ºUN ESTUDIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LIMITE DE UNA FUNCION EN EL GRADO ONCE DE ENSEÑANZA MEDIA DEL COLEGIO INEM – PASTO.

MAURICIO FERNANDO ENRÍQUEZ GARCÍA
LUIS RICARDO PALLES TORRES

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE DE MATEMÁTICAS Y ESTADISTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS
SAN JUAN DE PASTO
2007

UN ESTUDIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LIMITE DE UNA FUNCION EN EL GRADO ONCE DE ENSEÑANZA MEDIA DEL COLEGIO INEM – PASTO.

Trabajo de grado para optar el título de Licenciado en Matemáticas

MAURICIO FERNANDO ENRÍQUEZ GARCÍA
LUIS RICARDO PALLES TORRES

Director:
MG. LUIS FELIPE MARTÍNEZ PATIÑO.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE DE MATEMÁTICAS Y ESTADISTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMATICAS
SAN JUAN DE PASTO
2007

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Agosto de 2007

AGRADECIMIENTOS.

◈A Dios y a la vida quien con sus brazos nos ha levantado incondicionalmente en todo momento.

◈A nuestros padres por confiar en nosotros y darnos la oportunidad de ser profesionales.

◈ A la institución educativa INEM – Pasto, en especial al especialista Jorge Humberto Erazo, Director del departamento de matemáticas; por su enorme colaboración prestada para el desarrollo de este estudio.

◈ A los profesores Erdulfo Ortega y Hilbert Blanco por sus acertadas recomendaciones para el mejoramiento del documento final.

◈ Al profesor Luís Felipe Martínez por su excelente trabajo como director de este estudio, puesto que sus consejos fueron el motor principal para llevar a buen término el proyecto.

◈A la profesora Claudia Gómez por su apoyo incondicional no solo en el desarrollo de este trabajo sino durante todo el proceso de nuestra formación como docentes y como seres humanos de bien.

◈ A todos los profesores del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, cuya amplia experiencia y sobre todo por su trabajo que nos dieron las bases suficientes para llegar a esta etapa.

◈ A nuestros compañeros y amigos por su constante apoyo durante toda la carrera, por los buenos y malos ratos que pasamos juntos y sobre todo por compartir un sueño.

TABLA DE CONTENIDO.

LISTA DE TABLAS.

Pág.

LISTA DE GRÁFICAS.

Pág.

REGISTROS.

LISTADO DE FOTOS.

Pág.

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN.

En este estudio se realiza una aproximación hacia algunas de las principales dificultades que tienen los estudiantes de último grado de enseñanza media en el aprendizaje del concepto de límite de una función. INEM – Pasto fue la institución que colaboró en este estudio.

Se desarrolló una metodología de tipo cualitativo sin excluir lo cuantitativo para el tratamiento de algunos datos. Esto permitió una aproximación significativa a lo planteado en el tema sobre las dificultades en el aprendizaje del concepto de límite.

El trabajo está estructurado en cinco partes. En la primera, se contextualiza el problema, se plantean las preguntas que orientan el estudio, los supuestos teóricos y los objetivos; en la segunda, se ubica la investigación en el marco teórico de los conceptos relacionados con este campo conceptual y su dificultades, desde los aportes que hacen diferentes autores, en la tercera parte, se plantea la metodología de la investigación, donde: se sustenta el enfoque, se explica la selección de la unidad de trabajo, se describen los instrumentos de recolección de datos (como la encuesta, los test y las observaciones hechas en clase) necesarios e imprescindibles para este tipo de investigación, y se estructura el proceso en dos etapas secuenciales. El análisis de resultados está organizado en tres partes de tal manera que, en la primera se conoce, desde el contexto, la problemática sobre las dificultades que presenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de limite de una función, en la segunda, se describen las dificultades que presenta el estudiante frente a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite, y en la tercera se describen las dificultades en cuanto desarrollo del concepto como tal teniendo en cuenta su sistemas de representación. Por último, se plantean las conclusiones y se proponen algunas recomendaciones.

ABSTRACT.

In this study he is carried out an approach toward some of the main difficulties that have the students of last secondary education degree in the learning of the concept of limit of a function. INEM–PASTO the institution that collaborated in this study was.

A methodology of qualitative type was developed without excluding the quantitative thing for the treatment of some data. This allowed a significant approach to that outlined in the topic on the difficulties in the learning of the limit concept.

The work is structured in five parts. In the first one, a contextualization the problem, they think about the questions that guide the study, the theoretical suppositions and the objectives is made; in second part, the investigation is located in the theoretical mark of the concepts related with this conceptual field and its difficulties, from the contributions that make different authors, in the third part, he thinks about the methodology of the investigation, where: the focus is sustained, the selection of the work unit is explained, the instruments of gathering of dates it plods described (ace the survey, the test and the observations made in class) necessary and indispensable for this investigation type, and the process is structured in two sequential stages. The analysis of results is organized in three parts in such a way that, in the first one it is known, from the context, the problem on the difficulties that the student presents in the learning of the concept of the limits of a function, in second part, the difficulties are described that the student presents in front of the necessary preconcepts for the development of the limit concept, and in third part the difficulties are described as soon as I develop of the concept like such keeping in mind her representation systems. Lastly, they think about the conclusions and they intend some recommendations.

INTRODUCCIÓN

La comprensión de una teoría matemática no puede ser completa si se desconocen sus orígenes. La forma en que esa teoría ha influido en el conocimiento es un pilar fundamental para el educador y para el investigador porque constituye una herramienta pedagógica de gran valor al mostrar los cambios recorridos por la ciencia, condición necesaria para poder buscar nuevas alternativas didácticas, como también detectar las dificultades que se presentan en el aprendizaje y la transferencia de los conocimientos adquiridos en esta disciplina.

