Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad

Fabio Andrés Vallejo

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas
Programa de Licenciatura en Matemáticas
San Juan de Pasto

2008

Clases de Baire y el concepto de semicontinuidad

Fabio Andrés Vallejo

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Andrés Chaves
Director

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
Programa de Licenciatura en Matemáticas
San Juan de Pasto
2008

Nota de Aceptación

Director.

Jurado.

Jurado.

San Juan de Pasto, Julio de 2008

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Andrés por su constante motivación y apoyo en este trabajo de grado.
A la profesora Claudia Gómez por su valiosa colaboración.
A mis padres por su gran apoyo y a **Dios** por hacer todo esto posible.

FABIO ANDRÉS VALLEJO

Universidad de Nariño
Julio 2008

CONTENIDO

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMEN

En este trabajo de grado, se abordan algunos aspectos de corte epistemológico e historiográfico sobre el surgimiento del concepto de semicontinuidad y su relación con los trabajos del matemático francés René Baire en torno a las funciones discontinuas, durante el periodo de 1821 a 1905. Históricamente, se considera que los estudios adelantados por Baire sobre funciones discontinuas fueron determinantes en la consolidación de la teoría de funciones como campo significativo de las matemáticas. En este sentido se hace un recorrido historiográfico sobre el concepto de función, teniendo en cuenta los aportes de Euler y Cauchy a dicho concepto y además se presenta el papel que desempeñaron algunos resultados de Cauchy en los estudios adelantados por Baire. Posteriormente se hace un estudio epistemológico del concepto de semicontinuidad para después estudiar su importancia en el teorema central de la tesis doctoral de Baire. Por último, se exhibe la construcción de una función de variable real "exótica", con el fin de mostrar que a pesar de que el conjunto de las funciones discontinuas es más amplio que el de las continuas, estas últimas constituyen un gran campo de estudio.

ABSTRACT

In this thesis of grade we approach some aspects epistemological and historiographical on the emergence of the concept of semicontinuity and their relationship with René Baire's works about the discontinuous functions, this from 1821 to 1905. Historically, the Baire's studies about the discontinuous functions were decisive in the consolidation of the theory of functions how branch important of the mathematical. In this sense, we develop a historiographical tour on the concept of function, taking account the Euler and Cauchys' inputs and also we present the paper that the Cauchy's works worried in the Baire's studies. Later, we elaborate a study epistemological of concept of semicontinuity, later to study the importance it in the theorem central of Baire's thesis. Finally, we exhibit the construction of a function of real variable "exotic" with the objective of to show what weigh the group the discontinuous functions is most wide than the set of continuous, this last set is a great countryside of study.

INTRODUCCIÓN

El objeto central de este trabajo se enmarca en la perspectiva general de analizar y dar cuenta de algunos procesos históricos que condujeron al surgimiento de la teoría de funciones como rama consolidada de las matemáticas.

El afianzamiento de la teoría de funciones como campo significativo de las matemáticas, tiene su génesis en el estudio de las funciones continuas, las cuales, históricamente, han sido útiles en distintos campos científicos. Sin embargo, a finales del siglo XIX ya se indagaba sobre la importancia de los estudios sobre funciones discontinuas. En tal época, dos grandes comunidades matemáticas se destacaban: la escuela alemana, cuyos estudios en teoría de funciones se veían motivados por las funciones con alto grado de discontinuidad, y la escuela francesa que consideraba a estos estudios como infructuosos e innecesarios. Los franceses consideraban que el estudio de las funciones continuas, en al menos un intervalo de su dominio, no sólo era interesante sino necesario, mientras que las funciones con alto grado de discontinuidad eran desechadas y consideradas como monstruosidades.

A partir de lo anterior se puede entender la importancia de los estudios de René Baire, puesto que él, un matemático de la escuela francesa, evidenciaría la importancia de las funciones discontinuas incorporando la emergente teoría de conjuntos de Cantor y la convergencia de funciones continuas, siendo este último uno de los conceptos más relevantes del siglo XIX. Por otra parte, es importante resaltar el papel que desempeña el concepto de semicontinuidad en la teoría de funciones de Baire, en el sentido de que los resultados centrales de ésta se sustentan en este concepto.

Lo anteriormente denotado se desarrolla en cuatro capítulos, que se describen a continuación:
En el primer capítulo se exhibe un recorrido historiográfico de los eventos más importantes que determinaron el surgimiento de los estudios de René Baire. Dicho recorrido abarca las concepciones de función de Euler y va hasta la formulación de la conjetura de Baire. Inicialmente, se presenta la noción de función en Euler, que pasa por la concepción de función como expresión analítica, luego, se presenta la noción de función continua de Cauchy y se enuncian los falsos teoremas que el formuló en su *Curso de Análisis* de 1821. Seguidamente, se muestran las consecuencias que tuvo el llamado primer falso teorema de Cauchy en el surgimiento del principal resultado de la obra de Baire que se denominará **T1**. Posteriormente se detallan los principales interrogantes que condujeron a la formulación de las *Clases de Baire* y a continuación se muestran los resultados más importantes que Baire formuló en torno a su clasificación de funciones. Por último se enuncia en que consiste la *conjetura de Baire*.

En el segundo capítulo se aborda el surgimiento y la caracterización del concepto de semicontinuidad, para lo cual se ha tomado como referencia el artículo *El concepto de semicontinuidad de Baire en las investigaciones de Fréchet* (Luis Arboleda, Luis Recalde). Este concepto se consolidó gracias a los estudios adelantados por Baire en torno al segundo teorema falso de Cauchy. En este sentido, se exhiben algunos contraejemplos a este teorema y se detalla el procedimiento que condujo a Baire a identificar una propiedad de las funciones de variable real, que llamó semicontinuidad. A continuación, se definen funciones semicontinuas superiormente e inferiormente y se enuncia la relación entre la continuidad y la semicontinuidad. En aras de extender el concepto de semicontinuidad a funciones de varias variables, se incorporan las nociones de máximo y mínimo, que a su vez, permiten instaurar el concepto de oscilación de una función en un punto.

En el tercer capítulo, se presenta la demostración de las condiciones necesarias y el planteamiento de la suficiencia del teorema central de la obra de Baire, correspondiente a funciones discontinuas que son límite de series de funciones continuas. Para llevar a cabo esta demostración se resalta la importancia de los conceptos de semicontinuidad y de oscilación extendidos a funciones de varias variables, los cuales serán la guía de Baire para proponer un método de abordar la demostración de la validez de su conjetura. Para este capítulo, que es de orden estrictamente técnico, se ha tomado la tesis doctoral de Luis Recalde[1] como principal referencia. En general a las demostraciones del texto referenciado se ha incorporado una transposición con el objetivo de esclarecer algunos aspectos que el autor omite, incluso las demostraciones de los teoremas 2.8 y 3.2 son fruto de este trabajo de grado.

El cuarto capítulo se ha dedicado a la construcción de una función continua "exótica". Se presenta con el objetivo de mostrar que aun en el primer nivel de la clasificación de funciones de Baire que corresponden a las funciones continuas, hay un gran campo de estudio.

Finalmente, el capítulo cinco, se presenta a manera de conclusiones y/o reflexiones de lo elaborado en los capítulos anteriores. Se plantea primero unas conclusiones técnicas de la presentación de la semicontinuidad y de la demostración del teorema **T1**, luego una conclusión histórica en la que se involucra la concepción de función representable analíticamente, que está intrínsecamente ligada a los trabajos de Baire, finalmente se presenta los esbozos de una postura de lo que debe ser el estudio de la historia de las matemáticas respecto al error y finalmente una conclusión elaborada en base al enorme campo de estudio de la teoría de funciones y en particular en el caso de las funciones continuas para lo cual se enfatiza en la función construida en el capítulo 4.

[1] *"La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas"* 2003.

1. RECORRIDO HISTÓRICO

El concepto de semicontinuidad surgió en medio de los esfuerzos de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII por tratar de caracterizar la continuidad, o más específicamente el concepto de función continua.

La discusión en torno al concepto de función continua fué abordado por grandes matemáticos como Lagrange, Weirstrass y Cauchy; los cuales no dedicaban mayores esfuerzos al estudio de las funciones con alto grado de discontinuidad. Sin embargo, en esta instancia lo que interesa es detectar los eventos históricos claves para consolidar lo discontinuo como objeto matemático,[1] esto con el fin de ubicar el concepto que movilizó a Baire a desarrollar su teoría de funciones discontinuas. Para este fin se realiza un breve recorrido historiográfico en donde se considera el concepto de función y el de función continua, haciendo especial énfasis en el trabajo de Cauchy.

1.1. SURGIMIENTO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

En los siglos XVI, XVII y XVIII los matemáticos se esforzaban para tratar de caracterizar un concepto en proceso de surgimiento (el concepto de función). Aspectos como el estudio de curvas geométricas por los griegos, el auge de la algebrización de las matemáticas por Descartes y el estudio del movimiento por Newton, evidenciaban la presencia de un concepto que demandaba un tratamiento especial y una categoría de objeto matemático.

Más específicamente, fue con Euler y Cauchy que se dieron los intentos más importantes de caracterizar el concepto de función como un objeto matemático con su respectiva representación simbólica y significado.

1.1.1. Función en Euler. Antes de Euler, la noción que se tenía de función era de una cantidad que se obtenía a partir de otras, a través de operaciones algebraicas o cualquier otra operación. Sin embargo en el estudio de las curvas trascendentes surgían nuevos problemas, en donde el álgebra se mostraba insuficiente para tratarlos, en este sentido Euler define función de una cantidad variable como una representación analitica[2] compuesta. En consecuencia, las funciones que en aquella época se creía, no tenían una representación analítica, no se aceptaban como tales, por ejemplo:

[1] Relacionándolo con el estudio de las funciones con alto grado de discontinuidad, a las cuales Cauchy (especialmente) no hacía mucha referencia.

[2] Una expresión analítica es una fórmula constituida a partir de las operaciones elementales de la aritmética, la composición de funciones, las series y los productos infinitos (Recalde, 2003, pág 6).

$$g_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 4x & \text{si } x \in [0, \infty) \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & \text{si } x \in (-\infty, -2] \\ x & \text{si } x \in (-2, 2) \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Cuyas gráficas se presentan en las figuras 1.1.1 y 1.1.2 respectivamente.

Figura 1.1.1

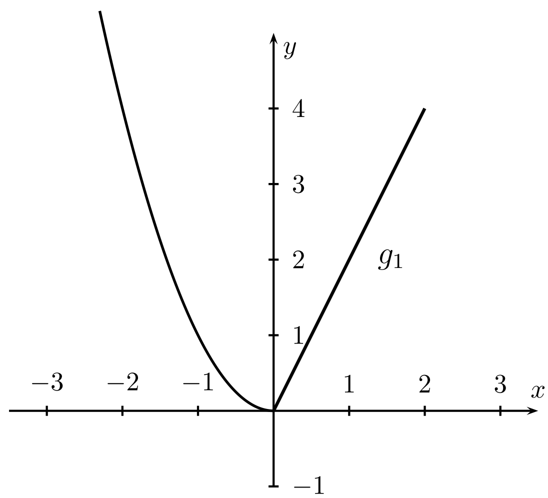
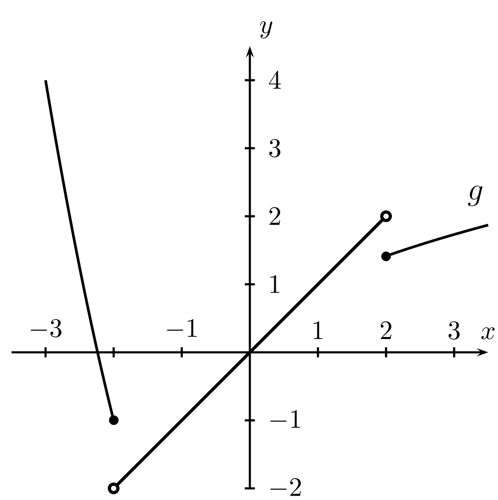


Figura 1.1.2

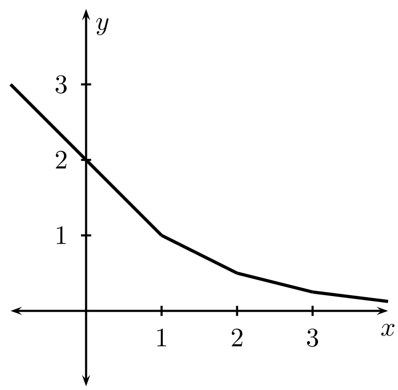


Cuando Euler estudia el llamado problema de la cuerda vibrante, las conclusiones que obtiene lo obligan a considerar el concepto de función como una dependencia cualquiera de una cantidad respecto a las cantidades variables. Esta nueva concepción de función lo condujo a una clasificación de funciones: por un lado estaban aquellas funciones que se podían representar analíticamente, a este grupo de funciones Euler las llamo continuas y por otro lado estaban las funciones discontinuas las cuales no podían representarse analíticamente, como por ejemplo las funciones a trozos y aquellas funciones que corresponden a curvas hechas arbitrariamente (curvas hechas a mano libre). En este sentido una función es continua si se puede representar analíticamente, independiente de cómo sea la curva que dicha función representa, por lo anterior, muchas funciones que actualmente se consideran continuas serán discontinuas de acuerdo a la noción de continuidad de Euler, como ejemplo:

$$h(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2^n} + \frac{n+2}{2^n} & \text{si } x \in (n, n+1] \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+ \\ -x+2 & \text{si } x \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

Cuya gráfica se muestra en la figura 1.1.3.
Sin embargo el carácter arbitrario de las soluciones al problema de la cuerda vibrante hacia pensar en otro tipo de funciones discontinuas, además de las ya definidas por Euler[3].

