ax^3 = 0,$$

propuesta como un modelo de una generalización de la Ley de Hooke en la cual m , k y a son parámetros reales. Complementariamente, se analiza la existencia de órbitas cerradas de la misma; y se realizan simulaciones numéricas para indagar sobre otro tipo de comportamiento de las soluciones de la ecuación.

ABSTRACT

In this paper discusses the stability and bifurcation of the fixed points of the differential equation

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + ax^3 = 0,$$

proposal as a model of a generalization of the Hooke's Law in which m , k and a are real parameters. Complementarily, analyzes the existence of closed orbits of the same one; and is performed numerical simulations to inquire on another type of behavior of the solutions of the equation.

INTRODUCCIÓN

Uno de los grandes retos de la humanidad, alrededor del cual los científicos han realizado encomiables esfuerzos, es el de lograr comprender, explicar y modelar los diferentes fenómenos que ocurren en la naturaleza. Aunque existen diferentes maneras de tratar ese problema, una de las más fructíferas en este sentido ha sido utilizar ecuaciones diferenciales.

Los primeros intentos en utilizar ecuaciones diferenciales se realizaron alrededor del tratamiento de fenómenos ordenados, es decir, fenómenos en los cuales sus movimientos se pueden explicar en un esquema de causa efecto. Un segundo frente de trabajo en el cual las ecuaciones diferenciales han tenido éxito, consiste en estudiar fenómenos en los cuales pequeños cambios producen pequeños efectos y los grandes efectos se obtienen mediante la suma de muchos cambios pequeños, es decir, fenómenos que puedan expresarse y explicarse en términos de carácter lineal.

Este pensamiento fue el paradigma durante más de dos siglos, iniciando con la obra de Isaac Newton, ***“Principios Matemáticos de la Filosofía Natural”*** cuyo mensaje manifiesto es:

“La naturaleza posee unas leyes, nosotros podemos encontrarlas”.

Continuando con la obra de Simón Laplace ***“Ensayo Filosófico sobre las Probabilidades”*** según la cual:

“Un ser inteligente que en un instante dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la forman, y que fuera lo suficientemente inmenso como para poder analizar dichos datos, podría condensar en una única fórmula el movimiento de los objetos más grandes del universo y el de los átomos más ligeros: nada será incierto para dicho ser; y tanto el pasado como el futuro estarían presentes ante sus ojos”.

Lo que debemos comprender, al analizar afirmaciones como la de Laplace, es el clima de entusiasmo que prevalecía en la ciencia de aquella época, siglo *XVIII*, cuando un fenómeno tras otro, mecánica, calor, ondas, sonido, luz, magnetismo, electricidad, era dominado por la técnica existente.

Había nacido el paradigma del determinismo clásico: si las ecuaciones describían la evolución de un sistema unívocamente, en ausencia de perturbaciones externas aleatorias, entonces su comportamiento estaba unívocamente especificado en todo instante.

En esta línea de acción Robert Hooke, en el año de 1678, había formulado la ley conocida como “**Ley de Hooke**”:

“La fuerza que devuelve un resorte a su posición de equilibrio es proporcional al valor de la distancia que se desplaza de esa posición”.

O en términos de ecuaciones diferenciales

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Para llegar a este descubrimiento Hooke tuvo que desenvolverse en la metalurgia, como una especie de “mecánico-herrero”, lo cual le permitió construir una pieza metálica enrollada en forma de hélice y descubrir sus propiedades, inventando así en 1675 el “volante con resorte espiral”¹, en donde el resorte regula la oscilación rotatoria de una rueda volante en los relojes que, gracias a esto pudieron convertirse en portátiles y sustituir a los de péndulo. Aunque no debiera llamársele “ley”, pues es una afirmación acerca de un dispositivo específico, es decir, un resultado experimental válido sólo en un intervalo limitado y no una ley fundamental de la naturaleza, debe observarse que posee carácter lineal y como tal encaja perfectamente en el pensamiento prevaleciente en aquel entonces.

Sin embargo, también existe una clase de ecuaciones diferenciales muy diferentes y los científicos del siglo *XIX* las conocían muy vagamente, las ecuaciones diferenciales no lineales. El problema radica en las técnicas matemáticas, de esa época, para resolverlas. El procedimiento utilizado por los científicos del siglo *XIX* para resolver una ecuación diferencial no lineal consiste en linealizarla, es decir desarrollar en serie de Taylor alrededor de un punto, la función que define a la ecuación diferencial y despreciar los términos de orden superior al primero. El análisis de la ecuación diferencial lineal resultante proporcionará conclusiones, que bajo ciertas condiciones, se puede aplicar al problema no lineal. Ese método reduccionista perduró hasta la década de 1970 cuando los avances matemáticos y la aparición del ordenador de alta velocidad capacitó a los científicos para sondear el complejo interior de las ecuaciones no lineales.

Al mencionar los avances matemáticos nos referimos básicamente al trabajo inicial desarrollado por Henry Poincaré a finales del siglo *XIX* cuando proporcionó las bases de lo que actualmente se conoce como la “**Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales**”. El trabajo de Poincaré fue continuado por George Birkhoff y complementado a principios de la década de 1960 por el matemático norteamericano Stephen Smale. Es aquí, en la Teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales, donde se fundamenta básicamente este trabajo.

Este consiste en analizar utilizando técnicas cuantitativas y cualitativas la ecuación diferencial no lineal

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + ax^3 = 0,$$

¹[6]. En esta página se presenta una breve reseña histórica de la Ley de Hooke, donde se encuentra más información sobre sus inicios en la mecánica.

propuesta como un modelo que generaliza la Ley de Hooke². En ella m , k y a son parámetros reales. Físicamente, x representa el desplazamiento de un cuerpo de masa m en el extremo de un resorte no lineal sin fricción, k es la elasticidad del resorte la cual se considera positiva y cuya rigidez a varía según que el material del resorte sea duro si $a > 0$ ó suave si $a < 0$.

Este es un trabajo de carácter monográfico en el cual se clasifica y caracteriza la estabilidad y la bifurcación de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial mencionada anteriormente; además se estudia la existencia de órbitas cerradas de la misma.

El desarrollo del trabajo consta de dos capítulos así:

En el capítulo 1, se presentan las definiciones y resultados de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias suficientes para el logro de los objetivos específicos. En particular se presentan los criterios de la linealización, el teorema de Hartman-Grobman, el teorema de Liapunov y el teorema de Hopf.

El capítulo 2, es el cuerpo básico del trabajo y en él se presentan las demostraciones y análisis necesarios para alcanzar los objetivos específicos. En particular se estudian las siguientes características del sistema:

1. Si el resorte es duro, es decir, si $a > 0$ el único punto de equilibrio de la ecuación diferencial corresponde al origen; pero si el resorte es suave, es decir, si $a < 0$ la ecuación diferencial posee tres puntos de equilibrio uno de ellos el origen y dos simétricos con respecto al eje y .
2. Verificar que el análisis de pendiente nula alrededor del origen no es concluyente, puesto que todas las flechas parecen girar en la misma dirección y por tanto, el punto de equilibrio puede comportarse como un nodo, un centro o un foco; pero alrededor de los puntos de equilibrio restantes, en el resorte suave si es posible concluir que éstos puntos se comportan como sillas.
3. Demostrar que si $a < 0$ los puntos de equilibrio simétricos con respecto al eje y son hiperbólicos y corresponden a puntos sillas e inestables, utilizando la técnica de la linealización y el teorema de Hartman-Grobman.
4. Demostrar que el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico y corresponde a un centro estable de la ecuación diferencial, aplicando el teorema de Liapunov.
5. Probar que las órbitas en el plano fase están dadas por

$$y^2 = -\frac{k}{m}(x^2 + \frac{a}{2k}x^4) + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

y que estas curvas son cerradas.

²[5]. pp. 247-248.

6. Demostrar que dada la condición inicial $x = x_0$, $y = 0$ en $t = 0$, entonces el período de las órbitas cerradas está dado por la expresión

$$T = \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u)}}.$$

7. Realizar simulaciones numéricas, utilizando Phaser, para verificar los resultados obtenidos.

Referencias: [1], [2], [3] y [4].

1. MARCO TEÓRICO

El análisis del sistema que modela la generalización de la Ley de Hooke considerada en este trabajo, se realizará básicamente de acuerdo con las teorías, técnicas y métodos desarrollados en [1], [2], [3] y [4] de los cuales se han tomado las definiciones, teoremas y apartados que servirán como soporte para cumplir el propósito de este trabajo. Esencialmente se tiene:

1.1. DEFINICIONES BÁSICAS

En este trabajo consideramos ecuaciones diferenciales de la forma:

$$x' = f(x), \quad (1)$$

donde f es un campo vectorial C^1 definido en un abierto U de \mathbb{R}^n . **Ecuaciones Diferenciales** de este tipo son llamadas **Autónomas** debido a que la función f no depende explícitamente de la variable independiente t .

Una **Solución** de la ecuación (1) sobre un intervalo $I \subset \mathbb{R}$ es una función $x(t)$

$$x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

continuamente diferenciable que satisface dicha ecuación, es decir

$$x'(t) = f(x(t))$$

para todo t en I .

Teorema 1.1.1 Existencia y Unicidad ([3], Cáp. 8, Sec. 2).

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , x_0 un punto en U y f una aplicación C^1 en U entonces existe un $a > 0$ tal que el problema de valor inicial

$$x' = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

tiene una única solución $x(t)$ sobre el intervalo $[-a, a]$.

Definición 1.1.1 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y f una aplicación C^1 en U . Para x_0 en U denotamos con $\phi(t, x_0)$ la solución del problema de valor inicial

$$x' = f(x)$$

$$x(0) = x_0$$

definida sobre un intervalo maximal de existencia I . Para t en I el conjunto de aplicaciones

$$\phi_t : U \rightarrow U$$

definida como

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0)$$

se llama el **Flujo** de la ecuación diferencial (1).

1.2. LA LINEALIZACIÓN

Una manera adecuada para iniciar el estudio del sistema (1), es determinar sus puntos de equilibrio y describir el comportamiento del sistema cerca de dichos puntos.

Una de las formas de realizar esto es a través de la linealización del sistema (1) de lo cual nos ocuparemos a continuación.

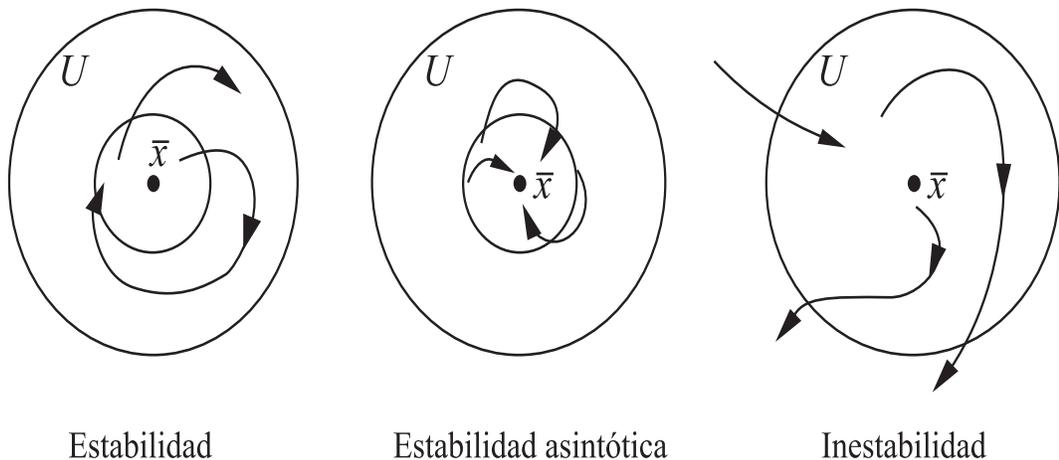
Definición 1.2.1 Sea \bar{x} un punto en U . \bar{x} es un **Punto de Equilibrio (Punto Crítico)** de (1), si $f(\bar{x}) = 0$, es decir, si \bar{x} es un cero de la función f .

El punto de equilibrio \bar{x} es **Estable** si para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo x en U con $\|x - \bar{x}\| < \delta$ se debe cumplir que $\|\phi_t(x) - \bar{x}\| < \epsilon$ para $t \geq 0$. Si adicionalmente se puede escoger $\delta > 0$ tal que para todo x en U con $\|x - \bar{x}\| < \delta$ se cumpla que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x) = \bar{x}$$

entonces \bar{x} es **Asintóticamente Estable**. Un punto de equilibrio \bar{x} que no sea estable es **Inestable**.

Figura 1.1: Estabilidad de los Puntos de Equilibrio.



Intuitivamente, un punto de equilibrio es estable si todas las soluciones que inician cerca del punto de equilibrio permanecen cerca de él para todo tiempo futuro y es asintóticamente estable si todas las soluciones que inician cerca del punto de equilibrio se acercan cada vez más a él para todo tiempo futuro; de lo contrario es inestable.

1.2.2 Criterio de Linealización

Sea \bar{x} un punto de equilibrio del sistema

$$x' = f(x), \quad (1)$$

y escribamos $x = \bar{x} + y$ entonces al desarrollar f en serie de Taylor alrededor de \bar{x} se tiene

$$x' = \bar{x}' + y' = f(\bar{x} + y) = f(\bar{x}) + Df(\bar{x})y + N(\bar{x}, y)$$

con y en una vecindad del origen de \mathbb{R}^n , $N(\bar{x}, y)$ una función no lineal tal que

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{N(\bar{x}, y)}{\|y\|} = 0$$

y $Df(\bar{x})$ es la derivada de f evaluada en \bar{x} , la cual explícitamente es la matriz

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

que se conoce como **la matriz Jacobiana de f** en el punto de equilibrio \bar{x} .

Puesto que \bar{x} es un punto de equilibrio de f entonces $f(\bar{x}) = 0$ y por tanto

$$y' = Df(\bar{x})y + N(\bar{x}, y). \quad (2)$$

Bajo ciertas condiciones la estabilidad del punto \bar{x} de (1) está determinado por la estabilidad del origen $y = 0$ del sistema lineal

$$y' = Df(\bar{x})y$$

el cual se conoce como la **linealización** de (1) alrededor de \bar{x} . Consideramos esto en seguida.

Definición 1.2.2 *Sea \bar{x} un punto de equilibrio de (1). \bar{x} es un **Punto de Equilibrio Hiperbólico** de (1) si ninguno de los valores propios de la matriz $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula. Si algún valor propio de $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula el punto de equilibrio es **No Hiperbólico**.*

Definición 1.2.3 *Sea \bar{x} un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (1).*

- \bar{x} es un **Sumidero** si todos los valores propios de $Df(\bar{x})$ tienen parte real negativa.
- \bar{x} es una **Fuente** si todos los valores propios de $Df(\bar{x})$ tienen parte real positiva.
- \bar{x} es una **Silla** si $Df(\bar{x})$ tiene al menos un valor propio con parte real negativa y un valor propio con parte real positiva.

Definición 1.2.4 Sea \bar{x} un punto de equilibrio sistema (1).

