DIVISIÓN, ERRORES Y SOLUCIONES METODOLÓGICAS

JOSÉ LIBARDO VILLOTA BURGOS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2014

DIVISIÓN, ERRORES Y SOLUCIONES METODOLÓGICAS

JOSÉ LIBARDO VILLOTA BURGOS

Trabajo de investigación presentado como requisito para optar el título de:
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director
LUIS FÉLIPE MARTÍNEZ PATIÑO
Magister en Pedagogías Activas y Desarrollo Humano

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2014

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en la siguiente investigación son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo 1ro del acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Luis Felipe Martínez Patiño

Director

Oscar Fernando Soto Agreda

Jurado

Vicente Erdulfo Ortega Patiño

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2014

Esta investigación la dedico a…

DIOS, porque es el único que nunca me falla, sobre todo me tiene cariño, y porque día a día el mejor regalo que he tenido ha sido él.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresan sus agradecimientos a:

Institución Educativa Mariano Ospina Rodríguez.
Educación básica primaria sección 3 INEM Pasto.
Sede Joaquín María Pérez.
Jornada de la mañana.
Año lectivo 2013.
Profesora: Luz Deifilia De Trejo.
Grado: 4 - 9.
Coordinadora: Marta Cerón.

Institución Educativa Municipal "Ciudadela de Pasto".
Primaria Santa Mónica.
Jornada de la tarde.
Año lectivo 2013.
Profesor: Enrique Ortiz Osejo.
Grado: 4 – 3.
Coordinadora: Fanny Solarte.

Director
Luis Felipe Martínez Patiño.

Jurados Evaluadores.
Vicente Erdulfo Ortega Patiño.
Oscar Fernando Soto Agreda.

Resumen

En este proyecto se investigó sobre los errores que se presentan en la aplicación de procesos algorítmicos de la división entre números naturales. Estos errores se evidenciaron usando cuatro cuestionarios aplicados a los estudiantes del grado cuarto de las I. E. M. INEM[1] y CIUDADELA[2], del municipio de San Juan de Pasto. Los datos encontrados se analizaron teniendo como base los aportes de las investigaciones realizadas por Maza Gómez (1991), Vergnaud (1997), el primer y segundo incisos de los métodos de análisis de errores de Mulhern (1989), también se tomó en cuenta las estructuras de los números naturales, el sistema de numeración decimal, la división, los cálculos, los algoritmos, los tipos de algoritmos, la definición de error de Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), y el estándar curricular para el área de matemáticas: “resuelvo y formulo problemas utilizando relaciones y propiedades y haciendo operaciones con números naturales[3]”, correspondientes al pensamiento numérico de los grados cuarto a quinto. Finalmente con los resultados obtenidos se plantean algunas secuencias didácticas a modo de una solución metodológica para mejorar la enseñanza y el aprendizaje del algoritmo de la división.

[1] Institución Educativa Mariano Ospina Rodríguez. Educación Básica Primaria Sección 3 INEM Pasto. Sede Joaquín María Pérez. Año Lectivo 2013.
[2] Institución Educativa Municipal Ciudadela de Pasto. Educación Básica Primaria. Sede Santa Mónica. Año Lectivo 2013.
[3] Estándar número cinco Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, Grados Cuarto a Quinto. Ministerio de Educación Nacional.

Abstract

In this project we investigated the errors that arise in the implementation of algorithmic processes of the division of natural numbers. These errors were demonstrated using four questionnaires administered to fourth grade students of I. E. M. INEM[4] and CIUDADELA[5], the municipality of San Juan from Pasto. The data found were analyzed taking as basis the contributions of research conducted by Maza Gómez (1991), Vergnaud (1997), the first and second paragraphs of the methods of analysis errors Mulhern (1989), also took into account the structures of natural numbers, the decimal system, division, calculations, algorithms, types of algorithms, the definition of error Segovia, Castro, Castro and Rico (1989), and curriculum standard for the area mathematics: "I formulate and solve problems using properties and relationships and doing operations with natural numbers[6]", corresponding to the new thinking of the fourth-fifth grades. Finally the results obtained with some didactic way of a methodological solution to improve teaching and learning division algorithm sequences arise.

[4] Mariano Ospina Rodríguez Educational Institution. Basic Education Primary Section 3 INEM Pasto. See Joaquín María Pérez. Academic Year 2013.
[5] Municipal Educational Institution CIUDADELA from Pasto. Basic Primary Education. Santa Monica headquarters. Academic Year 2013.
[6] Standard Number Five and Number Systems Numerical Thinking, Grades Four to Five. Ministry of National Education.

Contenido

Lista de Tablas

Pág.

Lista de Imágenes

Lista de Anexos

INTRODUCCIÓN

En la actualidad el error es considerado parte inseparable de los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, por lo tanto, los investigadores en educación matemática sugieren diagnosticar y tratar seriamente los errores de los estudiantes, discutir con ellos sus concepciones erróneas, y presentarles luego situaciones matemáticas que les permitan reajustar sus ideas. Diferentes investigadores nacionales e internacionales se han ocupado de la temática, obteniendo importantes resultados que sirven de referentes teóricos para este tipo de investigaciones.

Por otra parte, es notable observar que casi todas las recomendaciones metodológicas acerca de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática coinciden en la necesidad de señalar que se identifiquen los errores de los estudiantes en el proceso, determinando sus causas y organizando el plan de estudios teniendo en cuenta esa información, valorando el docente las ideas previas de los estudiantes proponiendo estrategias adecuadas para lograr el progreso en el aprendizaje.

En este estudio se exponen los resultados de una investigación realizada en las I. E. M. INEM y CIUDADELA, en la que se analizaron y clasificaron los errores mostrados por algunos estudiantes de grado cuarto en el desarrollo de divisiones entre números naturales.

La investigación se organizó de la siguiente manera. En el primer capítulo, se describe y formula la pregunta, los antecedentes, la justificación y objetivos de estudio. En el segundo se expone el marco teórico el cual está compuesto por las investigaciones de Maza Gómez (1991). En el tercer capítulo se plantea la planeación del estudio y diseño de actividades, el tipo de investigación, las técnicas e instrumentos de recolección de información y las etapas. En el cuarto se organiza el análisis de los resultados obtenidos, de acuerdo a los objetivos propuestos. En el quinto capítulo, se sintetizan las conclusiones obtenidas del estudio. Finalmente, se plantean las recomendaciones y secuencias didácticas a modo de solución metodológica para la enseñanza del algoritmo de la división entre números naturales.

1. CONTEXTUALIZACIÓN Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

La formación matemática básica de Colombia para primaria, está orientada por los estándares básicos de calidad en matemáticas[7]; establece que los estudiantes junto con los docentes deben trabajar el concepto de división y otras operaciones aritméticas con números naturales en los grados cuarto y quinto de cualquier institución educativa; literalmente uno de los estándares dice: "resuelvo y formulo problemas utilizando relaciones y propiedades y haciendo operaciones con números naturales"[8]. Dicho estándar muestra dos partes: la primera, resolver problemas en los cuales el estudiante tiene que desarrollar operaciones básicas con números naturales; la segunda, hace referencia a la formulación de problemas.

Lo anterior indica la necesidad, en el desarrollo de procesos o métodos por los cuales el estudiante, aplicando operaciones aritméticas, llegue a la solución exacta de algunos problemas; muchos de ellos, se presentan tanto en la vida cotidiana como en los libros de matemáticas e involucran la realización de divisiones con números naturales, por lo cual, realizar divisiones aplicando correctamente el algoritmo convencional de la división, permite tanto interactuar en la sociedad, como el avance en la formación matemática de los estudiantes, progreso que se evidencia en los grados superiores cuando los estudiantes desarrollan divisiones en otros conjuntos numéricos; el no aplicar correctamente el algoritmo de la división en el conjunto de los números naturales tendrá como consecuencia llegar a resultados erróneos al realizar divisiones como en el caso de los racionales.

Se señala que una actividad importante que deben realizar los docentes de matemáticas es la identificación de los errores típicos que cometen los estudiantes, tratando, al mismo tiempo, de llevar acciones de corrección bajo un modelo de enseñanza. No obstante, para esto se hace imprescindible encontrar herramientas metodológicas que permitan identificar los errores, los cuales no sólo tienen lugar en una instancia de diagnóstico inicial, sino durante todo el proceso de la enseñanza y/o el aprendizaje que se lleva a cabo. Analizar las dificultades del aprendizaje de la matemática en términos de la prevención y corrección, supone combinar estrategias metodológicas. El análisis de los errores sirve para ayudar al docente a organizar la planeación, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades.

Es importante aclarar que los errores en matemáticas pueden ser superados y aceptados, no como algo que no tendría que haber aparecido, sino como una instancia

---

[7] www.mineducacion.gov.co

[8] Estándar número cinco Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, Grados Cuarto a Quinto. Ministerio de Educación Nacional.

cuya aparición es útil e interesante, ya que permite la adquisición de un nuevo y mejor conocimiento, Rico (1995). Algunos investigadores en educación Matemática como: Mulhern (1989), Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), Maza Gómez (1991) y Vergnaud (1997), encuentran que al trabajar el concepto o el algoritmo de la división, se presentan serias dificultades las cuales producen errores, repitiéndose en los distintos años y ciclos que conforman el sistema educativo, que resultan ser básicamente los mismos para cada contenido curricular.

El propósito, es generar estrategias que permitan ayudar a identificar dichos errores reiterados en el tiempo y que suelen ser reconocidos por los investigadores en educación matemática, que desarrollan sus investigaciones en niveles que van desde la educación primaria hasta la universitaria. Se puede resaltar que hay errores que provienen del concepto de división y otros de la aplicación del algoritmo; estas dificultades pueden aparecer por la incomprensión del concepto de división, la metodología inadecuada, el inadecuado material de apoyo, deficiencias en los preconceptos que se necesitan, la no identificación de conceptos previos requeridos y la deficiencia en la construcción del sistema decimal.

Por otro lado, se puede mencionar que el avance tecnológico ha permitido la creación de instrumentos que permiten realizar operaciones entregando resultados exactos en la solución de algunos problemas matemáticos, pero dichos instrumentos se vuelven inadecuados cuando los estudiantes presentan exámenes de estado, como las pruebas saber, las cuales no permiten el ingreso de ningún artefacto electrónico. Por lo tanto es necesario que el estudiante pueda ejecutar el algoritmo de la división en forma correcta, cometiendo la mínima cantidad de errores, debido a que no solo para dar respuesta a las preguntas de matemáticas, sino también a las de otras ciencias evaluadas por el icfes, puede requerir de la realización de alguna división.

Los errores son parte del proceso de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, los mismos permiten hacer conciencia sobre qué está asimilando el estudiante y la forma como aplica los procesos algorítmicos que ha aprendido; se buscan errores no comunes los cuales detectó y clasificó Maza Gómez (1991).

Para Maza Gómez siempre es posible agrupar los procedimientos aplicados en el desarrollo de las divisiones en los siguientes tipos de algoritmos:

- Descomposición o Expandido en reparto distributivo.
- Descomposición o Expandido en reparto sustractivo.
- Expandido.
- Extendido.
- Abreviado o Estándar.
- Especiales, anglosajón.

Sus investigaciones han detectado que se presentan los siguientes errores cuando se avanza en el aprendizaje de algoritmo de la división:

- Separaciones no adecuadas de cifras del dividendo para iniciar la división.
- En las aproximaciones parciales del cociente no llegar al máximo posible y continuar, quedando restos parciales superiores al divisor.
- Omitir ceros en el cociente.
- Errores en los cálculos mentales de ir restando a medida que se realizan las multiplicaciones parciales.
- Se reproducen de manera incrementada los errores que los estudiantes tienen en la resta y en la multiplicación.

Los anteriores algoritmos y los errores detectados por Maza Gómez, se describen más detalladamente en el marco teórico; partiendo de los mismos, la investigación tiene su interés en analizar la frecuencia con la cual cada error es reincidente.

Los investigadores en educación matemática encuentran que cuando se enseñan los conceptos matemáticos se presentan diferentes tipos de errores, tanto al interiorizarlos, como, cuando los estudiantes tratan de aplicarlos para resolver o plantear algún tipo de problema matemático; se han ocupado de detectarlos y de dar algún tipo de explicación del porqué aparecen algunos errores. Hay patrones permanentes en los errores detectados en las investigaciones desarrolladas, dichos errores aparecen de dos maneras: a nivel individual, dado que los estudiantes muestran gran regularidad en su modo de resolver ejercicios y problemas matemáticos similares, y a nivel colectivo, debido a que distintos estudiantes cometen errores semejantes en determinadas etapas de su aprendizaje y del desarrollo de los procesos aplicados. En razón de estas regularidades con la que suelen presentarse, varios autores han elaborado clasificaciones de los errores en el aprendizaje de la matemática, ya sea por su naturaleza, su posible origen o su forma de manifestarse.

El cognitivismo sostiene que la mente del estudiante no es una página en blanco: el estudiante tiene un saber anterior, y estos conocimientos anteriores pueden ayudar al nuevo conocimiento, pero a veces son un obstáculo en la formación del mismo. El conocimiento nuevo no se agrega al antiguo, sino que lucha contra él y provoca una nueva estructuración del conocimiento total. Los errores cometidos por los estudiantes en matemáticas son una manifestación de esas dificultades y obstáculos propios del aprendizaje, y se acepta unánimemente que es necesaria la detección y análisis de los mismos, y su utilización positiva en una fuente de realimentación del proceso educativo.

Matz (1980) señala: "los errores son intentos razonables pero no exitosos de adaptar un conocimiento adquirido a una nueva situación". Se entiende que el error tendrá distintas procedencias, pero siempre se considerará como un esquema cognitivo inadecuado y no sólo como consecuencia de falta de conocimiento o de un despiste.

Los errores aparecen en el trabajo de los estudiantes principalmente cuando se enfrentan a conocimientos novedosos que los obligan a hacer una revisión o reestructuración de lo que ya saben.

Popper (1983) propone cambiar el interrogante: ¿Cuál es la fuente última del conocimiento?, por el de ¿Cómo podemos detectar y eliminar el error?, y propone el racionalismo crítico como postura adecuada para explicar y asegurar el avance de la ciencia. El avance del conocimiento, afirma, consiste en la modificación del conocimiento anterior, a partir de someter a prueba las afirmaciones tenidas por verdaderas hasta el momento. La observación, el razonamiento y la intuición tienen, como función fundamental, contribuir al examen crítico de las conjeturas. Esta postura confiere al error el status de parte constituyente del proceso de adquisición del conocimiento, que es intrínseco a nuestro modo de conocer, así como lo es la crítica permanente para detectarlo.

Brousseau, Davis y Werner (1986) señalan cuatro vías mediante las cuales el error puede presentarse, las que se enuncian del siguiente modo: Los errores son a menudo el resultado de grandes concepciones inadecuadas acerca de aspectos fundamentales de la matemática. Frecuentemente los errores se presentan como resultado de la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado, que se puede identificar con facilidad por el docente. También los errores pueden presentarse cuando el estudiante utiliza procedimientos imperfectos y posee concepciones inadecuadas que no son reconocidas por el docente. Los estudiantes con frecuencia inventan sus propios métodos, no formales pero altamente originales, para la realización de las tareas que se les proponen y la resolución de problemas.

Mulhern (1989) hace una caracterización general de los errores cometidos por los estudiantes:

- "Los errores surgen en la clase generalmente de manera espontánea y sorprenden al docente.
- Son persistentes, particulares de cada individuo y difíciles de superar porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el estudiante.
- Predominan los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al estudiante a una comprensión equivocada, en general, son resultado de concepciones inadecuadas de los fundamentos de la matemática, reconocibles o no reconocibles por el docente) con respecto a los errores por azar u ocasionales.
- Los estudiantes en el momento no toman conciencia del error.
- Algunos errores se gestan en la comprensión o el procesamiento que hace el estudiante de la información que da el docente. Los estudiantes recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el docente".

Lindquist (1989) afirma que ningún algoritmo simple es “correcto” para enseñarse. Al igual que en la suma y en la resta, cuando se le permite al estudiante crear sus propios algoritmos, aumenta la comprensión y la flexibilidad en el uso de las operaciones matemáticas. El estudiante puede explicar lo que hizo y demostrar la validez de su algoritmo inventado a través de la manipulación de objetos físicos o mediante la creación de arreglos pictóricos. El uso de algoritmos informales tomara más tiempo; sin embargo, el uso de dicho tiempo produce un ahorro del mismo en la práctica de reglas matemáticas y aumenta la comprensión y la motivación del estudiante.

Maza Gómez (1991) centra sus investigaciones en el algoritmo de la división dentro del conjunto de los números naturales, incluyendo los diferentes algoritmos que se pueden utilizar para realizar divisiones, las propiedades, la multiplicación, el sistema decimal, entre otros conceptos, argumenta que al profundizar en este tema las siguientes partes son imprescindibles:

- La “inversión” de la multiplicación.
- La propiedad distributiva y el sistema decimal.
- El tamaño del dividendo y del divisor.
- Tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor.
- La presencia de ceros.
- La división exacta e inexacta.

Por su parte Bachelard (1991) introdujo el concepto de obstáculo epistemológico para explicar la aparición de los errores en la conformación del conocimiento, señala que los entorpecimientos y confusiones, que causan estancamientos y retrocesos en el proceso del conocimiento, provienen de una tendencia a la inercia, a la que da el nombre de obstáculo; se conoce en contra de un conocimiento anterior (insuficiente o adquirido deficientemente) que ofrece resistencia, la mayoría de las veces porque se ha fijado en razón de haber resultado eficaz hasta el momento; cuando se lo pretende utilizar en un contexto o una situación inadecuados, se produce el error.