La enseñanza - aprendizaje del concepto de límite es de singular importancia en la educación básica por cuanto tiene que ver con competencias y habilidades cognitivas en los estudiantes y permite establecer conexiones con otros conceptos fundamentales en el desarrollo del cálculo.

La preocupación por identificar las dificultades que presenta el estudiante en este campo conceptual llevó a realizar la presente investigación. A través de ella se hace un estudio sobre las dificultades que manifiestan los estudiantes de la sección once uno (jornada de la mañana) de la institución INEM – Pasto, a la hora de aprender el concepto de límite de una función, teniendo en cuenta los diferentes sistemas de representación para este concepto y algunos de sus conceptos previos para su desarrollo.

El trabajo está estructurado en cinco partes. En la primera, se contextualiza el problema, se plantean las preguntas que orientan el estudio, los supuestos teóricos y los objetivos; en la segunda, se ubica la investigación en el marco teórico de los conceptos relacionados con este campo conceptual y su dificultades, desde los aportes que hacen diferentes autores, en la tercera parte, se plantea la metodología de la investigación, donde: se sustenta el enfoque, se explica la selección de la unidad de trabajo, se describen los instrumentos de recolección de datos (como la encuesta, los test y las observaciones hechas en clase) necesarios e imprescindibles para este tipo de investigación, y se estructura el proceso en dos etapas secuenciales. El análisis de resultados está organizado en tres partes de tal manera que, en la primera se conoce, desde el contexto, la problemática sobre las dificultades que presenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de limite de una función, en la segunda, se describen las dificultades que presenta el estudiante frente a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite, y en la tercera se describen las dificultades en cuanto al desarrollo del concepto como tal teniendo en cuenta su sistemas de representación. Por último, se plantean las conclusiones y se proponen algunas recomendaciones.

1. UN ESTUDIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LIMITE DE UNA FUNCION EN EL GRADO ONCE DE ENSEÑANZA MEDIA DEL COLEGIO INEM – PASTO.

1.1 DESCRIPCION DEL PROBLEMA.

El área de matemáticas en la enseñanza media culmina, en muchas instituciones, con una introducción al concepto de límite de una función, derivadas e integración; ejes principales del cálculo, este es el eslabón que conecta la enseñanza media y el inicio de la educación superior en programas tales como las ingenierías, las ciencias económico-administrativas y las ciencias naturales.

La transición del estudiante a la educación superior en estos programas, requiere de una adecuada preparación en sus conocimientos matemáticos, teniendo en cuenta, en particular, que el cálculo es una de las áreas donde se presenta mayores índices de mortalidad y deserción estudiantil [1] (ver anexo A).

El estudio de los conceptos de límite, continuidad, topología de la recta, entre otros, plantea las mayores dificultades al ingresar a la universidad; puesto que estos temas involucran procesos de abstracción que en la mayoría de los casos superan el nivel de formación del estudiante.

El límite de una función es uno de los conceptos centrales del cálculo, cuya enseñanza y aprendizaje ha probado ser tan significativamente difícil en concordancia con las dificultades experimentadas en su desarrollo histórico y además de estas dificultades inherentes al concepto, la enseñanza del mismo tradicionalmente se ha realizado dentro de un sistema semiótico de representación algebraica que muy poco o nada ha contribuido a mejorar el entendimiento de la noción de límite de una función [2]

La rigurosidad de tales conceptos y su presentación matemática formal como opción tradicional de introducción de los mismos no tiene en cuenta las ideas previas que posee el estudiante acerca de ellos. Exigir la asimilación y la comprensión total en unos pocos meses es desconocer la complejidad y el desarrollo de los mismos a través de su historia.

De la misma manera el concepto de límite en los cursos regulares de cálculo se lo propone con una elaboración formal del mismo que es difícil de captar por los estudiantes, ocasionando dificultades en el proceso de aprendizaje [3]

[1] OCARA. Periodo A-2005. Registro de notas. Fac. Ingeniería, Fac. de Ciencias Naturales. Udenar -Pasto
[2] Lara Chávez, Héctor. (2000) Instituto tecnológico de Zacatepec. Unidad de Matemáticas- México.
[3] Gómez Claudia P. y otros. (2002). Elementos de matemáticas con MAPLE .Udenar – Pasto. Pág.88

En uno de los apartes en un estudio de la universidad de Valencia (2001) a estudiantes de secundaria se concluyó que el cálculo de errores, cuando se trabaja como expresión algebraica o gráfica de una función, resulta muy complicado para los alumnos; y además, en multitud de errores que cometen en las manipulaciones algebraicas, constituyen una de las mayores dificultades para la comprensión del concepto [4]

Artigue (1998) y Cornú (1983) identifican en concordancia en sus estudios en lo que se refiere al concepto de límite los siguientes obstáculos epistemológicos.

- El sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes del límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso.
- La sobre - generalización de las propiedades de los procesos infinitos a los procesos infinitos.
- El aspecto metafísico de la noción de límite, ligado por el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento, como lo expresa Sierpinska “horror al infinito”
- Los conceptos de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas.[5]

En lo concerniente a nuestro estudio, varias investigaciones, entre ellas la dirigida por el profesor Héctor Lara Chávez (instituto Zacatepec – México) han encontrado que en el corte algorítmico que se le da al concepto, el manejo algebraico a partir de su definición rigurosa, su sistema de representación semiótica y ejercicios rutinarios ha provocado en los estudiantes las siguientes dificultades:

- Acerca del concepto de variable, el estudiante en un proceso dado no puede distinguir entre una variable dependiente e independiente, ni siquiera puede explicar que es una variable, la variación no ha sido trabajada a través de la resolución de ejercicios que involucran fenómenos físicos y reales.
- Asociadas al concepto de función; el estudiante no puede modelar una situación mediante una función pues su concepto no está claro, ni su utilidad, tampoco tiene claridad sobre el Dominio, Rango de la misma y no puede hacer uso correcto del sistema de representación gráfico.
- También se han observado dificultades en la transición entre los diferentes sistemas de representación; del sistema gráfico al numérico, del verbal al gráfico, del numérico al algebraico, del numérico al gráfico, entre otros[6]

---

[4] Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). “los sistemas de representación en la enseñanza del límite”. revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236

[5] Artigue Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia. Pág. 70 - 140

[6] Lara Chávez Héctor. Instituto tecnológico de Zacatepec. Unidad de Matemáticas- México (2000) y Artigue Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia. Pág. 1 – 97

En lo referente a:
La naturaleza de la noción de límite, manipulación algebraica y formal para el cálculo de límites:

- Dificultades ligadas a la complejidad matemática de este campo conceptual; números reales, funciones, sucesiones; objetos que siempre están en fase de construcción cuando se empieza la enseñanza del análisis.
- Ligadas a la mala utilización de las herramientas algebraicas y a su dominio técnico [7]

La formulación abstracta de límite se convirtió en el alma y nervio del desarrollo posterior del análisis y no es sencillo de captar. No es extraño que cuando un estudiante se encuentra por primera vez con este concepto, no logre captar la idea general con toda profundidad. Algunos autores como Courant y Robbins aseguran que existe una auténtica dificultad psicológica para comprender la definición precisa de límite puesto que la intuición sugiere una idea dinámica del límite, como si fuera el resultado de un movimiento [8]

La actitud del alumno frente a este tipo de situaciones complejas referidas al concepto de límite juega un papel muy importante, puesto que la mala comprensión del concepto conduce a que ejecute planes de acción muy largos, equivocados o falsos, resultado de los fuertes esquemas basados en la repetición mecánica de algoritmos y operaciones que se desarrollan a lo largo de las clases, cuando se propone un ejercicio o un problema que recree el concepto de límite.

Lo anterior conduce a que los estudiantes manifiesten su inconformidad con expresiones como: “la matemática es demasiado teórica para que pueda servirme de algo”, “yo no sirvo para esto”, entre otras; sin saber que la dificultad que se presenta puede estar en el campo de la comprensión e interpretación para poder hacer una buena representación, en este caso referido al concepto de límite de una función.

Las anteriores reflexiones, nos permite formularnos la siguiente pregunta:

¿Cuáles son algunas de las dificultades que presentan los estudiantes del grado once uno de educación media de la institución educativa INEM – Pasto en el aprendizaje del concepto de límite de una función, desde la perspectiva del pensamiento variacional?

1.2 JUSTIFICACIÓN

[7] IBIDEM
[8] Soto Oscar Fernando, Narváez Oscar. (2004). “La calculadora en el aula” Udenar – Pasto. Pág. 127

La epistemología habla acerca de la naturaleza de las matemáticas y de los objetos matemáticos. En el campo de la educación matemática como saber interdisciplinario, el objetivo primordial es indagar y analizar los problemas de aprendizaje y enseñanza de ellas orientado a la formación de pensamiento matemático autónomo.

El inicio del trabajo en matemáticas con los sistemas concretos que los encontramos particularmente en las matemáticas de la vida cotidiana y escolar, permite explorar y despertar el interés en el individuo, brindándole a sí mismo seguridad y confianza. El paso hacia el nivel de los sistemas simbólicos, según se ha comprobado, provoca rupturas, debido a la descontextualización de los conceptos y problemas matemáticos; además la experiencia dice que el hacer matemático y la creación matemática no son un simple juego lógico - simbólico, sino por el contrario, la activación matemática requiere de una elaboración de ideas u objetos conceptuales cuyos antecedentes están presentes en las situaciones de la cotidianidad y en la evolución histórica de ellos.

Según el MEN, La educación actual en matemáticas pretende conseguir una enseñanza del cálculo cognitivamente eficiente, es decir, a través del pensamiento variacional, superar la enseñanza de estos conceptos y contenidos matemáticos los cuales han sido fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual que involucra conceptos y procedimientos ínter estructurados y vinculados que permiten analizar, organizar y ,modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y propiamente de las matemáticas, donde la variación se encuentre como sustrato de ellas[9]. Pero la enseñanza de ésta área de la matemática no puede seguir siendo aquello que se reduce a la presentación formal de los conceptos, pues la investigación en educación matemática ha demostrado que las posibilidades de su comprensión reposan sobre nociones e ideas básicas como la de infinito, procesos infinitos, aproximación y variación.[10]

Sfard (1992) citado por Gloria García, señala... la etapa operatoria precede a la etapa estructural; para el caso de las nociones de procesos infinitos, infinito potencial y variación, la etapa operacional precederá a la consideración de estos procesos como objetos matemáticos estructurados. En consideración a que la formación de concepciones estructurales es un proceso lento y lleno de dificultades... uno de los objetivos en la educación de la matemática actual es

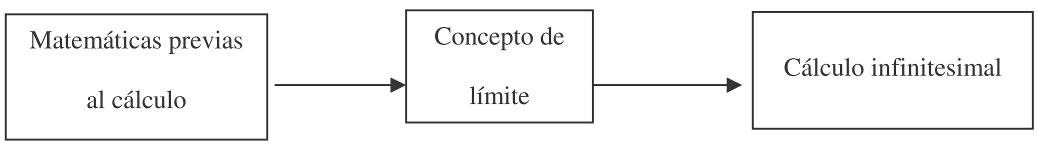
[9] MEN. (junio de 1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia. Página 56, 76.
[10] García Gloria, Cerrano Selly, Díaz Hernán. (2001). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del cálculo. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional Pedagógica.Red Académica. Bogotá –Colombia. Pág. 1 – 6.

construir vías de acceso, didácticamente cognitivas, a lo largo de la educación básica, para establecer que grado de estructuración van logrando los estudiantes... [11]
El concepto de límite es muy importante y útil en matemáticas; pues dicho concepto hizo una gran diferencia entre las matemáticas fundamentales y el cálculo. El nacimiento del cálculo infinitesimal permitió el desarrollo de ideas importantes en matemáticas y física. Conocer la velocidad y la aceleración de un objeto a partir de la posición o conocer la posición a partir de la velocidad y la velocidad a partir de la aceleración, involucra procesos propios del cálculo y están asociados al pensamiento variacional.