\bar{x} es un **Centro** si algún valor propio de $Df(\bar{x})$ tiene parte real nula.

Teorema 1.2.1 ([3], Cáp. 9, Sec. 1-2).

Sea \bar{x} un punto de equilibrio hiperbólico del sistema

$$x' = f(x) \tag{1}$$

entonces

1. Si \bar{x} es un sumidero entonces \bar{x} es asintóticamente estable.
2. Si \bar{x} es una fuente o una silla entonces \bar{x} es inestable.

Un resultado que relaciona de manera mas directa el flujo del sistema no lineal (1) con su linealización alrededor de un punto de equilibrio es el siguiente.

Teorema 1.2.2 Hartman-Grobman.

Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , f una aplicación C^r sobre U , $r \geq 1$ y \bar{x} en U un punto de equilibrio hiperbólico de

$$x' = f(x), \tag{1}$$

entonces existe un homeomorfismo h definido en alguna vecindad V de \bar{x} que localmente transforma las órbitas del flujo no lineal $\phi_t(x_0)$ de (1) en las órbitas del flujo

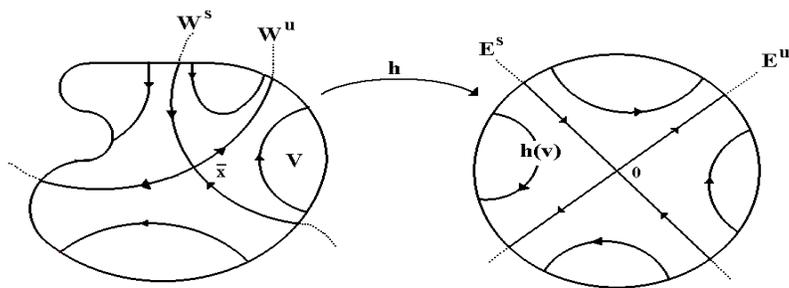
$$e^{Df(\bar{x})t}h(x_0)$$

del sistema lineal

$$y' = Df(\bar{x})y. \tag{3}$$

El homeomorfismo h preserva el sentido de la órbitas y puede seleccionarse de manera que preserve la orientación por el tiempo.

Figura 1.2: El Teorema de Hartman-Grobman.



Si el punto fijo \bar{x} es no hiperbólico, es decir, $Df(\bar{x})$ posee al menos un valor propio con parte real nula, entonces la estabilidad no puede determinarse a través de la linealización o del teorema de Hartman-Grobman y deben utilizarse otro tipo de técnicas; consideramos esto a continuación.

1.3. EL TEOREMA DE LA VARIEDAD CENTRAL

Sea \bar{x} un punto de equilibrio del sistema

$$x' = f(x), \quad (1)$$

entonces como se mencionó en la sección 1.2 el cambio de variable $x = \bar{x} + y$ permite escribir el sistema (1) como

$$y' = Df(\bar{x})y + N(\bar{x}, y), \quad (2)$$

donde

$$\lim_{\|y\| \rightarrow 0} \frac{N(\bar{x}, y)}{\|y\|} = 0$$

Aspectos básicos del álgebra lineal, sobre espacios propios generalizados, permiten encontrar una transformación lineal T , tal que su matriz asociada es la forma normal de Jordan correspondiente a los vectores propios generalizados de $Df(\bar{x})$ con parte real nula, parte real negativa y parte real positiva respectivamente, y por tanto el cambio de variable

$$y = TU$$

donde

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, u \in \mathbb{R}^{n_c}, v \in \mathbb{R}^{n_s}, w \in \mathbb{R}^{n_u}; \text{ con } n_s + n_u + n_c = n$$

transforma el sistema (2) en la forma

$$\begin{aligned} u' &= A_{n_c} u + N_c(u, v, w) \\ v' &= A_{n_s} v + N_s(u, v, w) \\ w' &= A_{n_u} w + N_u(u, v, w) \end{aligned} \quad (4)$$

donde N_c , N_s , N_u son las componentes de $N(\bar{x}, y)$ en los subespacios propios generalizados correspondientes a los vectores propios generalizados asociados a los valores propios de $Df(\bar{x})$ que tiene parte real nula, negativa y positiva respectivamente y A_{n_c} , A_{n_s} , A_{n_u} son matrices de orden $n_c \times n_c$, $n_s \times n_s$, $n_u \times n_u$ cuyos valores propios tienen parte real nula, parte real negativa y parte real positiva respectivamente.

Supongamos que el punto de equilibrio \bar{x} del sistema (1) es no hiperbólico y que $Df(\bar{x})$ posee únicamente valores propios con parte real nula y parte real negativa entonces el sistema (4) puede expresarse en la forma

$$u' = A_{n_c}u + N_c(u, v) \quad (5)$$

$$v' = A_{n_s}v + N_s(u, v)$$

donde $u \in \mathbb{R}^{n_c}$, $v \in \mathbb{R}^{n_s}$ y A_{n_c} , A_{n_s} son matrices cuyos valores propios tienen parte real nula, y parte real negativa respectivamente, además

$$N_c(0, 0) = DN_c(0, 0) = 0 \quad (6)$$

$$N_s(0, 0) = DN_s(0, 0) = 0.$$

En estas condiciones se tiene los siguientes resultados.

Teorema 1.3.1 *Teorema de la Variedad Central.* ([1], Cáp. 2, Sec. 2.3).

El sistema (5) posee una variedad central local descrita como la gráfica

$$W^c(0) = \{(u, h(u)) : u \in \mathbb{R}^{n_c}\}$$

de una función h de clase C^1 definida en una vecindad del origen de \mathbb{R}^{n_c} y tal que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$.

Si u es suficientemente pequeño la dinámica de (5) sobre $W^c(0)$ está determinada por la dinámica cerca al origen del sistema

$$u' = A_{n_c}u + N_c(u, h(u)). \quad (7)$$

Esta ecuación se llama la proyección de (1) sobre la variedad central del punto de equilibrio \bar{x} .

En cuanto a estabilidad se tiene:

Teorema 1.3.2 ([1], Cáp. 2, Sec. 2.4).

1. Si el origen en (7) es asintóticamente estable entonces el punto de equilibrio \bar{x} en (1) es asintóticamente estable.

2. Si el origen en (7) es inestable entonces el punto de equilibrio \bar{x} en (1) es inestable.

Una situación de particular interés en nuestro caso es aquella en la cual la matriz $Df(\bar{x})$ posee dos valores propios complejos conjugados y los demás con parte real no nula; en este caso una base de la restricción de $Df(\bar{x})$ a un subespacio 2-dimensional que reduce esta restricción a la forma normal real de la matriz $Df(\bar{x})$ está determinada por un vector propio en \mathbb{C}^2 de esta matriz, como en el siguiente teorema.

Teorema 1.3.3 ([3], Cáp. 4, Sec. 2).

Sea $z = u + iv$ en \mathbb{C}^2 un vector propio correspondiente a un subespacio 2-dimensional, de la restricción de la matriz $Df(\bar{x})$ con valores propios $\lambda, \bar{\lambda}$, $\lambda = \alpha + \beta i$ entonces una base de \mathbb{R}^2 que reduce la restricción de la matriz $Df(\bar{x})$ a la forma normal real

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

es $\{u, v\}$.

Otra técnica que permite decidir acerca de la estabilidad de un punto de equilibrio y que en particular es útil cuando el punto es no hiperbólico es el criterio o método Liapunov, considerado a continuación.

1.4. FUNCIONES DE LIAPUNOV

Uno de los métodos que permite determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, es el método o criterio de Liapunov.

En líneas generales lo que se pretende con el método de Liapunov es construir una función del tipo de energía $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que tenga derivada negativa a lo largo de las trayectorias, para que así esta función sea positiva y continuamente decreciente, de forma que a medida que transcurre el tiempo llega a un momento en que se encuentra en su posición de equilibrio, en esas condiciones se establecen las bases que permiten determinar la estabilidad del punto de equilibrio.

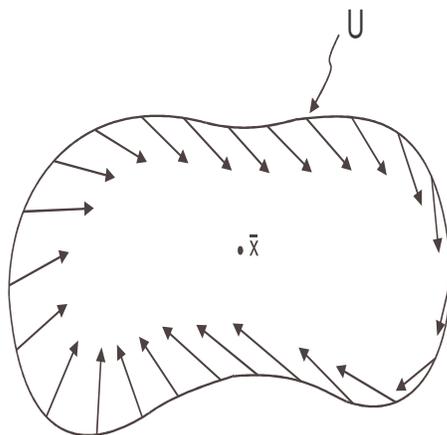
La desventaja de este método es que no hay un proceso sistemático para encontrar dicha función, pero la ventaja es que aunque no se la pueda encontrar no significa que el punto de equilibrio sea inestable o no asintóticamente estable.

El método de Liapunov frecuentemente es usado cuando la linealización no es suficiente para determinar si un punto de equilibrio es estable o no, en ese aspecto Liapunov demostró que ciertas funciones además de la función de energía de un sistema físico³, pueden ser usadas como una herramienta esencial para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio.

De esta forma será suficiente encontrar una vecindad $U \in \mathbb{R}^n$ que contenga al punto de equilibrio \bar{x} , tal que todas las órbitas que inicien en las cercanías de este punto, permanezcan en dichas cercanías a medida que transcurre el tiempo; esta condición tendrá validez, si se puede lograr demostrar que el campo vectorial es tangente a la frontera de U o análogamente si la dirección de sus vectores señalan hacia al punto de equilibrio (Véase. Figura. 1.3).

³Función positiva y continuamente decreciente, i.e., con derivada negativa que a medida que transcurre el tiempo llega un punto que alcanza su estado de equilibrio, en ese caso el sistema físico se considera estable.

Figura 1.3: Campo vectorial en la frontera de U .



Antes de enunciar el teorema de Liapunov se requieren previamente algunos conceptos.

Definición 1.4.1 *Un sistema de ecuaciones diferenciales en el plano*

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y),$$

es **Hamiltoniano**, si y solo si existe una función de dos variables $H(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial H}{\partial y} = f(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -g(x, y).$$

La función $H(x, y)$ se llama **función Hamiltoniana** para el sistema.

El siguiente teorema da una condición necesaria y suficiente para que un sistema planar sea Hamiltoniano.

Teorema 1.4.1 *El sistema*

$$x' = f(x, y)$$

$$y' = g(x, y),$$

es Hamiltoniano, si solo si

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y}$$

Obsérvese que la definición y el teorema anterior no son constructivos, es decir, no dan información sobre cómo determinar la función Hamiltoniana, sin embargo, esta puede construirse de manera análoga a la utilizada para resolver una ecuación diferencial exacta.

El criterio de Liapunov se establece en el siguiente resultado.

Teorema 1.4.2 Teorema de Liapunov ([4], Cáp. 1, Sec. 1.1B).
 Considérese el campo vectorial

$$x' = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

y sea \bar{x} un punto de equilibrio de (1). Si existe una función C^1 $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ definida en una vecindad U de \bar{x} , tal que

1. $V(\bar{x}) = 0$ y $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$.
2. $V'(x) \leq 0$ en $U - \{\bar{x}\}$

entonces \bar{x} es un punto de equilibrio estable.

Si además

3. $V'(x) < 0$ en $U - \{\bar{x}\}$

entonces \bar{x} es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En este resultado por $V'(x)$ se entiende la derivada de $V(x)$ a lo largo de las curvas solución, es decir, el producto escalar entre el gradiente $V(x)$, y el campo vectorial $x' = f(x)$.

Una función $V(x)$ que cumple con las condiciones impuestas en este teorema se conoce como una **Función de Liapunov**.

La relación entre funciones Hamiltonianas y teorema de Liapunov, radica en el hecho de que en ocasiones, como será nuestro caso, una función Hamiltoniana se puede utilizar como función de Liapunov para determinar la estabilidad de un punto de equilibrio.

Un criterio que a falta de soluciones en forma explícita, permite determinar la existencia de órbitas cerradas para un sistema en el plano, es el denominado Teorema de Poincaré-Bendixson, el cual se trata en seguida.

1.5. EL TEOREMA DE POINCARÉ-BENDIXSON

Definición 1.5.1 ([2], Cáp. 8, Sec. 6).

Dado el sistema autónomo no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

donde f y g son funciones C^1 en el plano.

Una **órbita** $(x(t), y(t))$ de (8) se llama **periódica** si ninguna de estas dos funciones es constante, están definidas para todo t y existe un número $T > 0$ tal que $x(t+T) = x(t)$ y $y(t+T) = y(t)$ para todo t . El T más pequeño con esta propiedad se conoce como **período** de la solución.

Así, cada solución periódica define una órbita cerrada en \mathbb{R}^2 , que es recorrida en forma completa en sentido horario o antihorario, cuando t crece de t_0 a $t_0 + T$, para todo t_0 . Recíprocamente, si $C \equiv [x(t), y(t)]$ es una órbita cerrada, entonces $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas.

El principal interés de esta sección son las propiedades globales de las soluciones del sistema, es decir, el comportamiento de las órbitas en grandes regiones del plano fase \mathbb{R}^2 ; en particular uno de los objetivos básicos de la teoría global es determinar si el sistema (8) posee o no órbitas cerradas.

En el caso de un sistema lineal como $y' = Df(\bar{x})y$, las órbitas son cerradas si y solo si la parte real de los valores propios es nula, es decir, cuando el sistema (8) tiene puntos no hiperbólicos.

Los siguientes teoremas dan criterios negativos para la existencia de órbitas cerradas en un sistema de ecuaciones diferenciales.

Teorema 1.5.1 (Criterio de Poincaré) ([2], Cáp. 8, Sec. 6).

Una órbita cerrada del sistema (8) rodea necesariamente al menos un punto de equilibrio de este sistema.

Es decir, un sistema sin puntos de equilibrio en cierta región no puede tener en ella, órbitas cerradas.

Otro criterio negativo que se debe a Bendixson es el siguiente:

Teorema 1.5.2 (Criterio de Bendixson) ([2], Cáp. 8, Sec. 6).

Si $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}$, es siempre positiva o siempre negativa en una región R de \mathbb{R}^2 simplemente conexa, entonces el sistema (8) no tiene órbitas cerradas en esa región.

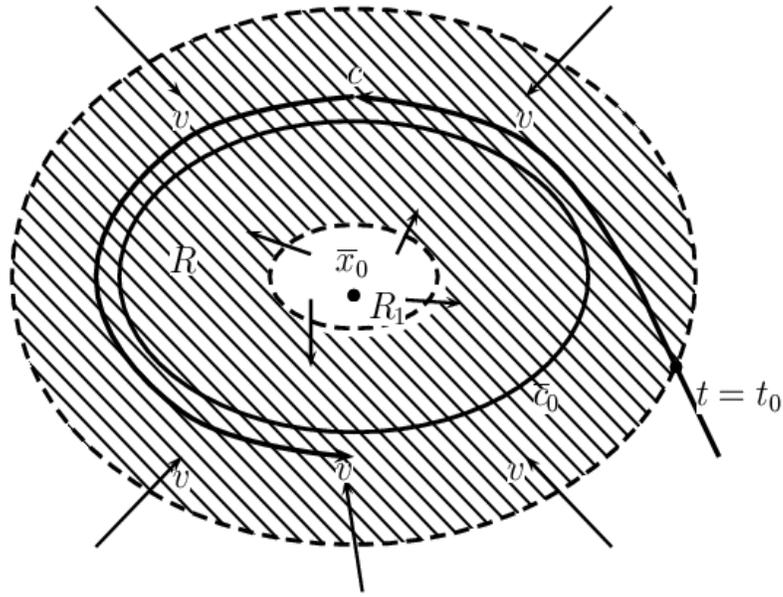
Obsérvese que esto significa que un sistema para el cual $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 0$, puede tener órbitas cerradas.