Rico (1995) destaca que, si bien existe una cantidad considerable de categorizaciones de errores y se realizaron serios intentos por desarrollar un sistema de categorización de errores con base en una tipificación de obstáculos y del análisis derivado correspondiente, hasta el momento, no se han superado los niveles generales, meramente descriptivos, y no existe un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar, y predecir los errores en términos de obstáculos, es decir, en función de argumentos fundamentalmente epistemológicos y con exclusión de categorías cognitivas. No obstante, es importante hacer notar que los métodos descriptivos desempeñan un papel fundamental en la investigación educativa dado que pueden proporcionar hechos, datos, entre otros, y preparan el camino para la configuración de nuevas teorías o nuevas investigaciones. Propone cuatro líneas de investigación actual en torno a los errores:

- "Estudios sobre análisis, causas, elementos, taxonomías de clasificación de los errores.
- Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores.
- Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus estudiantes.
- Trabajos de carácter técnico que incluyen técnicas estadísticas, como contrastar hipótesis para el análisis de los errores".

Kouba y Franklin (1995) en su investigación concluyen que los estudiantes se desempeñan pobremente en los problemas de multiplicación y división, debido al uso persistente de estrategias inadecuadas para resolver este tipo de problemas matemáticos, reforzados inadvertidamente por una serie de factores. Unos de estos factores residen en que los problemas de multiplicación y división en los grados K-4[9] se limitan a operaciones con números enteros. Los estudiantes necesitan experiencias con situaciones concretas y que les guie y oriente para el entendimiento de modelos a escala. Las investigaciones muestran que los estudiantes aprehenden mejor cuando pueden utilizar diferentes representaciones para las situaciones de multiplicación y división, de manera que puedan expresar las relaciones existentes entre dichas representaciones o modelos. Muchos estudiantes realizan sus primeras relaciones matemáticas de la multiplicación y división empleando modelos o representaciones relacionadas con la suma o la resta.

Buschman (1995) propone, como parte de la enseñanza de la matemática, identificar la naturaleza del pensamiento del estudiante y las estrategias utilizadas para solucionar problemas a nivel conceptual. Mediante la interacción y la comunicación, el estudiante puede reflejar su entendimiento matemático, o de las matemáticas, para establecer conexiones e internalizar los conceptos. De esta manera, el estudiante puede recordar, entender, utilizar y descubrir nuevos conceptos. También plantea que los estudiantes necesitan tiempo para observar, trabajar con pares y construir un lenguaje matemático propio. Cuando se comparte conocimiento con los pares, el conocimiento adquirido es útil y practico en la aplicación en diferentes situaciones. Cuando el estudiante utiliza su propio vocabulario, su entendimiento matemático es más preciso, emplea palabras aprendidas en situaciones y contextos reales. De esta manera puede entender el significado de cada palabra y la definición del concepto. El trabajo con estudiantes que están a igual nivel de conocimiento permite que se apropien de una mejor manera los conceptos, dado que para explicar a su compañero los procesos realizados tiene que utilizar palabras comunes para los dos, lo cual permite que el estudiante tenga una mejor interpretación y pueda comunicarla.

Para Socas (1997) son dos las principales causas de los errores en el aprendizaje de la matemática: "errores que tiene su origen en un obstáculo y errores que tiene su origen en una ausencia de significado". Los últimos, tendrían dos procedencias distintas, una, relacionada con las dificultades asociadas a la complejidad de los objetivos

[9] Grado correspondiente en nuestro sistema de educación al cuarto grado de primaria.

matemáticos y a los procesos de pensamiento matemático; y otra, relacionada con las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales hacia la matemática. Consideran tres ejes, no disjuntos, que permiten analizar el origen del error. De esta forma, se puede situar los errores que cometen los estudiantes en relación con tres orígenes distintos:

- Obstáculo.
- Ausencia de sentido.
- Actitudes afectivas y emocionales.

Se considera el obstáculo como un conocimiento adquirido, no una falta de conocimiento, que ha demostrado su efectividad en ciertos contextos. Cuando el estudiante utiliza este conocimiento fuera de dichos contextos, origina respuestas inadecuadas Bachelard (1991); Brousseau (1983). Se organizan los obstáculos que se presentan en el sistema didáctico como se muestran a continuación:

Obstáculos Epistemológicos → Obstáculos Didácticos → Obstáculos Cognitivos.

Los errores que tienen su origen en una ausencia de sentido se originan en los distintos estadios de desarrollo (semiótico, estructural y autónomo) que se dan en los sistemas de representación, por ejemplo, errores de procedimiento en virtud de los cuales los estudiantes usan de manera inapropiada fórmulas o reglas de procedimiento. Los errores que tienen su origen en actitudes afectivas y emocionales tienen distinta naturaleza: faltas de concentración (excesiva confianza), bloqueos, olvidos, entre otras.

Según Henestroza (1997) desde la filosofía, el error es atribuible a la condición de la mente humana, ya que ésta puede "considerar como verdaderos, conceptos y o procedimientos deficientemente desarrollados, que incluyen ideas contradictorias o interpretaciones y justificaciones falsas". Henestroza, citando al filósofo alemán Popper (1983), plantea que los errores del conocimiento se producen entre otras cosas porque no hay un criterio absoluto para reconocer la verdad. La claridad y la coherencia, no aseguran necesariamente la verdad. Pero sí existen algunos criterios para detectar el error, tales como la confusión, la incoherencia y la inconsistencia.

Habitualmente quienes enseñan se sorprenden al comprobar que un conocimiento entregado por ellos en forma clara y correcta, se deforma en la mente del estudiante, generando errores. En el caso específico de las matemáticas y especialmente en los aprendizajes iniciales, éstos pueden ser desde simples distracciones hasta errores conceptuales severos. Henestroza plantea un conjunto de interesantes características comunes a los errores relevantes en el aprendizaje de la matemática:

- "Surgen de manera aparentemente espontánea. Sorprenden al docente.

- Pueden haberse generado mucho antes de que el docente se haya dado cuenta de su existencia. Son generalmente particulares de cada individuo.
- Difíciles de modificar porque casi siempre requieren de una reestructuración cognitiva del estudiante.
- No son reconocidos como error por el estudiante, son generalmente sistemáticos y no casuales".

Rico (1999) se refiere a la noción de organizadores para articular el diseño, desarrollo y evaluación de cada unidad didáctica, considerando organizadores del currículo a aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales. Él considera como organizadores, entre otros, errores y dificultades en el aprendizaje. Los cuales forman parte de las producciones de los estudiantes durante el aprendizaje de la matemática y constituyen datos objetivos que se encuentran permanentemente a lo largo del proceso educativo. Siendo un objetivo permanente de la enseñanza, lograr un correcto aprendizaje, las producciones o respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de dicho objetivo. El análisis de errores en el aprendizaje se transformó en una cuestión de permanente interés en las investigaciones en educación matemática. Los estudios se fueron orientando según las corrientes pedagógicas y psicológicas predominantes y por el currículo matemático en los diferentes sistemas educativos.

Gudiño, Batanero y Font (2003) quienes indican que: "se habla de error cuando el estudiante realiza una práctica (acción, argumentación, entre otras), que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar". El dominio de las cuatro operaciones básicas es uno de los objetivos de la enseñanza elemental, pero para muchos estudiantes suponen muchas dificultades. La mediación del docente es fundamental en este desarrollo, que necesita un sobre aprendizaje para lograr la automatización. También es muy importante la colaboración de las familias para que aprovechen todas las ocasiones en las que puedan aplicar los conceptos que están adquiriendo los estudiantes. Los docentes deben proponer ejemplos concretos para poder comprender los conceptos abstractos y darles significación, para hacer de puente entre el conocimiento formal e informal y evitar que se produzca incomprensión y aprendizaje memorístico, que desembocará en mayores dificultades.

No se puede desconocer que los errores son la manifestación exterior de un proceso complejo en el que interactúan muchas variables: docente, estudiante, currículo, contexto sociocultural, entre otras. Aún no se ha completado un desarrollo teórico sistemático que permita clasificar, interpretar, predecir y superar errores y dificultades en busca de un aprendizaje de calidad. No obstante, la investigación en torno a los errores en el proceso de aprendizaje es una de las principales preocupaciones actuales de la educación matemática.

Las teorías sobre la enseñanza y el aprendizaje de la matemática coinciden en la necesidad de identificar los errores de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información. Por lo tanto, los docentes deben ser sensibles a las ideas previas de los estudiantes y deberían utilizar las técnicas del conflicto cognitivo para lograr el progreso en el aprendizaje. No obstante, se debe tener en cuenta que en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, se encuentra con una gran variedad de dificultades que son potencialmente generadoras de errores, que, sin llegar a una categorización exhaustiva, Di Blasi Regner y Otros (2003) las agrupan en los siguientes tópicos:

- Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
- Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
- Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.
- Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los estudiantes.
- Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales".

Sintetizando las ideas hasta aquí presentadas, se puede notar que las investigaciones en análisis de errores pueden ser agrupadas en torno a dos objetivos principales: la superación del error a través de su eliminación, o a través de la exploración de sus potencialidades. En la primera categoría se encuentran las investigaciones realizadas por la influencia del conductismo y del procesamiento de la información. En segundo lugar, aparecen los trabajos más recientes de carácter constructivista. No obstante, cabe aclarar que este encasillado no es rígido y pueden ser encontrados los dos objetivos en algunos trabajos investigativos.

Hay quienes ponen el énfasis en que los errores en matemáticas pueden provenir predominantemente, de dificultades del sujeto, sean éstas intelectuales, en el sentido de menor capacidad intelectual global o de alteraciones mayores o menores de funciones específicas tales como: la percepción, la función simbólica, la organización espacial, el desarrollo del pensamiento operatorio (conservación, seriación, clasificación), la atención, la memoria, el desarrollo lingüístico, la estabilidad emocional y/o de un conjunto de más de una de ellas.

Por tanto esta investigación se fundamenta en los principios del constructivismo metodológico, sin embargo, se enmarca únicamente en el diagnóstico, descripción y clasificación de los errores y deja para próximas investigaciones los factores influyentes, la intervención con los docentes y la aplicación de la secuencia didáctica elaborada a modo de solución metodológica.

La importancia de esta investigación se encuentra en el análisis de los patrones de error que cometen los estudiantes de educación básica primaria, los que pueden revelar errores sistemáticos que sean síntomas de concepciones inadecuadas, y en determinar qué conviene que aprendan los docentes en relación con los errores que cometen los estudiantes, puesto que se podrían proporcionar soluciones sobre qué estrategias pueden resultar las más convenientes a la hora de llevar adelante los procesos de la enseñanza y el aprendizaje en el algoritmo de la división. Al respecto, cabe aclarar que las investigaciones en educación matemática pueden estar dando a los docentes un conocimiento general de los esquemas teóricos de interpretación y desarrollo curricular derivado del diagnóstico, tratamiento y superación de los errores en el aprendizaje de la matemática. Esta comprensión sobre las propias creencias permitiría asumir críticamente los planteamientos profesionales de cada docente, observando las incoherencias y aspectos olvidados y promoviendo una concepción más completa de las tareas docentes, al mismo tiempo que induciría a que ayuden a sus estudiantes a superar el sentimiento negativo que tienen hacia los errores.

También se piensa que los errores pueden emplearse como instrumento de motivación y como punto de partida para exploraciones matemáticas creativas, lo que implicaría que se desarrollen actividades investigativas que, además, pueden proporcionar una comprensión más completa y profunda del contenido matemático y de la propia naturaleza del algoritmo de la división, ayudando a investigar cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del mismo. Se puede decir que el estudio de los errores es un nuevo campo para los docentes e investigadores que quieran mejorar la educación en Colombia. Por tanto el análisis de errores se constituye en una fuente de investigación.

Los estudiantes que tienen dificultades con los conceptos matemáticos cometen errores, esto se ve reflejado por un lado en los diferentes tipos de pruebas que pretenden dar a conocer lo que los estudiantes saben y pueden hacer (pruebas saber, pruebas TIMSS[10]) que se realizan en las instituciones educativas, y por el otro lado en el rendimiento de los estudiantes en la asignatura de matemáticas. Para la enseñanza de la división y de los algoritmos se puede partir de la identificación de los errores que cometen los estudiantes como un insumo de la construcción de la planeación de clases en esta temática.

Asimismo, esta investigación es importante porque sensibiliza al docente en el cambio de concepción sobre el concepto de error, cambio de una noción del error como inadmitido a una concepción como parte inherente en el proceso de aprendizaje de la matemática. De esta manera los errores permitirían una mayor claridad sobre los conceptos, dado que al conocer cuáles son los errores se puede decir que ya se conoce en parte el problema y conocido el problema se pueden realizar propuestas para solucionarlo y superarlo.

Por otro lado, la división considerada como una de las cuatro operaciones aritméticas fundamentales, es una operación esencial que permite desenvolverse con eficacia en la vida profesional, y en la cotidianidad. Por tanto realizar un trabajo investigativo con el cual se pretende dar a conocer los errores más evidentes que los estudiantes cometen al realizar una división entre números naturales, tratar de explicar el por qué

[10] Pruebas internacionales realizadas en el año de 1998 para valorar el nivel de aprendizaje en matemáticas y ciencias. TIMSS (Díaz, Álvarez, Torres y Guacaneme).

ejecutan determinado error y proponer soluciones metodológicas para tratar de evitarlos, es lo que justificó la realización de esta investigación.

El objetivo general propuesto para esta investigación fue: Investigar y analizar cuáles son los errores más evidentes que presentan los estudiantes del grado cuarto de educación básica primaria de las I. E. M. INEM y CIUDADELA, cuando se enfrentan a ejecutar procesos algorítmicos de la división entre números naturales.

Para lograrlo, se planteó los siguientes objetivos específicos:

- Determinar las diferentes situaciones de repartos iguales entre números naturales.

- Categorizar en niveles de complejidad de acuerdo a los porcentajes de respuestas correctas las diferentes situaciones de repartos iguales.

2. MARCO TEÓRICO

Las fuentes de mayor importancia en el desarrollo de esta investigación son: el primer y segundo incisos de los métodos de análisis de errores de Mulhern (1989), también toman en cuenta las estructuras de los números naturales, el sistema de numeración decimal, la división, operaciones, cálculos y algoritmos, los tipos de algoritmos, los problemas de tipo multiplicativo, el algoritmo de la división y el concepto de error de Segovia, Castro, Castro y Rico (1989).

El conjunto de los números naturales se puede construir de dos formas:

- De forma axiomática: se establecen una serie de axiomas y a partir de ellos se prueba una serie de teoremas que son sus propiedades (Peano, Hilbert).
- Como un conjunto de clases de equivalencia de la relación de cardinabilidad entre conjuntos (Cantor, Frege, Rusell).

Siguiendo los anteriores criterios, se considera el conjunto formado por un número infinito de objetos indefinidos que llamamos números naturales: N = {0, 1, 2, 3,...}.

Teniendo en cuenta que, el conjunto de los números naturales es infinito, se necesitan infinitas palabras para nombrarlos e infinitos símbolos para escribirlos. De aquí la necesidad de buscar un conjunto finito de palabras, símbolos y reglas que permitan utilizar los números naturales con precisión y comodidad.

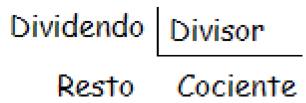
Un sistema de numeración es un par {S, R} donde S es un conjunto de símbolos y R un conjunto de reglas y convenios, que se utilizan para nombrar y escribir los números empleando la menor cantidad posible de palabras y símbolos. Los símbolos de S se llaman cifras o dígitos y el cardinal del conjunto S base del sistema de numeración.

El sistema de numeración contiene diez dígitos S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, los diez primeros números naturales y se escribe cada número de derecha a izquierda, como una secuencia finita formada a partir de los símbolos anteriores de manera que el valor de dichos símbolos depende de la posición que ocupe:

$$17457 = 1 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

La división es la operación aritmética inversa de la multiplicación y su sentido es el de distribuir, partir, repartir, fraccionar, trocear, compartir, entre otras acciones. Que consiste en averiguar cuántas veces un número (el dividendo) está contenido en otro número (el divisor). Busca descontar o repartir grupos iguales.

Imagen 1. Términos de la división



Los elementos de la división son: dividendo, es el número que está siendo dividido, divisor es el número por el cual el dividendo será dividido, el cociente: es la cantidad de veces que el divisor cabe en el dividendo y el resto: el cuál es el número que al ser menor que el divisor no se puede volver a dividir.

2. 1 Operaciones, cálculos y algoritmos

A continuación se definen algunos términos que están relacionados con el algoritmo de la división, que es necesario tenerlos en cuenta:

- "Operación: es la acción que se realiza para la transformación de números.
- Cálculo: cualquiera de los procedimientos empleados para averiguar el resultado de una operación que puede ser aritmética.
- Algoritmo: se define como uno de los múltiples procedimientos para realizar el cálculo necesario".

Maza Gómez (1991) define un algoritmo como: "una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos, sean cuales sean los datos, para llegar con certeza a cierto resultado en un número finito de etapas". En sus investigaciones él establece los siguientes tipos de algoritmos para la división de la siguiente forma:

- Expandido. En este tipo se da intervención e importancia a los sistemas de numeración.
- Extendido. En este tipo se da intervención e importancia a los sistemas de numeración.
- Abreviado. Es la forma simplificada de un algoritmo formal.
- Estándar. Es el procedimiento usual o predominante en la actualidad.
- Especiales. Este tipo de algoritmos permiten la comparación y ayuda para la toma de decisiones didácticas profesionales.