Figura 1.1.3



Lo anteriormente expuesto muestra un claro intento de caracterizar las funciones continuas y discontinuas. Sin embargo fué con las investigaciones de Fourier, sobre la conducción del calor, que se empezó a abordar un tratamiento específico de las funciones discontinuas, en dichas investigaciones, Fourier obtiene funciones que tienen la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nx) + b_n sin(nx)$$

a $\mathbb{R}$ como el dominio de f, ésta no será necesariamente continua, sin embargo Fourier unía los puntos en donde la función es actualmente discontinua de tal manera que gráficamente la función se pudiera representar por un solo trazo, no obstante Lagrange consideraba errada esta forma de proceder de Fourier. Este hecho es históricamente importante, pues muestra el surgimiento de lo discontinuo en medio de un escenario en donde lo continuo era el principal centro de discusión, además, se evidencia la tendencia de los matemáticos de la época por el estudio de las funciones continuas.

1.1.2. Función en Cauchy. En medio de esta discusión sobre lo continuo y discontinuo, es Cauchy quien logra dar una salida al problema de la caracterización

[3]como se puede referenciar en el texto *"La teoría de funciones de Baire: La constitución de lo discontinuo como objeto matemático"* en el apartado 1.1.

de las funciones continuas y discontinuas en su *Curso de Análisis* de 1821.

En su búsqueda por obtener el mayor rigor posible, Cauchy define conceptos como: cantidad, cantidad variable y límite. De acuerdo a éstos, Cauchy amplía la definición de función de Euler, incorporando la siguiente definición:

> “Cuando las cantidades variables están de tal modo relacionadas entre sí que, dado el valor de una de ellas, es posible concluir los valores de todas las demás, expresamos ordinariamente diversas cantidades por medio de una de ellas, la cual toma entonces el nombre de variable independiente, y a las otras cantidades expresadas por medio de la variable las llamamos funciones de esta variable.”(Recalde, 2004, pág 15).

Esta definición es más amplia que la definición de Euler en el sentido de que abarca otro tipo de funciones que no caben en la concepción de Euler, como por ejemplo: las sucesiones. Después de definir función, ahora es primordial para Cauchy caracterizar las funciones continuas con el fin de diferenciar lo continuo de lo discontinuo, para lo cual incorpora la definición de función continua:

> “La función $f(x)$ será, entre los dos límites asignados a la variable x, una función continua de esta variable si, para cada valor de x entre esos límites, el valor numérico de la diferencia $f(x+a)-f(x)$ decrece indefinidamente con a. En otras palabras, la función $f(x)$ será continua entre dos límites, si un incremento infinitamente pequeño de la variable siempre produce un incremento infinitamente pequeño de la función misma.”[4]
> (Chaves, 2006, pág 5).

Para Cauchy es de gran importancia esta última definición, a tal punto que su obra *Course de Analysis* se centra exclusivamente en el estudio de las funciones continuas, dejando de un lado las funciones discontinuas. La tendencia de Cauchy hacia el estudio de las funciones continuas, probablemente se veía estimulada, por el hecho de que las funciones que modelan los fenómenos naturales son continuas. Lo cierto es que las funciones discontinuas fueron condenadas al ostracismo por parte de los matemáticos franceses de principios del siglo XIX. Es importante notar que esta tendencia hacia el estudio de las funciones continuas no sólo estaba presente en Cauchy sino también en gran parte de los matemáticos franceses.

[4]Una función $f(x)$ que toma valores finitos para todo x entre a y b, es continua entre estos dos límites si el valor absoluto de $f(x+\alpha)-f(x)$ “disminuye indefinidamente” con el de α.(Chaves, 2006, pág 5).

Esta definición de continuidad es local, a diferencia de la noción actual de continuidad, dada por Weierstrass con epsilon y delta, que define continuidad para un punto y luego dice que una función es continua en su dominio si es continua en cada punto de su dominio.

Lo continuo estuvo tan arraigado en la mente de Cauchy que lo llevó a formular y a probar dos famosos teoremas conocidos como "teoremas falsos de Cauchy".

1.2. LOS FALSOS TEOREMAS DE CAUCHY

1.2.1. Primer teorema falso de Cauchy. El primer teorema falso surge en estudios referentes a series de funciones continuas. En su obra mencionada anteriormente Cauchy formula el siguiente resultado:

Teorema: *Cuando los diferentes términos de la serie $u_0, u_1, u_3, ..., u_n, ...$ son funciones de una misma variable x, continuas con respecto a esta variable en la vecindad de un valor particular para la cual la serie es convergente, la suma S de la serie es también, en la vecindad de este valor particular, una función continua de x.*[5]

Que concretamente quiere decir:

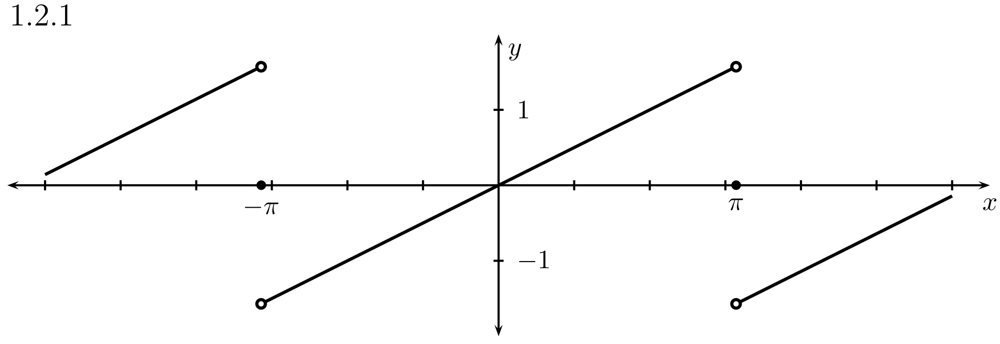
Teorema 1.1 *Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge, y cada cada f_n es continua entonces la función límite es continua.*

Sin embargo, en los trabajos de Fourier, se conocía la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

que converge a la función $f(x) = \frac{1}{2}x$, para $x \in (-\pi, \pi)$ y $f(\pi) = 0$. Ampliando el dominio, la función es periódica, de periodo 2π y discontinua en los puntos $(2n-1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. La gráfica se muestra en la figura 1.2.1.

Figura 1.2.1



Otros contraejemplos no necesariamente provienen de los trabajos de Fourier, por ejemplo: sea

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{-x^2}{(nx^2+1)((n-1)x^2+1)}$$

[5]RECALDE, Luis. (2004) *La teoría de funciones de Baire: La constitución de los discontinuo como objeto matemático.*

en la figura 1.2.2, se presentan las gráficas de la serie para el primer término, para los primeros diez, para los cincuenta primeros y para los quinientos primeros téminos. La serie es convergente y además se cumple que:

$$f_n(x) = \frac{-x^2}{(nx^2+1)((n-1)x^2+1)} \quad \text{es continua para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

por tanto, de acuerdo al teorema 1.1 la serie debe converger a una función continua, no obstante converge a la función:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

que es una función discontinua, en $x = 0$. La gráfica se muestra en la figura 1.2.3. Se tiene entonces un contraejemplo al teorema 1.1.

Figura 1.2.2

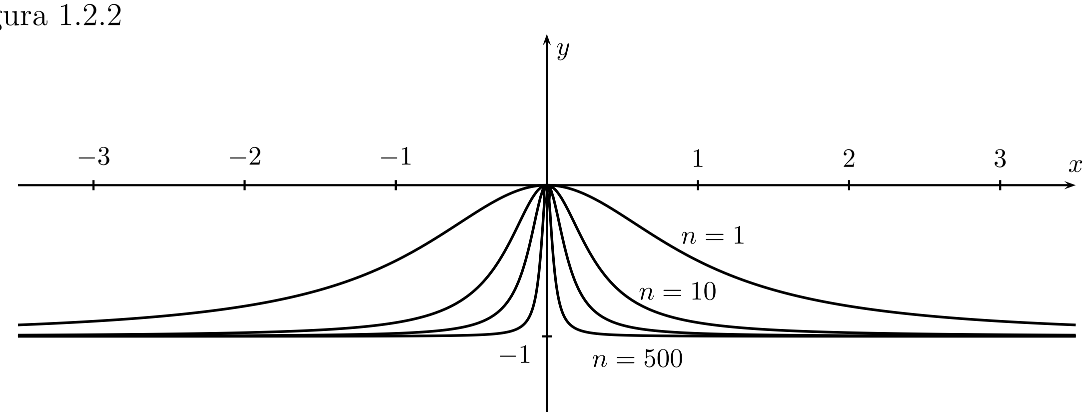
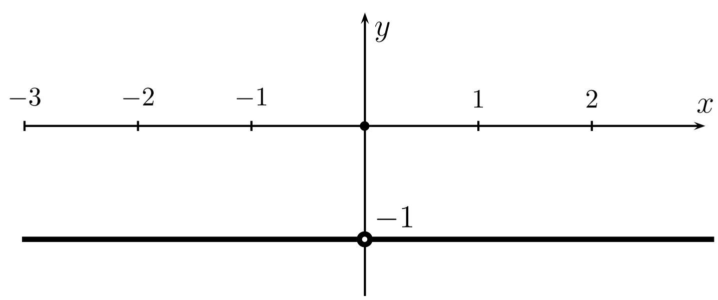


Figura 1.2.3



Debido a éste y a otros contraejemplos detectados, el teorema 1.1 fué conocido como *primer teorema falso de Cauchy*.

El *primer teorema falso de Cauchy* fue el centro de interés de muchos matemáticos franceses de la época, quienes bajo su tendencia por lo continuo, trataban de establecer las condiciones para que una serie convergente de funciones continuas fuese también una función continua [6], así como también detectar el error que Cauchy cometió en la

[6]Es decir establecer las condiciones bajo las cuales el primer teorema falso es valido.

demostración del teorema. De la discusión en torno a este teorema surgió un nuevo tipo de convergencia, además de la convergencia puntual que ya era conocida, se trataba de la convergencia uniforme. Al mismo tiempo se determinó que si a la hipótesis del teorema, se agrega la condición de la convergencia uniforme de la serie, el teorema resulta válido.

1.2.2. Segundo teorema falso de Cauchy. El segundo teorema falso surge en estudios referentes a la continuidad de funciones de varias variables. En su *Course de analysis* Cauchy formula el siguiente resultado:

Teorema 1.2 *Si una función de varias variables $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ es continua en cada una de sus variables $x_1, x_2, ..., x_n$, entonces es continua.*

Baire encuentra contraejemplos como este:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{4xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función, en $(0,0)$ es continua respecto a cada una de las variables x y y, en efecto: si $x \neq 0$ entonces $f(x,0) = \dfrac{4x(0)^2}{x^2+0^4} = 0$,[7] por tanto $f(x,0) = 0$ que es continua en $(0,0)$, es decir, f es continua respecto a x en $(0,0)$.
De forma similar si $y \neq 0$ entonces $f(0,y) = \dfrac{(0)y^2}{0^2+y^4} = 0$, por tanto $f(0,y) = 0$ que es continua en $(0,0)$, es decir, f es continua respecto a y en $(0,0)$.

Sin embargo f es discontinua en tal punto puesto que el límite de f cuando (x,y) tiende a $(0,0)$ no existe.

En resumen, se tiene que en $(0,0)$, f es discontinua pero continua respecto a cada variable x y y. Así mismo puede citarse otros contraejemplos como:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} + x & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En el capítulo 2 se hace énfasis en la forma como Baire aborda este tipo de funciones de dos variables que son contraejemplos al teorema 1.2.

Históricamente, la publicación de los dos teoremas falsos de Cauchy representa un paso fundamental y necesario en la realización de un estudio amplio de las funciones en general, ya que estos enunciados desempeñaron un papel decisivo en la formulación y desarrollo de la teoría de funciones de René Baire la cual fue el punto de partida para

[7] Si $x = 0$, se tiene que $f(x,0) = f(0,0) = 0$.

el surgimiento de la teoría de funciones como campo significativo de las matemáticas.

1.2.3. Consecuencias del primer teorema falso de Cauchy. No todos los matemáticos franceses que se interesaron por el *primer teorema falso de Cauchy* tuvieron el mismo objetivo. En 1897, René Baire lo abordó, pero en sentido contrario al de sus colegas, en contra de la tradición francesa de la búsqueda del continuismo, Baire se preguntó:

> ¿Qué condiciones debe cumplir una función discontinua para poderse expresar como una serie de funciones continuas?

El interés de Baire generó un cambio en la tendencia de los matemáticos franceses respecto a las funciones continuas, pues los trabajos de Baire revelarían la importancia y la vastedad de los estudios sobre funciones discontinuas.

Los esfuerzos de René Baire por responder a esta pregunta, lo condujeron a formular el siguiente teorema:

Teorema 1.3 [8] *Sea* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función discontinua.* f *es el límite de una serie de funciones continuas, si y sólo si es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto*[9].

