EL PAPEL DEL REGISTRO SEMIÓTICO DE LAS FIGURAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS DESDE LA RELACIÓN PARTE-TODO: ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES

LUCY YUDY GUZMÁN TORO
ANA LUCIA INSUASTI IBARRA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO
2008

EL PAPEL DEL REGISTRO SEMIÓTICO DE LAS FIGURAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS DESDE LA RELACIÓN PARTE-TODO: ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES

LUCY YUDY GUZMÁN TORO
ANA LUCIA INSUASTI IBARRA

Trabajo presentado para obtener el grado de licenciadas en matemáticas

DIRECTOR DE TRABAJO:
MG. GUSTAVO A. MARMOLEJO AVENIA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO

2008

Nota de aceptación:

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, marzo de 2008

CONTENIDO

RESUMEN

Esta investigación centra su atención en las enormes posibilidades que brinda el registro semiótico de las figuras en la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte-todo. Para ello, se recurrió a una revisión bibliográfica sobre las diferentes investigaciones realizadas en este campo, indagando sobre las diversas dificultades que presentan los estudiantes y las propuestas brindadas por ellos como el caso de las distintas interpretaciones donde ellos se movilizan; de esta manera se propone una serie de situaciones donde predomina la exigencia de transformar unas figuras en otras de contorno global diferente e igual superficie.

El diseño de algunas actividades que se implementaron en este trabajo y el análisis de algunos textos escolares, se desarrolló de acuerdo con el modelo teórico, que propone Raymond Duval en relación con la actividad cognitiva vinculada con los sistemas y los registros semióticos de representación; en particular en lo que corresponde al acto de ver y tratar las figuras geométricas.

La población de interés fueron los textos escolares de tercero y cuarto grado de Educación Básica Primaria más usado en la ciudad de Pasto de las instituciones gubernamentales.

ABSTRACT

This research its focus on the huge possibilities that the semiotic register of the figures provides in the construction of fractional numbers seen from the relationship whole – everything. To do this, it was necessary to carry out a literature review about the different researches done in this area, and also about the difficulties the students face and the different proposals provided by the researchers, for example, in the case of the different interpretations where they are immerse; this way, it is proposed a set of situations where the exigency of transforming some figures into others a different global environ and equal area.

The design of some activities that were implemented in this research and the analysis of some textbooks were according to the theoretical model proposed by Raymond Duval; in which, the systems and the semiotic registers of representation are related with the cognitive activity, and particular the act of seeing and treating the geometric figures.

The most used textbooks of third and fourth grade in Pasto in the governmental institutions were the populations of in this research.

PALABRAS CLAVES

Registros de representación, figuras geométricas, visualización, factores de visibilidad, los números fraccionarios y la relación parte-todo.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las temáticas a la que en los primeros ciclos de la educación básica se le asigna mayores espacios de reflexión es el concerniente a los números fraccionarios (basta con remitirse a los estándares de calidad y observar que desde tercero hasta séptimo grado se estudia este objeto matemático). Sin embargo son muchas las dificultades a las cuales se encuentran los estudiantes para su comprensión y hasta el momento una enseñanza "tradicional" no ha logrado avances significativos en su comprensión ya que después de haber encontrado falencias en algunos resultados obtenidos tanto en pruebas nacionales como internacionales[1] e incluso en nuestra práctica docencia, se puede afirmar que abordar sobre ellos no es tarea fácil. A partir de esos resultados, se puede observar que los estudiantes presentan dificultad en la comprensión de la unidad como patrón de medida y en la partición de la misma, esto los lleva a tener confusiones en la resolución de problemas o actividades que involucren la comprensión de la unidad geométrica o aritmética y su partición.

En virtud de lo anterior se han desarrollado durante los últimos años múltiples investigaciones sobre la enseñanza de estos en los distintos períodos de la escolaridad en que formalmente se presenta[2]. Esta serie de trabajos muestra cómo los números fraccionarios están ligados a una red conceptual de gran complejidad, cuyo aprendizaje tardaría un gran período de tiempo. En esta red conceptual se pueden identificar nociones como las de división, partición, acortamientos, relaciones parte–todo, medidas fraccionarias, razones,

[1] Pruebas saber en 1999 donde los estudiantes no alcanzaron niveles satisfactorios en matemáticas específicamente en números fraccionarios.

Pruebas TIMSS 2003, cuyos resultados no fueron alentadores en el bloque de contenido referente a fracciones y sentido numérico ya que de 51 preguntas solo el 34% de los que presentaron la prueba lograron dar respuesta correcta a ella. Tomado de www.mineducacion.gov.co/prueba/1723/article-100075.html

[2] CASTRO, DILIA; SUÁREZ MARIELA; *Representación de los números fraccionarios en un registro unidimensional.* Ministerio de Educación. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía.

proporciones, etc. La comprensión de esta red conceptual permite el tratamiento didáctico de su enseñanza a través del diseño de situaciones significativas que permitan al estudiante trabajar los distintos aspectos que conforman los números fraccionarios.

También los estudiantes presentan gran dificultad en la compresión y resolución de problemas que involucran cantidades enteras; más aún, si estas son fraccionarias, debido a que durante el estudio de las fracciones quedaron grandes vacíos que llevaron a continuas repeticiones de errores aprendidos lo que ocasiona frustración al momento de aplicar lo asimilado y no poder dar cuenta con exactitud de un hecho observado en una representación[3]. Las dificultades, en lo que corresponde a la construcción de los números fraccionarios en cualquier época de la vida escolar ocurre por la falta de claridad en el instante de establecer las relaciones entre las diferentes operaciones y representaciones. Situación que va dejando, año tras año grandes vacíos. Varios investigadores[4] muestran lo complejo que resulta para un niño el apropiarse de la idea de unidad relativa y lograr manejar de forma apropiada un sistema basado en un sistema de unidades de valores diferentes. De igual manera muestran cómo los niños tienen gran dificultad para llegar a la comprensión y manejo adecuado de los algoritmos de las operaciones básicas de la aritmética de los números fraccionarios y cómo conviene incentivar en un comienzo el aprendizaje de procedimientos no formales más cercanos a las comprensiones ganadas por los niños.

¿Por qué tanto miedo al trabajar con los números fraccionarios? Si nos damos cuenta los niños en sus diferentes actividades hablan de "gastar la mitad de lo que me dieron para las onces y ahorrar la otra mitad para comprar…", "repartir un grupo en tres partes iguales". Hasta aquí es fácil de aprender. Entonces ¿en que parte se perdió el gusto por las fracciones?, ¿será que saltamos muy

[3] MARTÍNEZ, C; LIZCANO, M; *Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones.* Revista EMA. décima Edición. tomo 8. Bogota (2001)

[4] DICKSON, L. BROWN, M. y GIBSON, O. *El aprendizaje de las Matemáticas*. Ed. Labor. Barcelona.1991. LERNER, D. *"La Matemática en la escuela"* Buenos Aires, Ed Aique. 1992.

rápido a la simbolización y no reforzamos el trabajo para que el estudiante comprenda mejor los números fraccionarios?

Algunos autores[5] muestran la importancia de la variedad de representaciones para la significación de cantidades fraccionarias ya que estas no solo son un sistema de signos que tiene una sintaxis, sino un conjunto de signos que tienen unas reglas de tratamiento y de conversión a otros registros que permiten dominar el objeto. Diferentes estudios[6], están centrados en la propuesta de líneas generales para la construcción dentro del contexto escolar de los números fraccionarios y algunos de ellos han permitido el estudio de variables desde lo cognitivo. Todas estas investigaciones logran brindar elementos de análisis frente a la complejidad de la construcción y enseñanza de las relaciones fraccionarias debido a la variedad de significantes problemas además de conocer sus características y propiedades.

Las matemáticas es un área que brinda en un gran número de estudiantes muchas dificultades, no solamente en la actualidad sino desde tiempos remotos. Esto tiene que ver con una característica importante de la actividad matemática que es el uso de diversos sistemas de expresión o representación, tales como la escritura para los números, las figuras geométricas, los diagramas, los esquemas, etc. Es por esto, que el conocimiento matemático tiene unas características propias que hace que no sea posible el acceso a este conocimiento sin el recurso a una variedad de registros de representación. Aprender matemáticas desde la perspectiva semiótica consiste en el desarrollo de coordinaciones progresivas entre variados sistemas semióticos de representación para así poder discriminarlos y coordinarlos para llegar a ser capaces de transformar cualquier representación[7]. En matemáticas, los

[5] BROUSSEAU, G. "*Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática",* trad. de su tesis de graduación, Facultad de Matemática, Universidad de Córdoba. 1986

KAMII, C.K., *El niño reinventa la aritmética II*, Madrid: Visor Distribuciones. 1989

[6] Realizados por GALLARDO Y ROJANO (1988); VASCO (1994); ROJANO (1994); OHLSSON (1988); MANCERA (1992); JIMÉNEZ Y OBANDO (1999); FREUDENTHAL (1994); MARTÍNEZ C Y LASCANO M (1999); LLENARES. S Y SÁNCHEZ. M (1998); CARRETERO (1986, 1987 Y 1989)

[7] DUVAL RAYMOND, *En la Plenary Ardes de la 24ª conferencia del PME,* 2000. Pág. 65

sistemas semióticos son los principales componentes de la actividad cognitiva que permite al individuo entenderla para lo cual se recurre a varios registros de representación[8], es así que la posibilidad de un acceso directo a los objetos matemáticos fuera de toda representación se vuelve casi ineludible.

Una de las representaciones de los objetos matemáticos que es frecuente en nuestra actividad son las figuras geométricas, las cuales son una potente herramienta heurística en situaciones complejas permitiendo la ilustración de proposiciones y la conducta de abducción que consiste en delimitar las hipótesis que han de considerarse para la solución de un problema planteado, pero hacer esto, no es asunto obvio y espontáneo. Para ello se hace necesario que el estudiante pueda discriminar entre diferentes formas de ver sobre la figura junto con todas sus potencialidades, es decir, es necesario reconocer, aprovechar o someter, según sea el caso, la presencia de ciertos factores (factores de visibilidad) los cuales hacen posible discriminar sobre una figuras las subfiguras o configuraciones pertinentes a la resolución de dicho problema.

Nuestro sistema de educación falla en restarle importancia a la educación básica porque en ella se encuentran educadores cuya formación en educación matemática es mínima y en ellos recae la responsabilidad de hacer el primer acercamiento a las principales nociones matemáticas. En este sentido los textos escolares de mayor uso por parte de los educadores se constituyen en un importante referente sobre el cual situarse para analizar las maneras de cómo se acostumbra a presentar determinados objetos. En nuestro caso cómo se introduce el concepto de fracción en la relación parte – todo.

---

[8] Un sistema de signos se constituye en un registro de representación cuando permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: en primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas que sean perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna* cosa en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, las representaciones dadas en un sistema de representaciones convertidas en otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa. Duval, R. *Semiosis y pensamiento humano*, Cali: universidad del Valle, 1999

Es por esto que el presente documento esta encaminado a brindar algunos elementos que contribuyan a realizar una reflexión sobre la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte – todo y el papel que juega el registro semiótico de las figuras en dicha construcción. En este sentido, la población de interés se centrará en algunos textos escolares de grado tercero y cuarto de la Educación Básica Primaria en los que se presenten el tema a tratar, para determinar los elementos que se utilizan para dicha construcción. Las variables a tener en cuenta para el análisis son: En primer lugar, el rol de las figuras geométricas en el caso de lo dinámico y lo estático, en segundo lugar, los factores de visibilidad presentes en el desarrollo de actividades con los números fraccionarios y por último la utilización de los objetos físicos en la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte-todo.

2. ALGUNOS ASPECTOS QUE SE PRESENTAN EN EL MOMENTO DE LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

2.1 IMPORTANCIA DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Es necesario reflexionar que quien tenga una buena comprensión de los números fraccionarios tendrá una mejor manera de comprender los fenómenos y situaciones que le rodean, y por tanto, de relacionarse con su entorno, ya que estos se encuentran inmersos en nuestro diario vivir y ayudan a comprender algunas cuestiones cotidianas matematizables de nuestro mundo[9]. Entre otras se pueden citar a manera de ejemplo: áreas, la densidad, velocidad, el interés ganado en una cuenta de ahorros, los descuentos en un almacén, los resultados de una encuesta, etc. Al mismo tiempo, se los utiliza para referirse a expresiones como "me serví medio litro de leche", "mi casa está en la mitad de la cuadra", "puse el cuarto de kilo de queso en un plato","queda un poco menos que tres cuartos de litro de aceite", "el señor pidió un quinto de veinte mangos" y así infinidad de situaciones que las podemos extraer de nuestra vida cotidiana.

Los números fraccionarios no son importantes únicamente en los contextos anteriormente mencionados, sino incluso en los diferentes conocimientos que se deben aprender en la escuela, ya que son potentes herramientas conceptuales para otras disciplinas, tales como las ciencias naturales o sociales. Por otra parte, establecen una base fundamental, no sólo para el estudio de la matemática, sino también para la formación en otras disciplinas como la física, la química, la biología, etc. ya que, los números fraccionarios promueven como la física, la química, la biología, etc. ya que, los números fraccionarios promueven estrategias y técnicas para la resolución de problemas

[9] CASTRO, DILIA; SUÁREZ MARIELA; *Representación de los números fraccionarios en un registro unidimensional.* Ministerio de Educación. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía.

junto con la capacidad de operar entre ellos lo cual fortalece el razonamiento, la argumentación y la interpretación de los mismos.

Sin embargo, para abordar este objeto matemático es necesaria una reconceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir junto con la comprensión de situaciones donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se quiere medir[10]. En la educación colombiana se ha establecido que el estudio de los números fraccionarios se debe iniciar en el segundo ciclo de la Educación Básica primaria continuando con el primer ciclo de Educación Secundaria para así dar lugar al estudio de los números racionales. Son cinco años dedicados a su enseñanza, tiempo considerablemente significativo. A pesar de esto, podemos observar que persisten errores al tratar con estos objetos, no solo en estudiantes de educación secundaria sino inclusive en estudiantes de educación superior. A continuación se exponen algunos de los errores que son reiteradamente cometidos por los estudiantes[11]:

- Cuando se pide, por ejemplo, sumar $\frac{3}{5}+\frac{4}{7}$ una forma de proceder por los estudiantes es $\frac{3+4}{5+7}=\frac{7}{12}$, confundiéndose con el algoritmo del producto de fraccionarios, del mismo modo presentan dificultad al tratar de resolver $\frac{1}{5}+\frac{1}{7}$ realizan lo siguiente $\frac{1}{5+7}=\frac{1}{12}$ dejando el numerador y sumando solamente los denominadores, es decir, aplican equivocadamente los algoritmos de la adición con fracciones homogéneas.

[10] ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias Ciudadanas. Ministerio de Educación Nacional. 2006

[11] Los errores mencionados se tomaron de la práctica docente realizada por estudiantes de octavo semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas en la Institución Educativa Municipal Mariano Ospina Rodríguez, INEM-PASTO. 2005

- Para el caso de la multiplicación de números fraccionarios los estudiantes realizan procesos mecánicos, pero en el momento que se cuestiona sobre los resultados obtenidos y su relación con las fracciones operadas tratan de relacionar las fracciones como si fueran números naturales.

- Otra situación en la que los estudiantes presentan confusión es cuando se da a conocer un número fraccionario en sus diferentes interpretaciones, para ellos es difícil asimilar que una fracción puede ser representada de diferentes maneras.

- La relación de orden con los números fraccionarios es otro aspecto que sobresale en los errores comunes que cometen los estudiantes puesto que confunden el orden de los números naturales con el de las fracciones.

- Cuando se presentan dos fracciones, por ejemplo $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$, algunos estudiantes no logran comprender el por qué estas dos fracciones indican la misma cantidad.

Pero, como se mencionó anteriormente, se debe tener en cuenta que a los números fraccionarios se le dedica un tiempo considerable para su estudio, entonces:

2.2. ¿CÓMO LOGRAR UN APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO Y AUTÓNOMO ENTORNO A LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS EN NUESTROS ESTUDIANTES?

Es importante que para la enseñanza de los números fraccionarios se deba tener en cuenta tres aspectos fundamentales. En primer lugar es necesario conocer formalmente la estructura matemática de los números fraccionarios.

Donde se enunciaran teoremas y no se realizarán las demostraciones, se presentarán las principales propiedades que hay entre ellos. Vale la pena resaltar, que en ocasiones se tiende a confundir el número fraccionario con el número racional, por lo tanto, es preciso realizar una distinción entre ellos, lo cual ha dado lugar a que se realicen diferentes investigaciones donde se hace alusión a que "los números fraccionarios son el recurso fenomenológico del número racional, mientras que la fracción es la palabra con la que entra el número racional"[12]. La diferencia radica en que los números racionales se definen a partir de un conjunto de clases de equivalencia[13]. Cada clase de equivalencia es un número racional, entonces el representante de la clase puede tomarse como una representación simbólica del número racional. Por ejemplo, las parejas $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}, \ldots$ forman una clase de equivalencia. El representante de la clase es $\frac{1}{2}$, por lo tanto, $\frac{1}{2}$ es una representación simbólica del número racional que expresa la clase de equivalencia. Las clases de equivalencia están formadas por unos elementos. Cada elemento es una fracción. Las fracciones son una forma de expresión simbólica para los números racionales. Por ejemplo, las fracciones $\frac{3}{4} y \frac{6}{8}$ son distintas, pero expresan el mismo número racional[14].