Para Maza Gómez (1991) siempre es posible agrupar los procedimientos aplicados en el desarrollo de las divisiones en los siguientes tipos de algoritmos:

- Descomposición o Expandido en reparto distributivo.
- Descomposición o Expandido en reparto sustractivo.
- Expandido.
- Extendido.
- Abreviado o Estándar.
- Especiales, anglosajón.

La manera más adecuada de comprender estos tipos de algoritmos es con un ejemplo, a continuación se muestran cada uno de ellos.

- Descomposición o Expandido en reparto distributivo.

$$3496 \div 8$$

$$3496 \div 8 = (3200 \div 8) + (240 \div 8) + (56 \div 8)$$

$$3496 \div 8 = (4 \times 100) + (3 \times 10) + (7 \times 1)$$

- Descomposición o Expandido en reparto sustractivo.

$$3496 \div 8$$

$$\begin{array}{c} 400 \times 8 = 3200 \quad \rightarrow \quad 400 \text{ veces} \\ 3496 - 3200 = 296 \\ 30 \times 8 = 240 \quad \rightarrow \quad 30 \text{ veces} \\ 296 - 240 = 56 \\ 7 \times 8 = 56 \quad \rightarrow \quad 7 \text{ veces} \end{array}$$

Por lo tanto 3496 ÷ 8 alcanza (400 veces + 30 veces + 7 veces) a 437.

- Expandido.

```
   2405   ∟ 23
 – 2300     104
------------
    105
   – 92
------------
     13
```

- Extendido.

```
   2405   ∟ 23
 – 23       104
-----------
    105
   – 92
------------
     13
```

- Abreviado o estándar.

```
2405   ∟ 23
105       104
 13
```

- Algoritmos especiales, anglosajón.

```
3461   ∟ 83

             41  → Cociente
     83  |  3461
            332
         ------------
             141
              83
         ------------
              58  → Resto
```

2. 2 Errores en el aprendizaje del algoritmo de la división

Las investigaciones de Maza Gómez (1991) han detectado que se presentan los siguientes errores cuando se avanza en el aprendizaje de algoritmo de la división:

- "Separaciones no adecuadas de cifras del dividendo para iniciar la división.
- En las aproximaciones parciales del cociente no llegar al máximo posible y continuar, quedando restos parciales superiores al divisor.
- Omitir ceros en el cociente.
- Errores en los cálculos mentales de ir restando a medida que se realizan las multiplicaciones parciales.
- Se reproducen de manera incrementada los errores que los estudiantes tienen en la resta y en la multiplicación".

Veamos ejemplos de divisiones en los cuales él detectó los anteriores errores en el aprendizaje del algoritmo de la división.

- Separaciones no adecuadas de cifras del dividendo para iniciar la división.

2136 ∟ 2	21’36 ∟ 2 9

- En las aproximaciones parciales del cociente no llegar al máximo posible y continuar, quedando restos parciales superiores al divisor.

23546 ∟ 4	23’546 ∟ 4 7 5 4

- Omitir ceros en el cociente.

20464 ∟ 5	20464 ∟ 5 046 492 14 4

- Errores en los cálculos mentales de ir restando a medida que se realizan las multiplicaciones parciales.

34278 ∟ 7	34278 ∟ 7 52 4

- Se reproducen de manera incrementada los errores que los estudiantes tienen en la resta y en la multiplicación.

11068 ∟ 56	24754 ∟ 26
110’68 ∟ 56 6 1	247’54 ∟ 26 3 9
1 x 6 = 6 a 0, 6…	9 x 6 = 54 a 57, 3 llevo 5 5 y 2 = 7, por 9 me da 63; se pasa entonces a 8.

Vergnaud (1997), indica que los errores que cometen los estudiantes cuando se habla del concepto de división están relacionados con los conceptos anteriores, como pueden ser la resta, la multiplicación, relaciones de orden, entre otros. Hace referencia a la formulación de los problemas, y a la solución de los mismos, refiriendo a ellos como problemas de tipo multiplicativo, entendiéndose esto como aquellos problemas en los que es necesario realizar multiplicaciones o divisiones. Menciona algunas posibles dificultades que se presentan cuando se aplican los algoritmos para realizar las operaciones. Dice que es necesario tener en cuenta el siguiente aspecto.

La facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario. La dificultad al realizar un cálculo numérico radica en el tamaño de los números, afirma que los números grandes dan lugar a mayores dificultades que los pequeños; y que los números decimales implican mayor dificultad que los enteros, exceptuando los casos en los cuales la operación necesaria se reduzca a una composición de números pequeños o a operaciones mentales simples; por ejemplo: 400 ÷ 10; 10 ÷ 2.

Maza Gómez (1991) centra sus investigaciones en el algoritmo de la división dentro del conjunto de los números naturales, incluyendo los diferentes algoritmos que se pueden utilizar para realizar divisiones, las propiedades, la multiplicación, el sistema decimal, entre otros conceptos, argumenta que al profundizar en este tema las siguientes partes son imprescindibles:

- El tamaño del dividendo y del divisor. El tamaño tanto del dividendo como del divisor hace que una división sea sencilla o compleja, dado que entre más pequeño sea el divisor más fácil será encontrar sus múltiplos.

- Tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor. Este apartado hace mención a que, dependiendo del tamaño de la primera cifra del dividendo y el divisor es de una cifra, se pueden distinguir hasta tres casos diferentes: Que la primera cifra del dividendo sea menor que ella (236 ÷ 4), que sea igual (436 ÷ 4) o que sea mayor (936 ÷ 4). Maza analiza cada uno de estos casos y plantea una pregunta: ¿Presentan distinta dificultad estos casos?

- La presencia de ceros. Teniendo en cuenta los tres casos analizados en el anterior párrafo, Maza manifiesta que cuando un número contiene ceros intermedios esto dificulta el desarrollo de la división. Así, en 406 ÷ 4 la dificultad aparece luego de dividir las centenas, dado que el estudiante se puede olvidar de llevar cero al cociente para las decenas.

- La división exacta e inexacta. Sugiere que la división sea o no exacta es una dificultad del concepto y no del algoritmo, y que esto se puede solucionar explicando cuando ocurre la una y cuando ocurre la otra, y luego proceder a realizar divisiones más largas las cuales pueden o no tener residuo.

2. 3 Concepto de error

Se puede entender el “error” como un concepto equivocado o juicio falso. Por su parte, la equivocación se define como el tener o tomar una cosa por otra, juzgando u obrando desacertadamente. El pensamiento humano usa naturalmente el error para buscar la verdad y contribuir al avance de las ciencias. No existe cuerpo de conocimiento en que no se encuentre el error en su desarrollo histórico. El conocimiento no puede partir de la nada, siempre se entrelaza con algún conocimiento anterior a partir del cual, puede crecer o modificarse. Los errores pueden tener muchos orígenes, ya sean dificultades del propio sujeto, de su entorno, de los métodos de enseñanza, del currículum de su escuela o del país. Sin embargo, en todos ellos hay claramente una dificultad en el procesamiento que el estudiante hace con la información recibida.

Según Heinze (2005) un error es un proceso, o una acción, que no obedece a la norma. Es necesaria la identificación de la línea de demarcación para verificar el proceso correcto y que la acción respete la norma. En otras palabras, se requieren los errores para afinar la idea individual sobre lo que es falso y lo que es correcto, según una norma dada. Si se compara esto con la función de los ejemplos y contraejemplos, para el aprendizaje de conceptos matemáticos, los errores juegan el papel de contraejemplos.

No es suficiente que un individuo sepa lo correcto; debe saber lo que es incorrecto porque, de esta manera se puede identificar el punto donde termina lo correcto y empieza lo incorrecto. A partir de esta perspectiva, el conocimiento de acciones y procesos incorrectos es necesario. Esta práctica de conocimiento negativo completa el conocimiento de acciones y procesos correctos, es decir, la experiencia positiva. En consecuencia, los errores son esenciales para la adquisición de conocimiento negativo y, por consiguiente, son componentes necesarios del proceso de aprendizaje.

Sin embargo, cometer un error no significa adquirir automáticamente experiencia negativa que pueda usarse para prevenir errores posteriores. Para usar un error de manera productiva, es necesario que un individuo pueda comprender, analizar y corregir el error y usarlo para desarrollar estrategias de prevención de nuevos errores.

En esta investigación se asume el error como una falencia cometida de forma sistemática, frecuente y no ocasional (a diferencia de un error momentáneo, ocasional, no frecuente), que hace presencia al resolver situaciones que involucran procesos algorítmicos en el contexto del pensamiento numérico. Dentro del campo de la estimación y de esta investigación, la palabra "error" se utiliza con el significado dado por Segovia, Castro, Castro y Rico (1989) que indica:

> "Error es el término que designa la diferencia o desviación que un valor aproximado tiene con respecto del valor exacto al que representa. Cuando es necesario precisamos más y al error le llamamos error absoluto, para diferenciarlo del error relativo, que expresa la razón entre el error absoluto y el valor exacto. (p. 85)".

En este contexto se puede decir que el término "error" es sinónimo de "inexactitud" y algunas veces (cuando el error relativo es grande) de "imprecisión". La propia naturaleza de la estimación supone la existencia y la aceptación de un cierto margen de error. De acuerdo con esto, Reys, Bestgen, Rybolt y Wyatt (1982) ven la tolerancia del error como una "comprensión del concepto de estimación que permite (a quien la realiza) sentirse cómodo con cierto grado de error" (p. 198). No obstante, este margen de error debe tener un límite, pues un exceso de tolerancia con el error podría conducir a producir estimaciones no razonables.

Algunos estudios e investigaciones en educación matemática incluyen métodos para examinar los errores en el aprendizaje de la matemática. Un ejemplo aplicado en esta investigación es el de Mulhern (1989), citado en Rico (1995), establece cuatro categorías que se describen a continuación:

- "Contar el número de soluciones incorrectas para cada problema. Este método, que tiene un valor diagnóstico limitado ha predominado en la enseñanza.

- Análisis de los tipos de errores cometidos. Esta técnica implica usualmente clasificarlos, examinar los distintos niveles de separación del conocimiento desviado y hacer inferencias sobre los factores que conducen al error.

- Análisis de patrones de error. Tales análisis pueden revelar errores sistemáticos que son causas de concepciones inadecuadas; o bien, al variar aspectos de las tareas. Los patrones de error que resultan pueden proporcionar claves sobre las estrategias utilizadas.

- Construir problemas de modo que puedan provocar errores en los individuos. El investigador observa los patrones de error realizados, especula sobre sus posibles causas y construye sistemáticamente nuevos problemas que induzcan a errores similares".

Las direcciones que guían el desarrollo de esta investigación se basan en el primer y segundo incisos de los métodos de análisis de errores de Mulhern (1989), también toman en cuenta, la división, operaciones, cálculos, algoritmos, los tipos de algoritmos, los errores en el aprendizaje del algoritmo de la división y la definición de error de Segovia, Castro, Castro y Rico (1989).

3. METODOLOGÍA

La metodología se estructura en cuatro partes: primero, se definen los enfoques cuantitativo y los elementos cualitativos; luego, se hace referencia a la población con la cual se realizó la investigación; posteriormente, se menciona la técnica que se utilizó para lograr dar cumplimiento a los objetivos específicos que permitieron alcanzar el objetivo general; y finalmente, se describen las etapas de la investigación y se hace referencia a la forma en la cual se analizaron los resultados obtenidos en la investigación.

3. 1 Enfoque y sujeto social

Esta investigación es de naturaleza diagnóstico-descriptiva y se ubica en la línea de análisis de errores, se pretende analizar y categorizar los errores que presentan los estudiantes de grado cuarto de las I. E. M. INEM y CIUDADELA, cuando ejecutan procesos algorítmicos de la división entre números naturales, se realizó en el segundo semestre de año 2013. Tiene un enfoque cuantitativo debido a que el tratamiento estadístico de la información recolectada de los 55 estudiantes fue a través de tablas de frecuencias, y tiene elementos cualitativos porque se le da una interpretación de sentido al proceso de resolución algorítmico aplicado por los estudiantes en el desarrollo de las divisiones.

Se tomó como sujeto de estudio, 55 estudiantes (ver Tabla 1) de grado cuarto de educación básica primaria de las I. E. M. antes mencionadas, debido a que los estándares curriculares para el área de matemáticas indican que, ellos deben trabajar el algoritmo de la división en los grados cuarto y quinto. Si se analizan dichos errores podremos diseñar planes para evitar que se repitan en los estudiantes que pasan del grado tercero. Las edades de los estudiantes que realizaron las divisiones están entre los 8 y 13 años. Del total de estudiantes, 36 fueron del género masculino y 19 del femenino, no había ninguno perteneciente al programa de inclusión.

Tabla 1. Número de estudiantes por institución

I. E. M.	Inem	Ciudadela
Niños	19	17
Niñas	08	11
Total	27	28

Fuente: Oficina de coordinación académica de las I. E. M.

Los elementos cualitativos de esta investigación pertenecen a la categorización y ubicación de los errores, dentro de la correspondiente clasificación que propone la investigación de Maza Gómez (1991), para ello se realizó una asociación-comparación de cada división y sus características.

3. 2 Técnicas e instrumentos

La estructura de los cuestionarios es la siguiente: cuatro cuestionarios basados en cuatro situaciones algorítmicas; primero dos casos: cuando la división es exacta y cuando es inexacta; segundo tres subcasos: cuando el primer dígito del divisor es mayor que el primer dígito del dividendo; cuando son iguales; y cuando el primer dígito del divisor es menor que el primer dígito del divisor. Dichas divisiones se les presentan con frecuencia a los estudiantes, cuando se plantea una división entre números naturales.

Cada cuestionario contenía una división por cada caso y subcaso; además, también se les preguntó el nombre, con el fin de clasificarlos por género; la edad, para saber si están cursando un grado acorde a su respectiva edad; si estaban repitiendo año o si eran nuevos en la institución educativa; estos factores permitieron desarrollar el enfoque cuantitativo de manera más detallada.

Como instrumento de recolección de información se utilizó los cuestionarios antes mencionados, diseñados a partir de los apartados: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario, de Vergnaud (1997); y el tamaño del dividendo y del divisor, tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor, la presencia de ceros, y la división exacta e inexacta, de Maza Gómez (1991). A continuación se hace una breve descripción de cada uno de ellos:

Situación 1. Partiendo de los apartados: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario de Vergnaud, el tamaño del dividendo y del divisor, y la división exacta e inexacta de Maza Gómez. Se diseñó esta situación, en la cual el dividendo tiene una o dos cifras, y el divisor tiene una sola cifra Se tienen los siguientes conjuntos:

$D = \{n€N \,/\, n€ [1,99]\}$, Dividendo = {números naturales entre 1 y 99}.
$d = \{n€N \,/\, n€ [1,9]\}$, Divisor = {números naturales entre 1 y 9}.

Esta situación se puede designar como la más "sencilla" dado que el estudiante por lo general conoce de antemano las tablas de multiplica del 1 al 9; con lo cual se presentan dos casos:

a) Cuando el dividendo está en la tabla de multiplicar del divisor.
   Por ejemplo: $8 \div 2$; $63 \div 9$.

b) Cuando el dividendo no está en la tabla de multiplicar del divisor, es decir, el dividendo y el divisor no son múltiplos.

Con base en el apartado: tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor de Maza Gómez (dependiendo del tamaño de la primera cifra del dividendo y el divisor es de una cifra, se pueden distinguir hasta tres casos diferentes: que la primera cifra del dividendo sea menor que ella ($236 \div 4$), que sea igual ($436 \div 4$) o que sea mayor ($936 \div 4$)), por lo tanto para el caso b) se presentan tres subcasos:

i) La primera cifra del dividendo es mayor que el divisor.
Por ejemplo: $9 \div 2$; $84 \div 5$.

ii) La primera cifra del dividendo es igual al divisor.
Por ejemplo: $4 \div 4$; $92 \div 9$.

iii) La primera cifra del dividendo es menor que el divisor.
Por ejemplo: $3 \div 5$; $62 \div 7$.

Cuestionario # 1 ([1,99] ∟ [1,9]). Se formuló planteando 8 divisiones basadas en: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario, el tamaño del dividendo y del divisor, y la división exacta e inexacta. Comprende la Situación 1. Caso A, Caso B, Subcasos i, ii, iii. El tamaño del dividendo es de máximo dos cifras y el del divisor es de máximo una cifra. (ver Anexo A).

Situación 2. Diseñada a partir de los apartados: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario de Vergnaud; y el tamaño del dividendo y del divisor de Maza Gómez, se consideran, el caso en el cual el dividendo tiene más de dos cifras y el divisor tiene más de una cifra. Se tienen los siguientes conjuntos:

$D = \{n€N \,/\, n€ [100,+\infty]\}$, Dividendo = {números naturales mayores que 100}.
$d = \{n€N \,/\, n€ [10,+ \infty]\}$, Divisor = {números naturales mayores que 10}.

La anterior situación presenta tres subcasos análogos a los de la situación 1, dichos subcasos establecidos en el apartado: tamaño relativo de la primera cifra del dividendo y el divisor de Maza Gómez; en esta situación no se tiene en cuenta aquellas divisiones en las cuales existen ceros, sea en el dividendo o en el divisor o en ambos (dividendo y divisor), los subcasos son:

i) La primera cifra del dividendo es mayor que la primera del divisor.
Por ejemplo: $438 \div 12$; $4395 \div 293$; $75498 \div 2376$.

ii) La primera cifra del dividendo es igual a la primera cifra del divisor. Por ejemplo: $632 \div 62$; $2357 \div 217$; $893543 \div 81314$.

iii) La primera cifra del dividendo es menor que la primera cifra del divisor. Por ejemplo: $278 \div 35$; $5457 \div 624$; $379858 \div 43592$.