Al parecer, con este teorema René Baire había dado fin a sus consideraciones de lo discontinuo, sin embargo, otro tipo de funciones motivaron a René Baire a adentrarse aún más en el estudio de las funciones discontinuas. Desde tiempo atrás se conocía la siguiente función incorporada por Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1] \end{cases}$$

Esta función se denomina *función característica de los números racionales* restringida al intervalo $[0,1]$. Obsérvese que f no es puntualmente discontinua ya que es discontinua en todos los puntos de su dominio, en consecuencia, esta función no puede verse como límite de una serie de funciones continuas, sin embargo, lo que hizo que Baire dirigiera su atención hacia esta función fue una propiedad particular que esta posee, y es la siguiente:
Considérese la sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x = \frac{p}{q}, \in \mathbb{Q} \text{ con } (p,q) = 1 \text{ y } q \leq n \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

[8] en adelante se denominará a este teorema como **T1**.

[9] $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es puntualmente discontinua, si para todo $(a,b) \subset I$, existe $c \in (a,b)$ tal que f es continua en c. $P \subset \mathbb{R}$ es perfecto, si $P = P'$, donde P' es el conjunto de puntos de acumulación de P, o derivado de P de acuerdo a la definición dada por Cantor.

donde $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Es fácil demostrar que para cada n, f_n es puntualmente discontinua y que sorprendentemente, la sucesión f_n asi definida converge a la función característica de los racionales, es decir:
para

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{0,1\} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{0,1,\frac{1}{2}\} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \{0,1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$\vdots$$

Se tiene que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}\bigcap[0,1] \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}\bigcap[0,1] \end{cases}$$

En términos de series de funciones, la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se puede ver como una sucesión de sumas parciales, donde: $g_1 \equiv f_1$, $g_2 \equiv f_2 - f_1$, $g_3 \equiv f_3 - f_2$,...,$g_n \equiv f_n - f_{n-1}$,... De esa forma,

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}\bigcap[0,1] \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}\bigcap[0,1] \end{cases}$$

Es decir, la función característica de los racionales, que no es puntualmente discontinua, puede verse como una serie convergente de funciones puntualmente discontinuas. La pregunta que surge de manera natural en analogía con el primer interrogante que Baire se hizo es:

> ¿Qué propiedades particulares tienen las funciones discontinuas que no son puntualmente discontinuas, que hacen que dichas funciones se puedan ver como series convergentes de funciones puntualmente discontinuas?

Este nuevo interrogante y el anterior motivaron en gran parte los trabajos de René Baire pues lo condujeron a establecer una clasificación de funciones en clases, que hoy se conoce como *Clases de Baire*. Esta clasificación de funciones es de suma importancia, pues los trabajos de Baire giran en torno a ella.

1.3. CLASES DE BAIRE

Los interrogantes que Baire había abordado desde 1897 lo llevaron a formular una clasificación de funciones en su tesis doctoral *Sur les Fonctions de variables reélles* del

año 1899. El objetivo central de Baire era utilizar la convergencia puntual para construir, en un proceso iterativo, funciones de clases superiores, o de grado de discontinuidad cada vez más complejo, tomando como base o primer nivel a las funciones continuas. En este sentido incorpora su clasificación de funciones[10]:
C_0 : *Clase* 0, constituida por las funciones continuas.

C_1 : *Clase* 1, conformada por las funciones que no pertenecen a C_0 y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones pertenecientes a C_0.

C_2 : *Clase* 2, conformada por las funciones que no pertenecen ni a C_0 ni a C_1, y que se pueden ver como límite de sucesiones de funciones de C_0 y C_1.
$\vdots$
C_n : *Clase* n, conformada por las funciones que no pertenecen a ninguna clase anterior a C_n, y que se pueden ver como límite de sucesiones de las clases anteriores.
$\vdots$
Baire, no sólo define clases de funciones de orden natural como las que se acaban de definir, ya que, apoyándose en los ordinales trasfinitos de la teoría cantoriana, define las *clases de funciones* de orden trasfinito como se detalla a continuación:

Si $\{f_n\}$ es una sucesión de funciones tal que para todo n, existe i tal que $f_n \in C_i$ y además, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f, donde $f \notin C_i$ para todo i, entonces se tiene que $f \in C_\omega$, donde ω es el primer ordinal trasfinito de la teoría cantoriana. De la misma forma se definen $C_{\omega+1}$,$C_{\omega+2}$,...$C_{2\omega}$,...

Estos ordinales trasfinitos se originaron debido a la imposibilidad de establecer una completa jerarquía de ciertos conjuntos derivados en su orden de constitución, a partir de los ordinales correspondientes a los números naturales[11]. Así, se define ω como el menor ordinal trasfinito mayor que cualquier número natural. Ahora bien, para generar más ordinales trasfinitos a partir de ω, se adiciona una unidad o también a través de sucesiones de ordinales naturales como se detalla a continuación:

$$\omega, \omega+1, \omega+2, ..., \omega+n, ..., \omega+\omega = 2\omega, 3\omega, ..., n\omega, ..., \omega.\omega = \omega^2, ..., \omega^\omega, ...$$

1.4. CLASES DE BAIRE Y EXISTENCIA

A continuación, se establece en términos generales, cúal fué el trabajo de Baire en torno a su clasificacion de funciones, que es precisamente el objeto de estudio del presente

[10]Las clases de Baire se enuncian en base a sucesiones y no a series ya que: Si se tiene una serie $\sum g_n$ que converge a g y de $\sum g_n$ considérese S_n, siendo S_n la sucesion de sumas parciales de $\sum g_n$ entonces S_n también converge a g.
[11]Como puede referenciarse en *"Las clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos"* (2006) Andrés Chaves, págs 11-13.

trabajo de grado.

1.4.1. Existencia de funciones de las clases de Baire. Ya establecida su clasificación de funciones, Baire se propone demostrar que su clasificación no es meramente nominal, es decir, hallar propiedades que permitan caracterizar funciones de cada clase o dicho de otra manera, evidenciar la existencia de funciones de cada una de las clases que acaba de definir. Baire tenía entonces lo siguiente:
La definición de continuidad caracteriza a las funciones de clase C_0, es decir, cualquier función continua es de clase C_0 y viceversa.

De la misma manera el teorema **T1** caracteriza a las funciones de clase C_1 ya que una función discontinua que puede verse como una serie de funciones continuas, también puede verse como límite de una sucesión de funciones continuas[12] y por lo tanto rescribiendo **T1**, se tendría: una función f es de clase C_1 si y sólo si f es puntualmente discontinua respecto a cada conjunto perfecto.

Para las funciones de clase C_2 Baire planteó el siguiente teorema llamado **T2**:

T2: Una función f es de segunda clase si y sólo si f es puntualmente discontinua sobre cada conjunto perfecto, omitiendo un conjunto de primera categoría [13] con respecto al conjunto perfecto.

Sin embargo de **T2**, Baire sólo pudo demostrar la condición necesaria, es decir: Si una función es de clase C_2 entonces es puntualmente discontinua sobre cada conjunto perfecto, omitiendo un conjunto de primera categoría con respecto al conjunto perfecto. Posteriormente el matemático Ruso Nicolas Lusin probaría que el recíproco, es decir, la condición suficiente de **T2** no se cumple ya que el encontraría funciones que tienen esta propiedad pero no son de clase C_2.

1.4.2. Conjetura de Baire. En resumen, Baire sólo había podido caracterizar funciones de clase C_0, C_1 y parcialmente de C_2, No obstante en 1905 obtuvo una función de C_3 pero en términos generales, no pudo caracterizar las funciones de las clases restantes. Sin embargo Baire conjeturó que el reciproco de **T2**, es decir, la condición suficiente, era cierto y que una generalización de **T2** caracterizaría las funciones de las clases restantes, inclusive hasta el nivel trasfinito.

En consecuencia Baire conjetura que su clasificación no esta en un nivel nominal y que efectivamente existen funciones de cada una de las clases que el definió[14] .

[12] La sucesión de sumas parciales de la serie.

[13] $E \subset R$ es de *primera categoría* si existe una sucesión $\{E_n\}$ de conjuntos diseminados (conjuntos que no son densos en ninguna parte), tal que para todo $x \in E$, existe n tal que $x \in E_n$. En otro caso, se dice que E es de *segunda categoría.*

[14] Esto se denomina *Conjetura de Baire.*

2. SEMICONTINUIDAD

El concepto de semicontinuidad como tal surge en los estudios referentes al teorema 1.2 o *segundo teorema falso de Cauchy*, que Baire abordó en el año de 1896. Este teorema fué enunciado por Cauchy en su libro *Curso de Análisis* de 1821, sin embargo, pasaron casi 50 años para evidenciar que tal enunciado es falso, puesto que Schwarz obtendría el primer contraejemplo en el año de 1872 (Recalde, 2003, pág 76). Ya en el año de 1896 Baire encontró contraejemplos similares de manera independiente.

Históricamente el teorema 1.2 desempeñó un papel fundamental en los trabajos de René Baire referentes a su clasificación de funciones, debido a que, como se verá más adelante, Baire es conducido al concepto de semicontinuidad a través del estudio de funciones que constituyen contraejemplos al teorema 1.2. Es precisamente este concepto el que le brinda un poderoso marco teórico para abordar los problemas de caracterización de funciones de cada clase.

2.1. SEGUNDO TEOREMA FALSO DE CAUCHY Y SEMICONTINUIDAD

En 1896 Baire aborda el teorema 1.2 o segundo teorema falso de Cauchy, según el cual si una función de dos variables es continua respecto a cada una de ellas, entonces es continua en general. Baire obtiene diversas funciones de dos variables que constituyen contraejemplos al enunciado falso de Cauchy, como por ejemplo:

$$H(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2yx}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

En $(0,0)$ esta función es continua respecto a cada una de sus variables sin embargo es discontinua en dicho punto. Así mismo:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2yx(x-1)(y-1)}{x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \text{ o } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

En $(0,0)$ y $(1,1)$ esta función es continua respecto a cada una de sus variables, sin embargo es discontinua en dichos puntos.

Detectadas estas funciones contraejemplo, Baire se enfoca en el estudio de este tipo de funciones y en sus investigaciones sobre las propiedades de éstas, obtiene por primera vez funciones semicontinuas, como se detalla a continuación.

Sea $f : [-a,a] \times [-b,b] \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables tal que:

1. f es acotada.

2. f es discontinua pero continua con respecto a cada una de sus variables x y y. [1]

Sea $x_0 \in [-a, a]$ y considérese la función $m : [-a, a] \to \mathbb{R}$ que se define como:

$$m(x) = \sup_{y \in [-b,b]} f(x, y)$$

m está bien definida puesto que f es acotada y en consecuencia se asegura la existencia del supremo. Así, para $x = x_0$ se tiene:

$$m(x_0) = \sup_{y \in [-b,b]} f(x_0, y)$$

f es continua respecto a y, es decir $f(x_0, y)$ es continua, por tanto existe y_0 tal que:

$$f(x_0, y_0) = m(x_0)$$

Como en (x_0, y_0) f es continua respecto a x entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \rho > 0$ tal que:

$$\text{Si} \quad |x - x_0| < \rho \quad \text{entonces} \quad |f(x_0, y_0) - f(x, y_0)| < \varepsilon.$$

Una consecuencia de lo anterior es $f(x_0, y_0) - f(x, y_0) < \varepsilon$, reemplazando $m(x_0) = f(x_0, y_0)$ se tiene $m(x_0) - f(x, y_0) < \varepsilon$, es decir:

$$m(x_0) < f(x, y_0) + \varepsilon \leq m(x) + \varepsilon \quad \text{ya que} \quad m(x) \geq f(x, y_0)^2$$

$$\text{Así,} \quad m(x_0) < m(x) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

que es lo mismo que

$$m(x) > m(x_0) - \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

Baire denominó a las funciones con esta característica particular de m como **semicontinuas inferiormente**. Es importante aclarar que dicha propiedad de m se presenta en todo punto $x_0 \in [-a, a]$. Lo anterior se resume en la siguiente definición:

Definición 2.1 *Sea $f : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T un intervalo. La función f es semicontinua inferior si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$ $\forall x_0 \in T$.*

A continuación, se exhibe un ejemplo concreto de una función semicontinua inferior a partir de la función de dos variables. Sea:

$$H(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2yx}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

para H así definida, se tiene que la función:

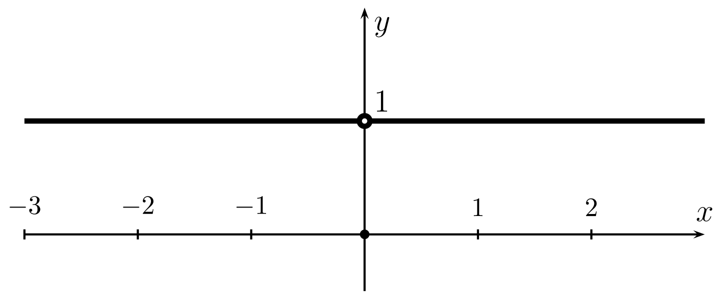
[1] En adelante esta condición se denominara: Condición 2.

[2] propiedad de supremo.

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es semicontinua inferior. La gráfica se muestra en la figura 2.1.