Una vez realizada esta distinción se procede a formalizar los números fraccionarios de la siguiente manera:

Sea $F = \mathrm{Z}^+ x\ \mathrm{Z}^+$, por lo tanto los elementos de F son parejas de la forma (a, b) con b $\neq$ 0, que también se las puede escribir de la forma $\frac{a}{b}$. En este conjunto se tiene:

[12] FREUDENTHAL, HANS. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* 1983.

[13] Cada clase de equivalencia se genera a partir de la relación de equivalencia definida por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$

[14] OBANDO, GILBERTO DE JESÚS. *La enseñanza de los números Racionales a partir de la relación parte-todo.* Universidad del Valle. Santiago de Calí. 1999.

1. Relación de equivalencia: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d = b \times c$

2. Relación de orden: si a, b $\in$ *F* entonces a < b si y solo si existe un $k \in F$ tal que a + *k* = b.

3. Operaciones básicas con las fracciones:

a. Suma: $\frac{r}{s} + \frac{u}{v} = \frac{r \times v + s \times u}{s \times v}$

b. Producto: $\frac{r}{s} \times \frac{u}{v} = \frac{r \times u}{s \times v}$

c. En *F* se define como cero, y se notará 0, a la pareja de la forma $\frac{0}{b}$, esto es $0 \equiv \left\{ \frac{a}{b} \ni a = 0 \right\}$. Cero es el módulo aditivo.

d. En *F* se define el uno, y se notará 1, a la pareja de la forma $\frac{a}{b}$ tales que a = b; así, $1 \equiv \left\{ \frac{a}{b} \ni a = b \right\}$. Uno es el módulo de la multiplicación.

3. La estructura matemática de los números fraccionarios queda expresada en el siguiente teorema:

(*F*, +, ×) forma un cuerpo conmutativo. Esto es:

a. (*F*, +) es un grupo abeliano.

b. La operación × es asociativa, modulativa, conmutativa, todo elemento no cero tiene inverso.

c. La operación × distribuye sobre la operación +.

4. En *F* se tienen las siguientes propiedades:

a. $\forall a \in F, a = 0, \exists b \in F \ni a \times b = 1$

b. $\frac{1}{a \times b} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$

c. $\frac{a}{c} = b \Leftrightarrow a = b \times c \quad (c \neq 0)$

d. $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

e. $(a \neq 0)$ tiene solución única

f. Si se denota $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$ entonces $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \times d}{b \times c}$

g. $\frac{a \times d}{a \times c} = \frac{d}{c}$

En segundo lugar, se debe incluir las interpretaciones que potencializan los números fraccionarios, esto ha dado lugar a numerosas investigaciones[15] relativas al proceso de enseñanza-aprendizaje de las fracciones, cuyos resultados han empezado a indicar que para que el niño pueda conseguir una compresión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con los números fraccionarios, se debe plantear una secuencia de enseñanza, de tal forma que proporcionen a los niños la adecuada experiencia con la mayoría de sus interpretaciones[16]; una vez que planteada la necesidad de las diferentes interpretaciones.

LAS FRACCIONES DESDE LA RELACIÓN PARTE-TODO

Se concibe que las fracciones se presentan si un todo ha sido o esta siendo cortado o dividido en partes iguales, o bien si se experimenta, imagina o piensa como si lo fuera[17]. Es decir, bajo esta interpretación la fracción indica la relación existente entre el número de partes y el número total de las partes que representa el todo; donde el todo recibe el nombre de unidad. La relación parte-

---

[15] BEHR, M; LESH, R; POST, T Y SILVER, E. « *Rational-number concepts* » en *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, Lesh, R., y Landau, M. (Ed)(Academia Press, Nueva cork, 1983)

[16] KIEREN, T. E.: *"On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers",Number and Measurement. Papers from an Research Workshop.* Columbus, Ohio ERIC/SMEAC, 1975.

DIENES, Z. P.: *fracciones* (Teide, Barcelona, 1972)

[17] FREUNDETHAL H. *Fenomenología didáctica de las estructuras.* 1994

todo depende directamente de la habilidad de dividir un objeto en partes iguales o congruentes según el tipo de unidad (continua o discreta) sobre la cual se hace referencia.

Para la unidad continua se hace alusión a "partes congruentes" lo cual no implica que las partes deban tener la misma forma. El todo se puede representar mediante figuras geométricas como: rectángulos, cuadrados, círculos, etc. Mientras que en el contexto discreto, el todo se puede representar por medio de un conjunto de objetos y las partes son subconjuntos donde el número de elementos de cada uno de ellos deben ser iguales. A continuación, se presenta dos ejemplos sobre estos contextos.

En un contexto continuo

Figura A

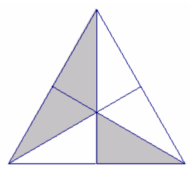
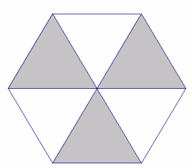
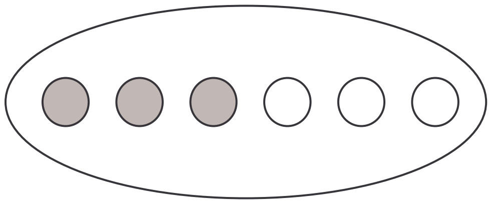


Figura B



Se aprecia que las formas geométricas que representan la unidad difieren. Por lo tanto, se puede señalar que representan la misma fracción, porque así como en la figura A y en la figura B, simbolizan $\frac{3}{6}$, es decir, "de las seis partes del todo se han sombreado tres" o bien, "3 partes de las 6".

En un contexto discreto

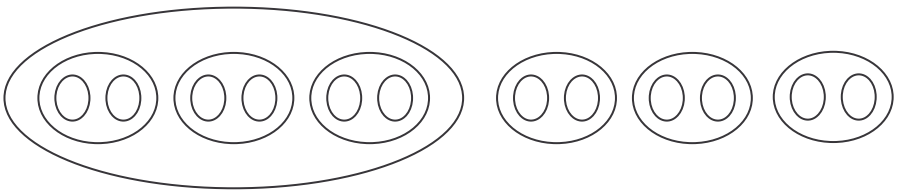


Aquí el todo está formado por el conjunto global de las seis bolas, tres de las cuales son grises. $\frac{3}{6}$ Indica la relación entre el número de bolas grises y el número total de bolas.

Es interesante resaltar que si se utilizan contextos discretos, se fuerza a que el estudiante amplíe su esquema de la relación parte-todo ya que en este caso, se usa un conjunto de objetos discretos como unidades[18].

En un contexto discreto

Si se quiere representar la fracción $\frac{3}{6}$, los subconjuntos que resultan también están formados cada uno de ellos por varios objetos, en contraposición al contexto continuo en que las partes están formadas por trozos simples:



A pesar de enfocar las fracciones desde el punto de vista de "parte todo" está limitado por la fenomenología y las matemáticas, el que produce fracciones

[18] LINARES, SALVADOR; *Matemáticas y aprendizaje: Fracciones* .Editorial síntesis. Madrid. 2000

propias[19]. La didáctica tradicional de la aritmética se limita a esta interpretación; incluso cuando a un niño o a una niña se le solicita que divida un pastel de forma apresura si brindar el espacio necesario para que el haga el proceso abstracto de fraccionar cantidades y valores de magnitudes presentados.

Por otra parte, la relación parte-todo contribuye a la generación del sistema decimal, donde la fracción forma una extensión natural de los números decimales; a demás se puede interpretar a través de la recta numérica, en el cual se realiza la asociación de un punto de la recta a una fracción; esta hace que las fracciones se pueden concebir como números parecidos al 1, 2, 3,…, y que se puedan colocar entre ellos; se advierte que este tipo de representación pude provocar algunas dificultades en niños o niñas[20] al tratar de identificar el segmento unidad cuando la recta se ha extendido más allá de uno o cuando el segmento se ha dividido en un múltiplo del denominador[21]. También puede presentar ciertas ventajas tales como: la aparición de las fracciones impropias, la notación de números mixtos de forma más natural, así como que el conjunto de las fracciones forman una extensión de los números naturales, además de realizar una conexión con la idea de la medida.

La recta numérica sirve también como una buena interpretación de la medida; ya que proporciona el contexto natural para la "suma" y la introducción de la notación decimal[22] . Además debe ayudar al estudiante a "conceptualizar" las relaciones parte-todo en un contexto y reconocer contextos equivalentes que producen nuevas divisiones de unidad, es decir, la recta numérica es una buena introducción para la noción de la relación de equivalencia.

---

[19]

[20] LINARES, SALVADOR; *Matemáticas y aprendizaje: Fracciones.* Editorial síntesis. Madrid. 2000

[21] NOVILLIS, *"An Analysis of the Fraction concept into an Hierarchies of selected subconceps and the testing of the Hierarchical Dependencies"* en Journal for Research in Mathematics Education, Pag. 131-134, 1976

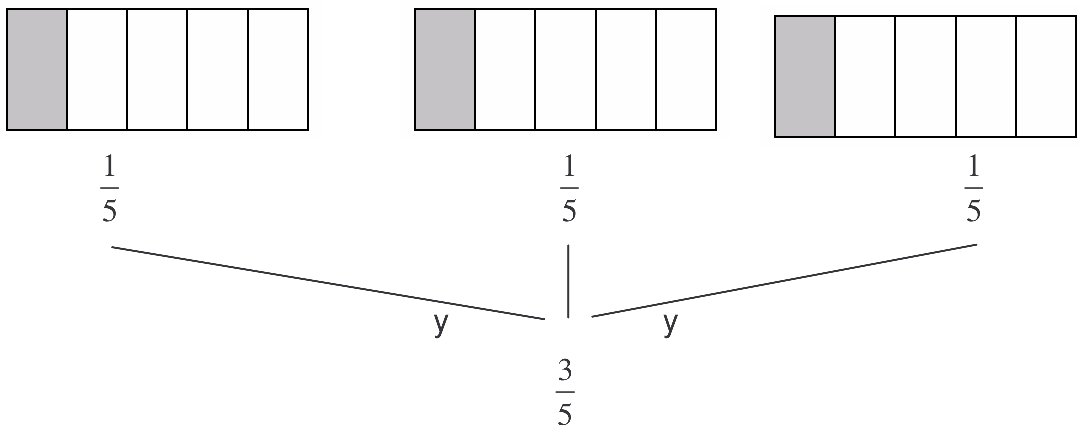
[22] KIEREN. T. E, *"The rational Number Construct-Its Elements Mechanics",* Recent Research on Number Learning, Kieren T. E. (Ed) (Columbus, Ohio ERIC/SMEAC,1980)

Los estudiantes están acostumbrados a manejar la idea de fracción, asociada a un punto sobre la recta numérica, como un recurso didáctico en su trabajo de operaciones con los números naturales. Apoyados con la idea de la medida, los niños y las niñas puede empezar a utilizar la recta numérica en su trabajo con fracciones.

LAS FRACCIONES COMO COCIENTE

En esta interpretación se asocia la fracción que es la operación de dividir un número natural por otro, la interpretación aparece en un contexto de reparto.

Ejemplo[23]: si se tienen 3 barras de chocolate y hay que repartirlas de forma equitativa entre cinco niños, ¿cuánto le quedará a cada niño?



Los procesos de solución (división – reparto) y las simbolizaciones y representaciones de estos pasos que se realizan, se convierten en el trabajo previo a la resolución de ecuaciones, como en el siguiente caso:

$$5\,x = 3$$

Siendo x la cantidad de chocolates que le correspondería a cada niño.

[23] LINARES, SALVADOR; *Matemáticas y aprendizaje: Fracciones.* Editorial síntesis. Madrid. 2000

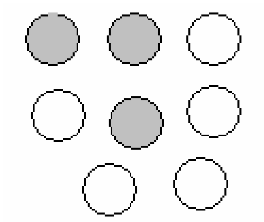
En esta interpretación se realiza la construcción formal de los números racionales, bajo una estructura algebraica y donde las fracciones son elementos de ella.

LAS FRACCIONES COMO RAZÓN

La fracción aparece como razón de una proporción. En algunas ocasiones las fracciones son usadas como un "índice comparativo" entre dos cantidades de una magnitud, es decir, en esta interpretación se utiliza la fracción para indicar una comparación entre dos magnitudes. La comparación se puede realizar en forma directa; cuando se realiza únicamente entre ellas, o de forma indirecta: cuando es necesario una tercera magnitud que compara tanto a la una como a la otra magnitud. En este caso no existe de forma natural de la unidad (un todo)

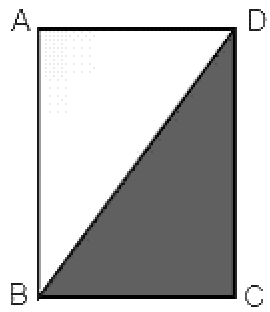
Ejemplos:

En un contexto discreto, la relación entre los balones de color gris y los de color blanco es $\frac{3}{5}$



La relación que existe entre los balones de color blanco y los de color gris es de $\frac{5}{3}$

En un contexto continuo, la relación que existe entre el área del triángulo ABD con respecto al área del rectángulo ABCD es $\frac{1}{2}$

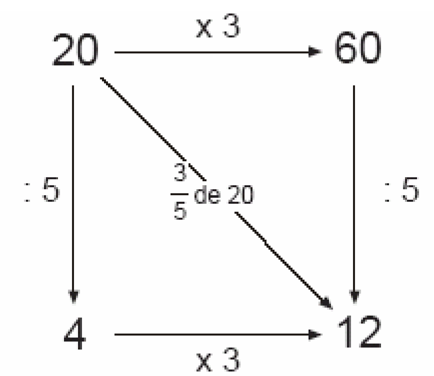


La relación que existe entre el área del rectángulo ABCD con el área del triángulo ABD es $\frac{2}{1}$

LAS FRACCIONES COMO OPERADOR

Bajo esta interpretación las fracciones son vistas en el papel de transformaciones: "algo actúa sobre una situación y la modifica". Se concibe aquí la fracción como una sucesión de multiplicaciones y divisiones. Es decir, la fracción actúa como una operación matemática doble: divide y multiplica. El denominador divide y el numerador multiplica.

Ejemplo: En un salón hay 20 estudiantes y $\frac{3}{5}$ representa la cantidad de estudiantes que gustan de las matemáticas. En otros términos, $\frac{3}{5}$ de 20:



En un contexto continuo, por ejemplo cuando actúa la fracción $\frac{2}{3}$ considerada como operador sobre un segmento de longitud dada, se obtiene otro segmento de longitud $\frac{2}{3}$ del original.

No obstante, los rasgos generales de cada interpretación señalados anteriormente muestran que el ser “hábil” en dichas interpretaciones conlleva el dominio en diferentes estructuras cognitivas que se dan en el estudiante en diversas épocas de su desarrollo, lo que condiciona las secuencias de enseñanza en un momento determinado. Además, desde una perspectiva de enseñanza no es posible aislar por completo cada una de las interpretaciones de las demás, ya que al tratar un determinado tema pueda que estén vinculadas unas y otras.

Por ejemplo, existe relación entre la interpretación de la fracción como operador y la idea de medida en la realización de mapas y planos en la utilización de escalas.

En conclusión los números fraccionarios son objetos matemáticos muy complejo y está formado por diversas interpretaciones e interrelaciones entre ellas.

Este trabajo se ocupará de los números fraccionarios desde la relación parte-todo; porque tanto en contextos continuos como discretos constituye la piedra angular sobre la que se van a desarrollar algunas de las restantes interpretaciones. Esta “naturalidad” del concepto parte-todo se ve reflejada en el desarrollo de las matemáticas en la Básica Primaria. Además, existen opiniones[24] que defienden la idea qué para realizar la introducción al concepto de fracción se debe usar una interpretación simple (contexto de área, continuo),

[24] ELLERBRUSCH, L. PAYNE, J.*”A Teaching Sequence from Initial Fraction concepts Through the Addition of Unlike Fraction”* en *Developing Computational Skills, Suydam, M.N. , M.N.,*y Rey, R. E. (Ed.)(NCTM, Reston VA, 1978)

indicando que la relación parte-todo es la que constituye la interpretación, más natural para los estudiantes, además de constituir un buen modelo para dotar de significado a la suma de fracciones.

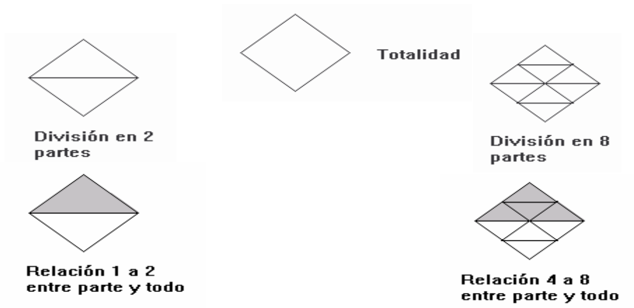
Anteriormente se caracterizó la interpretación parte-todo, en la un todo era dividido en partes, y la fracción describía la relación entre las partes y el número de partes en que se había dividido el todo. El primer contacto que tiene el estudiante con esta relación es relativamente temprano. Expresiones como "media manzana", "medio vaso de leche", pertenecen al vocabulario común que lo rodea; estas aproximaciones a relaciones, son cualitativas y no alcanzan el rango de descripciones cuantitativas de una situación.

