

**ANÁLISIS LINEAL DE ESTABILIDAD DE UN MODELO
MATEMÁTICO PARA LA TRANSMISIÓN DE LA ENFERMEDAD
DEL DENGUE Y EL COMPORTAMIENTO NUMÉRICO DEL
MODELO CON DATOS TOMADOS DE LA POBLACIÓN DE
TUMACO (NARIÑO).**

LUIS EDUARDO LÓPEZ MONTENEGRO

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

2007

**ANÁLISIS LINEAL DE ESTABILIDAD DE UN MODELO
MATEMÁTICO PARA LA TRANSMISIÓN DE LA ENFERMEDAD
DEL DENGUE Y EL COMPORTAMIENTO NUMÉRICO DEL
MODELO CON DATOS TOMADOS DE LA POBLACIÓN DE
TUMACO (NARIÑO).**

LUIS EDUARDO LÓPEZ MONTENEGRO

**Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas**

EDUARDO IBARGÜEN MONDRAGÓN, Mg.

Asesor

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

2007

Nota de Aceptación

Jurado

Jurado

Asesor

San Juan de Pasto, Febrero de 2007

A mi Dios ...

A la memoria de mi madre Cecilia Montenegro

A mi padre Jorge Arturo López

A mi tia Lola Montenegro

AGRADECIMIENTOS

Al Centro de Salud Malaria de la ciudad de Tumaco (Nariño) y al Centro Epidemiológico del Instituto Departamental de Salud de Nariño, por su valiosa colaboración en el desarrollo de este trabajo.

Al profesor Eduardo Ibargüen Mondragón, por su eficiente y acertada dirección al presente trabajo. Además, por su calidez humana, por brindarme su amistad y los apoyos necesarios para concluir satisfactoriamente esta investigación.

A la profesora Claudia Gómez Agudelo, por su apoyo incondicional no solo con el desarrollo de este trabajo sino durante todo el proceso de mi formación como docente.

A todos los profesores vinculados al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, por el apoyo brindado durante mis estudios universitarios.

A mis amigos (as) y compañeros (as) que se han mostrado solidarios conmigo, y me brindaron su apoyo incondicional.

LUIS EDUARDO LÓPEZ MONTENEGRO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Febrero 2007

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	VIII
1. ENFERMEDAD DEL DENGUE	1
1.1. ANTECEDENTES DEL DENGUE	1
1.2. ENFERMEDAD DEL DENGUE	3
1.2.1. El Virus	4
1.2.2. Mosquito Vector	5
1.3. OTRAS INVESTIGACIONES	7
2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS	8
2.1. ÁLGEBRA LINEAL	8
2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DINÁMICOS . . .	9
2.3. ESTADÍSTICA	16
3. DEDUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO	19
4. PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	26
4.1. PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL MODELO	26
4.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD	29
5. ANÁLISIS NUMÉRICO	31
5.1. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS	31
CONCLUSIONES	37

ANEXOS	40
BIBLIOGRAFÍA	62

LISTA DE FIGURAS

Ciclo de Vida del Mosquito	6
Mosquito Aedes Aegypti	7
Punto de Equilibrio Estable	12
Punto de Equilibrio Asintóticamente Estable	13
Punto de Equilibrio Inestable	13
Estimación de Máxima Verosimilitud	18
Estimación de Máxima Verosimilitud Para μ_H	33
Estimación de Máxima Verosimilitud Para b	34
Proporción Susceptible	36
Proporción Infectada	37
Retrato de Fase	38

LISTA DE ANEXOS

Anexo A		40
Anexo B		43
Anexo C		44
Anexo D		47
Anexo E		50
Anexo F		52
Anexo G		52
Anexo H		54
Anexo I		57
Anexo J		60

RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio de carácter monográfico sobre la estabilidad lineal de las soluciones de equilibrio de un modelo matemático propuesto por Lourdes Esteva y Cristobal Vargas para la enfermedad del dengue. Se inicia presentando la enfermedad desde un punto de vista biológico y su relación con los modelos matemáticos, se presentan algunas definiciones y resultados conocidos de diferentes áreas tales como álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y estadística para una mejor comprensión del trabajo. Una vez realizada la deducción del modelo se encuentran los puntos de equilibrio y se determina el tipo de estabilidad de cada punto.

Con datos reales de Tumaco, proporcionados por el Centro de Salud Malaria (Tumaco) y el Instituto Departamental de Salud de Nariño (Pasto) se ajustan los parámetros del modelo, algunos de estos se aproximaron utilizando el método de Máxima Verosimilitud, los demás fueron proporcionados por el centro de salud Malaria y se hace un análisis numérico con los datos obtenidos.

Finalmente se presenta un capítulo de anexos donde se desarrollan las demostraciones necesarias para justificar la deducción del modelo matemático y el análisis de estabilidad.

INTRODUCCIÓN

La idea de seres vivientes invisibles como agentes de enfermedades inicia con los escritos de Aristóteles (384-322 a.c.), pero no fue hasta el siglo XVI que esta teoría fue desarrollada. Leeuwenhoek (1632-1723) con la ayuda de los primeros microscopios demostró la existencia de microorganismos. En 1840 el Bio-químico Jacob Henle encontró la primera expresión para la teoría del germen en una enfermedad, posteriormente Robert Koch (1843-1910), Joseph Lister (1827-1912) y Louis Pasteur (1827-1875) a finales del siglo XIX e inicios del siglo XX establecieron bases más sólidas a esta teoría. En la actualidad las enfermedades más conocidas son las transmitidas por agentes virales como la influenza, el sarampión, la rubeola y la varicela, las cuales confieren inmunidad contra la reinfección; pero hay enfermedades que no la confieren, como las ocasionadas por bacterias entre ellas están la tuberculosis, meningitis y gonorrea. Otras enfermedades como la malaria, la fiebre amarilla, el dengue no se transmiten directamente de humano a humano, pero sí por vectores (normalmente los insectos) quienes transmiten la enfermedad a los humanos por vía sanguínea. Los cambios de temperatura, las precipitaciones, la humedad causan la mayoría de las enfermedades virales de la población mundial, el dengue es una de estas enfermedades (véase [1]).

El término “dengue” se originó en América entre 1827 y 1828, a raíz de una epidemia en el Caribe que cursaba con fiebre y erupciones en la piel. Los esclavos provenientes de África identificaron a esta entidad patológica como dinga o dyenga, homónimo del swahili “Ki denga pepo” que significa ataque repentino (calambre o estremecimiento)

provocado por un “espíritu malo” que para nosotros es el mosquito. El reporte mas antiguo de esta enfermedad, data de la Enciclopedia China de Síntomas de las Enfermedades y Remedios, publicada por primera vez durante la Dinastía China (265-420 d.c). Esta enfermedad fue llamada por los chinos como “agua venenosa” y ellos pensaban que de algún modo estaba conectada con insectos voladores asociados al agua (véase [14]).

El dengue es transmitido por mosquitos de la familia Aedes (principalmente A. Aegypti), y es causado por cuatro serotipos de un virus de la familia Flaviviridae. Esta enfermedad se propaga rápidamente en zonas tropicales por debajo de los 2200 msnm (metros sobre el nivel del mar), tiene mayor influencia en zonas donde hay poca eliminación de aguas residuales y desechos sólidos. Existen dos clases de dengue, el dengue clásico (DC) y la fiebre por dengue hemorrágico (DHF), la primera se caracteriza por el desarrollo rápido de fiebre que puede durar entre 5 y 7 días, con dolores intensos de cabeza y articulaciones musculares; la segunda es más grave, es asociada con perdida del apetito, vómitos, fiebre alta, dolor de cabeza y dolor abdominal (véase [2, 4]).

En 1906 Bancroft publica las primeras evidencias del Aedes Aegypti como el vector principal del dengue, basandose en investigaciones hechas anteriormente por el médico Cubano Carlos J. Finlay, el cual anunciaba que este mosquito es el agente transmisor de la fiebre amarilla.

Sin el tratamiento adecuado el DHF puede causar la muerte hasta en un 50 % de los casos, este es asociado al virus tipo III, aparece en personas que previamente han tenido infecciones con serotipos similares. En Colombia, los serotipos que más prevalecen son tipo I y tipo II localizados con mayor proporción en la zona Pacífica Colombiana; el DHF no se ha presentado aún en esta región, pero si en otras regiones. El dengue constituye en Colombia uno de los problemas mas importantes en lo que respecta a la salud pública, aumentando descontroladamente la invasión del mosquito en la región (véase [9, 10]).

La Biomatemática nació como Ciencia en los años 1926 y 1927 con los trabajos de Volterra (1926), Lotka (1927) y Kostitzin (1927) quienes iniciaron la aplicación de la Biología con la matemática. Volterra, motivado por un problema que le sugirió su yerno, el zoólogo Humberto D'Ancona, demostró usando un modelo matemático, que las fluctuaciones de la pesca en el Mar Adriático (mar mediterráneo al sur de Europa) podían deberse a la interacción entre depredadores y presas. A partir de allí, la mayoría de los conceptos de la Ecología y la Biología han tenido expresión en forma de modelos matemáticos que explican o predicen lo que pasa en la naturaleza, con mayor o menor grado de realismo y precisión; en donde el objeto de trabajo son los fenómenos que involucran salud, ambiente y sus consecuencias. El estudio de las enfermedades virales por medio de modelos matemáticos ha tenido un amplio desarrollo en los últimos años y ha demostrado ser una gran arma para entender patrones y procesos epidemiológicos siempre y cuando estos modelos sean lo suficientemente reales y basados en conocimientos biológicos, de no ser así su aplicación puede llevar a resultados incoherentes no satisfactorios. La importancia de estos modelos se debe a que aportan potentes herramientas para describir las relaciones que se hallan presentes en los sistemas biológicos. Los modelos matemáticos epidemiológicos ayudan a modelar la forma como se transmite el virus en una población y dan sugerencias para prevenir su propagación (véase [3, 5]).

Teniendo en cuenta los distintos estados relacionados con un proceso infeccioso, los modelos matemáticos epidemiológicos se dividen en tres grupos:

- SIR: El modelo susceptible-infectado-recuperado, relacionado con las enfermedades que confieren inmunidad permanente. Esto no quiere decir que todos los individuos de una población deban pasar por estos estados, algunos no serán infectados y permanecerán en estado susceptible, otros serán inmunizados artificialmente por vacunación, o algún otro método y pasarán a ser recuperados sin haber estado infectados. Es justamente el interés del modelo tener en

cuenta todas estas posibilidades y tratar de predecir el comportamiento de una epidemia. El modelo a seguir en esta investigación es de este tipo, pero se descarta la inmunización artificial, ya que no hay una vacuna para prevenir esta enfermedad.

- SIRS: El modelo susceptible-infectado-recuperado-susceptible, idéntico al anterior, pero aplicable a casos en que la inmunidad no es permanente y el individuo vuelve a ser susceptible después de un cierto periodo, tal como la gripe.
- SIS: El modelo susceptible-infectado-susceptible; se usan en casos en que la enfermedad no confiere inmunidad y el individuo pasa de estar infectado a susceptible nuevamente, saltando la etapa R.

No hay duda acerca de la necesidad de contar con una vacuna contra el dengue que brinde inmunidad de larga duración contra los cuatro serotipos del virus. Sin embargo, diversos factores han impedido la elaboración de vacunas específicas contra el dengue; la comunidad científica no espera contar con una vacuna en los próximos 10 años, por lo que en la actualidad, la erradicación del vector continúa siendo la única alternativa viable para controlar esta enfermedad. Diferentes investigadores han trabajado en este campo como Hyun Mo Yang vinculado al Instituto de Matemática, Estadística y Computación Científica (Imecc) de la Universidad Estatal de Campinas (Unicamp-Brasil), Yang aborda el estudio de modelos matemáticos para los factores que intervienen en la transmisión de la enfermedad por el mosquito *Aedes Aegypti* (véase [3]). Jonny Duque, Anibal Muñoz y Mario Navarro de la Universidad del Quindío (Colombia) han hecho investigaciones sobre un modelo de simulación para el control del mosquito *Aedes Aegypti* (véase [5, 6]).

Lourdes Esteva y Cristobal Vargas presentan un modelo para la transmisión de la enfermedad del dengue en una población humana constante, ellos presentan un análisis global y completo de estabilidad, iniciando con la estabilidad de las soluciones de

equilibrio y posteriormente utilizan resultados de la teoría de sistemas competitivos y estabilidad de orbitas periódicas para establecer la estabilidad global del equilibrio endémico.

En este proyecto de investigación se realizó un estudio de carácter monográfico de este modelo. En concreto, se hizo el análisis de estabilidad lineal de las soluciones de equilibrio, completando todos los cálculos y demostraciones que no aparecen en el artículo, además se complementó el trabajo con un análisis numérico con la ayuda del software Phaser 2.1.

El documento está organizado de la siguiente forma. En el primer capítulo se hace una breve descripción biológica de la enfermedad. En el segundo, se presenta un capítulo de preliminares matemáticos donde se encuentran definiciones y resultados conocidos de diferentes áreas como álgebra lineal, ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y estadística, que son indispensables para desarrollar el trabajo. En el tercero, se deduce el modelo matemático representado por un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias. En el cuarto, se encuentran los puntos de equilibrio del sistema y se hace un estudio del tipo de estabilidad de cada punto de equilibrio. En el quinto, con datos proporcionados por el Centro de Salud Malaria de Tumaco y el Instituto Departamental de Salud de Nariño se hace el ajuste de los parámetros del modelo; algunos de ellos se aproximaron utilizando el método de Máxima Verosimilitud, para así hacer un análisis numérico con los datos obtenidos. Finalmente se complementó el trabajo con un capítulo de anexos, donde se encuentran los cálculos y demostraciones necesarios para argumentar la deducción del modelo y el análisis de estabilidad de sus puntos de equilibrio.

1. ENFERMEDAD DEL DENGUE

En este capítulo se presenta la enfermedad desde un punto de vista biológico. Primero se anuncia los antecedentes de la enfermedad, luego se hace una descripción de la enfermedad y por último se citan algunas investigaciones hechas acerca de la enfermedad.

1.1. ANTECEDENTES DEL DENGUE

A finales del siglo XX el dengue en las Américas fue catalogado como uno de los problemas mas importantes en la salud pública, debido a la rápida propagación del vector en la región. Desde entonces se han venido desarrollando diferentes campañas de erradicación del mosquito bajando la tasa de transmisión en la población, pero esto no es suficiente ya que a medida que pasa el tiempo la enfermedad tiende a propagarse con mas rapidez en las regiones tropicales (véase [13]).

En América el dengue ha tenido un incremento significativo en los últimos veinte años debido a los profundos y desestabilizados cambios climáticos que alteran el ecosistema y por ende ayuda a mejorar la reproducción del mosquito. Controlar la transmisión de la enfermedad es cada vez mas difícil, ya que el mosquito prevalece en más de 28 países (véase [12]).

Las primeras epidemias compatibles con el D.C en Latinoamérica y el Caribe ocurrieron en las Antillas Francesas en 1635 y en Panamá en 1699, mucho antes de los primeros reportes clínicos encontrados en la literatura médica entre 1779 y 1780. El DHF fue descrito por primera vez como una entidad clínicamente definida en Fili-

pinas en 1954. En las dos últimas décadas previas al siglo XXI, el dengue vuelve a tomar notoriedad en las Américas con el brote epidémico de dengue hemorrágico en Cuba (1981) marcándola como una enfermedad emergente en las Américas, seguido del segundo gran brote durante el intervalo diciembre de 1989 a abril de 1990 en Venezuela; hitos que indicarían la propagación progresiva de dicha enfermedad como un fenómeno emergente en la región, asociada a la reemergencia del dengue en América del Sur.

En la actualidad el dengue es una de las enfermedades que más afecta la salud pública a nivel mundial, anualmente se reportan de 50 a 100 millones de casos de dengue clásico y de 250.000 a 500.000 casos de dengue hemorrágico transformandose en la principal causa de hospitalización y muerte entre los niños del mundo (véase [10]).