Los límites son importantes para estudiar el comportamiento de datos que se han modelado mediante ecuaciones matemáticas; como crecimiento de poblaciones, desintegración de material radiactivo, la inversión del capital, velocidades límites alcanzadas, velocidades por cuerpos que caen de una altura dada, entre otros.

Donde la variación es una herramienta importante para entender el concepto de límite y su desarrollo a través de la historia se inicia en el intento de cuantificar la variación por medio de las cantidades y magnitudes. Una rápida visión a la evolución histórica desde las matemáticas del estudio de la variación permite afirmar que esta se inicia con las tablas babilónicas; con gráficas de variación (Oresme en la edad media) y con las fórmulas algebraicas de origen renacentista. Particularmente el contexto de la variación proporcional para modelar las situaciones de variación, cobra especial relevancia por ser la única teoría matemática con la que se contaba en la edad media. Pero es en el contexto del estudio matemático del movimiento donde se alcanza la construcción matemática de la variación, lo que configura el cálculo.

El límite es un concepto neurálgico y un pilar del cálculo[12]:



[11] García Gloria, Cerrano Selly, Díaz Hernán. (2001). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del cálculo. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional Pedagógica.Red Académica. Bogotá –Colombia. Pág. 1 – 6.

[12] Larson Roland, Hostetler Robert P. (1991). Cálculo Undécimo Grado. Editorial MacGraw-Hill. Pág. 5 - 30

Sus ideas fueron el resultado de un trabajo arduo, citando algunos de sus impulsadores, dedicaron gran parte de su obra al concepto de límite de una función.

Los estudios de N. Copérnico (1473-1543) y J. Kepler (1571-1630) sobre astronomía dieron una nueva visión sobre el universo y dentro de estos estudios ya podemos encontrar algunas de las primeras ideas que motivaron el nacimiento del cálculo; Kepler introdujo la noción de infinitesimal, para explicar un fenómeno propio de la astronomía.

La primera exposición sistemática que estudió lo relacionado con lo que hoy conocemos como "cálculo" fue hecho por Bonaventura Cavalieri en el siglo XVII y Evangelista Torricelli quienes ampliaron el uso de los infinitesimales. P. Fermat y R. Descartes (1596-1650) utilizaron el álgebra para encontrar el área y las tangentes (integración y diferenciación en términos modernos) Fermat e Isaac Barrow tenían la certeza de que ambos cálculos estaban relacionados, aunque fueron Isaac Newton (1660) y G. Leibniz (1670) quienes demostraron que son inversos, lo que se conoce como teorema fundamental del cálculo. El descubrimiento de Newton a partir de su teoría de la gravedad fue anterior al de Leibniz pero el retraso en su publicación aún provoca disputas sobre quién fue el primero. Sin embargo, se terminó por adoptarse la notación de Leibiniz. En el siglo XVIII aumentó considerablemente el número de aplicaciones del cálculo, pero el uso impreciso de las cantidades infinitas e infinitesimales, así como la intuición geométrica causaban todavía confusión y controversia sobre sus fundamentos, uno de sus críticos más notables fue el filósofo irlandés George Berkeley. En el siglo XIX los analistas matemáticos sustituyeron esas vaguedades por fundamentos sólidos basados en cantidades finitas. Bernard Bolzano y A. Louis Cauchy definieron con precisión los límites y las derivadas[13]

En un primer acercamiento a la realidad educativa concerniente a nuestro problema de investigación se mira que los estudiantes en general presentan las siguientes dificultades;

- Una débil fundamentación en los pre-requisitos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.
- Debilidad en la comprensión de los sistemas de representación semióticos algebraicos, factorización de expresiones algebraicas, etc.
- Dificultad en la transición del concepto en los diferentes métodos de representación, entre otros[14]

---

[13]Encarta 2007. Biblioteca Interactiva. Microsoft Services.

[14]Esta Investigación. Encuestas a docentes INEM. (2006). Anexo A .Preguntas 2 y 5. Los docentes manifiestan...

- Ausencia de ejercicios que exploren y desarrollen el pensamiento variacional, como observación de magnitudes asociadas a un problema de proporcionalidad, cálculo de áreas de polígonos inscritos, problemas de velocidad y tiempo, entre otras.

Estas dificultades se relacionan en su mayoría con las encontradas en los estudios e investigaciones anteriormente mencionados.

Esto nos motiva a indagar sobre qué es lo que está pasando con el aprendizaje de este concepto en dicha institución y en este grado en especial, averiguar cuáles son las causas que provocan estas dificultades, que luego de una reflexión de este estudio, pueda permitir hacer una réplica de él en otras instituciones e interpretar su realidad.

Surge entonces la necesidad de proporcionar una información de forma clara, sencilla y precisa sobre las dificultades que suceden en el aprendizaje de este concepto teniendo en cuenta los procesos y sistemas de representación dentro del pensamiento variacional que adopta el estudiante y la realidad a la hora de aplicar este concepto a diversas situaciones.