Algunas herramientas necesarias para el dominio de la relación parte-todo son: la capacidad de dividir un todo en partes, reconocer el todo, realizar divisiones congruentes, reconocer las partes del todo; Además los atributos de la relación parte-todo, entre los que se resaltan:

a. Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.
b. La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El todo se puede dividir en el número de partes pedidas.
c. Las partes son iguales y tienen que ser del mismo tamaño, es decir congruentes.

Tanto la idea de que las partes se pueden considerar a su vez como todos, como la noción de las subdivisiones equivalentes, están estrechamente relacionadas con la noción de fracciones equivalentes, es decir, con la habilidad de reconocer cuando distintas partes de un mismo todo, obtenidas con diferentes divisiones, nos dan la misma parte de la totalidad. Lo cual nos lleva a admitir una misma relación parte-todo a través de "nombres equivalentes"

Ejemplo[25]: En ambos casos tengo igual parte del total.



Distintas relaciones parte-todo pueden expresar la misma parte de un objeto total. En este caso las relaciones se refieren al mismo objeto físico, y por ello se dicen equivalentes. De aquí, la capacidad de asociar una fracción a una representación en un contexto discreto o continuo es previa al trabajo con las relaciones de equivalencia. La relación parte-todo, es las más intuitiva en el estudiante, por tanto el problema se plantea en que su uso la convierte en generadora del lenguaje y símbolos que van a constituir la base y origen del trabajo con las demás interpretaciones.

Por último, para lograr un aprendizaje significativo y autónomo entorno a los números fraccionarios en nuestros estudiantes se debe tener en cuenta las deficiencias encontradas en el complejo mundo del aprendizaje de las matemáticas que han dado lugar a un enorme número de investigaciones y evaluaciones desde diferentes marcos teóricos. No obstante, los resultados de evaluaciones de amplia visión[26] afirman que los errores[27] siguen persistiendo. Lo anterior pone de relieve la complejidad del problema y conduce a un fuerte cuestionamiento sobre la pertinencia o validez de las perspectivas sobre las cuales se pretende abordar.

---

[25] LINARES, SALVADOR; *Matemáticas y aprendizaje: Fracciones* .Editorial síntesis. Madrid. 2000

[26] Pruebas TIMSS 2003, cuyos resultados no fueron alentadores en el bloque de contenido referente a fracciones y sentido numérico ya que de 51 preguntas solo el 34% de los que presentaron la prueba lograron dar respuesta correcta a ella. Tomado de www.mineducacion.gov.co/prueba/1723/article-100075.html

[27] Errores mencionados en el presente documento. Pág. 7

En el siguiente capítulo se presentaran la teoría concerniente al registro semiótico de las figuras geométricas, acompañado de ejemplos que permitan comprender los diferentes procesos y tratamientos para lograr entender cómo las figuras pueden llegar a ser potentes herramientas heurísticas para la solución de un problema planteado.

3. APRENDIZAJE DEL REGISTRO SEMIÓTICO DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS

Durante mucho tiempo se consideró que el aprendizaje era sinónimo de cambio de conducta, concepción inducida por una perspectiva conductista de la labor educativa[28]; sin embargo, se puede afirmar que el problema del aprendizaje de las matemáticas desde una perspectiva de funcionamiento cognitivo, tiene que ser reevaluada permitiendo adaptarse a los niños y niñas, lo que permitirá aumentar la capacidad de reflexionar en los distintos contextos de las matemáticas. Se trata de la perspectiva semiótica que desarrolla Raymond Duval[29]. Esta perspectiva considera que: "el aprendizaje y la comprensión de las matemáticas depende del desnivel de distinción que se hagan entre los objetos y sus distintos modos de representación, por la movilización de diferentes tipos de registros de representación semiótica y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que moviliza el conocimiento matemático".

Los objetos matemáticos tienen la característica de no ser accesibles a través de los sentidos sino a través de representaciones, tal característica produce en los estudiantes dificultades y obstáculos en su aprendizaje, entre los cuales se caracterizan la confusión entre diferentes tipos de representación con lo representado, es decir, la representación es entendida en el ámbito de las matemáticas como notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales mediante las que se expresa los conceptos y procedimientos así como sus características y propiedades más relevantes, mientras que lo representado hace alusión a los objetos matemáticos.

---

[28] AUSUBEL, NOVAK. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo.* 2° Ed. TRILLAS México. 1983

[29] DUVAL, R. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Cali: Univalle. 2004

Es importante tener en cuenta la definición que plantea Duval acerca de las representaciones semióticas

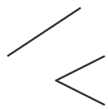
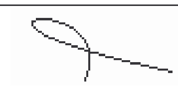
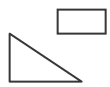
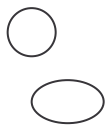
> "Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas. En efecto, permite una "mirada del objeto" a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos…) que tienen el valor de "significantes". Hay allí una gran variedad de representaciones semióticas posibles: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc."[30]

La teoría identifica tres actividades cognitivas fundamentales que deben cumplir las representaciones semióticas: la primera tiene que ver con la formación de representaciones en un registro semiótico particular la cual permite expresar representaciones mentales y evocar objetos reales. Esto implica siempre una selección en el conjunto de caracteres y de las determinaciones que la constituyen. Por ejemplo, para el caso de las figuras geométricas, como el cuadrado y un círculo puede representar una caja y una naranja respectivamente, que son objetos en el mundo físico. La segunda actividad, es el tratamiento, que hace referencia a las transformaciones que se efectúan a una representación en el interior del mismo registro, por ejemplo el cálculo es un tratamiento interno del registro de una escritura simbólica de cifras o de letras. Pero, el término "cálculo" en matemáticas es tomado en una acepción más amplia, ya que se la concibe como todos los procesos de transformación de escritura de los números combinando actividad de tratamiento y actividad de conversión. Por último, la conversión, que es la actividad relacionada a las transformaciones que producen nuevas representaciones en un registro diferente al de la representación inicial. La actividad de conversión es menos inmediata y menos simple de lo que se cree, por ejemplo, en el lenguaje natural de las matemáticas se puede tener

[30] Ibíd. p 34

expresiones como la siguiente: “el conjunto de puntos cuya ordenada es superior a la abscisa”. Se prevé que para efectuar la conversión en términos formales de las matemáticas ($y>x$, siendo y la representación de la abscisa y x de la ordenada) es suficiente una correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas, es decir, que la conversión inversa permita volver a encontrar la expresión inicial del registro de partida.

Para profundizar sobre el tratamiento con el registro semiótico de las figuras geométricas, que es el registro donde centramos nuestra atención, es necesario determinar las unidades de bases constitutivas del registro de las figuras donde se identifican dos tipos de variantes visuales de las cuales es susceptible toda “mancha visible” o contraste producido en un soporte material. Estas se presentan en la siguiente tabla[31]:

	Representación	Formas abiertas		Formas cerradas	
		Rectas	Curvas	Rectas	Curvas
Dimensión 0					
Dimensión 1					
Dimensión 2					

[31] DUVAL, R. *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes intelectuales.* Cali: Univalle. 2004

Las figuras juegan un papel importante puesto que son un soporte intuitivo para el desarrollo de diferentes actividades matemáticas como por ejemplo en las geométricas, es decir, dejan ver mucho de lo que el enunciado dice y permite explorar, anticipar… En los cursos de Educación Básica Primaria, los estudiantes deben partir de un reconocimiento visual y de esas actividades motoras adquiridas, por lo tanto, para que un alumno pueda discriminar los diferentes tratamientos que permite el registro semiótico de las figuras y de esta manera pueda acceder a las figuras como verdaderos soportes intuitivos en el desarrollo de actividades matemáticas. En consecuencia se considera que la caracterización de los procesos de visualización resulta de gran importancia para resolver algunos problemas planteados, de donde la visualización no queda relegada a un simple papel ilustrativo de los enunciados que se dan en un determinado ejercicio, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento, a la resolución del ejercicio o incluso a la prueba.

La visualización ayuda a ver lo que no es perceptible a nuestros ojos y en esa medida se convierte en un apoyo e ilustración de resultados esencialmente simbólicos, en una posible vía para resolver conflictos entre soluciones simbólicas (correctas) e intuiciones (incorrectas), en un proceso de naturaleza diversa que no sólo organiza datos en estructuras significativas, sino que se convierte en un factor importante en el desarrollo analítico de la solución y en un proceso analítico en sí mismo que concluye con una solución general y formal[32].

Pero, para describir cuál es el aporte heurístico de una figura en un problema se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible para la solución de determinado problema. De acuerdo con el modelo de Duval, se puede distinguir tres tipos de aprehensión:

---

[32] ARCAVI, ABRAHAM. *The role of visual representations in the learning of mathematics.* IN F Hitt & M. Santos (Eds.), *Proccedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME, Cuernavaca*, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE publications-The Ohio State University

APREHENSIÓN PERCEPTIVA

La aprehensión perceptiva se caracteriza como la identificación simple de una configuración. Es la primera en ser usada alo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno. Por ejemplo, la figura 1 puede ser vista como el tejado de una casa, la parte superior de una mesa, cuatro rayas dibujadas en el papel o la representación (dibujo) de una figura geométrica (objeto mental). Cada una de estas respuestas puede ser entendida como el resultado de una aprehensión perceptiva al ser el proceso más intuitivo.

Figura 1

En la aprehensión perceptiva, se reconocen de manera inmediata las diferentes unidades figurales que son discernibles en una figura dada[33]. Junto a ella están asociadas las leyes gestálticas de organización de la percepción, como lo define Duval: "cuando las unidades figurales de dimensión dos están separadas, su reconocimiento no tiene ninguna dificultad, lo cual no sucede cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones. En primer lugar, algunas unidades figurales de dimensión 2 de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, la figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figurales elementales que las requeridas para constituirlas".

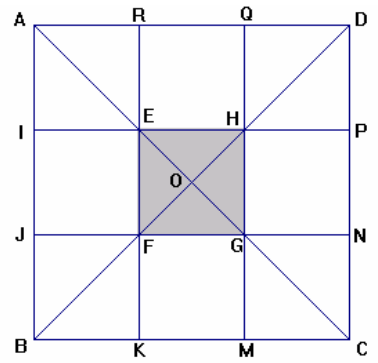
A continuación, se presenta una situación donde la figura de partida se encuentra fraccionada en varias subfiguras y es necesario inhibir algunos trazos para poder visualizarlas.

[33] Ibíd. p 58

Situación 1

Observo la figura y determino las subfiguras geométricas que están dentro de ella.

Figura 2



Al momento de observar la figura, espontáneamente se identifica sobre ella los triángulos rectángulos ABO, OBC, OCD y ODA. Para reconocer los cuadrados que constituyen la figura es necesario neutralizar la organización perceptiva que hace predominar los triángulos anteriormente mencionados. Para esto, se inhiben los segmentos AC y BD, de donde se obtienen trece subfiguras cuadradas: 9 cuadrados que son visibles de manera inmediata[34] y 4 cuadrados que se obtienen al unir cuatro de las anteriores subfiguras (los cuadrados AJGQ, IBMH, EKCP, RFND). Estos últimos, no son fácilmente visibles ya que la organización perceptual de la figura no lo permite. Además existen unos triángulos rectángulos ubicados en el centro de la figura (EFO, OFG, OGH, OHE) y ocho ubicados en cada vértice del cuadrado ABCD. Otras subfiguras son los cuadriláteros los cuales pueden ser rectángulos y los trapecios.

[34] Los cuadrados que se observan en la figura son los siguientes: AIER, REHQ, QHPD, IJFE, EFGH, HGNP, JBKF, FKMG, GMCN.

La actividad presenta un grado de dificultad alto, ya que dependiendo del grado de escolaridad de quien la está resolviendo puede determinar diferentes figuras geométricas, tales como cuadriláteros y polígonos. Además invita al estudiante a centrar su atención en la figura inicial y buscar cada vez nuevas subfiguras que se encuentran inmersas en ella.

APREHENSIÓN OPERATORIA

Esta aprehensión está centrada en las modificaciones posibles de una figura de partida y por las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones impulsan: se pueden separar las unidades figurales de dimensión 2 que componen a la figura de partida en otras unidades de dimensión 2; estas pueden ser recombinadas para modificar el contorno global de la figura. También se pude aumentar o disminuir la figura, desplazarla por la traslación y rotación, etc. Esta aprehensión se asemeja a la aprehensión perceptiva puesto que en ella también se puede desarrollar la aprehensión analítica o global.

Mesquitas identifica la aprehensión operatoria pero destaca la que para él juega un valor heurístico que es la modificación configural, que consiste en dividir la figura dada en partes, las cuales son materiales o mentalmente reorganizadas en otra figura. Estas modificaciones pueden tener un rol heurístico, de importancia voluble en la resolución de una tarea.[35]

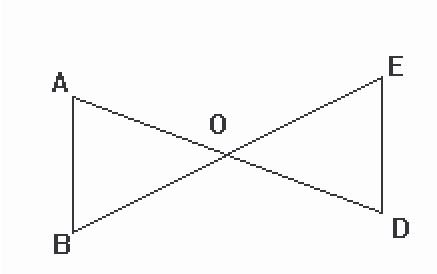
Así, la aprehensión operativa se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico. Las modificaciones pueden ser de dos tipos:

a. Cuando a la configuración inicial se le añaden (quitan) nuevos elementos geométricos (nuevas subconfiguraciones), por ejemplo:

[35] MESQUITAS A, *L'influence des aspects figuratifs dans lárgumentation des élèves en gèométrie : éléments pour une typologie.* Thèse U.L.P. : Strasbourg 1989

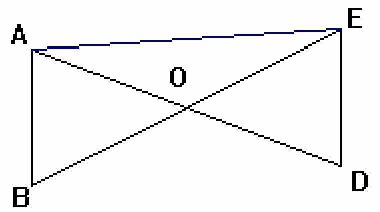
Si $\overline{AD} = \overline{EB}$ y $\overline{AB} = \overline{ED}$. Probar que $\angle ABO = \angle ODE$

Figura 3



Una posible solución consiste en introducir un nuevo elemento geométrico en la configuración inicial: un segmento que una los puntos AE de la figura.

Figura 4

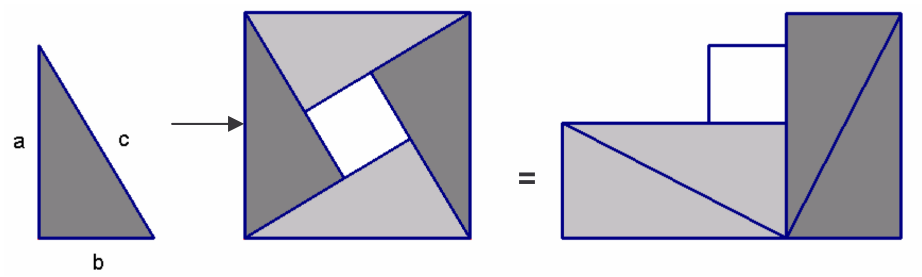


En el momento de introducir el segmento $\overline{AE}$ es posible razonar utilizando el criterio de congruencia de triángulos de los lados, (sean ΔABE y ΔEDA dos triángulos que tienen los lados correspondientes congruentes; entonces, $\Delta ABE \equiv \Delta EDA$) y deducir la congruencia de los ángulos.

Al proceso de introducir un segmento, en este caso en la configuración inicial, lo llamamos *aprehensión operativa de cambio figural.*

b. La segunda, es la operación de reconfiguración donde a través de diferentes operaciones como, la rotación, traslación, reflexión se cambia la figura inicial. La siguiente figura es una prueba del teorema de Pitágoras a través de esta operación.

Figura 5[36]



En las modificaciones hechas, el triángulo rectángulo inicial se incluye en una configuración más amplia, un cuadrado de lado *c* cambiando la forma perceptual de la figura. Una vez identificadas las subconfiguraciones formadas por los triángulos, sus lados y el cuadrado situados entre ellos, podemos cambiar la configuración trasladándolos para obtener otra figura. Dicha acción esta precedida de otras, en las que a cada subconfiguración le asociamos afirmaciones matemáticas. Por ejemplo, que el lado del cuadrado central mide *b-a* y que el lado del cuadrado grande mide *c.* Si analizamos los pasos descritos en la figura 5, se puede obtener:

$$c^2 = 2ab + (b-a)^2,$$

Que desarrollado algebraicamente resulta:

$$c^2 = 2ab + b^2 + a^2 - 2ab = a^2 + b^2$$

En esta descripción se debe resaltar el proceso de identificación de subconfiguraciones de diferente dimensión a la de la configuración inicial, lo cual se nota, por ejemplo, en los lados del cuadrado grande y del cuadrado central.