Figura 2.1



De manera análoga, Baire define funciones de una variable semicontinuas superiormente. Así, si se define:

$$I(x_0) = \inf_{y \in [-b,b]} f(x_0, y)$$

Por un procedimiento similar al anterior se tendría:
$f(x, y_0) - I(x_0) < \varepsilon$ de donde:

$$I(x_0) > f(x, y_0) - \varepsilon \geq I(x) - \varepsilon$$

que es lo mismo que:

$$I(x) < I(x_0) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

Las funciones que cumplen con esta propiedad de I, Baire las denominó **semicontinuas superiormente** o funciones siempre iguales a su máximo. Lo anterior se resume en la siguiente definición:

Definición 2.2 *Sea $f : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T un intervalo. La función f es semicontinua superior si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < \delta$ $\forall x_0 \in T$.*

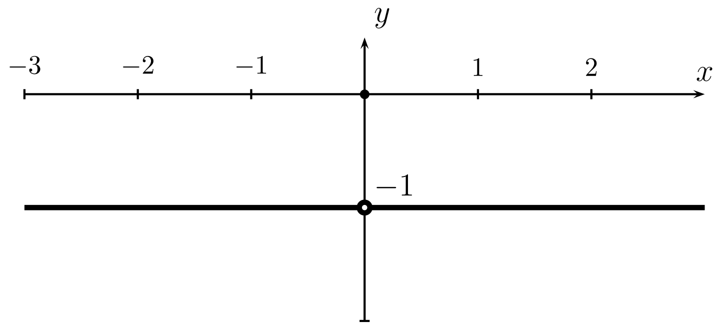
para la función H anteriormente definida se tiene:

$$I(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

I es semicontinua superior. La gráfica se muestra en la figura 2.2.

En su memoria del 8 de noviembre de 1897, Baire define funciones semicontinuas superiormente bajo el nombre de funciones siempre iguales a su máximo.

Figura 2.2



2.2. LA CONTINUIDAD Y SEMICONTINUIDAD

Como se ha visto, la continuidad es la línea de razonamiento que dirige el trabajo de Baire en torno a la caracterización de la noción de semicontinuidad[3], y es por ello que el apelativo de funciones semicontinuas no es mera coincidencia. Nótese que si una función g es semicontinua superiormente en x_0 entonces:

$$g(x) < g(x_0) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho \tag{2.1}$$

si además se cumple que g también es semicontinua inferiormente en dicho punto, entonces:

$$g(x) > g(x_0) - \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho \tag{2.2}$$

De 2.1 y 2.2 se tiene que:

$$g(x_0) - \varepsilon < g(x) < g(x_0) + \varepsilon$$

es decir:

$$|\, g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |x - x_0| < \rho$$

en consecuencia g es continua en x_0. En resumen, si una función f es semicontinua inferior y superior, entonces f es continua. Pero esto no lo es todo, Supóngase que f es una función continua en x_0, así, por definición se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad |\, f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |\, x - x_0| < \delta, \ \forall x_0 \in D_f{}^4$$

es decir:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad |\, x - x_0| < \delta$$

Si $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$, se concluye que la función f es semicontinua inferior, y si $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$, se concluye que f es semicontinua superior. En términos generales, si una función es continua entonces es semicontinua superior e inferior. Lo anteriormente expuesto se condensa en el siguiente teorema.

[3] Debido a que Baire parte de la continuidad en cada variable.

[4] D_f es el dominio de f

Teorema 2.3 *Sea $f : T \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T un intervalo. f es continua si y sólo si f es semicontinua superior y semicontinua inferior.*

Apartir de lo anterior, puede entenderse el apelativo de funciones *semicontinuas*, ya que en esencia Baire quiere dar a entender que existen funciones que son parcialmente continuas o *"que cumplen con una sola de las condiciones que en conjunto constituyen la continuidad"* (Arboleda, Recalde, 2005, pág 68).

Para aclarar mejor esta idea retómese la función H y las funciones de una variable m e I que se obtuvieron a partir de H:

$$m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad I(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

m es semicontinua inferior para todo x. Sin embargo, para $x \neq 0$, la función m es continua y por el teorema 2.3 también es semicontinua superior.

Pero ¿qué pasa en $x = 0$? se sabe que en ese punto la función es semicontinua inferior y además es discontinua, pero lo realmente importante es que en dicho punto, la función m no es semicontinua superior. Se concluye entonces que en $x = 0$ la función m cumple con una sola de las condiciones que constituyen la continuidad y que además, es semicontinua inferior para todo $x \in \mathbb{R}$.

De manera análoga se puede concluir que en $x = 0$, la función I es semicontinua superior pero no semicontinua inferior, mientras que para $x \neq 0$, además de ser semicontinua superior, la función I también es semicontinua inferior[5].

Muy importante es el hecho de que la función H cumple con la condición 2 sólo en el punto $(0, 0)$, mientras que en $x = 0$, las funciones m e I que se derivan de H cumplen con una sola de las condiciones que en conjunto constituyen la continuidad.

Es importante notar también que las ecuaciones que determinan la semicontinuidad se obtienen fácilmente de las ecuaciones que caracterizan la continuidad, sin embargo, el mismo Baire precisa en su nota *Sur l´origine de la notion de semi-continuité* que fue conducido a este concepto, no a través de la designación a priori de las dos ecuaciones inherentes a la definición de la continuidad, si no a través del análisis de las funciones contraejemplo al segundo teorema falso de Cauchy. (Arboleda, Recalde, 2005, pág 71).

Se ha visto la manera en que Baire llega al concepto de semicontinuidad partiendo de una función de dos variables acotada y que cumple con la *condición 2*, sin embargo la función H que se ha tomado, a pesar de ser acotada, cumple con la condición 2

[5]Aplicar teorema 2.3

únicamente en el punto $(0,0)$, mientras que en los demás puntos de su dominio es continua. Retomando la función:

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2yx(x-1)(y-1)}{x^2(x-1)^2+y^2(y-1)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \text{ y } (x,y) \neq (1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \text{ o } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

esta cumple con la condición 2 únicamente en los puntos $(0,0)$ y $(1,1)$. Se puede dar ejemplos de funciones de dos variables que cumplen con la condición 2, únicamente en una cantidad finita de puntos. En este sentido, cabe hacer la siguiente pregunta: ¿existen funciones de dos variables que además de ser acotadas, cumplan con la condición 2 en todos los puntos de su dominio?
La respuesta se da en el siguiente teorema enunciado por Baire:

Teorema 2.4 *Sea f una función de dos variables determinada en una cierta región. Si f es una función continua respecto a cada una de sus variables en todos los puntos de su dominio entonces existen, en toda área, puntos donde la función es continua.*[6]

2.3. GENERALIZACIÓN DEL CONCEPTO DE SEMICONTINUIDAD

En la sección anterior se mostró el procedimiento que condujo a Baire a la obtención de funciones semicontinuas en una variable, el cual tuvo su origen en funciones de dos variables. Sin embargo, con la incorporación de las nociones de máximo y mínimo Baire logra generalizar el concepto de semicontinuidad a funciones de n variables.

Sea f una función de varias variables definida sobre un dominio $D \subseteq \mathbb{R}^n$ y acotada en el mismo; para cada $P \in D$ se define la bola[7] :

$$B(P,\rho_r) = \{X \in \mathbb{R}^n \setminus \|P - X\| \leq \rho_r\}.$$

La sucesión $\{\rho_r\}$ es tal que: $\rho_1 > \rho_2 > ... > \rho_r > ...$, donde $\lim\limits_{r\to\infty} \rho_r = 0$; en consecuencia se tiene una sucesión de bolas encajadas:

$$B(P,\rho_1) \supset B(P,\rho_2) \supset ... \supset B(P,\rho_r) \supset ... \tag{2.3}$$

Defínase ahora la sucesión M_r de la siguiente manera:

$$M_r = \sup\{f(X)/X \in B(P,\rho_r)\}$$

M_r existe para todo $r \in \mathbb{Z}^+$ puesto que f es acotada, además, por propiedad de supremo, la sucesión M_r es decreciente. De acuerdo a lo anterior se puede definir el máximo de f en el punto P.

[6] Esta última frase es una generalización de funciones de dos variables puntualmente discontinuas, la cual se puede compilar como sigue: Sea f una función de varias variables y P un punto de su dominio, si en toda bola $B(P,r)$ existen puntos donde la función es continua, entonces se dice que f es puntualmente discontinua.

[7] $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ donde $x_1, x_2, ..., x_n$ son variables reales.

Definición 2.5 *El máximo de f en P se denota como $M[f,P]$ y se define como* $M[f,P] = \lim\limits_{r\to\infty} M_r$

De igual manera se define el máximo de f en el dominio D como:
$M[f,D] = \sup\{f(X)/X \in D\}$.

Retómese la sucesión de bolas encajadas 2.3 y defínase la suceción m_r de la siguiente manera:

$$m_r = \inf\{f(X)/X \in B(P,\rho_r)\}$$

m_r existe para todo $r \in \mathbb{Z}^+$ puesto que f es acotada, además, por propiedad del ínfimo, la sucesión m_r es creciente. De acuerdo a lo anterior se puede definir el mínimo de f en el punto P.

Definición 2.6 *El mínimo de f en P se denota como $m[f,P]$ y se define como* $m[f,P] = \lim\limits_{r\to\infty} m_r$

De igual manera se define el mínimo de f en el dominio D como:
$m[f,D] = \inf\{f(X)/X \in D\}$.

Definidas las nociones de máximo y mínimo, Baire enuncia algunas propiedades importantes de ellos, entre ellas:

Teorema 2.7 $\forall\varepsilon > 0, \exists\rho > 0$ *tal que* $f(X) < M[f,P] + \varepsilon$, $\forall X \in B(\rho,P)$.

Demostración. Por definición se tiene que $M[f,P] = \lim\limits_{r\to\infty} M_r$, por tanto $\forall\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $M_r - M[f,P] < \varepsilon$, $\forall n \geq N$, en particular $M_N - M[f,P] < \varepsilon$, por tanto $M_N < \varepsilon + M[f,P]$. Si se toma ρ_N se tiene que $f(X) \leq M_N < \varepsilon + M[f,P]$, $\forall X \in B(P,\rho_N)$ en consecuencia $f(X) < M[f,P] + \varepsilon$, $\forall X \in B(P,\rho_N)$.■
(Recalde, 2003, pág 69).

Teorema 2.8 $\forall\varepsilon > 0, \forall\rho > 0$*,* $\exists X \in B(P,\rho)$ *tal que* $f(X) > M[f,P] - \varepsilon$.[8]

Demostración. Supóngase por contradicción que $\exists\varepsilon > 0, \exists\rho > 0$, tal que $\forall X \in B(P,\rho)$ se cumple que $f(X) \leq M[f,P] - \varepsilon$.

Sea $A = \{f(X)/X \in B(P,\rho)\}$ y $T = \sup A$, así $f(X) \leq T$, $\forall X \in B(P,\rho)$.

Como $f(X) \leq M[f,P] - \varepsilon, \quad \forall X \in B(P,\rho)$ entonces $M[f,P] - \varepsilon$ es una cota superior de A pero por propiedad del supremo $T < M[f,P] - \varepsilon$.

Considérese ahora ρ_m, tal que $B(P,\rho_m) \subset B(P,\rho)$, por tanto se tiene:

$$M_m \leq T < M[f,P] - \varepsilon$$

[8]RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*, pág 69.

por definición de $M[f,P]$ se tiene que $M[f,P] \leq M_m$ en consecuencia

$$M[f,P] \leq M_m \leq T < M[f,P] - \varepsilon$$

así

$$M[f,P] < M[f,P] - \varepsilon$$

es decir

$$\varepsilon < 0$$

esto es un absurdo, por lo que se contradice la hipótesis inicialmente planteada, por tanto se sigue que $\forall \varepsilon > 0, \forall \rho > 0$, $\exists X \in B(P,\rho)$ tal que $f(X) > M[f,P] - \varepsilon$.■

Análogamente se puede formular los mismos teoremas para el mínimo:

Teorema 2.9 *$\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0$ tal que $f(X) > m[f,P] - \varepsilon$, $\forall X \in B(P,\rho)$.*

Teorema 2.10 *$\forall \varepsilon > 0, \forall \rho > 0$, $\exists X \in B(\rho,P)$ tal que $f(X) < m[f,P] + \varepsilon$.*

Si en el teorema 2.7 se toma $X = x$ y se cumple que $M[f,P] = f(P)$ entonces se tiene que: $\forall \varepsilon > 0, \exists \rho > 0$ tal que $f(x) < f(P) + \varepsilon$ $\forall x \in B(\rho,P)$ en consecuencia f es semicontinua superior en P[9]. Análogamente, si en 2.9 se toma $X = x$ y se cumple que $m[f,P] = f(P)$ entonces se tendría: $f(x) > f(P) - \varepsilon$, $\forall X \in B(P,\rho)$ en consecuencia f es semicontinua inferior en P[10]. Esta forma de proceder permite extender el concepto de semicontinuidad para funciones de varias variables.

Sea f una función de varias variables.

Definición 2.11 *Si $M[f,P] = f(P)$ entonces f es semicontinua superiormente en P. Si $m[f,P] = f(P)$ entonces f es semicontinua inferiormente en P.*

Definición 2.12 *Si $M[f,X] = f(X), \forall X \in D$, entonces la función es semicontinua superiormente en D, o también siempre igual a su máximo. Si $m[f,X] = f(X), \forall X \in D$, entonces la función es semicontinua inferiormente, o también siempre igual a su mínimo.*

Baire define ahora un concepto que muestra la íntima relación que existe entre semicontinuidad y continuidad. Dicho concepto es el de oscilación.

Definición 2.13 *La oscilación de f en X se define como:*

$$Os[f,X] = M[f,X] - m[f,X]$$

[9] Aplicar definición 2.2
[10] Aplicar definición 2.1

De igual manera se define la oscilación de f en el dominio D como:

$$Os[f, D] = M[f, D] - m[f, D]$$

La relación entre continuidad y semicontinuidad, se enuncia en el siguiente teorema inherente a la función oscilación.