Probablemente entre 1987 y 1988 se produjo el primer brote de la enfermedad en América Central, América del Sur y las islas del Pacífico, aunque en Colombia en 1978 ya se habían presentado algunas infecciones similares por el mosquito *Aedes Albopictus*, de la misma familia del mosquito *A. Aegypti*, en Letícia (Amazonas).

El primer caso de dengue hemorrágico en Colombia se presentó en Puerto Berrio (Antioquía) en el año de 1989 siendo este la base de propagación en todo el país, desde entonces se ha observado un alto índice de incremento de esta enfermedad, llegando a infectarse gran parte de la población. En el año de 1999, los departamentos con mayores tasas de incidencia de dengue fueron: Arauca, San Andrés, Huila, Santander, Norte de Santander y Casanare, en tanto para el 2002 ya se habían contagiado los departamentos de Atlántico, Boyacá, Caldas, Cundinamarca, Magdalena, Nariño (Tumaco), Meta y Caquetá, reportando 61.910 casos de dengue; de los cuales el 89.3% corresponden a dengue clásico y el 10.7% a dengue hemorrágico (véase [10]).

Según la Organización Panamericana de la Salud (OPS) la transmisión del dengue ha aumentado significativamente en nuestra región y hoy en día mas de la mitad de

la población mundial vive en riesgo de infectarse (véase [13]).

1.2. ENFERMEDAD DEL DENGUE

El dengue es una enfermedad infecciosa, aguda y grave propia de África, causada por un virus (género Togaviridae, familia Flaviviridae) y transmitida por el mosquito *Aedes Aegypti*, su origen se remonta al año 1823 donde esclavos procedentes de África Occidental introdujeron en América los términos dinga o dyenga con los cuales nombraban a esta enfermedad en su tierra natal, mas adelante fue transformada a la expresión española originando el sustantivo dengue (véase [14]).

El DC no presenta síntomas, pero en ocasiones presenta fiebre alta que perdura entre 5 y 7 días, fuerte dolor de cabeza, dolor de las articulaciones, músculos y en los ojos, y erupción en la piel. El DHF presenta síntomas mucho mas graves, pero suelen ser indistinguibles con los del DC, aunque las manifestaciones hemorrágicas avanzan mas rápidamente. Los síntomas iniciales son: fiebre, tos, dolor de cabeza, náuseas, vómitos, dolor abdominal y debilidad general, con duración de 5 a 14 días, después puede llegar a producir hemorragias; a menudo con inflamación del hígado, y en los casos críticos dar lugar a un estado de shock y provocar la muerte si los enfermos no reciben atención médica pertinente. El DHF sin tratamiento puede causar la muerte hasta en el 50 % de los casos; no existe un tratamiento adecuado para esta enfermedad, sin embargo con un buen cuidado clínico se puede reducir la mortalidad a menos de un 1 por ciento (véase [10]).

Los criterios para diagnosticar esta enfermedad son:

- *Las pruebas de laboratorio clínico* como exámenes de sangre, de leucositos y plaquetas, pruebas de función hepática, examen general de orina.
- *Las pruebas específicas para el virus del dengue* como aislamiento del virus (método directo) y serología (método indirecto).

1.2.1. El Virus

Tanto el dengue clásico como el hemorrágico son causados por el mismo virus, es un flavivirus del género *Togaviridae* y la familia *Flaviviridae* de $40\mu_m$ a $50\mu_m$, el grupo virus dengue esta representado por cuatro serotipos (o subespecies): virus tipo I o dengue 1 (DEN-1), virus tipo II o dengue 2 (DEN-2), virus tipo III o dengue 3 (DEN-3) y virus tipo IV o dengue 4 (DEN-4); los cuales muestran características distintas, estos son biológicamente transmitidos a humanos susceptibles a través de la picadura del mosquito. La infección del hombre por un serotipo produce inmunidad para toda la vida contra la reinfección con ese serotipo, pero solo protección temporal contra los otros (véase [15]).

La transmisión del virus esta determinada por varios factores, entre ellos: el medio ambiente, el vector y la susceptibilidad de la población. Los virus son transmitidos a los humanos a través de los mosquitos infectados permaneciendo infectados de por vida que pueden ser semanas o incluso meses. Los únicos que transmiten el virus son los mosquitos hembra, el macho sólo se alimenta del nectar de las plantas. Un mosquito hembra puede transmitir el virus a la siguiente generación de mosquitos por transmisión transovarial, el virus se multiplica en el epitelio intestinal del mosquito hembra infectado, luego de 7 a 14 días puede infectar al hombre por una nueva picadura. Los humanos son los receptores principales del virus, aunque investigaciones han demostrado que en algunas partes del mundo los monos también pueden infectarse y probablemente servir como fuente del virus para mosquitos no infectados. Una vez el virus se introduce en el organismo el período de incubación es de 3 a 21 días, en promedio de 5 a 7 días; después de los cuales el paciente puede o no experimentar síntomas dependiendo del estado en que se encuentre (véase [11, 15]).

1.2.2. Mosquito Vector

El principal transmisor del virus del dengue (clásico y hemorrágico) es el mosquito *Aedes Aegypti*, en la actualidad es conocido como el transmisor del virus de la fiebre amarilla. La hembra tiene hábitos domésticos y peridomésticos, se reproduce en cualquier ambiente donde haya acumulaciones de agua generalmente limpia, depositando los huevos en las paredes de los recipientes donde ésta se estanca. Luego de un corto período que va de 2 a 15 días los mosquitos *Aedes* contaminados adquieren la capacidad de transmitir el virus durante toda su vida, que puede llegar a durar hasta dos meses, picando a individuos susceptibles a esta enfermedad (véase [11]).

La transmisión está constituida por el ciclo mosquito-hombre-mosquito, es decir, después de que una persona es picada por un mosquito infectado, el virus lleva su período de incubación, donde la persona puede experimentar inicios de fiebre aguda, acompañada de síntomas no especificados. Si en este estado, otro mosquito *A. Aegypti* no infectado pica a la persona enferma, estos mosquitos pueden infectarse y subsecuentemente transmitir el virus a otras personas no infectadas (véase [15]).

El mosquito *Aedes Aegypti* es una especie del subgénero *Stegomyia*, probablemente originada en África, hasta el momento se cree que fue exportado del viejo al nuevo mundo a través de barriles llenos de agua que se transportaban en barcos durante las primeras exploraciones y colonizaciones. El mosquito habita en áreas tropicales y subtropicales del planeta, comprendidas entre los 45° de latitud norte y los 35° de latitud sur, en las zonas isotermas intermedias a los 20°C. Establece sus criaderos en depósitos de agua limpia, ubicados en objetos o construcciones como: neumáticos, baterías viejas, recipientes de todo tipo, entre otros (véase [11, 15]).

El ciclo de vida del *A. Aegypti* comprende: el huevo, cuatro estados larvales, un estado de pupa y el adulto (Figura 1.1). Los huevos no miden más de un milímetro de largo, inicialmente son de color blanco, tornándose de color negro a medida que se

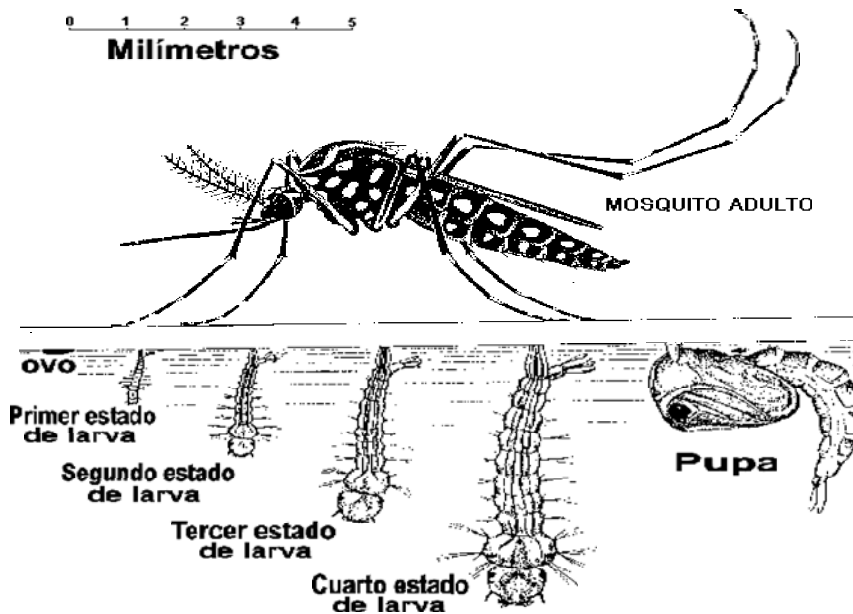


Figura 1.1: Ciclo de vida del Mosquito.

va desarrollando el embrión entre 2 o 3 días en ciertas condiciones de temperatura y humedad; una vez culminado este período, los huevos ya pueden soportar temperaturas extremas y deshidrataciones con sobrieda de 7 meses a un año. Las larvas que surgen pasan por cuatro estados larvares, pasando por tres transformaciones desde un largo de $1mm.$ a los 6 o $7mm.$ finales. Su desarrollo se completa en condiciones favorables de nutrición y con temperaturas de 25 a $29^{\circ}C$. Son incapaces de resistir temperaturas inferiores a $10^{\circ}C$ o superiores a 44 o $46^{\circ}C$, pasando a un estado pupal cerca de los $13^{\circ}C$. La pupa no requiere alimentación y completa su desarrollo hasta adulto de 1 a 3 días. El ciclo completo de huevo a adulto en óptimas condiciones de temperatura y alimentación es de 10 días. El *A. Aegypti* adulto es un mosquito de color negro, con manchas blancas-plateadas en el dorso del tórax y un característico diseño en forma de anillo en tarso, tibia y fémures de las patas (Figura 1.2) (véase [11]).



Figura 1.2: Mosquito Aedes Aegypti.

1.3. OTRAS INVESTIGACIONES

De las investigaciones consultadas acerca de la transmisión del dengue podemos citar las siguientes:

- El estudio de modelos matemáticos para los factores que intervienen en la transmisión de la enfermedad por el mosquito Aedes Aegypti. Hyun Mon Yang, Universidad Estatal de Campinas (Brasil) [3].
- Modelo de simulación para el control del mosquito Aedes Aegypti. Jonny Duque, Anibal Muñoz y Mario Navarro, Universidad del Quindío (Colombia) [5].
- Modelo estocástico de transmisión del dengue en poblaciones estructuradas. Tesis para obtener el título de Doctor en Ciencias, Área Biotecnología. Juan Ruíz Ramírez, Universidad de Colima (México) [15].

2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

En este capítulo se presentan algunos tópicos necesarios para la lectura y la comprensión del trabajo, organizados en tres grupos: Álgebra lineal, Ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos, y Estadística.

2.1. ÁLGEBRA LINEAL

Criterio de Routh-Hurwitz. Representa un método para determinar el signo de la parte real de las raíces de un polinomio con coeficientes constantes reales, sin obtenerlas. Sea

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

un polinomio de grado n con coeficientes constantes reales. Entonces, todos los ceros de $p(\lambda)$ tienen parte real negativa si $p(\lambda)$ cumple las siguientes condiciones:

- Todos los coeficientes de $p(\lambda)$ tengan el mismo signo.
- Ninguno de estos coeficientes se anule.
- Todos los determinantes de Hurwitz deben ser positivos.

Los determinantes de Hurwitz para $p(\lambda)$ son:

$$D_1 = a_1, \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{bmatrix}, \quad \dots$$

$$D_n = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}.$$

Para el caso particular cuando $p(\lambda)$ es de grado 3; es decir,

$$p(\lambda) = a_0\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0.$$

Los determinante de Hurwitz son:

$$D_1 = a_0, \quad D_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{bmatrix}, \quad D_3 = \begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix}.$$

2.2. ECUACIONES DIFERENCIALES Y SISTEMAS DINÁMICOS

Sea E un espacio vectorial con una norma; $W \subset E$, un conjunto abierto en E ; y $f : W \rightarrow E$ una aplicación continua. Por solución de la ecuación diferencial

$$x' = f(x)$$

se entiende una función derivable

$$x : J \rightarrow W$$

definida en cierto intervalo $J \subset \mathbb{R}$ y tal que para todo $t \in J$

$$x'(t) = f(x(t)).$$

Aquí J puede ser un conjunto de números reales abierto, cerrado, semiabierto (semicerrado) o infinito.

Una *condición inicial* para una solución $x : J \rightarrow W$ es una condición de la forma $x(t_0) = x_0$, con $t_0 \in J$, $x_0 \in W$.

El resultado siguiente es el teorema local fundamental de las ecuaciones diferenciales ordinarias. Se dice que es un teorema “local” porque se refiere a la naturaleza del campo vectorial $f : W \rightarrow E$ en el entorno de un punto x_0 de W .

Teorema 1 (Existencia y Unicidad.) *Sean $W \subset E$ un subconjunto de un espacio vectorial normado, $f : W \rightarrow E$ una aplicación C^1 (continuamente diferenciable), y $x_0 \in W$. Entonces existe un $a > 0$ y una única solución*

$$x : (-a, a) \rightarrow W$$

de la ecuación diferencial

$$x' = f(x)$$

que satisface la condición inicial

$$x(0) = x_0.$$

El siguiente teorema, estudia el comportamiento de una solución cuando se aproxima a los extremos de su dominio. Establece el resultado sólo para el extremo derecho, siendo análogo el otro caso.

Teorema 2 (Prolongación de Soluciones) *Sea $W \subset E$ un abierto y sea $f : W \rightarrow E$ una aplicación C^1 . Sea $y(t)$ una solución en un intervalo abierto maximal $J = (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}$ con $\beta < \infty$. Entonces, dado cualquier conjunto compacto $K \subset W$, existe un $t \in (\alpha, \beta)$ tal que $y(t) \notin K$.*

Este teorema dice que si una solución $y(t)$ no se puede prolongar a un intervalo mas amplio, entonces sale de cualquier compacto. Esto implica que $t \rightarrow \beta$ o bien $y(t)$ tiende a la frontera de W .

La ecuación

$$X' = F(X), \quad (1)$$

es un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias* de $\mathbb{R}^n$, con $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Si F no depende del tiempo, (1) es un *sistema de ecuaciones diferenciales autónomo*, de lo contrario es *no autónomo*. A lo largo de este capítulo, (1) representa un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal.

Un *Sistema Dinámico* es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado. Para obtener una visualización de la dirección de las soluciones de (1) se dibuja el campo vectorial.

El campo vectorial es una aplicación $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ le asignamos el vector $\theta_x \in \mathbb{R}^n$. Con el fin de tener una visualización de la dirección de las soluciones dibujamos θ_x como un vector “basado en x ”; es decir, asignamos a x el segmento dirigido que va desde x hasta $x + \theta_x$. Así, asociamos a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ una flecha comenzando en x con la punta en $x + \theta_x$, el conjunto de todos estos vectores representa el campo vectorial de (1).

El retrato de fase de (1) es la familia de todas las curvas solución, que a su vez es equivalente al *flujo del sistema*. Es una aplicación $\varphi_t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$, tal que a cada punto $x \in \mathbb{R}^n$ le corresponde la solución $\varphi_t(x) \in \mathbb{R}^n$. Éste está determinado por el campo vectorial.

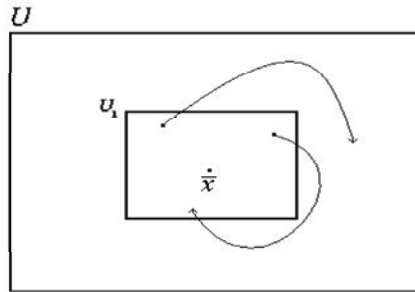
Conjunto Invariante. Un conjunto $T \subseteq \mathbb{R}^n$ es invariante de (1), si para todo $x \in T$, $\varphi_t(x) \in T$ con $t \in \mathbb{R}$.

Si sólo se cumple para $t \geq 0$, se dice que T es *Positivamente Invariante*.

Punto de Equilibrio. Sea $\bar{x} \in W$, $\bar{x}$ es un punto de equilibrio de (1) si $F(\bar{x}) = 0$. Lo cual implica que $\bar{x}' = 0$ por lo tanto, $\bar{x}$ es una solución constante de (1).

