

**ESTABILIDAD EN UN OSCILADOR NO LINEAL CON UN
CONTROL DE CICLO CERRADO**

SANDRA LORENA DAVID BETANCOURT

JAIRO ANDRÉS DE LOS RÍOS ROSERO

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

**ESTABILIDAD EN UN OSCILADOR NO LINEAL CON UN
CONTROL DE CICLO CERRADO**

SANDRA LORENA DAVID BETANCOURT

JAIRO ANDRÉS DE LOS RÍOS ROSERO

**Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas**

SAULO MOSQUERA LÓPEZ, Mg.

Asesor

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Marzo de 2008

A Dios ...

A nuestros padres Pablo Luis David, Luz Dary Betancourt

Jairo Rolando De los Ríos, Dayra Soledad Rosero

muchas gracias por su apoyo incondicional

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Saulo Mosquera por brindarnos su amistad, por compartir sus conocimientos con nosotros y por apoyarnos incondicionalmente para la realización de este trabajo.

A la profesora Claudia Gómez por todo el apoyo recibido durante nuestra formación como docentes y por la valiosa amistad que de manera desinteresada nos ofreció.

A todos los maestros del programa Licenciatura en Matemáticas por fomentar en nosotros el gusto por esta ciencia tan bonita y por formarnos como profesionales íntegros.

Somos fruto de todo el conocimiento compartido por ustedes y es por eso que estaremos en deuda por siempre.

SANDRA LORENA DAVID BETANCOURT
JAIRO ANDRÉS DE LOS RÍOS ROSERO

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	13
1. MARCO TEÓRICO	1
1.1. LOS SISTEMAS DE CONTROL Y SU MODELACIÓN	1
1.2. ASPECTOS BASICOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS	5
1.2.1. Teorema de existencia y unicidad	5
1.2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio	7
1.2.3. Linealización	9
1.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD CENTRAL	12
1.3.1. La forma de Jordán real de una matriz	12
1.3.2. Las variedades estable, inestable y central	16
1.4. EL CONCEPTO DE BIFURCACIÓN	24
2. ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DEL SISTEMA	27
2.1. OBSERVACIONES PRELIMINARES	27
2.2. ESTABILIDAD Y BIFURCACIÓN DEL PUNTO DE EQUILIBRIO P_0	29
2.3. ESTABILIDAD Y BIFURCACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO P_1 y P_2	36
2.4. EL COLAPSO DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO	38

CONCLUSIONES	45
ANEXOS	48
BIBLIOGRAFIA	54

RESUMEN

Uno de los intereses más grandes que ha preocupado al hombre en la historia de la humanidad es el de entender el comportamiento de la naturaleza. Las matemáticas han permitido en gran parte dar una idea clara de estos comportamientos y en especial el estudio de la dinámica no lineal lo ha llevado en los últimos años a comprender muchas de las regularidades que ésta posee, logrando alcanzar progresos significativos en diferentes campos de la ingeniería, la biología y muchas otras áreas del conocimiento.

Existen diversos y variadas maneras de modelar fenómenos naturales, pero una de las que ha logrado tener mayor y mejor éxito en esta dirección es la utilización de las ecuaciones diferenciales, en este sentido el presente trabajo estudia, desde la óptica de la teoría cualitativa, un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias que modela un sistema de control con un ciclo cerrado. Explícitamente, se estudia la estabilidad y bifurcación de los puntos de equilibrio del sistema al variar uno de sus parámetros, complementariamente se realizan algunas simulaciones numéricas en el mismo, para buscar otros tipos de comportamiento presentes en él, tales como órbitas cerradas y órbitas homoclínicas.

ABSTRACT

One of the most interest work that had worried in the history of the humanity is to understand the behavior of the nature. The mathematics had permitted in big part to give a clear ideal of these behaviors, in special the study of the dynamics not lineal had permitted in the last years to understand many regularities that this possess, obtaning go as far as significant progress in different campus of the engineering, biology and many others areas of the knowledge.

There are several and varied ways of the model the natural phenomenons, but one of this ways had obtained most and best success in this direccion, it is the use of the differential equations. In this fuction, the present work study since the optics of the ordinary differential equations that model one system of the control with one close cycle. In explicablitley we study the stability and bifurcations of the points of the equilibrium of the system to the vary some of the parameters; completely we realice some numerical simulations at the same time to search others class of behaviors, that be present on it, duch as close orbits and homoclinics orbits.

INTRODUCCION

Debieron pasar miles de años para que la humanidad comprendiera que la naturaleza posee muchas regularidades, que pueden ser registradas analizadas, predichas y explotadas. Durante el siglo *XVIII*, la ciencia tuvo un gran éxito en el descubrimiento de las leyes de la naturaleza que se creyó que quedaba muy poco por descubrir.

El movimiento de cada partícula del universo estaba determinado por reglas inmutables y el trabajo de los científicos radicaba en clasificar las implicaciones de estas reglas para cualquier fenómeno concreto de interés. Básicamente este fue el pensamiento introducido por la obra magistral de Isaac Newton “Principios Matemáticos de la Filosofía Natural” y fué confirmado a principios del siglo *XIX* por el matemático francés Pierre Simon Laplace en su obra “Ensayo filosófico sobre las probabilidades ” según la cual no existe el azar y todo sistema es determinista, es decir, a partir únicamente de datos actuales es posible predecir su futuro o conocer su pasado y que las únicas limitaciones para su predicción radicaban en el tamaño o en la complejidad del mismo.

Aunque el siglo *XX* presenció la renovación de las teorías de Newton y la caída del determinismo de Laplace, básicamente por el surgimiento de la mecánica cuántica y la aparición de caos debido al crecimiento exponencial de los errores, lo cierto es que todos los trabajos desarrollados a lo largo del siglo *XVIII* y principios del siglo *XIX*: Euler en dinámica de flúidos, Fourier sobre el flujo del calor, la Teoría del

potencial de Laplace y Poisson llevaron al surgimiento de un paradigma que aún en nuestros días está y seguirá vigente: una de las formas más representativas de modelar la naturaleza es por medio de ecuaciones diferenciales.

Sin embargo la situación no es tan sencilla como parece; obtener las ecuaciones es una parte del problema, resolverlas es otra muy diferente. Así por ejemplo, los principales logros del siglo *XVIII* consistieron en obtener ecuaciones para modelar los fenómenos físicos. Hubo menos suerte al resolver estas ecuaciones; a pesar de ello algunos problemas, incluyendo los básicos e importantes condujeron a ecuaciones que podían ser resueltas; pero no todas, una ilustración de esto corresponde a las ecuaciones del movimiento de tres cuerpos bajo la acción de la gravedad. Estas fueron intratables hasta 1890 cuando se publicó, en francés, la memoria de H. Poincaré “el problema de los tres cuerpos y las ecuaciones de la dinámica”.

Las ecuaciones diferenciales se clasifican en lineales y no lineales. Las ecuaciones lineales son habitualmente más fáciles de resolver que las no lineales. El procedimiento clásico para intentar estudiar una ecuación no lineal consiste en linealizarla, es decir, eliminar los términos de orden dos y de orden superior de la ecuación, con lo cual se obtienen respuestas aproximadas para el problema en cuestión. A pesar de esto, la ciencia de hoy muestra que la naturaleza es inexorablemente no lineal, y no tenemos modo alguno de resolver lo no lineal de modo exacto. Sin embargo fue Henry Poincaré quien formuló los principios teóricos en base a los cuales, si bien no se encuentran soluciones exactas a problemas no lineales, es posible determinar el comportamiento a largo plazo de las soluciones de la ecuación diferencial; “la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales”. Esta teoría fué complementada con los trabajos de Smale, Liapunov, Kolmogorov, en lo que en el siglo *XX* se denominó Teoría de los Sistemas Dinámicos y es el marco conceptual en cual descansa este trabajo.

Las ecuaciones diferenciales se utilizan para plantear y resolver problemas en diferentes áreas de la ciencia, en particular con ellas se modelan diferentes fenómenos físicos entre los que se encuentran los denominados oscilatorios. Matemáticamente se considera oscilador a cualquier sistema cuyo movimiento esté descrito por una ecuación diferencial de segundo orden. Si la ecuación diferencial es lineal se dice que el oscilador es lineal y el oscilador es no lineal si la ecuación diferencial es no lineal. El oscilador tiene un control, si es posible adaptarle cierto mecanismo que lo lleve, al cabo de cierto tiempo, a una posición fijada con anterioridad.

El ejemplo clásico de un oscilador lineal lo constituye un sistema masa-resorte; como una ilustración de un oscilador no lineal puede considerarse la dinámica de los instrumentos musicales o la dinámica de una válvula electrónica de vacío y como un ejemplo de un oscilador con control de ciclo cerrado podemos seleccionar el sistema que modela el regulador de watt el cual está constituido por una caldera de vapor en la cual la presión de la misma abre la espita si esta es mayor que cierto valor dado y la cierra si es menor que otro valor.

En 1.985 Phillip Holmes [4] propuso el sistema no lineal de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x'' + \delta x' + g(x) &= -z \\z' + \alpha z &= \alpha \gamma x\end{aligned}$$

como modelo para un oscilador no lineal con un control de ciclo cerrado. En éste sistema de ecuaciones diferenciales x representa el desplazamiento del sistema oscilatorio, la función no lineal $g(x)$ modela la rigidez del sistema, δ es el coeficiente de amortiguamiento y z es la retroalimentación del sistema. El sistema posee una dinámica de primer orden en el cual $\frac{1}{\alpha}$ es la constante de tiempo, γ es la ganancia y corresponde al modelo más simple para un sistema elástico no lineal cuya posición es controlada por una máquina capaz de regular su actividad por ella misma o

equivalentemente capaz de captar información del medio y por tanto modificar sus estados en función de las circunstancias y regular su actividad con el propósito de conseguir una meta.

Este es un trabajo de carácter monográfico en el cual se analiza la dinámica local de este sistema con base en el problema propuesto por S.Wiggins [5] en el cual se toma como rigidez no lineal la función $g(x) = x(x^2 - 1)$.