Teorema 2.14 $Os[f, P] = 0$ *si y sólo si* f *es continua en* P.

Este teorema es fácilmente demostrable[11] y en esencia asegura que una función es semicontinua inferior y superior si y sólo si es continua.

Como se ha visto, Baire se interesa en el estudio de las funciones discontinuas por sobre las continuas y "*reconoce en la oscilación el concepto que mide el grado de discontinuidad de una función* f"(Arboleda, Recalde, 2005, pág 70).

Si $Os(f, P) \neq 0$, se tiene entonces que f es discontinua en P, en consecuencia hay tres posibilidades:

- f es sólo semicontinua superior en P
- f es sólo semicontinua inferior en P.
- f no es ni semicontinua superior ni semicontinua inferior, es decir: $M[f, P] \neq f(P) \neq m[f, P]$

A continuación se exhiben algunos ejemplos de funciones semicontinuas:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{I} \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{I} \end{cases}$$

Esta es la función característica de los números irracionales y es una función discontinua en cada punto de su dominio. Para cualquier punto $x_0 \in \mathbb{I}$, se tiene que f es sólo semicontinua superior, pues en cualquier intervalo que contenga a x_0 hay números irracionales, por tanto $M[f, x_0] = 1 = f(x_0)$, de igual manera se demuestra que en ese punto f no es semicontinua inferior pues en cualquier intervalo centrado en x_0 hay infinitos racionales. De forma similar, se demuestra que en cada $x_0 \in \mathbb{Q}$, f es sólo semicontinua inferior.

Considérese la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in (2k, 2k+1),\ k \in \mathbb{Z} \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1, & \text{si } x \in (2i-1, 2i),\ i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

[11] Seguir demostración del teorema 2.3.

Si $x_0 \in (2k, 2k+1)$ o $x_0 \in (2k-1, 2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, f es continua en x_0 por tanto, f es semicontinua superior e inferior. En los puntos enteros, $x_0 \in \mathbb{Z}$, f es discontinua, y como en cada uno de estos puntos la función experimenta un salto de 1 a -1 o de -1 a 1, entonces para todo punto entero se tiene que $M[f, x_0] = 1$, mientras que $m[f, x_0] = -1$ y además $f(x_0) = 0$, se sigue que: $M[f, x_0] \neq f(x_0) \neq m[f, x_0]$. En consecuencia, en los puntos enteros, f no es ni semicontinua inferior ni superior.

En el marco de este último ejemplo es valida la siguiente pregunta: ¿Es posible exhibir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in \mathbb{R}$, $M[f, x] \neq f(x) \neq m[f, x]$?

3. NECESIDAD Y SUFICIENCIA DE T1

En 1897, tras su indagación entorno al primer teorema falso de Cauchy, Baire se hace la siguiente pregunta:

> ¿Qué condiciones debe cumplir una función discontinua para poderse expresar como una serie de funciones continuas?

En 1896 Baire había llevado a cabo estudios referentes a funciones de dos variables que constituyen contraejemplo al segundo falso teorema de Cauchy, estudios que lo condujeron al concepto de semicontinuidad.

Una de las primeras aseveraciones que Baire formuló en torno al interrogante que se planteó, relacionándolo con los estudios sobre el segundo teorema falso de Cauchy, era el hecho de que las funciones que surgían como contraejemplos al primer falso teorema de Cauchy tenían la particularidad de ser puntualmente discontinuas; característica de la que participaban las funciones semicontinuas de una variable provenientes de funciones de dos variables que constituyen contraejemplos al segundo teorema falso de Cauchy.

Lo anterior muestra que Baire intuía una posible relación entre el concepto de semicontinuidad y el interrogante principal que dirige su trabajo sobre funciones discontinuas.

En su tesis doctoral de 1899, Baire da solución al interrogante inicial, planteando y demostrando el teorema **T1**:

T1: Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función discontinua. f es el límite de una serie de funciones continuas, si y sólo si es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.

3.1. TEOREMAS PRELIMINARES

Se puede decir que Baire identifica una propiedad fundamental en los estudios referentes al segundo teorema falso de Cauchy, propiedad que le permite evidenciar la característica fundamental de las funciones discontinuas que son límite de series de funciones continuas, tal propiedad es la semicontinuidad. En este sentido se detalla la demostración de la condicion necesaria del teorema **T1** pues en ésta, se muestra el papel del concepto de semicontinuidad en la identificación de la propiedad fundamental de las funciones discontinuas provenientes de series de funciones continuas.

Para probar la condición necesaria de **T1**, Baire necesitó incorporar algunos resultados que se revelaron importantes en su proceder. Uno de los principales resultados tiene referencia explícita con las funciones semicontinuas superiormente.

Teorema 3.1 *Sea $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función de varias variables, tal que $f(X) > 0$. Si f es semicontinua superior entonces, en toda bola contenida en A existe un dominio D tal que $m[f, D] > 0$.*[1]

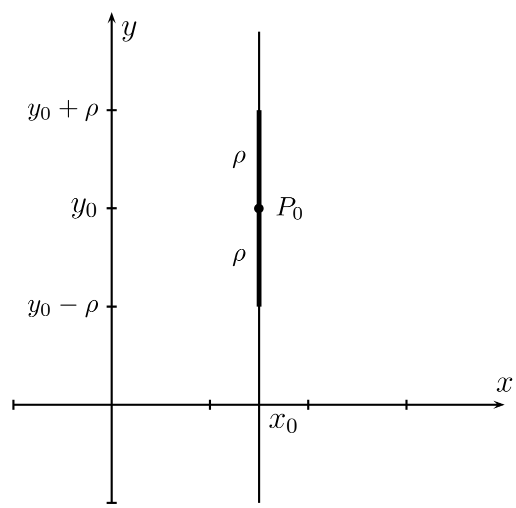
Baire ahora, enfoca sus esfuerzos en el estudio de las funciones de dos variables, con el fin de obtener, bajo ciertas condiciones, propiedades de sucesiones de funciones continuas. Para ello considera una función $f(x, y)$ definida en el interior de un rectángulo R que contiene al punto $(0, 0)$, cuyos lados son paralelos a los ejes cooredenados, con las siguientes propiedades:

1. f es continua respecto a y en todo punto de R.
2. f es continua respecto a x sólo, en un conjunto denso de ordenadas. Es decir, si D es un conjunto denso de números reales, entonces $f(x, y_d)$ para d en D.

Baire estudia las oscilación de la función f sobre segmentos de rectas paralelas al eje y, es decir fija la variable x y considera y variable entre dos límites.

Tómese $P_0(x_0, y_0) \in R$, y sea $\rho > 0$. Considérense ahora los puntos de un segmento contenido en la recta $x = x_0$, segmento de longitud 2ρ y cuyo punto medio es P_0. Tal como se muestra en la figura 3.1.1.

Figura 3.1.1



Considérese ahora la oscilación de la función f en el segmento definido, es decir, la oscilación de la función $f(x_0, y)$, en el domínio $[y_0 - \rho, y_0 + \rho]$
Baire denota a esta oscilación como $\omega(\rho, P_0)$:

$$\omega(\rho, P_0) = Os[f(x_0, y), D] \quad D = [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$$

Nótese que si $\rho = 0$ entonces $\omega(0, P_0) = Os[f(x_0, y), y_0]$ y como $f(x_0, y)$ es continua se tiene que $Os[f(x_0, y), y_0] = 0$, así $\omega(0, P_0) = 0$

[1]RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*, pág 72.

Teorema 3.2 *Sea $\rho > 0$, f una función de dos variables con las propiedades anteriormente definidas y $P(x_0, y_0)$ un punto de su dominio. Si y_1 , $y_2 \in [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$ entonces $|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| \leq \omega(\rho, P_0)$.*

Demostración. Sea y_1, $y_2 \in [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$ y $D = [y_0 - \rho, y_0 + \rho]$ Por definición de máximo se tiene que:

$$M[f(x_0, y), D] \geq f(x_0, y_2) \tag{3.1}$$

por definición de mínimo, $m[f(x_0, y), D] \leq f(x_0, y_1)$, multiplicando por -1 se tiene:

$$-m[f(x_0, y), D] \geq -f(x_0, y_1) \tag{3.2}$$

Sumando 3.1 y 3.2 se tiene $M[f(x_0, y), D] - m[f(x_0, y), D] \geq f(x_0, y_2) - f(x_0, y_1)$ y por definición $M[f(x_0, y), D] - m[f(x_0, y), D] = Os[f(x_0, y), D] = \omega(\rho, P_0)$ así, $\omega(\rho, P_0) \geq f(x_0, y_2) - f(x_0, y_1)$ es decir:

$$-\omega(\rho, P_0) \leq f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)$$

De igual manera se demuestra que $f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2) \leq \omega(\rho, P_0)$. Por lo tanto $-\omega(\rho, P_0) \leq f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2) \leq \omega(\rho, P_0)$ en consecuencia:

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| \leq \omega(\rho, P_0) \quad \blacksquare.$$

El estudio de la oscilación de la función f sobre segmentos de rectas paralelas al eje y, le permite a Baire introducir la función $\alpha_\sigma(x, y)$ de acuerdo con el siguiente procedimiento: Sea $\sigma > 0$, y $P(x_0, y_0)$ un punto del domínio de f. Se define $\alpha_\sigma(P_0)$ como sigue:

$$\alpha_\sigma(P_0) = sup\{\rho \;/\; \omega(\rho, P_0) \leq \sigma\}$$

$\alpha_\sigma(P_0)$ cumple con las siguientes propiedades:

a. $\omega(\rho, P_0) \leq \sigma$ si y sólo si $\rho \leq \alpha_\sigma(P_0)$.

b. $\omega(\rho, P_0) > \sigma$ si y sólo si $\rho > \alpha_\sigma(P_0)$.

c. $\alpha_\sigma(P_0)$ es siempre positiva para todo P_0 en el dominio de f.

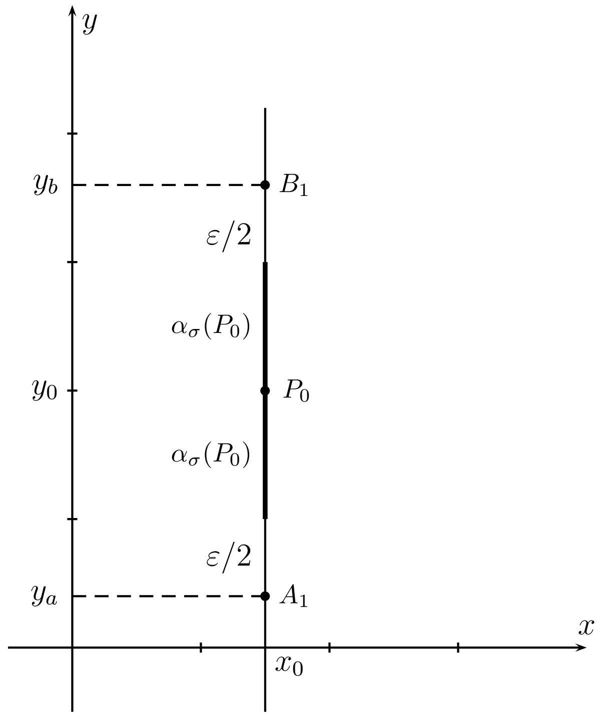
Este procedimiento aplicado a todo punto del dominio de f define la función $\alpha_\sigma(x, y)$. Baire identifica en esta función una propiedad fundamental en relación con su objetivo principal y se debe al hecho de que la función $\alpha_\sigma\,(x, y)$ es semicontinua superiormente.

La demostración de este resultado requiere observar que dado un punto $P_0(x_0, y_0)$ se debe probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe una bola alrededor de P_0, $B(P_0, r)$, tal que si (x, y) esta en dicha bola entonces $\alpha_\sigma(x, y) < \alpha_\sigma(x_0, y_0) + \varepsilon$. Esta demostración se hace en la tesis doctoral de Luis Recalde[2] páginas 77-79, no obstante se omiten algunos procedimientos que en la demostración que se presenta acontinuación se incorporan a fin de propender una buena comprensión de este importante resultado. Para la demostración, las figuras 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4 son gráficas de apoyo.

[2] *"La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas"* (2003).

Teorema 3.3 *la función α_σ es semicontinua superiormente.*

Figura 3.1.2



Demostración. Sea $\varepsilon > 0$; considérese la recta $x = x_0$ y tómese sobre ella, el segmento de longitud $2\alpha_\sigma(P_0)$ y punto medio P_0. Sobre esta recta se localizan $A_1(x_0, y_a)$ y $B_1(x_0, y_b)$ tales que $|y_a - y_0| = |y_0 - y_b| = \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2$.