Así nuestro trabajo cobra utilidad:

En la comunidad educativa; pues nuestro estudio develará las dificultades presentes en el aprendizaje del concepto de límite de una función, permitiendo así orientar y enriquecer metodologías que de acuerdo a la visión de la institución y su enfoque pedagógico se puedan ajustar con pertinencia.

En el docente; pues nuestro estudio proporcionará una información de primera mano sobre algunas de las dificultades que presenta el estudiante en el aprendizaje de este concepto de límite dando la posibilidad de ajustar, rediseñar, reelaborar la metodología que utiliza para abordar dicho concepto, aplicar estrategias didácticas que además de las que ya conoce, permitirán recrear mejor el concepto.

En el estudiante; ya que una vez identificadas las dificultades, el profesor tendrá unas herramientas más precisas para trabajar sobre ellas permitiendo esta vez que el estudiante tenga una mejor apropiación del concepto haciendo que:

- Se genere en los estudiantes una actitud favorable hacia las matemáticas y estimular en ellos el interés por su estudio, debido a que estas herramientas facilitan comprender las situaciones de cambio y variación en fenómenos físicos y del contexto.

- Desarrolle en los estudiantes una sólida comprensión de este concepto, procesos y estrategias básicas para acceder a él e igualmente la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas.
- Suministrar al estudiante el lenguaje apropiado que le permita comunicar de manera eficaz, sus ideas y experiencias matemáticas frente a este concepto [15]

También para que el estudiante obtenga unas ideas claras sobre el concepto de límite de una función, para el ingreso a la educación superior.

Teniendo en cuenta el contexto anterior y lo citado por algunos autores, consideramos desde nuestra perspectiva que el estudio es novedoso, puesto que no se han encontrado estudios acerca de este problema en concreto en nuestra localidad luego de una breve revisión bibliográfica.

Porque también se busca contrastar las dificultades que se sustentan teóricamente con la realidad que encontramos en el aula, con la interacción del docente y los alumnos.

Además esta investigación servirá para implementar a un futuro próximo, nuevas metodologías para la enseñanza del concepto de límite de una función y todas sus implicaciones y así corregir paulatinamente las dificultades que se presentan.

1.3 ANTECEDENTES

En cuanto a las dificultades que manifiestan los estudiantes de secundaria en el aprendizaje del concepto de límite, se exponen de forma general las investigaciones que existen al respecto, en torno al tema.

Michael Artigue (1998) y Cornú (1983) identifican en concordancia en sus estudios ("La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos 1995" – "la transición entre los sistemas de representación")[16] en lo que se refiere al concepto de límite algunas de las dificultades que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite; estas están asociadas al concepto de variable (dependiente e independiente), al concepto de función en sus diferentes formas de representación y elementos que la conforman y también se han observado dificultades en la transición entre los diferentes sistemas de representación del concepto de límite.

---

[15] MEN. Estándares curriculares en matemáticas. (1998) Propósitos generales del currículo en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 49 – 81.

[16] Artigue Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia. Pág. 97 - 135

En cuanto a la naturaleza de la noción de límite, manipulación algebraica y formal para el cálculo de límites las dificultades encontradas por estos autores son en cuanto a la complejidad matemática de este campo conceptual donde juegan un papel muy importante objetos como los números reales, funciones, sucesiones; y a la mala utilización de las herramientas algebraicas a la hora de calcular limites.

Castro y Castro (2000) citado por Sonsoles Blázquez identifican en su investigación "los sistemas de representación en la enseñanza del límite", que la mayor dificultad que presentan los estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite es en cuanto a la transición entre los sistemas de representación.[17]

Joan Ferrini expone en su artículo sobre las reformas en los cursos de cálculo (acerca del currículo, el aprendizaje, el uso de la tecnología y el desarrollo profesoral y además las posibilidades de investigación)[18] que varias de las dificultades están referidas en la traducción informal de estas ideas muy sofisticadas, conceptos mal elaborados como el de función, además los limites son considerados como la simple evaluación de funciones y su presentación que es cargada en el formalismo. Tall y Schwarzenberger en sus investigaciones han encontrado estas mismas dificultades en el aprendizaje del concepto de límite.

Héctor Lara Chávez manifiesta que las dificultades que exhiben los estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite se deben a que su presentación ha sido tradicionalmente enfocada desde un sistema de representación algebraico, lo cual ha provocado en el estudiante debilidades conceptuales en el concepto de variable, el de función y en la transición entre los diversos sistemas de representación.

A nivel nacional las investigaciones en relación a este campo conceptual son muy escasas; en una investigación de Ana Cecilia Medina (Universidad Pedagógica Nacional) sobre "Las concepciones históricas asociadas al concepto de limite e implicaciones didácticas", comenta que investigadores en educación matemática como las de Cornú (1981,1994), Sierpinska (1985,1987,1988), Tall y Schwarzenberger (1978) y Hitt y Páez (2001,2003,2004) entre otros se han preocupado por identificar la problemática relativa en las dificultades que tienen los estudiantes en el estudio del concepto de límite.

[17] Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). "los sistemas de representación en la enseñanza del límite". revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236

[18] Ferrini – Mundi, Geuther Joan. (Mayo de 1993) La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza, desarrollo curricular. Una perspectiva. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol. 3 No 1. Pág.53 - 69

Cesar Delgado manifiesta en su articulo" Sobre la enseñanza del concepto de límite"[19] que la enseñanza de este concepto siempre ha sido motivo de polémica, pues existen dos tendencias las cuales se notan más en la educación superior. Una de ellas es la comprensión meramente instrumental y la otra es el dominio del concepto (ε -δ). La primera tendencia se orienta hacia un manejo instrumental del concepto dedicando esfuerzos a la aplicación de métodos para calcular límites de funciones algebraicas, asignando ejercicios y problemas que eludan lo conceptual.