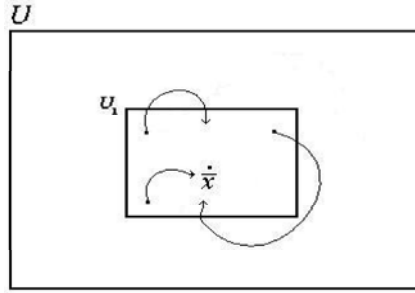
El estudio de los puntos de equilibrio juega un papel fundamental en las ecuaciones diferenciales ordinarias y sus aplicaciones. Un punto de equilibrio, ha de satisfacer un criterio de estabilidad para ser importante físicamente. La noción de estabilidad más frecuentemente considerada es la que ordinariamente se atribuye a Lyapunov¹. Un punto de equilibrio $\bar{x}$ de (1) es *estable* si las soluciones próximas permanecen próximas en todo instante posterior; de lo contrario se dice que es *inestable*.

Punto de Equilibrio Estable. Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio de (1), $\bar{x}$ es un punto de equilibrio estable, si para todo entorno U de $\bar{x} \in W$ existe un entorno U_1 de $\bar{x}$ de U tal que toda solución $x(t)$ con $x(t_0)$ en U_1 esta definida y permanece en U para todo $t > 0$. En consecuencia, $\bar{x}$ se dice estable si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta_{(\epsilon)} > 0$ tal que $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \delta$ implica que $\|x(t) - \bar{x}\| < \epsilon$, $\forall t > 0$.

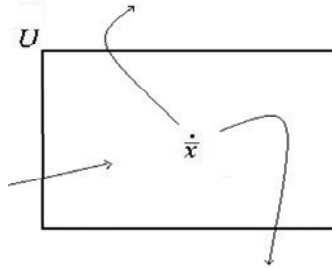


¹Alexander Mikhailovich Lyapunov (1857-1918) fue un matemático ruso cuyos trabajos, que aparecieron publicados a mediados de 1892, dieron origen al estudio de estabilidad mediante un enfoque teórico que hoy lleva su nombre.

Punto de Equilibrio Asintóticamente Estable. Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio de (1), $\bar{x}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable si es estable y además $\|x(t_0) - \bar{x}\| < \eta$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$, $\forall t > 0$.



Punto de Equilibrio Inestable. Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio de (1), $\bar{x}$ es un punto de equilibrio inestable si no es estable; es decir, para todo entorno U de $\bar{x} \in W$ existe un entorno U_1 de $\bar{x}$ de U tal que existe al menos una solución $x(t)$ que comienza en $x(t_0)$ en U_1 y que no permanece enteramente en U .



La estabilidad es una de las características más importantes de los sistemas dinámicos. Al analizar la estabilidad de dichos sistemas surgen diferentes problemas dependiendo el sistema que se considere. Por ejemplo, considerando sistemas lineales existen métodos para poder determinar su estabilidad; en cambio los sistemas no lineales pueden tener varios puntos de equilibrio, y la convergencia a uno estable

depende del estado inicial. Debido a esto, no es fácil estudiar directamente la estabilidad en los sistemas no lineales, para ello se recurre a la linealización alrededor del punto de equilibrio.

Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio de (1); es decir, $F(\bar{x}) = 0$. Para analizar la estabilidad de $\bar{x}$ en el sistema no lineal recurrimos a la linealización alrededor de $\bar{x}$. Por conveniencia consideremos $\bar{x} = 0$ lo cual no representa pérdida de generalización ya que todo punto de equilibrio $\bar{x} \neq 0$ puede ser trasladado al origen mediante el cambio de variable $Y = X - \bar{x}$ de donde se tiene que $X = \bar{x} + Y$. Sustituyendo en (1) tenemos

$$X' = \bar{x}' + Y' = F(\bar{x} + Y),$$

como $\bar{x}' = 0$ por ser un punto de equilibrio, entonces

$$X' = Y' = F(\bar{x} + Y).$$

Aplicando el teorema de expansión de Taylor tenemos:

$$Y' = F(\bar{x}) + F'(\bar{x})Y + \frac{F''(c)}{2!}(Y)^2$$

para algún c entre $\bar{x}$ y $\bar{x} + Y$. Como $F(\bar{x}) = 0$ entonces

$$Y' = F'(\bar{x})Y + h(Y),$$

con $h(Y) = \frac{F''(c)}{2!}(Y)^2$. La función $h(Y)$ se hace más pequeña cuando $\|Y\|$ tiende a desaparecer así, $\frac{h(Y)}{Y} \rightarrow 0$, cuando $Y \rightarrow 0$; es decir, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta_{(\epsilon)} > 0$ talque $\|h(Y)\| < \epsilon \|Y\|$ cuando $\|Y\| < \delta$.

Luego, la linealización del sistema (1) alrededor de $\bar{x}$ esta relacionada con el sistema lineal homogéneo

$$V' = F'(\bar{x})V. \tag{2}$$

Si $\bar{x}$ es un punto de equilibrio de (1), entonces $F'(\bar{x}) = DF(\bar{x})$ es una matriz $n \times n$ con entradas constantes (matriz jacobiana) y la solución del sistema (2) con $v(t_0) = v_0$ se puede escribir como

$$v(t) = v_0 e^{DF(\bar{x})t},$$

el polinomio característico $p(\lambda)$ de $DF(\bar{x})$ está representado por la ecuación

$$\text{Det}(DF(\bar{x}) - \lambda I) = 0.$$

El siguiente teorema brinda un simple procedimiento para determinar la estabilidad del origen como punto de equilibrio del sistema no lineal.

Teorema 3 (Método Indirecto de Lyapunov) *Sea $\bar{x} = 0$ un punto de equilibrio del sistema no lineal $X' = F(X)$ donde $F : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, con $U \subset \mathbb{R}^n$, es continuamente diferenciable y U es un entorno del origen. Sea la matriz jacobiana*

$$DF = \frac{\partial F}{\partial x}(x)_{x=0}.$$

Entonces, notando con λ_i a los autovalores de DF ($i = 0, \dots, n$).

- *$\bar{x}$ es asintóticamente estable si todo valor propio tiene parte real negativa ($\Re\{\lambda_i\} < 0$, para todo λ_i).*
- *$\bar{x}$ es inestable si para uno o mas valores propios de DF tienen parte real positiva no nula ($\Re\{\lambda_i\} > 0$ para algún i).*

Cuando se presenta la situación $\Re\{\lambda_i\} \leq 0$ para todo i , y $\Re\{\lambda_i\} = 0$ para algún i . En este caso, la linealización no es suficiente para determinar la estabilidad de $\bar{x}$. Para ello se utiliza el siguiente teorema

Teorema 4 (Método Directo de Lyapunov) *Sea $\bar{x} \in W$ un punto de equilibrio del sistema no lineal $X' = F(X)$. Sea $V : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua definida en un entorno $U \subset W$ de $\bar{x}$, derivable en $U - \bar{x}$, tal que*

$$a). V(\bar{x}) = 0 \quad y \quad V(x) > 0 \quad si \quad x \neq \bar{x},$$

$$b). \dot{V} \leq 0 \quad en \quad U - \bar{x}.$$

Entonces $\bar{x}$ es estable. Si además se cumple

$$c). \dot{V} < 0 \quad en \quad U - \bar{x},$$

entonces $\bar{x}$ es asintóticamente estable.

Una función $V(x)$ que cumple con las condiciones impuestas en el teorema anterior se denomina **función de Lyapunov**. Este método es una herramienta de análisis muy poderosa. Sin embargo, presenta dos desventajas. La primera es que no hay un método sistemático para hallar una función de Lyapunov por lo tanto hay que proponer una función candidata a función de Lyapunov y probar si la misma cumple con los requisitos de estabilidad. La segunda es que el teorema solo brinda condiciones suficientes por lo tanto el hecho de no encontrar una función candidata a Lyapunov que satisfaga las condiciones de estabilidad o de estabilidad asintótica no significa que el origen es inestable o no asintóticamente estable.

Derivada Orbital. Sea V una función de Lyapunov, la derivada orbital de V se define por el producto escalar entre el gradiente de V y el campo vectorial F ,

$$\nabla V(x) \bullet F(x).$$

2.3. ESTADÍSTICA

Probabilidad. La probabilidad p de un evento A se define como sigue: si A puede ocurrir de s maneras entre un total de n igualmente posibles, entonces

$$p = P(A) = \frac{s}{n}.$$

Probabilidad Condicional. Sea E un evento arbitrario de un espacio muestral S con $P(E) > 0$. La probabilidad de que un evento A suceda una vez que E haya sucedido o, en otras palabras, la *probabilidad condicional* de A dado E , que se escribe $P(A||E)$, se define

$$P(A||E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} .$$

Estimación de Máxima Verosimilitud. Este método representa un procedimiento que permite estimar los parámetros de un modelo probabilístico, o los coeficientes de un modelo matemático, de tal manera que sean los mas probables a partir de los datos obtenidos.

Dada la densidad $f_{\theta}(x)$ y un conjunto de valores aleatorios muestreados $(x_1, \dots, x_n)$, se conforma la función de densidad de la muestra, o función de verosimilitud,

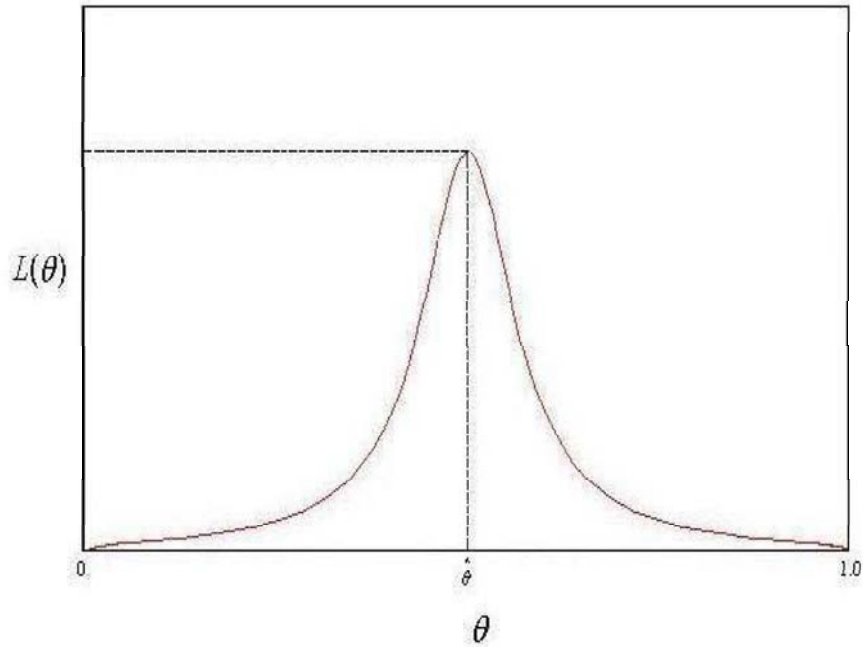
$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n f_{\theta}(x_i).$$

Dado que las x son valores conocidos, la cantidad L sólo depende del parámetro θ . Es decir, si h representa el número de aciertos de un evento A , con n el total de veces que ocurrio, y $n - h$ el número de fracasos; la función de verosimilitud para el evento A es

$$L(\theta) = \frac{n!}{h!(n-h)!} \theta^h (1-\theta)^{n-h},$$

y su representación gráfica es

Estimación de Máxima Verosimilitud



La función $L(\theta)$ es diferenciable y tiene un máximo local en un punto interior del intervalo. El estimador máximo verosimil $\hat{\theta}$ satisface:

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta} = 0,$$

por lo tanto, su máximo valor es

$$\hat{\theta} = \frac{h}{n}.$$

3. DEDUCCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

Los modelos matemáticos epidemiológicos permiten describir y predecir el comportamiento del virus sobre una determinada población. Para formular el modelo se toma dos poblaciones, la población humana y la población vector (población del mosquito). En el presente modelo la población humana se considera constante, sólo puede ser infectada por un tipo de virus y ningún individuo nace infectado; la población vector tiene una razón de reclutamiento constante y las muertes proporcionales al tamaño de la población.

Durante el proceso infeccioso los individuos de la población humana pueden pasar por todos o algunos de los siguientes estados: susceptible (estado en el cual el individuo puede ser picado por un mosquito infectado), infectado (estado en el cual el individuo se halla infectado de la enfermedad) ó recuperado (estado durante el cual el individuo presenta inmunidad a la infección); por otro lado, en la población vector los mosquitos pueden pasar por: susceptible (estado en el cual el mosquito no está infectado, pero si expuesto a contraer dicha infección) ó infectado (estado en el cual el mosquito se encuentra infectado por el virus y puede transmitir el virus a individuos susceptibles). La población vector pasa de susceptible a infectado al picar a individuos infectados de la población humana, una vez un mosquito ha sido infectado, este puede infectar a individuos susceptibles de la población humana por medio de picaduras.

Sean N_H y N_V los tamaños de la población humana y población vector respectivamente, sea μ_H la razón constante de crecimiento y muerte de la población humana y

μ_V la razón de mortalidad en la población vector. Las muertes totales en la población vector estan estimadas por la razón $\mu_V N_V$.

Si A es la razón de reclutamiento constante en la población vector, la variación de la población esta dada por la diferencia entre la razón de reclutamiento y el número de muertes totales, este hecho se ve representado por la siguiente ecuación diferencial:

$$N'_V = A - \mu_V N_V,$$

una observación interesante es que la solución de la ecuación diferencial ($N_V = \frac{A}{\mu_V} + K e^{-\mu_V t}$, donde K es un número real) se aproxima a la solución de equilibrio $\frac{A}{\mu_V}$ a medida que transcurre el tiempo.

Sean $\bar{S}_H(t)$, $\bar{I}_H(t)$ y $\bar{R}_H(t)$ el número de individuos susceptibles, infectados y recuperados en la población humana respectivamente, y sean $\bar{S}_V(t)$ y $\bar{I}_V(t)$ el número de mosquitos susceptibles e infectados en la población vector respectivamente.

En la población humana, los individuos susceptibles pasan a ser infectados cuando son picados por mosquitos infectados, estos se recuperan permanentemente a una razón costante γ_H pasando a ser recuperados o inmunes, es decir, no vuelven a ser susceptibles, así:

$$\bar{S}_H \mapsto \bar{I}_H \mapsto \bar{R}_H.$$

En la población vector, los mosquitos susceptibles pasan a ser infectados cuando pican a un humano infectado. Los mosquitos nunca se recuperan de la infección, es decir, su período de infección termina cuando ellos mueren, así:

$$\bar{S}_V \mapsto \bar{I}_V.$$

Sea b la razón constante de picaduras del mosquito por día (esta depende de diferentes factores, en especial los climáticos), y sea m el número de hospederos disponibles alternativos como fuente de sangre. Entonces, la probabilidad de que un mosquito elija a un individuo humano como un hospedero viene dado por:

$$\frac{N_H}{N_H + m} \quad ,$$

asi el mosquito toma del humano una razón $b\frac{N_H}{N_H+m}$ de picaduras. Y el humano recibe del mosquito, la razón de picaduras que toma un mosquito del humano susceptible multiplicada por la dencidad entre mosquitos y humanos, es decir:

$$b\frac{N_H}{N_H+m}\left(\frac{N_V}{N_H}\right).$$

La probabilidad de trasmisión es la probabilidad de que una picadura infecciosa produzca un nuevo caso en un miembro susceptible de la otra especie. Si β_H es la probabilidad de transmisión de vector a humano y β_V es la probabilidad de transmisión de humano a vector, entonces la razón de infección en humanos susceptibles esta dada por la probabilidad de trasmisión de vector a humano multiplicada por el número de picaduras que recibe el humano y por la probabilidad de escoger un mosquito infectado entre la población vector, asi:

$$\beta_H b \frac{N_H}{N_H+m} \left(\frac{N_V}{N_H}\right) \frac{\bar{I}_V}{N_V} = \frac{\beta_H b}{N_H+m} \bar{I}_V, \quad (3.1)$$

la razón de infección en mosquitos susceptibles esta dada por la probabilidad de transmisión de humano a vector multiplicada por la razón de picaduras de un mosquito a humanos susceptibles y por la probabilidad de escoger a un humano infectado entre la población humana, es decir:

$$\beta_V b \frac{N_H}{N_H+m} \frac{\bar{I}_H}{N_H} = \frac{\beta_V b}{N_H+m} \bar{I}_H. \quad (3.2)$$

Debido a que los individuos de la población humana no nacen infectados, el incremento en la población susceptible esta estimado por la razón de crecimiento en la población humana multiplicada por el tamaño de la población humana ($\mu_H N_H$), y el número de muertes entre los humanos susceptibles esta dado por el producto entre la razón de muerte en la población humana y el número de individuos susceptibles en la población humana ($\mu_H \bar{S}_H$).