En seguida se enuncia un teorema que proporciona las condiciones suficientes para la existencia de órbitas cerradas de (8); es el llamado **Teorema de Poincaré-Bendixson**.

Teorema 1.5.3 Teorema de Poincaré-Bendixson ([2], Cáp. 8, Sec. 6).

Sea R una región acotada en el plano fase \mathbb{R}^2 con su frontera y supongamos que R no contiene puntos de equilibrio del sistema (8). Si $C \equiv [x(t), y(t)]$ es una órbita de (8) que está en R para un cierto t_0 y permanece en R para todo $t \geq t_0$, entonces C es una órbita cerrada.

Figura 1.4: Región Anular



En la Figura. 1.4, R es la región formada por las dos curvas de trazo discontinuo junto con la región anular entre ellas, R_1 es la región que contiene todos los puntos de equilibrio de (8) y \bar{x}_0 es uno de ellos.

Supongamos que el vector $\vec{V}(x, y) = f(x, y) \vec{i} + g(x, y) \vec{j}$ apunta hacia R en todo punto del contorno, entonces toda órbita C que pase por un punto del contorno (en $t = t_0$), debe entrar a R y no podrá salir de R y bajo estas consideraciones el Teorema de Poincaré-Bendixson asegura que C ha de tender en espiral hacia una órbita cerrada C_0 .

1.6. CONCEPTOS BÁSICOS SOBRE BIFURCACIÓN

Existen básicamente dos tipos de bifurcaciones; bifurcaciones locales y bifurcaciones globales, en este trabajo consideraremos únicamente bifurcaciones locales, es decir, bifurcaciones en alguna vecindad de un punto de equilibrio. Aunque no existe una definición universalmente aceptada de bifurcación de puntos de equilibrio propondremos aproximaciones a este concepto y a su clasificación que nos permitirán comprender su significado.

1.6.1. Bifurcación de Puntos de Equilibrio

Considérese la ecuación parametrizada

$$x' = f(x, \mu); \tag{1}$$

donde f es un campo vectorial C^1 definido en un abierto U de \mathbb{R}^n , y μ es un parámetro en un abierto V de \mathbb{R}^p .

Supongamos que (1) posee un punto de equilibrio $(x, \mu) = (x_0, \mu_0)$, es decir,

$$f(x_0, \mu_0) = 0.$$

Así es necesario considerar los siguientes interrogantes:

1. El punto de equilibrio es estable o inestable?
2. Cómo se afecta la estabilidad o inestabilidad a medida que el parámetro μ cambia de valor?

Si el punto de equilibrio es hiperbólico, la respuesta a la primera pregunta la proporciona el teorema de Hartman-Grobman; la estabilidad del punto de equilibrio (x_0, u_0) de (1) está determinado por la estabilidad del origen del sistema lineal

$$y' = Df(x_0, \mu_0)y, y \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Si el punto de equilibrio es no hiperbólico, el teorema de Hartman-Grobman no puede aplicarse y se puede presentar el fenómeno conocido como bifurcación; una definición aproximada de este es:

Definición 1.6.1 *El sistema (1) tiene una **bifurcación** para un parámetro $\mu = \mu_0$ (o $\mu = \mu_0$ es un valor de bifurcación de la ecuación parametrizada (1)) si las propiedades cualitativas del sistema para $\mu = \mu_0$ son diferentes de las propiedades del sistema $x' = f(x, \mu)$ para valores de μ arbitrariamente cercanos a μ_0 .*

Las consideraciones anteriores nos manifiestan el hecho de que únicamente es posible tener una bifurcación de un punto de equilibrio si este es no hiperbólico, en este caso puede presentarse diversas situaciones entre las cuales se trata aquella que se considera en este trabajo, la bifurcación de Hopf.

1.6.2. Bifurcación de Hopf

Supóngase que el sistema

$$x' = f(x, \mu); \quad (1)$$

donde $f : U \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ es de clase C^r ($r \geq 5$), J un intervalo abierto en \mathbb{R} y U un abierto en \mathbb{R}^n , tiene un punto de equilibrio en (x_0, μ_0) para el cual la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio, posee un par de valores propios imaginarios puros y los otros $(n - 2)$ valores propios tienen parte real no nula, entonces por el teorema de la función implícita existe una curva suave de equilibrios $x = x(\mu)$ con $x(\mu_0) = x_0$ tal que los valores propios $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ de la matriz Jacobiana en el punto de equilibrio que son imaginarios puros en $\mu = \mu_0$, dependen suavemente de μ .

El cambio lineal de coordenadas mencionado en la sección 1.3, permite expresar el campo vectorial (1) sobre una variedad central 2-dimensional en la forma

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + f(x, y, \mu) \\ y' &= \beta(\mu)x + \alpha(\mu)y + g(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (10)$$

donde, $x, y, \alpha(\mu), \beta(\mu), \mu$ son reales, $\lambda(\mu) = \alpha(\mu) + i\beta(\mu)$, y f, g son no lineales en x, y .

Al reducir (10) a su forma normal ([4], Cáp. 2, Sec. 2.24), se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= \alpha(\mu)x - \beta(\mu)y + (a(\mu)x - b(\mu)y)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(|x|^5, |y|^5) \\ y' &= \beta(\mu)x + \alpha(\mu)y + (b(\mu)x + a(\mu)y)(x^2 + y^2) + \mathcal{O}(|x|^5, |y|^5), \end{aligned} \quad (11)$$

y se tiene el siguiente resultado

Teorema 1.6.1 ([4], Cáp. 2, Sec.3.1B).

Si μ es suficientemente cercano a μ_0 y

$$-\infty < \frac{(\mu - \mu_0)\alpha'(\mu_0)}{a(\mu_0)} < 0,$$

entonces el sistema (1) posee una órbita periódica que es asintóticamente estable si $a(\mu_0) < 0$ e inestable si $a(\mu_0) > 0$.

Definición 1.6.2 Sea (x_0, μ_0) un punto de equilibrio no hiperbólico de (1), entonces

1. La ecuación (1) tiene en (x_0, μ_0) una bifurcación de Hopf, si se satisfacen las siguientes condiciones:

i. Para $\mu < \mu_0$ ($\mu > \mu_0$), (1) posee órbitas periódicas que desaparecen (aparecen) al pasar μ a través de μ_0 .

ii. Las órbitas periódicas y la rama de equilibrios tienen diferente estabilidad a un mismo lado de $\mu = \mu_0$.

2. La bifurcación de Hopf, se dice **supercrítica** si la órbita periódica es estable y **subcrítica** si la órbita periódica es inestable.

El siguiente resultado brinda las condiciones bajo las cuales el sistema en consideración tiene una bifurcación de Hopf.

Teorema 1.6.2 Teorema de la Bifurcación de Hopf ([4], Cáp. 2, Sec.3.1B).

Sea (x_0, μ_0) un punto de equilibrio (1) para el cual

1. $Df(x_0, \mu_0)$ posee un par de valores propios simples que son imaginarios puros y los demás valores propios poseen la parte real no nula.

2. si $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$ denotan los valores propios de $Df(x_0, \mu_0)$ que en $\mu = \mu_0$ son imaginarios puros y

$$\alpha'(\mu) = \frac{d}{d\mu}(\operatorname{Re}\lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} \neq 0.$$

Si $a(\mu_0) \neq 0$ entonces el teorema [1.6.1] es válido para el campo vectorial definido por (1); además, si $\alpha'(\mu_0) \neq 0$, entonces existe una variedad central 3-dimensional que pasa por $(x_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, por tanto, para $\alpha'(\mu_0) > 0$, se sigue que (x_0, μ_0) es asintóticamente estable para $\mu < 0$ e inestable para $\mu > 0$; análogamente, para $\alpha'(\mu_0) < 0$, (x_0, μ_0) es inestable para $\mu < 0$ y asintóticamente estable para $\mu > 0$.

De acuerdo a este resultado la ocurrencia de una bifurcación de Hopf está básicamente definida por los valores $\alpha'(\mu_0)$ y $a(\mu_0)$; el primero es sencillo de calcular, una expresión que permite calcular el segundo es

$$a(\mu_0) = \frac{1}{16}(f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}) \\ + \frac{1}{16\beta(\mu_0)}(f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}),$$

donde las derivadas parciales están evaluadas en el punto de bifurcación ([4] Pág. 277).

2. ANÁLISIS CUALITATIVO DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL

El propósito central de este capítulo es realizar un análisis cualitativo de las soluciones de la ecuación diferencial

$$mx'' + kx + ax^3 = 0, \quad (12)$$

que describe el movimiento de un cuerpo de masa m que pende de un resorte no lineal en el cual k es un parámetro positivo que representa la constante de elasticidad del resorte, y a es un parámetro real no nulo que determina la naturaleza del resorte. Si $a > 0$ se tiene un resorte duro y si $a < 0$ se tiene un resorte suave. Básicamente se presentará una justificación matemática del modelo y se examinará la clasificación, estabilidad y bifurcación de los puntos de equilibrio del sistema.

2.1. JUSTIFICACIÓN DEL MODELO

Para establecer un modelo matemático del movimiento de un cuerpo dentro de un campo de fuerzas, con frecuencia se comienza con uno de los principios básicos de la mecánica, la *Segunda Ley de Newton*⁴, que afirma que

“La fuerza neta que se ejerce sobre un cuerpo o una partícula es proporcional a la aceleración que dicha fuerza produce”.

O expresada en términos matemáticos mediante la siguiente ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right),$$

donde $x(t)$ representa el desplazamiento del cuerpo de masa m a lo largo del eje ox , $\frac{dx}{dt}$ su velocidad, $\frac{d^2x}{dt^2}$ su aceleración y F la fuerza neta que se aplica y produce dicha aceleración.

Un sistema físico que depende de este principio se lo conoce como un sistema mecánico, en particular uno de los casos especiales referente a este tipo de sistemas son los *sistemas oscilatorios*, es decir, aquellos sistemas que son susceptibles de controlar el movimiento de una partícula, que al cabo de cierto tiempo devuelve esta partícula a la posición inicial en la que se encontraba.

Entre esos casos especiales, Robert Hooke, en el año de 1678, investiga el caso de la fuerza proporcional a la desviación del equilibrio, en esa dirección formula lo que se conoce como la *“Ley de Hooke”*, la cual describe la fuerza que ejercen los resortes para regresar a la posición de equilibrio determinado cuerpo el cual ha sido sometido a un movimiento, dicha fuerza que actúa en dirección opuesta al movimiento se la conoce como la fuerza de restitución y se la denota como $f = ks$.

⁴Introducido por Isaac Newton en los *Principia Mathematica* (1687).

En ella k es la constante de elasticidad del resorte y s el alargamiento o desplazamiento desde la posición de equilibrio del cuerpo.

De esa manera, el modelo que describe el movimiento vertical de un cuerpo de masa m unido al extremo de un resorte tiene la forma

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(x),$$

donde F es la fuerza neta que actúa sobre el cuerpo que está en movimiento.

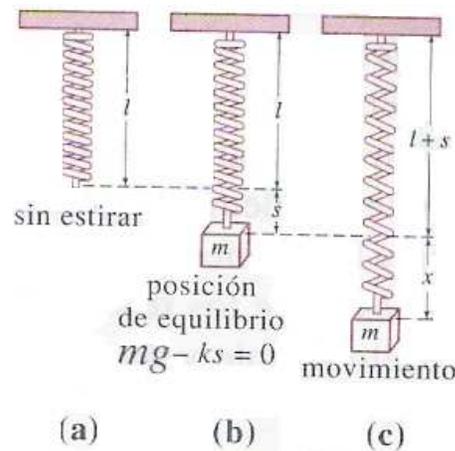
En general, sobre el cuerpo sujeto al resorte actúan dos tipos de fuerzas:

- a. La fuerza de restitución que según la Ley de Hooke está dada por $f = ks$, $k > 0$.
- b. El peso mg , el cual actúa en sentido contrario a la dirección de la fuerza de restitución, y por tanto, siempre será una fuerza positiva.

Para simplificar el modelo se ignora cierto tipo de fuerzas como lo son la fuerza de fricción y otro tipo de fuerzas externas que actúan comúnmente en el movimiento de un resorte con movimiento amortiguado forzado, en cuyo caso, sería necesario considerar en la ecuación diferencial la velocidad como también una fuerza que dependa del tiempo.

Al sujetar un cuerpo de masa m al resorte es claro que este se estira una longitud s llegando a su posición de equilibrio, en la que el peso mg del cuerpo se encuentra equilibrado por medio de la fuerza de restitución ks , como se puede observar en la Figura. 2.1. b., de manera que $mg = ks$.

Figura 2.1: Resortes Verticales.



Por lo tanto, al considerar la posición de equilibrio como la posición de reposo del cuerpo, y al desplazarlo una distancia x con respecto de su posición de equilibrio, entonces la distancia que se ha desplazado sería $x + s$ y la fuerza de restitución del resorte tendría la forma $f = k(x + s)$, así, suponiendo que en el cuerpo solo actúan las fuerza de restitución y el peso, entonces la fuerza neta es

$$F(x) = f + W = -k(x + s) + mg = -kx + (mg - ks) = -kx,$$

y así, la ecuación diferencial que modela el movimiento de un cuerpo que cuelga del resorte mediante la segunda Ley de Newton está descrita por

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Esta es la “*Ley de Hooke*” y un resorte que obedezca a esta ley se lo conoce como un “*Resorte Lineal*”.