La segunda tendencia se orienta a partir de una definición intuitiva, y con base en ella formulan y justifican la definición formal de límite. Con ello pretenden lograr lo conceptual haciendo énfasis en el dominio de la técnica (ε -δ) por medio del manejo de símbolos, como orientado por el uso de reglas lógicas, planteando ejercicios de demostraciones (ε -δ) para desarrollar el manejo y comprensión de la definición pero en ausencia de aplicaciones concretas del concepto de límite.
Los dos enfoques dejan, según este autor, un vacío didáctico el cual imposibilita la identificación de los procesos en los que interviene el concepto de límite y su aplicación.
El hace énfasis que lo más importante a la hora de enseñar el concepto de límite es que el estudiante aprenda a usarlo, ya sea para explicarlo, aplicarlo o aplicar nuevos conceptos.
Mónica Torres, señala que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite radica no solo en su riqueza y complejidad sino, en el hecho de que solo con base en la definición matemática es difícil esperar que el estudiante comprenda dicho concepto en toda su riqueza. Se puede recordar la definición, pero construir el concepto es algo muy distinto. Por otra parte, en cierto nivel del aprendizaje de la matemática, el salto de lo intuitivo hacia lo formal es un salto cualitativo importante, que requiere de un cambio conceptual radical, también manifiesta que hay dificultad respecto a los conceptos previos, entre ellos, la distancia conceptual entre los números racionales y los números reales. 20

1.4 SUPUESTOS TEÓRICOS

1.4.1 Para la enseñanza – aprendizaje del concepto de límite de una función se tiene en cuenta los siguientes sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico (algebraico – analítico). Lo que permite que el aprendizaje del estudiante sea más significativo para comprender de mejor manera las situaciones relacionadas con el pensamiento variacional.

---

[19] Delgado Cesar Augusto. (Mayo 1994) Sobre la enseñanza del concepto de límite. Revista Matemáticas enseñanza Universitaria. Vol. 3 No 2. Pág. 77-91
[20] De Torres Mónica. (2000) Algunas pautas didácticas para la introducción del concepto de límite finito. Revista EMA. Vol. 6. No 1. pág. 40 - 45

1.4.2 Los docentes de la institución educativa INEM – Pasto, responsables de la asignatura de matemáticas en el grado undécimo, hacen mas énfasis en el sistema de representación simbólico (algebraico – analítico) para el desarrollo del concepto de límite de una función.

1.4.3 Las dificultades que presenta el estudiante del grado once uno del Colegio INEM – Pasto (jornada de la mañana), en el aprendizaje del concepto de límite de una función, están en relación con las dificultades encontradas en algunas investigaciones realizadas en este campo conceptual entre las que se señalan: dificultades en los sistemas de representación para el concepto de límite; dificultades en los conceptos previos para la construcción del concepto de límite; en general una debilidad en la interpretación de situaciones relacionadas con el pensamiento variacional.

1.4.4 Las mayores dificultades que presenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de límite de una función están asociadas a: la traducción incompleta entre los sistemas de representación, en especial el sistema de representación simbólico (algebraico – analítico) y a los conceptos previos (número real – función – variable, entre otros) el la transición por el pensamiento variacional; necesarios para el desarrollo de este concepto.

2. OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GENERAL

Identificar algunas de las dificultades que presenta el estudiante del grado once uno de educación media de la institución INEM - Pasto en el aprendizaje de la noción de límite de una función, desde la perspectiva del pensamiento variacional.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Identificar los sistemas de representación que utilizan los docentes del colegio INEM – Pasto para la enseñanza – aprendizaje del concepto de límite de una función.

- Identificar que clase de dificultades han encontrado los docentes del INEM – Pasto, en el desarrollo y enseñanza del concepto de límite de una función

- Describir las dificultades encontradas en los estudiantes del grado once en los conceptos previos y necesarios para el desarrollo del límite de una función.

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes del grado once en la construcción del concepto de límite de una función cuando se utilizan los diferentes sistemas de representación semióticos una vez que se haya abordado la temática de límite de una función desde la perspectiva variacional.

3. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Son los subgrupos más significativos en los cuales se clasificarán las unidades de registro. En nuestro caso, estas categorías se construyen a partir de los datos más relevantes encontrados en la fundamentación teórica y en el contexto educativo que se aborda en la institución acerca de la enseñanza y construcción del concepto de límite de una función y las dificultades que se exponen en algunos trabajos investigativos.

Para esta investigación la información obtenida se analizó teniendo en cuenta las siguientes categorías.

3.1 PRIMERA CATEGORÍA: SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN.

Entendidas como todas aquellas herramientas – signos – gráficos, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.[21]

3.1.1 Subcategoría. Sistemas de representación utilizados por el docente para la enseñanza del concepto de límite de una función. (E. C. L. F.)

Dentro del proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de límite se tuvieron en cuenta los siguientes sistemas de representación:

Sistema de representación verbal. En sistema entra en juego el uso del lenguaje y en especial el uso de la palabra oral y escrita.[22]

Sistema de representación numérico. Se trata como un proceso de tendencia en una tabla de valores e imágenes de éstos, en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés.[23], donde se puede hacer un estudio de esos datos numéricos para encontrar patrones de regularidad. Los patrones de regularidad o los métodos de regresión permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables involucradas. [24]

---

[21] Rico Luís. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática – Universidad de Granada – España.
[22] Esta investigación. Página 38.
[23] ibidem
[24] MEN. (2004) Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá - Colombia. Pág. 20.