El trabajo se desarrolla en dos capítulos de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos sobre los sistemas de control así como las definiciones y resultados más importantes sobre la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias, que son básicas en el logro de los objetivos específicos y que serán suficientes para una lectura autocontenida del trabajo. En particular se presentan los criterios de estabilidad en base a la linealización, el teorema de la variedad central y un cálculo aproximado de ésta.

Referencias [1],[2],[3] y [5].

Por otra parte, el capítulo 2 corresponde al cuerpo del desarrollo del trabajo y en él se presentan las demostraciones y cálculos necesarios para el logro de los objetivos específicos. En particular se estudian las siguientes características del sistema que corresponden a afirmaciones realizadas pero no demostradas en [4]:

El sistema está definido para todo t mayor que 0.

1. Si $\gamma = 1$ el sistema posee un único punto de equilibrio no hiperbólico en el origen.
2. Si $\gamma > 1$, el único punto de equilibrio es el origen y éste sigue siendo no hiperbólico aunque con características cualitativas diferentes al caso anterior.
3. Si $\gamma < 1$, existen tres puntos de equilibrio los cuales bajo ciertas condiciones son no hiperbólicos.

4. Las superficies de bifurcación que posee el sistema se cortan sobre la curva $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ en cuyo caso la linealización posee un valor propio nulo doble y otro negativo.
5. En este último caso los tres puntos de equilibrio coinciden y aplicar la teoría de la variedad central para analizar la estabilidad de este punto de equilibrio.

Referencias: [1],[4] y [5] INTRODUCCION

1. MARCO TEÓRICO

El marco de referencia sobre el cual se fundamenta este trabajo descansa sobre dos áreas altamente relacionadas entre sí: los sistemas de control y aspectos básicos de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Nos proponemos en este apartado presentar una revisión, que sin ser exhaustiva, proporcione una panorámica de estas áreas que sirva de base para una lectura autocontenida del desarrollo del mismo.

1.1. LOS SISTEMAS DE CONTROL Y SU MODELACIÓN

Un sistema se define al establecer relaciones entre los elementos de un conjunto, los cuales proporcionan la información esencial sobre el sistema, es decir, el estado.

El sistema es Dinámico cuando su estado cambia con el tiempo; se puede decir así que un sistema dinámico está formado por un conjunto de estados posibles y por una regla que describe como evoluciona el estado en el tiempo. Esta regla conocida como la dinámica, determina, a partir de un estado inicial, un conjunto de estados que se denomina la trayectoria; esta se representa en el espacio de fase y sus coordenadas son las componentes del estado.

Un ejemplo de un sistema dinámico es el de un péndulo, su movimiento se determina por dos variables: posición y velocidad, un punto en el plano cuyas coordenadas son estas dos variables es el estado. La ecuación diferencial que describe como evoluciona dicho estado, y que se deduce a partir de las leyes de Newton, conforma la dinámica

del sistema.

A medida que el péndulo oscila, a uno y otro lado, el estado se mueve a lo largo de una trayectoria en el plano. Si el péndulo se mueve únicamente bajo la influencia de la fuerza de la gravedad, las trayectorias son regulares llegando a ser una espiral o una circunferencia dependiendo si existe o no rozamiento.

Si al péndulo se le aplica además una fuerza periódica que depende del tiempo y un amortiguamiento entonces, para ciertos valores de la amplitud y la frecuencia, el movimiento entra en un régimen en el cual las trayectorias no se pueden predecir.

Sistemas dinámicos de singular relevancia son aquellos que están relacionados con la teoría de control, estos problemas son especialmente difíciles y sólo se han resuelto para situaciones muy particulares. La idea general de la teoría de control es la siguiente: se desea que cierto sistema dinámico, modelado por una ecuación diferencial, llegue al cabo de algún tiempo a cierto estado prefijado, para tal fin se introducen en la dinámica ciertos elementos que garantizan la consecución del objetivo, estos elementos se llaman controles.

Esencialmente se reconocen dos clases de control, el control circuito abierto y el control de circuito cerrado (de retroalimentación). En el control de circuito abierto se introduce en la dinámica un cierto elemento $z(t)$ para obtener una respuesta en función de un estado inicial dado, esquemáticamente:

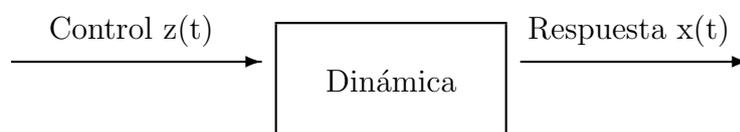


Figura 1.1: Control de circuito abierto

En el control de circuito cerrado el insumo $z(t)$ depende de la respuesta $x(t)$, y varía

en función de ésta con el objeto de alcanzar cierto estado independientemente de cuales hayan sido las condiciones iniciales, esquemáticamente:

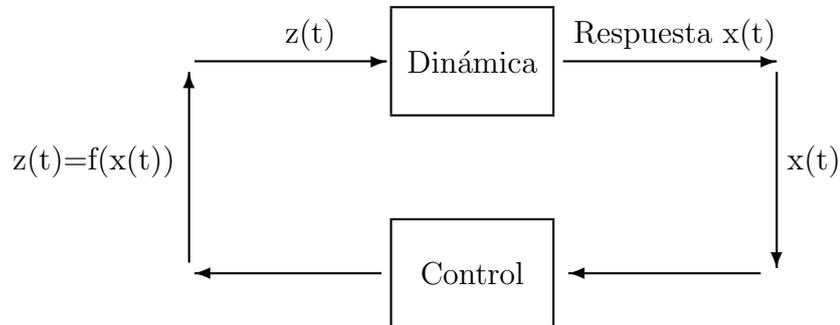


Figura 1.2: Control de circuito cerrado

Una ilustración parcial de los conceptos anteriormente expuestos se presenta enseguida.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x\end{aligned}$$

que modela el sistema dinámico correspondiente al péndulo con amplitud pequeña y sin rozamiento. Las trayectorias de este sistema en el espacio fase son circunferencias con centro $(0,0)$ que se recorren en sentido negativo. Un control tal que, desde cualquier punto (x_0, y_0) , vaya al origen en un tiempo finito se obtiene de la siguiente manera.

Consideremos el sistema anterior añadiéndole un control $z(t)$ como sigue:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x + z(t)\end{aligned}$$

donde $z(t)$ toma únicamente los valores 1 y -1 . Si $z = 1$, esto equivale a trasladar el origen del sistema original al punto $(-1, 0)$ y si $z = -1$ equivale a trasladarlo al punto $(1, 0)$. Así entonces las trayectorias en el plano fase para el nuevo sistema son circunferencias con centro en $(-1, 0)$ y $(1, 0)$ de acuerdo a que $z = 1$ o que $z = -1$, respectivamente.

Determinemos ahora ciertos subespacios del espacio de fase en los cuales el control $z(t)$ cambie de signo.

Para ello consideramos la curva:

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2, \\ \sqrt{1 - (x + 1)^2} & \text{si } -2 \leq x < 0, \\ -\sqrt{1 - (x - 1)^2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Figura 1.3: curva

Alrededor del punto máximo, de esta curva tomamos $z = 1$ y en el punto mínimo $z = -1$. Se verifica que desde cualquier punto del plano las trayectorias del sistema con control llegan en un tiempo finito al origen al realizar los cambios del signo en z cada vez que se llega a la curva anterior.

1.2. ASPECTOS BASICOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

En este apartado se anuncian algunas definiciones y resultados acerca de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias que serán básicas en el desarrollo de nuestro trabajo.

En particular se enuncian el teorema de existencia y unicidad, los teoremas acerca de la estabilidad de puntos de equilibrio, el teorema de las variedades estable, inestable, central y el concepto bifurcación.

1.2.1. Teorema de existencia y unicidad

Debido a las características básicas del sistema no lineal que trataremos consideramos únicamente la ecuación diferencial autónoma:

$$X' = f(X) \quad (1)$$

en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ donde $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una aplicación C^1 .

Una solución de $X' = f(X)$ es una función diferenciable definida en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$

$$X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que $X'(t) = f(X(t))$ para todo $t \in I$.

Teorema 1 ([3], cap.8, sec. 2). Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ una aplicación C^1 , t_0 un número real y X_0 un punto en U entonces existen un intervalo abierto I al que pertenecen t_0 y una única solución $X(t)$ de la ecuación diferencial:

$$X' = f(X),$$

definida en I y que satisface la condición inicial $X(t_0) = X_0$.

Puesto que las soluciones de la ecuación diferencial autónoma (1) son invariantes por traslación, es decir, si $X(t)$ es solución de (1) sobre I entonces $X(t + t_0)$ es también una solución de (1) sobre el intervalo trasladado $I - t_0$, es suficiente considerar las condiciones iniciales en $t_0 = 0$.

Las ecuaciones diferenciales que se consideran en este trabajo además de ser autónomas dependen de parámetros, es decir, son de la forma:

$$X' = f(X, \mu) \quad (2)$$

donde, $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^r , $r \geq 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^p$ son conjuntos abiertos.

Puesto que en consideraciones posteriores trataremos acerca de la estabilidad de puntos de equilibrio los cuales, en general, dependerán de un parámetro, es importante conocer como cambia el comportamiento de (2) a consecuencia de pequeñas variaciones en las condiciones iniciales o en los parámetros. En este sentido se tiene:

Dado que f es al menos C^1 entonces por el teorema de existencia y unicidad para cada valor del parámetro $\mu = \mu_0$ en V , cada t_0 en \mathbb{R} y cada X_0 en U , la ecuación diferencial:

$$X' = f(X, \mu)$$

tiene una única solución:

$$X(t) = \varphi(X_0, t, t_0, \mu_0)$$

definida sobre un intervalo maximal de existencia $I(X_0, \mu_0)$ y que satisface la condición inicial:

$$X(t_0) = \varphi(X_0, t, t_0, \mu_0) = X_0.$$

En ocasiones es necesario considerar la dependencia continua y diferenciable de una solución de la ecuación diferencial (2) con respecto a las condiciones iniciales o a los

parámetros, el siguiente resultado enmarca esta situación.