Sin embargo, los resortes que se fabrican nunca son perfectamente lineales y por ello se han propuesto distintas generalizaciones de esta ley, una de ellas y la que frecuentemente se utiliza para fabricar resortes desde un material flexible o suave, hasta un rígido o duro, se da en el momento cuando se considera que la fuerza de restitución puede variar de algo menor a algo mayor; es decir, que está descrita por una función no lineal, en ese sentido lo más probable puede ser que la fuerza de restitución no tan solo sea proporcional al desplazamiento x , si no que también puede suceder que sea una combinación lineal de potencias de x , es decir, se puede considerar f en forma de potencias de x centrada en la posición de equilibrio $x = 0$

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots .$$

Puesto que, la fuerza en $x > 0$,

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \dots ,$$

y la fuerza en $-x < 0$,

$$f(-x) = c_0 - c_1x + c_2x^2 - c_3x^3 + \dots ,$$

deben tener la misma magnitud y direcciones opuestas, entonces, f debe ser una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, y esto únicamente se puede tener cuando $c_0 = c_2 = \dots = c_{2k} = 0$, por lo tanto

$$f(x) = c_1x + c_3x^3 + \dots + c_{2k+1}x^{2k+1} + \dots ,$$

y dado que, para pequeños desplazamientos x , las potencias x^n pueden despreciarse, entonces, se puede considerar f como

$$f(x) = c_1x \quad \text{o} \quad f(x) = c_1x + c_3x^3,$$

en el primer caso se tiene la conocida *Ley de Hooke*, para el *Resorte Lineal*

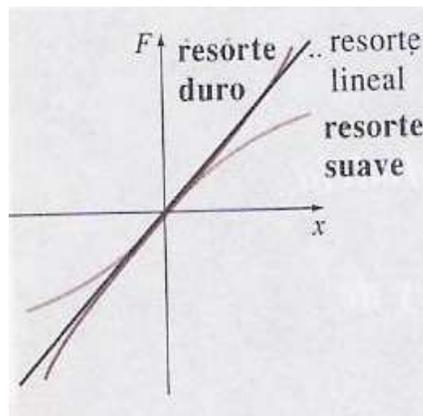
$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -c_1x,$$

y en el segundo la *Generalización de la Ley de Hooke* que se considera en este trabajo, es decir,

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -(kx + ax^3),$$

donde, $k > 0$ representa la constante de elasticidad del resorte, m la masa de un cuerpo sujeto al extremo de un resorte que pende verticalmente, y a representa la rigidez del resorte, la cual varía con el desplazamiento, si $a > 0$, la rigidez aumenta con el desplazamiento, en ese caso se trata de un "*Resorte Duro*", pero si la rigidez disminuye con el desplazamiento, es decir, si $a < 0$ entonces se trata de un "*Resorte Suave*".

Figura 2.2: Resorte Lineal, Resorte Duro y Resorte Suave.



De este modo, un modelo que generaliza la Ley de Hooke es el que se describe por la ecuación diferencial de segundo orden

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx + ax^3 = 0,$$

donde, k y a son parámetros reales.

2.2. CONSIDERACIONES INICIALES

La ecuación diferencial

$$mx'' + kx + ax^3 = 0, \quad (12)$$

se transforma en un sistema no lineal bidimensional a través del cambio de variable $x' = y$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -\frac{k}{m}x - \frac{a}{m}x^3, \end{aligned}$$

el cual, llamando $c^2 = \frac{k}{m} > 0$ y $b = \frac{a}{2k} \neq 0$ puede expresarse como

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -c^2(x + 2bx^3), \end{aligned} \quad (13)$$

y puesto que la función $g(x, y) = (y, -c^2(x + 2bx^3))$ es continuamente diferenciable, entonces para cada elección de los parámetros b y c y para cada condición inicial (x_0, y_0) , por el teorema de existencia y unicidad, existe una única solución $\phi(t) = (x(t), y(t))$ que satisface la condición inicial $\phi(0) = (x_0, y_0)$ definida sobre un intervalo máximo $[0, a]$, para algún $a > 0$.

Los puntos de equilibrio, son los puntos (x, y) que verifican

$$\begin{aligned} y &= 0, \\ x + 2bx^3 &= 0, \end{aligned}$$

y es necesario considerar dos situaciones

i. El resorte es duro, es decir, $b > 0$ entonces existe un único punto de equilibrio que es el origen

$$P_0 : (x, y) = (0, 0).$$

ii. El resorte es suave, es decir, $b < 0$, en este caso existen tres puntos de equilibrio que son

$$\begin{aligned} P_0 &: (x, y) = (0, 0), \\ P_1 &: (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0\right), \\ P_2 &: (x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0\right), \end{aligned}$$

y estos últimos son simétricos con respecto al eje y .

El sistema es invariante bajo la transformación

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y),$$

de modo que el campo de pendientes es simétrico con respecto al origen.

Adicionalmente obsérvese que si $b = 0$ se obtiene el resorte lineal

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2x,\end{aligned}\tag{14}$$

cuyas órbitas en el plano fase están dadas por $y^2 + c^2x^2 = K$, $K > 0$ las cuales corresponden a curvas cerradas estables y así de aquí en adelante se puede considerar $b \neq 0$.

2.3. ANÁLISIS DE PENDIENTE NULA

En esta sección se considera una técnica que permite obtener información acerca del comportamiento cualitativo de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales. El análisis consiste básicamente en considerar las isoclinas de pendiente nula y determinar la dirección de las curvas solución que intercepten a las curvas de pendiente nula, para así determinar hacia donde apunta el campo direccional de la ecuación diferencial.

Para este caso el sistema considerado es

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2(x + 2bx^3),\end{aligned}\tag{13}$$

donde $c^2 = \frac{k}{m} > 0$ y $b = \frac{a}{2k} \neq 0$ son parámetros reales.

2.3.1. Resorte Duro

En esta situación el parámetro b es positivo y el sistema posee un único punto de equilibrio que corresponde al origen $P_0(0, 0)$.

La curva de pendiente nula en x es $y = 0$ que geoméricamente es el eje x y cualquier curva solución que intercepte la curva de pendiente nula en x , tiene tangente vertical y únicamente se necesita determinar la dirección de esta tangente. Esto está determinado por la ecuación

$$y' = -c^2(x + 2bx^3)$$

y se tiene:

i. Si $x > 0$ entonces $y' < 0$ y por tanto las curvas solución $y = y(x)$ en el plano fase sobre la curva de pendiente nula son decrecientes en la dirección de y por lo que las rectas tangentes a lo largo de $y = 0$ apuntan hacia abajo.

ii. Si $x < 0$ entonces $y' > 0$, de manera que las curvas solución en el plano fase a lo largo de las curvas de pendiente nula son crecientes en la dirección de y , por tanto las rectas tangentes a lo largo de $y = 0$ apuntan hacia arriba.

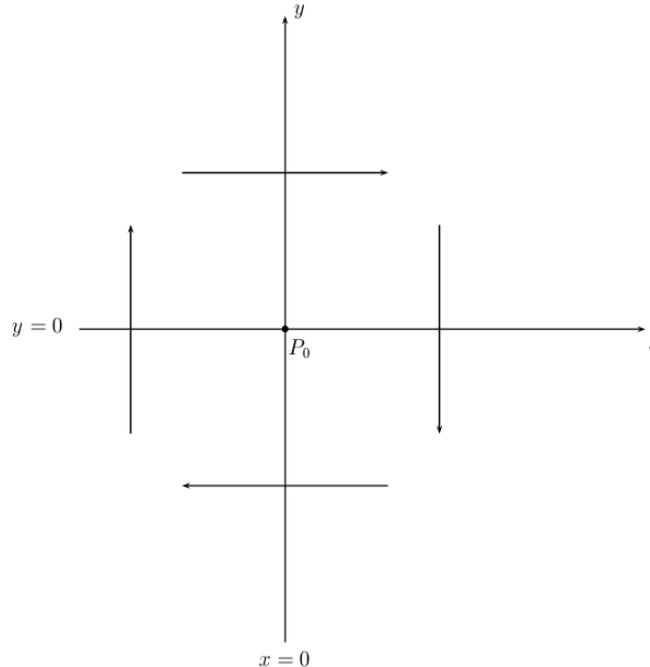
La curva de pendiente nula en y , es $x = 0$ que geoméricamente corresponde el eje y , y cualquier curva solución que corte a la curva de pendiente nula en y tiene tangente horizontal y se requiere determinar la dirección de esta tangente, para lo cual se analiza la ecuación

$$x' = y$$

i. Si $y > 0$ entonces $x' > 0$, y de esta forma las curvas solución son crecientes en la dirección de x , de manera que las rectas tangentes apuntan hacia la derecha.

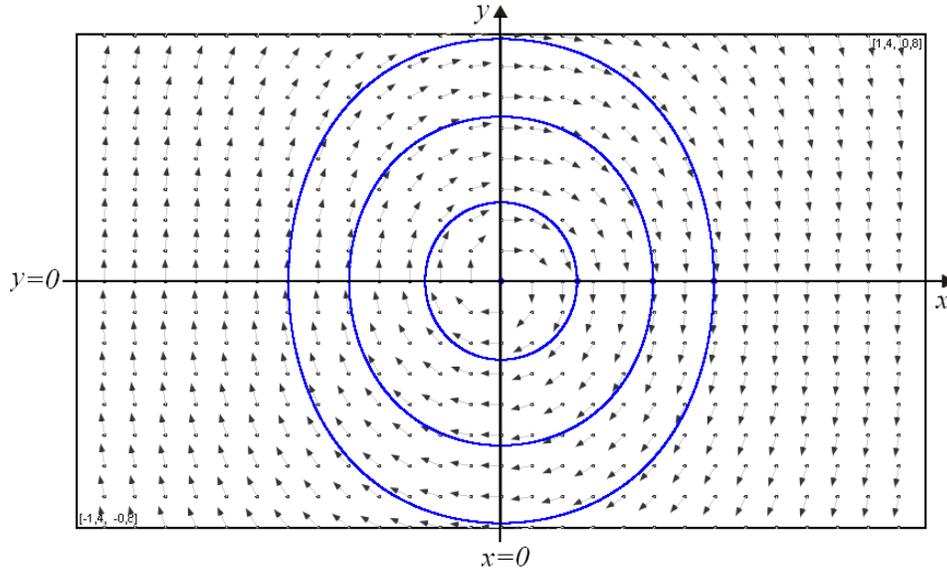
ii. Si $y < 0$ entonces $x' < 0$ por tanto las curvas solución son decrecientes en la dirección de x , de modo que las rectas tangentes a las curvas solución sobre $x = 0$ señalan hacia la izquierda.

Figura 2.3: Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_0 . Resorte Duro.



El análisis realizado muestra que todos los vectores giran en la misma dirección del punto de equilibrio, en este caso el análisis de pendiente nula no es concluyente y el punto de equilibrio puede corresponder a un nodo, un foco o un centro.

Figura 2.4: Retrato Fase. Resorte Duro.



Sin embargo, las simulaciones numéricas sugieren que el punto de equilibrio P_0 corresponde a un centro, más adelante se demostrará que este punto se comporta de esta manera.

2.3.2. Resorte Suave

En este caso el parámetro b es negativo y el sistema posee tres puntos de equilibrio que corresponden a

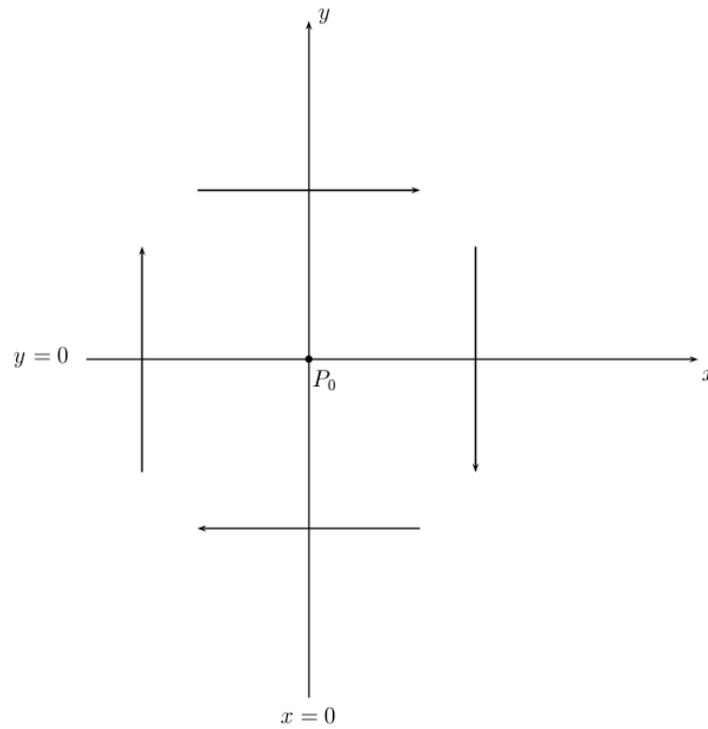
$$\begin{aligned}
 P_0 &: (x, y) = (0, 0), \\
 P_1 &: (x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0\right), \\
 P_2 &: (x, y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0\right).
 \end{aligned}$$

Se realizará el análisis considerando cada uno de ellos por separado.

A. El Punto de Equilibrio P_0

Del mismo modo que el análisis de pendiente nula que se realizó en la sección 2.3.1 alrededor del punto de equilibrio P_0 para un resorte duro; el análisis para un resorte suave resulta equivalente.

Figura 2.5: Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_0 . Resorte Suave.



B. Los Puntos de Equilibrio P_1 y P_2

Dado que el sistema es invariante bajo la transformación

$$(x, y) \rightarrow (-x, -y),$$

el análisis de pendiente nula que se realice alrededor del punto de equilibrio P_1 será similar al que se realice para el punto de equilibrio P_2 , por ello es suficiente realizar el análisis de pendiente nula alrededor de P_1 .

La curva de pendiente nula en x es $y = 0$ que geoméricamente representa el eje x y cualquier curva solución que intercepte la curva de pendiente nula en x , tiene tangente vertical y únicamente se necesita determinar la dirección de esta tangente.

Esto se determina al examinar la ecuación

$$y' = -c^2(x + 2bx^3)$$

de la cual se sigue:

i. Si $x \in (0, \frac{1}{\sqrt{-2b}})$ entonces $y' < 0$ y por tanto las curvas solución $y = y(x)$ en el plano fase sobre la curva de pendiente nula son decrecientes en la dirección de y , por lo cual las rectas tangentes a lo largo de $y = 0$ apuntan hacia abajo.

ii. Si $x \in (\frac{1}{\sqrt{-2b}}, \infty)$ entonces $y' > 0$, así, las curvas solución en el plano fase a lo largo de la curva de pendiente nula son crecientes en la dirección de y , por tanto, las rectas tangentes a lo largo de $y = 0$ apuntan hacia arriba.

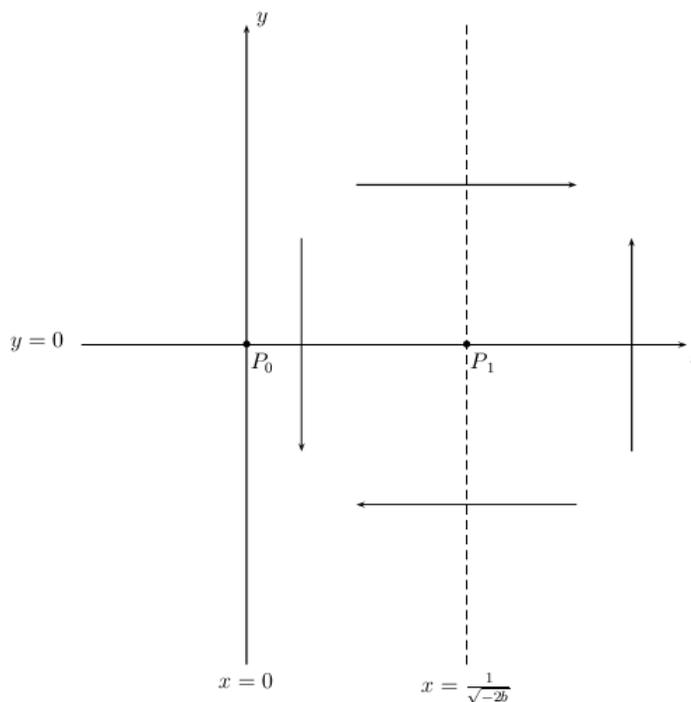
La curva de pendiente nula en y es $x = \frac{1}{\sqrt{-2b}}$ que geoméricamente representa una recta vertical paralela al eje y , y cualquier curva solución que intercepte a la curva de pendiente nula en y , tiene tangente horizontal y se requiere determinar la dirección de esta tangente para lo cual se analiza la ecuación

$$x' = y$$

i. Si $y > 0$ entonces $x' > 0$, por ello las curvas solución son crecientes en la dirección de x , de manera que las rectas tangentes sobre $x = \frac{1}{\sqrt{-2b}}$ apuntan hacia la derecha.