Sistema de representación gráfico. En el sistema gráfico, el límite se representa como un punto del eje OY, tal que: a todo segmento que le contiene le corresponde otro entorno al punto de interés que se proyecta.[25]

Sistema de representación simbólico (algebraico – analítico). Se utiliza dentro de este sistema las diferentes expresiones algebraicas que representan una función y su introducción hacia el cálculo de límites, además aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de ε y δ.[26]

3.2 SEGUNDA CATEGORÍA. DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.

La dificultad entendida como carencia o debilidad a escala cognitiva presumiblemente con algún tipo de déficit que impide establecer relaciones necesarias entre los contenidos a aprender.[27]

Dentro de esta categoría se identificó unas subcategorías las cuales son:

3.2.1 Subcategoría. Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite de una función. (A. C .L F.) en cuanto a:

- Los sistemas de representación del concepto de límite.
- Los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

3.2.2 Subcategoría. Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los sistemas de representación del concepto de límite de una función y a otros de sus componentes dentro del pensamiento variacional.

En relación con el sistema de representación verbal. La utilización de representaciones verbales para trabajar el concepto de límite choca con las dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual; también cuando no se interpreta adecuadamente representaciones tabulares, gráficas de tipo cartesiano o sagital que están asociados a la variación.

En relación con el sistema de representación numérico. El sistema numérico se ve limitado, ya que una tabla no proporciona suficientes valores para comprobar que un número es el límite de una función o cuando la aproximación numérica y la

[25] ibidem
[26] Ibidem.
[27] Esta investigación. Página 23 -24.

estimación no son usados en la solución de problemas, con el objetivo de reconocer patrones y regularidades.

En relación con el sistema de representación gráfico. En el sistema gráfico, el límite se representa como un punto del eje OY, tal que: a todo segmento que le contiene le corresponde otro entorno al punto de interés que se proyecta[28] las dificultades dentro pensamiento variacional están referidas cuando no se hace correctamente la relación explícita entre las variables, puesto que la variación ofrece una posición dinámica de ellas.

Dentro del sistema de representación gráfico se identifican:

- Dificultades en la comprensión de la "Tendencia hacia el infinito". Entendida como cuando los estudiantes con dificultad captan que valores de f (x) "la función" crecen o decrecen sin límite conforme x "la variable independiente" crece o decrece sin límite.

- Dificultades en la comprensión de la "Tendencia hacia un punto". Entendida como cuando los estudiantes con dificultad captan que los valores de f (x) " la función" crecen o decrecen conforme x " la variable independiente" crece o decrece a un número a; se debe analizar las transformaciones que sufren las variables cuando se someten a procesos de variación, lo anterior a través de los respectivos sistemas de representación.[29]

- Dificultades en la comprensión del "Comportamiento asintótico". Es cuando la función tratada a través del sistema de representación gráfico o algebraico presenta una discontinuidad en la cual no está definida con respecto a sus valores o no toma valores reales. Los estudiantes captan con dificultades este fenómeno observando las transformaciones que sufre la gráfica.

En relación con el sistema de representación simbólico (algebraico – analítico). Se explica en la multitud de errores que cometen los alumnos en las manipulaciones algebraicas... su definición formalizada del concepto de límite ha hecho que: se presente a los alumnos un exceso de simbolismo, al hacerlos manipular mecánicamente estos, sin saber lo que se está haciendo (formalismo prematuro) y a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido y al mismo tiempo que permitan descubrir las relaciones con otros conceptos.

---

[28] ibidem
[29] Larson – Hosteteler – Edwards. Cálculo. (1997) Editorial Mac Graw Hill. Pág. 1-50.

3.2.3 Subcategoría. Dificultad que presenta el estudiante en transición entre sistemas de representación.

Se explican en las deficiencias en sus formas de articulación, se enfatiza sobre la importancia de las conexiones, los aspectos de proceso y de conversión entre representaciones, la dificultad del paso de un sistema de representación o de un registro tiene que ver con el desarrollo de la habilidad para distinguir las variables en cada representación.

3.2.4 Subcategoría. Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

Para esta subcategoría se tiene en cuenta las dificultades en:

Asociadas a Número real. Entendidas las dificultades como las concepciones de los números reales que desarrollan los estudiantes, de una manera inapropiada para el aprendizaje del cálculo (Robinet 1986). Con respecto a sus criterios de distinción entre los diferentes conjuntos de números quedan flojos y muy dependientes de las representaciones semióticas elegidas.

Asociadas a las Funciones. Entendida la dificultad cuando para ellos una función es una fórmula. Cuando una representación gráfica sin fórmula carece de significado. Cuando su concepto de función es estático en cuanto consideran la función pensando en un punto cada vez. Cuando existe una fuerte subordinación al simbolismo. Y cuando se presenta una fuerte atracción por la linealidad que lleva a tratar funciones generales como si fueran lineales.

Asociadas a la Manipulación algebraica. Entendida como los errores que quedan sin corregir en la aritmética y que luego se traducen erróneamente en el campo algebraico.

Entendidos como la poca comprensión de lectura entre el lenguaje cotidiano y matemático y viceversa, generando diversas interpretaciones de los símbolos y las letras.[30]

Asociadas al Pensamiento variacional. Entendido esta dificultad como la formulación errónea de modelos matemáticos para diversos fenómenos, donde los estudiantes adquieren progresivamente una comprensión de patrones, relaciones y funciones, que intervienen en el desarrollo de sus capacidades de

[30] El tratamiento de las anteriores dificultades se comentan en esta investigación en las páginas 61 hasta la 80 teóricamente.

representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficos apropiados.[31]

3.2.5 Subcategoría. Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a la noción de límite.

Entendidas estas dificultades en cuanto al sentido común de la palabra límite, lo que induce a concepciones persistentes del límite como barrera infranqueable o como último término de un proceso, también en cuanto al aspecto metafísico de la noción de límite, ligado por el infinito, ya que introduce una nueva forma de razonamiento.

[31] MEN. Estándares curriculares en matemáticas. (1998) Propósitos generales del currículo en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 49 – 81.