El nuevo número de infectados en la población humana esta dado por el producto entre la razón de infección en humanos susceptibles (3.1) y el número de individuos susceptibles en la población humana ($\bar{S}_H$), es decir:

$$\frac{\beta_H b}{N_H + m} \bar{I}_V \bar{S}_H,$$

el nuevo número de infectados en la población vector esta dado por el producto entre la razón de infección en mosquitos susceptibles (3.2) y el número de mosquitos susceptibles en la población vector ($\bar{S}_V$), es decir:

$$\frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{I}_H \bar{S}_V.$$

La variación de humanos susceptibles esta dada por el incremento en la población humana susceptible, menos el nuevo número de infectados en la población humana, menos las muertes en los humanos susceptibles; de esta forma se ve representada en la siguiente ecuación diferencial:

$$\bar{S}'_H(t) = \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H + m} \bar{S}_H \bar{I}_V - \mu_H \bar{S}_H.$$

El número de muertes en la población humana infectada esta dado por el producto entre la razón de muerte en la población humana y el número de individuos infectados ($\mu_H \bar{I}_H$). El número de individuos que se recuperan de la enfermedad esta dado por la razón de recuperación en la población humana multiplicada por el número de infectados en la población humana ($\gamma_H \bar{I}_H$).

La variación de individuos infectados en la población humana esta dada por el nuevo número de infectados en la población humana, menos el número de muertes en la población humana infectada, menos el número de individuos infectados que se recuperan de la enfermedad; este hecho se ve representado en la siguiente ecuación diferencial:

$$\bar{I}'_H(t) = \frac{\beta_H b}{N_H + m} \bar{S}_H \bar{I}_V - (\mu_H + \gamma_H) \bar{I}_H,$$

El número de muertes en los humanos recuperados esta dado por el producto entre la razón de muerte en la población humana y el número de individuos recuperados ($\mu_H \bar{R}_H$) así, la variación de individuos recuperados en la población humana esta dada por la diferencia entre el número de infectados que se recuperan y el número de recuperados que mueren; este hecho se ve representado en la siguiente ecuación diferencial:

$$\bar{R}_H'(t) = \gamma_H \bar{I}_H - \mu_H \bar{R}_H.$$

La variación en la población vector ocurre de manera similar. La variación de mosquitos susceptibles esta dada por la razón de reclutamiento constante A menos el nuevo número de mosquitos infectados en la población vector, menos los mosquitos susceptibles que mueren ($\mu_V \bar{S}_V$); este hecho se ve representado en la siguiente ecuación diferencial:

$$\bar{S}_V'(t) = A - \frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{S}_V,$$

la variación de mosquitos infectados esta dada por la diferencia entre el nuevo número de mosquitos infectados y el número de mosquitos infectados que mueren ($\mu_V \bar{I}_V$); la cual esta representada en la siguiente ecuación diferencial:

$$\bar{I}_V'(t) = \frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{I}_V.$$

Finalmente el modelo queda planteado mediante el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \bar{S}_H'(t) &= \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H + m} \bar{S}_H \bar{I}_V - \mu_H \bar{S}_H, \\ \bar{I}_H'(t) &= \frac{\beta_H b}{N_H + m} \bar{S}_H \bar{I}_V - (\mu_H + \gamma_H) \bar{I}_H, \\ \bar{R}_H'(t) &= \gamma_H \bar{I}_H - \mu_H \bar{R}_H, \\ \bar{S}_V'(t) &= A - \frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{S}_V, \\ \bar{I}_V'(t) &= \frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{I}_V, \end{aligned} \tag{3.3}$$

junto con las condiciones:

$$\bar{S}_H + \bar{I}_H + \bar{R}_H = N_H \quad \text{y} \quad \bar{S}_V + \bar{I}_V = N_V.$$

Este modelo está bien planteado, por cuanto satisface el teorema: *el sistema (3.3) está bien definido en el primer ortante del espacio $\bar{S}_H \bar{I}_H \bar{R}_H \bar{S}_V \bar{I}_V$.*¹ Por otro lado el subconjunto

$$T = \left\{ (\bar{S}_H, \bar{I}_H, \bar{R}_H, \bar{S}_V, \bar{I}_V) \in \mathbb{R}^5 / \bar{S}_H + \bar{I}_H + \bar{R}_H = N_H \quad \wedge \quad \bar{S}_V + \bar{I}_V = \frac{A}{\mu_V} \right\}$$

es una región invariante para el sistema (3.3).² Mas aún, dado que N_H permanece constante y $N_V \rightarrow A/\mu_V$ toda trayectoria se aproxima a T . Por lo tanto, es suficiente estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones del sistema (3.3) en este conjunto invariante (véase [1]).

Como la población humana y vector son constantes en T , sin pérdida de generalidad podemos trabajar con las siguientes proporciones:

$$S_H = \frac{\bar{S}_H}{N_H}, \quad I_H = \frac{\bar{I}_H}{N_H}, \quad R_H = \frac{\bar{R}_H}{N_H}, \quad S_V = \frac{\bar{S}_V}{A/\mu_V}, \quad I_V = \frac{\bar{I}_V}{A/\mu_V},$$

donde S_H, I_H, R_H representan la probabilidad de escoger un susceptible, infectado y recuperado dentro de la población humana respectivamente, S_V, I_V representan la probabilidad de escoger un susceptible e infectado dentro de la población vector respectivamente.

Dado que $R_H = 1 - S_H - I_H$ y $S_V = 1 - I_V$, el sistema (3.3) en el conjunto invariante T puede ser escrito como el sistema no lineal tridimensional equivalente de ecuaciones

¹Ver demostración Teorema 5, Anexo A pág. 40.

²Ver demostración Teorema 6, Anexo A pág. 42.

diferenciales ordinarias ³

$$\begin{aligned}S'_H(t) &= \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \\I'_H(t) &= b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H, \\I'_V(t) &= b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V.\end{aligned}\tag{3.4}$$

³Ver desarrollo de los cálculos, Anexo B pág. 43.

4. PUNTOS DE EQUILIBRIO Y ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

En este capítulo, se encuentran los puntos de equilibrio del modelo matemático anteriormente mencionado. Además, se estudia el tipo de estabilidad de cada punto de equilibrio a nivel local. Todos los cálculos y demostraciones de los resultados presentados en este capítulo, pueden ser consultados en el capítulo Anexo.

4.1. PUNTOS DE EQUILIBRIO DEL MODELO

Iniciemos definiendo la región de interés biológico Ω por

$$\Omega = \{(S_H, I_H, I_V) \in \mathbb{R}^3 / \quad 0 \leq I_V \leq 1, \quad S_H \geq 0, \quad I_H \geq 0, \quad S_H + I_H \leq 1\}$$

Dado que el sistema de ecuaciones diferenciales (3.4) está bien definido en Ω ¹ podemos calcular sus puntos de equilibrio, para ello igualemos a cero la primera y tercera ecuación, de donde se obtiene

$$S_H = \frac{\beta I_H + 1}{(\beta + MR_0)I_H + 1}, \quad (4.1)$$

$$I_V = \frac{\beta I_H}{\beta I_H + 1}, \quad (4.2)$$

siendo

$$\beta = \frac{b\beta_V N_H}{\mu_V(N_H + m)}, \quad M = \frac{\gamma_H + \mu_H}{\mu_H}, \quad R_0 = \frac{b^2\beta_H\beta_V N_H A/\mu_v}{(N_H + m)^2\mu_V(\gamma_H + \mu_H)}, \quad (4.3)$$

ahora, de (4.3) se tiene que

$$R_0(\gamma_H + \mu_H) = \frac{b^2\beta_H\beta_V N_H A/\mu_v}{(N_H + m)^2\mu_V}. \quad (4.4)$$

¹Ver Teorema 7, Anexo C pág. 44.

Sustituyendo (4.1), (4.2) y (4.4) en la segunda ecuación del sistema (3.4), se obtiene que I_H debe ser solución de la siguiente ecuación cuadrática:

$$-(\beta + MR_0)I_H^2 + (R_0 - 1)I_H = 0. \quad (4.5)$$

Así, las soluciones de (4.5) son:

$$I_H = 0 \quad \text{e} \quad I_H = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}.$$

Al sustituir estas soluciones en (4.1) y (4.2) obtenemos los puntos de equilibrio del sistema (3.4).²

$$E_1 = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad E_2 = (S_H^*, I_H^*, I_V^*),$$

donde

$$S_H^* = \frac{\beta + M}{\beta + MR_0}, \quad I_H^* = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \quad I_V^* = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)}.$$

El número reproductivo básico, determina el número de nuevos casos de infecciones generados por un individuo infeccioso en la población susceptible, se denota por R_0 . Si $R_0 > 1$, la enfermedad se convierte en epidemia; mientras que si $R_0 \leq 1$, la enfermedad tiende a desaparecer.

En nuestro caso, se demostró que si $R_0 \leq 1$, E_1 es el único punto de equilibrio en Ω ,³ y si $R_0 > 1$, el punto de equilibrio E_2 también pertenece a Ω .⁴

El punto de equilibrio E_1 se denomina *equilibrio libre de la enfermedad*, ya que en éste la enfermedad se muere en el sentido que los infectados tienden a desaparecer, y el punto de equilibrio E_2 se denomina *equilibrio endémico de la enfermedad*, porque en él la enfermedad persiste todo el tiempo.

El número de mosquitos que pueden picar a un humano susceptible esta representado por el producto entre el número de picaduras que recibe un humano ($b \frac{A/\mu_V}{N_H} \frac{N_H}{N_H + m}$) y

²Ver desarrollo de los cálculos Anexo D pág. 47.

³Ver demostración Teorema 8, Anexo E pág. 50.

⁴Ver demostración Teorema 9, Anexo E pág. 50.

la densidad $\frac{1}{\gamma_H + \mu_H}$, así un humano infectado introducido en la población susceptible es picado durante su período infectivo por

$$\left(b \frac{A/\mu_V}{N_H} \frac{N_H}{N_H + m} \right) \left(\frac{1}{\gamma_H + \mu_H} \right) = b \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \frac{1}{\gamma_H + \mu_H}$$

mosquitos. Como β_V es la probabilidad de transmisión de humano a vector, entonces

$$\beta_V b \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \frac{1}{\gamma_H + \mu_H}, \quad (4.6)$$

representa el número de mosquitos que pasan al estado de infección.

El número de picaduras que distribuye un mosquito infectado en la población humana esta representado por el producto entre la cantidad de sangre que toman los mosquitos de los humanos ($b \frac{N_H}{N_H + m}$) y la densidad $\frac{1}{A/\mu_V}$. Como β_H es la probabilidad de transmisión de vector a humano, entonces

$$\beta_H b \frac{N_H}{N_H + m} \frac{1}{A/\mu_V}, \quad (4.7)$$

representa el número de picaduras que se transforman en nuevas infecciones en la población humana.

En los modelos epidemiológicos es conveniente usar la media geométrica para calcular el número reproductivo básico, ya que ésta es muy utilizada para el uso de procesos biológicos tal como la llegada de agentes infecciosos a una población susceptible. Por lo tanto, el número reproductivo básico para este modelo es igual a la media geométrica de (4.6) y (4.7), es decir

$$\begin{aligned} \tilde{R}_0 &= \sqrt{\left(\beta_V b \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \frac{1}{\gamma_H + \mu_H} \right) \left(\beta_H b \frac{N_H}{N_H + m} \frac{1}{A/\mu_V} \right)} \\ &= \sqrt{\frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A/\mu_v}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)}} \\ &= \sqrt{R_0} \end{aligned}$$

La cantidad $\tilde{R}_0 = \sqrt{R_0}$ representa el número promedio de casos secundarios que un mosquito infectado puede producir si es introducido en la población humana susceptible.

4.2. ANÁLISIS DE ESTABILIDAD

El estudio de estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema (3.4) se hará a nivel local. Cálculos directos muestran que la matriz jacobiana asociada a la linealización del sistema (3.4) esta dada por

$$DF \begin{pmatrix} S_H \\ I_H \\ I_V \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} I_V & 0 & -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H \\ b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} I_V & -(\gamma_H + \mu_H) & b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H \\ 0 & b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} (1 - I_V) & -b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} I_H - \mu_V \end{bmatrix}$$

Ahora, evaluando la matriz jacobiana en E_1 , tenemos

$$DF(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_H & 0 & -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \\ 0 & -(\gamma_H + \mu_H) & b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \\ 0 & b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} & -\mu_V \end{bmatrix}$$

Por otro lado, los valores propios de $DF(E_1)$ ⁵ están dados por

$$-\mu_H, \quad \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) \pm \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}$$

Una vez obtenidos los valores propios de $DF(E_1)$, se demostró que si $R_0 < 1$, es localmente asintóticamente estable ⁶ y si $R_0 > 1$, E_1 es inestable.⁷

Debido a que para $R_0 = 1$ un valor propio de $DF(E_1)$ se anula, entonces para analizar la estabilidad de E_1 en este caso, se utiliza la teoria de Lyapunov. Una función de Lyapunov para el punto de equilibrio E_1 cuando $R_0 \leq 1$ es

$$V = \left(\frac{b\beta_H A/\mu_V}{(N_H + m)\mu_V} \right) I_V + I_H.$$

⁵Ver desarrollo de los cálculos Anexo F pág. 52.

⁶Ver demostración Teorema 10, Anexo G pág. 52.

⁷Ver demostración Teorema 11, Anexo G pág. 54.

Se verificó que para $R_0 \leq 1$ la función V satisface todas las hipótesis del Teorema 4 de estabilidad de Lyapunov. Por lo tanto, si $R_0 \leq 1$ el punto de equilibrio E_1 es también asintóticamente estable.⁸

La matriz jacobiana asociada a la linealización del sistema (3.4) evaluada en E_2 está dada por

$$DF(E_2) = \begin{bmatrix} -\mu_H \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) & 0 & -\frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \\ \frac{\mu_H M(R_0 - 1)}{\beta + M} & -\mu_H M & \frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \\ 0 & \frac{\mu_V \beta}{R_0} \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) & -\mu_V R_0 \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

El polinomio característico de $DF(E_2)$ ⁹es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= \frac{\mu_H(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_H M + \frac{\mu_V R_0(\beta + M)}{\beta + MR_0}, \\ B &= \frac{\mu_H^2 M(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_V \mu_H R_0 + \frac{\mu_V \mu_H M \beta (R_0 - 1)}{\beta + MR_0}, \\ C &= \mu_V \mu_H^2 M(R_0 - 1). \end{aligned}$$

Por el Teorema 8, si $R_0 \leq 1$ el punto de equilibrio E_2 no esta en Ω . Se demostró que si $R_0 > 1$, el punto de equilibrio E_2 es localmente asintóticamente estable.¹⁰

⁸Ver demostración Teorema 12, Anexo H pág. 56

⁹Ver desarrollo de los cálculos Anexo I pág. 57.

¹⁰Ver demostración Teorema 13, Anexo J pág. 60

5. ANÁLISIS NUMÉRICO

En este capítulo se ajustan los parámetros del modelo matemático con datos de la población de Tumaco en el año 2005. Estos datos fueron proporcionados por el centro de salud Malaria (Tumaco) y el centro epidemiológico del Instituto Departamental de Salud de Nariño (Pasto).

Para estimar los valores de algunos parámetros se utilizó el Método de Máxima Verosimilitud, un método muy utilizado por los investigadores para estimar coeficientes en un modelo matemático.