Teorema 2 ([5], cap.1, sec. 1.1G). *Se considera la ecuación diferencial*

$$X' = f(X, \mu)$$

donde $f(X, \mu)$ es clase C^r , $r \geq 1$ en $U \times V \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$. Para cada X_0 en U , μ_0 en V , t_0 en I , la solución $\varphi(X_0, t, t_0, \mu_0)$ es una función clase C^r de X_0, t, t_0 y μ_0 .

1.2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio

En esta sección consideramos el concepto de punto de equilibrio de la ecuación diferencial (1) y los criterios adecuados para establecer la estabilidad de los mismos.

Definición 1.1 . *Un punto \bar{X} en U es un punto de equilibrio de la ecuación diferencial (1) si $f(\bar{X}) = 0$.*

Un punto de equilibrio \bar{X} en U es estable si para toda vecindad V de \bar{X} en U , existe una vecindad $V_1 \subseteq V$ tal que toda solución $X(t)$ con $X(0) = X_0$ en V_1 está definida y permanece en V para todo $t > 0$.

Intuitivamente, la anterior definición nos dice que *un punto de equilibrio \bar{X} es estable* si toda solución próxima a \bar{X} en cierto instante, permanece próxima a \bar{X} para todo instante posterior y es *asintóticamente estable* si adicionalmente la solución se acerca cada vez más a \bar{X} para todo instante posterior.

Figura 1.4: Estabilidad.

Si \bar{X} es estable y adicionalmente, la vecindad V_1 se puede escoger de tal manera que;

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \bar{X}$$

entonces \bar{X} se dice asintóticamente estable.

Figura 1.5: Estabilidad asintótica.

Un punto de equilibrio \bar{X} que no es estable se dice inestable.

Figura 1.6: inestabilidad.

1.2.3. Linealización

Dado que estamos interesados en determinar la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (1), debemos analizar el comportamiento de las soluciones cercanas a \bar{X} , para ello consideramos el cambio de variable

$$X = \bar{X} + Y$$

entonces al reemplazar esta expresión en el sistema y desarrollar f en serie de Taylor alrededor de \bar{X} , se obtiene

$$X' = f(\bar{X} + Y) = f(\bar{X}) + Df(\bar{X})Y + N(\bar{X}, Y)$$

donde $D(f(\bar{X}))$ es la derivada de f en X y $N(\bar{X}, Y)$ es una función no lineal tal que

$$\lim_{\|Y\| \rightarrow 0} \frac{N(\bar{X}, Y)}{\|Y\|} = 0.$$

Bajo ciertas condiciones la estabilidad del punto de equilibrio $X = \bar{X}$ del sistema no lineal

$$X' = f(X)$$

se puede determinar a través del estudio de la estabilidad del punto de equilibrio $Y = 0$ del sistema lineal

$$Y' = Df(\bar{X})Y \quad (3)$$

el cual se llama la linealización de f en \bar{X} .

La derivada de f en \bar{X} , $Df(\bar{X})$, es una matriz que se conoce como la matriz Jacobiana de f en \bar{X} , la cual explícitamente es

$$Df(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

donde f_1, f_2, \dots, f_n son las funciones componentes de f y cada una de las derivadas parciales que conforman esta matriz está evaluada en \bar{X} .

La siguiente clasificación de los puntos de equilibrio $X = \bar{X}$ del sistema

$$X' = f(X) \quad (1)$$

depende de los valores propios de la matriz $Df(\bar{X})$ y es básica para determinar la estabilidad de los mismos.

Definición 1.2 . *Un punto de equilibrio \bar{X} de (3) es hiperbólico si $Df(\bar{X})$ no posee valores propios con parte real nula.*

Definición 1.3 . *Sea \bar{X} un punto de equilibrio de (1). Si todos los valores propios de $Df(\bar{X})$ tienen parte real negativa se dice que \bar{X} es un sumidero. Si todos los valores propios de $Df(\bar{X})$ tienen parte real positiva se dice que \bar{X} es una fuente y si $Df(\bar{X})$ posee valores propios con parte real positiva y valores propios con parte real negativa se dice que \bar{X} es un punto silla.*

Teorema 3 ([5], cap. 9, sec. 1). *Sea \bar{X} un punto de equilibrio hiperbólico de (1). Si \bar{X} es un sumidero, entonces \bar{X} es un punto de equilibrio asintóticamente estable de (1).*

Teorema 4 ([5], cap. 9, sec. 2). Sea \bar{X} un punto de equilibrio de (1). Si \bar{X} es un punto silla, entonces \bar{X} es un punto de equilibrio inestable de (1).

La linealización proporciona una descripción de la dinámica de (1) cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, sin embargo información más completa acerca de esta dinámica está dada por el siguiente teorema.

Teorema 5 *TEOREMA HARTMAN - GROBMAN* ([5], cap. 2, sec. 2.2D). Sea \bar{X} un punto de equilibrio hiperbólico de (1), entonces existe una vecindad V de \bar{X} contenida en U y un homeomorfismo

$$h : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que transforma localmente órbitas del flujo no lineal φ_t de f en órbitas del flujo lineal $e^{tDf(\bar{X})}$.

Es decir existe una función h continua con inversa continua tal que $h(\bar{X}) = 0$ y que

$$h(\varphi_t(X)) = e^{tDf(\bar{X})}h(X)$$

para todo X en V y t en una vecindad de $t = 0$.

Figura 1.7: Teorema de Hartman-Grobman

Intuitivamente, el resultado anterior nos manifiesta el hecho de que localmente, alrededor de un punto de equilibrio hiperbólico \bar{X} el comportamiento cualitativo

de las soluciones del sistema no lineal (1) está completamente determinado por el comportamiento de las soluciones del sistema lineal

$$Y' = Df(\bar{X})Y$$

alrededor de $Y = 0$.

1.3. TEOREMA DE LA VARIEDAD CENTRAL

Existen dos maneras de simplificar un sistema dinámico: eliminando la no linealidad o reduciendo la dimensión del mismo; así entonces, para estudiar la dinámica local de un punto de equilibrio hiperbólico puede ser suficiente eliminar la no linealidad sin embargo, como mostramos mas adelante, este no es el caso si el punto de equilibrio es no hiperbólico y para ello es necesario recurrir a técnicas diferentes. Uno de los métodos básicos en este sentido es reducir la dimensión del sistema lo cual se logra restringiendo el flujo del sistema original al flujo sobre la denominada variedad central del punto de equilibrio. En esta sección se desarrolla la teoría necesaria para este proceso.

1.3.1. La forma de Jordán real de una matriz

Si A es una matriz cuadrada real $n \times n$ y es diagonalizable, es un hecho conocido que es posible encontrar una matriz no singular P tal que

$$P^{-1}AP$$

es una matriz diagonal D . La diagonal principal de D está conformada por los valores propios de A y la matriz P es tal que sus columnas son los vectores propios linealmente independientes asociados a los correspondientes valores propios.

Una condición suficiente para lograr esto es que los valores propios de la matriz A

sean diferentes. Sin embargo esta condición no es necesaria ya que por ejemplo, la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

tiene como valores propios $\lambda_1 = -1$ dos veces y $\lambda_2 = 8$; y la matriz P tal que:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

cuyas columnas corresponden a vectores propios de B , la transforma en una matriz diagonal.

Por otra parte, si una matriz A no es diagonalizable es posible hallar una matriz P no singular tal que la matriz

$$P^{-1}AP$$

tenga cierta forma especial. Una de estas formas es la denominada forma canónica real de cuya descomposición nos ocupamos a continuación.

Definición 1.4 . Sea A una matriz real de orden $n \times n$, con valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ de multiplicidad n_1, n_2, \dots, n_s respectivamente, entonces el polinomio característico de A es

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{n_1} (\lambda - \lambda_2)^{n_2} \dots (\lambda - \lambda_s)^{n_s}.$$

Se llama espacio generalizado de A asociado a λ_k al núcleo de la transformación lineal asociada a $(A - \lambda_k I)^{n_k}$ denotado $E(A, \lambda_k I_n)$ es decir

$$E(A, \lambda_k I_n) = \{X \in \mathbb{R}^n : (A - \lambda_k I_n)^{n_k} X = 0\}.$$

una matriz real de la forma

$$H_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha_j & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_j \end{pmatrix}$$

y cada C_j es una matriz real de la forma

$$C_j = \begin{pmatrix} A_j & 0 & \dots & 0 & 0 \\ I_2 & A_j & \dots & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & I_2 & A_j \end{pmatrix}$$

donde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $A_j = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$.

La matriz P es tal que sus columnas forman una base de vectores propios generalizados de los espacios generalizados de la matriz A , pero la determinación explícita de tal base depende de la demostración del teorema anterior y puede consultarse en [2].

En particular, el caso que en este trabajo nos interesa es aquel en el cual la matriz A no posee valores propios complejos y por tanto en la forma canónica real de A no aparece el bloque correspondiente a las matrices C_j , así por ejemplo la matriz no diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 13 \\ 5 & 3 & 7 \\ -9 & -4 & -12 \end{pmatrix}$$

tiene como valor propio doble $\lambda = 1$ y como valor propio simple $\lambda = -1$ por tanto la

forma canónica real de A es:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y en este caso la matriz P está dada por:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

El cálculo explícito de una matriz P similar al caso anterior será ilustrado en la sección 2,4 del capítulo II.

1.3.2. Las variedades estable, inestable y central

Retornamos ahora al estudio de la estructura de las órbitas cercanas a un punto de equilibrio \bar{X} en \mathbb{R}^n del sistema no lineal

$$X' = f(X), \text{ en } \mathbb{R}^n.$$

De las discusiones anteriores es natural considerar la linealización del sistema anterior

$$Y' = AY \quad (2)$$

donde A es la matriz jacobiana de f en \bar{X} , $Df(\bar{X})$, la cual define un operador lineal sobre \mathbb{R}^n .