Como $\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2 > \alpha_\sigma(P_0)$ entonces por propiedad **b** de α_σ, se tiene que:

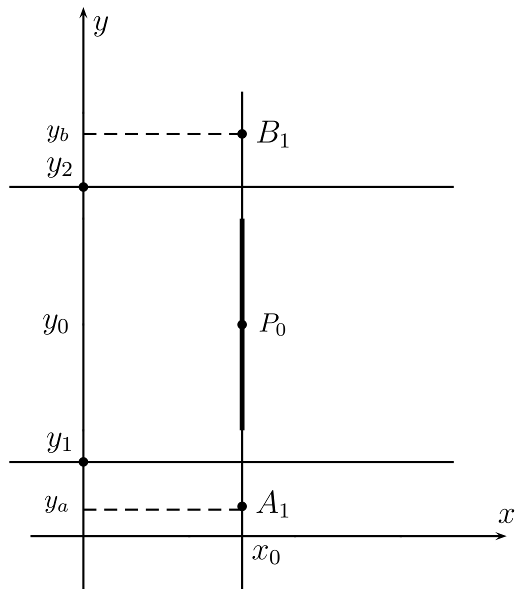
$$\omega\left(\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2, P_0\right) > \sigma$$

Sin embargo, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\omega\left(\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2, P_0\right) = \sigma + k$, por tanto, para $k_1 < k$, existen y_1 y y_2 pertenecientes al intervalo $[y_a, y_b]$ tal que:

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| > k_1 + \sigma \tag{3.3}$$

Ver figura 3.1.3.

Figura 3.1.3



Como sobre la recta $y = y_1$ f es continua, en particular para x_0, se tiene que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\text{si } |x_0 - x| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x, y_1) - f(x_0, y_1)| < \varepsilon$$

Por ello para $\varepsilon = k_1/2$ sea $\delta_1 > 0$ tal que:

$$\text{si } |x_0 - x| < \delta_1 \quad \text{entonces} \quad |f(x, y_1) - f(x_0, y_1)| < k_1/2 \tag{3.4}$$

análogamente, sobre $y = y_2$ se tendría:

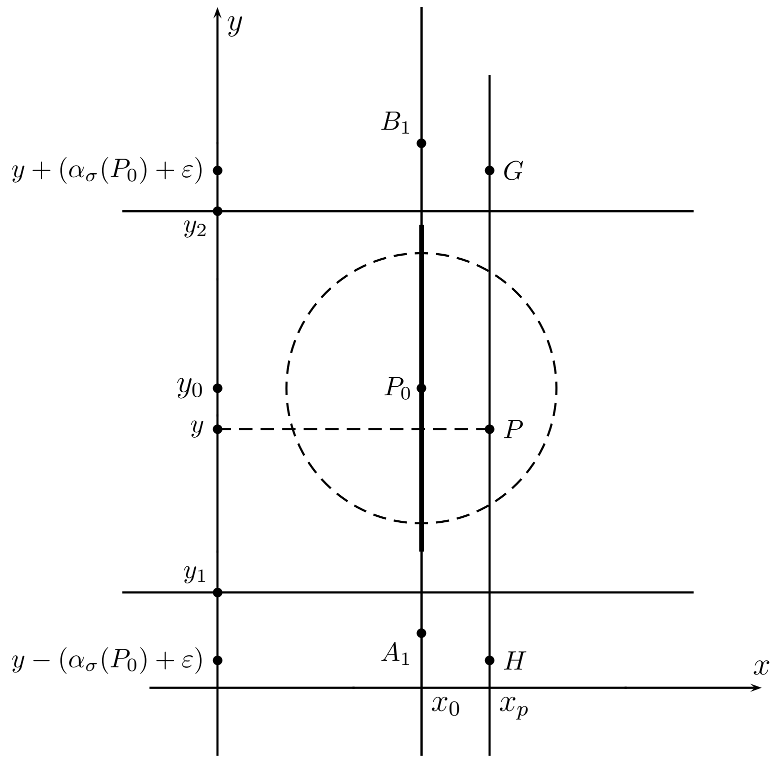
$$\text{si } |x_0 - x| < \delta_2 \quad \text{entonces} \quad |f(x, y_2) - f(x_0, y_2)| < k_1/2 \tag{3.5}$$

De 3.3 , 3.4 y 3.5 se obtiene:
$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| =$
$= |f(x, y_1) - f(x, y_2) + f(x_0, y_1) + f(x_0, y_2) - f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)|$
$= |(f(x, y_1) - f(x_0, y_1)) + (f(x_0, y_2) - f(x, y_2)) + (f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2))|$
$\geq |f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| - |f(x_0, y_2) - f(x, y_2)| - |f(x, y_1) - f(x_0, y_1)|$
$> \sigma + k_1 - \dfrac{k_1}{2} - \dfrac{k_1}{2} = \sigma.$
En resumen:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| > \sigma, \quad \text{siempre que} \quad |x_0 - x| < \delta' \tag{3.6}$$

donde $\delta' = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Considérese ahora el interior de una bola centrada en P_0 y cuyo radio r sea menor que $\varepsilon/2$ y δ' respectivamente. Sea $P(x_p, y)$ un punto perteneciente a esta bola y considérese la recta $x = x_p$. Sobre esta recta tómense los puntos H y G tales que $HP = PG = \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon$. Véase figura 3.1.4.

Figura 3.1.4



$P \in B(P_0, r)$ en consecuencia, se tiene que $|x_0 - x_p| < \delta'$, y por tanto, de 3.6 se sigue que:

$$|f\,(x_p, y_1) - f\,(x_p, y_2)| > \sigma. \tag{3.7}$$

Por otra parte, $|y_0 - y| < \varepsilon/2$ puesto que $P \in B(P_0, r)$ y además, y_1 y y_2 pertenecen al intervalo $[y_a, y_b]$ lo que implica que: $|y_1 - y_0| < |y_a - y_0| = |y_b - y_0| = \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2$, es decir, $|y_1 - y_0| < \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2$.

Considérese ahora la distancia de y_1 a y:

$$|y_1 - y| = |y_1 - y_0 + y_0 - y| \leq |y_1 - y_0| + |y_0 - y| < \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon$$

Es decir, $|y_1 - y| < \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon$ en consecuencia, $y_1 \in [y - (\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon), y + (\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon)]$, de igual manera, puede probarse que $y_2 \in [y - (\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon), y + (\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon)]$. Ver figura 3.1.4.

Por hipótesis, se tiene que f cumple con las propiedades 1 y 2 anteriormente definidas, además, $P(x_p, y)$ está en el dominio de f, haciendo $\rho = \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon$ se puede aplicar el teorema 3.4, con lo cual: $|f(x_p, y_1) - f(x_p, y_2)| \leq \omega(\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon, P)$. Pero de 3.7, se tiene que: $\sigma < |f(x_p, y_1) - f(x_p, y_2)|$ en consecuencia:

$$\omega(\alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon, P) > \sigma$$

Aplicando la propiedad **b** de la función α_σ se tiene que:

$$\alpha_\sigma(P) < \alpha_\sigma(P_0) + \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad P \in B(P_0, r)$$

así α_σ es semicontinua en P_0, y en general, para cualquier punto del dominio de f.■
En el paso 3.3 de la demostración, se ha supuesto que en $y = y_1$ y $y = y_2$, f es continua; en caso contrario, se buscan y_3 , y_4 que cumplan lo requerido; su existencia se garantiza por la segunda propiedad de f.

Baire introduce ahora el siguiente teorema y en el cual en lugar de la recta, se considera una curva plana $\mathfrak{L}$ contenida en el rectángulo R en el cual f esta definida.

Teorema 3.4 *Sea $P_0(x_0, y_0)$ un punto perteneciente a $\mathfrak{L}$. Si respecto a la curva $\mathfrak{L}$, $m[\alpha_\sigma, P_0] > 0$ entonces $Os\,(f, P_0) \leq 2\sigma$.*[3]

Finalmente, con base en los teoremas 3.1, 3.3 y 3.4 Baire demuestra el siguiente teorema que permite establecer las condiciones necesarias de **T1**:

Teorema 3.5 *En toda porción de curva representable por una ecuación de la forma $y = \varphi\,(x)$, $\varphi\,(x)$ continua, existen puntos en los que $f\,(x, y)$ es continua.*[4].

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ y considérese la función α_ε sobre la curva $\mathfrak{L}$. Por propiedad **c** y teorema 3.3, se tiene que $\alpha_\varepsilon\,(x, y)$ es positiva y semicontinua superior, por tanto, se puede aplicar el teorema 3.1, de tal forma que en todo arco $\mathcal{A}$ de $\mathfrak{L}$, existe un arco $\mathcal{A}_1$, tal que $m\,[\alpha_\varepsilon, \mathcal{A}_1] > 0$. Sea la sucesión decreciente $\{\varepsilon_n\}$ tal que $\varepsilon_0 = \varepsilon$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. De acuerdo con el procedimiento anterior, en el arco $\mathcal{A}_1$ existe un arco $\mathcal{A}_2$ tal que $m\,[\alpha_{\varepsilon_2}, \mathcal{A}_2] > 0$, sobre $\mathcal{A}_2$ un arco $\mathcal{A}_3$ tal que $m\,[\alpha_{\sigma_3}, \mathcal{A}_3]$, y así sucesivamente. De esta manera, en $\mathcal{A}$ y, por consiguiente, en cualquier arco de la curva $\mathfrak{L}$ existe al menos un punto P en el cual $m\,[\alpha_\varepsilon, P] > 0$, por pequeño que sea ε. Aplicando el teorema 3.4, se tiene que $Os\,[f, P] < 2\varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, como $Os\,[f, P] \geq 0$ entonces $0 \leq Os\,[f, P] < 2\varepsilon$, lo cual implica que $Os\,[f, P] = 0$ en consecuencia f es continua en P.■ (Recalde, 2003, pág 80)

"*Sin embargo, la idea de Baire es afinar aún más su resultado, refiriendo su estudio a subconjuntos del dominio, como los conjuntos perfectos.*"(Recalde, 2003, pág 80).

En conclusión, de acuerdo la argumentación anterior, Baire ha demostrado, que sobre cualquier curva continua $\mathfrak{L}$, f es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.

[3]RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*, pág 79.
[4]RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*, pág 80.

A continuación se presenta la parte final de la demostración de la condición necesaria de **T1** la cual es un caso particular del teorema 3.5.

3.2. CONDICIÓN NECESARIA

Parece no haber ninguna relación entre los teoremas anteriormente expuestos y la condición necesaria de **T1**, sin embargo con el siguiente procedimiento se evidencia dicha relación.

Sea R_1 el interior de un rectángulo de lados paralelos a los ejes que contiene al punto $(0,0)$ y $f_1 : R_1 \to \mathbb{R}$ una función continua para todo $(x,y) \in R_1$ excepto para los puntos de la forma $(x,0)$, donde la función es continua con respecto a y.

Considérese una sucesión decreciente de ordenadas y_n que tienda a cero y las rectas, $y = y_1,\ y = y_2,\ ...,\ y = y_n,\ ...$
Por las condiciones de f_1, en cada una de estas rectas, dicha función es continua y por tanto, las funciones $f_1(x,y_1),\ f_1(x,y_2), ...,\ f_1(x,y_n), ...,$ son continuas exceptuando $f_1\,(x,0)$ que puede ser discontinua pues las condiciones de f_1 sólo aseguran continuidad respecto a y.

Defínase ahora $g_n(x) = f_1(x,y_n)$. Cuando n tiende a infinito, $g_n(x)$ tiende a $f_1(x,0)$, esto significa que la función discontinua $f\,(x,0)$ es el límite de la sucesión de funciones continuas g_n, o si se quiere, como el límite de la serie:

$$g_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1}(x) - g_n(x))$$

que es convergente para todo x en cierto dominio. *Se tiene entonces una serie de funciones continuas en la variable x, que converge a una función discontinua. Baire, entonces, ha "camuflado" las condiciones necesarias de* T_1 bajo algunas propiedades de funciones de dos variables[5].

En términos generales, estudiar cómo es la función f_1 en el eje x, determina la condición necesaria de **T1**. Además, esta relación de funciones de dos variables con el teorema **T1** permite aplicar los resultados de la sección anterior como sigue:

Nótese que f_1 es continua respecto a y en todo punto, pues para todo $(x,y) \in R_1$, $y \neq 0$ f_1 es continua y por tanto continua respecto a y, mientras que por las condiciones de la función f_1, en los puntos de la forma $(x,0)$ se tiene la continuidad respecto a y. De esta manera, f_1 es continua respecto a y en todo punto.

[5] RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*, pág 76.

Ahora bien, debido a que f_1 es continua en todo punto que no está en el eje x, entonces también será continua respecto a x en dichos puntos, así, f_1 sera continua respecto a x en el conjunto de ordenadas $F = \{y/y \neq 0\}$, que es un conjunto denso.

Hasta aquí se ha mostrado que f_1 cumple con las condiciones 1 y 2 de la función f definida en la sección 3.1. Si ahora se toma la curva $\mathfrak{L}$ como la recta de ecuación $y = 0$, que es continua, se puede aplicar el teorema 3.5 con lo cual:*en todo subintervalo de la recta cuya ecuacion es $y = 0$, existen puntos en donde f_1 es continua.*

Esto quiere decir que en todo subconjunto perfecto contenido en el dominio de la función $f_1(x, 0)$ existen puntos en donde la función es continua, así, por definición, se tiene que $f_1(x, 0)$ es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto.

3.3. CONDICIÓN SUFICIENTE

Demostrada la condición necesaria, a continuación se plantea a grandes rasgos, el proceso incorporado por Baire para la demostración de la condición suficiente de **T1**. No se aborda toda la demostración pues el eje rector de ésta es el problema de la representación de funciones, que no es objeto de estudio de este trabajo. No obstante, el apartado 5.2 muestra como la obra de Baire se involucra con el problema de representación de funciones.

En términos generales, Baire debe demostrar:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f es puntualmente discontinua entonces f es el límite de una serie de funciones continuas.

Es decir que toda función puntualmente discontinua es representable mediante series de funciones continuas. Cabe notar que ahora, el campo de indagación que le compete a Baire es el de la representación de funciones.