En los siguientes datos la tasa es por 10.000 habitantes. En Tumaco se reportaron 10.500 viviendas con un total de 169.454 habitantes, el 100 % de estas viviendas utiliza reservas (recipientes) para almacenar el agua, cada una tiene en promedio 4 reservas; de las cuales el 70 % están infectadas con larvas del mosquito *A. Aegypti*. Un mosquito hembra deposita en promedio de 100 – 150 larvas por recipiente, de las cuales unas 90 llegan a la etapa adulto con 57 hembras y 33 machos aproximadamente. El ciclo de vida del mosquito es de 25 a 30 días y la razón de muerte en la población vector es 30 %.

En el 2005 se reportaron 19 casos de dengue, con una razón de contagio de 0,11. El total de muertes por diferentes enfermedades infecto-contagiosas fue de 411.

5.1. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

En esta sección los parámetros μ_H y b se ajustan por el método máxima verosimilitud, N_H y β_H son tomados de los indicadores básicos de salud del departamento de Nariño

[8]; los demás parámetros fueron proporcionados por el centro de salud Malaria.

- N_H (Tamaño de la población humana).

El tamaño de la población humana en Tumaco es de 169.454 habitantes, dado que los datos obtenidos fueron sacados en base a 10.000 habitantes, entonces $N_H = 10.000$.

- A (Razón de reclutamiento en la población vector).

El reclutamiento en la población vector es $A = 42$ (Centro de Salud Malaria).

- μ_H (Razón de crecimiento y muerte en la población humana).

Para el modelo se asume que el número de muertes es igual al número de nacimientos en la población humana, es decir 411.

La función de verosimilitud para μ_H es

$$L(\mu_H) = \frac{169454!}{411! 169043!} (\mu_H)^{411} (1 - \mu_H)^{169043},$$

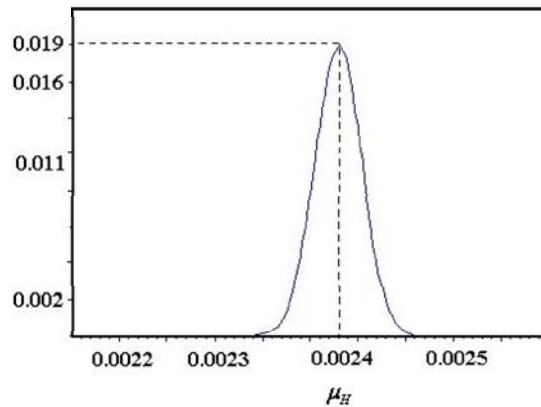
a continuación se muestra algunos valores de μ_H para los cuales tiene mayor probabilidad de suceder:

μ_H	$L(\mu_H)$
0.0022	0.002
0.0023	0.011
0.0024	0.019
0.0025	0.016

Si graficamos estos valores obtenemos:

- μ_V (Razón de muerte en la población vector).

La razón de muerte en la población vector es $\mu_V = 0,30$ (Centro de Salud Malaria).



Así, la estimación de máxima verosimilitud para μ_H está alrededor de 0,0024/año.

- β_H (Probabilidad de transmisión de vector a humano).

Este parámetro se toma igual a la razón de contagio en la población humana, ya que la única posibilidad de que se transmita el virus es por la picadura del mosquito, es decir $\beta_H = 0,11/\text{año}$.

- β_V (Probabilidad de transmisión de humano a vector).

En el modelo se asume que la picadura de un mosquito infectado produce un nuevo individuo infectado en la población humana, por lo tanto $\beta_V = 1$.

- γ_H (Razón de recuperación en la población humana).

La razón de recuperación en la población humana es $\gamma_H = 0,8$ (Centro de Salud Malaria).

- b (Razón de picaduras de un mosquito).

$10.500 \times 70\% = 7.350$ viviendas con recipientes infectados.

$7.350 \times 500 = 3.675.000$ larvas.

$3.675.000 \times 72\% = 2.646.000$ mosquitos adultos.

$2.646.000 \times 63 \% = 1.666.980$ mosquitos adultos hembra.

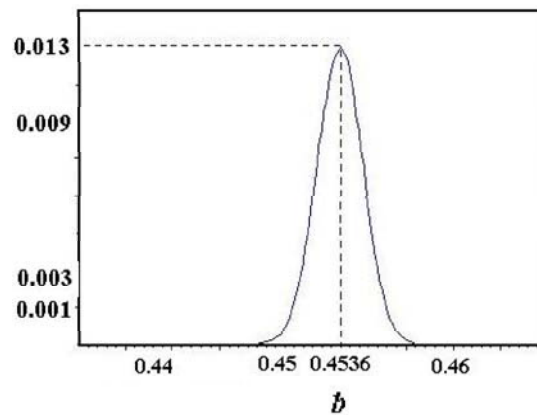
Teniendo en cuenta que los únicos que pueden transmitir el virus son los mosquitos hembra, la función de verosimilitud para b es

$$L(b) = \frac{3675000!}{1666980! 2008020!} b^{1666980} (1-b)^{2008020},$$

a continuación se muestra algunos valores de b para los cuales tiene mayor probabilidad de suceder:

b	$L(b)$
0.44	0.003
0.45	0.009
0.4536	0.013
0.46	0.001

Si graficamos estos valores obtenemos:



Así, la estimación de máxima verosimilitud para b está alrededor de 0,4536/año.

- m (Número de hospederos disponibles como fuente de sangre).

Por conveniencia se toma $m = 0$, para que la probabilidad de que un mosquito escoja a un humano como un hospedero sea del 100 %.

La siguiente tabla muestra los parámetros del modelo estimados por día, mes y año. Los parámetros N_H , A , β_V , γ_H y m se mantienen constantes en la tabla, para no alterar los datos que fueron proporcionados. Por comodidad en los cálculos numéricos utilizamos los parámetros estimados por mes.

Parámetro	Días	Meses	Año
N_H	10.000	10.000	10.000
A	42	42	42
μ_H	$0,66 \times 10^{-5}$	$0,198 \times 10^{-3}$	$0,24 \times 10^{-2}$
μ_V	$0,82 \times 10^{-3}$	$0,24 \times 10^{-1}$	0,3
β_H	$0,3 \times 10^{-3}$	$0,9 \times 10^{-2}$	0,11
β_V	1	1	1
γ_H	0,8	0,8	0,8
b	$0,125 \times 10^{-2}$	$0,375 \times 10^{-1}$	0,4536
m	0	0	0

Tanto para la proporción susceptible como la infectada,

$$R_0 = \frac{(0,0375)^2(0,009)(1)(10000)(42/0,024)}{(10000 + 0)^2(0,024)(0,8 + 0,000198)} = 0,00011 ,$$

y el número reproductivo básico es

$$\tilde{R}_0 = \sqrt{0,00011} = 0,01073.$$

Las gráficas de la figura 5.1 ilustran el comportamiento de la proporción humana susceptible con las condiciones iniciales $S_H(0) = 0.3$ y $S_H(0) = 0.8$, la cual crece hasta el valor de equilibrio 1; es decir, en el transcurso del tiempo toda la población tiende a ser susceptible.

La gráfica de la figura 5.2 ilustra el comportamiento de la proporción infectada con las condiciones iniciales $I_H(0) = 0.2$ e $I_V(0) = 0.1$, la cual decae exponencialmente

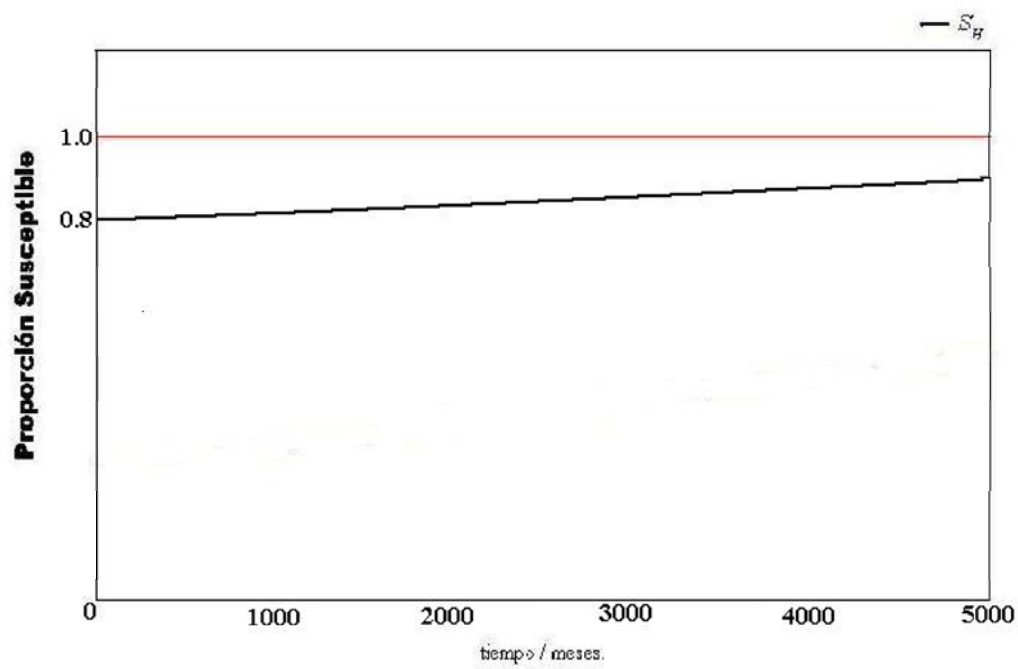
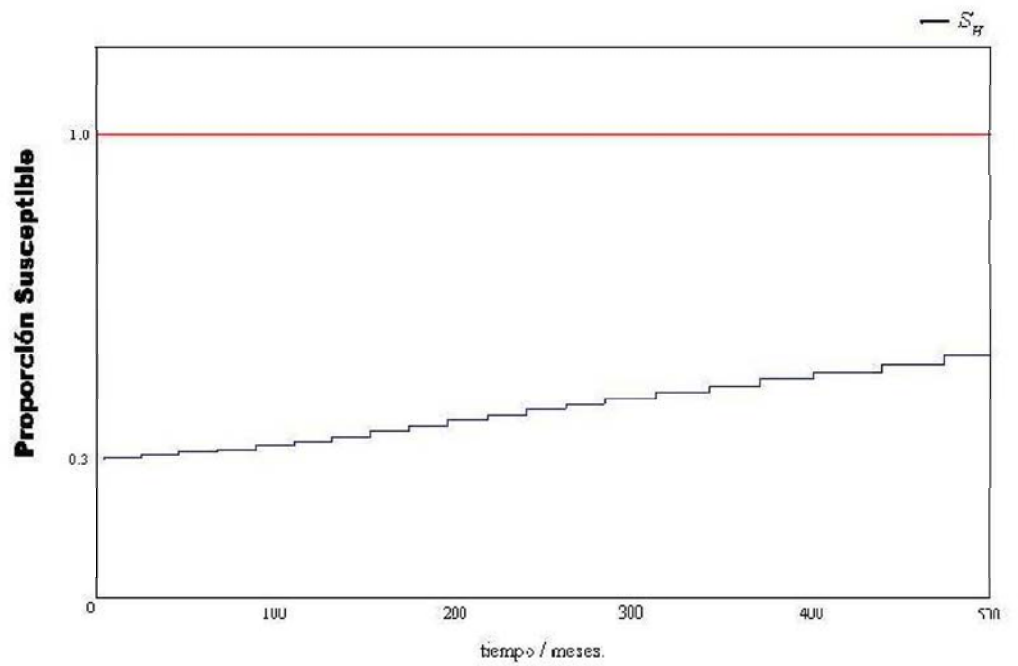


Figura 5.1: Proporción Susceptible

hasta cero; es decir, en el transcurso del tiempo la proporción infectada tiende a desaparecer, tanto en la población humana como en la población vector; mas aún, los infectados en la población humana mueren mas rápido que los infectados en la población vector.

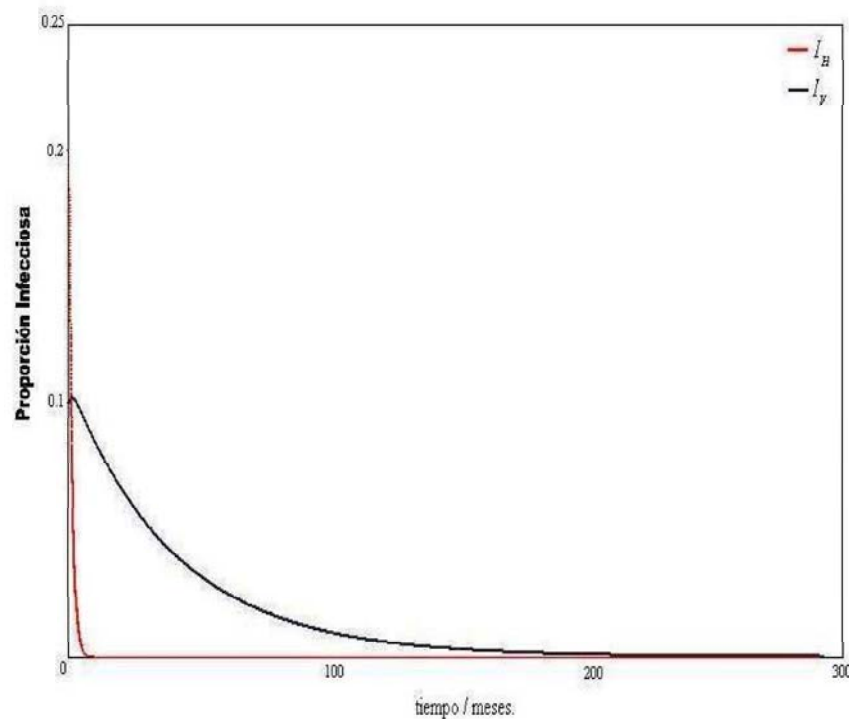


Figura 5.2: Proporción Infectada

A partir de los teoremas 8 y 10¹, el modelo matemático simulado con los anteriores datos presenta un único punto de equilibrio ($E_1 = (1, 0, 0)$), el cual es localmente asintóticamente estable; es decir, toda solución que comienza en Ω tiende al punto de equilibrio E_1 cuando $t \rightarrow \infty$, como se puede ver en la gráfica de la figura 5.3.

¹Véase Anexos E y G, pág. 50 y 52

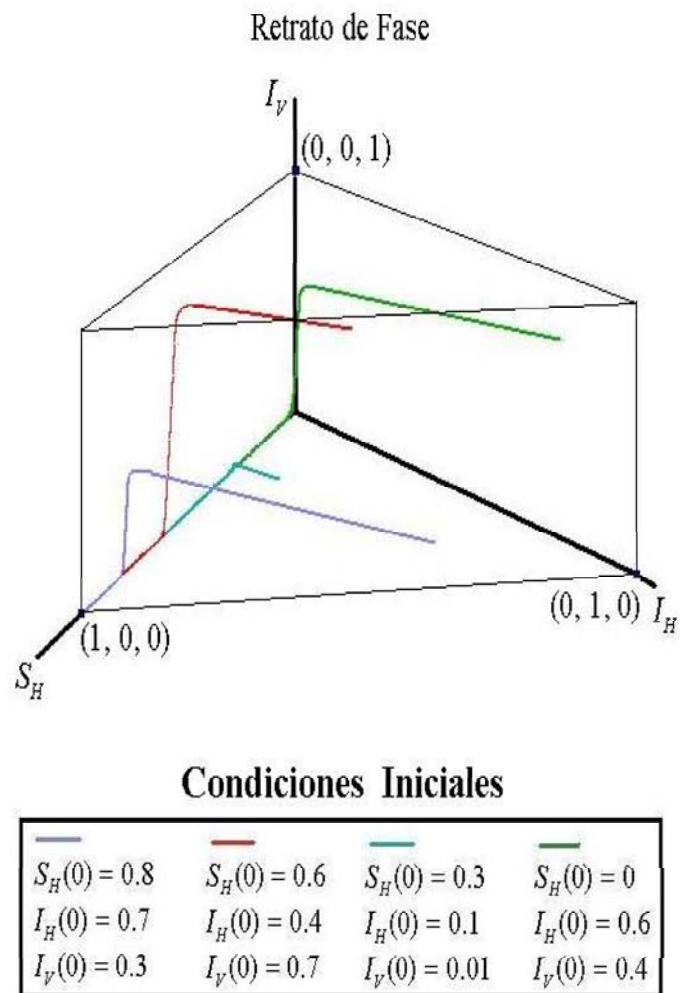


Figura 5.3: Retrato de Fase

CONCLUSIONES

Se ha hecho un estudio de carácter monográfico de un modelo matemático propuesto por Lourdes Esteva y Cristobal Vargas para la transmisión de la enfermedad del dengue, desarrollando todos los cálculos y demostraciones de los resultados que no aparecen en el artículo. Además se hizo un estudio de estabilidad a nivel local de los puntos de equilibrio del modelo. Para $R_0 \leq 1$ (o lo que es equivalente $\tilde{R}_0 \leq 1$), E_1 es el único punto de equilibrio en Ω el cual es localmente asintóticamente estable. En el caso $R_0 > 1$ (o lo que es equivalente $\tilde{R}_0 > 1$), se probó que E_1 es un punto de equilibrio inestable y E_2 es localmente asintóticamente estable.