Del álgebra lineal se conoce que \mathbb{R}^n se descompone en suma directa de los siguientes tres subespacios generados por los vectores propios generalizados de A

$$\begin{aligned} E^c &= \langle u^1, u^2, \dots, u^{n_c} \rangle \\ E^s &= \langle v^1, v^2, \dots, v^{n_s} \rangle \\ E^u &= \langle w^1, w^2, \dots, w^{n_w} \rangle \end{aligned}$$

donde $\{u^1, u^2, \dots, u^{n_c}\}, \{v^1, v^2, \dots, v^{n_s}\}, \{w^1, w^2, \dots, w^{n_u}\}$, son bases de los espacios propios generalizados correspondiente a los valores propios que tienen parte real nula, parte real negativa y parte real positiva respectivamente. Los espacios E^s, E^u, E^c se llaman subespacios estable, inestable y central de A respectivamente.

Estos subespacios son invariantes bajo A es decir, $A(E^s) \subset E^s$, $A(E^u) \subset E^u$ y $A(E^c) \subset E^c$ y por tanto son invariantes bajo el flujo del sistema lineal (2).

Lo anterior implica que existe un cambio lineal de coordenadas

$$X = PU$$

donde P es la matriz cuyas columnas son los vectores propios generalizados de A , que permite descomponer el sistema lineal (2) en la forma

$$\begin{aligned} u' &= A_c u \\ v' &= A_s v \\ w' &= A_u w \end{aligned} \quad (3)$$

donde A_c, A_s, A_u son las restricciones de A a los espacios E^c, E^s, E^u respectivamente

$$\text{y } U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ está en } \mathbb{R}^{n_c} \times \mathbb{R}^{n_s} \times \mathbb{R}^{n_u} \text{ con } n_c + n_s + n_u = n.$$

De consideraciones anteriores se conoce que al realizar el cambio de variable

$$X = \bar{X} + Y$$

donde \bar{X} es un punto de equilibrio del sistema no lineal (1) y desarrollar en serie de Taylor alrededor de \bar{X} se obtiene la ecuación

$$Y' = AY + N(\bar{X}, Y)$$

con $A = Df(\bar{X})$, Y en una vecindad del origen y

$$\lim_{|Y| \rightarrow 0} \frac{N(\bar{X}, Y)}{|Y|} = 0.$$

Así entonces el cambio lineal de coordenadas considerado anteriormente induce en el sistema no lineal (1) una descomposición de la forma

$$\begin{aligned} u' &= A_c u + N_c(u, v, w) \\ v' &= A_s v + N_s(u, v, w) \\ w' &= A_u w + N_w(u, v, w) \end{aligned} \quad (4)$$

donde N_c , N_s y N_u son las componentes de $N(\bar{X}, Y)$ en los subespacios E^c, E^s, E^u respectivamente.

Definición 1.5 . Sea \bar{X} un punto de equilibrio del sistema no lineal (1) y ϕ_t el flujo:

1. El conjunto

$$W_L^S(\bar{X}) = \{X \in U : \phi_t(X) \rightarrow \bar{X} \text{ si } t \rightarrow +\infty \text{ y } \phi_t(X) \in U \text{ para } t \geq 0\}$$

se llama *VARIEDAD LOCAL ESTABLE* de \bar{X} .

2. El conjunto

$$W_L^U(\bar{X}) = \{X \in U : \phi_t(X) \rightarrow \bar{X} \text{ si } t \rightarrow -\infty \text{ y } \phi_t(X) \in U \text{ para } t \leq 0\}$$

se llama *VARIEDAD LOCAL INESTABLE* de \bar{X} .

Estos conjuntos satisfacen la siguiente propiedad

Teorema 7 *Variedades locales inestable, estable y central para puntos fijos* ([5], cap. 1, sec. 1.1C). Sea \bar{X} un punto de equilibrio de (1), donde f es de clase C^r , $r \geq 2$ entonces existen variedades locales $W_L^S(\bar{X})$, $W_L^U(\bar{X})$, de dimensiones n_s , n_u respectivamente y una variedad central local $W_L^C(\bar{X})$ de dimensiones n_C , que son tangentes en \bar{X} a los espacios propios generalizados E^c, E^s, E^u del flujo lineal asociado.

Estas variedades son invariantes bajo el flujo de f ; las variedades $W_L^S(\bar{X})$, $W_L^U(\bar{X})$, son únicas pero la variedad $W_L^C(\bar{X})$, no necesariamente lo es y localmente estas

variedades pueden representarse como los grafos de ciertas funciones tan suaves como ellas.

Esta situación se ilustra en la siguiente gráfica

Figura 1.8: Las variedades estable, inestable y central

El teorema nos dice que si un punto de equilibrio posee un valor propio con parte real positiva, entonces dicho punto es inestable pero si el valor propio posee parte real nula entonces el teorema de Hartman-Grobman no puede aplicarse para decidir acerca de la estabilidad de dicho punto; así por ejemplo:

La ecuación diferencial real

$$x' = x^3$$

tiene un punto de equilibrio no hiperbólico en $x = 0$ y sucede que:

1. Para $x < 0$, $x' = x^3 < 0$ por tanto la solución $x(t)$ es decreciente para todo t y así cualquier solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) < 0$ tiende a $-\infty$ cuando t aumenta.
2. Para $x > 0$, $x' = x^3 > 0$ por tanto la solución $x(t)$ es creciente para todo t por lo que toda solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) > 0$ tiende a $+\infty$ cuando t aumenta.

De 1 y 2 se concluye que el punto de equilibrio $x = 0$ es inestable.

Por otra parte, la ecuación diferencial real

$$x' = -x^3$$

tiene un punto de equilibrio no hiperbólico en $x = 0$ y sucede que:

1. Para $x < 0$, $x' = -x^3 > 0$ por tanto la solución $x(t)$ es creciente para todo t y así cualquier solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) < 0$ tiende a $+\infty$ cuando t aumenta.
2. Para $x > 0$, $x' = -x^3 < 0$ por tanto la solución $x(t)$ es decreciente para todo t por lo que toda solución $x(t)$ con condición inicial $x(0) > 0$ tiende a $-\infty$ cuando t aumenta.

De 1 y 2 se concluye que el punto de equilibrio $x = 0$ es asintóticamente estable.

Las anteriores consideraciones nos manifiestan la necesidad de tener criterios para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio de un sistema no lineal cuya linealización en dicho punto posee valores propios con parte real nula; esta es una de las principales aplicaciones de la teoría de la variedad central.

Consideramos esto a continuación:

Supongamos así que el sistema (1) no posee valores propios con parte real positiva y tiene un punto de equilibrio en el origen; esto significa que el sistema (4) se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned}u' &= A_c u + N_c(u, v) \\v' &= A_s v + N_s(u, v)\end{aligned}\tag{5}$$

donde u está en \mathbb{R}^{n_c} y v está en \mathbb{R}^{n_s} , A_c, A_s son matrices cuyos valores propios tienen parte real nula y parte real negativa respectivamente y las funciones N_c, N_s así como

sus primeras derivadas parciales, se anulan en el origen. En esta situación el teorema [7] nos dice

Teorema 8 *Teorema de la Variedad Central* ([1], cap. 2, sec. 2.3). *El sistema (5) posee una variedad central del origen descrita localmente como la gráfica*

$$W_L^{n_c}(0) = \{(u, h(u)) : u \text{ en } \mathbb{R}^{n_c}, |u| < \delta\}$$

de una función h de clase C^1 definida en una vecindad del origen de \mathbb{R}^{n_c} y tal que $h(0) = 0$ y $Dh(0) = 0$.

Si u es suficientemente pequeño, la dinámica de (5) restringida a la variedad central está determinada por la dinámica cerca al origen del sistema

$$u' = A_c u + N_c(u, h(u)) \quad (6)$$

donde u está en \mathbb{R}^{n_c} .

Se dice que esta ecuación es la proyección de (5) (o de (1)) sobre la variedad central del punto de equilibrio en consideración; adicionalmente, la estabilidad del punto de equilibrio en el origen de (1) (o de (5)) está determinada por la estabilidad del origen de (6) como lo muestra el siguiente resultado.

Teorema 9 ([1], cap. 2, sec. 2.4).

1. *Si el punto de equilibrio en (6) es asintóticamente estable, entonces el punto de equilibrio en el origen de (5) (en (1)) es asintóticamente estable.*
2. *Si el origen en (6) es inestable, entonces el origen en (5) (en (1)) es inestable.*

La utilidad real del teorema anterior radica en poder calcular la función h , lo cual consideramos a continuación.

Puesto que sobre la variedad central las coordenadas (u, v) satisfacen la ecuación

$$v = h(u) \quad (7)$$

entonces derivando (7) respecto al tiempo se tiene que las coordenadas (u', v') satisfacen, sobre la variedad central, la igualdad

$$v' = Dh(u)u' \quad (8)$$

y como cualquier punto de $W^c(0)$ obedece a la dinámica generada por (5) entonces reemplazando

$$u' = A_c u + N_c(u, v)$$

$$v' = A_s v + N_s(u, v)$$

en (8) se tiene la ecuación diferencial parcial

$$N(h(u)) \equiv Dh(u) [A_c u + N_c(u, h(u))] - A_s h(u) - N_s(u, h(u)) = 0 \quad (9)$$

y las condiciones $h(0) = 0$, $Dh(0) = 0$.

Lo que permite determinar la función $v = h(u)$ y por tanto la variedad central.

Infortunadamente, resolver esta ecuación es probablemente más difícil que resolver nuestro problema original, sin embargo, el siguiente teorema nos brinda un método para aproximar por polinomios una solución de (9) con cualquier grado de exactitud.

Teorema 10 ([1], cap. 2, sec. 2.5). Sea $\phi : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$ una función de clase C^1 tal que $\phi(0) = D\phi(0) = 0$ y que $N(\phi(u)) = \mathcal{O}(|u|^q)$ cuando $u \rightarrow 0$ para algún $q > 1$ entonces $|h(u) - \phi(u)| = \mathcal{O}(|u|^q)$ cuando $u \rightarrow 0$.

Consideramos un ejemplo concreto para ilustrar el uso de los teoremas sobre la variedad central.

El sistema no lineal

$$x' = 2x^2 \quad (a)$$

$$y' = -y + x^3$$

tiene al origen como uno de sus puntos fijos.

Los valores propios de la linealización de este sistema alrededor del origen son 0 y -1 por lo que el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico, razón por la cual no podemos hacer uso del teorema [5, cap I] para estudiar la estabilidad del origen.