Para la demostración, Baire establece propiedades para un grupo reducido de funciones que posteriormente, bajo ciertas condiciones le permiten abordar el caso general de la representación de funciones de todas las clases. "*Esta categoría particular de funciones se construyen de manera iterativa, mediante el procedimiento de imponerle condiciones de discontinuidad cada vez más complejas a las funciones.*"[6].

Baire establece entonces, cuando una función es representable, para ello enuncia los siguientes problemas en los cuales se halla implícita la condición suficiente.

[6]RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*, pág 81.

Problema 1: ¿Cómo debe ser $h(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ para que $f(x, y)$, definida en R_1, sea continua con respecto a x y a y en todo punto y además, sobre la recta $y = x$ se de la igualdad $h(x) = f(x, y)$

Problema 2: ¿Cómo debe ser $h(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ para que exista $f(x, y)$, continua en R_1, mientras que sobre el eje x, continua con respecto a y y además se de la igualdad $h(x) = f(x, y)$

En base a estos dos problemas se formula la siguiente definición:

Definición 3.6 *La función $h(x)$ se dice representable si satisface las condiciones de los problemas 1 y 2.*

Establecida esta definición, Baire muestra que las funciones con finitas y algunas con infinitas discontinuidades son representables, por lo que en adelante se encamina, aunque sin éxito, al estudio del problema general de representación de funciones de las clases superiores a C_1.

Todo el procedimiento referente a la demostración de las condiciones suficientes se encuentra profundamente detallado en la secciones 2.3 y 2.4 de "*La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*" (Luis Recalde).

4. UNA FUNCIÓN PARTICULAR DE C_0

El conjunto de las funciones se constituye por dos grandes familias: la de las funciones continuas y la de las funciones discontinuas. El conjunto de las funciones discontinuas tiene una cardinalidad mayor que el conjunto de las funciones continuas, en consecuencia el conjunto de las funciones discontinuas comprende un terreno mucho más amplio que el de las funciones continuas.

Ahora bien, el conjunto de las funciones pertenecientes a las *clases de Baire* tiene la cardinalidad del continuo, es decir, hay funciones discontinuas que no pertenecen a las clases de Baire, no obstante, el conjunto de las funciones continuas corresponde a un solo peldaño de infinitos pertenecientes a dicha clasificación, en este sentido, las *clases de Baire* muestran la diversidad de las funciones discontinuas respecto a las continuas.

Las funciones continuas más comunes son aquellas cuyas propiedades se tornan "fáciles"de estudiar o que se pueden abordar con ayuda de algoritmos algebraicos bien definidos. Algunos ejemplos de este tipo de funciones son:

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, $\quad f_1(x) = sin(x)$, $\quad h(x) = tan(x)$, $\quad w(x) = ln(x)$, $g(x) = \frac{x^3+3}{\sqrt[4]{x^5+x^3-1}}$, $\quad$ etc.

Se puede llegar a pensar que el conjunto de las funciones continuas está comprendido en su totalidad por este tipo de funciones como las que se acaban de describir. Sin embargo no es así, pues basta nombrar aquellas funciones continuas no diferenciables cuyo estudio no solo involucra procedimientos algebraicos sino también proceso propios del análisis. Para notar de manera concreta este hecho, se exhibirá la construcción de una función continua, que "parece ser"diferenciable únicamente en un conjunto finito de puntos dentro de un intervalo acotado.

Históricamente, Las funciones continuas no diferenciables fueron muy importantes, pues a finales del siglo XVII se creia que toda curva continua debia tener tangentes en todas partes, con excepción posiblemente en algunos puntos aislados, sin embargo, en 1806, Bolzano contrastaria esta idea al construir una función no diferenciable en ningun punto (Ríbnikov, 1987, págs 368-370). No obstante, durante varios años se afirmó, que la primera función continua de este tipo habia sido formulada por Weierstrass:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^k cos\left(b^k \pi x\right)$$

con $0 < a < 1$, b entero impar y $ab > 1 + \frac{2}{3}\pi$. (Ríbnikov, 1987, pág 370).

Descripción del procedimiento:

Sea un punto O en el plano, y considérese la sucesión de n segmentos:

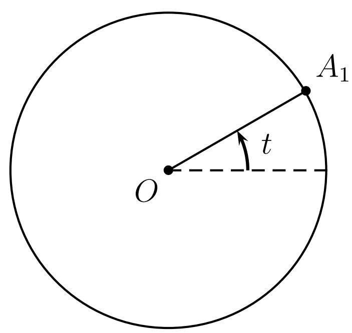
$$\overline{OA_1},\ \overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ ...,\ \overline{A_{n-1}A_n}$$

con las siguientes propiedades:

- El segmento $\overline{OA_1}$ rota un ángulo de t radianes alrededor de O en sentido contrario a las manecillas del reloj.
- $A_{i-1}A_i = \frac{A_{i-2}A_{i-1}}{2}$, $1 \leq i \leq n$ (cada segmento tiene la mitad de la longitud del anterior).
- Cada segmento $\overline{A_{i-1}A_i}$ rota alrededor del punto A_{i-1} un ángulo de -4θ, siendo θ el ángulo que rota el segmento inmediatamente anterior.[1]

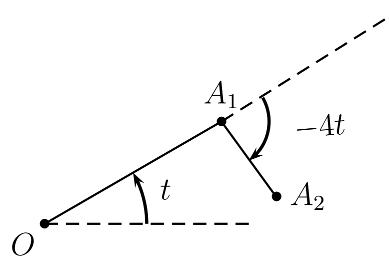
de esta manera, para $n = 1$, se tiene un solo segmento $\overline{OA_1}$ y si se toma a t como un parámetro positivo variable, entonces el lugar geométrico descrito por A_1 es una circunferencia como se muestra en la figura 4.1.

Figura 4.1



para $n = 2$, se tiene dos segmentos, el primero $\overline{OA_1}$ que rota t radianes alrededor de O, y el segmento $\overline{A_1A_2}$ que de acuerdo a la definición, su longitud es la mitad de la del segmento $\overline{OA_1}$ y rota $-4t$ radianes alrededor de A_1, como se muestra en la figura 4.2.

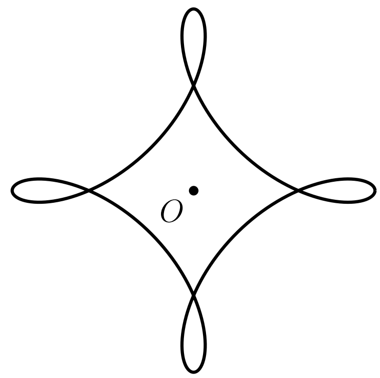
Figura 4.2



En la figura 4.3 se presenta el lugar geométrico descrito por A_2.

[1]Se puede tomar un ángulo de $a\theta$, $a \in \mathbb{R}$. En este caso, $a = -4$.

Figura 4.3



para $n = 3$, se tienen 3 segmentos $\overline{OA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_1A_2}$: los segmentos $\overline{OA_1}$ y $\overline{A_1A_2}$ cumplen con las mismas propiedades que para el caso $n = 2$ y el segmento $\overline{A_2A_3}$ tiene la mitad de la longitud del segmento anterior que es A_1A_2 y rota alrededor de A_2 un ángulo de $-4(-4t) = 16t$ radianes. El lugar geométrico descrito por A_3 se presenta en la figura 4.4.

Ahora bien, si se toman 20 segmentos, es decir, $n = 20$, el lugar geométrico descrito por A_{20} se muestra en la figura 4.5.

Figura 4.4

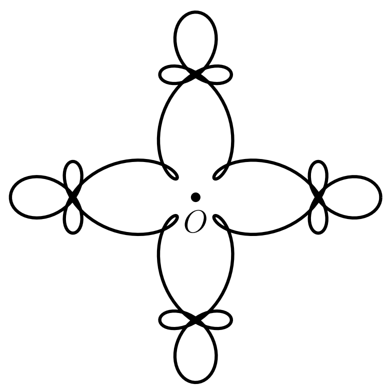
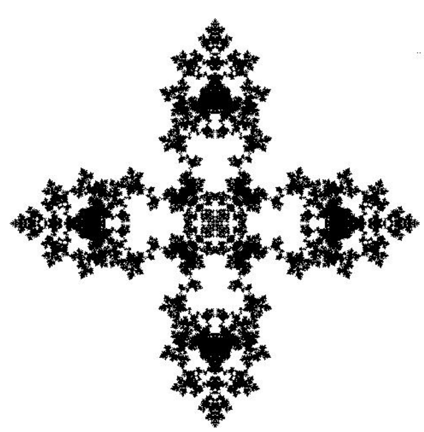


Figura 4.5



En resumen, lo que se tiene es una sucesión de lugares geométricos que depende del número n de segmentos que se tome.

Si ahora se trazan ejes cartesianos con origen en O, y se toma $OA_1 = 1$, entonces la ecuación paramétrica del lugar geométrico descrito por A_n es:

$$L_n(t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^i 4^i}{5} \right), \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} sin\left(t\frac{1-(-1)^i 4^i}{5} \right) \right)$$

en la cual t es el ángulo que rota el segmento $\overline{OA_1}$.
Tómese ahora la abscisa x_n de L_n, es decir:

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^i 4^i}{5} \right)$$

si $n \longrightarrow \infty$ se tiene la serie:

$$S_t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5} \right)$$

para la cual:

$$\frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5} \right) \leq \frac{1}{2^{n-1}}(1) \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R} \tag{4.1}$$

y puesto que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge, entonces la serie S_t converge uniformemente para todo $t \in \mathbb{R}$.[2] En este sentido, se puede definir la función:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5} \right)$$

Para f se tiene que $g_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5} \right)$ es continua para cada $n \in \mathbb{N}$ y como la serie converge uniformemente, entonces f es continua para todo t.[3]

Sea $t_0 \in \mathbb{R}$. $f'(t_0) = \lim\limits_{t \longrightarrow t_0} \frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$, es decir:

$$f'(t_0) = \lim_{t \longrightarrow t_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5} \right) - cos\left(t_0\frac{1-(-1)^n 4^n}{5} \right)}{t-t_0} \tag{4.2}$$

[2]Aplicar criterio M de Weierstrass (Apostol, 1977, pág 271).
[3]La convergencia uniforme de la serie, hace que la continuidad de cada g_n se transfiera a la función límite.

Si ahora se intercambia el límite con el signo de sumatoria[4] entonces:

$$f'(t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \longrightarrow t_0} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right) - cos\left(t_0\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right)}{t - t_0}$$

De donde:

$$f'(t_0) = -\frac{2}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right) \operatorname{sen}\left(t_0\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right)$$

si $t_0 = 5\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ entonces $f'(t_0) = 0$. Mientras que para los puntos de la forma $t_0 \neq 5\pi k$ se tiene :

$$\lim_{n \longrightarrow \infty}\left(\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right) \operatorname{sen}\left(t_0\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right) \neq 0$$

En consecuencia, la serie diverge.

En general, para determinar la diferenciabilidad de f se ha conjeturado que:

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2^{n-1}} cos\left(t\frac{1-(-1)^n 4^n}{5}\right)\right) \tag{4.3}$$

Resultado para el cual no se ha logrado aplicar un criterio apropiado para probarlo. Sin embargo, si se asume tal suposición se tiene que para los puntos de la forma $t = 5\pi k$, la función f es diferenciable y la derivada es cero, mientras que para los demás puntos f no es diferenciable, de manera que para todo intervalo acotado, f va a ser diferenciable a lo sumo en un conjunto finito de puntos.

Si en la tercera condición que define a la sucesión de segmentos se toma en vez de -4, cualquier número real $a \in (-\infty, 2] \cup [2, \infty)$ se obtendría una familia de funciones no diferenciables, hecho que se puede verificar siguiendo el procedimiento anterior.

[4]El intercambio de orden entre límite y sumatoria requiere elementos conceptuales que no se han determinado por lo cual, el proceso que sigue se ha realizado de manera formal.

5. CONCLUSIONES

5.1. CONCLUSIONES TÉCNICAS ACERCA DE LA SEMICONTINUIDAD EN LA OBRA DE BAIRE

En este apartado se presentan algunas conclusiones puntuales de tipo técnico, la primera resume en términos generales la importancia de la semicontinuidad en el resultado central de la obra de Baire. La segunda y la tercera, son extraídas de la referencia que ha guiado principalmente este trabajo: *El concepto de semicontinuidad de Baire en las ivestigaciones de Fréchet.*

1. En general, Baire demuestra una propiedad que cumplen cierto tipo de funciones de varias variables, para después demostrar que las condiciones necesarias de **T1**, constituyen un caso particular de dicha propiedad.

   A pesar de que el concepto de semicontinudad no aparece explícito en la formulación de **T1** este es el eje director de la demostración de este teorema. En este sentido, el paso fundamental que Baire da en la demostración de la necesidad de **T1** es la construcción de la función α_σ, pues es ésta la que permite aplicar las propiedades inherentes a la semicontinuidad, lo que conduce a evidenciar la característica fundamental de las funciones de dos variables que cumplen con las propiedades definidas en el apartado 3.1, característica enunciada en el teorema 3.5 y que es la que determina las condiciones necesarias de **T1**.

2. En la obra *Sur l' origine de la notion de semi-continuité* René Baire introduce el concepto de semicontinuidad, y ademas afirma que fue conducido a este concepto no a través de la designación a priori de las dos ecuaciones inherentes a la definición de la continuidad[1], si no a través del análisis de las funciones contraejemplo al segundo teorema falso de Cauchy, tal como se ha presentado en el capítulo 2.