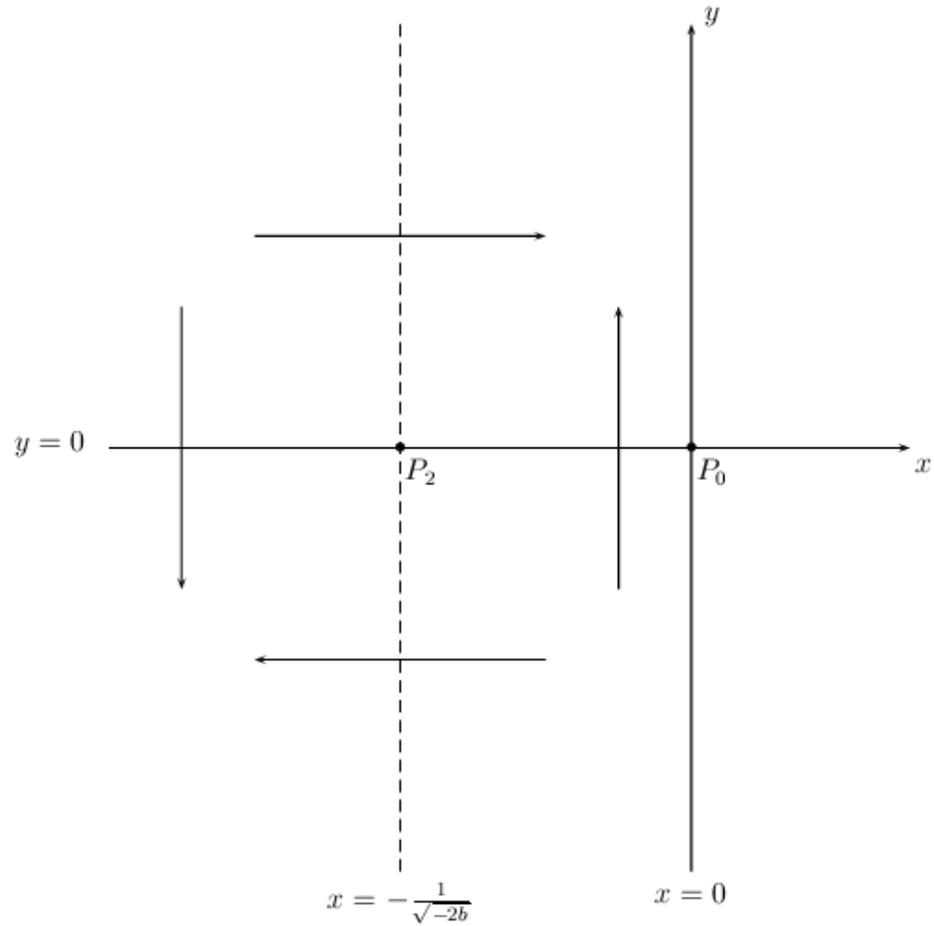
ii. Si $y < 0$ entonces $x' < 0$, por tanto, las curvas solución son decrecientes en la dirección de x , de este modo las rectas tangentes a las curvas solución sobre $x = \frac{1}{\sqrt{-2b}}$ señalan hacia la izquierda.

Figura 2.6: Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_1 . Resorte Suave.



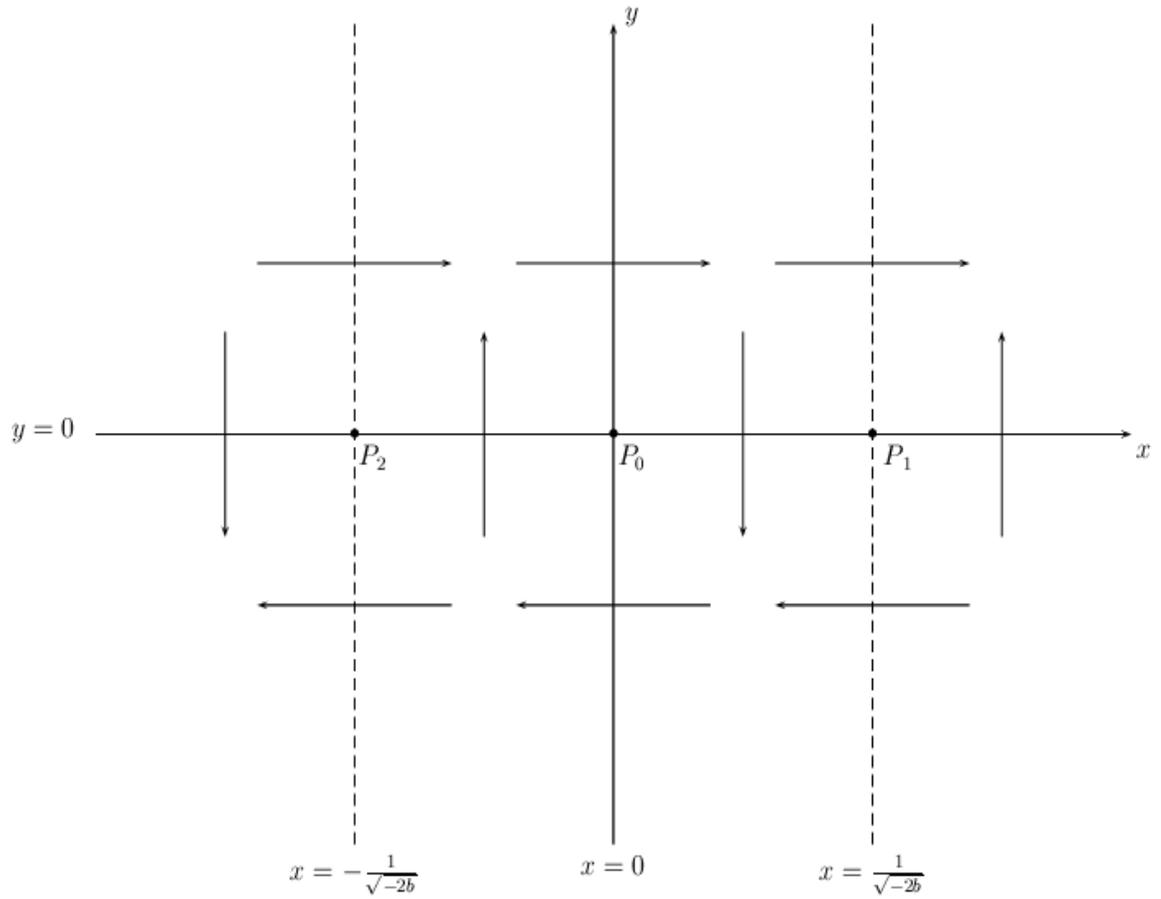
Análogamente, el análisis de curva de pendiente nula alrededor de P_2 muestra que el campo direccional se ve como se observa en la siguiente figura

Figura 2.7: Análisis de Pendiente Nula Alrededor P_2 . Resorte Suave.



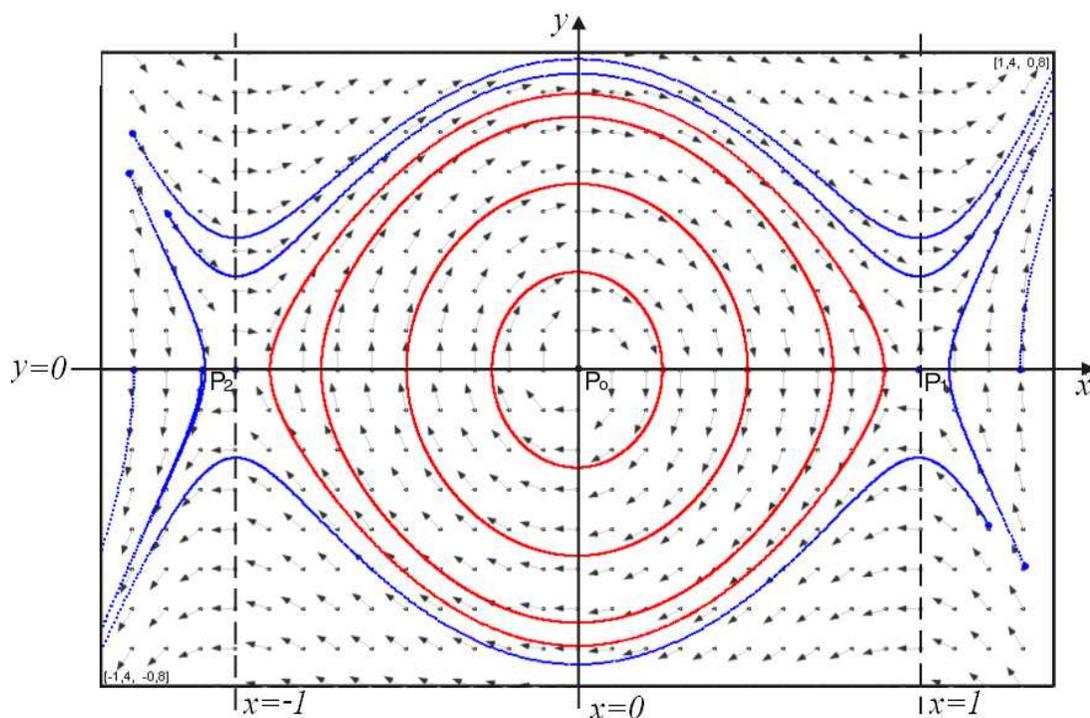
La información completa de las curvas de pendiente nula alrededor de los puntos de equilibrio P_0 , P_1 y P_2 para un resorte suave se resume en la siguiente figura

Figura 2.8: Análisis de Pendiente Nula Alrededor de P_0 , P_1 y P_2 . Resorte Suave.



Previamente se mencionó que el análisis de pendiente nula alrededor de P_0 no era concluyente dado que la dirección de los vectores giraban en la misma dirección, de esta manera el punto de equilibrio puede comportarse como un nodo, una silla o un centro, sin embargo, para los puntos de equilibrio P_1 y P_2 los vectores giran en sentido contrario, lo que sugiere que estos puntos de equilibrio se comportan como puntos sillas, como muestran las siguientes simulaciones.

Figura 2.9: Retrato Fase. Resorte Suave.



En la siguiente sección probaremos que efectivamente esto es así.

2.4. ESTABILIDAD DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO A TRAVÉS DE LA LINEALIZACIÓN

Como se estudió en las consideraciones iniciales, el sistema no lineal

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2(x + 2bx^3),\end{aligned}\tag{13}$$

con $c^2 = \frac{k}{m}$ y $b = \frac{a}{2k}$ posee un único punto de equilibrio, el origen cuando $b > 0$ y tres puntos de equilibrio; el origen, $P_1(\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$, $P_2(-\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$ cuando $b < 0$.

En la sección 2.3 el análisis de pendiente nula no fue concluyente en cuanto a la clasificación del origen y sugería que tanto P_1 como P_2 correspondían a puntos silla, en esta sección se mostrara que efectivamente esto es así y que el origen corresponde a un centro.

Teorema 2.4.1 *Para el sistema no lineal (13) el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico que corresponde a un centro.*

Demostración. La matriz Jacobiana asociada al sistema, en el punto $P = (x, y)$ es

$$Df(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2(1 + 6bx^2) & 0 \end{pmatrix}.$$

En particular en el punto de equilibrio $P_0(0, 0)$ se tiene

$$Df(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$P_0(\lambda) = \lambda^2 + c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Así, los valores propios λ_1 y λ_2 asociados con el punto de equilibrio P_0 son imaginarios puros por lo cual P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico que es un centro. ■

Obsérvese que este resultado muestra que la estabilidad del punto de equilibrio del sistema no lineal no puede determinarse a través de la linealización y debe utilizarse otro tipo de técnicas. Se analizará la estabilidad de este punto de equilibrio más adelante.

Teorema 2.4.2 *Para el sistema no lineal (13) los puntos de equilibrio P_1, P_2 son hiperbólicos e inestables y corresponden a puntos silla.*

Demostración. La matriz Jacobiana

$$Df(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2(1 + 6bx^2) & 0 \end{pmatrix}$$

en los puntos de equilibrio $P_1(\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$ y $P_2(-\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$ es

$$Df(P_1) = Df(P_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2c^2 & 0 \end{pmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$P_{1,2}(\lambda) = \lambda^2 - 2c^2, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Así, los valores propios de la matriz jacobiana en los puntos de equilibrio P_1 y P_2 son reales y están dados por

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}c, \quad c \in \mathbb{R},$$

con $\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$, por tanto, los puntos de equilibrio P_1 y P_2 son hiperbólicos, y por el teorema [1.3.1] P_1 y P_2 son puntos de equilibrio inestables y corresponden a puntos silla en el sistema lineal; por el teorema de Hartman-Grobman se concluye que P_1 y P_2 son inestables en el sistema no lineal. ■

2.5. ESTABILIDAD DEL PUNTO DE EQUILIBRIO EN EL ORIGEN

En la sección 2.4 se ha mostrado que el punto de equilibrio $P_0(0, 0)$ del sistema no lineal

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2(x + 2bx^3),\end{aligned}\tag{13}$$

es no hiperbólico, con un par de valores propios imaginarios puros por lo que el criterio de la linealización no permite decidir acerca de su estabilidad y así no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman para obtener conclusiones en cuanto a la estabilidad del origen en el sistema no lineal. En estas condiciones el flujo sobre la variedad central y el teorema de Hopf pueden usarse para determinar la estabilidad del origen en el sistema no lineal; lo cual se considera a continuación.

2.5.1. El Flujo Sobre la Variedad Central

Teorema 2.5.1 *Para el sistema*

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2(x + 2bx^3),\end{aligned}\tag{13}$$

el flujo sobre la variedad central está determinado por

$$\begin{aligned}u' &= -c(v + 2bv^3), \\v' &= cu,\end{aligned}\tag{15}$$

y el teorema de Hopf no es aplicable para determinar la estabilidad del origen.

Demostración. De acuerdo al teorema [1.3.3] el sistema (13) tiene en el origen un punto de equilibrio no hiperbólico con matriz Jacobiana

$$Df(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix},$$

y valores propios $\lambda = \pm ci$, $c > 0$.