Por el teorema [8, cap. I] este sistema posee una variedad central que localmente puede ser representada como

$$W^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = h'(0) = 0\}$$

para δ suficientemente pequeño.

Para calcular $W^c(0)$ se asume que h tiene la forma

$$h(x) = ax^2 + bx^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

reemplazando h y $Dh(x)$ en (9) y tomando

$$A_c = 0, A_s = -1, N_c(u, h(u)) = 2x^2, N_s(u, h(u)) = x^3$$

se tiene

$$\begin{aligned} N(h(x)) &= (2ax + 3bx^2 + \dots) 2x^2 + ax^2 + bx^3 - x^3 \\ &= 2ax^3 + 6bx^4 + \dots + ax^2 + bx^3 - x^3 = 0 \end{aligned}$$

realizando los cálculos correspondientes, agrupando los términos semejantes e igualando a cero los coeficientes de las diferentes potencias de x se obtiene:

$$x^2 : a = 0$$

$$x^3 : 2a + b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1$$

por tanto

$$h(x) = x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

y el sistema restringido a la variedad central está dado por

$$x' = 2x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

para el cual el origen es inestable y por el teorema [9, cap I] lo es también para el sistema (a).

1.4. EL CONCEPTO DE BIFURCACIÓN

Como hemos mencionado, las ecuaciones diferenciales que tratamos en este trabajo dependen de parámetros, es decir, son ecuaciones diferenciales de la forma

$$X' = f(X, \mu)$$

donde $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función de clase C^r , $r \geq 1$, y $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^p$ son conjuntos abiertos.

Un concepto particularmente importante en el estudio de las ecuaciones diferenciales es analizar como cambia el comportamiento de las soluciones a medida que varían los valores de los parámetros; en ocasiones, una pequeña variación en los parámetros da como resultado una pequeña modificación en la naturaleza de las soluciones. Sin embargo, en otras, los nuevos valores de los parámetros pueden conducir a un cambio drástico en el comportamiento a largo plazo de las soluciones. Esto se conoce como el fenómeno de bifurcación. Es decir, una ecuación diferencial, que depende de parámetros tiene una bifurcación cuando un cambio cuantitativo en los valores de los parámetros produce un cambio cualitativo en el sistema. Formalmente,

Definición 1.6 . Sea (\bar{X}, μ_0) un punto de equilibrio de $X' = f(X, \mu)$, es decir, $f(\bar{X}, \mu_0) = 0$. El campo vectorial $f(X, \mu)$ tiene una bifurcación en $\mu = \mu_0$ si las propiedades del flujo para X y μ cercanos a \bar{X} y μ_0 son diferentes de las propiedades cualitativas del flujo para X cerca a \bar{X} y $\mu = \mu_0$.

Definición 1.7 . Sea (\bar{X}, μ_0) un punto de equilibrio de $X' = f(X, \mu)$. El punto (\bar{X}, μ_0) es un punto de bifurcación del sistema si satisface las siguientes condiciones:

1. En el plano $\mu - X$ existen una o más ramas de puntos de equilibrio que pasan por (\bar{X}, μ_0) .
2. Si en el plano $\mu - X$ una única rama de equilibrio que pasa por (\bar{X}, μ_0) se sitúa a un sólo lado de $\mu = \mu_0$.

El siguiente ejemplo ilustra las definiciones anteriores.

Considere la ecuación diferencial real

$$x' = x^2 + 2x + \mu$$

para la cual, los puntos de equilibrio ocurren en $x = 1 \pm \sqrt{1 - \mu}$. Si $\mu < 1$ existen dos puntos de equilibrio; si $\mu = 1$ hay un único punto de equilibrio $x = 1$ y si $\mu > 1$ no existen puntos de equilibrio. Por tanto, la naturaleza cualitativa del diagrama de fase cambia cuando $\mu = 1$ y así la ecuación diferencial sufre una bifurcación en $\mu = 1$.

Figura 1.9: Diagrama de bifurcación.

Existe una variada clasificación de las bifurcaciones de puntos de equilibrio, y adicionalmente, criterios para decidir cuando ocurre cada una de ellas, sin embargo,

puesto que en este trabajo no estamos interesados en esta temática, no la trataremos aquí, pero puede consultarse por ejemplo en [5] capítulo 3.

2. ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS BÁSICAS DEL SISTEMA

Iniciamos el estudio del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales propuesto por P. Holmes [4]

$$\begin{aligned}x'' + \delta x' + x(x^2 - 1) &= -z \\z' + \alpha z &= \alpha \gamma x\end{aligned}$$

como un modelo para un oscilador no lineal con un control de ciclo cerrado; en él δ, α, γ son parámetros característicos del sistema que se consideran positivos. Nuestro principal objeto de estudio es presentar demostraciones de algunos aspectos no considerados en [4] en cuanto a la estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema así como las bifurcaciones que en él ocurren. Las referencias básicas para este capítulo son [1],[4]y[5].

2.1. OBSERVACIONES PRELIMINARES

Nótese en primer lugar que el sistema anterior puede transformarse en un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden mediante el cambio de variable $x' = y$ con lo que se obtiene

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= x - x^3 - \delta y - z \\z' &= \alpha \gamma x - \alpha z\end{aligned}\tag{2}$$

sistema al que nos referiremos de aquí en adelante como el sistema de Holmes.

En segundo lugar obsérvese que el lado derecho del sistema es continuamente diferenciable por tanto, como consecuencia del teorema de existencia y unicidad, para cada elección de los parámetros y cada condición inicial (x_0, y_0, z_0) existe una única solución $\phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $\phi(0) = (x_0, y_0, z_0)$ que está definida en algún intervalo $[0, a)$.

En tercer lugar nótese que los puntos de equilibrio del sistema de Holmes ocurren cuando

$$\begin{aligned}y &= 0 \\x - \delta y - z - x^3 &= 0 \\ \alpha \gamma x - \alpha z &= 0\end{aligned}$$

lo que se reduce a la ecuación $x^3 + \gamma x - x = 0$, la cual tiene como raíces $x = 0$, $x = \pm\sqrt{1-\gamma}$ y por tanto se tiene el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0, 0)$ el cual existe para todo valor de γ y si $\gamma < 1$ además de P_0 , se tienen los puntos de equilibrio

$$P_1 = (\sqrt{1-\gamma}, 0, \gamma\sqrt{1-\gamma}) \quad y \quad P_2 = (-\sqrt{1-\gamma}, 0, -\gamma\sqrt{1-\gamma})$$

los cuales se encuentran en la recta intersección de los planos $y = 0$ y $z = \gamma x$.

Adicionalmente obsérvese que el sistema es invariante bajo la transformación

$$(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, -z)$$

y así el campo de pendientes es simétrico respecto al origen.

2.2. ESTABILIDAD Y BIFURCACIÓN DEL PUNTO DE EQUILIBRIO P_0

Tratamos a continuación aspectos referentes a la estabilidad y bifurcación de los puntos de equilibrio del sistema al variar el parámetro γ , en particular en esta sección nos referiremos exclusivamente al punto de equilibrio en el origen.

Teorema 11 . *Si $0 < \gamma < 1$ entonces en el sistema de Holmes el origen P_0 es un punto de equilibrio hiperbólico inestable.*

Demostración: La matriz jacobiana del sistema de Holmes en el punto $P(x, y, z)$ está dada por

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - 3x^2 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

por lo que la linealización del sistema alrededor de P_0 es

$$\begin{aligned}x' &= y \\y' &= x - \delta y - z \\z' &= \alpha\gamma x - \alpha z\end{aligned}$$

que tiene como ecuación característica

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)\lambda + (\gamma - 1)\alpha = 0$$

si $0 < \gamma < 1$ el término independiente de esta ecuación es negativo, entonces, por el teorema [6.3.1]¹ ésta ecuación tiene alguna raíz con parte real positiva y las demás con parte real no nula de lo que se sigue que P_0 es hiperbólico e inestable.

¹De Guzmán, M. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoría de Estabilidad y Control. Alhambra, Madrid, 1975. Cap. VI, sec. 6.3.

Teorema 12 . Si $\gamma = 1$ en el sistema de Holmes el origen P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico y en el espacio (α, δ, γ) el plano $\gamma = 1$ es una superficie de bifurcación.

Demostración:

Por el teorema [11] la ecuación característica de la linealización alrededor del origen es

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)\lambda + (\gamma - 1)\alpha = 0$$

si $\gamma = 1$ esta ecuación se reduce a $\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)\lambda = 0$

cuyas raíces son:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \frac{1}{2}(-(\delta + \alpha) \pm \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4})$$

así, la linealización alrededor del origen tiene un valor propio nulo y por tanto P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico con $\lambda_2 > 0$ y $\lambda_3 < 0$.

Puesto que si $\gamma < 1$ el sistema posee tres ramas de equilibrio y si $\gamma > 1$ sóloamente una, entonces $\gamma = 1$ es una superficie de bifurcación.

Teorema 13 . Si $\gamma = 1$ en el sistema de Holmes, el origen P_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable localmente.

Demostración:

Por el teorema [12] para $\gamma = 1$ el origen tiene un valor propio nulo, por lo que la teoría lineal y el teorema de Hartman-Grobman no pueden aplicarse y para determinar la estabilidad del origen se debe aplicar la teoría sobre la variedad central.