3. El concepto de oscilación es el que guía a Baire para medir el grado de discontinuidad de una función. Entiéndase el grado de discontinuidad, como la característica especial que deben cumplir las funciones pertenecientes a las Clases de Baire para ser catalogadas en alguna de los eslabones de tal clasificación. Así por ejemplo, el grado de discontinuidad de las funciones de la clase 2 es mayor que el de las funciones de la clase 1 pues el conjunto de discontinuidades de una función de C_2 es "más complejo" que el conjunto de discontinuidades de una función de C_1.

[1] ARBOLEDA L. , RECALDE L. (2005) *El concepto de semicontinuidad de Baire en las ivestigaciones de Fréchet.*

4. Teniendo como base **T1** y los resultados de Baire respecto al segundo teorema falso de Cauchy, la noción de discontinuidad puntual, se propone extender esta noción a funciones de varias variables como sigue:

   Definición 5.1 *Sea f una función de varias variables y P un punto de su dominio, si en toda bola $B(P,r)$ existen puntos donde la función es continua, entonces se dice que f es puntualmente discontinua.*

5.2. BAIRE Y LA REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

A lo largo de la historia, los matemáticos siempre han tratado de trabajar con funciones representables analíticamente, ya que son las que han logrado tener aplicación. Una expresión analítica es una fórmula constituida a partir de las operaciones elementales de la aritmética, la composición de funciones, las series, productos infinitos y límites. Ejemplos de expresiones analíticas son:

$$x^n \ , \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \ ,$$

En este sentido, las funciones representables analíticamente son aquellas que pueden representarse mediante una expresión analítica. Las funciones polinómicas y trigonométricas, son ejemplos de funciones representables analíticamente puesto que un polinomio se expresa mediante operaciones elementales de la aritmética, mientras que para funciones trigonométricas se tiene:

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \ , \ sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

Ahora bien, es importante mostrar cuando una función no está representada analíticamente, así por ejemplo, la función:

$$g_1(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in (-\infty, 0) \\ 4x & \text{si } x \in [0, \infty) \end{cases}$$

no está representada analíticamente pues ella está expresada mediante 2 representaciones analíticas independientes.
Considérese ahora, la función:

$$h(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \in (\pi(2n-1), \pi(2n+1)), \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = (2n-1)\pi, \text{ para todo } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Esta función no esta representada analíticamente. Para lo cual surge la pregunta: ¿es posible representarla analíticamente?, es decir, escribir h bajo una expresión analítica. La respuesta es si. Una representación analítica es:

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\operatorname{sen} nx}{n}$$

En este sentido cabe preguntar si dada una función definida a trozos, ¿es posible determinar si tiene o no representación analítica? El principal teorema de Baire (**T1**) brinda una respuesta parcial, por lo menos, para un grupo especial de funciones.
Según el teorema **T1**, una función discontinua f, es el límite de una serie de funciones continuas, si y sólo si f es puntualmente discontinua respecto a todo conjunto perfecto. En consecuencia toda función puntualmente discontinua respecto a cada conjunto perfecto, es el límite de series de funciones continuas, en otras palabras:

Cualquier función puntualmente discontinua es representable mediante series de funciones continuas, es decir, representable analíticamente.

En este sentido, funciones como la parte entera que son discontinuas pero que puede demostrarse, son puntualmente discontinuas, tienen representación analítica mediante series de funciones continuas.

Es importante notar que aunque el teorema de Baire no brinda un procedimiento general para hallar la representación analítica de funciones puntualmente discontinuas, dicho teorema asegura su existencia.

A continuación, se presenta la existencia de una función que pese a no ser puntualmente discontinua, tiene representación analítica. Considérese la función característica de los números racionales. Como se sabe, esta función es discontinua en todo punto, por tanto no es puntualmente discontinua, sin embargo, esta tiene representación analítica:

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} (\cos m!\pi x)^{2n} \right)$$

En consecuencia, existen funciones que pese a no ser puntualmente discontinuas, tienen representación analítica.

De lo anterior se evidencia que la teoría de Baire roza en los terrenos de la representación de funciones, un problema que tiene su génesis en las primeras concepciones de función y que fue abordado por matemáticos como Taylor, Fourier, Borel y Lebesgue, por nombrar algunos. Sería interesante elaborar un estudio de corte histórico que incluya los aspectos epistemológicos más relevantes sobre la representación de funciones.

5.3. EL ERROR, UN ALIADO EN LA EVOLUCIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Sin duda alguna, los trabajos de Baire son un claro ejemplo de que el error en matemáticas puede conducir hacia el avance y enriquecimiento del conocimiento matemático.

En 1821 El matemático frances, Louis Agustin Cauchy publica su libro Curso de análisis, en el cual el estudio de funciones continuas ocupa un lugar primordial. Particularemente, Cauchy enuncia y prueba dos teoremas relacionados con la continuidad, el primero se refiere a la convergencia de series de funciones continuas, y el segundo referido a la continuidad de funciones de varias variables los cuales han sido descritos en los apartados 1.2.1 y 1.2.2 respectivamente.

Debido al surgimiento de múltiples contraejemplos de los anteriores teoremas, los matemáticos franceses de mediados del siglo XIX dedicaron sus esfuerzos al estudio de estos teoremas que pasaron a la posteridad como falsos teoremas de Cauchy.

En particular, de la indagación sobre el primer teorema falso de Cauchy, surgió el concepto de convergencia uniforme, el cual fue objeto de diversos estudios puesto que este tipo de convergencia, permitía la conservacion de propiedades como la continuidad y la integrabilidad en sucesiones de funciones.

Por su parte, El estudio del segundo teorema falso de Cauchy y sus contraejemplos desembocó en el establecimiento del concepto de semicontinuidad por parte de René Baire, el cual se referenció en el capítulo 2 y en el apartado 5.1.

Para concluir lo planteado hasta el momento se presenta la siguiente cita:

"*Los ejemplos que se han puesto de presente muestran que el error, en lugar de frenar el desarrollo de las matemáticas sirvió de catalizador para el surgimiento de nuevas teorías. Si el desarrollo histórico de las matemáticas no se hubiera cruzado con estos errores, quizás se habría tardado mucho tiempo más en aparecer en el ambiente matemático las herramienta de la convergencia uniforme, de la semicontinuidad y el enorme campo de los conjuntos analíticos*"(Chaves, 2006, pág 76).

5.4. LA OBRA DE BAIRE Y EL VASTO CAMPO DE FUNCIONES

El trabajo de Baire es de gran relevancia, pues la importancia que le da a las funciones discontinuas, la concibe a partir de uno de los problemas más cruciales en el siglo XIX como lo es la convergencia de series de funciones, además, logra incorporar la teoría cantoriana de conjuntos como eje director en sus principales desarrollos.

Históricamente, la obra de Baire es muy importante, en tanto que evidencia que para el avance de las matemáticas, en muchas ocasiones es necesario un cambio de paradigma, en este caso el paradigma predominante era el rechazo hacia las funciones discontinuas y la tendencia hacia el estudio de las funciones continuas. Los estudios sobre funciones discontinuas eran considerados innecesarios para la escuela francesa del siglo XIX liderada por Cauchy, pues no se les asociaba una aplicación importante. Lo anterior impedía ver la riqueza presente en las funciones discontinuas y el vasto campo que ocupan, de hecho la cardinalidad del conjunto de las funciones continuas es igual a la cardinalidad de $\mathbb{R}$, mientras que la cardianlidad del conjunto de todas las funciones es mayor.

A manera de reivindicación histórica del campo de las funciones continuas, se concluye que este ha sido un gran campo de interés para las matemáticas. La función construida en el capítulo 4, se presenta con el objetivo de mostrar que incluso en la primera clase de funciones, las continuas, se encuentra funciones exóticas, a pesar de pertenecer apenas al primer peldaño de infinitos incluidos en la jerarquía de Baire. La función a la que se hace referencia es continua la cual parece ser diferenciable en un conjunto muy reducido de puntos, lo que permite darle el apelativo de función exótica, sin embargo, en esta misma vía, hay funciones más exóticas que la presentada en el capítulo 4. Tales son aquellas que en cada punto de su dominio no son diferenciables pese a ser continuas. Tal como se muestran en el apartado 2.7.4 del texto *"El aporte de Gaston Darboux al desarrollo de la teoría de funciones"*[2]. La importancia de las funciones continuas se ha resaltado en este ejemplo exhibido, en cuanto al estudio de la diferenciabilidad, propiedad necesaria para la continuidad. Así, dentro del análisis, cuyo objeto de estudio es la función y donde se estudia de estas principalmente las propiedades de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad, se resalta que la diferenciabilidad quedaría reducida a funciones de la Clase 0 y a algunas de la Clase 1.

Todo lo anterior induce a presentar una analogía histórica de la obra de Baire con el surgimiento de las geometrías no euclidianas, de hecho el surgimiento de las funciones discontinuas en medio de una tendencia hacia lo continuo en es tanto como el surgimiento de las geometrías no euclideanas en medio de una tendencia hacia lo euclideo. Así como las geometrías no euclidianas abren un campo de investigación no percibido para la concepción euclidiana, la tendencia a lo discontinuo promovida por Baire muestra una riqueza investigativa inimaginable para la idea continuista del análisis.

[2]ZAMBRANO, Edward. (2005). tesis de pregrado.

CRONOLOGÍA DE LA TEORÍA DE FUNCIONES

Se presenta a continuación una cronología de los autores más relevantes en el surgimiento de la teoría de funciones.

1712 Taylor enuncia su famoso teorema sobre la aproximación de una función derivable mediante polinomios.

1755 Leonard Euler, define función como una dependencia cualquiera de una cantidad respecto a las cantidades variables. También introduce una clasificacion de funciones en continuas y discontinuas.

1797 Lagrange formúla su teoría formal de series de potencias, la cual tiene gran influencia en los trabajos de Weierstrass sobre funciones analíticas.

1821 Louis Augustin Cauchy, publica su libro *Curso de Análisis* en donde define función continua y enuncia dos teoremas relacionados con la continuidad de funciones, conocidos como falsos teoremas de Cauchy. Estos teoremas motivaron en gran medida el trabajo de Baire.

1822 Joseph Fourier, en su *Théorie analytique de la chaleur*, exhibe algunos contaejemplos al primer teorema falso de Cauchy.

1829 Peter Leujene Dirichlet, define la *función característica de los racionales* la cual tiene un alto grado de discontinuidad.

1841 Weierstrass establece la noción de convergencia uniforme.

1883 George Cantor desarrolla la teoría de ordinales transfinitos, la cual sirve de plantilla para las Clases de Baire.

1896 René Baire halla contraejemplos al segundo falso teorema de Cauchy, a partir de los cuales llega al concepto de semicontinuidad.

1897 Baire introduce funciones semicontinuas superior e inferiormente, asi como también, la noción de función puntualmente discontinua y la formulación de **T1**.

1898 Borel publica el primer libro de la colección de monografías sobre teoría de funciones.

1905 Lebesgue en *"Sur les functions représentables analytiquement."* demuestra la existencia de funciones de cada una de las clases de Baire y exhibe una función que no pertenece a dicha clasificación.

1914 Y. Souslin detecta un error en la demostración hecha por Lebesgue en 1905. Es asi como la conjetura de Baire vuelve a ser un problema abierto.

1930 Lusin en *"Les ensembles analytiques et leurs applications"* demuestra la validez de la conjetura de Baire.

BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T. M. (1977) Análisis Matemático. Editorial Reverté S. A., Barcelona, Segunda Edición, 1977.

ARBOLEDA, L. RECALDE, L.(2005) *El concepto de semicontinuidad de Baire en las ivestigaciones de Fréchet. Matemáticas: Enseñanza Universitaria,* vol XIII, pp.63-82.

BAIRE, René. (1899) *Sur les Fonctions de variables reélles. Annali di matem.pura ed appl.*, (3), 3(1899), pp. 1-123. (*Œuvres Scientifiques,* Gauthier-Villars*,* Paris, 1990, pp. 49-173*).*

CAUCHY, Augustin Louis. (1821) *Cours d' analyse de l'École Royale Polytechnique*, Imprimérie Royale, Paris. Traducción al español; *Curso de Análisis*, Servicios Editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM, México, 1994.

CHAVES, Andrés.(2006) *Las clases de Baire en el surgimiento de los conjuntos analíticos*. Tesis de Maestría. Universidad del Valle. Cali.

LEBESGUE, Henri. (1905) "Sur les functions représentables analytiquement." *J. de Math. Pures et Appl.*, sér. 6, 1, 1905, pp.139-216.

LUSIN, Nicolas. (1930) *Les ensembles analytiques et leurs applications*. Primera edición, Paris 1930. Segunda edición Chelsea Publishing Company, New York, 1972.

NATANSON, I. P. (1964) *Theory of functions of a real variable.* Tercera edición. Frederick Ungar Publishing Co. New York, Vol 1,2.

RECALDE, Luis. (2003) *La clasificación de funciones de René Baire en el contexto histórico de las matemáticas*. Tesis de doctorado. Universidad del Valle. Cali.

RECALDE, Luis. (2004) *La teoría de funciones de Baire: La constitución de los discontinuo como objeto matemático*. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Cali.

RÍBNIKOV, K. (1987) *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir, Moscú, 1991.

VALLEJO, F. (2008) *La semicontinuidad en el surgimiento de la teoría de*