Dado que el divisor tiene dos o más cifras entonces no es "tan fácil" elaborar la tabla de multiplicar para el divisor a no ser que el divisor tenga ceros, como por ejemplo 10, 20, 100, 500, etc. Pero no ceros intercalados como 202, 505, 1027. Se puede decir que el grado de dificultad en las divisiones de la Situación 2 es mayor que en la Situación 1.

Cuestionario # 2 ($[100,+\infty] \llcorner [10,+\infty]$). Se diseñó proponiendo 6 divisiones elaboradas partiendo de: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario; y el tamaño del dividendo y del divisor. Presenta la Situación 2. Subcasos i, ii, iii. El tamaño del dividendo es de mínimo tres cifras y el del divisor es de mínimo dos cifras. (ver Anexo B).

Situación 3. En el apartado: la presencia de ceros de Maza Gómez (él manifiesta que cuando un número contiene ceros intermedios esto dificulta el desarrollo de la división. Así, en $406 \div 4$ la dificultad aparece luego de dividir las centenas, dado que el estudiante se puede olvidar de llevar cero al cociente para las decenas). Y la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario de Vergnaud, se consideran en esta situación aquellas divisiones en las cuales el divisor y el dividendo terminan en ceros.

Por ejemplo: $400 \div 20$; $200 \div 30$; $1000 \div 100$. Para este tipo de divisiones se presentan casos y subcasos análogos a la situación 1. Veamos:

i) La primera cifra del dividendo es mayor que la primera del divisor. Por ejemplo: $400 \div 20$; $5000 \div 300$.

ii) La primera cifra del dividendo es igual a la primera cifra del divisor. Por ejemplo: $300 \div 30$; $80000 \div 800$.

iii) La primera cifra del dividendo es menor que la primera cifra del divisor. Por ejemplo: $200 \div 40$; $1000 \div 500$.

Cuestionario # 3 (números redondos). Se elaboró formulando 6 divisiones teniendo como base: la facilidad más o menos grande del cálculo numérico necesario; y la presencia de ceros. Comprende la Situación 3. Subcasos i, ii, iii. El tamaño del dividendo y del divisor no es un factor determinante, lo que se destaca es que los números a dividir deben ser redondos (400, 20, 1000). (ver Anexo C).

Situación 4. Esta cuarta situación algorítmica se fundamenta en el apartado: la presencia de ceros de Maza Gómez, se formulan aquellas divisiones en las cuales tanto el dividendo como el divisor o ambos al tiempo tiene ceros intermedios. Por ejemplo: 405 ÷ 12; 738 ÷ 30; 2054 ÷ 103. Se tiene subcasos análogos a los analizados en la situación 1.

i) La primera cifra del dividendo es mayor que la primera del divisor. Por ejemplo: 405 ÷ 12; 9292 ÷ 404; 85031 ÷ 2034.

ii) La primera cifra del dividendo es igual a la primera cifra del divisor. Por ejemplo: 303 ÷ 34; 2856 ÷ 204; 40503 ÷ 4002.

iii) La primera cifra del dividendo es menor que la primera cifra del divisor. Por ejemplo: 107 ÷ 23; 3857 ÷ 506; 20015 ÷ 6083.

Cuestionario # 4 (ceros intercalados). Se planteó formulando 9 divisiones basadas en: la presencia de ceros. Presenta la Situación 4. Subcasos i, ii, iii. El tamaño del dividendo y del divisor no es determinante, pero si deben aparecer ceros intermedios, puede ser en el dividendo, en el divisor o en ambos respectivamente. (ver Anexo D).

3. 3 Etapas de la investigación

Tabla 2. Etapas y fases de la investigación

Etapas	Fases
Etapa 1. Construcción del proyecto	a. Revisión bibliográfica. b. Reajuste y elaboración del proyecto. c. Socialización del proyecto.
Etapa 2. Construcción de cuestionarios.	a. Revisión bibliográfica. b. Diseño de los cuestionarios. c. Validación de los cuestionarios.
Etapa 3. Recolección de información.	a. Revisión bibliográfica. b. Revisión de los cuestionarios. c. Aplicación de los cuestionarios. d. Instrumentos de sistematización.
Etapa 4. Sistematización, análisis e interpretación.	a. Revisión bibliográfica. b. Análisis e interpretación los resultados encontrados en los cuestionarios. c. Elaboración de una solución metodológica. d. Elaboración del informe final y socialización.

Fuente: Esta investigación

3. 3. 1 Etapa 1. Construcción del proyecto. La búsqueda de información en diferentes referentes bibliográficos sobre el tema y algunas ideas previas orientaron el acercamiento al problema de investigación y los objetivos, de igual manera luego de analizar las diferentes fuentes de información se estructuro un marco teórico y se pensó en el diseño de una metodología apropiada para desarrollar la investigación en forma clara, coherente y precisa. Bajo estos referentes y con la ayuda del director de la investigación Magister Luis Felipe Martínez, luego de constantes reuniones de

trabajo, se le presentó un borrador del proyecto, teniendo en cuenta que sus estudios sobre Pedagogías Activas y Desarrollo Humano, son los más indicados para la ejecución de ésta y otras investigaciones.

Luego del análisis del documento, el director de la investigación aceptó con la condición de algunas correcciones y modificaciones del borrador, la presentación del anteproyecto ante el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño; además sugirió que la investigación se podía realizar en las I. E. M. INEM y CIUDADELA, porque en la primera se habían realizado prácticas académicas y los directivos y docentes estaban interesados en el desarrollo de la investigación; y en la segunda, algunas relaciones con los docentes y directivos permitirían que se desarrolle la investigación sin ninguna restricción.

El Comité Curricular y de Investigaciones luego de diez días hábiles, aceptó el desarrollo del proyecto con las correcciones que sugirieron los jurados evaluadores; así mismo, designó oficialmente al Magister Luis Felipe Martínez como director, y a los especialistas Oscar Fernando Soto Agreda y Vicente Erdulfo Ortega Patiño como jurados evaluadores.

Luego de esto se solicitó en forma escrita en las dos I. E. M. INEM y CIUDADELA el desarrollo de la investigación; contando con los respectivos permisos, se llevó a cabo con los 55 estudiantes de grado cuarto. Esta etapa tuvo las siguientes fases:

a. Revisión bibliográfica. Es una fase transversal y está presente en todo el proceso de elaboración y desarrollo de la investigación, porque la documentación teórica permite identificar el problema, diseñar la metodología, justificar el análisis de los resultados y contribuir al desarrollo de la solución metodológica.

b. Reajuste y elaboración del proyecto. Partiendo de las correcciones que hicieron los jurados, se analizó con el acompañamiento del director de la investigación aquellas partes en las cuales había falencias y debilidades, con el fin de que la investigación cumpliera tanto con los objetivos, como con las exigencias del Comité Curricular y de Investigaciones.

c. Socialización del proyecto. Con la aprobación total del proyecto por parte de los jurados, el Comité y el director de la investigación, se continuó con el envío de dos cartas (ver Anexos E y F), en las cuales se solicitaba se otorgue un permiso especial para recoger los datos consistentes en cuatro cuestionarios, necesarios en el desarrollo de la investigación “División, errores y soluciones metodológicas”, proyecto vinculado a la línea de Educación Matemática, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, la cual será de gran beneficio tanto para la Institución como para la Universidad con el fin de mejorar la educación.

En la I. E. M. INEM se presentó la solicitud el día 10 de septiembre de 2013 a las 10:00 a.m., los directivos aceptaron y dieron su visto de aprobación; en la I. E. M. CIUDADELA el día 11 de septiembre de 2013 siendo las 10:00 a.m. en la reunión con los directivos encargados se entregó la carta de solicitud, ellos en forma inmediata autorizaron el desarrollo de la aplicación de los cuestionarios, luego expresándoles agradecimientos por el apoyo y colaboración se continuó con la siguiente etapa.

3. 3. 2 Etapa 2. Construcción de cuestionarios. La construcción de instrumentos de recolección de datos se desarrolló en esta etapa, seleccionando aquellas divisiones propuestas por Maza Gómez (1991), las cuales cumplen con las características específicas de cada uno de los casos y subcasos expuestos anteriormente.

a. Revisión bibliográfica. En esta parte se realizó una lectura detallada de los autores mencionados en el marco teórico con el propósito de cumplir con el primer objetivo específico de la investigación, determinar las diferentes situaciones de repartos iguales entre números naturales, que se le pueden presentar a cualquier estudiante de grado cuarto de educación básica primaria; Maza Gómez (1991) indica que cuando se trata del algoritmo de la división, se presentan errores referentes al concepto y a la aplicación de los algoritmos, argumenta que el tamaño de los números tanto en el dividendo como en el divisor facilitan o dificultan la aplicación del algoritmo, hace referencia a la presencia de ceros, y categoriza en cinco grupos los errores que él ha encontrado en sus diferentes investigaciones.

Vergnaud (1997) en su apartado: “los problemas de tipo multiplicativo”, menciona que en el análisis de la información y la forma en la que se presenta un problema matemático puede dificultar o facilitar el desarrollo del mismo. De dicha investigación se tomó el apartado: “la necesidad más o menos grande del tamaño del cálculo numérico”. Con respecto a esto él afirma que entre más pequeños los números mucho más sencillo es el cálculo.

b. Diseño de los cuestionarios. Se decidió que cada uno de los cuatro cuestionarios debería ir en una hoja de block tamaño carta sin margen, en cada una de ellas, en la primera línea se imprimió el nombre y el número de cada cuestionario; en la segunda línea el nombre del respectivo estudiante seguido por el grado; en la tercera línea la edad; en la cuarta línea el enunciado: resuelvo y escribo el proceso que utilicé para resolver cada una de las siguientes divisiones; por último se distribuyó en todo el resto de la hoja las respectivas divisiones de la siguiente manera:

- Cuestionario # 1: 8 divisiones.
- Cuestionario # 2: 6 divisiones.
- Cuestionario # 3: 6 divisiones.
- Cuestionario # 4: 9 divisiones.

c. Validación de los cuestionarios. Cada una de las divisiones que se plantearon se determinó aleatoriamente y la elección de cada una de ellas se hizo de acuerdo a los tipos de errores correspondientes a la clasificación de Maza Gómez (1991) antes mencionada; entre las muchas posibilidades que existen para plantear divisiones, el criterio de selección fue que cumpliera con las características específicas de cada situación, caso y subcaso.

3. 3. 3 Etapa 3. Recolección de información. En esta etapa se articulan las siguientes fases:

a. Revisión bibliográfica. La investigación de Mulhern (1989) en sus dos primeras categorías: contar el número de soluciones correctas para cada problema, y, análisis de los tipos de errores cometidos; permitió desarrollar la parte cuantitativa del proyecto investigativo; Segovia, Castro, Castro y Rico (1989), aportaron una definición de error acorde con la investigación, estos dos autores permitieron una guía en la construcción de los instrumentos para la sistematización de los datos.

b. Revisión de los cuestionarios. En esta fase se verificó que cada una de las divisiones propuestas tenía las características que Maza Gómez (1991), proponía y que además estaban formuladas de acuerdo a las categorías de error que él había encontrado en sus investigaciones; también se verificó si cada una de las copias era legible y que no esté borrosa u omita información necesaria para el estudiante.

c. Aplicación de los cuestionarios. Luego de tener listos y organizados los cuestionarios, se continuó con ir a las respectivas instituciones educativas y aplicar los cuestionarios en horas de clase, contando con la autorización de los directivos y los respectivos permisos. Se aplicaron dos cuestionarios por visita; cada uno de los estudiantes dispuso de un tiempo de 60 minutos para el desarrollo de 14 divisiones en la primera sesión, y 15 divisiones en la segunda, los estudiantes tuvieron 4 minutos para desarrollar cada una de las divisiones.

Se manejaron dos momentos en esta fase, la presentación del cuestionario por parte del investigador y el desarrollo de los cuestionarios; los estudiantes no estaban informados sobre el tema del cual trataban los cuestionarios, solo se les dijo que realizaran todas las operaciones en las hojas que se les había entregado, y no se les proporcionó ningún tipo de ayuda con respecto al desarrollo de las divisiones, ni sobre los resultados que tenían que encontrar, para garantizar la validez de los datos.

En la institución educativa INEM se aplicaron: el primer y segundo cuestionarios el día 18 de septiembre de 2013, entre las 10:40 a.m. y 11:40 a.m., el tercer y cuarto cuestionarios se aplicaron el día 25 de septiembre, en el mismo horario.

En la institución educativa CIUDADELA se aplicaron: los dos primeros cuestionarios el día 19 de septiembre de 2013, entre las 4:00 p.m. y 5:00 p.m., los otros dos cuestionarios se aplicaron el día 26 de septiembre, a la misma hora.

d. Instrumentos de sistematización. En forma simultánea al diseño de los cuestionarios, se elaboraron las tablas de frecuencias para el procesamiento de los datos encontrados en la investigación.

3. 3. 4 Etapa 4. Sistematización, análisis e interpretación. El paso de la información recolectada en los cuestionarios se realizó luego de cumplir la fase d. de la etapa 3, dicha información se organizó en las tablas de datos, con el propósito de realizar el análisis y la interpretación de los resultados.

a. Revisión bibliográfica. Las investigaciones de Maza Gómez (1991) orientaron la clasificación cualitativa de los diferentes tipos de errores encontrados. Lo anterior junto con la aplicación de los cuestionarios permitió dar cumplimento al segundo objetivo específico: categorizar en niveles de complejidad de acuerdo a los porcentajes de respuestas correctas las diferentes situaciones de repartos iguales.

b. Análisis e interpretación los resultados encontrados en los cuestionarios. En esta fase de la investigación, el criterio para decidir si una división estuvo, o no, realizada de manera correcta, fue comparar el cociente de las divisiones realizadas con el número exacto; esto permitió determinar en porcentaje la cantidad de respuestas correctas e incorrectas; luego de ello se elaboraron 12 tablas de datos en la cuales se indicó los errores más evidentes que presentan los estudiantes. Dichos errores se clasificaron de acuerdo a las cuatro categorías descritas en el marco teórico. Además, las tablas indican el número de respuestas dependiendo del género masculino o femenino, método por el cual desarrollaron las divisiones, número de respuestas correctas y sus respectivos porcentajes.

En esta investigación se realizó un análisis cuantitativo de 128 cuestionarios determinando la cantidad de divisiones realizadas de manera incorrecta. Luego se elaboraron tablas de datos en las cuales se indicó: el cuestionario, la división, la cantidad de respuestas correctas e incorrectas tanto por estudiantes del género masculino como del femenino, el método que los estudiantes aplicaron y la cantidad de divisiones no realizadas; después de esto se continuó con el cálculo de los respectivos porcentajes de respuestas correctas e incorrectas.

c. Elaboración de una solución metodológica. Después de cumplir con los objetivos específicos planteados para dar respuesta a la pregunta de investigación, se continuó con el diseño de una solución metodológica, basándose en el análisis cuantitativo y clasificación de los elementos cualitativos de los resultados encontrados en la investigación. La cual se logró organizar por medio de la cantidad de respuestas correctas de las divisiones investigadas, articuladas con las investigaciones de Maza Gómez (1991) y Vergnaud (1997).

d. Elaboración del informe final y socialización. La parte cuantitativa se desarrolló con base en el marco teórico, desde el cual se establecieron previamente cuatro posibles categorías de errores en el desarrollo y aplicación del algoritmo de la división; también se incluyeron algunas imágenes de divisiones en las cuales se detectó los errores, y algunas respuestas sobre algunas divisiones que los estudiantes no realizaron.

4. ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE DATOS

Este capítulo contiene dos partes: en la primera, se realiza el análisis de los cuestionarios desarrollados por los estudiantes de grado cuarto. La segunda, hace referencia al procesamiento de los datos encontrados, el diseño de las tablas de frecuencias y porcentajes, y la descripción de los errores encontrados en la ejecución de los procesos algorítmicos aplicados por ellos.

Los procesos mentales no son visibles, y sólo es posible conjeturar su ocurrencia a través de manifestaciones indirectas. Los errores cometidos por los estudiantes, la regularidad con que éstos aparecen, los patrones comunes a que obedecen, son algunos de los elementos que permiten hacer inferencias acerca de estos procesos mentales, y acerca de las estructuras en que se van organizando los conocimientos. Es precisamente la regularidad con que aparecen ciertos errores lo que ha permitido elaborar clasificaciones de los mismos. Las categorías no son compartimentos cerrados, y suelen articularse unas con otras (ya que rara vez un error obedece a una única causa) pero permiten postular posibles razones para su aparición, y guiar, de ese modo, la elección de actividades que permitan corregirlos si es posible.

La implementación de cuestionarios para la detección de errores, y la posterior clasificación de los mismos con base en alguna de las categorizaciones vigentes, es una metodología que permite obtener una "radiografía" del estado de conocimiento de los estudiantes y constituye una valiosa ayuda a la hora de reorganizar la práctica pedagógica. La investigación de los errores se llevó a cabo mediante el uso de cuatro cuestionarios resueltos por los estudiantes de grado cuarto. Si bien los errores cometidos por los estudiantes pueden obedecer a múltiples causas, la elección de cada una de las divisiones y la categorización de los errores encontrados se hizo de acuerdo a los tipos de errores correspondientes a la clasificación de Maza Gómez (1991) antes mencionada.

Los estudiantes desarrollaron por escrito en las hojas que se les suministraron, trabajando individualmente en el lapso de una hora de clase, con la consigna de dejar constancia escrita de todos sus cálculos y razonamientos. Para analizar la cantidad, calidad y diversidad de las respuestas, se organizó la información haciendo recuentos de frecuencias de los diferentes tipos de errores cometidos (estudio cuantitativo) y señalando las características más significativas de las respuestas erróneas dadas por los estudiantes (elementos cualitativos).