La matriz jacobiana alrededor del origen es:

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\delta & -1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

la cual diagonalizable y, tiene como vectores propios $f_1 = (1, 0, 1)$

$$f_2 = \left(1, -\frac{[(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2}, \frac{2\alpha}{\alpha-\delta+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} \right)$$

$$f_3 = \left(1, -\frac{[(\delta+\alpha)+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2}, \frac{2\alpha}{\alpha-\delta-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} \right)$$

por tanto la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{[(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} & -\frac{[(\delta+\alpha)+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} \\ 1 & \frac{2\alpha}{\alpha-\delta+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} & \frac{2\alpha}{\alpha-\delta-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} \end{pmatrix}$$

reduce la matriz $J(P_0)$ a la forma normal diagonal

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(\delta+\alpha-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4})}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{(\delta+\alpha+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4})}{2} \end{pmatrix}$$

y por los resultados del capítulo I, sección [1.3.2], el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{[(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} & -\frac{[(\delta+\alpha)+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} \\ 1 & \frac{2\alpha}{\alpha-\delta+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} & \frac{2\alpha}{\alpha-\delta-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

es decir

$$x = u + v + w$$

$$y = -\frac{v[(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} - \frac{w[(\delta+\alpha)+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2}$$

$$z = u + \frac{2v\alpha}{\alpha-\delta+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} + \frac{2\alpha w}{\alpha-\delta-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}}$$

permite reducir el sistema de Holmes a la forma:

$$\begin{aligned} u' &= -\alpha (u + v + w)^3 \\ v' &= -\frac{((\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4})}{2}v + (u + v + w)^3 \\ w' &= -\frac{((\delta+\alpha)+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4})}{2}w - ((\delta + \alpha) + \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4})(u + v + w)^3 \end{aligned}$$

Por el teorema [8, cap. I], este sistema posee una variedad central que localmente puede representarse como

$$\begin{aligned} W^c(0) = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : v = h_1(u), w = h_2(u), h_1(0) = 0, \\ h_2(0) = 0, h_1'(0) = 0, h_2'(0) = 0\} \end{aligned}$$

donde h_1, h_2 son funciones reales definidas en una vecindad del origen y el flujo del sistema de Holmes restringido a la variedad central cerca al origen está determinado por

$$u' = -\alpha (u + h_1(u) + h_2(u))^3$$

sistema para el cual debemos calcular las funciones h_1 y h_2 .

Por una extensión del teorema [10] y de los resultados de la sección [1.3.2] al caso en el cual se incluye la variedad inestable podemos tomar:

$$h_1(u) = a_1u^2 + b_1u^3 + \dots$$

$$h_2(u) = a_2u^2 + b_2u^3 + \dots$$

donde $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ son coeficientes reales que se deben determinar.

Utilizando la expresión [9] de la sección [1.3.2] capítulo I se obtiene:

$$(2a_1u + 3b_1u^2 + \dots) [-\alpha (u + (a_1u^2 + b_1u^3 + \dots) + (a_2u^2 + b_2u^3 + \dots))]^3 +$$

$$\frac{[(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} (a_1u^2 + b_1u^3 + \dots) - (u + a_1u^2 + b_1u^3 + \dots + a_2u^2 + b_2u^3 + \dots)^3 = 0$$

$$(2a_2u + 3b_2u^2) [-\alpha (u + (a_1u^2 + b_1u^3 + \dots) + (a_2u^2 + b_2u^3 + \dots))]^3 + \frac{[(\delta+\alpha)+\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{2} (a_2u^2 + b_2u^3 + \dots) + \left[(\delta + \alpha) + \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4} \right] (u + a_1u^2 + b_1u^3 + \dots + a_2u^2 + b_2u^3)^3 = 0$$

Realizando los cálculos correspondientes, agrupando los términos semejantes e igualando a cero los coeficientes de las diferentes potencias de u se obtiene:

$$u^2 : \frac{a_1}{2} \left[(\delta + \alpha) - \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4} \right] = 0$$

$$u^3 : \frac{b_1}{2} \left[(\delta + \alpha) - \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4} \right] - 1 = 0$$

$$u^2 : \frac{a_2}{2} \left[(\delta + \alpha) + \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4} \right] = 0$$

$$u^3 : \frac{b_2}{2} \left[(\delta + \alpha) + \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4} \right] + \left[(\delta + \alpha) + \sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4} \right] = 0$$

Por lo que

$$a_1 = 0$$

$$b_1 = \frac{2}{(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}}$$

$$a_2 = 0$$

$$b_2 = -2$$

Con lo que las funciones h_1 y h_2 son:

$$h_1(u) = \frac{2u^3}{(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}}$$

$$h_2(u) = -2u^3$$

luego el flujo del sistema reducido a la variedad central está determinado por:

$$u' = -\alpha \left(u + \frac{2-2[(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}]}{(\delta+\alpha)-\sqrt{(\delta-\alpha)^2+4}} u^3 \right)^3$$

En el cual, despreciando las potencias superiores a 3 se obtiene:

$$u' = -\alpha u^3 + \mathcal{O}(u^5)$$

para el cual el origen es asintóticamente estable localmente y por el teorema [9] sección [1.3.2] del capítulo I lo es también para el sistema de Holmes.

Teorema 14 . Si $1 < \gamma < \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$, el origen en el sistema de Holmes es, localmente, un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Demostración:

Si $\gamma \neq 1$ por el teorema [11], la ecuación característica de la linealización alrededor del origen es:

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)\lambda + (\gamma - 1)\alpha = 0$$

por el criterio de Routh-Hurwitz ² esta ecuación tiene raíces con parte real negativa si y solo si $(\delta + \alpha) > 0$, $(\alpha + \delta)(\alpha\delta - 1) - (\gamma - 1)\alpha > 0$ y $(\gamma - 1)\alpha > 0$ ó equivalentemente $\gamma > 1$, $\gamma < \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ y así el origen es un sumidero local.

Teorema 15 . Si $\gamma > 1$ y $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ en el sistema de Holmes, el origen P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico.

Demostración:

Por el teorema [14] la ecuación característica alrededor del origen para $\gamma > 1$ es:

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)\lambda + (\gamma - 1)\alpha = 0$$

que se puede expresar como:

$$\lambda(\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)) + (\delta + \alpha)\left(\lambda^2 + \frac{(\gamma - 1)\alpha}{\delta + \alpha}\right) = 0$$

²De Guzmán, M. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Teoría de estabilidad y control. Alhambra, Madrid, 1975. cap. VI, sec. 6.3.

y puede reescribirse de la siguiente manera:

$$(\lambda + (\delta + \alpha)) (\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)) = 0,$$

siempre y cuando

$$\delta\alpha - 1 = \frac{(\gamma - 1)\alpha}{\delta + \alpha},$$

es decir, cuando $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ y $\gamma > 1$, la ecuación característica posee una raíz real negativa y dos imaginarias puras, por lo que el origen es un punto de equilibrio no hiperbólico.

Teorema 16 . *Si $\gamma > \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ en el sistema de Holmes, el origen es un punto de equilibrio inestable y en el espacio (α, δ, γ) la superficie $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ es una superficie de bifurcación.*

Demostración:

Por el teorema [14], la ecuación característica del sistema de Holmes alrededor del origen es

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 1)\lambda + (\gamma - 1)\alpha = 0$$

Por el criterio de Routh-Hurwitz esta ecuación tiene por lo menos una raíz con parte real no negativa si y solo si:

$$\delta + \alpha \leq 0 \quad \text{ó} \quad (\delta + \alpha)(\delta\alpha - 1) - (\gamma - 1) \leq 0 \quad \text{ó} \quad (\gamma - 1)\alpha \leq 0.$$

Puesto que $\delta + \alpha > 0$, $(\gamma - 1) > 0$, entonces únicamente puede darse que $(\delta + \alpha)(\delta\alpha - 1) - (\gamma - 1) \leq 0$ es decir, cuando $\gamma \geq \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$.

Dado que en $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ dos raíces de la ecuación característica tienen parte real nula, entonces cuando $\gamma > \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ éstas raíces tienen parte real positiva y por tanto el origen es un punto de equilibrio inestable.

Puesto que para $\gamma < \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ el origen es asintóticamente estable y para $\gamma > \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ el origen es inestable, entonces al pasar γ a través de $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ ocurre una bifurcación.

2.3. ESTABILIDAD Y BIFURCACIÓN DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO P_1 y P_2

Continuamos el análisis de estabilidad y bifurcación de los puntos de equilibrio del sistema de Holmes para lo cual estudiamos el comportamiento del sistema alrededor de P_1 y P_2 . Tratamos únicamente P_1 ya que la simetría del sistema, mencionada anteriormente, produce resultados análogos para P_2 .

Teorema 17 . Si $\gamma = \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$, y $\gamma < 1$, el punto P_1 , en el sistema de Holmes, es un punto de equilibrio no hiperbólico.

Demostración:

La matriz jacobiana en el sistema de Holmes en el punto $P(x, y, z)$ está dada por:

$$J(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 - 3x^2 & -\delta & -1 \\ \alpha\gamma & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

por lo que la linealización del sistema alrededor de P_1 es:

$$x' = y$$

$$y' = (3\gamma - 2)x - \delta y - z$$

$$z' = \alpha\delta x - \alpha z$$

que tiene como ecuación característica

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 3\gamma + 2)\lambda - (\gamma - 1)2\alpha = 0$$

la cual puede reescribirse de la siguiente manera

$$\lambda [\lambda^2 + (\delta\alpha - 3\gamma + 2)] + (\delta + \alpha) \left[\lambda^2 - \frac{(\gamma - 1)2\alpha}{(\delta + \alpha)} \right] = 0$$

y puede expresarse como

$$[\lambda + (\delta + \alpha)] \left[\lambda^2 - \frac{2\alpha(\gamma - 1)}{\delta + \alpha} \right] = 0$$

siempre y cuando

$$\delta\alpha - 3\gamma + 2 = \frac{-2\alpha(\gamma - 1)}{\delta + \alpha} > 0,$$

es decir cuando

$$\gamma = \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2).$$

Así entonces, la ecuación caracterísitica posee una raíz real negativa y dos imaginarias puras, por tanto P_1 es un punto de equilibrio no hiperbólico.

Teorema 18 . Si $0 < \gamma < \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$, el punto P_1 en el sistema de Holmes es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Demostración:

Por el teorema [17] la ecuación característica de la linealización alrededor de P_1 es

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha)\lambda^2 + (\delta\alpha - 3\gamma + 2)\lambda - (\gamma - 1)2\alpha = 0$$

Por el criterio de Routh-Hurtwitz ésta ecuación tiene raíces con parte real negativa si y solo si

$$\delta + \alpha > 0, -(\gamma - 1)2\alpha > 0 \text{ y } (\delta + \alpha)(\delta\alpha - 3\gamma + 2) - (\gamma - 1)2\alpha > 0$$

o equivalentemente

$$\gamma < 1, \gamma < \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$$

es decir, en el intervalo $0 < \gamma < \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$ las raíces de la ecuación característica tienen parte real negativa por lo que P_1 es un sumidero local.