Para reducir el flujo a la variedad central se debe hallar una matriz P no singular que reduzca a $Df(P_0)$ a su forma normal real.

Dado que la matriz $Df(P_0)$ no es diagonalizable sobre \mathbb{R} y sus valores propios son complejos se debe considerar la complejificación de esta matriz, es decir, hallar un vector propio z en \mathbb{C}^2 correspondiente a los valores propios complejos y tomar como base de \mathbb{R}^2 la dada por el teorema [1.3.3] de la sección 1.3.

Un vector propio complejo $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$ de $Df(P_0)$ es una solución del sistema

$$\begin{pmatrix} ic & 1 \\ -c^2 & ic \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

con z_1, z_2 en \mathbb{C} .

Este sistema tiene infinitas soluciones dadas por

$$z_2 = -icz_1$$

y al tomar $z_1 = i$ se tiene que $z_2 = c$, por lo que un vector z es

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

y así la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

y el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

reduce el sistema a su forma normal

$$\begin{aligned} u' &= -c(v + 2bv^3), \\ v' &= cu, \end{aligned} \tag{15}$$

la cual determina el flujo sobre la variedad central, y por tanto se puede utilizar el teorema de Hopf.

Aplicando la expresión dada por el teorema [1.6.2]

$$\begin{aligned} a(0) &= \frac{1}{16}(f_{uuu} + f_{uvv} + g_{uuv} + g_{vvv}) \\ &\quad + \frac{1}{16\beta(0)}(f_{uv}(f_{uu} + f_{vv}) - g_{uv}(g_{uu} + g_{vv}) - f_{uu}g_{uu} + f_{vv}g_{vv}), \end{aligned}$$

con $f(u, v) = -2cbv^3$, $g(u, v) = 0$ y las derivadas parciales evaluadas en el punto de equilibrio $(0, 0)$ se obtiene que

$$\begin{aligned} f_{uuu} &= f_{uvv} = f_{uv} = f_{uu} = 0 \\ g_{vvv} &= g_{uuv} = g_{uv} = g_{vv} = g_{uu} = 0 \\ f_{vv} &= -2cbv = 0 \end{aligned}$$

por lo que $a = 0$ y así el teorema de Hopf no decide sobre la estabilidad en el origen. ■

Puesto que, complementariamente al teorema de Hartman-Grobman no es posible aplicar el teorema de Hopf para determinar la estabilidad del punto de equilibrio en el origen, se recurre ahora a la teoría sobre las funciones de Liapunov, en este sentido se tiene.

2.5.2. Funciones de Liapunov y Estabilidad del Origen

Teorema 2.5.2 *El sistema*

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) = y, \\y' &= g(x, y) = -c^2(x + 2bx^3),\end{aligned}\tag{13}$$

es un sistema Hamiltoniano y su función Hamiltoniana está dada por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + c^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{bx^4}{2}\right).\tag{16}$$

Demostración. Según el teorema [1.4.1] el sistema (13) es un sistema Hamiltoniano, dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} = 0;$$

por tanto, según la definición [1.4.1] existe una función de dos variables $H(x, y)$, la función Hamiltoniana, tal que

$$\frac{\partial H}{\partial y} = f(x, y) = y \quad y \quad \frac{\partial H}{\partial x} = -g(x, y) = -(-c^2(x + 2bx^3)).$$

Para hallar $H(x, y)$ en primer lugar se integra f con respecto a y con lo cual se obtiene

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + h(x),$$

y puesto que debe tenerse que

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -g(x, y),$$

entonces

$$h'(x) = c^2(x + 2bx^3),$$

es decir,

$$h(x) = c^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{bx^4}{2}\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Así, la función Hamiltoniana para el sistema (13) está dada por

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + c^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{bx^4}{2}\right) + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

■

Teorema 2.5.3 *Para el sistema no lineal (13) el punto de equilibrio en el origen es estable.*

Demostración. Si se considera como función de Liapunov, la función Hamiltoniana del teorema anterior, es decir,

$$H(x, y) = \frac{y^2}{2} + c^2\left(\frac{x^2}{2} + \frac{bx^4}{2}\right), \quad (16)$$

para ella es claro que $H(0, 0) = 0$, además, $H(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ cuando $b > 0$ y $H(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$ y $|x| < \frac{1}{\sqrt{-b}}$ cuando $b < 0$; por tanto, $H(x, y)$ es definida positiva.

Si ahora se calcula la derivada de la función $H(x, y)$ a lo largo de las curvas solución, se obtiene que

$$\begin{aligned} H'(x, y) &= \nabla H(x, y) \bullet (x', y'), \\ H'(x, y) &= (-c^2(x + 2bx^3), y) \bullet (y, -c^2(x + 2bx^3)), \\ H'(x, y) &= (-c^2(x + 2bx^3)y) - (y(-c^2(x + 2bx^3))) \\ H'(x, y) &= 0, \end{aligned}$$

por el teorema de Liapunov [1.4.2], el origen es un punto de equilibrio estable para el sistema no lineal. ■

2.6. ÓRBITAS CERRADAS

En esta sección se considera el problema de determinar cuales son las órbitas en el plano fase del sistema y demostrar que bajo ciertas condiciones estas son cerradas. Se demostrará esta última relación utilizando dos técnicas diferentes, a saber, conceptos básicos de cálculo diferencial y el teorema de Poincaré-Bendixsón.

2.6.1. Órbitas Cerradas y Cálculo Diferencial

Teorema 2.6.1 *Para el sistema no lineal*

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -c^2(x + 2bx^3), \end{aligned} \quad (13)$$

las órbitas en el plano fase están determinadas por

$$y^2 = -c^2(x^2 + bx^4) + K, \quad K \in \mathbb{R}, \quad (17)$$

las cuales corresponden a órbitas cerradas para todo $x \in \mathbb{R}$ cuando $b > 0$ y para $|x| < \frac{1}{\sqrt{-2b}}$ cuando $b < 0$.

Demostración. Al eliminar t del sistema dado, siempre que $y \neq 0$, se tiene que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c^2(x + 2bx^3)}{y},$$

ecuación diferencial en la cual separando variables e integrando se obtiene

$$\frac{y^2}{2} = \frac{-c^2(x^2 + bx^4)}{2} + K_1, \quad K_1 \in \mathbb{R},$$

es decir,

$$y^2 = -c^2(x^2 + bx^4) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

familia uniparamétrica de soluciones que describen las órbitas del sistema no lineal, está expresión corresponde a curvas simétricas con respecto al eje y , al eje x y determina dos funciones continuas dadas por

$$y = \pm \sqrt{K - c^2(x^2 + bx^4)}$$

Para determinar el aspecto de las órbitas se utilizará las técnicas del cálculo diferencial para lo cual se considera dos casos

1. El resorte es duro, en este caso $b > 0$ y se tiene.

Las órbitas interceptan al eje y en dos puntos dados por

$$y = \pm K,$$

e interceptan al eje x en dos puntos dados por

$$x = \pm \sqrt{\frac{-c + \sqrt{c^2 + 4bK}}{2bc}}$$

siempre que $K > 0$.

Ahora obsérvese que puesto que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-c^2x(1 + 2bx^2)}{y}$$

entonces:

$\frac{dy}{dx} > 0$, si y solo si $x > 0$ y $y < 0$ ó $x < 0$ y $y > 0$ por lo que las órbitas son crecientes en el II y IV cuadrante del plano fase.

$\frac{dy}{dx} < 0$, si y solo si $x > 0$ y $y > 0$ ó $x < 0$ y $y < 0$ y por tanto las órbitas son decrecientes en el I y III cuadrante del plano fase.

Dado que

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-c^2[(1 + 6bx^2)y^2 + c^2(x + 2bx^3)^2]}{y^3},$$

entonces:

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$, si y solo si $x \in \mathbb{R}$ y $y > 0$, por lo que las órbitas son cóncavas hacia abajo en el I y II cuadrante del plano fase.

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$, si y solo si $x \in \mathbb{R}$ y $y < 0$, por tanto las órbitas son cóncavas hacia arriba en el III y IV cuadrante del plano fase.

Los puntos críticos de la función ocurren sobre el eje y , $y \neq 0$, y puesto que

$$\frac{d^2y}{dx^2}(0, y) = -\frac{c^2}{y}$$

que es negativo si $y > 0$ y positivo si $y < 0$ entonces las órbitas tienen un máximo relativo en $(0, y_0)$ y un mínimo relativo en $(0, -y_0)$ donde y_0 corresponde al punto de corte de la órbita con el eje y .

Al unir la información obtenida en el análisis anterior se concluye que las curvas determinadas por la relación

$$y^2 = -c^2(x^2 + bx^4) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

son cerradas.

Nótese que si $y = 0$ entonces $x = 0$ que corresponde al punto de equilibrio en el origen.

2. El resorte es suave, en este caso $b < 0$ y realizando un análisis análogo al anterior se obtienen que las órbitas son cerradas y que estas existen siempre que $|x| < \frac{1}{\sqrt{-2b}}$. ■

2.6.2. Órbitas Cerradas y el Teorema de Poincaré-Bendixson

Puesto que

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0,$$

entonces de acuerdo al criterio de Bendixson [1.5.2] es posible que exista una región R del plano, simplemente conexa, tal que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) = y, \\ y' &= g(x, y) = -c^2(x + 2bx^3), \end{aligned} \quad (13)$$

posea al menos una órbita cerrada.

Si esta órbita cerrada existe entonces, por el criterio de Poincaré [1.5.1], debe encerrar a un punto de equilibrio del sistema. Dado que $P_{1,2}(\pm \frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$, son puntos silla entonces no es posible que las órbitas cerradas encierren dichos puntos y por tanto encerraría al origen. Se demostrará que esto es así, tanto para resortes duros $b > 0$ como para resortes suaves $b < 0$.

Por el teorema de Poincaré-Bendixson [1.5.3] se debe hallar un conjunto abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ y una región $R \subseteq D$ que sea positivamente invariante, es decir, que en cada punto de la frontera de R el campo vectorial apunte hacia el interior de R .

Para resortes duros, $b > 0$ se selecciona $D = \mathbb{R}^2$ y para resortes suaves, $b < 0$, la región $D = \left\{ (x, y) : -\frac{1}{\sqrt{-2b}} < x < \frac{1}{\sqrt{-2b}}, \quad y \in \mathbb{R} \right\}$.

Teorema 2.6.2 *Sea D la región considerada anteriormente entonces el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -c^2(x + 2bx^3), \end{aligned} \tag{13}$$

contiene en D al menos una órbita cerrada.

Demostración. Se considera dos situaciones de acuerdo a que el resorte sea duro, $b > 0$, o que el resorte sea suave, $b < 0$.

Para el resorte duro sean C_1 la curva cerrada definida por

$$M(x, y) = y^2 + c^2(x^2 + bx^4) = d_1, \quad d_1 > 0,$$

C_2 la curva cerrada definida por

$$N(x, y) = y^2 + c^2(x^2 + bx^4) = d_2, \quad d_2 > 0, \quad \text{con } d_1 < d_2$$

y R la región comprendida entre C_1 y C_2 , es decir

$$R = \left\{ (x, y) : d_1 \leq y^2 + c^2(x^2 + bx^4) \leq d_2 \right\}.$$

Se verifica que R es positivamente invariante. Sea (x, y) un punto sobre C_1 entonces

$$\nabla M(x, y) \cdot (f(x, y), g(x, y)) = c^2(2x + 4bx^4)y + 2y(-c^2(x + 2bx^4)) = 0,$$

Análogamente si (x, y) es un punto sobre C_2 entonces

$$\nabla N(x, y) \cdot (f(x, y), g(x, y)) = c^2(2x + 4bx^4)y + 2y(-c^2(x + 2bx^4)) = 0,$$

por lo que R es positivamente invariante, en este caso, en cada punto de la frontera de R el campo vectorial es tangente a R y puesto que $R \subseteq D$, en D el único punto de equilibrio es el origen y $\nabla M(x, y) = \nabla N(x, y) \neq 0$ para todo (x, y) sobre C_1 o C_2 , el teorema de Poincaré-Bendixson [1.5.3] asegura la existencia en R de por lo menos una órbita cerrada que rodea al origen.

Para el resorte suave, $b < 0$ se procede de manera análoga considerando las curvas cerradas C_1 y C_2 definidas por

$$M(x, y) = y^2 + c^2(x^2 + bx^4) = \frac{1}{100\sqrt{-2b}}$$

$$N(x, y) = y^2 + c^2(x^2 + bx^4) = \frac{1}{5\sqrt{-2b}}$$

respectivamente, y R como la región comprendida entre C_1 y C_2 , es decir,

$$R = \left\{ (x, y) : \frac{1}{100\sqrt{-2b}} \leq y^2 + c^2(x^2 + bx^4) \leq \frac{1}{5\sqrt{-2b}} \right\}.$$

▪

2.7. EL PERÍODO DE LAS ÓRBITAS

Se ha demostrado que el sistema

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -c^2(x + 2bx^3), \end{aligned} \tag{13}$$

posee por lo menos una solución periódica $(x(t), y(t))$, a continuación se trata el problema del cálculo del período T de esta órbita.

Teorema 2.7.1 *Para el sistema*

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -c^2(x + 2bx^3), \end{aligned} \tag{13}$$

el período T de la órbita periódica con condición inicial $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ en $t = 0$, está dado por

$$T = \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 + bx_0^2 + bx_0^2 S e n^2(u)}}, \tag{18}$$

Demostración. Se considera el problema de valor inicial equivalente

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + c^2x + 2c^2bx^3 &= 0 \\ x(0) = x_0, \quad x'(0) &= 0. \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial dada por $\frac{dx}{dt}$ se tiene

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} + (c^2x + 2c^2bx^3) \frac{dx}{dt} = 0,$$

e integrando se obtiene

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + c^2x^2 + c^2bx^4 = K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Utilizando las condiciones iniciales resulta que

$$K = c^2(x_0 + bx_0^4)$$

por lo que

$$\frac{dx}{dt} = \pm c \sqrt{(x_0^2 - x^2) + b(x_0^4 - x^4)}$$

y puesto que en el primer cuadrante la solución es decreciente entonces

$$dt = -\frac{dx}{c \sqrt{(x_0^2 - x^2) + b(x_0^4 - x^4)}}$$

e integrando de 0 a t se tiene que

$$t = \frac{1}{c} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2) + b(x_0^4 - x^4)}}$$

es el tiempo que se requiere en el plano fase para ir de $(x_0, 0)$ a $(y_0, 0)$, por tanto, el período T , es decir, el tiempo necesario para realizar una oscilación completa es cuatro veces este tiempo, así, el período está dado por

$$T = \frac{4}{c} \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - x^2) + b(x_0^4 - x^4)}}$$

y realizando la sustitución $x = x_0 \text{Sen}(u)$ resulta que

$$\begin{aligned} x_0^2 - x^2 + b(x_0^4 - x^4) &= x_0^2 - x_0^2 \text{Sen}^2(u) + b(x_0^4 - x_0^4 \text{Sen}^4(u)) \\ &= x_0^2(1 - \text{Sen}^2(u))(1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u)) \\ &= x_0^2 \text{Cos}^2(u)(1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u)), \end{aligned}$$

por lo que el período T se puede expresar como

$$T = \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u)}}, \quad (18)$$

Obsérvese que:

1. En el caso del resorte duro ($b > 0$) entonces $1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u) > 0$ y por tanto la integral siempre existe.
2. En el caso del resorte suave ($b < 0$) entonces $1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u) \leq 1 + 2bx_0^2 \geq 0$ y por tanto la integral existe siempre que $|x_0| \leq \frac{1}{\sqrt{-2b}}$. ■

2.8. BIFURCACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

En general, se ha demostrado que el sistema

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2(x + 2bx^3),\end{aligned}\tag{13}$$

posee tres puntos de equilibrio $P_0(0, 0)$, $P_1(\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$, $P_2(-\frac{1}{\sqrt{-2b}}, 0)$ y puesto que P_1 y P_2 son hiperbólicos, es decir, la matriz Jacobiana de la linealización alrededor de estos puntos posee valores propios con parte real diferente de cero entonces no existe la posibilidad de que en ellos el sistema tenga bifurcaciones, sin embargo, el punto de equilibrio en el origen P_0 es no hiperbólico y su matriz Jacobiana posee dos valores propios imaginarios puros $\lambda = \pm ic$ y por tanto puede ser posible una bifurcación de Hopf, es decir, que para $b < 0$ ($b > 0$) el sistema posee órbitas periódicas que aparecen (desaparecen) al pasar b a través de 0 y que las órbitas periódicas y el punto de equilibrio tienen diferente estabilidad a un mismo lado de $b = 0$, pero puesto que en este caso los valores propios no dependen continuamente del valor del parámetro b la bifurcación de Hopf considerada no es posible.