Los errores encontrados en el desarrollo de las divisiones realizadas por los estudiantes fueron agrupados en cuatro categorías de error: manejo de la multiplicación, estimación (cociente), concepto de división, proceso para dividir.

La categorización de los grupos de error se diseñó tomando como referencia la investigación de Maza Gómez (1991), en la cual sostiene que los estudiantes cuando desarrollan divisiones pueden presentar cinco tipos de error en la aplicación del algoritmo:

- Separaciones no adecuadas de cifras del dividendo para iniciar la división. (proceso para dividir).
- En las aproximaciones parciales del cociente no llegar al máximo posible y continuar, quedando restos parciales superiores al divisor. (estimación cociente).
- Omitir ceros en el cociente. (proceso para dividir).
- Errores en los cálculos mentales de ir restando a medida que se realizan las multiplicaciones parciales. (manejo de la multiplicación).
- Se reproducen de manera incrementada los errores que los estudiantes tienen en la resta y en la multiplicación. (concepto de división).

En el aula de clases se entregó a cada estudiante un cuestionario y se les explicó cómo debían completarlo, se les sugirió que si querían podían resolverlo con lápiz, luego de esto los estudiantes iniciaron a ejecutar cada una de las divisiones; algunos de ellos escribieron en el cuestionario el proceso que utilizaron para resolver las divisiones, otros solo colocaron el resultado sin realizar ningún procedimiento, por ejemplo ($9 \div 2 = 4$). Algunos de los estudiantes dijeron que no podían realizar algunas divisiones, porque no podían dividir con números tan grandes, por ejemplo ($893543 \div 81314$); ellos argumentaban que solo podían dividir máximo con 3 o 4 cifras en el divisor; se les sugirió que el proceso era el mismo y que si querían intenten resolverlas.

Las tablas de datos se realizaron en forma individual, es decir, para cada institución educativa por separado y luego un análisis grupal de las dos instituciones.

4. 1 Interpretación

Después de analizar los cuestionarios, se percibe que los estudiantes cometen de manera más frecuente cuatro tipos de errores, detectados anteriormente por Maza Gómez (1991), en algunos de los cuestionarios la detección de estos tipos de errores fue inmediata, pero en otros, se analizó en forma más detallada para poder clasificar el tipo de error, se describe cada uno de ellos a continuación:

4. 1. 1 Manejo de la multiplicación. En este tipo de errores se agrupan aquellas divisiones que los estudiantes realizaron en forma incorrecta porque no multiplicaron

bien, por ejemplo, al multiplicar cuatro por dos obtuvieron como resultado seis, respuesta que es incorrecta y por lo tanto la realización total de la división seria errónea. Debido a que al multiplicar mal el cociente por el divisor, los llevo a dar una respuesta equivocada. En las siguientes imágenes se puede observar casos en los que se presentó esta forma de error.

Las imágenes que se relacionan a continuación fueron tomadas de esta investigación.

Imagen 2. Errores por manejo de la multiplicación

En la imagen del lado izquierdo se puede observar que el estudiante asumió que tres por dos es igual a cinco, por lo tanto colocó cero debajo del número cinco, cabe resaltar que a pesar del descuido cometido en la multiplicación, no olvidó llevar cero al cociente. En el dibujo del lado derecho, al parecer el estudiante confundió la tabla de multiplicar del siete con la del ocho, porque al multiplicar ocho por cinco sobran ocho, si fuese siete, siete por cinco es treinta y cinco, y sobrarían tres. La imagen del centro es más precisa porque es evidente que cuatro por dos no es cuatro. De este tipo de error se encontró que 9 de las 322 divisiones que se realizaron en forma incorrecta presentaron errores multiplicativos.

4. 1. 2 Estimación (cociente). Se ubicó en esta categoría aquellos estudiantes que realizaron la división por el método directo, pero que cuando colocaron un número en el divisor no se dieron cuenta que alcanzaba una unidad más o una unidad menos; por ejemplo, al dividir 5000 ÷ 300, algunos de ellos colocaron que la respuesta era 15, siendo la respuesta correcta 16, lo cual los llevó a desarrollar la división de una forma incorrecta, a continuación se muestran imágenes en las que se detectó este tipo de errores.

Imagen 3. Errores por estimación (cociente)

En la imagen del lado izquierdo se observa que el estudiante realizó la primera repartición en forma correcta, puesto que uno por cinco es cinco y para llegar a ocho sobran tres, luego bajó la siguiente cifra pero no estimó bien la segunda repartición dado que, siete por cinco es treinta y cinco, excediéndose en una unidad de la cantidad a repartir. La división de la fotografía del centro indica que se calculó erróneamente la primera repartición debido a que el número doce alcanza tres veces en el número cuarenta y tres. Por ende el estudiante obtuvo un residuo de diecinueve unidades el cual es mayor que el divisor, por tanto el desarrollo de la división fue errado. En la tercera imagen se mira que el estudiante que la desarrolló, realizó la primera repartición en forma correcta pero en la segunda repartición se equivocó al considerar que doscientos noventa y tres alcanza seis veces en el número mil cuatrocientos sesenta y cinco, puesto que solo alcanza cinco veces. De las 322 divisiones que efectuaron incorrectamente los estudiantes 55 exhibieron errores estimativos.

4. 1. 3 Concepto de división. En cuanto al concepto de división hubo estudiantes que trataron de resolver la división $3 \div 5$, lo cual hace ver que no tienen claro el concepto, pues la respuesta que se esperaba era que el estudiante escribiera que no se puede realizar porque no alcanza, o cero al cociente y sobran 3, en otras divisiones también se observó esta falencia porque luego que el residuo no alcanzaba para ser repartido algunos estudiantes continuaron colocando números en el divisor. Veamos algunas imágenes en las que este tipo de error se muestra.

Imagen 4. Errores por concepto de división

En la imagen de la izquierda se observa que el estudiante asume que se debe aumentar un cero al cociente y con ello la división queda realizada, pero es de recordar que en el conjunto de los números naturales no hay ninguna regla o propiedad que permita aumentar ceros cuando se habla de divisiones. En la de la derecha se muestra que el estudiante luego de realizar el primer reparto, continua con dividir treinta y dos unidades entre sesenta y dos lo cual refleja que el concepto de división no está del todo claro. En 20 de las 322 divisiones realizadas incorrectamente se cometieron errores relacionados con el concepto de división.

4. 1. 4 Proceso para dividir. Se consideran errores de este tipo los que tienen que ver con el manejo propiamente del algoritmo de la división, hubo estudiantes que se olvidaron de bajar la siguiente cifra del dividendo, o bajaron la misma cifra dos

veces, algunos en las divisiones que tienen más de dos cifras en el divisor tomaron solo la primera cifra para realizar la división, otros la del medio y otros iban desplazando la cifra que dividía a medida que se bajaban cifras del dividendo. Las siguientes imágenes presentan divisiones en las que aparecen errores en el proceso para dividir.

Imagen 5. Errores por proceso para dividir

Las imágenes exponen procesos diferentes de realización de la misma división, en ellas se identifica en la de la izquierda, el estudiante asumió que la división debía realizarse entre el ultimo digito del divisor, por lo cual se muestra que el proceso de la división no es del todo claro; la del centro, presenta el caso en el cual el estudiante solo toma la primera cifra del divisor para realizar los repartos, por lo tanto se observa debilidades en los procedimientos, la imagen de la derecha presenta uno de los casos más llamativos puesto que se analiza que el estudiante a medida que va bajando cifras del dividendo va desplazando hacia la derecha la cifra con la cual realiza la división, esta última deja claro que el estudiante sabe multiplicar, sabe que debe llevar cero al cociente pero se le dificulta el algoritmo de la división.

Imagen 6. Errores por proceso para dividir

Se seleccionaron las anteriores imágenes porque en la primera, se evidencia que el estudiante tomó la cifra de la mitad del dividendo y efectuó los respectivos cálculos, pero el proceso no es correcto, en la segunda se presenta el caso en el cual el estudiante a medida que se van bajando las cifras del dividendo, se va corriendo la cifra del divisor que divide. Este tipo de errores representan el mayor porcentaje debido a que 238 de las 322 divisiones en las que se cometió algún tipo de error fueron errores relacionados con el proceso para dividir.

4. 2 Institución Educativa Mariano Ospina Rodríguez. Educación básica primaria sección 3 Inem pasto. Sede Joaquín María Pérez. Año lectivo 2013

En la I. E. M. INEM, resolvieron los cuatro cuestionarios 27 estudiantes, de los cuales 19 eran niños y 8 niñas; el estudiante de menor edad que resolvió los cuestionarios tenía 8 años y el de mayor edad 13. También se encontró que 2 de ellos el grado anterior (tercero) lo habían cursado en otra institución, no había ningún estudiante que estuviera repitiendo año y ningún estudiante perteneciente al programa de inclusión. De los 27 estudiantes se seleccionaron 8 niñas y 8 niños, para obtener muestras homogéneas por institución, con el fin de comparar los resultados obtenidos, se escogieron aquellos cuestionarios que tuvieron más divisiones realizadas.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la investigación, organizados en tablas para un mayor entendimiento y procesamiento de los datos. Permitiéndole al lector una mejor comprensión; en ellas se determina el número de respuestas acertadas tanto por niños como por niñas, método empleado, cantidad de divisiones no realizadas, y, el respectivo total de cada una de ellas al final de cada columna.

Tabla 3. Divisiones realizadas Inem

División	Realizada en forma				Método	No Realizadas
	Correcta		Incorrecta			
	Niñas	Niños	Niñas	Niños	Directo	
01) 8 ÷ 4	6	8	2	0	16	0
02) 63 ÷ 9	7	7	1	1	16	0
03) 9 ÷ 2	5	8	3	0	16	0
04) 84 ÷ 5	4	6	4	0	14	2
05) 4 ÷ 4	7	8	1	0	16	0
06) 92 ÷ 9	6	8	2	0	16	0
07) 3 ÷ 5	3	6	5	2	16	0
08) 62 ÷ 7	6	7	2	1	16	0
09) 438 ÷ 12	4	8	4	0	16	0
10) 4395 ÷ 293	1	1	7	7	16	0
11) 632 ÷ 62	4	8	4	0	16	0
12) 893543 ÷ 81314	0	5	6	2	13	3
13) 278 ÷ 35	2	6	6	2	16	0
14) 5457 ÷ 624	1	5	5	3	14	2
15) 400 ÷ 20	5	8	3	0	16	0
16) 5000 ÷ 300	2	7	6	1	16	0
17) 300 ÷ 30	5	8	3	0	16	0
18) 80000 ÷ 800	4	8	4	0	16	0
19) 200 ÷ 40	2	5	6	3	16	0
20) 1000 ÷ 500	3	7	5	1	16	0
21) 405 ÷ 12	5	7	3	1	16	0
22) 9292 ÷ 404	3	7	5	1	16	0
23) 85031 ÷ 2034	0	2	6	2	10	6
24) 303 ÷ 34	1	4	6	3	14	2
25) 2856 ÷ 204	2	5	4	3	14	2
26) 40503 ÷ 4002	2	2	3	3	10	6
27) 107 ÷ 23	1	4	5	3	13	3
28) 3857 ÷ 506	1	6	4	2	13	3
29) 20015 ÷ 6083	0	1	4	3	8	8
Total	92	172	119	44	427	37

Fuente: Esta investigación

En la tabla anterior, se observa que en su totalidad se emplean el método directo para aplicar el algoritmo de la división, la división 20015 ÷ 6083 no fue realizada por 8 de los 16 estudiantes, algunos argumentaron que todavía no podían dividir con cuatro cifras en el divisor, otros dejaron el espacio en blanco, la misma divisiones fue desarrollada en forma correcta por 1 estudiante.

Tabla 4. Porcentajes divisiones realizadas Inem

División	Realizada en forma		Porcentajes	
	Correcta	Incorrecta	Correctas	Incorrectas
01) 8 ÷ 4	14	2	87,50%	12,50%
02) 63 ÷ 9	14	2	87,50%	12,50%
03) 9 ÷ 2	13	3	81,25%	18,75%
04) 84 ÷ 5	10	4	62,50%	25,00%
05) 4 ÷ 4	15	1	93,75%	6,25%
06) 92 ÷ 9	14	2	87,50%	12,50%
07) 3 ÷ 5	9	7	56,25%	43,75%
08) 62 ÷ 7	13	3	81,25%	18,75%
09) 438 ÷ 12	12	4	75,00%	25%
10) 4395 ÷ 293	2	14	12,50%	87,50%
11) 632 ÷ 62	12	4	75,00%	25,00%
12) 893543 ÷ 81314	5	8	38,46%	61,54%
13) 278 ÷ 35	8	8	50,00%	50,00%
14) 5457 ÷ 624	6	8	42,86%	57,14%
15) 400 ÷ 20	13	3	81,25%	18,75%
16) 5000 ÷ 300	9	7	56,25%	43,75%
17) 300 ÷ 30	13	3	81,25%	18,75%
18) 80000 ÷ 800	12	4	75,00%	25,00%
19) 200 ÷ 40	7	9	43,75%	56,25%
20) 1000 ÷ 500	10	6	62,50%	37,50%
21) 405 ÷ 12	12	4	75,00%	25,00%
22) 9292 ÷ 404	10	6	62,50%	37,50%
23) 85031 ÷ 2034	2	8	20,00%	80,00%
24) 303 ÷ 34	5	9	35,71%	64,29%
25) 2856 ÷ 204	7	7	50,00%	50,00%
26) 40503 ÷ 4002	4	6	40,00%	60,00%
27) 107 ÷ 23	5	8	38,46%	61,54%
28) 3857 ÷ 506	7	6	53,85%	46,15%
29) 20015 ÷ 6083	1	7	12,50%	87,50%
Total	264	163	61,83%	38,17%

Fuente: Esta investigación

Se destaca en la tabla anterior, la división 4 ÷ 4, debido a que 15 de los 16 estudiantes las efectuaron correctamente, y la de mayor dificultad fue: 4395 ÷ 293, 14 la realizaron aplicando el método directo pero ninguno de ellos la realizó satisfactoriamente; en ese cuestionario también se encontraba la división 893543 ÷ 81314 pero esta división que era aparentemente la más “difícil” por el tamaño de sus números obtuvo más respuestas correctas.

Tabla 5. Porcentajes por tipo de error Inem

División	Manejo de la multiplicación		Estimación (cociente)		Concepto de división		Proceso para dividir	
	(x)	%	(x)	%	(x)	%	(x)	%
01) 8 ÷ 4	0	0%	1	50%	0	0%	1	50%
02) 63 ÷ 9	1	50%	0		0	0%	1	50%
03) 9 ÷ 2	1	33%	1	33%	0	0%	1	33%
04) 84 ÷ 5	1	25%	2	50%	0	0%	1	25%
05) 4 ÷ 4	1	100%	0	0%	0	0%	0	0%
06) 92 ÷ 9	1	50%	1	50%	0	0%	0	0%
07) 3 ÷ 5	0	0%	0	0%	7	100%	0	0%
08) 62 ÷ 7	1	33%	1	33%	0	0%	1	33%
09) 438 ÷ 12	0	0%	0	0%	0	0%	4	100%
10) 4395 ÷ 293	0	0%	8	57%	0	0%	6	43%
11) 632 ÷ 62	0	0%	0	0%	0	0%	4	100%
12) 893543 ÷ 81314	0	0%	4	50%	0	0%	4	50%
13) 278 ÷ 35	0	0%	1	13%	0	0%	7	87%
14) 5457 ÷ 624	0	0%	0	0%	0	0%	8	100%
15) 400 ÷ 20	0	0%	2	67%	0	0%	1	33%
16) 5000 ÷ 300	1	14%	4	57%	0	0%	2	29%
17) 300 ÷ 30	0	0%	0	0%	0	0%	3	100%
18) 80000 ÷ 800	0	0%	0	0%	0	0%	4	100%
19) 200 ÷ 40	1	11%	1	11%	0	0%	7	78%
20) 1000 ÷ 500	1	17%	1	17%	0	0%	4	66%
21) 405 ÷ 12	0	0%	0	0%	0	0%	4	100%
22) 9292 ÷ 404	0	0%	1	17%	0	0%	5	83%
23) 85031 ÷ 2034	0	0%	1	13%	0	0%	7	87%
24) 303 ÷ 34	0	0%	0	0%	0	0%	9	100%
25) 2856 ÷ 204	0	0%	0	0%	0	0%	7	100%
26) 40503 ÷ 4002	0	0%	0	0%	0	0%	6	100%
27) 107 ÷ 23	0	0%	1	13%	0	0%	7	87%
28) 3857 ÷ 506	0	0%	1	17%	0	0%	5	83%
29) 20015 ÷ 6083	0	0%	2	29%	0	0%	5	71%
Total	9	5,52%	33	20,25%	7	4,29%	114	69,94%

Fuente: Esta investigación

La tabla porcentajes por tipo de error para la I. E. M. INEM muestra los resultados que se obtuvo luego del análisis y clasificación que se asignó de acuerdo a cada una de sus respuestas y procedimientos empleados para resolver las divisiones, se encontraron cuatro tipos de error descritos anteriormente.

En general, se observa que la mayoría de los estudiantes que cometen algún tipo de error al aplicar el algoritmo de la división, lo hacen porque no tienen claro el proceso para dividir de las 163 divisiones realizadas incorrectamente, 114 indican este tipo de errores, con un porcentaje menor le siguen los que tienen dificultades cuando tratan de estimar cuantas veces alcanza el divisor en el dividendo. Unos cuantos pocos cometen errores multiplicativos o pertenecientes al concepto de división; errores similares a los que encontró Maza Gómez (1991) en sus investigaciones.