APREHENSIÓN DISCURSIVA

Se llama aprehensión discursiva a la acción cognitiva que produce una asociación de la configuración identificada con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas). Tal vínculo puede realizarse de dos

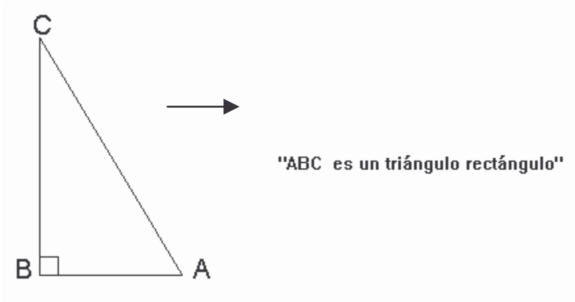
---

[36] Figura Tomada de NELSEN, R. (1993). *Proofs without words: Exercises invisual thinking.* Washington, USA: The Mathematical Association of América.

maneras, según las direcciones de la transferencia realizada, a la que se le denomina *cambio de anclaje*:

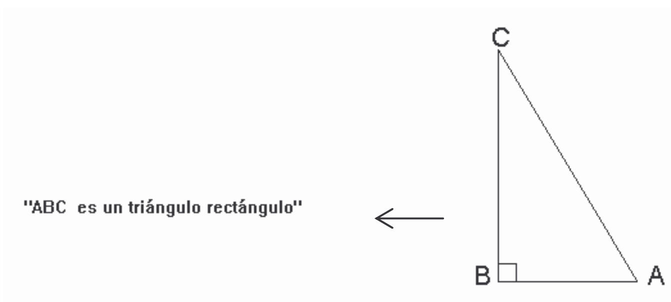
a. Del anclaje visual al anclaje discursivo. Esto sucede por ejemplo, cuando a la representación de la figura 6, se le asocia la afirmación ABC es un triángulo rectángulo, señalando sus vértices con las letras A, B, C. Para efectuar esta asociación con sentido, quien observa la figura debe haber identificado lo que caracteriza a un triángulo rectángulo; es decir, relacionar las características de una de las definiciones relativas al triángulo y al triangulo rectángulo.

Figura 6



b. Del anclaje discursivo al anclaje visual. Por ejemplo, ante la afirmación ABC es un triángulo rectángulo, el estudiante tiene la capacidad para realizar la figura de un polígono que cumpla la característica de ser triángulo y rectángulo. Esta configuración no tiene por qué ser la misma para todos los alumnos, al igual que las afirmaciones matemáticas asociadas a las distintas configuraciones.

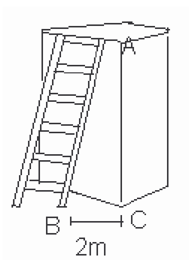
Figura 7



Es importante tener en cuenta que un estudiante al intentar resolver un problema de geometría podría centrarse en los elementos, relaciones y propiedades que muestra la figura. Por lo tanto, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo, es decir, que no es a partir de sus trazos y formas que la figura permite su acceso en la resolución de un problema geométrico. La aprehensión discursiva es una aprehensión que se encuentra ligada a las propiedades asociadas a las hipótesis. Las propiedades de una figura geométrica dependen de lo que se enuncia como hipótesis. La aprehensión discursiva de una figura geométrica es inseparable de una doble referencia: por un lado, a una red semántica de los objetos matemáticos y, por otra parte a una axiomática local. Es en este sentido que está indisociablemente ligada a las aserciones correspondientes del enunciado; dicho de otro modo la aprehensión discursiva de una figura privilegia exclusivamente, el status que este enunciado concede a sus proposiciones.

Ejemplo: Un albañil apoya una escalera de 5 metros contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2 metros del muro. Calcula la altura a la que se encuentra la parte superior de la escalera.

Figura 8



El cambio del enunciado del problema (texto) al dibujo de la escalera apoyada en el muro no implica la asociación con ninguna afirmación matemática. Sin embargo, identificar dicha situación con un triángulo rectángulo y asociar el Teorema de Pitágoras con la configuración es lo que llamamos aprehensión discursiva; en este caso, el sentido de la transformación va de un anclaje visual a uno discursivo.

Esta forma de aprehensión implica una subordinación de la aprehensión perceptiva a la aprehensión discursiva, y como consecuencia una restricción de la aprehensión perceptiva: las propiedades de las figuras no son impuestas a partir de los trazos y de las formas de una figura, sino a partir de las propiedades mencionadas en el enunciado. En relación con la aprehensión operatoria, es necesario que exista una congruencia entre la operatoria y el tratamiento matemático, en este caso la aprehensión discursiva puede ser dejada de lado. En caso contrario se hace indispensable la aprehensión discursiva, como por ejemplo cuando los estudiantes se encuentran enfrentados a una tarea de demostración, no es fácil ver sobre una figura las relaciones y las propiedades relativas a las hipótesis para dar solución al problema planteado; por lo tanto, la visualización no es un asunto obvio ni espontáneo, se necesita que el estudiante aprenda y conozca las diferentes operaciones que se pueden realizar con las figuras.

La reconfiguración es una operación que se puede realizar con figuras de dimensión 2. Consiste en reorganizar una o varias subfiguras diferentes de una figura dada en otra. La operación de reconfiguración puede ser efectuada de diferentes maneras en una figura, pero es una operación que está lejos de ser espontánea y evidente.

En la reconfiguración de una figura influyen varios factores. Llamados factores de visibilidad los cuales hacen que la solución de un problema sea más fácil o se torne compleja. Duval distingue cuatro factores de visibilidad:

a. “El hecho que el fraccionamiento de la figura en partes elementales sea dado al inicio o que por el contrario deba ser encontrado”.
b. El reagrupamiento pertinente de las partes elementales formen subfiguras que son convexas o no convexas.

c. El reagrupamiento pertinente pueda exigir que se sustituya las partes elementales auxiliares a aquellas a las cuales el enunciado del problema refiere.
d. El hecho que una misma parte elemental deba entrar en dos reagrupamientos simultáneos intermediarios a comparar.

La propuesta que hace este trabajo tiene que ver con las posibilidades que brinda el aprendizaje del registro semiótico, de las figuras en la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte-todo. De esta manera, a continuación se presenta una serie de actividades donde se cambia la percepción de la figura, con el ánimo de encontrar sobre ella elementos que ayuden a dar solución a una situación planteada sin la necesidad de que el estudiante conozca sobre los diferentes algoritmos concernientes a los números fraccionarios.

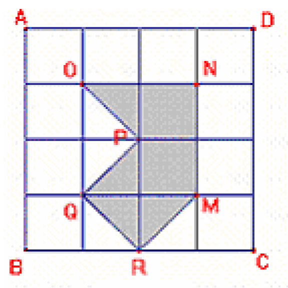
4. ALGUNAS ACTIVIDADES DONDE LAS FIGURAS SON HERRAMIENTAS HEURISTICAS EN LA CONSTRUCCION DE LOS NUMEROS FRACCIONARIOS DESDE LA RELACION PARTE-TODO

4.1. LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS COMO REPRESENTACIONES DINÁMICAS

En muchas ocasiones, las figuras han sido tomadas como representaciones sobre las cuales no se puede realizar ninguna transformación, dando lugar a tener una falsa idea de que estas sean de naturaleza estática, pues nos se cree que con las figuras se pueden realizar diferentes operaciones como por ejemplo, rotaciones, traslaciones, reflexiones, entre otras, haciendo que se cambie la forma perceptual de la figura en una totalmente distinta, pero, sin cambiar sus propiedades iniciales. A continuación se da a conocer una actividad en la que la figura juega un papel dinámico en aras de encontrar la solución a la cuestión planteada.

Observo la siguiente figura y encuentro la fracción que representa la superficie de la parte sombreada con respecto a la del cuadrado ABCD.

Figura 10

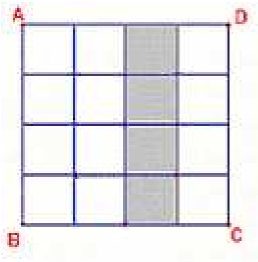


Para resolver la problemática planteada en la presente actividad se puede proceder de dos maneras diferentes: mediante procedimientos estrictamente aritméticos o bajo procedimientos figurales; proceder de la primera manera implica, el conteo del número total de cuadrados que conforman tanto la parte sombreada de la figura como la parte blanca. Para ello, quien resuelve la actividad debe establecer que existen subfiguras en la parte sombreada, como en la parte blanca que no pueden ser contadas como unidades completas; en cada una de las dos partes hay cuatro triángulos que representan cada uno la mitad de un cuadrado; en consecuencia, se hace necesario un doble conteo. Uno que indique el número total de cuadrados completos y el otro que debe dar cuenta de la cantidad de parejas de triángulos que hay. De esta manera, se puede afirmar que la parte blanca está conformada por 12 unidades y la sombreada por 4. Lo que a su vez nos muestra que la superficie del cuadrado ABCD está compuesta por un total de 16 unidades y por tanto la relación pedida es de $\frac{4}{16}$.

Asumir las figuras geométricas como representaciones dinámicas nos permite una segunda manera de proceder para resolver la problemática planteada; por lo tanto, es necesario reacomodar la organización perceptual de la figura de tal forma que nos permita una comparación lo más directa posible entre las dos partes en cuestión. Lo cual implica reconfigurar el hexágono irregular OPQRMN en una nueva figura bajo la aplicación de una composición de operaciones de rotación y traslación sobre los triángulos QRM y OQP y, posteriormente, transformarlo en un rectángulo cuya base es una unidad y de altura cuatro.

Este tratamiento figural sobre el diseño permite establecer, de manera clara y espontánea, que es necesario contar con cuatro veces la superficie de dicho rectángulo para cubrir totalmente la superficie del cuadrado ABCD. En consecuencia, la relación pedida es de $\frac{1}{4}$.

Figura 11



Es claro el carácter estático que juegan las figuras geométricas en la primera de las maneras de proceder referenciadas arriba, en contraste con la fuerte naturaleza dinámica de estas representaciones. Un aprendizaje de las diferentes formas de ver que permite el sistema de representación de las figuras geométricas hace del fondo cuadriculado en el cual se encuentra la figura, como de las características de su contorno elementos claves sobre los cuales se apoyan los tratamientos figurales situados en el párrafo anterior.

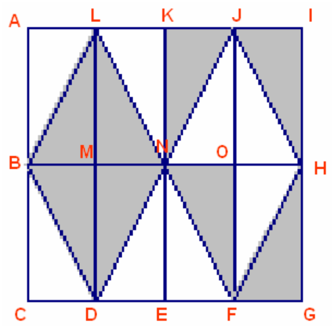
4.2. LAS FIGURAS PARA LA RELACIÓN DE EQUIVALENCIA EN LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

El estudio de la relación de equivalencia en los números fraccionarios, se ha privilegiado en la aplicación del algoritmo[37], donde se realizan operaciones aritméticas que no están cargadas de sentido y significado; es decir, los estudiantes realizan procesos mecánicos sin tener claridad sobre el concepto que se está abordando. Las figuras geométricas permiten ver cómo un número fraccionario se puede escribir de diferentes maneras, realizando operaciones figurales sobre ellas. La siguiente situación nos conduce a encontrar fracciones equivalentes a partir de una figura dada.

Observo la figura y escribo cuatro fracciones que representen la relación que existen entre la superficie sombreada y la superficie total de la figura.

[37] Dados dos números fraccionarios, se dice que son equivalentes si el producto de extremos es igual al producto de medios.

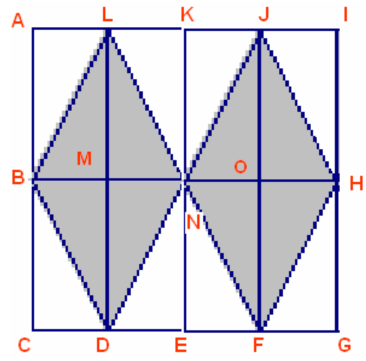
Figura 12



Una primera fracción que se desprende de ver sobre la figura perceptualmente es $\frac{8}{16}$, basta con reconocer en ella la presencia de una serie de subfiguras triangulares en la cual se encuentra dividida la superficie de la figura de partida. Un conteo uno a uno de las partes grises; así como del número total de subfiguras triangulares en la que se encuentra dividida la figura: 8 en el primer caso y 16 en el otro, nos permite llegar a dicha respuesta. El papel que juega la figura en esta manera de proceder es mínimo. No se aplica sobre ella ningún tratamiento figural.

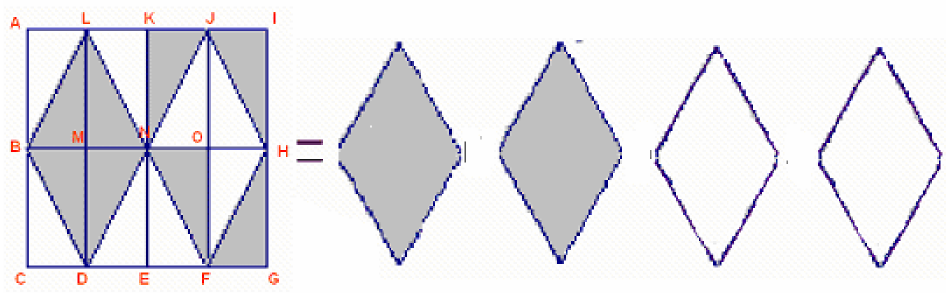
Bajo el mismo procedimiento no es posible dar cuenta de las dos representaciones faltantes es necesario recurrir a procedimientos figurales; en consecuencia, la reorganización perceptual de la figura se constituye en un asunto insalvable. Una manera de proceder, entre varías posibles, es la de reconocer que bajo una serie de operaciones posicionales es posible transformar la superficie blanca del rombo JNFH en una superficie totalmente gris: es necesario aplicar sobre los triángulos JNO, JOH y OFH operaciones de traslación, rotación y/o reflexión y de forma similar, las mismas operaciones, sobre los triángulos grises: KNJ, JHI y HFG. De esta manera, la nueva organización perceptiva de la figura destaca sobre ella la presencia de dos rombos cuyas superficies están resaltadas con el color gris: rombos LBDN y JNFH (Observar figura 13).

Figura 13



El inhibir los segmentos LD, JF y BH resalta aún más la presencia de estas dos figuras. Para encontrar una nueva fracción que represente la relación existente entre la superficie de la figura inicial y la de su parte gris es necesario, ver que cada pareja de cuatro triángulos blancos que se destacan en la figura son configurables en dos figuras de forma romboide; en consecuencia, se establece que la superficie del rectángulo ACGI es equivalente a la unión de las superficies de cuatro rombos: dos grises y dos blancos. Por tanto, la relación pedida sería de $\frac{2}{4}$.

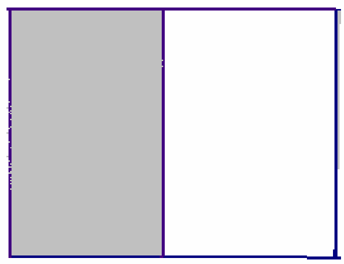
Figura 14



Una tercera forma de proceder que nos permitirá encontrar una nueva forma de representar aritméticamente la relación pedida, centra la atención sobre la organización perceptiva que nos muestra la figura 14. La aplicación compuesta de operaciones posicionales sobre los triángulos grises: KNJ, JHI, HFG y NFO de tal forma que ocupen los lugares en los que están los triángulos blancos:

ABL, LNK, NDE y BCD. De forma simultánea, la aplicación de dichas operaciones sobre los triángulos blancos de tal forma que ocupen la superficie de los grises, suscita una nueva organización perceptiva de la figura de partida. El rectángulo ACGI queda dividido en dos partes: dos superficies rectangulares, una gris, la otra blanca (observar figura 15). En consecuencia la relación pedida sería de $\frac{1}{2}$.

Figura 15



Las démarches[38] expuestas en los párrafos anteriores no son las únicas que permiten encontrar expresiones aritméticas que den cuenta de la relación entre las dos superficies en cuestión. La figura de partida en el desarrollo de la actividad propuesta juega como un importantísimo soporte intuitivo, las posibilidades heurísticas que ella posibilita son incontables. En dicho sentido, es posible mediante transformaciones mereológicas diferentes a las explicitadas arriba encontrar expresiones aritméticas del tipo: 4/8, 16/32, etc.

4.3. LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EN LA RELACIÓN DE ORDEN ENTRE FRACCIONES

Generalmente, los estudiantes al momento de enfrentarse a situaciones donde la relación de orden entre números fraccionarios se hace necesaria, tienden a confundirse con el orden de los números naturales. Por ejemplo, cuando se

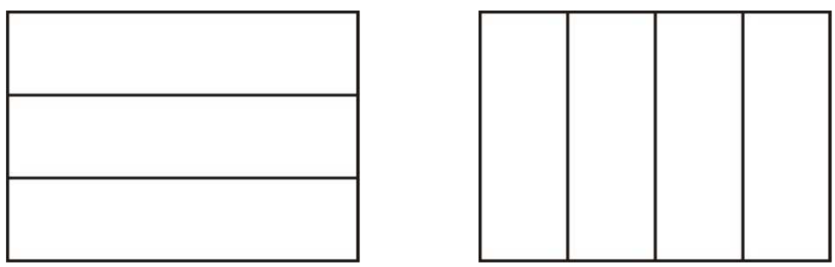
[38] Este es un término francés que no tiene traducción literal al español. Hace referencia a todo lo que un sujeto hace para llegar a un resultado, incluido las tentativas y falsas pistas abandonadas por él.

pide que comparen $\frac{1}{2}$ con $\frac{1}{3}$, la respuesta inmediata dada por ellos es que la primera fracción es menor a la segunda, esto se debe al simple hecho de mirar en el denominador los números 2 y 3 para concluir que 3 es mayor que dos y así llegar a una solución errónea. En pos de lo anterior, se presenta una actividad utilizando las figuras geométricas en la relación de orden entre los números fraccionarios.