Se ajustaron los parámetros del modelo con datos reales tomados de la población de Tumaco (Nariño) y se hizo un análisis numérico del cual se concluye que:

- La proporción susceptible (Figura 5.1) tiende al valor de equilibrio 1 cuando $t \rightarrow \infty$.
- La proporción infectada (Figura 5.2) decae exponencialmente a cero; es decir, la enfermedad se muere en el sentido que los infectados tienden a desaparecer.
- E_1 es el único punto de equilibrio para el modelo matemático simulado con estos datos, además es localmente asintóticamente estable; es decir, toda solución dentro de Ω tiende a este punto de equilibrio cuando $t \rightarrow \infty$.

En este trabajo no se buscó nuevos resultados para el modelo, únicamente entenderlo y aplicarlo a la población de Tumaco (Nariño); con lo que se cumplió a cabalidad los objetivos propuestos.

ANEXOS

En este capítulo se presentan cálculos y demostraciones de resultados que se utilizan en capítulos anteriores.

Anexo A

Teorema 5 *El sistema (3.3) esta bien definido en el primer ortante del espacio $\overline{S}_H \overline{I}_H \overline{R}_H \overline{S}_V \overline{I}_V$.*

Demostración. Sea el conjunto

$$\overline{\vartheta} = \{(\overline{S}_H, \overline{I}_H, \overline{R}_H, \overline{S}_V, \overline{I}_V) \in \mathbb{R}^5 / \overline{S}_H \geq 0 \wedge \overline{I}_H \geq 0 \wedge \overline{R}_H \geq 0 \wedge \overline{S}_V \geq 0 \wedge \overline{I}_V \geq 0\}$$

el primer ortante del espacio $\overline{S}_H \overline{I}_H \overline{R}_H \overline{S}_V \overline{I}_V$. La frontera de $\overline{\vartheta}$ está dada por

$$\begin{aligned} \partial \overline{\vartheta} = \{ & (\overline{S}_H, \overline{I}_H, \overline{R}_H, \overline{S}_V, \overline{I}_V) \in \mathbb{R}^5 / \quad (\overline{S}_H \geq 0 \wedge \overline{I}_H = \overline{R}_H = \overline{S}_V = \overline{I}_V = 0) \quad \vee \\ & (\overline{I}_H \geq 0 \wedge \overline{S}_H = \overline{R}_H = \overline{S}_V = \overline{I}_V = 0) \quad \vee \quad (\overline{R}_H \geq 0 \wedge \overline{S}_H = \overline{I}_H = \overline{S}_V = \overline{I}_V = 0) \quad \vee \\ & (\overline{S}_V \geq 0 \wedge \overline{S}_H = \overline{I}_H = \overline{R}_H = \overline{I}_V = 0) \quad \vee \quad (\overline{I}_V \geq 0 \wedge \overline{S}_H = \overline{I}_H = \overline{R}_H = \overline{S}_V = 0) \} \end{aligned}$$

Si $x_0 \in \partial \overline{\vartheta}$, se presentan 5 posibilidades:

i). $\overline{x}_0 = (\overline{S}_H, 0, 0, 0, 0)$, reemplazando en el sistema (3.3) se llega a

$$\overline{S}'_H(t) = \mu_H(N_H - \overline{S}_H), \overline{I}'_H(t) = 0, \overline{R}'_H(t) = 0, \overline{S}'_V(t) = A \text{ e } \overline{I}'_V(t) = 0. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} \overline{x}_0 + \theta_{\overline{x}_0} &= (\overline{S}_H, 0, 0, 0, 0) + (\mu_H(N_H - \overline{S}_H), 0, 0, A, 0), \\ &= (\overline{S}_H + \mu_H(N_H - \overline{S}_H), 0, 0, A, 0). \end{aligned}$$

Dado que $N_H > \overline{S}_H$, $\overline{x}_0 + \theta_{\overline{x}_0} \in \overline{\vartheta}$.

ii). $\bar{x}_0 = (0, \bar{I}_H, 0, 0, 0)$, reemplazando en el sistema (3.3) se llega a

$$\bar{S}'_H(t) = \mu_H N_H, \bar{I}'_H(t) = -(\mu_H + \gamma_H) \bar{I}_H, \bar{R}'_H(t) = \gamma_H \bar{I}_H, \bar{S}'_V(t) = A \text{ e } \bar{I}'_V(t) = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} &= (0, \bar{I}_H, 0, 0, 0) + (\mu_H N_H, -(\mu_H + \gamma_H) \bar{I}_H, \gamma_H \bar{I}_H, A, 0), \\ &= (\mu_H N_H, (1 - \mu_H - \gamma_H) \bar{I}_H, \gamma_H \bar{I}_H, A, 0). \end{aligned}$$

$\bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} \in \bar{\vartheta}$, si $\mu_H + \gamma_H \leq 1$. El no cumplimiento de esta condición no garantiza que la solución salga del primer ortante, ya que el campo vectorial sólo muestra la dirección de las soluciones.

iii). $\bar{x}_0 = (0, 0, \bar{R}_H, 0, 0)$, reemplazando en el sistema (3.3) se llega a

$$\bar{S}'_H(t) = \mu_H N_H, \bar{I}'_H(t) = 0, \bar{R}'_H(t) = -\mu_H \bar{R}_H, \bar{S}'_V(t) = A \text{ e } \bar{I}'_V(t) = 0. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} &= (0, 0, \bar{R}_H, 0, 0) + (\mu_H N_H, 0, -\mu_H \bar{R}_H, A, 0), \\ &= (\mu_H N_H, 0, (1 - \mu_H) \bar{R}_H, A, 0). \end{aligned}$$

Dado que $\mu_H \leq 1$, $\bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} \in \bar{\vartheta}$.

iv). $\bar{x}_0 = (0, 0, 0, \bar{S}_V, 0)$, reemplazando en el sistema (3.3) se llega a

$$\bar{S}'_H(t) = 0, \bar{I}'_H(t) = 0, \bar{R}'_H(t) = 0, \bar{S}'_V(t) = A - \mu_V \bar{S}_V \text{ e } \bar{I}'_V(t) = 0. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} &= (0, 0, 0, \bar{S}_V, 0) + (0, 0, 0, A - \mu_V \bar{S}_V, 0), \\ &= (0, 0, 0, A + (1 - \mu_V) \bar{S}_V, 0). \end{aligned}$$

Dado que $\mu_V \leq 1$, $\bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} \in \bar{\vartheta}$.

v). $\bar{x}_0 = (0, 0, 0, 0, \bar{I}_V)$, reemplazando en el sistema (3.3) se llega a

$$\bar{S}'_H(t) = 0, \bar{I}'_H(t) = 0, \bar{R}'_H(t) = 0, \bar{S}'_V(t) = A \text{ e } \bar{I}'_V(t) = -\mu_V \bar{I}_V. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} &= (0, 0, 0, 0, \bar{I}_V) + (0, 0, 0, A, -\mu_V \bar{I}_V), \\ &= (0, 0, 0, A, (1 - \mu_V) \bar{I}_V). \end{aligned}$$

Dado que $\mu_V \leq 1$, $\bar{x}_0 + \theta_{\bar{x}_0} \in \bar{\vartheta}$.

El campo vectorial sobre $\partial\bar{\vartheta}$ no apunta al exterior. Luego, el sistema (3.3) esta bien definido en $\bar{\vartheta}$. ■

Teorema 6 *El subconjunto T definido por*

$$T = \left\{ (\bar{S}_H, \bar{I}_H, \bar{R}_H, \bar{S}_V, \bar{I}_V) \in \mathbb{R}^5 / \quad \bar{S}_H + \bar{I}_H + \bar{R}_H = N_H \quad \wedge \quad \bar{S}_V + \bar{I}_V = \frac{A}{\mu_V} \right\}$$

es una región invariante para el sistema (3.3).

Demostración. Sea $x(t_0) = \varphi_0$ un punto cualquiera de T , por el teorema de existencia y unicidad (véase Teorema 1), existe una única solución $\varphi : [a, b] \rightarrow T$ del problema de valor inicial

$$\begin{cases} X' = F(X) \\ x(t_0) = \varphi_0 \end{cases}$$

($X' = F(X)$ representa el sistema (3.3)).

Sea $\varphi(t) = (\bar{S}_H(t), \bar{I}_H(t), \bar{R}_H(t), \bar{S}_V(t), \bar{I}_V(t))$ la solución del sistema (3.3). Entonces

$$\begin{aligned} \bar{S}'_H(t) + \bar{I}'_H(t) + \bar{R}'_H(t) &= \mu_H N_H - \mu_H \bar{S}_H - (\mu_H + \gamma_H) \bar{I}_H + \gamma_H \bar{I}_H - \mu_H \bar{R}_H \\ &= \mu_H N_H - \mu_H \bar{S}_H - \mu_H \bar{I}_H - \mu_H \bar{R}_H \\ &= \mu_H N_H - \mu_H (\bar{S}_H + \bar{I}_H + \bar{R}_H) \\ &= \mu_H N_H - \mu_H N_H = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}'_V(t) + \bar{I}'_V(t) &= A - \frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{S}_V + \frac{\beta_V b}{N_H + m} \bar{S}_V \bar{I}_H - \mu_V \bar{I}_V \\ &= A - \mu_V \bar{S}_V - \mu_V \bar{I}_V \\ &= A - \mu_V (\bar{S}_V + \bar{I}_V) \\ &= A - \mu_V \left(\frac{A}{\mu_V} \right) = 0. \end{aligned}$$

Esto prueba que $\varphi(t) \in T$ para $t \in [a, b]$ ■

Anexo B

La población humana y vector son constantes en T , sin perder generalidad podemos trabajar con las proporciones

$$S_H = \frac{\bar{S}_H}{N_H}, \quad I_H = \frac{\bar{I}_H}{N_H}, \quad R_H = \frac{\bar{R}_H}{N_H}, \quad S_V = \frac{\bar{S}_V}{A/\mu_V}, \quad I_V = \frac{\bar{I}_V}{A/\mu_V},$$

De esta forma, $S_H + I_H + R_H = 1$, y $S_V + I_V = 1$, de donde $R_H = 1 - S_H - I_H$ y $S_V = 1 - I_V$.

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \bar{S}_H &= N_H S_H, & \text{así} & \quad \bar{S}'_H = N_H S'_H, \\ \bar{I}_H &= N_H I_H, & \text{así} & \quad \bar{I}'_H = N_H I'_H, \\ \bar{R}_H &= N_H R_H, & \text{así} & \quad \bar{R}'_H = N_H R'_H, \\ \bar{S}_V &= A/\mu_V S_V, & \text{así} & \quad \bar{S}'_V = A/\mu_V S'_V, \\ \bar{I}_V &= A/\mu_V I_V, & \text{así} & \quad \bar{I}'_V = A/\mu_V I'_V. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuaciones del sistema (3.3) tenemos:

- $N_H S'_H(t) = \mu_H N_H - \frac{\beta_H b}{N_H + m} (N_H S_H)(A/\mu_V I_V) - \mu_H (N_H S_H),$
 $S'_H(t) = \mu_H - \frac{\beta_H b}{N_H + m} (A/\mu_V) S_H I_V - \mu_H S_H,$
 $S'_H(t) = \mu_H (1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V.$
- $N_H I'_H(t) = \frac{\beta_H b}{N_H + m} (N_H S_H)(A/\mu_V I_V) - (\mu_H + \gamma_H) N_H I_H,$
 $I'_H(t) = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H.$
- $N_H R'_H(t) = \gamma_H N_H I_H - \mu_H N_H R_H,$
 $R'_H(t) = \gamma_H I_H - \mu_H R_H, \quad \text{como} \quad R_H = 1 - S_H - I_H \text{ entonces}$
 $R'_H(t) = \gamma_H I_H - \mu_H (1 - S_H - I_H),$

$$R'_H(t) = \gamma_H I_H - \mu_H + \mu_H S_H + \mu_H I_H,$$

$$R'_H(t) = -\mu_H(1 - S_H) + (\gamma_H + \mu_H)I_H,$$

sumando y restando $b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H I_V$ obtenemos:

$$R'_H(t) = - (S'_H(t) + I'_H(t)).$$

$$\blacksquare \quad A/\mu_V S'_V(t) = A - \frac{\beta_V b}{N_H+m} (A/\mu_V S_V)(N_H I_H) - \mu_V (A/\mu_V S_V),$$

$$S'_V(t) = \mu_V - b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} S_V I_H - \mu_V S_V,$$

$$S'_V(t) = (1 - S_V)\mu_V - b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} S_V I_H, \quad \text{como} \quad S_V = 1 - I_V \quad \text{entonces}$$

$$S'_V(t) = - \left(b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V \right),$$

$$S'_V(t) = -I'_V(t).$$

$$\blacksquare \quad A/\mu_V I'_V(t) = \frac{\beta_V b}{N_H+m} (A/\mu_V S_V)(N_H I_H) - \mu_V (A/\mu_V I_V),$$

$$I'_V(t) = b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} S_V I_H - \mu_V I_V, \quad \text{como} \quad S_V = 1 - I_V \quad \text{entonces}$$

$$I'_V(t) = b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V.$$

Asi el sistema (3.3) se puede escribir como la equivalencia del sistema no lineal

$$\begin{aligned} S'_H(t) &= \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \\ I'_H(t) &= b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H, \\ I'_V(t) &= b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V. \end{aligned}$$

Anexo C

Teorema 7 *El sistema (3.4) esta bien definido en Ω .*

Demostración. La frontera de Ω está definida por

$$\begin{aligned}\partial\Omega = \{ & (S_H, I_H, I_V) \in \mathbb{R}^3 / (S_H \geq 0 \wedge I_H \geq 0 \wedge I_V = 0 \wedge S_H + I_H \leq 1) \vee \\ & (0 \leq S_H \leq 1 \wedge I_H = 0 \wedge 0 \leq I_V \leq 1) \vee (S_H = 0 \wedge 0 \leq I_H \leq 1 \wedge 0 \leq I_V \leq 1) \vee \\ & (S_H \geq 0 \wedge I_H \geq 0 \wedge 0 \leq I_V \leq 1 \wedge S_H + I_H = 1) \vee (S_H \geq 0 \wedge I_H \geq 0 \wedge I_V = 1 \wedge S_H + I_H \leq 1) \}\end{aligned}$$

si $x_0 \in \partial\Omega$, se presentan 5 posibilidades:

i). $x_0 = (S_H, I_H, 0)$, reemplazando en el sistema (3.4) se llega a

$$\begin{aligned}S'_H(t) &= \mu_H(1 - S_H), \quad I'_H(t) = -(\mu_H + \gamma_H)I_H \text{ e } I'_V(t) = b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H. \text{ Luego,} \\ x_0 + \theta_{x_0} &= (S_H, I_H, 0) + \left(\mu_H(1 - S_H), -(\mu_H + \gamma_H)I_H, b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H \right), \\ &= \left(S_H(1 - \mu_H) + \mu_H, (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H, b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H \right).\end{aligned}$$