4. 3 Institución Educativa Municipal Ciudadela de Pasto. Educación básica primaria. Sede Santa Mónica. Año lectivo 2013

En la I. E. M. CIUDADELA, resolvieron los cuatro cuestionarios 28 estudiantes, de los cuales 17 eran niños y 11 niñas; el estudiante de menor edad que resolvió los cuestionarios tenía 9 años y el de mayor edad 10. También se encontró que 3 de ellos el grado anterior (tercero) lo habían cursado en otra institución, no había ningún estudiante que estuviera repitiendo y ningún estudiante perteneciente al programa de inclusión. De los 28 estudiantes se seleccionaron 8 niñas y 8 niños, para obtener muestras homogéneas por institución, con el fin de comparar los resultados obtenidos, se escogieron aquellos cuestionarios que tuvieron más divisiones realizadas.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en la investigación, organizados en tablas para un mayor entendimiento y procesamiento de los datos. Permitiéndole al lector una mejor comprensión; en ellas se determina el número de respuestas acertadas tanto por niños como por niñas, método empleado, cantidad de divisiones no realizadas, y, el respectivo total de cada una de ellas al final de cada columna.

Tabla 6. Divisiones realizadas Ciudadela

División	Realizada en forma				Método	No Realizadas
	Correcta		Incorrecta			
	Niñas	Niños	Niñas	Niños	Directo	
01) 8 ÷ 4	7	8	1	0	16	0
02) 63 ÷ 9	8	8	0	0	16	0
03) 9 ÷ 2	8	8	0	0	16	0
04) 84 ÷ 5	6	5	2	1	14	2
05) 4 ÷ 4	8	8	0	0	16	0
06) 92 ÷ 9	6	8	2	0	16	0
07) 3 ÷ 5	3	0	5	8	16	0
08) 62 ÷ 7	6	7	2	0	15	1
09) 438 ÷ 12	2	1	6	7	16	0
10) 4395 ÷ 293	0	0	4	6	10	6
11) 632 ÷ 62	2	2	6	6	16	0
12) 893543 ÷ 81314	0	0	2	1	3	13
13) 278 ÷ 35	0	0	7	6	13	3
14) 5457 ÷ 624	0	0	3	4	7	9
15) 400 ÷ 20	7	8	1	0	16	0
16) 5000 ÷ 300	6	5	2	3	16	0
17) 300 ÷ 30	8	8	0	0	16	0
18) 80000 ÷ 800	8	8	0	0	16	0
19) 200 ÷ 40	7	6	1	1	15	1
20) 1000 ÷ 500	8	7	0	0	15	1
21) 405 ÷ 12	2	3	6	5	16	0
22) 9292 ÷ 404	1	7	5	1	14	2
23) 85031 ÷ 2034	0	0	4	6	10	6
24) 303 ÷ 34	0	1	7	7	15	1
25) 2856 ÷ 204	0	3	6	3	12	4
26) 40503 ÷ 4002	0	5	4	1	10	6
27) 107 ÷ 23	2	1	3	6	12	4
28) 3857 ÷ 506	0	4	2	2	8	8
29) 20015 ÷ 6083	0	2	2	2	6	10
Total	105	123	83	76	387	77

Fuente: Esta investigación

En la tabla anterior, se observa que en su totalidad se emplean el método directo para aplicar el algoritmo de la división, la división 893543 ÷ 81314 no fue realizada por 13 de los 16 estudiantes, algunos argumentaron que todavía no podían dividir con cinco cifras en el divisor, otros dejaron el espacio en blanco.

Tabla 7. Porcentajes divisiones realizadas Ciudadela

División	Realizada en forma		Porcentajes	
	Correcta	Incorrecta	Correctas	Incorrectas
01) 8 ÷ 4	15	1	93,75%	6,25%
02) 63 ÷ 9	16	0	100%	0,00%
03) 9 ÷ 2	16	0	100%	0,00%
04) 84 ÷ 5	11	3	78,57%	21,42%
05) 4 ÷ 4	16	0	100%	0,00%
06) 92 ÷ 9	14	2	87,50%	12,50%
07) 3 ÷ 5	3	13	18,75%	81,25%
08) 62 ÷ 7	13	2	86,67%	13,33%
09) 438 ÷ 12	3	13	18,75%	81,25%
10) 4395 ÷ 293	0	10	0,00%	100%
11) 632 ÷ 62	4	12	25,00%	75,00%
12) 893543 ÷ 81314	0	3	0,00%	100%
13) 278 ÷ 35	0	13	0,00%	100%
14) 5457 ÷ 624	0	7	0,00%	100%
15) 400 ÷ 20	15	1	93,75%	6,25%
16) 5000 ÷ 300	11	5	68,75%	31,25%
17) 300 ÷ 30	16	0	100%	0,00%
18) 80000 ÷ 800	16	0	100%	0,00%
19) 200 ÷ 40	13	2	86,67%	13,33%
20) 1000 ÷ 500	15	0	100%	0,00%
21) 405 ÷ 12	5	11	31,25%	68,75%
22) 9292 ÷ 404	8	6	57,14%	42,86%
23) 85031 ÷ 2034	0	10	0,00%	100%
24) 303 ÷ 34	1	14	6,67%	93,33%
25) 2856 ÷ 204	3	9	25,00%	75,00%
26) 40503 ÷ 4002	5	5	50,00%	50,00%
27) 107 ÷ 23	3	9	25,00%	75,00%
28) 3857 ÷ 506	4	4	50,00%	50,00%
29) 20015 ÷ 6083	2	4	33,33%	66,67%
Total	228	159	58,92%	41,08%

Fuente: Esta investigación

Se destaca en la tabla anterior, las divisiones: 63 ÷ 9, 9 ÷ 2, 4 ÷ 4, 300 ÷ 30 y 80000 ÷ 800 fueron efectuadas correctamente por la totalidad de los estudiantes, y la de mayor dificultad fue: 303 ÷ 34, 14 la realizaron aplicando el método directo pero ninguno de ellos la realizó satisfactoriamente.

Tabla 8. Porcentajes por tipo de error Ciudadela

División	Manejo de la multiplicación		Estimación (cociente)		Concepto de división		Proceso para dividir	
	(x)	%	(x)	%	(x)	%	(x)	%
01) 8 ÷ 4	0	0%	0	0%	0	0%	1	100%
02) 63 ÷ 9	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
03) 9 ÷ 2	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
04) 84 ÷ 5	0	0%	0	0%	0	0%	3	100%
05) 4 ÷ 4	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
06) 92 ÷ 9	0	0%	0	0%	0	0%	2	100%
07) 3 ÷ 5	0	0%	0	0%	13	100%	0	0%
08) 62 ÷ 7	0	0%	1	50%	0	0%	1	50%
09) 438 ÷ 12	0	0%	4	31%	0	0%	9	69%
10) 4395 ÷ 293	0	0%	1	10%	0	0%	9	90%
11) 632 ÷ 62	0	0%	2	17%	0	0%	10	83%
12) 893543 ÷ 81314	0	0%	0	0%	0	0%	3	100%
13) 278 ÷ 35	0	0%	0	0%	0	0%	13	100%
14) 5457 ÷ 624	0	0%	0	0%	0	0%	7	100%
15) 400 ÷ 20	0	0%	0	0%	0	0%	1	100%
16) 5000 ÷ 300	0	0%	2	40%	0	0%	3	60%
17) 300 ÷ 30	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
18) 80000 ÷ 800	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
19) 200 ÷ 40	0	0%	1	50%	0	0%	1	50%
20) 1000 ÷ 500	0	0%	0	0%	0	0%	0	0%
21) 405 ÷ 12	0	0%	1	9%	0	0%	10	91%
22) 9292 ÷ 404	0	0%	1	17%	0	0%	5	83%
23) 85031 ÷ 2034	0	0%	4	40%	0	0%	6	60%
24) 303 ÷ 34	0	0%	1	7%	0	0%	13	93%
25) 2856 ÷ 204	0	0%	2	22%	0	0%	7	78%
26) 40503 ÷ 4002	0	0%	0	0%	0	0%	5	100%
27) 107 ÷ 23	0	0%	1	13%	0	0%	7	87%
28) 3857 ÷ 506	0	0%	1	25%	0	0%	3	75%
29) 20015 ÷ 6083	0	0%	0	0%	0	0%	5	100%
Total	0	0%	22	13,84%	13	8,18%	124	77,98%

Fuente: Esta investigación

La tabla porcentajes por tipo de error para la I. E. M. CIUDADELA muestra los resultados que se obtuvieron luego del análisis y clasificación que se asignó de acuerdo a cada una de sus respuestas y procedimientos empleados para resolver las divisiones, se encontraron cuatro tipos de error descritos anteriormente.

En general, se observa que la mayoría de los estudiantes que cometen algún tipo de error al aplicar el algoritmo de la división, lo hacen porque no tienen claro el proceso para dividir de las 169 divisiones realizadas incorrectamente, 124 indican este tipo de errores, con un porcentaje menor le siguen los que tienen dificultades cuando tratan de estimar cuantas veces alcanza el divisor en el dividendo. Unos cuantos pocos cometen errores pertenecientes al concepto de división; errores similares a los que encontró Maza Gómez (1991) en sus investigaciones.

4. 4 Tablas de resultados generales

En la siguiente tabla se observa los resultados que se obtuvo entre las dos instituciones con el objetivo de realizar un análisis global de los cuestionarios, en ella se indica el porcentaje de acuerdo a las respuestas correctas o incorrectas de los estudiantes, siendo en su totalidad 32 estudiantes, 16 niñas y 16 niños.

Tabla 9. Porcentajes divisiones realizadas en las dos instituciones

División	Realizada en forma		Porcentajes	
	Correcta	Incorrecta	Correctas	Incorrectas
01) 8 ÷ 4	29	3	90,63%	9,37%
02) 63 ÷ 9	30	2	93,75%	6,25%
03) 9 ÷ 2	29	3	90,63%	9,37%
04) 84 ÷ 5	21	7	75%	25,00%
05) 4 ÷ 4	31	1	96,88%	3,12%
06) 92 ÷ 9	28	4	87,50%	12,50%
07) 3 ÷ 5	12	20	37,50%	62,50%
08) 62 ÷ 7	26	5	83,87%	16,13%
09) 438 ÷ 12	15	17	46,88%	53,12%
10) 4395 ÷ 293	2	24	7,69%	92,31%
11) 632 ÷ 62	16	16	50,00%	50,00%
12) 893543 ÷ 81314	5	11	31,25%	68,75%
13) 278 ÷ 35	8	21	27,59%	72,41%
14) 5457 ÷ 624	6	15	28,57%	71,43%
15) 400 ÷ 20	28	4	87,50%	12,50%
16) 5000 ÷ 300	20	12	62,50%	37,50%
17) 300 ÷ 30	29	3	90,63%	9,37%
18) 80000 ÷ 800	28	4	87,50%	12,50%
19) 200 ÷ 40	20	11	64,52%	35,48%
20) 1000 ÷ 500	25	6	80,65%	19,35%
21) 405 ÷ 12	17	15	53,13%	46,87%
22) 9292 ÷ 404	18	12	60,00%	40,00%
23) 85031 ÷ 2034	2	18	10,00%	90,00%
24) 303 ÷ 34	6	23	20,69%	79,31%
25) 2856 ÷ 204	10	16	38,46%	61,54%
26) 40503 ÷ 4002	9	11	45,00%	55,00%
27) 107 ÷ 23	8	17	32,00%	68,00%
28) 3857 ÷ 506	11	10	52,38%	47,62%
29) 20015 ÷ 6083	3	11	21,43%	78,57%
Total	492	322	60,44%	39,56%

Fuente: Esta investigación

Se destaca en la tabla anterior, la división 4 ÷ 4, debido a que 31 de los 32 estudiantes las efectuaron correctamente, y la de mayor dificultad fue: 4395 ÷ 293, 24 la realizaron aplicando el método directo pero ninguno de ellos la realizo satisfactoriamente; en ese cuestionario también se encontraba la división 893543 ÷ 81314 pero esta división que era aparentemente la más "difícil" por el tamaño de sus números obtuvo 5 respuestas correctas. Una división que también se les dificultó a los estudiantes fue: 303 ÷ 34, 23 de ellos la desarrollaron de manera equivocada.

Tabla 10. Porcentajes por tipo de error en las dos instituciones

División	Manejo de la multiplicación		Estimación (cociente)		Concepto de división		Proceso para dividir	
	(x)	%	(x)	%	(x)	%	(x)	%
01) 8 ÷ 4	0	0%	1	33%	0	0%	2	67%
02) 63 ÷ 9	1	50%	0	0%	0	0%	1	50%
03) 9 ÷ 2	1	33%	1	33%	0	0%	1	33%
04) 84 ÷ 5	1	14%	2	29%	0	0%	4	57%
05) 4 ÷ 4	1	100%	0	0%	0	0%	0	0%
06) 92 ÷ 9	1	25%	1	25%	0	0%	2	50%
07) 3 ÷ 5	0	0%	0	0%	20	100%	0	0%
08) 62 ÷ 7	1	20%	2	40%	0	0%	2	40%
09) 438 ÷ 12	0	0%	4	24%	0	0%	13	76%
10) 4395 ÷ 293	0	0%	9	34%	0	0%	15	62%
11) 632 ÷ 62	0	0%	2	13%	0	0%	14	87%
12) 893543 ÷ 81314	0	0%	4	36%	0	0%	7	64%
13) 278 ÷ 35	0	0%	1	5%	0	0%	20	95%
14) 5457 ÷ 624	0	0%	0	0%	0	0%	15	100%
15) 400 ÷ 20	0	0%	2	50%	0	0%	2	50%
16) 5000 ÷ 300	1	8%	6	50%	0	0%	5	42%
17) 300 ÷ 30	0	0%	0	0%	0	0%	3	100%
18) 80000 ÷ 800	0	0%	0	0%	0	0%	4	100%
19) 200 ÷ 40	1	9%	2	18%	0	0%	8	73%
20) 1000 ÷ 500	1	17%	1	17%	0	0%	4	66%
21) 405 ÷ 12	0	0%	1	7%	0	0%	14	93%
22) 9292 ÷ 404	0	0%	2	17%	0	0%	10	83%
23) 85031 ÷ 2034	0	0%	5	28%	0	0%	13	72%
24) 303 ÷ 34	0	0%	1	4%	0	0%	22	96%
25) 2856 ÷ 204	0	0%	2	13%	0	0%	14	87%
26) 40503 ÷ 4002	0	0%	0	0%	0	0%	11	100%
27) 107 ÷ 23	0	0%	2	13%	0	0%	14	87%
28) 3857 ÷ 506	0	0%	2	20%	0	0%	8	80%
29) 20015 ÷ 6083	0	0%	2	17%	0	0%	10	83%
Total	9	2,80%	55	17,08%	20	6,21%	238	73,91%

Fuente: Esta investigación

La tabla porcentajes por tipo de error para las dos instituciones, muestra los resultados que se obtuvieron luego del análisis y clasificación que se asignó de acuerdo a cada una de sus respuestas y procedimientos empleados para resolver las divisiones, se encontraron cuatro tipos de error descritos anteriormente.

En general, se observa que la mayoría de los estudiantes que cometen algún tipo de error al aplicar el algoritmo de la división, lo hacen porque no tienen claro el proceso para dividir de las 322 divisiones realizadas incorrectamente, 238 indican este tipo de errores, con un porcentaje menor le siguen los que tienen dificultades cuando tratan de estimar cuantas veces alcanza el divisor en el dividendo. Unos cuantos pocos cometen errores multiplicativos o pertenecientes al concepto de división; errores similares a los que encontró Maza Gómez (1991) en sus investigaciones.

En la siguiente tabla se da a conocer la totalidad de errores cometidos de cada tipo, cada uno de los 32 estudiantes realizaron 29 divisiones distribuidas en 4 cuestionarios, en total se obtuvieron 928 (novecientos veintiocho) divisiones, de las cuales 322 (trescientos veintidós) se desarrollaron incorrectamente.

Tabla 11. Porcentajes por tipo de error

Tipo de error	Manejo de la Multiplicación	Estimación (cociente)	Concepto de división	Proceso para dividir
Cantidad	9	55	20	238
Total	2,80%	17,08%	6,21%	73,91%

Fuente: Esta investigación

La tabla anterior presenta los porcentajes generales de errores, se observa que 238 de las 322 divisiones que se realizaron incorrectamente mostraron errores relacionados con el proceso para dividir, correspondiéndole un 73,91%; el segundo lugar por cantidad de errores cometidos se identifica aquellos del tipo estimación (cociente) con un 17,08%, habiéndose encontrado 55 divisiones de las 322 en las que el cociente fue mal estimado. Los errores pertenecientes al concepto de división representan el 6,21% siendo 20 de las 322 divisiones las que indican este tipo de falencia. Con el menor porcentaje 2,80% las falencias relacionadas con el manejo de la multiplicación, que equivalen a 9 de las 322 divisiones desarrolladas incorrectamente.

Tabla 12. Porcentajes formas de realizar las divisiones en las dos instituciones

División realizada en forma	Cantidad realizadas	Porcentaje
Correcta	492	53,02%
Incorrecta	322	34,70%
No realizadas	114	12,28%
Total	928	100%

Los datos de la tabla anterior exhiben los porcentajes de las divisiones realizadas en forma correcta, incorrecta y no realizadas por la totalidad de los estudiantes.

Los estudiantes de ambas instituciones se enfrentaron a 928 divisiones repartidas en cuatro cuestionarios, de este gran total, 492 se realizaron en forma correcta representando un 53,02%; 322 se desarrollaron en forma incorrecta y 114 del total no fueron realizadas, algunas de ellas por el tamaño de los números otras porque los estudiantes decían que no les habían enseñado todavía. En las siguientes imágenes se describen las palabras textuales de los estudiantes.