De las consideraciones anteriores se concluye que el sistema no posee bifurcaciones.

2.9. SIMULACIONES NUMÉRICAS COMPARACIÓN DE RESORTES DUROS Y SUAVES

En esta parte, mediante un simulador para sistemas dinámicos, explícitamente PHASER, se realizarán simulaciones tanto para resortes rígidos como suaves, que sugieren el comportamiento a largo plazo de las soluciones a partir de algunas condiciones iniciales.

Para el sistema no lineal

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -c^2(x + 2bx^3), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{13}$$

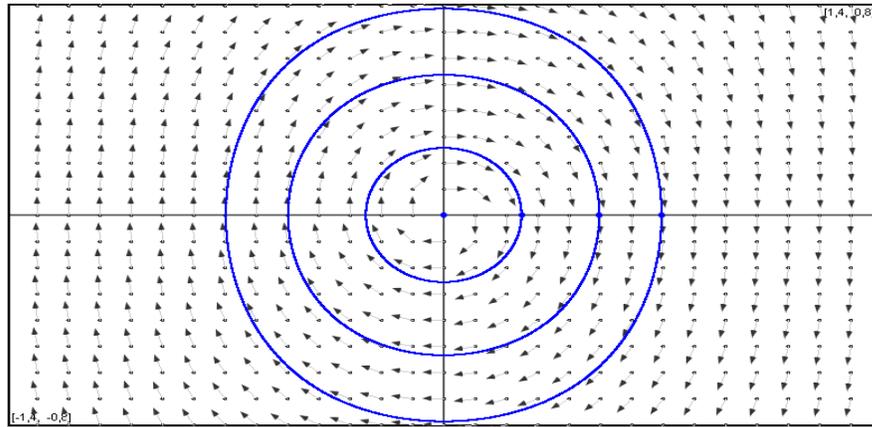
Se tiene los siguientes casos especiales:

1. Cuando $c^2 = 1$ y $b = \pm\frac{1}{2}$
2. Cuando $c^2 = 1$ y $b = \pm 2$
1. Cuando $c^2 = 1$ y $b = \pm\frac{1}{2}$ se obtiene los siguientes modelos:

i. Resorte Duro.

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= x^3 - x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{19}$$

Figura 2.10: Órbitas $b = \frac{1}{2}$, $c^2 = 1$. Resorte Duro.



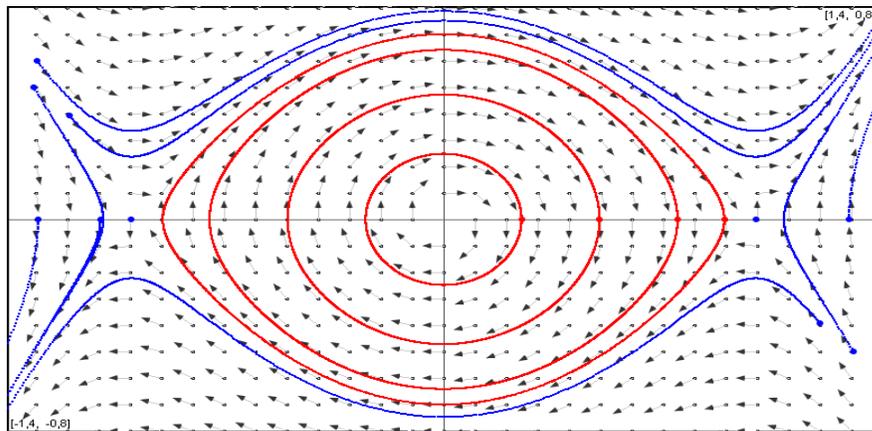
En la Figura. 2.10 se muestra algunas órbitas obtenidas para el sistema (19)

ii. Resorte Suave.

$$\begin{aligned}x' &= y, \\y' &= -x^3 - x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,\end{aligned}\tag{20}$$

En la Figura. 2.11 se muestra algunas órbitas obtenidas para el sistema (20)

Figura 2.11: Órbitas $b = -\frac{1}{2}$, $c^2 = 1$. Resorte Suave.



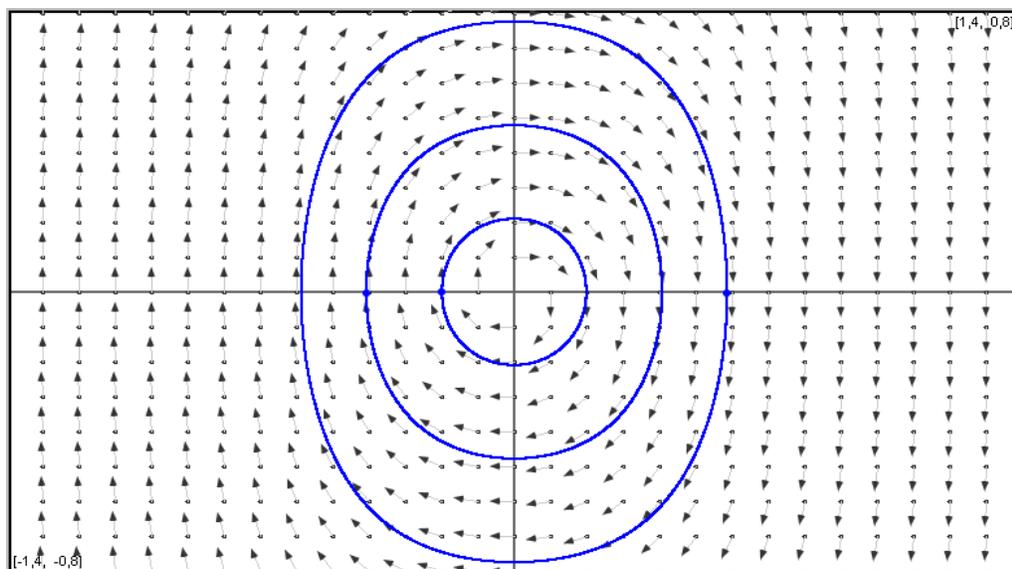
2. $c^2 = 1$ y $b = \pm 2$ se obtiene los siguientes modelos:

i. Resorte Duro.

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 4x^3 - x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{21}$$

En la figura. 2.12 se muestra algunas órbitas obtenidas para el sistema (21)

Figura 2.12: Órbitas $b = 2$, $c^2 = 1$. Resorte Duro.

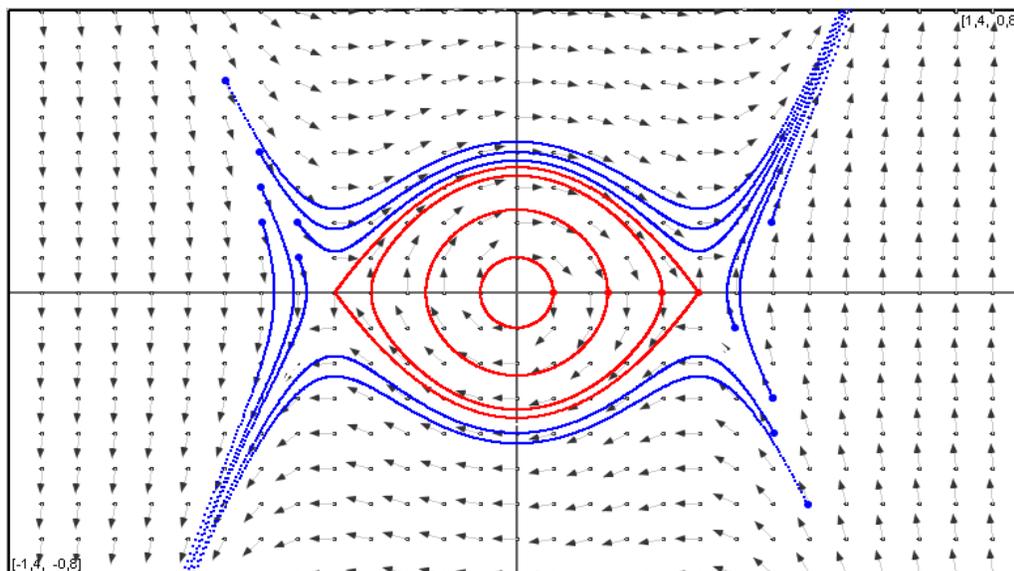


ii. Resorte Suave.

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -4x^3 - x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \tag{22}$$

En la figura. 2.13 se muestra algunas órbitas obtenidas para el sistema (22)

Figura 2.13: Órbitas $b = -2$, $c^2 = 1$. Resorte Suave.



Efectivamente, estas simulaciones numéricas confirman los resultados obtenidos mediante el análisis cualitativo de las soluciones del sistema (13). Entre ellos se encuentran resultados tales como: los puntos de equilibrio son el origen P_0 en el caso del resorte duro y los puntos P_0 , P_1 y P_2 en el caso del resorte suave, el punto de equilibrio en el origen P_0 corresponde a un centro estable y los puntos de equilibrio P_1 y P_2 son inestables y corresponden a puntos silla; así, como también se verifica que el sistema posee órbitas cerradas tanto para el resorte duro, para todo $x \in \mathbb{R}$, como para el resorte suave, siempre que $|x| < \frac{1}{\sqrt{-2b}}$.

2.9.1. Análisis A posteriori: Simulaciones Numéricas Vs Período en Órbitas Cerradas

En esta sección se contrastará los resultados que se obtienen al realizar simulaciones numéricas en PHASER para las órbitas periódicas y los cálculos numéricos necesarios para determinar el período a partir de unas condiciones iniciales en particular.

Para el resorte duro se toma $c = 1$, $b = \frac{1}{2}$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= x^3 - x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (19)$$

y para el resorte suave se toma $c = 1$, $b = \frac{1}{2}$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -x^3 - x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned} \quad (20)$$

Por el teorema de Poincaré-Bendixson como se mencionó en la sección 2.6.2 los sistemas (19) y (20) poseen órbitas cerradas en los conjuntos abiertos $D = \mathbb{R}^2$ y $D = \{(x, y) : -1 < x < 1, y \in \mathbb{R}\}$, respectivamente.

a. Período

En esta parte a partir de unas condiciones iniciales específicas se calcula el período de las órbitas cerradas con base en la relacionada en la sección 2.7

$$T = \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u)}}, \quad (18)$$

y se obtienen los resultados que se muestran en el siguiente cuadro.

Cuadro 2.1: Condiciones iniciales Vs Período. Resortes Duros y Suaves.

Condiciones Iniciales x_0	Período Resorte Duro	Período Resorte Suave
0,1	6,259762299	6,306888124
0,2	6,191115864	6,379735243
0,3	6,081799648	6,50733056
0,4	5,938472944	6,700495719
0,5	5,7688845543	6,978326991
0,6	5,580689819	7,375046660
0,7	5,381111920	7,957144692
0,8	5,176137355	8,876452816
0,9	4,970567487	10,61923418
1	4,768022028	106,3007807

b. Simulaciones Numéricas

En este apartado se utiliza el simulador de sistemas dinámicos para observar el flujo de las distintas órbitas periódicas que resultan al considerar las condiciones iniciales que se tomaron para determinar el período tanto para resortes duros como para resortes suaves, entre ellas:

$$(x_0, y_0) = (0.1, 0), (x_0, y_0) = (0.2, 0), \dots, (x_0, y_0) = (1, 0).$$

Figura 2.14: Órbitas Cerradas. $b = \frac{1}{2}$. Resorte Duro.

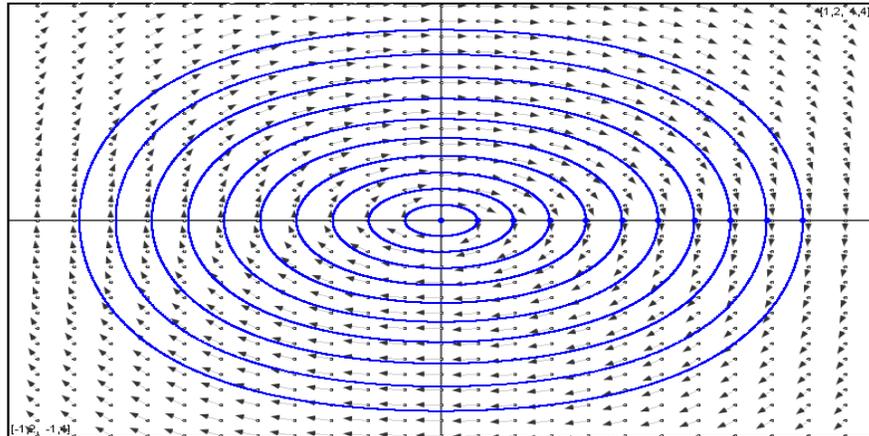
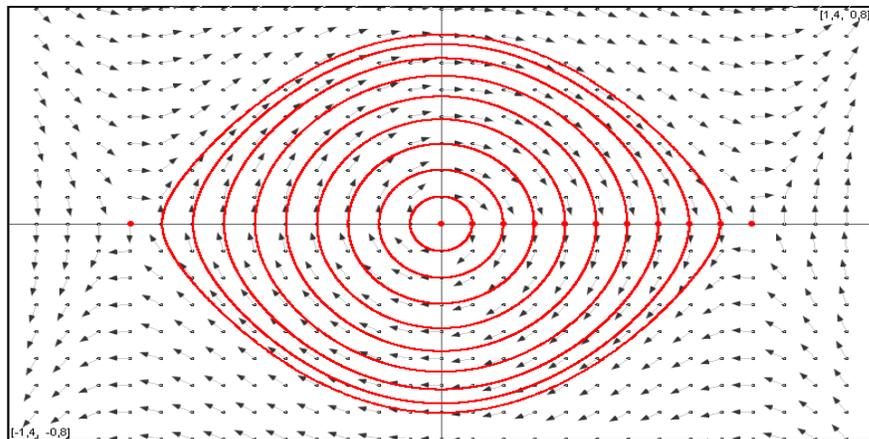


Figura 2.15: Órbitas Cerradas. $b = -\frac{1}{2}$. Resorte Suave.



c. Período Vs Simulaciones Numéricas

En este caso, se contrastan los resultados que se obtienen para el período, y cual es su efecto en las órbitas cerradas que se obtuvieron del flujo con la utilización del simulador de acuerdo si el resorte es duro o si el resorte es suave.