Mediante la realización de algunos cálculos se llega a demostrar que

$$S_H(1 - \mu_H) + \mu_H + (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H \leq 1, \text{ así } x_0 + \theta_{x_0} \in \Omega.$$

ii). $x_0 = (S_H, 0, I_V)$, reemplazando en el sistema (3.4) se llega a

$$\begin{aligned}S'_H(t) &= \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \quad I'_H(t) = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \text{ e} \\ I'_V(t) &= -\mu_V I_V. \text{ Luego,} \\ x_0 + \theta_{x_0} &= (S_H, 0, I_V) + \left(\mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \right. \\ &\quad \left. b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, -\mu_V I_V \right), \\ &= \left(S_H(1 - \mu_H) + \mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \right. \\ &\quad \left. b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, (1 - \mu_V)I_V \right).\end{aligned}$$

Para que $x_0 + \theta_{x_0} \in \Omega$ debemos probar que

$$S_H(1 - \mu_H) + \mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V + b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V \leq 1 \text{ es decir,}$$

$$S_H(1 - \mu_H) + \mu_H \leq 1, \quad S_H(1 - \mu_H) \leq 1 - \mu_H, \quad S_H \leq 1.$$

Luego, $x_0 + \theta_{x_0} \in \Omega$.

iii). $x_0 = (0, I_H, I_V)$, reemplazando en el sistema (3.4) se llega a

$$S'_H(t) = \mu_H, \quad I'_H(t) = -(\mu_H + \gamma_H)I_H \text{ e } I'_V(t) = b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V)I_H - \mu_V I_V.$$

Luego,

$$\begin{aligned} x_0 + \theta_{x_0} &= (0, I_H, I_V) + \left(\mu_H, -(\mu_H + \gamma_H)I_H, b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V)I_H - \mu_V I_V \right), \\ &= \left(\mu_H, (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H, b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V)I_H + (1 - \mu_V)I_V \right). \end{aligned}$$

Mediante la realización de algunos cálculos se llega a demostrar que

$$\mu_H + (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H \leq 1, \text{ así } x_0 + \theta_{x_0} \in \Omega.$$

iv). $x_0 = (S_H, I_H, I_V)$, reemplazando en el sistema (3.4) se llega a

$$\begin{aligned} S'_H(t) &= \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, \quad I'_H(t) = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H)I_H, \\ \text{e } I'_V(t) &= b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V)I_H - \mu_V I_V. \end{aligned} \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} x_0 + \theta_{x_0} &= \left(\mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H)I_H, \right. \\ &\quad \left. b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V)I_H - \mu_V I_V \right), \\ &= \left((1 - \mu_H)S_H + \mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V, b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V \right. \\ &\quad \left. + (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H, b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m}(1 - I_V)I_H + (1 - \mu_V)I_V \right). \end{aligned}$$

Mediante la realización de algunos cálculos se llega a demostrar que

$$(1 - \mu_H)S_H + \mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V + b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V + (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H \leq 1, \\ \text{ así } x_0 + \theta_{x_0} \in \Omega.$$

v). $x_0 = (S_H, I_H, 1)$ reemplazando en el sistema (3.4) se llega a

$S'_H(t) = \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H$, $I'_H(t) = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H - (\mu_H + \gamma_H)I_H$ e $I'_V(t) = -\mu_V$. Luego,

$$\begin{aligned} x_0 + \theta_{x_0} &= (S_H, I_H, 1) + \left(\mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H, \right. \\ &\quad \left. b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H - (\mu_H + \gamma_H)I_H, -\mu_V \right), \\ &= \left((1 - \mu_H)S_H + \mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H, \right. \\ &\quad \left. b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H + (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H, 1 - \mu_V \right). \end{aligned}$$

Mediante la realización de algunos cálculos se llega a demostrar que

$$(1 - \mu_H)S_H + \mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H + b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H + (1 - (\mu_H + \gamma_H))I_H \leq 1, \text{ asi } x_0 + \theta_{x_0} \in \Omega.$$

Dado que el campo vectorial sobre $\partial\Omega$ no apunta al exterior, el sistema (3.4) esta bien definido en Ω . ■

Anexo D

Al igualar a cero la primera y tercera ecuación del sistema (3.4) se obtiene:

- $S'_H(t) = 0$ si y sólo si

$$\begin{aligned} \mu_H(1 - S_H) - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H I_V &= 0, \\ \mu_H - \mu_H S_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H I_V &= 0, \\ \mu_H S_H + b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} S_H I_V &= \mu_H, \\ S_H &= \frac{\mu_H}{b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} I_V + \mu_H}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

- $I'_V(t) = 0$ si y sólo si

$$\begin{aligned}
& b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V = 0, \\
& b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H - b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_V I_H - \mu_V I_V = 0, \\
& \frac{b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H}{b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_H + \mu_V} = I_V, \\
& \frac{b\beta_V \frac{N_H}{\mu_V (N_H + m)} I_H}{b\beta_V \frac{N_H}{\mu_V (N_H + m)} I_H + 1} = I_V, \\
\text{sea } \beta &= b\beta_V \frac{N_H}{\mu_V (N_H + m)}, \quad \text{entonces} \\
& I_V = \frac{\beta I_H}{\beta I_H + 1}. \tag{5.2}
\end{aligned}$$

Al hacer la sustitución de (5.2) en (5.1) se tiene

$$S_H = \frac{\mu_H}{b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \left(\frac{\beta I_H}{\beta I_H + 1} \right) + \mu_H},$$

simples cálculos permiten obtener

$$\begin{aligned}
S_H &= \frac{\beta I_H + 1}{\left(\beta + \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A / \mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V \mu_H} \right) I_H + 1}, \\
&= \frac{\beta I_H + 1}{\left(\beta + \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A / \mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)} \frac{(\gamma_H + \mu_H)}{\mu_H} \right) I_H + 1}. \\
\text{Sea } M &= \frac{(\gamma_H + \mu_H)}{\mu_H} \quad \text{y} \quad R_0 = \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A / \mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)}, \quad \text{entonces} \\
S_H &= \frac{\beta I_H + 1}{(\beta + M R_0) I_H + 1}. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
R_0 &= \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A / \mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)} \\
&= \frac{b\beta_V N_H b\beta_H A / \mu_V}{\mu_V (N_H + m) (N_H + m) (\gamma_H + \mu_H)} \\
&= \beta \frac{b\beta_H A / \mu_V}{(N_H + m) (\gamma_H + \mu_H)},
\end{aligned}$$

de donde

$$\frac{(\gamma_H + \mu_H)R_0}{\beta} = \frac{b\beta_H A/\mu_V}{N_H + m} . \quad (5.4)$$

Sustituyendo (5.2), (5.3) y (5.4) en la segunda ecuación del sistema (3.4) se tiene:

$$I_H'(t) = 0 \text{ si y sólo si}$$

$$b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H = 0$$

$$\frac{(\gamma_H + \mu_H)R_0}{\beta} \left(\frac{\beta I_H + 1}{(\beta + MR_0)I_H + 1} \right) \left(\frac{\beta I_H}{\beta I_H + 1} \right) - (\mu_H + \gamma_H) I_H = 0$$

Mediante la realización de algunos cálculos se obtiene

$$-(\beta + MR_0)I_H^2 + (R_0 - 1)I_H = 0,$$

$$-I_H \left[(\beta + MR_0)I_H - (R_0 - 1) \right] = 0,$$

de donde

$$I_H = 0 \quad \text{ó} \quad I_H = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} .$$

Sustituyendo estas soluciones en las ecuaciones (5.2) y (5.3) obtenemos

$$I_H = 0, \quad S_H = \frac{\beta(0)}{(\beta + MR_0)(0) + 1} = 1, \quad I_V = \frac{\beta(0)}{\beta(0) + 1} = 0 .$$

$$I_H = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \quad S_H = \frac{\beta \left(\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \right) + 1}{(\beta + MR_0) \left(\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \right) + 1} = \frac{\beta + M}{\beta + MR_0}, \quad I_V = \frac{\beta \left(\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \right)}{\beta \left(\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \right) + 1} = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} .$$

Así, los puntos de equilibrio del sistema (3.4) son

$$E_1 = (1, 0, 0) \quad \text{y} \quad E_2 = (S_H^*, I_H^*, I_V^*),$$

donde

$$S_H^* = \frac{\beta + M}{\beta + MR_0}, \quad I_H^* = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0}, \quad I_V^* = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} .$$

Anexo E

Teorema 8 Si $R_0 \leq 1$, entonces E_1 es el único punto de equilibrio en Ω .

Demostración.

- Si $R_0 < 1$, entonces

$$S_H^* = \frac{\beta + M}{\beta + MR_0} > 1, \quad I_H^* = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} < 0, \quad I_V^* = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} < 0,$$

luego, $E_2 \notin \Omega$

- Si $R_0 = 1$, entonces

$$S_H^* = \frac{\beta + M}{\beta + M} = 1, \quad I_H^* = \frac{1 - 1}{\beta + M} = 0, \quad I_V^* = \frac{\beta(1 - 1)}{\beta + M} = 0,$$

luego, $E_2 = E_1 \in \Omega$.

Por lo tanto, E_1 es el único punto de equilibrio en Ω . ■

Teorema 9 Si $R_0 > 1$, entonces el punto de equilibrio E_2 también está en Ω .

Demostración. Para que $E_2 \in \Omega$ se debe cumplir que $0 \leq I_V^* \leq 1$ y $0 \leq S_H^* + I_H^* \leq 1$.

Dado que $R_0 > 1$,

$$S_H^* = \frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \geq 0, \quad I_H^* = \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \geq 0, \quad I_V^* = \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \geq 0.$$

- Si $R_0 > 1$, entonces $\frac{1}{R_0} < 1$ y $1 - \frac{1}{R_0} < 1$. Por otra parte,

$$\frac{\beta}{\beta + M} < 1, \text{ porque } \beta > 0 \text{ y } M > 0, \text{ luego } \frac{\beta}{\beta + M} \left(1 - \frac{1}{R_0}\right) < 1$$

así,

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\beta + M} - \frac{\beta}{R_0(\beta + M)} &= \frac{R_0\beta - \beta}{R_0(\beta + M)} \\ &= \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \\ &< 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto $0 \leq I_V^* \leq 1$.

- $MR_0 > M$, sumando a ambos lados β tenemos $\beta + MR_0 > \beta + M$,

luego

$$\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\beta + M}{\beta + MR_0} > 0 ,$$

de donde

$$\begin{aligned}1 - \frac{\beta + M}{\beta + MR_0} &= \frac{\beta + MR_0 - \beta - M}{\beta + MR_0} \\ &= \frac{MR_0 - M}{\beta + MR_0} \\ &= \frac{M(R_0 - 1)}{\beta + MR_0} < 1.\end{aligned}$$

Dado que $M = \frac{\gamma_H + \mu_H}{\mu_H} \geq 1$, entonces $\frac{1}{M} \leq 1$ así $\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} < \frac{1}{M} \leq 1$.

Si $\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} + \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \leq 1$, entonces debe cumplir que

$$\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \leq 1 - \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} .$$

Pero $1 - \frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \leq 1$ porque $\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \leq 1$. Entonces $\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} < 1$, de donde

$$\beta + M < \beta + MR_0,$$

$$M < MR_0$$

$$1 < R_0.$$

Luego, $0 \leq S_H^* + I_H^* \leq 1$.

Lo que prueba que $E_2 \in \Omega$. ■

Anexo F

La matriz asociada con la linealización (matriz jacobiana) del sistema (3.4) en E_1 está representada por

$$DF(E_1) = \begin{bmatrix} -\mu_H & 0 & -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \\ 0 & -(\gamma_H + \mu_H) & b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \\ 0 & b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} & -\mu_V \end{bmatrix}$$

y su polinomio característico es

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= -(\mu_H + \lambda)((\gamma_H + \mu_H + \lambda))(\mu_V + \lambda) + \left(b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m}\right) \left(b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m}\right) (\mu_H + \lambda), \\ &= (\mu_H + \lambda) \left[\lambda^2 + (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)\lambda + \mu_V(\gamma_H + \mu_H) \left(1 - \frac{b^2\beta_V\beta_H N_H A/\mu_V}{(N_H+m)^2\mu_V(\gamma_H + \mu_H)}\right) \right], \\ &= (\mu_H + \lambda) [\lambda^2 + (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)\lambda + \mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)]. \end{aligned}$$

donde $R_0 = \frac{b^2\beta_V\beta_H N_H A/\mu_V}{(N_H+m)^2\mu_V(\gamma_H + \mu_H)}$. Sabemos que los valores propios de la matriz $DF(E_1)$ se encuentran hallando las soluciones de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$.

Por consiguiente, los valores propios de $DF(E_1)$ estan dados por

$$-\mu_H, \quad \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) \pm \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}$$

Anexo G

Teorema 10 *Si $R_0 < 1$, entonces el punto de equilibrio E_1 es localmente asintóticamente estable.*

Demostración. E_1 tiene como valores propios

$$-\mu_H, \quad \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) \pm \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}.$$

Entonces

- $\lambda = -\mu_H$, como $\mu_H > 0$ entonces $\Re\{\lambda\} < 0$
- $\lambda = \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) + \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}$

Para que $\Re\{\lambda\} < 0$ se debe probar que

$$\begin{aligned} (\gamma_H + \mu_H + \mu_V) &> \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}, \\ (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 &> (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0), \\ 0 &> -4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0), \\ 0 &< 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0). \end{aligned}$$

Como $R_0 < 1$, entonces $\Re\{\lambda\} < 0$.

- $\lambda = \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) - \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}$

Se sabe que $0 < 1 - R_0 < 1$, porque $R_0 < 1$. Además $0 < \mu_H \leq 1$, $0 < \mu_V \leq 1$ y $0 < \gamma_H \leq 1$ por lo tanto, $0 < \gamma_H + \mu_H \leq 2$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &< \mu_V(\gamma_H + \mu_H) \leq 2, \\ 0 &< \mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0) \leq 2, \\ 0 &< 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0) \leq 8. \end{aligned} \tag{i}$$

Por otra parte, $0 < \gamma_H + \mu_H + \mu_V \leq 3$, entonces

$$0 < (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 \leq 9. \tag{ii}$$

Restando (i) de (ii) se tiene

$$0 < (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0) \leq 1,$$

por lo tanto, $\Re\{\lambda\} < 0$.

Por el Teorema 3 el punto de equilibrio E_1 es *Localmente Asintóticamente Estable*. ■

Teorema 11 Si $R_0 > 1$, entonces E_1 es un punto de equilibrio inestable.

Demostración.

$$\blacksquare \lambda = -\mu_H, \quad \text{como } \mu_H > 0 \quad \text{entonces } \Re\{\lambda\} < 0$$

$$\blacksquare \lambda = \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) + \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}$$

Sumando (i) y (ii) del anterior teorema tenemos

$$0 < (\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 + 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0) \leq 17,$$

$$0 < \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 + 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)} \leq \sqrt{17},$$

como $0 < \gamma_H + \mu_H + \mu_V \leq 3$, entonces

$$(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) < \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 + 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}.$$

Luego, $\Re\{\lambda\} > 0$.

$$\blacksquare \lambda = \frac{-(\gamma_H + \mu_H + \mu_V) - \sqrt{(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0)}}{2}$$

como $(\gamma_H + \mu_H + \mu_V)^2 - 4\mu_V(\gamma_H + \mu_H)(1 - R_0) > 0$, entonces $\Re\{\lambda\} < 0$.