Imagen 7. Explicaciones del porque los estudiantes no realizaron las divisiones

Se presenta a continuación una tabla comparativa en la cual se indica la cantidad de divisiones realizadas en forma correcta, incorrecta y no realizadas por los estudiantes de cada establecimiento educativo.

Tabla 13. Comparación entre los resultados obtenidos en las dos instituciones

División realizada en forma	Inem	%	Ciudadela	%
Correcta	264	56,90%	228	49,14%
Incorrecta	163	35,13%	159	34,27%
No realizadas	37	7,97%	77	16,59%
Total	464	100%	464	100%

Fuente: Esta investigación

Para elaborar la tabla y obtener los respectivos porcentajes se tomó el respectivo total de divisiones realizadas correcta, incorrecta y no realizadas en cada una de las instituciones educativas y luego se dividió entre el total de cada una de ellas respectivamente.

4. 4. 1 Porcentajes por división realizada en forma correcta. En la primera columna de la siguiente tabla se ubican las divisiones dependiendo del número de respuestas correctas, en la segunda se indica el número de estudiantes que las realizaron bien, y en la columna de la derecha se indica el respectivo porcentaje que cada división obtuvo de acuerdo con el número de estudiantes que la realizaron.

Tabla 14. Porcentajes por nivel de dificultad de las divisiones

División	Realizada en forma correcta por	Porcentaje
4 ÷ 4	31	96,88%
63 ÷ 9	30	93,75%
8 ÷ 4	29	90,63%
9 ÷ 2	29	90,63%
300 ÷ 30	29	90,63%
92 ÷ 9	28	87,50%
400 ÷ 20	28	87,50%
80000 ÷ 800	28	87,50%
62 ÷ 7	26	83,87%
1000 ÷ 500	25	80,65%
84 ÷ 5	21	75,00%
200 ÷ 40	20	64,52%
5000 ÷ 300	20	62,50%
9292 ÷ 404	18	60,00%
405 ÷ 12	17	53,13%
3857 ÷ 506	11	52,38%
632 ÷ 62	16	50,00%
438 ÷ 12	15	46,88%
40503 ÷ 4002	9	45,00%
2856 ÷ 204	10	38,46%
3 ÷ 5	12	37,50%
107 ÷ 23	8	32,00%
893543 ÷ 81314	5	31,25%
5457 ÷ 624	6	28,57%
278 ÷ 35	8	27,59%
20015 ÷ 6083	3	21,43%
303 ÷ 34	6	20,69%
85031 ÷ 2034	2	10,00%
4395 ÷ 293	2	7,69%
Total	492	

Fuente: Esta investigación

Sobre la anterior tabla se puede concluir que la división que mayor cantidad de aciertos tuvo fue: 4 ÷ 4, y las que mayor dificultad presentaron fueron: 85031 ÷ 2034 y 4395 ÷ 293, obteniendo 2 respuestas positivas de los 32 estudiantes que intentaron efectuarlas. De las 29 divisiones es interesante analizar que 16 de ellas obtuvieron un porcentaje mayor al 50%; pero ninguna de las que tenían cuatro dígitos en el divisor logró un porcentaje mayor al 45%.

5. SOLUCIÓN METODOLÓGICA - SECUENCIA DIDÁCTICA

Debido a que la mayor cantidad de errores que se detectaron en los cuestionarios aplicados a los estudiantes de las dos I. E. M. INEM y CIUDADELA están relacionados con el proceso para dividir, teniendo en cuenta la Tabla 14, en la cual se organizaron las divisiones de mayor a menor número de respuestas correctas, y a la luz de las investigaciones de Maza Gómez (1991) se elaboró una secuencia didáctica a modo de solución metodológica, con el propósito de que la asimilación del algoritmo de la división sea de una manera más organizada.

Se sugiere comenzar la enseñanza del algoritmo de la división con materiales concretos y realizando agrupaciones de objetos que permitan resultados exactos, a partir de situaciones aditivas, aditivas en múltiplos y multiplicativas; iniciando con repartos en donde se aplica el ensayo y error, y posteriormente las reglas de divisibilidad que facilita los procesos. Por ejemplo:

- ¿Cuántos grupos de 4 colores se pueden realizar si tengo 8 colores?
- ¿Cuántos grupos de 2 colores se pueden realizar si tengo 8 colores?

Debido a que en los casos anteriores el tamaño del dividendo 8 es mayor que el del divisor 4 en la primera situación y 2 en la segunda situación correspondientemente.

Luego de esto el paso siguiente es trabajar con materiales concretos algunas divisiones en las cuales el tamaño del dividendo y del divisor sea igual, por ejemplo:

- ¿Cuántos grupos de 2 maíces se pueden organizar con 20 maíces?

Siguiendo este proceso se puede realizar ejercicios en los cuales el primer digito del dividendo sea menor que el primer digito del divisor, por ejemplo:

- ¿Cuántos grupos de 3 bolitas de papel se pueden realizar con 12 bolitas de papel?

Habiendo realizado estos experimentos se puede acercar al concepto de división y escribir algunas ideas gráficas para dar un inicio a la abstracción del concepto, es decir:

- Si tengo 8 fríjoles. ¿Cuántos grupos de 4 fríjoles se pueden hacer?

Θ Θ Θ Θ Θ Θ Θ Θ	→	Θ Θ Θ Θ 4 fríjoles	Θ Θ Θ Θ 4 fríjoles

8 fríjoles = 2 Grupos.

- Si tengo 8 fríjoles. ¿Cuántos grupos de 2 fríjoles se pueden formar?

ϖ ϖ ϖ ϖ ϖ ϖ ϖ ϖ	→	ϖ ϖ 2 frijoles	ϖ ϖ 2 fríjoles	ϖ ϖ 2 fríjoles	ϖ ϖ 2 fríjoles

8 fríjoles = 4 Grupos.

- Si tengo 16 maíces. ¿Cuántos grupos de 2 maíces se pueden hacer?

Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ		Ϙ Ϙ 2 maíces	Ϙ Ϙ 2 maíces	Ϙ Ϙ 2 maíces	Ϙ Ϙ 2 maíces
	→				
Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ Ϙ		Ϙ Ϙ 2 maíces	Ϙ Ϙ 2 maíces	Ϙ Ϙ 2 maíces	Ϙ Ϙ 2 maíces

16 maíces = 8 Grupos.

- Si tengo 12 bolitas de papel. ¿Cuántos grupos de 3 bolitas de papel se pueden formar?

Φ Φ Φ Φ Φ Φ Φ Φ Φ Φ Φ Φ	→	Φ Φ Φ 3 bolitas de papel	Φ Φ Φ 3 bolitas de papel
12 bolitas de papel		Φ Φ Φ 3 bolitas de papel	Φ Φ Φ 3 bolitas de papel

= 4 Grupos.

Es claro anotar que hasta el momento no se ha introducido ningún símbolo /, ÷, ∟, esto con el fin de familiarizar el concepto de división con la noción de repartos iguales. Afianzando mediante ejercicios creados en clase a partir de experiencias del estudiante en su casa y en su patio de recreo los que se realizarán con semillas y dibujos como estrategia infantil.

Avanzando un poco más en la conceptualización de división el paso siguiente es trabajar con algunas divisiones inexactas, por ejemplo:

- Si tengo 9 canicas. ¿Cuántos grupos de 2 canicas se pueden hacer?

ꜩ ꜩ ꜩ ꜩ ꜩ ꜩ ꜩ ꜩ ꜩ	→	ꜩ ꜩ 2 canicas	ꜩ ꜩ 2 canicas	ꜩ ꜩ 2 canicas	ꜩ ꜩ 2 canicas
9 canicas		ꜩ 1 canica			

= 4 Grupos y sobra 1 canica.

Planteando ejemplos concretos se realizan ejercicios prácticos en los cuales el primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor; seguidamente ejercicios en los cuales el primer dígito del dividendo es igual al primer dígito del divisor y finalizando esta parte, se plantearían situaciones en las cuales el primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor. Veamos algunos ejemplos:

- ¿Cuántos grupos de 2 fríjoles se pueden realizar con 21 fríjoles?

- ¿Cuántos grupos de 5 fríjoles se pueden obtener con 18 fríjoles?

El paso siguiente es realizar estos ejercicios con dibujos en el cuaderno, es decir, el paso de lo concreto (real) a lo abstracto (dibujo en el cuaderno) realizando reparticiones de diferentes tipos.

Se tiene ahora la ventaja de poder trabajar con otros objetos que, de pronto, por su forma o cantidad, entre otras características, no son tan fáciles de llevar al colegio, por ejemplo:

- Si tienes 42 manzanas, ¿Cuántos grupos de 11 manzanas se pueden realizar? Entre otros muchos más ejemplos.

Los ejercicios en el cuaderno elaborando los diferentes diseños le aportan al estudiante aparte de creatividad, la seguridad de conocer los procesos y métodos aplicados reflexionando en el porqué del resultado obtenido.

A continuación, se sugiere formular ejercicios en los cuales el primer dígito del dividendo es mayor, luego es igual y por último es menor que el primer dígito del divisor.

Se puede resaltar que hasta este punto no se ha hablado ni de signos de operaciones, ni de operaciones, aunque indirectamente se puede decir que el concepto de conjunto está implícito, puesto que la división se está entendiendo como agrupamientos de objetos que pueden ser exactos o inexactos, pero que siempre es posible realizarlos.

Si la mayoría[11] o todos los estudiantes ya tienen claros estos procesos, es conveniente ahora emplear el concepto de división como reparto en cantidades iguales, también es conveniente explicar la naturaleza de la división y de las otras operaciones[12] y también es un buen momento para introducir el símbolo de la escuadra (∟), porque recordemos que el mayor objetivo es que los estudiantes aprendan a dividir correctamente, realizando una abstracción total.

Se puede decir que si se quiere representar una división entre dos números naturales es suficiente con escribir:

8 ∟ 4

8 objetos pueden ser manzanas, maíces, bolitas de papel, entre otros; se reparten (∟) entre 4 cajas, estudiantes, recipientes, entre otros.

La pregunta es 8 manzanas se reparten entre 4 personas. ¿Cuántas manzanas para cada persona?

8 ∟ 4
0   2

Algunos o todos los estudiantes dirán alcanza a 2 manzanas y no sobra ninguna, esto sería lo ideal en este punto del proceso.

Este paso del material concreto al dibujo y del dibujo a la abstracción e introducción del símbolo de división, es de vital importancia, porque si el estudiante no tiene claro de donde salió el número 2, de ahí en adelante los errores que cometerá en sus futuras divisiones serán frecuentes.

Se debe dedicar un tiempo especial a cada uno de los métodos algorítmicos empleados para dividir, se siguiere empezar con el método directo si los estudiantes tienen dominio de la multiplicación y de la resta mental, pero si no tiene dominio de la resta mental es mejor empezar con las restas reiteradas.

El docente debe ser consiente que para dividir en forma abstracta el estudiante tiene que saber sumar, restar y multiplicar. Por tanto si se nota que el niño no puede dividir es conveniente analizar si el problema es la división como tal o que el estudiante no sabe o no tiene claro los preconceptos de multiplicación, resta o suma.

Suponiendo que el proceso de aprendizaje del concepto marche bien, se puede ir aumentando progresivamente el tamaño del dividendo, pero no el tamaño del divisor,

[11] Puede darse el caso de que algunos estudiantes no hayan estado presentes en todo el proceso debido a que tuvieron problemas de salud, inasistencia, entre otros.
[12] La suma se entiende como aumento de cantidades, la resta como operación inversa de la suma, y la multiplicación como una suma abreviada. Por su parte la división es una operación que involucra tanto a la resta como a la suma y a la multiplicación.

en forma sutil pero consciente, plantear divisiones en la cuales el primer dígito del dividendo es mayor, luego igual y por último menor que el dígito del divisor, por ejemplo:

42 ∟ 2   63 ∟ 3   64 ∟ 2   845 ∟ 5   884 ∟ 4

Esto con el fin de que el estudiante se familiarice con el algoritmo y sea lo más consciente posible de los pasos que realiza.

Ahora bien, en este punto y luego de haber realizado un buen número de divisiones exactas, se continúa trabajando divisiones en la cuales la primera cifra del dividendo es igual a la primera cifra del divisor, por ejemplo:

48 ∟ 4   24 ∟ 2   36 ∟ 3   555 ∟ 5   484 ∟ 4

En este punto, se supone que el estudiante aparte de realizar las divisiones, no tiene mayores dificultades, es conveniente ahora trabajar divisiones en las cuales el primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor, por ejemplo:

12 ∟ 2   24 ∟ 4   366 ∟ 6   2488 ∟ 4   1284 ∟ 4

Cabe notar que en todas estas divisiones se pueden aumentar el número de dígitos en el dividendo tanto como se quiera, pero es indispensable no aumentar los dígitos del divisor. Hasta haber tratado los posibles casos de divisiones con una cifra en el divisor.

Si los estudiantes han seguido este proceso es el momento de introducir divisiones inexactas con una cifra en el divisor, por ejemplo:

45 ∟ 2   68 ∟ 3   65 ∟ 4   98 ∟ 5   247 ∟ 3

Con las divisiones inexactas se realiza el mismo proceso que con las exactas, primero divisiones en las cuales el primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor; luego cuando el primer dígito del dividendo es igual al primer dígito del divisor y por último el primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor, veamos algunos ejemplos:

- El primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor:

  45 ∟ 2   67 ∟ 3   63 ∟ 2   849 ∟ 2   845 ∟ 4

- El primer dígito del dividendo es igual que el primer dígito del divisor:

  45 ∟ 4   27 ∟ 2   38 ∟ 3   567 ∟ 5   489 ∟ 4

- El primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor:

15 ∟ 2   27 ∟ 4   368 ∟ 6   249 ∟ 4   1286 ∟ 4

Luego de haber realizado una buena cantidad de ejercicios de divisiones inexactas para que los estudiantes agilicen y comprendan el proceso de aplicación del algoritmo de la división con números naturales, se procede a aplicar los "beneficios" de los números redondos es decir se plantean las mismas divisiones pero en lugar de dividir entre 2 se divide entre 20, el "beneficio" es que ya no es un dígito en el divisor son dos dígitos y este proceso permite o permitirá que algunos o todos los estudiantes aprendan a dividir con dos cifras.

El paso siguiente es aumentar un 0 (cero) al final tanto en el dividendo como en el divisor de los ejercicios que se realizaron anteriormente con los estudiantes, empezando con divisiones exactas, con las tres características:

- El primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor:

420 ∟ 20   630 ∟ 30   640 ∟ 20   8420 ∟ 20   8840 ∟ 40

- El primer dígito del dividendo es igual que el primer dígito del divisor:

480 ∟ 40   240 ∟ 20   360 ∟ 30   5550 ∟ 50   4840 ∟ 40

- El primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor:

120 ∟ 20   240 ∟ 40   3660 ∟ 60   24880 ∟ 40   12840 ∟ 40

Para luego seguir con las divisiones inexactas. Veamos algunos ejemplos:

- El primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor:

450 ∟ 20   670 ∟ 30   630 ∟ 20   8490 ∟ 20   8450 ∟ 40

- El primer dígito del dividendo es igual que el primer dígito del divisor:

450 ∟ 40   270 ∟ 20   380 ∟ 30   5670 ∟ 50   4890 ∟ 40

- El primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor:

150 ∟ 20   270 ∟ 40   3680 ∟ 60   2490 ∟ 40   12860 ∟ 40

Suponiendo que los estudiantes tengan claro el algoritmo para la división con números naturales redondos, se puede empezar a proponer divisiones en las cuales el divisor tiene 2 cifras pero no es un número redondo, por facilidad y forma práctica, los primeros intentos de división con dos cifras en el divisor se sugieren tengan las siguientes características.

- Ser exacta.
- El primer dígito del divisor ser mayor que el segundo dígito.
- Empezar con divisiones en las cuales el primer dígito del dividendo sea mayor que el primer dígito del divisor.
- Luego que el primer dígito del dividendo sea igual al primer dígito del divisor.
- Por último, el primer dígito del dividendo sea menor que el primer dígito del divisor.

Veamos algunos ejemplos:

42 ∟ 21 651 ∟ 31 882 ∟ 42 451 ∟ 41

572 ∟ 52 126 ∟ 21 128 ∟ 32

En este punto es conveniente realizar el ejercicio anterior solo con divisiones exactas. Ahora se aplica el mismo proceso para divisiones inexactas, por ejemplo:

44 ∟ 21 654 ∟ 31 884 ∟ 42 456 ∟ 41

574 ∟ 52 128 ∟ 21 132 ∟ 32

Si los estudiantes han tenido éxito en este proceso, se recomienda ahora que se propongan divisiones con dos dígitos en el divisor, pero que estos dos dígitos sean iguales y repetir el proceso que se realizó anteriormente con las divisiones con dos cifras en el divisor en la cuales el primer dígito del divisor era mayor que el segundo. Veamos algunos ejemplos:

- El primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor:

  75 ∟ 22 67 ∟ 33 438 ∟ 22 789 ∟ 55 845 ∟ 44

- El primer dígito del dividendo es igual que el primer dígito del divisor:

  45 ∟ 44 27 ∟ 22 354 ∟ 33 567 ∟ 55 489 ∟ 44

- El primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor:

  153 ∟ 22 278 ∟ 44 398 ∟ 66 298 ∟ 44 1286 ∟ 55

Para finalizar esta parte se sugiere abordar las divisiones con 2 cifras en el divisor, pero que el primer dígito sea menor que el segundo dígito. Se recomienda aplicar el proceso anteriormente descrito y considerar los posibles casos, por ejemplo:

- El primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor:

  45 ∟ 23 87 ∟ 34 634 ∟ 26 849 ∟ 25 8145 ∟ 46

- El primer dígito del dividendo es igual que el primer dígito del divisor:

  452 ∟ 46 288 ∟ 27 378 ∟ 35 589 ∟ 56 4889 ∟ 47

- El primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor:

  157 ∟ 25 278 ∟ 45 3968 ∟ 68 2479 ∟ 47 12876 ∟ 49

En el caso de los ceros intercalados investigados en el cuestionario # 4; se nota que ellos no causan mayor dificultad, es más se puede decir que en ocasiones facilitan la aplicación del proceso algorítmico de la división.