Teorema 19 . Si $\frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2) < \gamma < 1$, en sistema de Holmes, P_1 es un punto de equilibrio inestable y en el espacio (α, δ, γ) , $\gamma = \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$ es una superficie de bifurcación.

Demostración:

Por el teorema [14], la ecuación característica del sistema de Holmes, alrededor de

P_1 es:

$$\lambda^3 + (\delta + \alpha) \lambda^2 + (\delta\alpha - 3\gamma + 2) \lambda - (\gamma - 1) 2\alpha = 0.$$

Por el criterio de Routh-Hurwitz, esta ecuación tiene por lo menos una raíz con parte real no negativa, sí y solo sí:

$$\delta + \alpha \leq 0 \quad \text{ó} \quad (\delta + \alpha) (\delta\alpha - 3\gamma + 2) + (\gamma - 1) 2\alpha \leq 0 \quad \text{ó} \quad -(\gamma - 1) 2\alpha \leq 0$$

y puesto que $(\delta + \alpha) > 0$ y $\gamma < 1$, entonces únicamente puede darse que:

$$(\delta + \alpha) (\delta\alpha - 3\gamma + 2) + (\gamma - 1) 2\alpha \leq 0$$

es decir, cuando $\gamma \geq \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$, $\gamma < 1$.

Puesto que en $\gamma = \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$ dos raíces de la ecuación característica tienen parte real nula, entonces cuando $\frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2) < \gamma < 1$ éstas raíces tienen parte real positiva y por tanto P_1 es inestable.

Además, como en $0 < \gamma < \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$, P_1 es un punto de equilibrio asintóticamente estable y en $\frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2) < \gamma < 1$, P_1 es un punto de equilibrio inestable, entonces, la superficie $\gamma = \frac{\delta}{3\delta + \alpha} (\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$ es una superficie de bifurcación.

2.4. EL COLAPSO DE LOS PUNTOS DE EQUILIBRIO

En el teorema [13] hemos demostrado que cuando $\gamma = 1$ el origen P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico que es asintóticamente estable y adicionalmente observamos que en el valor $\gamma = 1$ los puntos de equilibrio P_1 y P_2 desaparecen y únicamente existe P_0 .

A través del análisis de estabilidad de estos puntos de equilibrio hemos también demostrado que el sistema de Holmes tiene en el espacio (α, δ, γ) como superficie de

bifurcación a

$$\gamma = 1, \quad \gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1), \quad \gamma = \frac{\delta}{3\delta + \alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha + 2) \quad \text{para } 0 < \gamma < 1.$$

Obsérvese que las dos últimas superficies se intersectan cuando

$$\frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1) = \frac{\delta}{3\delta + \alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha + 2)$$

es decir cuando $\alpha\delta = 1$.

Lo que nos dice que las superficies de bifurcación se cortan sobre la curva $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ en cuyo caso el polinomio característico de la matriz jacobiana en P_0 (ó P_1, P_2) es

$$P_0(\lambda) = P_{1,2}(\lambda) = \lambda^2 \left(\lambda + \frac{1 + \alpha^2}{\alpha} \right)$$

y por tanto $P_0(\lambda)$ posee como valor propio doble a $\lambda = 0$ y el tercer valor propio es negativo con $\lambda = -\frac{1 + \alpha^2}{\alpha}$ y así nuevamente P_0 es un punto de equilibrio no hiperbólico. ¿Cómo es la estabilidad del punto de equilibrio en estas condiciones?.

Tratamos esto a continuación.

Conjetura: Si $\gamma = 1$ y $\delta = \frac{1}{\alpha}$ el origen P_0 es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Demostración Parcial: la matriz jacobiana alrededor del origen es

$$J(P_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\alpha} & -1 \\ \alpha & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

la cual tiene como valores propios $\lambda_1 = 0$, doble y $\lambda_2 = -\frac{1 + \alpha^2}{\alpha}$.

Puesto que el punto de equilibrio en el origen es no hiperbólico la teoría lineal y el teorema de Hartman-Grobman no permiten decidir acerca de su estabilidad y por

ello debe recurrirse a la teoría sobre la variedad central. Para esto en primer lugar se debe separar el flujo del sistema en su parte central y su parte estable para lo cual se requiere hallar una matriz P no singular que reduzca a $J(P_0)$ a su forma normal real.

Puesto que la matriz $J(P_0)$ no es diagonalizable, la matriz P estaría conformada de manera tal que sus columnas sean vectores propios generalizados de $J(P_0)$, los cuales calculamos a continuación.

El espacio propio asociado a $\lambda_2 = -\frac{1+\alpha^2}{\alpha}$ es

$$\begin{aligned} E(\lambda_2, 1) &= E(J(P_0), \lambda_2) = \{X \in \mathbb{R}^3 : (J(P_0) - \lambda_2 I) X = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) : -\frac{1+\alpha^2}{\alpha}x + y = 0, x + \alpha y = 0, \alpha x + \frac{z}{\alpha} = 0 \right\} \\ &= \left\langle \left(1, -\frac{1+\alpha^2}{\alpha}, -\alpha^2 \right) \right\rangle \end{aligned}$$

El primer espacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es:

$$\begin{aligned} E(\lambda_1, 1) &= E(J(P_0), \lambda_1) = \{X \in \mathbb{R}^3 : (J(P_0) - \lambda_1 I) X = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) : y = 0, x - \frac{y}{\alpha}, \alpha x - \alpha z = 0 \right\} \\ &= \{(x, y, z) : y = 0, x = z\} \\ &= \langle (1, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

El segundo espacio propio asociado a $\lambda_1 = 0$ es:

$$\begin{aligned} E(\lambda_1, 2) &= E(J(P_0), \lambda_1) = \{X \in \mathbb{R}^3 : (J(P_0) - \lambda_1 I)^2 X = 0\} \\ &= \left\{ (x, y, z) : x = \frac{y}{\alpha} + z \right\} \\ &= \langle (1, 0, 1), (1, \alpha, 0) \rangle \end{aligned}$$

consecuentemente un vector que está en $E(\lambda_1, 2)$ pero no está en $E(\lambda_1, 1)$ es

claramente $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$.

Un vector que está en el espacio complementario de $E(\lambda_1, 2)$ - $E(\lambda_1, 1)$ respecto de

$$\mathbb{R}^3 - E(\lambda_2, 1) \text{ es } u_2 = (J(P_0) - \lambda_2 I) \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

Un vector que está en $E(\lambda_2, 1)$ es $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \\ -\alpha^2 \end{pmatrix}$ y estos vectores conforman la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \\ 0 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix}$$

que reduce la matriz $J(P_0)$ a su forma normal real de Jordan

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \end{pmatrix}$$

y por tanto el cambio de coordenadas

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 0 & -\frac{1+\alpha^2}{\alpha} \\ 0 & \alpha & -\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{aligned}
x' &= u + \alpha v + w \\
y' &= \alpha u - \frac{w(1 + \alpha^2)}{\alpha} \\
z' &= \alpha v - \alpha^2 w
\end{aligned}$$

permite reducir el sistema de Holmes a la forma:

$$\begin{aligned}
u' &= \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)} (\alpha u + v + w)^3 \\
v' &= u + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} (\alpha u + v + w)^3 \\
w' &= -\frac{1 + \alpha^2}{\alpha} w + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)^2} (\alpha u + v + w)^3
\end{aligned}$$

Por el teorema [8, cap. I], este sistema posee una variedad central que localmente puede representarse como:

$$\begin{aligned}
W^c(0) &= \left\{ (u, v, w) / w = h(u, v), \sqrt{u^2 + v^2} < \delta, \right. \\
&\quad \left. h(0, 0) = 0, \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = 0, \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = 0 \right\}
\end{aligned}$$

para δ suficientemente pequeño.

Las condiciones $h(0, 0) = 0, \frac{\partial h}{\partial u}(0, 0) = 0, \frac{\partial h}{\partial v}(0, 0) = 0$ implican que la variedad central $W^c(0)$ es tangente al espacio central E^c en el punto $(u, v) = (0, 0)$ y el sistema reducido a la variedad central está dado por:

$$\begin{aligned}
u' &= -\frac{\alpha}{\alpha^2 + 1} (\alpha u + v + h(u, v))^3 \\
v' &= u + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} (\alpha u + v + h(u, v))^3
\end{aligned}$$

sistema para el cual debemos calcular la función h .

Por el teorema [10] y los resultados de la sección [1.3.2] podemos tomar:

$$h(u, v) = a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3 + \dots$$

donde $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ son constantes reales que se deben determinar.