Lo que se puede notar es que las órbitas cerradas que describen las soluciones para el resorte duro son más rápidas que las que describen las soluciones para el resorte suave; independientemente de las condiciones iniciales que se tomen dentro del intervalo de existencia y unicidad de dichas trayectorias (Obsérvese. Figuras. 2.16 - 2.19.).

Figura 2.16: Gráfica Posición-Tiempo $b = \frac{1}{2}$ Resorte Duro.

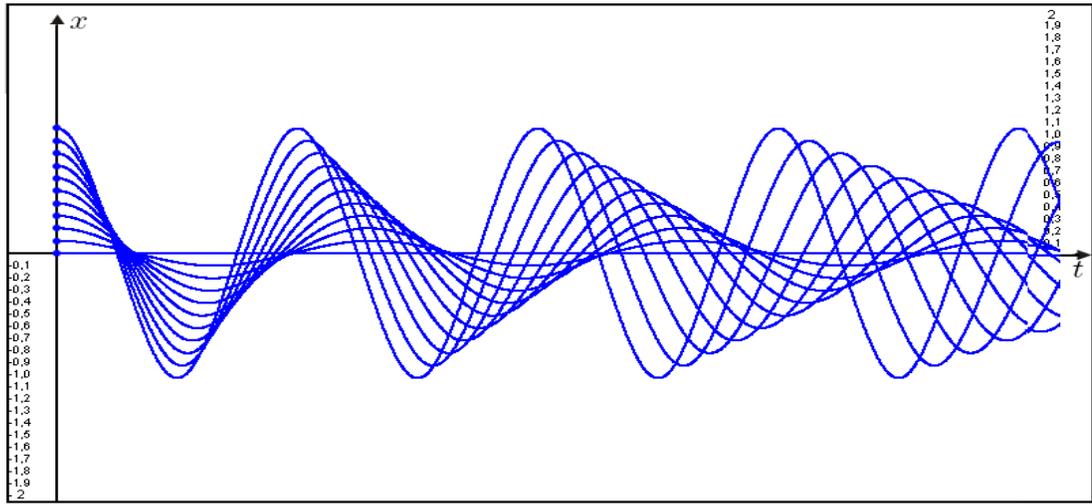


Figura 2.17: Gráfica Posición-Tiempo $b = -\frac{1}{2}$. Resorte Suave.

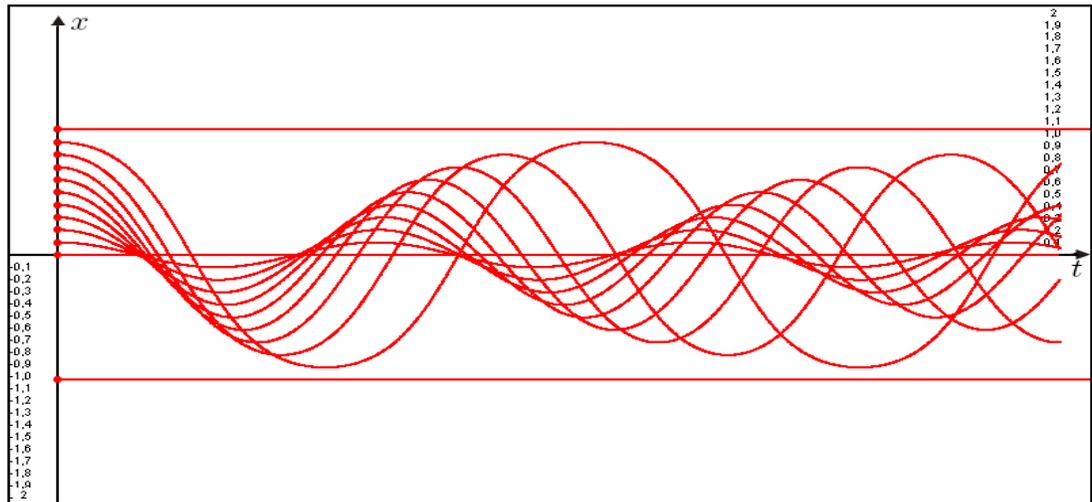


Figura 2.18: Gráfica Velocidad-Tiempo $b = \frac{1}{2}$ Resorte Duro.

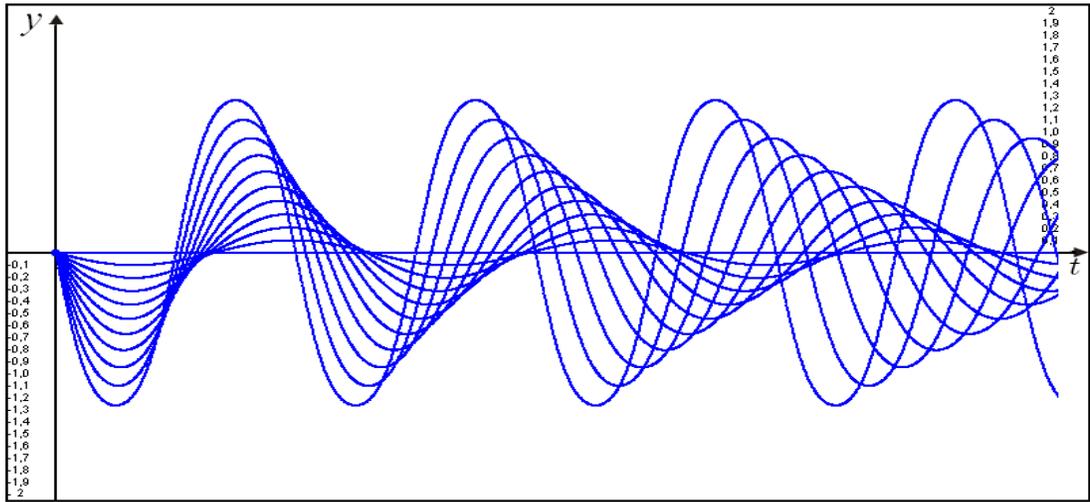
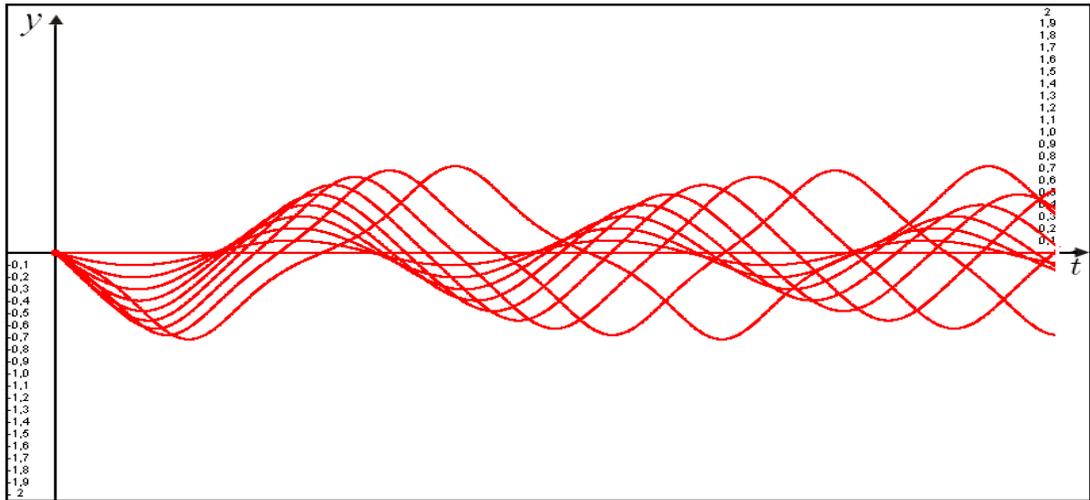


Figura 2.19: Gráfica Velocidad-Tiempo $b = -\frac{1}{2}$. Resorte Suave.



CONCLUSIONES

El desarrollo explícito de este estudio dio lugar a algunos resultados, que desde una perspectiva significativa sirven de soporte a la investigación de temas en el campo de las matemáticas aplicadas. En este proceso el avance teórico que se alcanzó, permite presentar reflexiones en el sentido de que las técnicas matemáticas utilizadas no se tratan en el currículo del programa, por ello es conveniente adoptar otro tipo de fundamentos teóricos como lo es la teoría de los sistemas dinámicos no lineales; un campo fundamental en el que se soporta este trabajo y el cual está estructurado, en nuestro caso, en base a la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias y algunos aportes del Álgebra lineal avanzada.

A lo largo de este trabajo se proporcionan los elementos y propiedades básicas que se deben tener en cuenta para dar una caracterización geométrica de las soluciones de un sistema dinámico determinado, particularmente, como se realizó para el sistema que modela la generalización de la Ley de Hooke, aquí tratada.

En consecuencia, los aportes más relevantes que brinda este análisis son:

- Un papel decisivo en el estudio local del comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales de tipo no lineal está dado por el análisis de estabilidad de las soluciones estacionarias o de equilibrio, para este modelo físico se determinó que si el resorte es duro la única solución de equilibrio corresponde al origen P_0 , en cambio si el resorte es suave existen además del origen P_0 dos soluciones de equilibrio que corresponden a los puntos P_1 y P_2 los cuales son simétricos con respecto a el eje y .
- Un análisis que permitió determinar parcialmente la dirección de las curvas solución del sistema lo proporcionó las isoclinas de pendiente nula. Para el caso del origen P_0 este análisis no fue concluyente y dicho punto podría comportarse como un nodo, un foco o un centro; en cambio, el análisis de pendiente nula que se realizó para los puntos de equilibrio P_1 y P_2 se logro deducir que dichos puntos se comportan como puntos silla.
- Aplicando la técnica de la linealización y el teorema de Hartman-Grobman se probó que el origen P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico y utilizando el teorema de Liapunov se verificó que el origen P_0 es un centro estable del sistema. Adicionalmente se mostró que los puntos P_1 y P_2 son puntos de equilibrio hiperbólicos inestables y corresponden a puntos silla.
- Posteriormente, se obtuvo el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales, el cual está representado en forma implícita, en el espacio fase, por

$$y^2 = -c^2(x^2 + bx^4) + K, \quad K \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

Una técnica adicional como lo es el teorema de Poincaré-Bendixson, mostró que algunas de estas soluciones representan órbitas cerradas cuyo período está dado por

$$T = \frac{4}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{\sqrt{1 + bx_0^2 + bx_0^2 \text{Sen}^2(u)}}. \quad (18)$$

- Un método práctico y efectivo que verificó los resultados obtenidos hasta el momento fueron las simulaciones numéricas realizadas en Phaser como una herramienta que ayuda a interpretar con mayor facilidad las propiedades básicas que determinan el comportamiento de las soluciones del sistema.

Como en la mayor parte de este tipo de trabajos se presentan dificultades que no se pueden prever y este no fue la excepción; particularmente, cuando se comenzó a estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio, específicamente, aquellos que son de tipo no hiperbólico; se pensó, que el método que mejor se adaptaba para analizar esta propiedad lo proporcionaría la teoría sobre la variedad central, sin embargo, fue necesario utilizar otro tipo de técnicas que ayudaran a cumplir este propósito, por lo que se recurrió a aplicar la teoría de las funciones de Liapunov.

Otra dificultad se presentó al analizar la bifurcación de los puntos de equilibrio no hiperbólicos, en este caso el origen P_0 , para el cual la matriz Jacobiana alrededor de este punto posee un par de valores propios imaginarios puros. Así, intuitivamente la teoría de las bifurcaciones nos decía que el tipo de bifurcación más adecuado que se adaptaba a este punto de equilibrio era el de la bifurcación de Hopf, sin embargo, al verificar las condiciones para esta clase de bifurcación no fueron satisfechas, y puesto que complementariamente los valores propios de la linealización en dicho punto no dependen continuamente del parámetro en consideración tal bifurcación no es posible.

También es importante considerar aquellos resultados que no obedecen al contexto matemático, por ello es considerable proponer algunos resultados derivados del contexto físico, entre ellos se tiene

- Según el análisis cualitativo realizado se deduce que para el resorte duro el movimiento es oscilatorio, ya que todas las órbitas del plano fase son periódicas, en cambio, las órbitas que describen las soluciones para el sistema de ecuaciones que modela el movimiento en los resortes suaves no es oscilatorio, de hecho este tipo de sistemas posee dos soluciones de equilibrio inestables.

Algunos temas interesantes que se podrían investigar basados en el enfoque que se presenta en este estudio son:

- Considerando que la fuerza de restitución está modelada por una función no lineal de la forma

$$f(x) = c_1x + c_3x^3 + \dots + c_{2k+1}x^{2k+1}$$

realizar un análisis cualitativo de una generalización de la Ley de Hooke para $k > 1$.

- Analizar la estabilidad y bifurcación de los puntos de equilibrio de la ecuación diferencial

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + kx + ax^3 = 0,$$

propuesta como un modelo de una generalización de la Ley de Hooke y en la cual m , β , k y a son parámetros reales, β es el coeficiente de la fuerza de fricción dada por $f_d(x) = \beta \frac{dx}{dt}$.

- Estudiar el sistema que modela una generalización de la Ley de Hooke, aplicando teorías de mayor complejidad, como lo es la teoría del caos⁵.

Finalmente consideramos que con este tipo de trabajos se está dando un mayor impulso para incursionar en el análisis de temas relacionados con diferentes campos de las ciencias naturales, ciencias sociales y sus aplicaciones, lo que permitirá, en alguna medida, un mayor conocimiento e interpretación de los diferentes fenómenos que en ellas ocurren.

⁵Ciertos sistemas dinámicos no lineales suelen comportarse de forma aleatoria y completamente impredecible, esto suele llamarse caos; y la rama de investigación de este tipo de sistemas se llama teoría del caos.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Carr, J. *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [2] Escobar, J. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones en Maple*. Universidad de Antioquia, Medellín.
- [3] Hirsch, M.W and Smale, S. *Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Álgebra Lineal*. Alianza Universidad, Madrid, 1983.
- [4] Wiggins, Stephen. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [5] Zill, Dennis. *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. International Thomson Editores, Quebecor World Bogotá, Santa Fé de Bogotá, 7ª edición, 2002.
- [6] Página web. <http://www.H:tesis/hooke4/Historia muelle.html>.