Por ultimo existen dos posibles vías para el paso a la división con 3 o más cifras:

- Un camino es a través de los números redondos, ya no realizar las divisiones entre 2 sino entre 200, para ellos se pueden retomar los ejercicios planteados en el primer nivel de abstracción y plantearlos con 2 ceros, tanto en el dividendo como en el divisor, o también los ejercicios planteados en el segundo nivel y tan solo aumentar un 0 (cero), es decir, dividir entre 210 y no entre 21.

- El otro camino es utilizar ceros intercalados en el divisor y ser creativos con el diseño de las divisiones, por ejemplo:

  1260 ∟ 201 6540 ∟ 302

Luego de esto continuar aplicando el proceso de avance o aumento de dificultad.

- El primer dígito del dividendo es mayor que el primer dígito del divisor.
- El primer dígito del dividendo es igual que el primer dígito del divisor.
- El primer dígito del dividendo es menor que el primer dígito del divisor.

Deseando que el proceso de aplicación de esta metodología sea exitoso. Aquí concluye esta secuencia didáctica a modo de solución metodológica.

CONCLUSIONES

Se necesita hacer cambios radicales en la formación de los docentes de primaria, que permitan cualificarlos dentro de la educación matemática para que ellos puedan construir las bases de las operaciones básicas. Teniendo la formación en educación matemática es posible obtener docentes que juegan el rol de investigadores y a su vez puedan reformular de mejor manera las planeaciones.

Se observa que la mayoría de los estudiantes que cometen algún tipo de error al aplicar el algoritmo de la división, lo hacen porque no tienen claro el proceso para dividir de las 322 divisiones realizadas incorrectamente, 238 indican este tipo de errores, con un porcentaje menor le siguen los que tienen dificultades cuando tratan de estimar cuantas veces alcanza el divisor en el dividendo. Unos cuantos pocos cometen errores multiplicativos o pertenecientes al concepto de división; errores similares a los que encontró Maza Gómez (1991) en sus investigaciones.

Se planteó la división $3 \div 5$ en el cuestionario # 1 (ver Anexo A), con el fin de investigar si los estudiantes tenían claro que para poder realizar una división entre números naturales el dividendo tenía que ser mayor que el divisor; 12 de los 32 estudiantes la respondieron correctamente, colocaron que no se podía realizar, que no alcanzaba o cero en el cociente; los otros 20 estudiantes, unos trataron de realizarla colocando cero en el cociente y en dividendo, es decir, solo el 37,5% entienden que el divisor debe ser menor que el dividendo para realizar una división entre números naturales.

La totalidad de los estudiantes resolvieron las divisiones por el método directo, ninguno de ellos aplicó el método de restas reiteradas u otro método, lo que permite pensar, será que ellos no conocen otras formas para realizar divisiones, o solo se les enseñó el método directo.

Es necesario aclarar que el resultado de esta investigación no puede considerarse de ninguna manera concluyente debido al tamaño de la muestra; se ha tratado, más bien, de ilustrar el empleo de un procedimiento que, de llevarse a cabo con regularidad, permitiría obtener una información de gran utilidad para el docente y para los estudiantes mismos. Después de varios años de trabajo con distintos grupos de estudiantes en una misma asignatura, es posible recopilar un verdadero "cúmulo de errores" cuya presencia podrá investigarse a través de cuestionarios como los empleados en esta investigación, o diseñando evaluaciones que permitan detectarlos.

La división requiere de la suma, resta y multiplicación; por ello, el docente debe dedicar más tiempo a afianzar estos conceptos previos. Se puede suponer que un estudiante que sabe dividir correctamente, tiene un buen desempeño tanto en la suma como en la resta y en la multiplicación. Siendo la división una forma de saber que tanto el estudiante maneja los algoritmos de las otras operaciones básicas.

Aunque la primera aproximación al concepto de división es la de reparto en partes iguales, en realidad abarca muchas acepciones que los estudiantes deben conocer. La división es la operación inversa a la multiplicación. El aprendizaje del algoritmo de la división es el más difícil de todos los algoritmos por varias razones; se realiza de izquierda a derecha, aporta dos resultados (cociente y resto), requiere que los otros algoritmos estén automatizados y es un procedimiento sólo semiautomático, pues tiene una fase de tanteo y conlleva ciertas prohibiciones. El dominio de estas cuatro operaciones es uno de los objetivos de la enseñanza elemental, pero para muchos estudiantes se evidencian muchas dificultades.

La mayoría de docentes de educación básica primaria no son expertos o especializados en la docencia matemática; y en sus procesos educativos recrean la matemática que ellos recibieron durante su preparación o se guían en los contenidos que propone algún libro de primaria, la cual se centra en la mecanización, memorización y repetición de procesos (algoritmos mecánicos) sin sentido, por lo cual es claro que la aplicación correcta de algún algoritmo no es garantía de que el estudiante entienda a fondo un concepto matemático.

El proceso de división se enseña de manera mecánica aislando las situaciones de un contexto. Lo anterior impide la creación de modelos de división, lo cual genera que primero se adquiera el algoritmo y finalmente el concepto de división. No se aprovecha por parte de los docentes las experiencias significativas, a partir de situaciones concretas que viven los estudiantes y sus familiares en la vida cotidiana. Además, el exceso de estudiantes (40 por grupo) limita la manipulación de objetos físicos para la demostración, e inicio del concepto y algoritmo de la división.

Los errores son fuente inagotable de conocimientos que se pueden explotar para profundizar en el pensamiento matemático, para lograr esto se debe atender su problemática y no rechazarla e intentar que los mismos se constituyan en un elemento motivador importante. La mayoría de las personas casi nunca se toma el tiempo de analizar la información que le presentan para tratar de identificar posibles errores. Es interesante tomar como punto de partida los errores de los estudiantes y plantearse cómo deber ser planificada la enseñanza para en principio diagnosticar y luego, eliminar esos errores.
En las concepciones actuales, el error ha dejado de ser algo a penalizar para convertirse en una fuente valiosa de información, es una señal de hacia dónde se debe reorientar los procesos de la enseñanza y el aprendizaje. Es también un recurso de motivación, una oportunidad para que el estudiante argumente, discuta y revele sus conocimientos, para lograr una mejor comprensión y una mayor familiaridad con el

razonamiento lógico y matemático. Estas ideas son consistentes con un cambio del paradigma pedagógico que propone abandonar la búsqueda de la respuesta exacta como única alternativa (lo que no deja de ser una forma de condicionamiento) para optar por el trabajo más enriquecedor que consiste en reflexionar críticamente sobre las propias producciones. No debe quedar excluido el docente de esta autocrítica ya que algunos procedimientos erróneos de los estudiantes pueden ser una fiel imagen de los de sus maestros Freudenthal (1983).

RECOMENDACIONES

Al analizar los errores en los cuestionarios que los estudiantes desarrollaron en la aplicación de esta investigación se encontró reiteraciones de equivocaciones. La mayoría de ellas, se pueden evitar o corregir mejorando las prácticas pedagógicas, en la enseñanza del algoritmo, en el refuerzo de éste, como en el uso posterior y aplicación del mismo. Se puede investigar los errores que cometen los estudiantes y aprovecharlos para su corrección y mejoramiento de la labor docente. A continuación se presentan algunas recomendaciones que se sugieren luego del análisis de los resultados:

Al notar que ninguno de los estudiantes resolvió las divisiones por un método diferente del directo, es importante que el docente le presente al estudiante otras estrategias de resolución de divisiones; uno de ellos el método de restas reiteradas; también sería importante que el docente conozca como dividían algunos pueblos antiguos, o presentarles ejemplos prácticos de divisiones.

Es importante que el estudiante maneje claramente el algoritmo de la división, en cifras pequeñas, para que el paso a cifras más grandes no se le dificulte; algunos de los estudiantes que desarrollaron los cuestionarios, dijeron que no sabían dividir con cuatro cifras o más cifras en el divisor, porque no les habían enseñado todavía. Pero al plantearles la división 893543 ÷ 81314 en el cuestionario # 2 (ver Anexo B), y sugerirles a los estudiantes que aplicaran el mismo procedimiento que para dos cifras, se encontró que 5 de los 32 estudiantes que intentaron resolverla la realizaron en forma correcta.

En ningún momento es aconsejable que el docente asuma que los estudiantes entienden en una primera explicación los temas que se están tratando, inclusive algunos de los estudiantes reflejan que cuando ellos no comprenden algunos conceptos algunos no dicen nada, puede acontecer esto, porque el estudiante es tímido, porque el docente no permite la intervención del estudiante en la explicación de los temas, o porque los estudiantes tiene temor del docente o de quedar mal frente al grupo de compañeros de clases, si ellos manifiestan que no entienden un determinado contenido.

BIBLIOGRAFÍA

Bachelard, G. (1991). La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo. México: Siglo XXI.

Brousseau, G. (1983). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en Matemáticas. Recuperado 16/05/2013. En Internet: http://fractus.mat.uson.mx/Papers/Brousseau/ObstaculosBrousseau.htm

Brousseau, G., Davis, R. Y Werner, T. (1986). *"Observing Students at Work"*. En Christiansen, B., Howson, G. y Otte, M. (Eds.). Perspectives on Mathematics Education. Reidel Publishing Company. Dordrecht.

Buschman, L., (1995). Communicating in the Language of Mathematics, Teaching Children Mathematics, vol. 1, núm. 16. Págs. 324-329.

Di Blasi Regner, M. y Otros (2003). Dificultades y Errores: Un estudio de caso. Comunicación breve presentada en el II Congreso Internacional de Matemática Aplicada a la Ingeniería y Enseñanza de la Matemática en Ingeniería (Buenos Aires, Diciembre 2003).

Díaz, J., Rivera, H., (1997), Habilidades en ciencias y matemáticas: Una alternativa para desarrollar la creatividad. –TIMSS-. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Estándares curriculares del área de matemáticas y Lineamientos Curriculares área Matemáticas: Áreas obligatorias y fundamentales, Republica de Colombia. Ministerio de Educación Nacional.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht: Reidel.

Gudiño, Juan; Batanero Carmen y Font Vicenç (2003). Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros. Universidad de Granada. Recuperado 16/05/2013. En Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestro/

Heinze, A. (2005). Mistake-handling activities in the mathematics classroom. In

Henestroza, J. L. (1997) Los errores en el aprendizaje de la matemática. Recuperado 16/05/2013. En Internet: http://macareo.pucp.edu.pe/~jhenost/articulos/errores.htm.

Kouba, V. L. y Franklin, K., (1995), Multiplication and Division: Sense Making and Meaning, Teaching Children Mathematics, vol. 1, núm. 9. Págs. 574-577.

Lindquist, M., ed., (1989) Results from the Fourth Mathematics Assessment of Educational Progress, Reston, VA, National Council of Teachers of mathematics.

Matz, M. (1980). Towards a computational theory of algebraic competence. Journal *of Children's Mathematical Behaviour*, 3(1), 93-166.

Maza Gómez, C. (1991). Enseñanza de la multiplicación y división. Vallehermoso, Madrid: Síntesis.

Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. En Greer, B. & Mulhern, G. (Eds.). New Directions in Mathematics Educations. Routledge. Londres.

Popper, K. (1983). Conjeturas y refutaciones: El desarrollo del conocimiento científico. Barcelona: Paidós.

Reys, R. E., Bestgen, B. J., Rybolt, J., & Wyatt, J. (1982). Processes used by good computational estimators. Journal for Research in Mathematics Education, 12, 183-201.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), Educación matemática (Págs. 69-108). Bogotá & México: Una Empresa Docente & Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (1999). Los Organizadores del Currículo de Matemáticas. En Rico, L. y otros. La educación matemática en la Enseñanza Secundaria. Erre Eme S.A. Buenos Aires.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E., & Rico, L. (1989). Estimación en cálculo y medida. Madrid: Síntesis.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Universidad La Laguna. Recuperado 16/05/2013. En Internet: http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2095380

Vergnaud G., (1997) El niño, las matemáticas y la realidad. Págs. 174-177.

Anexos

Anexo A. Cuestionario # 1

CUESTIONARIO # 1 ([1,99] ∟ [1,9])

Nombre: ____ Grado: ____________
Edad: _______ Soy nuevo en esta escuela: ______ Estoy Repitiendo año: _______

Resuelvo y escribo el proceso que utilicé para realizar cada una de las siguientes divisiones:

SITUACIÓN 1. CASO A.

a). $8 \div 2$ b). $63 \div 9$

SITUACIÓN 1. CASO B. SUBCASO i.

c). $9 \div 2$ d). $84 \div 5$

SITUACIÓN 1. CASO B. SUBCASO ii.

e). $4 \div 4$ f). $92 \div 9$

SITUACIÓN 1. CASO B. SUBCASO iii.

g). $3 \div 5$ h). $62 \div 7$

Anexo B. Cuestionario # 2

CUESTIONARIO # 2 ($[100,+\infty] \llcorner [10,+\infty]$)

Nombre: ______________________________________ Grado: ____________
Edad: _______ Soy nuevo en esta escuela: ______ Estoy Repitiendo año: _______

Resuelvo y escribo el proceso que utilicé para realizar cada una de las siguientes divisiones:

SITUACIÓN 2. SUBCASO i.

a). $438 \div 12$ b). $4395 \div 293$

SITUACIÓN 2. SUBCASO ii.

c). $632 \div 62$ d). $893543 \div 81314$

SITUACIÓN 2. SUBCASO iii.

e). $278 \div 35$ f). $5457 \div 624$

Anexo C. Cuestionario # 3

CUESTIONARIO # 3 (NÚMEROS REDONDOS)

Nombre: ____ Grado: _____________
Edad: _______ Soy nuevo en esta escuela: ______ Estoy Repitiendo año: _______

Resuelvo y escribo el proceso que utilicé para realizar cada una de las siguientes divisiones:

SITUACIÓN 3. SUBCASO i.

a) $400 \div 20$ b). $5000 \div 300$

SITUACIÓN 3. SUBCASO ii.

b) $300 \div 30$ d). $80000 \div 800$

SITUACIÓN 3. SUBCASO iii.

e). $200 \div 40$ f). $1000 \div 500$

Anexo D. Cuestionario # 4

CUESTIONARIO # 4 (CEROS INTERCALADOS)

Nombre: ____ Grado: _____________
Edad: _______ Soy nuevo en esta escuela: ______ Estoy Repitiendo año: _______

Resuelvo y escribo el proceso que utilicé para realizar cada una de las siguientes divisiones:

SITUACIÓN 4. SUBCASO i.

a). 405 ÷ 12 b). 9292 ÷ 404 c). 85031 ÷ 2034

SITUACIÓN 4. SUBCASO ii.

c) 303 ÷ 34 e). 2856 ÷ 204 f). 40503 ÷ 4002

SITUACIÓN 4. SUBCASO iii.

g). 107 ÷ 23 h). 3857 ÷ 506 i). 20015 ÷ 6083

Anexo E. Carta I. E. M. Inem

San Juan de Pasto, Septiembre 10 de 2013

Directivos
I. E. Mariano Ospina Rodríguez. Educación Básica Primaria. Sección #. INEM Pasto.
Sede Joaquín María Pérez.
San Juan de Pasto

Apreciados directivos:

Con el objeto de adelantar la investigación "DIVISION, ERRORES Y SOLUCIONES METODOLÓGICAS", en esta institución en el grado cuarto de educación básica primaria de la sede, le solicito comedidamente permitirle al estudiante José Libardo Villota Burgos, recoger los datos consistentes en cuatro cuestionarios, en los próximos días, dicha investigación vinculada a la línea de Educación Matemática de la Universidad de Nariño, del programa de Licenciatura en Matemáticas, de la Facultad de Ciencias Naturales Y Exactas; nos será de gran beneficio tanto para la Institución como para la Universidad con el fin de mejorar la educación.

Por su atención anticipo agradecimientos.

Atentamente,

Luis Felipe Martínez Patiño
Docente Universidad de Nariño.

Anexo F. Carta I. E. M. Ciudadela

San Juan de Pasto, Septiembre 11 de 2013

Directivos
I. E. M. Ciudadela de Pasto. Educación Básica Primaria. Sede Santa Mónica.
San Juan de Pasto

Apreciados directivos:

Con el objeto de adelantar la investigación "DIVISION, ERRORES Y SOLUCIONES METODOLÓGICAS", en esta institución en el grado cuarto de educación básica primaria de la sede, le solicito comedidamente permitirle al estudiante José Libardo Villota Burgos, recoger los datos consistentes en cuatro cuestionarios, en los próximos días, dicha investigación vinculada a la línea de Educación Matemática de la Universidad de Nariño, del programa de Licenciatura en Matemáticas, de la Facultad de Ciencias Naturales Y Exactas; nos será de gran beneficio tanto para la Institución como para la Universidad con el fin de mejorar la educación.

Por su atención anticipo agradecimientos.

Atentamente,

Luis Felipe Martínez Patiño
Docente Universidad de Nariño.