Encuentro 10 números fraccionarios que al mismo tiempo sean mayores que $\frac{1}{4}$ y menores que $\frac{1}{3}$

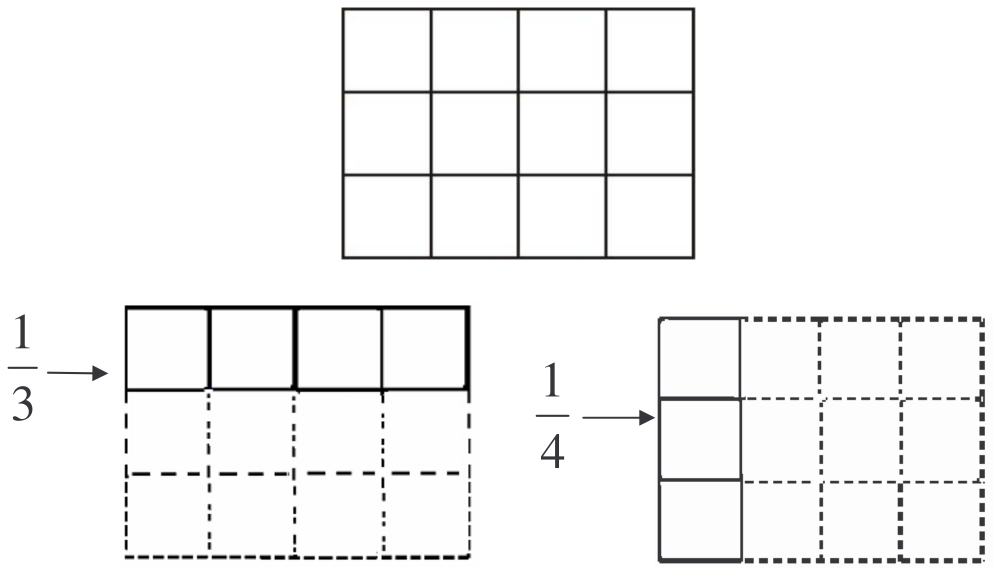
Al tratar de dar solución a la cuestión planteada mediante la utilización de las figuras geométricas, se puede proceder de la siguiente manera: en primera instancia, se hace necesario representar la unidad por medio de una figura geométrica: un rectángulo de dimensiones específicas. Posteriormente, representar dos veces dicha unidad. Sobre una de ellas se introducen dos segmentos paralelos a los lados horizontales de la unidad, mientras que en la otra, se introducen tres segmentos paralelos a sus lados verticales, obteniendo en cada una de estas representaciones partes rectangulares que tienen igual superficie entre ellas, interpretándose así las fracciones 1/3 y ¼ respectivamente.

Figura 16



Un segundo paso, consiste en transformar las figuras que representan las fracciones $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$ en una sola figura, de tal forma que en está se represente simultáneamente. En este momento, la superposición de una figura en la otra se hace necesario, es así que la unidad queda dividida en doce partes congruentes. Cada una de estas representaciones es la fracción $\frac{1}{12}$. De esta manera se puede observar que un cuarto se conforma con tres cuadrados mientras que un tercio por cuatro. En tanto que se establece que la diferencia entre ella es de un cuadrado, es decir, un doceavo de la unidad.

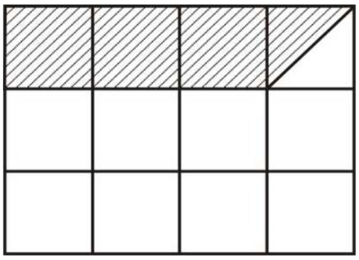
Figura 17



A partir de lo anterior se puede deducir que para hallar cualquier expresión algebraica que cumpla con ser mayor que un cuarto y menor que un tercio basta con adicionarle a ¼ una fracción que sea menor que $\frac{1}{12}$. Una posible opción sería la de adicionarle a un cuarto (que esta representado por tres cuadrados que a su vez son $3\left(\frac{1}{12}\right)$ de la unidad) la mitad de uno de los cuadrados que representan la fracción $\frac{1}{12}$ de la unidad.

Existen muchas maneras de dividir un cuadrado en dos partes congruentes, es decir en la mitad. De forma arbitraria escogemos dividirlo en dos triángulos rectángulos, tal como se observa en la figura 18.

Figura 18



Por otra parte la fracción un tercio que se encuentra representada por cuatro de estos cuadrados, es decir $4\left(\frac{1}{12}\right)$ de la unidad, se pueden representar mediante unidades triangulares con 8. Identificar que fracción de la unidad nos representa cada subfigura rectangular basta con dividir cada uno de los doce cuadrados en dos triángulos rectángulos obteniendo así 24 representaciones triangulares. Luego cada una de estas representaciones se expresan con la fracción: $\frac{1}{24}$; en consecuencia, las fracciones un cuarto y un tercio se pueden también escribir respectivamente como $6\left(\frac{1}{24}\right)$ y $8\left(\frac{1}{24}\right)$ de la unidad, por lo tanto, si a $\frac{6}{24}$ le adicionamos una subfigura triangular (es decir $\frac{1}{24}$) obtenemos la primera fracción: $\frac{7}{24}$ que cumple la consigna; de igual manera, se obtienen las nueve fracciones pedidas.

Esta forma de proceder con la actividad planteada, permite que los estudiantes tengan una representación clara de lo que ocurre en la relación de orden con los números fraccionarios; además por su construcción permite trabajar con las fracciones equivalentes; es de gran importancia, recalcar que aunque el lenguaje simbólico es un tanto similar con los números naturales, los procesos y su forma de representación son totalmente diferentes.

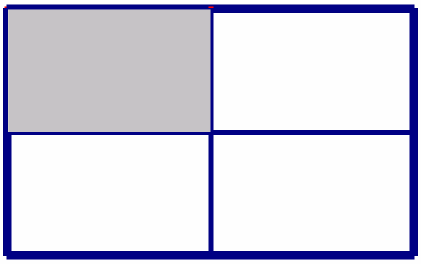
4.4. LAS FIGURAS EN LA DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTAR UN NÚMERO FRACCIONARIO

Existen diferentes actividades encaminadas a lograr un aprendizaje de los números fraccionarios, pero en seguida presentamos una actividad que no es planteada ya que revisten de una dificultad conceptual al determinar las diferentes formas de expresar un número fraccionario determinado por la consigna.

Represento de quince maneras diferentes la fracción $\frac{1}{4}$.

Para resolver esta situación, se puede recurrir a una representación tangible como por ejemplo una hoja de papel, se dobla por la mitad, haciendo coincidir los lados opuestos, luego se la vuelve a doblar, se procede a abrir la hoja y se observa que el todo se divide en cuatro partes con iguales dimensiones y cada una de ellas representa la fracción: $\frac{1}{4}$; se colorea una de las partes, es decir, la percepción del todo, está conformada por una parte coloreada y otra sin colorear, que se constituye exactamente en tres veces la parte que se encuentra coloreada (Ver Figura 19). Por lo tanto, se puede escribir la fracción tres cuartos. En términos del lenguaje especializado de las matemáticas se tiene que: $\frac{1}{4} = 1 - 3\left(\frac{1}{4}\right)$ que se constituye en la primera expresión que representa la fracción $\frac{1}{4}$, sin embargo la expresión "tres veces un cuarto" se puede expresar mediante la fracción $\frac{3}{4}$, obteniendo así una segunda representación de un cuarto es: $1 - \frac{3}{4}$.

Figura 19



Se dobla nuevamente la hoja, y se obtiene una nueva configuración de la figura, ya que perceptualmente el todo queda dividido en ocho partes, y cada una de ellas representa un octavo de la unidad. La parte sombreada se conforma por dos de estas partes, entonces la fracción que expresa esta relación es: $2\left(\frac{1}{8}\right)$ (Ver Figura 20) dando lugar a la tercera expresión pedida por el enunciado.

Para la cuarta fracción se encuentra mediante la relación existente entre el número de partes coloreadas que son dos y las ocho partes que forman la unidad obteniendo la expresión:

$$\frac{2}{8}$$

Una nueva expresión resulta a partir de las partes sin colorear que son seis, luego la fracción que representa la parte no coloreada es $\frac{6}{8}$. Luego un cuarto en términos de la parte sin colorear es la unidad menos dicha fracción obteniendo la expresión fraccionaria

$$1-\frac{6}{8} \text{ (Quinta expresión)}$$

Dado que cada parte representa un octavo de la unidad entonces la parte en blanco se constituye con seis de esas partes, luego la anterior expresión quedaría escrita como

$$1-6\left(\frac{1}{8}\right) \text{ (Sexta expresión)}$$

Omitiendo el segmento CD, se puede observar que la parte sin sombrear se conforma por dos cuartos más dos veces un octavo obteniendo una nueva representación de las expresiones anteriormente descritas, es así que la fracción un cuarto se simboliza de la siguiente manera:

$$1-\left(2\left(\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{8}\right)\right) \text{ (Séptima expresión)}$$

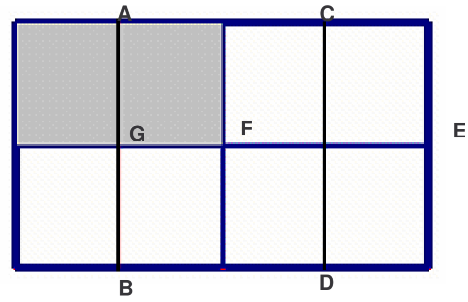
Omitimos simultáneamente el segmento EF con el segmento CD (Ver Figura 19), obtenemos otra forma de representación, dado que, esta parte que esta sin colorear se encuentra conformada por la mitad del todo más dos veces las partes rectangulares que reprendan un octavo de la unidad, luego la expresión queda reducida a:

$$1-\left(\frac{1}{2}-2\left(\frac{1}{8}\right)\right) \text{ (Octava expresión)}$$

A partir de esta última configuración, la parte en blanco representa la mitad de la unidad, lo que permite inhibir el segmento GB, dando como resultado que la parte sin colorear conforma la mitad y un cuarto del todo. Lo anterior, permite obtener otra forma para representar la parte en blanco que simbólicamente queda expresado así:

$$1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) \text{ (Novena expresión)}$$

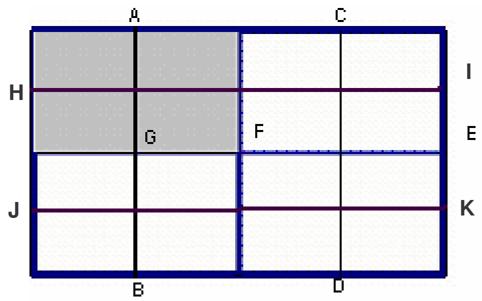
Figura 19



Retomando el doblez del papel se obtiene dos trazos horizontales que permite dividir en dieciséis partes la unidad, de donde la parte de color gris se conforma por cuatro dieciséisavos (Ver Figura 20); esta relación permite obtener la décima facción $\frac{4}{16}$, equivalente a un cuarto. Dado que cada pedazo representa una dieciseisava parte de la unidad y la parte coloreada esta conformada por cuatro de estas partes, se consigue la onceava expresión fraccionaria que es: $4\left(\frac{1}{16}\right)$.

Buscando nuevas expresiones, se puede obtener partiendo de la unidad menos la parte de color blanca. Esta porción de la unidad se conforma por doce partes de la unidad que en términos matemáticos se simboliza: $1-12\left(\frac{1}{16}\right)$ (Doceava expresión).

Figura 20



Realizando proceso de reconfiguración de la figura, podemos obtener nuevas expresiones cambiando la percepción de parte en blanco mediante la omisión de segmentos, para obtener expresiones equivalentes a la fracción: $\frac{12}{16}$. Una primera operación figural es inhibir el segmento CD, es así, que la parte totalmente en blanco se forma por cuatro unidades donde cada una de estas partes representa la fracción $\frac{1}{8}$. Luego, la parte en blanco se conforma por cuatro unidades que simboliza un octavo de la unidad más cuatros unidades de menor dimensión que representan un dieciseisavo; simbólicamente, se obtiene la expresión fraccionaria: $4\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)$; es así que la fracción un cuarto se puede representar mediante la diferencia que existe entre la unidad y la parte en blanco, lo cual se simboliza:

$$1-\left(4\left(\frac{1}{8}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)\right)\text{(Treceava expresión)}$$

Ahora bien, si prescindimos de los segmento HI, JK y CD, nuevamente, cambia la percepción de la parte en blanco de la unidad, ya que en este momento se conforma por dos rectángulos que representan la fracción un cuarto y cuatro que simbolizan dieciseisavos, esta relación se interpreta por la expresión: $2\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)$ que representa la parte en blanco de la unidad. Luego la catorceava simbolización fraccionaria es:

$$1-\left(2\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{16}\right)\right)$$

Prescindiendo de manera simultánea de los segmentos HI, JK, CD y FE, la parte en blanco se conforma por la mitad de la unidad más cuatro dieciseisavos de la unidad. A partir de esta configuración de la parte en blanco, la fracción un cuarto es equivalente a la siguiente expresión:

$$1-\left(\frac{1}{2}+4\left(\frac{1}{16}\right)\right)$$

Así sucesivamente se pueden encontrar una cantidad considerable de representaciones fraccionarias en torno a la fracción un cuarto, donde el procedimiento que realizamos no solamente se centra en la parte coloreada del todo, sino también por la parte que no lo esta; el objeto tangible fue una herramienta que nos permitió realizar proceso mentales de reconfiguración de la figura; sin embargo la importancia recae en la riqueza que se puede encontrar en las diferentes formas de ver sobre la figura.

4.5. LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EN OPERACIONES CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Generalmente, las diferentes actividades que se presentan a los estudiantes en las cuales se involucran las operaciones básicas como: la adición, sustracción, multiplicación y división con los números fraccionarios, se realizan mediante procedimientos aritméticos y su enseñanza se centra en procesos mecánicos y memorísticos en los que se aplican diversidad de algoritmos que hacen que los resultados obtenidos a través de estos mecanismos no tengan sentido y significados para los estudiantes.

Es por esta razón, que a continuación presentamos unas actividades en las cuales se desarrollan algunas operaciones utilizando las posibilidades heurísticas de las figuras para dotar de sentido a los resultados obtenidos sin la utilización de los algoritmos aritméticos.

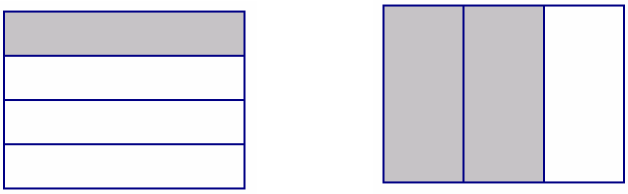
ACTIVIDAD DONDE SE INVOLUCRA LA ADICIÓN DE FRACCIONES.

Realizo la siguiente suma:

$$\frac{1}{4}+\frac{2}{3}=?$$

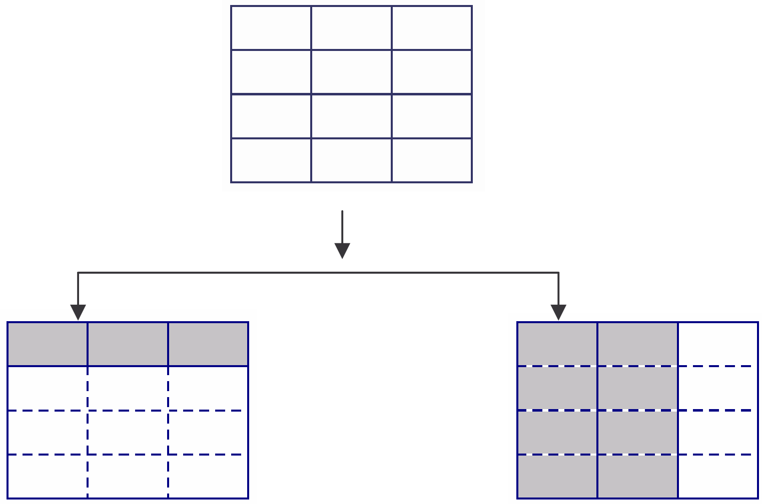
Entre los diferentes procedimientos que se pueden realizar para obtener el resultado de esta operación, a continuación se presenta un proceso, utilizando las figuras geométricas; en primer lugar, se necesita representar la unidad mediante una figura geométrica: un rectángulo; luego se realizan dos representaciones de la unidad; en el primer rectángulo se fracciona la figura en cuatro unidades figurales de forma rectangular, donde cada una de las partes de la unidad representa la fracción $\frac{1}{4}$ que indica la consigna; mientras que la segunda figura se divide en tres partes iguales de forma rectangular de las cuales dos se sombrean para representar la fracción $\frac{2}{3}$ (ver Figura 21).