Utilizando la expresión (9) de la sección [1.3.2] se obtiene:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha(u + \alpha v + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3 + \dots)^3}{(\alpha^2 + 1)} \\ & (2a_1 u + a_2 v + 3a_4 u^2 + 2a_5 uv + a_6 v^2 + \dots) + \\ & u(a_2 u + 2a_3 v + a_5 u^2 + 2a_6 uv + 3a_7 v^2 + \dots) + \\ & \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} (u + \alpha v + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3 + \dots)^3 \\ & (a_2 u + 2a_3 v + a_5 u^2 + 2a_6 uv + 3a_7 v^2 + \dots) + \\ & \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \left(a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3 + \dots \right) - \\ & \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)^2} (u + \alpha v + a_1 u^2 + a_2 uv + a_3 v^2 + a_4 u^3 + a_5 u^2 v + a_6 uv^2 + a_7 v^3 + \dots)^3 = 0. \end{aligned}$$

Realizando los cálculos correspondientes, agrupando los términos semejantes e igualando a cero los coeficientes de las diferentes potencias de u y v se obtiene:

$$\begin{aligned} u^2 : a_2 + a_1 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} &= 0 \\ uv : 2a_3 + a_2 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} &= 0 \\ v^2 : a_3 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} &= 0 \\ u^3 : a_5 + a_4 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} + \frac{\alpha}{(\alpha^2 + 1)^2} &= 0 \\ u^2 v : 2a_6 + a_5 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} - \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} &= 0 \\ uv^2 : 3a_7 + a_6 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} - \frac{\alpha^3}{(\alpha^2 + 1)^2} &= 0 \\ v^3 : a_7 \frac{(\alpha^2 + 1)}{\alpha} - \frac{\alpha^4}{(\alpha^2 + 1)^2} &= 0 \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 & a_5 &= \frac{\alpha^3(5\alpha^4 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^5} \\ a_2 &= 0 & a_6 &= \frac{\alpha^4(1 - 2\alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^4} \\ a_3 &= 0 & a_7 &= \frac{\alpha^5}{(\alpha^2 + 1)^3} \\ a_4 &= \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^6} \end{aligned}$$

así, la función h es

$$h(u, v) = \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^6} u^3 + \frac{\alpha^3(5\alpha^4 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^5} u^2 v \\ + \frac{\alpha^4(1 - 2\alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^4} uv^2 + \frac{\alpha^5}{(\alpha^2 + 1)^3} v^3 + \dots$$

luego, el flujo del sistema reducido a la variedad central está determinado por:

$$u' = \frac{-\alpha}{(\alpha^2 + 1)} \left(u + \alpha v + \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^6} u^3 + \frac{\alpha^3(5\alpha^4 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^5} u^2 v \\ + \frac{\alpha^4(1 - 2\alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^4} uv^2 + \frac{\alpha^5}{(\alpha^2 + 1)^3} v^3 + \dots \right)^3 \\ v' = u + \frac{\alpha^2}{(\alpha^2 + 1)^2} \left(u + \alpha v + \frac{\alpha^2(3\alpha^4 + 2\alpha^2 - 4\alpha^6 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^6} u^3 + \frac{\alpha^3(5\alpha^4 + 1)}{(\alpha^2 + 1)^5} u^2 v \\ + \frac{\alpha^4(1 - 2\alpha^2)}{(1 + \alpha^2)^4} uv^2 + \frac{\alpha^5}{(\alpha^2 + 1)^3} v^3 + \dots \right)^3$$

en el cual despreciando las potencias superiores a 3 se obtiene:

$$u' = \frac{-\alpha}{(1 + \alpha^2)} (u + \alpha v)^3 + \mathcal{O}((u, v)^4) \\ v' = u + \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha^2)^2} (u + \alpha v)^3 + \mathcal{O}((u, v)^4)$$

sistema para el cual debemos determinar la estabilidad del punto $(0, 0)$.

La solución explícita de este problema requiere la utilización de la teoría de las formas normales, que por el momento está fuera de los alcances académicos de este trabajo, sin embargo, las simulaciones numéricas realizadas con el sistema de Holmes (Anexos, fig 2.9) y con el sistema reducido sobre la variedad central (Anexos, fig 2.8) sugieren que el punto de equilibrio es asintóticamente estable.

CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó una sistematización acerca de algunos resultados relacionados con propiedades locales de un sistema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias propuesto en [5] como modelo para un oscilador no lineal con control.

El desarrollo del mismo requirió un estudio detallado de algunas temáticas en áreas de la matemática relacionados entre sí, tales como: La Teoría de Control, La teoría Cualitativa de las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Algebra Lineal. En particular, en la teoría de control se estudiaron los conceptos de control de ciclo abierto y control de ciclo cerrado; en ecuaciones diferenciales los criterios de estabilidad en base a la linealización y la teoría de la variedad central y en álgebra lineal, la forma normal de una matriz y el cálculo de los vectores propios generalizados.

Explícitamente el trabajo consistió en estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio y la ocurrencia de bifurcaciones en el sistema

$$\begin{aligned}x'' + \delta x' + g(x) &= -z \\ z' + \alpha z &= \alpha \gamma x\end{aligned}$$

al variar en los números reales el parámetro positivo γ .

Los resultados más relevantes en este sentido fueron:

- En el intervalo $(0, \frac{\delta}{3\delta+\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2))$ el sistema posee una fuente y dos sumideros, pero en el intervalo $(\frac{\delta}{3\delta+\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2), 1)$ éstos dos últimos pierden estabilidad. Para $\gamma = \frac{\delta}{3\delta+\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$ la linealización alrededor de $P_1 = (\sqrt{1-\gamma}, 0, \gamma\sqrt{1-\gamma})$ posee dos valores propios imaginarios puros y esto complementado con simulaciones numéricas sugiere que la bifurcación que ocurre para este valor γ es una bifurcación de Hopf, es decir en $\gamma = \frac{\delta}{3\delta+\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$ los puntos de equilibrio P_1 y P_2 pierden estabilidad y aparecen órbitas cerradas.
- En el rango $(1, \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1))$ el origen es un sumidero y en el intervalo $(\frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1), +\infty)$ es una fuente y puesto que nuevamente cuando $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$ la linealización en el origen posee dos valores propios imaginarios puros es posible la existencia de otra bifurcación Hopf.
- Cuando $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ los tres puntos de equilibrio coinciden en el origen, este punto es no hiperbólico y simulaciones numéricas sugieren que es asintóticamente estable, adicionalmente, que existen órbitas homoclínicas, es decir, trayectorias que tienden al origen hacia adelante y hacia atrás en el tiempo.

Entre los aspectos que no se trataron en el trabajo y que merecen mencionarse pueden citarse los siguientes:

- La clasificación de la estabilidad del origen cuando $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \delta\alpha - 1)$. Esta, podría realizarse utilizando la teoría sobre la variedad central pero los cálculos necesarios para ello pueden ser dispendiosos. Estudios numéricos, (Anexos, fig. 2.7). sugieren que el origen en este caso es asintóticamente estable.

- La clasificación de las bifurcaciones que ocurren en los puntos de equilibrio. Para este caso, las simulaciones numéricas sugieren la aparición de órbitas homoclínicas y bifurcaciones Hopf.
- El estudio de la teoría cualitativa de las ecuaciones diferenciales ordinarias para analizar en el sistema la existencia de otros conjuntos invariantes tales como órbitas cerradas o atractores extraños.

ANEXOS

En esta sección se presentan gráficas correspondientes a simulaciones numéricas que muestran el comportamiento del sistema de Holmes localmente en sus puntos críticos al variar en los reales positivos el parámetro γ .

1. Estabilidad del punto de equilibrio $P_0 = (0, 0, 0)$
 - En el intervalo $(0, 1)$ el origen es inestable.

Figura 2.1: Simulación numérica cuando $\gamma = 0.7$, $\alpha = 0.5$ y $\delta = 0.2$

- En el intervalo $(1, \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1))$ el origen es asintóticamente estable.

Figura 2.2: Simulación numérica cuando $\gamma = 2.5$, $\alpha = 1.5$ y $\delta = 1.5$

- En el intervalo $(\frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1), +\infty)$ el origen es inestable.

Figura 2.3: simulación numérica cuando $\gamma = 4.8$, $\alpha = 1.5$ y $\delta = 1.5$

2. Estabilidad de los puntos $P_{1,2} = (\pm\sqrt{1-\gamma}, 0, \pm\gamma\sqrt{1-\gamma})$.
- En el intervalo $(0, \frac{\delta}{3\delta+\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2))$ los puntos de equilibrio son asintóticamente estables.

Figura 2.4: simulaciones numéricas cuando $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.5$ y $\delta = 0.3$

- En el intervalo $(\frac{\delta}{3\delta+\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta + 2), 1)$ los puntos de equilibrio son inestables.

Figura 2.5: simulaciones numéricas cuando $\gamma = 0.7$, $\alpha = 0.2$ y $\delta = 0.6$,

3. Estabilidad de los equilibrios en los puntos de bifurcación.

- Para $\gamma = 1$, se tomó $\alpha = 2$ y $\delta = 1$ y se concluyó que el origen es asintóticamente estable.

Figura 2.6: simulaciones numéricas en el valor de bifurcación $\gamma = 1$

- Para $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$ se tomó $\alpha = 1.5$ y $\delta = 1.3$, para los cuales $\gamma = 2,548$. La simulación sugiere que el origen es asintóticamente estable.

Figura 2.7: simulaciones numéricas en el valor de bifurcación $\gamma = \frac{\delta}{\alpha}(\alpha^2 + \alpha\delta - 1)$

- Cuando $\gamma = 1$, $\delta = \frac{1}{\alpha}$ se tomó $\alpha = 0,5$ tanto en el sistema reducido a la variedad central (fig. 2.8) como en el sistema tres dimensional (fig. 2.9). Las simulaciones sugieren que el origen es asintóticamente estable

Figura 2.8: simulaciones numéricas del sistema reducido a la variedad central

Figura 2.9: simulaciones numéricas cuando $\gamma = 1$ y $\delta = \frac{1}{\alpha}$

SIMULACIONES 3D

- Para $\gamma = \frac{\delta}{3\delta+\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$, se tomó $\alpha = 0.5$ y $\delta = 0.3$, para los cuales $\gamma = 0.5142857$. La simulación sugiere que $P_{1,2}$ son inestables.

Figura 2.10: simulaciones numéricas en el valor de bifurcación $\gamma = \frac{\delta}{3\delta+\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta + 2)$

- En el intervalo $(0, \frac{\delta}{3\delta+\alpha} (\alpha^2 + \alpha\delta + 2))$ los puntos de equilibrio son asintóticamente estables.

Figura 2.11: simulaciones numéricas cuando $\gamma = 0.2$, $\alpha = 0.5$ y $\delta = 0.3$

Bibliografía

- [1] CARR, J. Applications of centre manifold theory. Springer Verlag, New York. 1981
- [2] DE GUZMAN M. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Teoría de Estabilidad y Control. Editorial Alhambra. Madrid. 1980
- [3] HIRSCH, M.W and Smale, S. Ecuaciones Diferenciales, Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal. Alianza Universidad. Madrid. 1983
- [4] HOLMES, P.J. *Dynamics of a Nonlinear oscillator with Feedback Control: Local Analysis*, Department of Teorical and Applied Mechanics and Center for Applied Mathematics, Cornell University, Vol. 107, june 1985, Ithaca, N.Y.
- [5] WIGGINS, S. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer Verlag. New York. 1990.