Por el Teorema 3 el punto de equilibrio E_1 es inestable. ■

Anexo H

Sea $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de clase C^1 tal que:

$$V(S_H, I_H, I_V) = 0S_H + \alpha I_H + \kappa I_V = \alpha I_H + \kappa I_V.$$

El propósito de esta sección del anexo es encontrar los números α y κ para los cuales V define una función de Lyapunov para E_1 cuando $R_0 \leq 1$. Observemos que en E_1

se satisface la condición $V(E_1) = 0$. Ahora verifiquemos la condición $V(x) > 0$, si $x \neq E_1$, $x \in \Omega$. Para esto se debe hallar α y κ tales que la derivada orbital de V sea negativa. Ahora, la derivada orbital $\dot{V}$ esta dada por

$$\begin{aligned}\dot{V} &= \alpha \left(b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H \right) + \kappa \left(b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V \right), \\ &= b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \left(\alpha S_H - \kappa \frac{\mu_V (N_H + m)}{b\beta_H A/\mu_V} \right) I_V \\ &\quad + \left(-\kappa b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} I_V + \left(\kappa b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} - \alpha(\gamma_H + \mu_H) \right) \right) I_H.\end{aligned}$$

Para que $\dot{V} < 0$, debemos encontrar α y κ tales que

$$\alpha S_H - \kappa \frac{\mu_V (N_H + m)}{b\beta_H A/\mu_V} \leq 0, \quad \text{y} \quad (a)$$

$$\kappa b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} - \alpha(\gamma_H + \mu_H) \leq 0. \quad (b)$$

Dado que $R_0 < 1$, entonces

$$\begin{aligned}\frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A/\mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)} &\leq 1, \\ \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A/\mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V} &\leq (\gamma_H + \mu_H), \\ \frac{b^2 \beta_H \beta_V N_H A/\mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V} - (\gamma_H + \mu_H) &\leq 0, \\ \left(\frac{b\beta_H A/\mu_V}{\mu_V (N_H + m)} \right) \left(\frac{b\beta_V N_H}{(N_H + m)} \right) - (\gamma_H + \mu_H) &\leq 0.\end{aligned}$$

Observemos que para

$$\alpha = 1 \quad \text{y} \quad \kappa = \frac{b\beta_H A/\mu_V}{\mu_V (N_H + m)}, \quad (c)$$

se tiene que $\kappa b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} - \alpha(\gamma_H + \mu_H) \leq 0$. Con lo que queda probado la desigualdad (b).

Por hipótesis $0 \leq S_H \leq 1$, luego

$$\begin{aligned} S_H - 1 &\leq 0, \\ S_H - \frac{b\beta_H A/\mu_V}{b\beta_H A/\mu_V} &\leq 0, \\ S_H - \frac{b\beta_H A/\mu_V \mu_V (N_H + m)}{\mu_V (N_H + m) b\beta_H A/\mu_V} &\leq 0, \\ S_H - \frac{\frac{b\beta_H A/\mu_V}{\mu_V (N_H + m)} \mu_V (N_H + m)}{b\beta_H A/\mu_V} &\leq 0. \end{aligned}$$

Utilizando los valores de α y κ definidos en (c) la anterior desigualdad es equivalente

a

$$\alpha S_H - \frac{\kappa \mu_V (N_H + m)}{b\beta_H A/\mu_V} \leq 0,$$

lo cual verifica la desigualdad (a).

De esta forma, la función de Lyapunov para E_1 cuando $R_0 \leq 1$ es

$$V = \left(\frac{b\beta_H A/\mu_V}{(N_H + m)\mu_V} \right) I_V + I_H.$$

Teorema 12 *Si $R_0 \leq 1$, entonces el punto de equilibrio E_1 es asintóticamente estable.*

Demostración. Sea

$$V = I_H + \left(\frac{b\beta_H A/\mu_V}{(N_H + m)\mu_V} \right) I_V,$$

una función de Lyapunov para E_1 con $R_0 \leq 1$. La derivada orbital de V es

$$\begin{aligned} \dot{V} &= b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} S_H I_V - (\mu_H + \gamma_H) I_H \\ &\quad + \left(\frac{b\beta_H A/\mu_V}{(N_H + m)\mu_V} \right) \left(b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} (1 - I_V) I_H - \mu_V I_V \right). \end{aligned}$$

Mediante la realización de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} (S_H - 1)I_V \\
&\quad - \left((\gamma_H + \mu_H) - \frac{b^2\beta_H\beta_V N_H A/\mu_V (\gamma_H + \mu_H)}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)} (1 - I_V) \right) I_H, \\
&= -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} (1 - S_H)I_V - (\gamma_H + \mu_H) \left[1 - R_0(1 - I_V) \right] I_H, \\
&= - \left(b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} (1 - S_H)I_V + \left[1 - R_0(1 - I_V) \right] (\gamma_H + \mu_H)I_H \right) .
\end{aligned}$$

Con $R_0 = \frac{b^2\beta_H\beta_V N_H A/\mu_V}{(N_H + m)^2 \mu_V (\gamma_H + \mu_H)}.$

Para que $\dot{V} < 0$, se debe probar que $1 - R_0(1 - I_V) > 0$.

- Si $R_0 < 1$, entonces

$$-R_0 > -1,$$

$$-R_0(1 - I_V) > -(1 - I_V),$$

$$1 - R_0(1 - I_V) > 1 - 1 + I_V,$$

$$1 - R_0(1 - I_V) > I_V > 0,$$

$$1 - R_0(1 - I_V) > 0.$$

- Si $R_0 = 1$, entonces

$$1 - (1 - I_V) = I_V > 0$$

Luego, $\dot{V} < 0$. Por el Teorema 4 E_1 es asintóticamente estable. ■

Anexo I

La matriz asociada con la linealización (matriz jacobiana) del sistema (3.4) en E_2 está representada por

$$DF(E_2) =$$

$$\begin{bmatrix} -\mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta(R_0-1)}{R_0(\beta+M)} \right) & 0 & -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta+M}{\beta+MR_0} \right) \\ b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta(R_0-1)}{R_0(\beta+M)} \right) & -(\gamma_H + \mu_H) & b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta+M}{\beta+MR_0} \right) \\ 0 & b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} \left(1 - \frac{\beta(R_0-1)}{R_0(\beta+M)} \right) & -b\beta_V \frac{N_H}{N_H+m} \left(\frac{R_0-1}{\beta+MR_0} \right) - \mu_V \end{bmatrix}$$

Para reducir los cálculos se simplifican las entradas de la matriz $DF(E_2)$.

$$a_{11} = -\mu_H - b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta(R_0-1)}{R_0(\beta+M)} \right),$$

reemplazando y simplificando los valores de R_0 , β y M dados en (4.3), se obtiene

$$a_{11} = -\mu_H \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right).$$

$$a_{12} = 0.$$

$$a_{13} = -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right),$$

Mediante la realización de algunos cálculos se obtiene

$$a_{13} = -\frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right).$$

$$a_{21} = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H+m} \left(\frac{\beta(R_0-1)}{R_0(\beta+M)} \right),$$

reemplazando y simplificando los valores de β y R_0 en el numerador y denominador de a_{21} respectivamente, se obtiene

$$a_{21} = \frac{\mu_H M(R_0-1)}{\beta + M}.$$

$$\begin{aligned} a_{22} &= -(\gamma_H + \mu_H) \\ &= -\mu_H \frac{(\gamma_H + \mu_H)}{\mu_H} \\ &= -\mu_H M. \end{aligned}$$

$$a_{23} = b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right),$$

como $a_{13} = -b\beta_H \frac{A/\mu_V}{N_H + m} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) = -\frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right)$ entonces

$$a_{23} = \frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right).$$

$$a_{31} = 0.$$

$$a_{32} = b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} \left(1 - \frac{\beta(R_0 - 1)}{R_0(\beta + M)} \right),$$

Mediante la realización de algunos cálculos se obtiene

$$a_{32} = \frac{\mu_V \beta}{R_0} \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right).$$

$$a_{33} = -b\beta_V \frac{N_H}{N_H + m} \left(\frac{R_0 - 1}{\beta + MR_0} \right) - \mu_V$$

reemplazando y simplificando los valores de R_0 , β y M , se obtiene

$$a_{33} = -\mu_V R_0 \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right).$$

Asi, la matriz $DF(E_2)$ se transforma en

$$DF(E_2) = \begin{bmatrix} -\mu_H \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) & 0 & -\frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \\ \frac{\mu_H M(R_0 - 1)}{\beta + M} & -\mu_H M & \frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \\ 0 & \frac{\mu_V \beta}{R_0} \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) & -\mu_V R_0 \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \end{bmatrix}$$

donde β , M y R_0 están dados en (4.3). Su polinomio característico es

$$\begin{aligned} P(\lambda) = & - \left(\mu_H \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) + \lambda \right) (\mu_H M + \lambda) \left(\mu_V R_0 \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) + \lambda \right) \\ & - \left(\frac{\mu_H M(R_0 - 1)}{\beta + M} \right) \left(\frac{\mu_V \beta}{R_0} \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) \right) \left(\frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \right) \\ & + \frac{\mu_V \beta}{R_0} \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) \left(\frac{\mu_H MR_0}{\beta} \left(\frac{\beta + M}{\beta + MR_0} \right) \right) \left(\mu_H \left(\frac{\beta + MR_0}{\beta + M} \right) + \lambda \right), \end{aligned}$$

Mediante la realización de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned}
P(\lambda) = & \lambda^3 + \left(\frac{\mu_H(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_H M + \frac{\mu_V R_0(\beta + M)}{\beta + MR_0} \right) \lambda^2 \\
& + \left(\frac{\mu_H^2 M(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_V \mu_H R_0 + \frac{\mu_V \mu_H M \beta (R_0 - 1)}{\beta + MR_0} \right) \lambda \\
& + \mu_V \mu_H^2 M (R_0 - 1).
\end{aligned}$$

Sea

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\mu_H(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_H M + \frac{\mu_V R_0(\beta + M)}{\beta + MR_0}, \\
B &= \frac{\mu_H^2 M(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_V \mu_H R_0 + \frac{\mu_V \mu_H M \beta (R_0 - 1)}{\beta + MR_0}, \\
C &= \mu_V \mu_H^2 M (R_0 - 1).
\end{aligned}$$

entonces

$$p(\lambda) = \lambda^3 + A\lambda^2 + B\lambda + C.$$

Anexo J

Teorema 13 *Si $R_0 > 1$, entonces el punto de equilibrio E_2 es localmente asintóticamente estable.*

Demostración. Los valores propios de $DF(E_2)$ se encuentran hallando las soluciones de la ecuación característica $P(\lambda) = 0$. Como los coeficientes de $P(\lambda)$ dependen de muchos parámetros, no es fácil encontrar sus raíces; para ello utilizamos **las condiciones de Routh-Hurwitz**.

Las condiciones necesarias para que $P(\lambda)$ tengan raíces con parte real negativa son:

- Todos los coeficientes de $P(\lambda)$ tengan el mismo signo.
- Ninguno de estos coeficientes se anulen.

- Todos los determinantes de Hurwitz para $P(\lambda)$ deben ser positivos.

Dado que $R_0 > 1$, todos los coeficientes de $P(\lambda)$ son positivos no nulos.

Los determinantes de Hurwitz para $P(\lambda)$ son:

$$D_1 = A,$$

$$D_2 = \begin{bmatrix} A & C \\ 1 & B \end{bmatrix} = AB - C,$$

$$D_3 = \begin{bmatrix} A & C & O \\ 1 & B & O \\ 0 & A & C \end{bmatrix} = ABC - C^2 = C(AB - C).$$

D_1 es positivo porque $A > 0$. Para probar que D_2 y D_3 son positivos, se debe probar que $AB > C$.

$$AB = \left(\frac{\mu_H(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_H M + \frac{\mu_V R_0(\beta + M)}{\beta + MR_0} \right) \cdot \left(\frac{\mu_H^2 M(\beta + MR_0)}{\beta + M} + \mu_V \mu_H R_0 + \frac{\mu_V \mu_H M \beta (R_0 - 1)}{\beta + MR_0} \right),$$

Mediante la realización de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} AB &= \frac{\mu_H^3 M(\beta + MR_0)^2}{(\beta + M)^2} + \frac{\mu_V^2 \mu_H MR_0 \beta (R_0 - 1)(\beta + M)}{(\beta + MR_0)^2} \\ &\quad + \frac{\mu_H^2 (\mu_H M^2(\beta + MR_0) + \mu_V R_0(\beta + MR_0) + \mu_V M \beta (R_0 - 1))}{\beta + M} \\ &\quad + \frac{\mu_V \mu_H (\mu_H M \beta (R_0 - 1) + \mu_V R_0^2(\beta + M))}{(\beta + M)^2} + 2\mu_V \mu_H^2 MR_0. \\ &> \mu_V \mu_H^2 MR_0. \end{aligned}$$

Pero

$$\mu_V \mu_H^2 MR_0 > \mu_V \mu_H^2 M(R_0 - 1) = C,$$

entonces,

$$AB > \mu_V \mu_H^2 M R_0 > C.$$

Luego, D_2 y D_3 son positivos.

Por lo tanto, $P(\lambda)$ tiene raíces con parte real negativa. Por el Teorema 3, E_2 es localmente asintóticamente estable. ■

Bibliografía

- [1] BRAUER F. and CASTILLO-CHÁVES C. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Ed. Springer, Ithaca, New York, U.S.A, December, 2000.
- [2] CAMPOLLO R. *Modelos Matemáticos en Medicina y Biología*. Página web. <http://www.imbiomed.com/Innsz/Nnv46n4/espanol/Wnn44-07.html>.
- [3] *Las matemáticas son buenas para la salud*. Herramientas matemáticas y estadísticas sencillas ayudan a prevenir y controlar epidemias, edición impresa No. 61, enero de 2001. <http://www.revistapesquisa.fapesp.br/?art=74&bd=1&pg=es>.
- [4] DÍAZ J., BALLESTER F. y LÓPEZ-VÉLEZ R. *Impactos sobre la Salud Humana*. http://www.mma.es/oecc/pdf/16_salud_humana_2.pdf.
- [5] DUQUE J, MUÑOZ A. y NAVARRO-SILVA M. *A simulation model for the control of the Aedes aegypti, the mosquito vector of dengue and yellow fever, by the crustacean Mesocyclops spp*, Lic. Biología, M. Sc. Entomología, Escuela de Investigación en Biomatemática, Universidad del Quindío, Armenia-Quindio, Colombia, Rev. salud pública, jan./abr. 2004, vol.6, No.1, p.87-99. http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0124-00642004000100005&lng=pt&nrm=iso. ISSN 0124-0064.

- [6] ESTEVA L. y VARGAS C. *Analysis of a Dengue Disease Transmission Model*, Univesidad Autónoma de México, Fac. de Ciencias, Departamento de Matemáticas, 1998.
- [7] HIRSCH M. y SMALE S. *Ecuaciones Diferenciales Sistemas Dinámicos y Algebra Lineal*, Ed. Alianza, Madrid, 1983.
- [8] Instituto Departamental de Salud de Nariño. *Indicadores básicos de salud 2005 - 2006*, Subdirección de Promoción y Prevención, Oficina de Epidemiología, San Juan de Pasto, 2006.
- [9] LAGUADO J, ALVIS N. y MÁTTAR S. *Investigación de un Brote de Fiebre de Origen Desconocido en una Localidad Colombiana del Caribe*, Colombia Médica, vol. 36, No. 4, 2005.
- [10] Ministerio de Salud. *Boletín Epidemiológico Semanal*, Sivigila. 2001. http://www.col.ops-oms.org/sivigila/2001/BOLE52_2001.htm
- [11] Ministerio de Salud. *Dengue y Dengue Hemorrágico*, Boletín Epidemiológico, OPS, vol. 21, No. 2, 2000. http://www.paho.org/Spanish/SHA/BE_v21n2.pdf
- [12] MOSQUERA M, LLOYD L, SAN MARTÍN J. y GARCÍA L. *El Dengue en las Américas*, Octubre de 2005. <http://www.comminit.com/la/tendencias/tendencias2004/tendencias-107.html>
- [13] Organización Mundial de la Salud. *Comité Consultivo Mundial sobre Seguridad de las Vacunas 10-11 de Junio de 2004*. http://www.who.int/vaccine_safety/reports/june_2004/es
- [14] ROSSO F, RESTREPO M, ALZATE A, MUÑOZ J. y MORENO C. *Dengue Hemorrágico en el Hospital Universitario del Valle*, Colombia Médica, 1994.

- [15] RUÍZ-RAMÍREZ J. Tesis doctoral: *Modelo Estocástico de Transmisión del Dengue en Poblaciones Estructuradas*, Colima-México, febrero de 2004.
- [16] THIEME-HORST R. *Mathematics in Population Biology*, Ed. Princeton University Press, 2003.