Figura 21



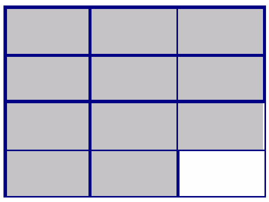
Posteriormente se hace indispensable aplicar la sobreposición de las dos representaciones de la unidad previamente fraccionadas cambiando la forma perceptiva la figura en una que se encuentra dividida en doce partes congruentes, donde cada parte representa la fracción $\frac{1}{12}$. Al momento de compararlo con la fracción un cuarto claramente se puede visualizar que esta se encuentra constituida por tres de las nuevas partes obteniendo así la fracción: $\frac{3}{12}$, mientras que sobre la representación de la fracción dos tercios se puede observar que son 8, es decir: $\frac{8}{12}$, obteniendo así fracciones equivalentes a las fracciones iniciales (ver Figura 22). Mediante esta operación se ha logrado que las fracciones dadas en el enunciado sean homogenizadas.

Figura 22



De manera arbitraria, se procede a trasladar las partes que constituyen la fracción un cuarto y ubicarlas en los espacios que se encuentran en blanco de la figura que representa la fracción $\frac{2}{3}$ (Ver Figura 23) y luego realizar un conteo sobre las partes que quedaron sombreadas y las partes que se encuentra dividida la unidad estableciendo la fracción: $\frac{11}{12}$ que es la solución al interrogante.

Figura 23



Vale la pena aclarar que en ocasiones el número de partes que son trasladas es mayor a las parte que se encuentra en blanco, por tanto es preciso que se traslade el mayor número de partes hasta completar la unidad y hacer permanecen las otras partes pero en el momento de establecer la fracción el denominador no se afecta por el número de unidades que se utilicen.

ACTIVIDAD DONDE SE INVOLUCRA LA MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

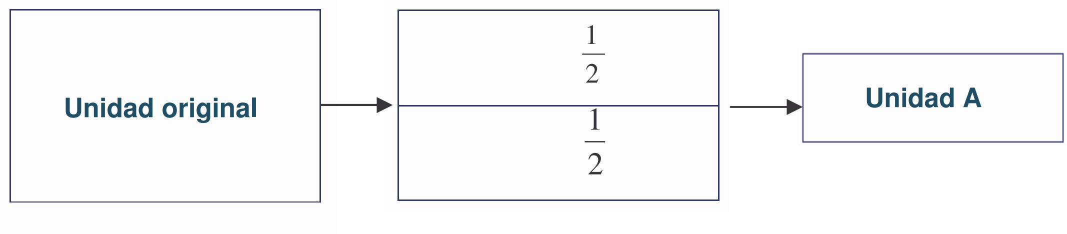
Realizo la siguiente operación:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = ?$$

Como ya se menciono anteriormente es común ver que los estudiantes apliquen correctamente el algoritmo; sin embargo en el momento que se les cuestiona si el resultado que han obtenido es mayor o menor con respecto a las fracciones operadas tienden a afirmar que es mayor. A continuación se realiza la operación de multiplicación de fracciones con las figuras geométricas, aclarando que para este procedimiento es necesario tener en cuenta que en el momento de trabajar con las figuras se comienza con la primera fracción del lado derecho y se siguen con las fracciones al lado izquierdo de ella.

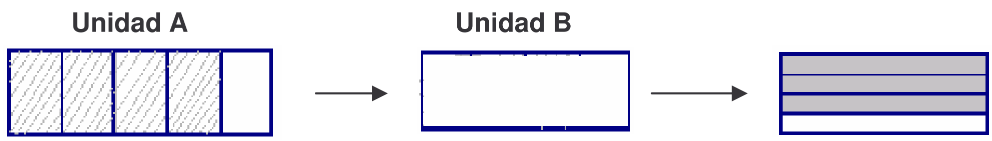
De manera arbitraria se escoge una representación de la unidad, para nuestro caso un rectángulo de dimensiones especificas. Seguidamente se procede a introducir un segmento paralelo al lado horizontal del rectángulo haciendo que cambie la percepción de la figura, ya que en este momento el todo se compone por dos partes rectangulares de iguales dimensiones y cada una de ellas representa figuralmente la fracción $\frac{1}{2}$ (Ver Figura 24). Es aquí que una de las partes se constituye como una nueva unidad que la designaremos unidad A.

Figura 24



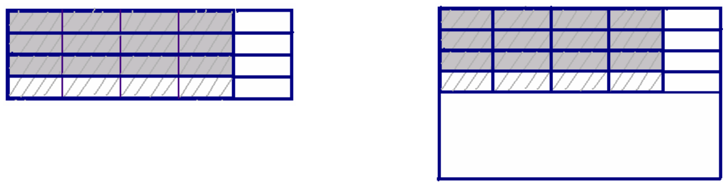
Sobre esta nueva unidad se aplica la segunda fracción del enunciado. Para ello; es necesario incluir cuatro trazos verticales al lado horizontal, para que la configuración de la unidad A sea fraccionada en cinco partes de iguales superficies, de las cuales cuatro van a conformar la nueva unidad que la llamaremos unidad B. Luego, se incluyen trazos horizontales que permitan que la unidad B de fragmente en cuatro partes rectangulares de las cuales es necesario sombrear tres para obtener la representación figural de la fracción $\frac{3}{4}$

Figura 25



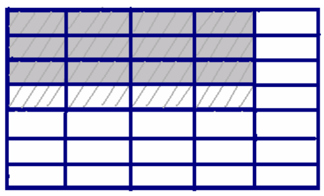
Por último, la configuración figural de la unidad B donde perceptivamente se encuentra sombreada en tres partes de la figura es sobrepuesta en la unidad A, obteniendo una parte de ella se encuentre fraccionada por dieciséis partes iguales y una figura que no lo esta. Es así en la unidad A se hace necesario una prolongación de los tres segmentos que son paralelos a lado horizontal del rectángulo para que la unidad sea fraccionada en 20 partes iguales. El resultado de la multiplicación de las fracciones $\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{5}$ es la intersección entre la parte sombreada con la parte que se encuentra subrayada (Ver Figura 26)

Figura 26



Dado que la unidad original fue fraccionada en dos partes iguales, en la parte de la unidad original se puede aplicar sobreposición de la unidad A obteniendo así una división total de la unidad, de cuarenta partes donde cada una de ellas representa la fracción: $\frac{1}{40}$ de la unidad. (Ver Figura 27)

Figura 27



Lo único que falta es determinar la fracción que resulta de multiplicar las tres fracciones dadas en la consigna, para lo cual se aplica sobre la figura un sencillo proceso de conteo de las partes que se encuentran al mismo tiempo sombreadas y subrayadas. De este modo se obtiene la fracción: $\frac{12}{40}$ de la unidad.

Si nos detenemos un momento a analizar la figura que representa la fracción resultante se puede observar claramente que esta tiene menor superficie comparado con las fracciones que se operaron. Esta construcción da sentido y significado a la multiplicación; proceso que ha sido posible gracias a la manipulación de distintas operaciones de la figura para la obtención del resultado, sin necesidad de realizar procesos aritméticos diferentes al conteo sobre las partes de la figura.

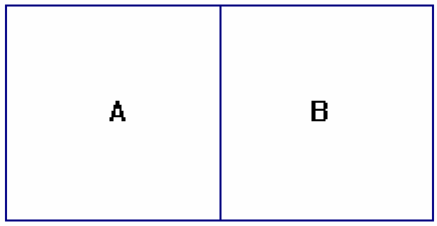
4.6. LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

El "dolor de cabeza" para algunos estudiantes y en muchas ocasiones para algunos docentes, es la resolución de problemas y más aún cuando se trata de problemas con números fraccionarios. Por lo general, el procedimiento para dicha solución se encamina en la aplicación de algoritmos y de reglas mecánicas que se han estado estudiando. Las figuras geométricas ayudan en gran medida a encontrar caminos para dar solución a las cuestiones planteadas. La siguiente situación es una muestra de lo mencionado anteriormente.

Arizabela tiene un galón de leche, obsequia la mitad a su amiga María Paula. Posteriormente le dio a su amiga Paola la mitad de lo que le quedó. Por último le ofreció a Stephania, las tres cuartas partes de lo que le quedaba del galón de leche. ¿Qué fracción de la leche había inicialmente en el galón?

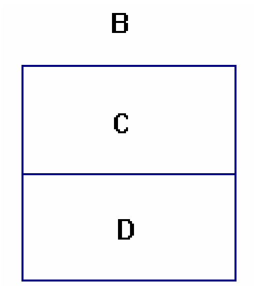
Quien pretende resolver el problema a través de tratamientos figurales, es necesario que tome de manera arbitraria una representación de la unidad, en este caso un rectángulo que, por medio de trazos suplementarios será dividido en dos partes iguales. En este momento, la percepción de la figura ha cambiado, pues el todo se compone de dos figuras rectangulares: A y B; A es la cantidad que Arizabela le regaló a Maria Paula mientras que la parte B es lo que queda en el galón de leche. (Ver figura 28)

Figura 28



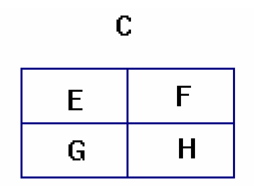
B se convierte en una nueva unidad. Se prosigue a dividir en dos partes iguales: C y D; de donde D es la parte que le corresponde a Paola, que es la mitad de la leche que quedaba después de lo que recibió Arizabela. (Ver Figura 29)

Figura 29



Por último, se toma como nueva unidad a C, que es lo que sobra del galón de leche. Después se divide en cuatro partes iguales: E, F, G, H. para darle a Stephania las tres cuartas partes, es decir, F, G y H. Por lo tanto, lo que sobra del galón de leche queda representada por la parte E. (Ver Figura 30)

Figura 30



Finalmente, la configuración de la unidad C es sobrepuesta en la unidad B, de donde se obtiene una figura que está parcialmente fraccionada. De manera similar se hace la superposición del fraccionamiento de C sobre las partes que fueron repartidas a las amigas de Arizabela, es decir, a las partes A y B. Por lo tanto, la unidad inicial se encuentra fraccionada en 16 figuras rectangulares y cada una de ellas representa $\frac{1}{16}$ de la unidad. Es así, que la subfigura rectangular denominada por la letra E es una de las 16 partes de la unidad, por consiguiente, la fracción de leche que quedó en el galón es $\frac{1}{16}$. (Ver Figura 31)

Figura 31

		E	

Como se puede notar, el proceder de manera figural hace que en cada proceso que se realice sobre la figura, el estudiante vaya comprendiendo las diferentes transformaciones que se van dando en la unidad, en este caso el galón de leche, como también se va dando cuenta del por qué de los algoritmos que comúnmente se aplican para resolver una situación donde se involucren los números fraccionarios.

5. EL PAPEL DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EN LA CONSTRUCCIÓN DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS CON BASE EN EL ANÁLISIS DE TEXTOS ESCOLARES DE MAYOR USO EN LA CIUDAD DE PASTO EN LOS GRADOS TERCERO Y CUARTO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

Se ha encontrado que la educación de las matemáticas en la básica primaria no es pertinente, porque en ella se encuentran educadores cuya formación profesional no es en esta área, dando como resultado la utilización de los textos escolares, que les permiten solucionar de manera inmediata los siguientes cuestionamientos: qué, de qué forma y en qué momentos enseñar, unos u otros objetos, propiedades y relaciones matemáticas; en consecuencia la enseñanza de las matemáticas en los primeros niveles escolares es controlada por los textos escolares escogidos por el educador. Existen muchas formas de enseñar las matemáticas en el mundo; sin embargo la que predomina es la subordinación de la enseñanza magistral, que tiene como referente a los textos escolares, y, de hecho, son muy raros los docentes que rechazan esta manera de enseñar.

> "En algunos sistemas educativos existe un libro de texto cuyo empleo es obligatorio. Este libro es la "Biblia": sacraliza las matemáticas escolares. En otros sistemas los enseñantes pueden escoger entre un conjunto de libros recomendados y en otros sistemas aún más abiertos el enseñante tiene libertad para explorar los recursos que le sean convenientes. Pero la mayoría de los sistemas del mundo espera que los enseñantes utilicen algún libro"[39]

En este sentido los textos escolares, se constituyen en un importante referente sobre el cual se puede analizar las diferentes maneras de enseñar los objetos.

[39] LINARES, SALVADOR; *Matemáticas y aprendizaje: Fracciones.* Editorial síntesis. Madrid. 2000

En este trabajo se realizó una reflexión sobre la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte–todo y el papel que juega el registro semiótico de las figuras en dicha construcción; para tal efecto se hizo una revisión de algunos textos escolares de grado tercero y cuarto de la Educación Básica Primaria en los que se presentan el tema a tratar.

Para identificar los textos de mayor uso de algunas instituciones educativas, se recurrió al diseño de una encuesta (ver anexo 1) que se aplicó en las siguientes comunas urbanas de la ciudad de Pasto.

Tabla 1

COMUNA	No. CENTROS EDUCATIVOS
1	11
4	5
5	8
10	6

El esquema siguiente representa la población muestra a la que se le aplicó la encuesta.

Tabla 2

GRADOS	No. CENTROS EDUCATIVOS ENCUESTADOS	No. PROFESORES ENCUESTADOS	No. DE ENCUESTAS DILIGENCIADAS
Tercero	29	47	83
Cuarto	29	39	78

Obteniendo los siguientes textos utilizados por los docentes de grado tercero:

Tabla 3

NOMBRE DE TEXTO	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Herramientas Matemáticas	26	31.33%
Multiáreas de Norma	17	20,48%
Integrado de Santillana	13	15,66%
Proyecto Matemático Libros y libres	9	10,84%
Actividades Matemáticas	6	7,23%
Otros	12	14,46%

Para el grado cuarto se tienen los siguientes textos:

Tabla 4

NOMBRE DE TEXTO	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Herramientas Matemáticas	22	28,2%
Multiáreas de Norma	16	20,51%
Integrado de Santillana	11	14,1%
Proyecto Matemático Libros y libros	8	10,26%
Actividades Matemáticas	5	6,41%
Inteligencia Matemática	3	3,85%
Otros	13	16,67%

Estos resultados nos permitieron determinar que los textos de mayor uso por parte de los docentes encuestados son Multiáreas de Norma y Herramientas Matemáticas de Santillana.

Para analizar el papel que juegan las figuras geométricas en la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte–todo en los textos escolares anteriormente mencionados, se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

El rol de las figuras geométricas como representaciones dinámicas y estáticas.

Los factores de visibilidad presentes en el desarrollo de actividades donde intervienen los números fraccionarios.

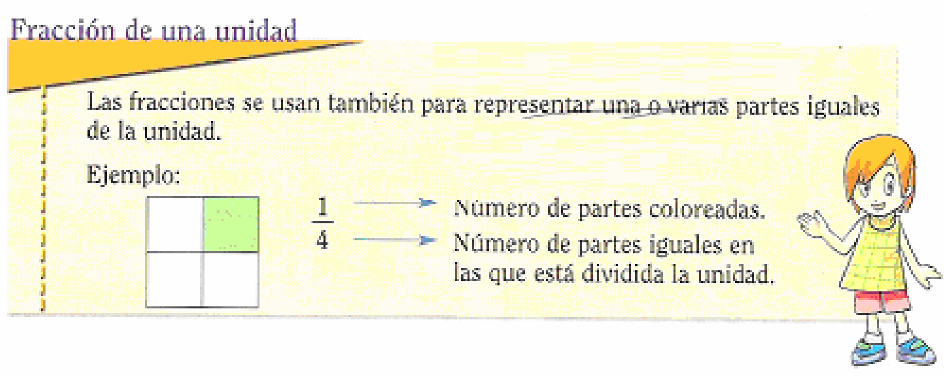
El uso de los objetos físicos para cargar de sentido y significado el aprendizaje de los números fraccionarios

5.1. EL ROL DE LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS EN EL CASO DE LO DINÁMICO Y LO ESTÁTICO.

En las diferentes actividades que se presentan en los textos analizados las figuras geométricas que en ellas encontramos tienen un rol estático, es decir, son representaciones inertes, fijas, a las que no se les puede introducir trazos, ni dividirlas en subfiguras, ni aplicarles rotaciones y traslaciones y mucho menos transformarlas en otra de contorno global diferente puesto que estas solo son herramientas de conteo. Lo anterior se ve reflejado en la mayoría de las consignas que aparecen en el libro donde se pide que coloree partes de una figura de acuerdo a un número determinado y en ninguna actividad le permite al estudiante crear una figura que le determine una fracción. Además en todas las actividades las partes de la unidad continua tienen forma igual sin permitir al niño que pueda idear nuevas formas de dividir la unidad de tal manera que las subfiguras que la conformen tengan un contorno diferente.

La siguiente ilustración representa la manera como se inicia el estudio de los números fraccionarios. La definición de fracción se toman de igual manera en los cuatro textos escolares, la manera como se define es retomada una y otra vez.

Ilustración 1

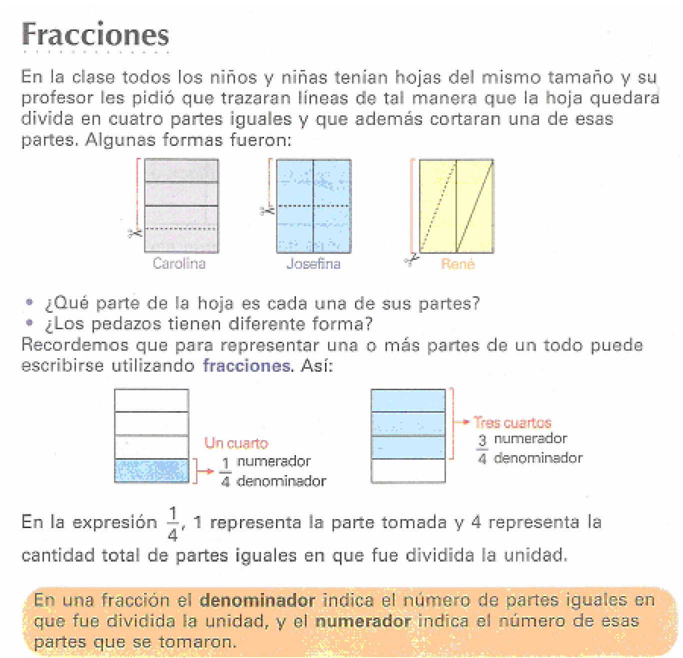

Fracción de una unidad

Las fracciones se usan también para representar una o varias partes iguales de la unidad.

Ejemplo:

$\frac{1}{4}$ → Número de partes coloreadas. → Número de partes iguales en las que está dividida la unidad.

Ilustración 2


Fracciones

En la clase todos los niños y niñas tenían hojas del mismo tamaño y su profesor les pidió que trazaran líneas de tal manera que la hoja quedara divida en cuatro partes iguales y que además cortaran una de esas partes. Algunas formas fueron:

- ¿Qué parte de la hoja es cada una de sus partes?
- ¿Los pedazos tienen diferente forma?

Recordemos que para representar una o más partes de un todo puede escribirse utilizando **fracciones**. Así:

En la expresión $\frac{1}{4}$, 1 representa la parte tomada y 4 representa la cantidad total de partes iguales en que fue dividida la unidad.

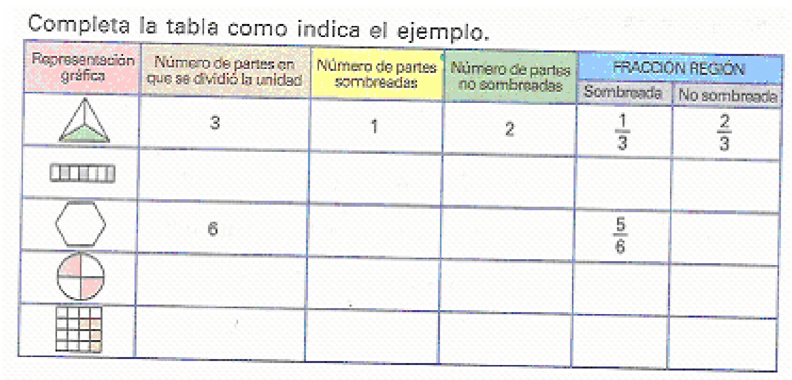
En una fracción el **denominador** indica el número de partes iguales en que fue dividida la unidad, y el **numerador** indica el número de esas partes que se tomaron.

En este caso la figura es utilizada para realizar sobre ella un conteo de las partes en que se divide la unidad y el número de partes coloreadas. Lo mismo ocurre cuando se está trabajando con la relación de equivalencia y orden en los números fraccionarios. Aquí la figura es de carácter estático pues no se realiza sobre ella ninguna operación de reconfiguración y siempre permanece intacta. Sin embargo, en la definición que aparece en el texto 4, se trata de hacer que la figura tenga algo de dinamismo ya que en ellas se observan diferentes formas de dividir la unidad en partes iguales, pero aún no se realizan transformaciones sobre ella, haciendo nuevamente que sobre las figuras se aplique un sencillo conteo de las partes en las que ha sido fraccionada. De esta manera, la forma de inducir al estudiante a la definición de número fraccionario permite una enseñanza mecánica sobre las actividades propuestas. El ver de esta manera y utilizar una estrategia centrada exclusivamente en el conteo, desencadena por lo general procedimientos monótonos, extensos y engorrosos.

En la siguiente actividad se ve reflejado como los ejercicios que los textos plantean no conllevan a ver más allá sobre las figuras, es decir no juegan un rol heurístico en el desarrollo de la actividad propuesta.

Actividad 1, texto 4

Ilustración 3

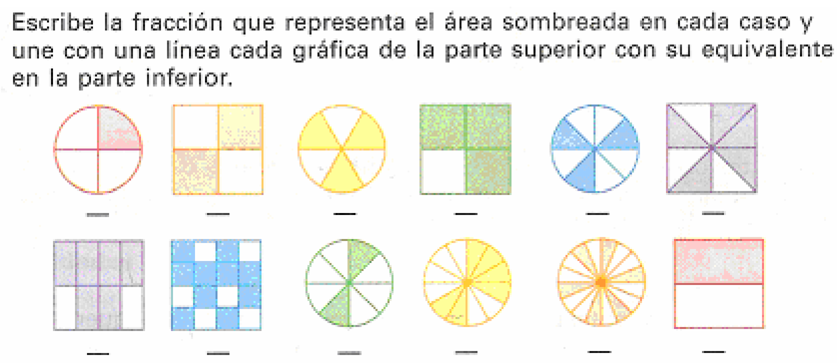

Completa la tabla como indica el ejemplo.

Representación gráfica	Número de partes en que se dividió la unidad	Número de partes sombreadas	Número de partes no sombreadas	FRACCIÓN REGIÓN	
				Sombreada	No sombreada
	3	1	2	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
	6			$\frac{5}{6}$	

En este caso se introduce al estudiante hacia el aprendizaje de los números fraccionarios mediante la acción del conteo sobre las superficies de una figura. De esta manera, la fracción aparece de forma paralela a un número que da cuenta de las partes en que se ha divido la figura en cuestión y su relación con una parte de ella. En la actividad 2 del texto 4 se pide completar una tabla teniendo en cuenta el ejemplo que se da en la primera fila. En esta situación se tiene en cuenta las fracciones que representan en relación a las partes sombreadas y no sombreadas. Solo en la tercera fila de la tabla se pide que el estudiante divida la unidad, representada por un hexágono, en seis partes iguales. Sin embargo, esto no es un asunto de gran complejidad, haciendo que las figuras que se encuentran en la actividad sigan siendo de carácter estático, puesto que la forma perceptual de las figuras iniciales no se transforma en ningún momento.

Actividad 2, texto 4

Ilustración 4



A pesar de que las actividades que se presentan en los 4 textos escolares se caracterizan por ser de carácter estático, sobresale una en la cual se puede realizar algunas operaciones de traslación, reflexión y rotación las cuales hacen que se logre reconfigurar y cambiar la forma perceptual de la figura. Otro aspecto fundamental en la figura es el contorno global que representa la unidad, puesto que este permite una economía de razonamiento ya que la comparación se debe hacer entre unidades del mismo contorno y posteriormente operar sus partes. En este caso, las operaciones que se realizan en la figura hace que el ejercicio se cargue de sentido y significado la relación de equivalencia de los números fraccionarios.

La consigna pide escribir la fracción que representa el área sombreada de las diferentes unidades y posteriormente relacionar las fracciones ubicadas en la parte superior con sus equivalentes que están en la parte inferior. Aquí podemos darnos cuenta, que utilizan diferentes formas de dividir la unidad en partes iguales (sectores circulares, cuadrados, triángulos y rectángulos). Para dar solución al ejercicio planteado bajo tratamientos figurales el estudiante debe realizar operaciones anteriormente mencionadas. De esta manera, él puede visualizar claramente a qué hace referencia la propiedad de equivalencia.

Por lo tanto, el papel que hasta el momento desempeñan las figuras y la manera en que los textos escolares analizados han optado por introducir a sus lectores en el mundo de los números fraccionarios, es estrictamente de naturaleza estática. Además cuando hablamos de partes iguales en las fracciones, debemos tener en cuenta que el establecer la relación de igualdad de las partes de la unidad no es una acción inmediata y es necesario que antes se haya trabajado con los estudiantes sobre el fraccionamiento de diferentes figuras geométricas y la conservación de la unidad. Una manera de proceder figuralmente para observar que dos partes de la unidad son iguales es a través de una superposición de una parte sobre la otra y lo mismo con las demás partes que conforman el todo. Asimismo hay que hacer claridad en que se puede relacionar las fracciones tanto con las partes sombreadas como con las no sombreadas de la unidad, sin importar su forma o las diferentes operaciones de reconfiguración que se hayan hecho sobre ellas.

Por otra parte, es de gran interés realizar un trabajo previo con los estudiantes que permita reflexionar sobre el rol heurístico que podrían jugar las figuras en la construcción de los números fraccionarios para que de entrada no quede subvalorado a procesos aritméticos de muy baja racionalidad como el conteo[40]. Para que las figuras sobre las cuales se representa la unidad se conviertan en representaciones dinámicas, es que sobre ellas se aplican operaciones que dan a las figuras su potencia heurística (fraccionamiento, Reconfiguraciones, configuraciones, rotaciones y traslaciones).

5.2. FACTORES DE VISIBILIDAD PRESENTES EN EL DESARROLLO DE ACTIVIDADES CON LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS.

Es importante resaltar que los diferentes factores que intervienen en una construcción pueden aumentar o disminuir las posibilidades heurísticas que permiten las figuras[41], lo cual hace que hallar la solución del problema planteado resulte de forma inmediata o por el contrario dificulte la visibilidad de las operaciones pertinentes que se deben realizar. El fondo cuadriculado y el fraccionamiento de la figura se constituyen en los principales factores de visibilidad a tener en cuenta en el análisis de las actividades encaminadas a la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte todo propuestas por los textos escolares de mayor uso por parte de los docentes en la ciudad de Pasto.

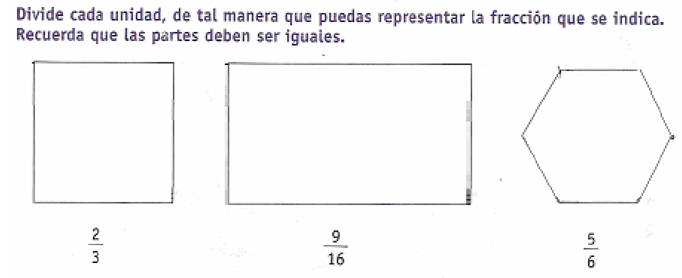
A continuación, analizaremos en detalle algunas de las actividades una vez se ha definido a los números fraccionarios, es en estas actividades donde las posibilidades heurísticas que permiten las figuras comienzan a presentarse aunque no en su máxima expresión.

[40] MARMOLEJO, G. Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras: Procesos de Visualización y Factores de Visibilidad. proyecto de Investigación. Grupo de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Febrero de 2007.

[41] PADILLA. V. *L'influence dé une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques*. These U.L.P: Strsbourg. 1992.

Actividad 3, Texto 1

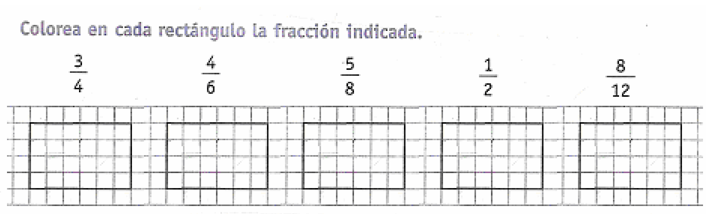
Ilustración 5



En la actividad se pide dividir cada unidad y representar la fracción indicada. La figura demanda la utilización de tratamientos auxiliares, que consisten en trazar segmentos (o líneas, eventualmente), para tener partes iguales que no tiene la figura inicial. En este caso, la tarea no resulta tan sencilla como parece, pues el dividir un cuadrado en tres partes iguales y un rectángulo en dieciséis partes iguales, no es fácil. Quien pretende resolver esta situación, de ante mano deber haber adquirido un conocimiento sobre el fraccionamiento de superficies junto con la congruencia de las figuras geométricas, para que las subfiguras que conforman el todo se constituyan partes iguales de la unidad; ya que, las partes que conforman la unidad no siempre deben tener la misma forma, pero deben representar la misma superficie. Finalmente, lo que queda por realizar se reduce a mirar sobre las figuras y aplicar un sencillo conteo de la cantidad de partes de la unidad que se debe colorear para representar la fracción que indica el enunciado.

Actividad 2, Texto 1

Ilustración 6



Al igual que en la actividad anterior en la consigna se solicita dividir la unidad y luego representar la fracción que se pide. Pero, en este caso el todo se encuentra sobre un fondo cuadriculado. Existe una clara diferencia entre la complejidad de orden cognitivo que subyace al desarrollo de las dos actividades, si bien en la segunda actividad no resulta complejo dividir en partes iguales la unidad dado ya que el estar sobre el fondo cuadriculado la tarea se convierte en un simple conteo.

Desde un punto de vista estrictamente perceptivo, dos superficies no parecen equivalentes si no son isométricas, es decir, si no tienen la misma área y no coinciden por superposición. Sin embargo, quien resuelva la actividad, no tendrá que hacer mayor esfuerzo, puesto que, si centramos la atención, sobre los veinticuatro cuadrados que conforman cada unidad, se puede mencionar que fueron convenientemente escogidos, teniendo en cuenta los denominadores de las fracciones que se mencionan en el enunciado, ya que la división entre ellos es un resultado exacto, lo cual hace que las particiones que se hagan sobre la figura sean con respecto a los partes cuadradas del fondo.

En este ejercicio se muestra cómo el fondo cuadriculado permite "ver" el derrotero de resolución de la actividad: es a través de la aplicación de diferentes formas para dividir la unidad en partes iguales lo cual genera un posterior conteo para la asignación de la fracción. Los conocimientos matemáticos necesarios para resolver la actividad propuesta son mínimos y básicos, no requieren de ningún razonamiento que exija la utilización de teoremas, propiedades y fórmulas matemáticas, únicamente se necesita tener clara la definición de fracción.

El ver sobre un fondo cuadriculado desencadena en la mayoría de los estudiantes un tipo de procedimiento: el conteo. A pesar de que esta forma de ver permite llegar a una respuesta, es importante reconocer que esta es la manera de ver menos propicia en la resolución de un problema planteado, ya que cuando los alumnos ven la figura como una serie de mosaicos y adoptan el conteo como única estrategia de solución, suelen suceder dos cosas[42]. Por un lado, que la figura no juegue ningún papel heurístico en la solución del problema y, por el contrario, los procedimientos que comandan el desarrollo de la situación se realizan por entero en el registro semiótico de la escritura aritmética. Por otra parte, el recurso de la figura como una herramienta heurística es asumido pero en una muy baja racionalidad. El primer caso se ve reflejado en el momento en que el estudiante cuenta los cuadrados y posteriormente los relaciona con el denominador de la fracción que se quiere representar. En cada uno de estos procedimientos es claro, que en ningún momento se recurre al registro semiótico de las figuras, sino que, por el contrario, los procedimientos que se realizan se dan a través del conteo, el cual, no siempre conduce a recurrir a un registro semiótico aritmético.

En escasas ocasiones, los estudiantes ven un poco más allá al momento de solucionar la actividad para reconocer la existencia de subfiguras al interior de la unidad que pueden ser utilizadas para representar la fracción, tales como, figuras triangulares, cuadradas y rectangulares. Así se obtiene una nueva figura de contorno global distinto al de las figuras con las que casi siempre están acostumbrados a trabajar. Luego del fraccionamiento del todo, el estudiante tendrá que realizar operaciones de rotación y traslación, entre otras, para posteriormente realizar el conteo y la representación adecuada de la fracción. En este caso, se ha hecho uso de algunas de las posibilidades que permiten las figuras, se aplicaron traslaciones, rotaciones. Sin embargo, una vez realizado este procedimiento la figura es dejada de lado y la conclusión que posteriormente da el alumno se centra por entero, en general, en el conteo. Decimos entonces, que en este caso las posibilidades figurales que son puestas en juego son de muy baja racionalidad.

[42] MARMOLEJO, G. Algunos Tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras: Procesos de Visualización y Factores de Visibilidad. proyecto de Investigación. Grupo de Educación Matemática. Instituto de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Febrero de 2007.

Otro aspecto a tener en cuenta, y que nos indica que ver sobre las figuras en un fondo cuadriculado no es lo más apropiado en la solución del problema planteado, es que al asumir como unidad de visualización cada uno de los cuadrados que conforman el fondo cuadriculado lleva a una pérdida de la globalidad de la figura. Es decir, no hay conciencia de la figura como un todo. Esto impide que a partir de un reconocimiento global de la figura, se pueda recurrir a ella como un soporte intuitivo que guíe la solución del problema hacia procedimientos de racionalidades mayores a los establecidos con la aplicación exclusiva del conteo.

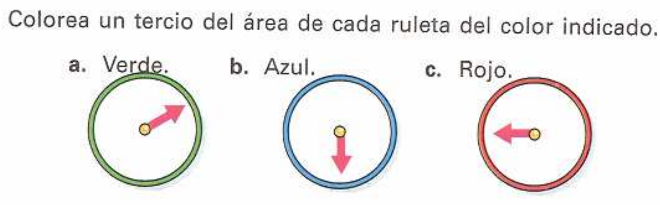
Una característica fundamental que se resalta en las actividades es que las figuras utilizadas se presentan fraccionadas en partes o bien, pueden ser fáciles de dividir sin ayuda de un proceso de medición. Por lo tanto, no existe la necesidad de medir, entonces, para garantizar que las partes obtenidas sean iguales es necesario que tengan igual forma. Asimismo, se utiliza como mecanismo de representación unidades circulares que no benefician en nada a la solución del ejercicio y de igual manera se pide que en ellas se represente el resultado, pero es de gran complejidad hacerlo ya que no es fácil para un estudiante de grado tercero dividir un circulo en tres partes iguales ya que se hace necesario un conocimiento sobre métodos de medición de ángulos con la utilización del compás o el transportador procedimientos que según los estándares de calidad son movilizados en los grados cuarto y quinto de la Educación Básica Primaria[43]. En la actividad 3 del texto 2 resaltamos la siguiente situación donde se representa la unidad por medio de un círculo que debe ser fraccionado en partes iguales.

---

[43]MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. *Estándares Básicos de competencias en matemáticas.* Revolución Educativa Colombia Aprende. Santa fe de Bogotá. 2006

Actividad 3 texto 2

Ilustración 7



Por consiguiente, es necesario que en actividades anteriores se haya tratado sobre la división de partes congruentes de una circunferencia, así como también la utilización de herramientas para medir y trazar ángulos.

A pesar, de que en el ejercicio se utilizan colores no ayudan en nada para encontrar la solución del problema planteado. Es así que el centro de la actividad se torna en el fraccionamiento de la unidad y posteriormente en la representación de la fracción. Otro factor que se observa, es que en el interior de cada unidad se ubica una "flecha" que indica la posición inicial del fraccionamiento, es decir, quien pretende resolver la situación, debe centrar su atención en la dirección de la flecha para empezar desde esta a introducir los trazos para que el todo quede dividido en tres partes iguales.

En conclusión, los únicos factores de visibilidad que se encontraron en los textos escolares analizados fueron el fondo cuadriculado y el fraccionamiento de la figura; sin embargo, cabe resaltar que existen otros como el contorno de la figura, que hace que para cualquier transformación sea necesario neutralizar en la figura su organización perceptiva. Otro de los factores de visibilidad es el desdoblamiento de un objeto dado, que es una práctica tan trivial como necesaria en la identificación de un mismo objeto bajo varias expresiones o puntos de vista diferentes, lo cual constituye un obstáculo, que una buena parte de los niños y niñas no cesa de encontrar en las diversas situaciones de aprendizaje que le son planteadas.

5.3. EL USO DE LOS OBJETOS FÍSICOS PARA CARGAR DE SENTIDO Y SIGNIFICADO EL APRENDIZAJE DE LOS NÚMEROS FRACCIONARIOS

Para el análisis de esta variable es necesario establecer la diferencia entre las figuras geométricas y los dibujos. En las primeras, se hace referencia concomitantemente a dos aspectos: la consigna y la representación canónica, no es posible demarcar las propiedades de la figura en cuestión sin hacer referencia a la consigna, es en ella en donde se designa las características matemáticas del objeto en cuestión. Caso contrario sucede en los dibujos, en ellos existe una estrecha relación entre el objeto y su representación, la representación perceptualmente da cuenta de lo representado, en dicho caso no es necesaria una consigna para demarcar las características del objeto a representar, por el contrario, estas se pueden "extraer" de la representación, asunto que no es posible en el mundo de las figuras geométricas.

Ilustración 8

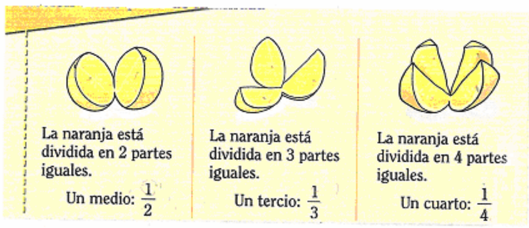


Ilustración 9

En las ilustración 8, 9 se puede plantear la pregunta de cómo es posible hacer que los dibujos que representan objetos físicos como una naranja, una pizza, un pastel, una manzana, entre otras; se pueda dividir en partes iguales como se indica en la consigna. Es así que cuando se trabaja con dibujos se inculca en los estudiantes una inapropiada concepción de que un objeto físico se puede dividir en partes iguales; ya que la única manera de hacerlo es a través del gramaje; por otro lado, son figuras que son tridimensionales y así se parezcan a una esfera u otro sólido conocido en realidad no lo son.

Teniendo en cuenta lo anterior se puede observar que para la construcción de los números fraccionarios no es conveniente la utilización de dibujos porque pueden conducir a los estudiantes a intentar utilizar este objeto matemático en contextos donde no son apropiados. Como por ejemplo, al tratar de tomar la mitad de una persona, dos tercios de un perro, etc. Además, cuando se trabajo con dibujos, en la mayoría de los casos no hay congruencia semántica[44] con el contexto al que hace alusión. Es decir, los números fraccionarios en el contexto continuo se tratan a partir de comparaciones y/o fraccionamientos de áreas de figuras geométricas de dimensión dos. Esto conlleva a que el estudiante cree en su mente una falsa idea de lo que significa cada uno de los contextos. El fraccionamiento de dibujos suscita en los estudiantes a realizar actividades forzadas, como el caso de dividir en diez partes iguales una naranja, esto no es posible si no se cuenta con herramientas sofisticadas que lo permitan hacer; porque controlar que la magnitud a la que se hace referencia para que las partes sean iguales resulta una tarea difícil. Por otra parte, en los textos escolares que hacen alusión a los dibujos como representaciones de un objeto físico no hacen una debida diferenciación sobre la magnitud con la se va a fraccionar, ya que los objetos físicos se pueden comparar mediante diferentes magnitudes como son el volumen y el peso.

[44] De acuerdo con Duval, la congruencia semántica alude al hecho de que el anclaje producido por la aprehensión perceptual sobre la figura, es decir, las subconfiguraciones, subfiguras y unidades figurales que la figura "muestra", son las mismas a las que el enunciado refiere. La no congruencia semántica es uno de los factores más importantes que aumentan la complejidad cognitiva al ver sobre una figura. Otro aspecto que aumenta esta complejidad y que se encuentra relacionado con el anterior, tiene que ver con que de manera conjunta, en caso de la existencia de una congruencia semántica, o de forma separada si esta no está presente, tanto la consigna como la aprehensión perceptual de la figura produzcan un anclaje sobre aquellas subconfiguraciones, subfiguras, unidades elementales y transformaciones de la figura que no son pertinentes y potentes en la solución del problema planteado.

En el análisis que acabamos de terminar se observó como las figuras juegan con una mayor o menor potencia heurística en las apuestas de la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte-todo, realizadas por los textos escolares de segundo y tercer grado de Educación Básica más usados en la ciudad de Pasto. En muy pocas actividades, se observó como el registro semiótico de las figuras se constituyó en una herramienta heurística de gran interés en el intento de cargar de significado el aprendizaje del objeto matemático que se está estudiando y en muchas ocasiones, cuando se pretende abordar, temas como las operaciones con los números fraccionarios y otras propiedades, las representaciones figurales son dejadas de lado, para continuar con tratamientos propios de la aritmética, como son la enseñanza de algoritmos de este objeto matemático.

6. CONCLUSIONES

El desarrollo de la presente investigación da lugar a una serie de resultados que, a nuestra manera de ver, aportan de manera significativa no solo a la investigación en el campo de la educación matemática; sino también a la enseñanza de la geometría y la aritmética en la educación básica. Estas conclusiones se presentan divididas en tres grupos. En el primero, se coloca de relieve el papel que juegan las figuras geométricas, la visualización en ellas y los factores de visibilidad, en las apuestas de enseñanza que sobre los números fraccionarios realizan los textos escolares analizados; en el grupo siguiente, se establecen los aportes de orden curricular que suscita el desarrollo del presente trabajo. Por último, se explicitan aquellos aspectos relacionados con la construcción de los números fraccionarios desde una perspectiva semiótica, que nuestra investigación deja abiertos y que esperamos en el futuro se constituyan en importantes referentes en aras de dar inicio a nuevas investigaciones.

1. Con respecto al papel que juegan las figuras geométricas, la visualización en ellas y los factores de visibilidad, en las apuestas de enseñanza que sobre los números fraccionarios realizan los textos escolares analizados:

Se puede afirmar que el papel que juegan las figuras en el aprendizaje de los números fraccionarios se fundamenta en la creencia de que ellas hablan por sí mismas. En consecuencia, en la presente investigación se encontró que en los textos escolares la utilización de las figuras fue mínima y en algunas actividades no fueron soportes heurísticos para la comprensión de las diferentes propiedades y relaciones que tienen los números fraccionarios.

Se piensa que las figuras son un modo de ilustración al que no se puede realizar ningún tipo de cambio o reestructuración, pues, existe un total desconocimiento de los tratamientos permitidos por las figuras. Es así, que en el análisis realizado fueron pocas las situaciones en las que se podían realizar operaciones figurales para dar solución a una actividad determinada. Por consiguiente, se observó que en los textos escolares analizados las figuras solamente eran utilizadas como herramientas de conteo y se privilegiaban la aplicación de algoritmos.

Una vez más se pone en relieve que los factores de visibilidad pueden aumentar o disminuir las posibilidades heurísticas que permiten las figuras, lo cual hace que hallar la solución del problema planteado resulte de forma inmediata o por el contrario dificulte la visibilidad de las operaciones pertinentes que se deben realizar. El fondo cuadriculado y el fraccionamiento de la figura se constituyeron en los principales factores de visibilidad que se encontraron en el análisis de los textos escolares; existió una total ausencia de los demás factores como las formas cóncavas y convexas, el contorno global y local de la figura, entre otros.

Generalmente, el papel que desempeñaron las figuras y la manera en que los textos escolares analizados optaron por introducir a sus lectores en el mundo de los números fraccionarios, es estrictamente de naturaleza estática. Es decir, se caracterizaron por ser representaciones figurales inertes, fijas, a las que no se les puede introducir trazos, ni dividirlas en subfiguras, ni aplicarles rotaciones ni traslaciones y mucho menos transformarlas en otra de contorno global diferente, puesto que, estas solo se utilizaron como herramientas de conteo, siendo esta manera de proceder una de las de menos nivel de exigencia en el desarrollo de pensamiento numérico.

2. Aportes de orden curricular que suscita el desarrollo del presente trabajo

Aplicar espontáneamente sobre una figura un cambio dimensional en la forma de ver sobre ella es una operación figural de enorme complejidad. Por lo tanto, es necesario realizar un aprendizaje específico que permita a los estudiantes generar este tipo de racionalidad; el fraccionamiento y la reconfiguración de las figuras geométricas, utilizando diferentes operaciones figurales, constituyen en dos formas de actuar que posibilitan dicha reflexión.

Es importante asumir que el aprendizaje de los tratamientos que posibilita el registro semiótico de las figuras, la discriminación de las diferentes formas de ver que este permite y el reconocimiento del papel que juegan los diferentes factores de visibilidad que se encuentran presentes; es un asunto de gran importancia no solo para el estudio de la geometría, sino de gran parte de las matemáticas escolares. Pero, no basta con la discriminación de las características al interior de este registro.

Es mucho más importante aún reconocer las variables figurales que se ponen en acto en la coordinación de las figuras geométricas con otros registros de representación; en consecuencia, se establece la necesidad de identificar aquellos objetos y procesos matemáticos cuyo aprendizaje susciten tal reflexión (el razonamiento deductivo, para la articulación de las figuras con la lengua natural especializada; la resolución y planteamiento de problemas aritméticos donde intervienen los números fraccionarios o en la construcción de estos objetos matemáticos, para la articulación de las figuras con la escritura aritmética…).

La única manera de cargar de sentido y significado la construcción de los número fraccionarios es a través de la puesta en acto de las posibilidades que brinda el registro semiótico de las figuras. En otras palabras, un aprendizaje de los números fraccionarios exige la acción conjunta tanto de la escritura aritmética y el de las figuras, no solamente el segundo; tal como sucede en la escuela. Al respecto, los lineamientos curriculares exigen una coherencia vertical, es decir, que el conocimiento se movilice a través de diferentes tipos de pensamiento. Los aportes que esta investigación proporciona, permite lograr una movilización no solo en el pensamiento numérico con los números fraccionarios, sino también con el pensamiento espacial con la utilización de las figuras geométricas.

3. Aspectos relacionados con la construcción de los números fraccionarios desde una perspectiva semiótica, que nuestra investigación deja abiertos y que esperamos en el futuro se constituyan en importantes referentes en aras de dar inicio a nuevas investigaciones

Con respecto a la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte-todo, en este trabajo se dan algunas pautas a tener en cuenta en el diseño de situaciones didácticas que susciten en las aulas escolares. La reflexión en torno las diferentes formas de ver sobre las figuras geométricas junto a los diferentes procesos y tratamientos para lograr un mejor aprendizaje y así poder abordar no solamente a los números fraccionarios, sino también, a las diferentes interpretaciones que son pertinentes con esta representación. Sin embargo, solo se hizo énfasis en algunos aspectos que a nuestra manera de ver son vitales en la construcción de los números fraccionarios.

Se hace necesario, entonces, liderar nuevos procesos de investigación que centren su atención en la complejidad y posibilidades figurales que de ellos se desprenden; en consecuencia, poder explicitar variables didácticas que permitan discriminar el papel que juega el Registro semiótico de las Figuras, la visualización y los factores de visibilidad en estos dos aspectos; así como las dificultades y obstáculos a los cuáles se ven enfrentados los estudiantes al articular las figuras con otros registros de naturaleza diferente en los diferentes ciclos de la educación.

7. BIBLIOGRAFÍA

ARCAVI, A. *The role of visual representations in the learning of mathematics.* IN F Hitt & M. Santos (Eds.), *Proccedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE publications-The ohio State University

AUSUBEL, N. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2° Ed.TRILLAS México. 1983

BROUSSEAU, G. "*Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática",* trad. de su tesis de graduación, Facultad de Matemática, Universidad de Córdoba. 1986

CASTRO, D; Suárez Mariela; *Representación de los números fraccionarios en un registro unidimensional.* Ministerio de Educación. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. 1999

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano.* Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali. Colombia. Artes Gráficas Univalle. 1999.

ELLERBRUSCH, L. Payne, J."A Teaching Sequence from Initial Fraction concepts Through the Addition of Unlike Fraction" en Developing Computational Skills, Suydam, M.N. , M.N.,y Rey, R. E. (Ed.)(NCTM, Reston VA, 1978)

FREUNDETHAL, H. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Pág. 20. 1994

JOYA ANNERIS Y OTROS; *Herramientas Matemáticas 3.* Editorial Santilla. Bogotá. 2003

7. BIBLIOGRAFÍA

ARCAVI, A. *The role of visual representations in the learning of mathematics.* IN F Hitt & M. Santos (Eds.), *Proccedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE publications-The ohio State University

AUSUBEL, N. *Psicología Educativa: Un punto de vista cognoscitivo*. 2° Ed.TRILLAS México. 1983

BROUSSEAU, G. "*Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática",* trad. de su tesis de graduación, Facultad de Matemática, Universidad de Córdoba. 1986

CASTRO, D; Suárez Mariela; *Representación de los números fraccionarios en un registro unidimensional.* Ministerio de Educación. Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía. 1999

DUVAL, R. *Semiosis y pensamiento humano.* Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Cali. Colombia. Artes Gráficas Univalle. 1999.

ELLERBRUSCH, L. Payne, J."A Teaching Sequence from Initial Fraction concepts Through the Addition of Unlike Fraction" en Developing Computational Skills, Suydam, M.N. , M.N.,y Rey, R. E. (Ed.)(NCTM, Reston VA, 1978)

FREUNDETHAL, H. *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Pág. 20. 1994

JOYA ANNERIS Y OTROS; *Herramientas Matemáticas 3.* Editorial Santilla. Bogotá. 2003

8. ANEXOS

ANEXO A

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS
Programa de licenciatura en Matemáticas
ENCUESTA

FECHA: ____________________________________

La presente encuesta está encaminada a determinar los textos de matemáticas de mayor uso en las instituciones educativas de la Básica Primaria de la ciudad de Pasto, para realizarle el análisis sobre la construcción de los números fraccionarios. Dicho análisis tiene como finalidad aportar elementos que le permitan al docente seleccionar el libro de texto más adecuado, para que en el momento de la planeación de sus clases cuente con todos los elementos que la construcción requiera.

Institución Educativa:

____

Grado:

____

Nombre del texto:

____

Editorial:

____

Autor:

____