4. PREGUNTAS QUE ORIENTAN EL ESTUDIO

4.1 ¿Qué tipo de dificultades se han encontrado en algunas investigaciones en cuanto a la enseñanza – aprendizaje del concepto de límite de una función?

4.2 ¿Qué conceptos previos son necesarios para la introducción del concepto de límite de una función?

4.3 ¿Qué sistemas de representación, son utilizados para la enseñanza - aprendizaje del concepto de límite de una función en secundaria?

4.4 ¿Qué dificultades manifiesta el estudiante del grado once al momento de desarrollar el concepto de límite de una función?

4.5 ¿Qué dificultades manifiesta el estudiante del grado once, respecto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite?

4.6 ¿Con cuál de los sistemas de representación, manifiesta mayor dificultad el estudiante del grado once, en el desarrollo del concepto de límite de una función?

5. MARCO TEÓRICO.

El estudio se enmarca dentro de los conceptos relacionados con el aprendizaje del limite de una función y las dificultades que manifiesta el estudiante a la hora de aprenderlo ,para ello se tendrá en cuenta: su evolución histórica con sus dificultades, el aprendizaje de un concepto matemático, obstáculo epistemológico y su incidencia en el aprendizaje, dificultades y su incidencia en el aprendizaje de un concepto, representación de los conceptos, preconceptos para la construcción del concepto de límite y algunas de sus dificultades en relación con el pensamiento variacional.

5.1 LA EVOLUCION DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CON ALGUNAS DE SUS DIFICULTADES.

Desde la época prehistórica, cuando surgieron las primeras nociones e ideas matemáticas, la observación del cambio se relacionó con los fenómenos que se encontraban en la naturaleza; por ejemplo: la sucesión del día y la noche y su relación con el cambio en la posición del sol, la luna y las estrellas, los aspectos cambiantes de la vegetación, entre otros, hizo que el hombre se sensibilizara con los fenómenos cambiantes que impulsaron el desarrollo de tecnologías materiales y simbólicas elementales (herramientas, lenguaje gestual, lenguaje verbo – icónico).

La historia de las ideas matemáticas nos muestra que el concepto de límite es complejo. En el desarrollo del cálculo a través de ella miramos como la derivada y la integral tuvieron sus fuentes en dos de los más relevantes aspectos de la naturaleza la multiplicidad y la variabilidad, pero fueron finalmente definiciones como abstracciones matemáticas basadas en el concepto fundamental de límite de una serie infinita de elementos las que le dieron sentido.

En un primer intento en la visión de la variación se trató la cuantificación de cantidades y magnitudes, un claro ejemplo son las tablas babilónicas, las cuales permitieron un avance en “el álgebra retórica”, donde esta civilización realizó un trabajo muy importante dentro de un sistema de representación entendido hoy como verbal. Usando dicho sistema entendieron y resolvieron ecuaciones en sentido actual como cuadráticas, bicuadráticas y varios sistemas de ecuaciones de varios tipos con dos incógnitas.

La civilización egipcia también realizó sus trabajos matemáticos y en especial el tratamiento de la variación a partir de problemas de la vida cotidiana, los cuales los llevaron a interpretar verbalmente ecuaciones lineales aplicando el método de la falsa posición y en el trabajo con progresiones aritméticas y geométricas empleando unos pocos símbolos. Cuando ellos observaron los cambios en una estrella, estas variaciones permitieron que dicha civilización adaptara un calendario civil con un año de 365 días.

La civilización griega (2800 a.c. – 600 d.c.). Esta civilización se preocupó no solo del "cómo" si no sobre todo establecer el "por qué" de las cosas, impulsando las matemáticas hacia una ciencia deductiva (J. Collete. 2000. Pág. 66) luego de 500 y 1500 años después de haber sido escritas las obras originales griegas, a partir de sus transcripciones y sistema de numeración en base 10, aportaron procesos geométricos ingeniosos para solucionar problemas algebraicos. En el libro II de los elementos de Euclides, se explica cierta geometría "algebraica" donde sus construcciones geométricas tienen la misma función de las operaciones algebraicas.

El concepto de "magnitud" se utilizó para determinar cualquier objeto geométrico, el segmento de una línea o bien una figura. El método de las proporciones y la aplicación de las áreas permitieron demostrar identidades algebraicas y solución de ecuaciones algebraicas.

A pesar de que las ideas de cambio o cantidad variable, no eran ajenas a los griegos, que habían considerado problemas sobre el movimiento, continuidad o infinito desde los tiempos de Heráclito y Zenón, se puede decir que los aspectos de cambio y movimiento no fueron establecidos desde el punto de vista cuantitativo, pues el estudio de la matemática pura prevaleció sobre la cinemática. Ello puede explicar el por qué el concepto de función permaneció, desde su prehistoria hasta lo que se conoce como edad antigua, intacto.

Una de las primeras relaciones funcionales fueron las ligadas a problemas de astronomía por ejemplo el Almagesto de Ptolomeo, introduce una tabla de cuerdas para la función seno. Sin embargo en estos trabajos y los de Apolonio sobre cónicas no consideraron en forma general la idea de variable o función.

En la época antigua algunos obstáculos conceptuales impidieron que se estudie ampliamente los fenómenos de cambio, y que las aproximaciones cuantitativas y cualitativas se hallen aún disociadas y por lo tanto no sea posible hablar todavía de la noción de variable, dependencia o función. La disociación entre número y magnitud (reducir todo al carácter geométrico), tuvieron también problemas en el simbolismo referidos al establecimiento de expresiones algebraicas entre otros.

Desde Diofanto (250 d.C.) hasta fin del siglo XIV d.c. ya se inició con una introducción de "álgebra" con abreviaturas para las incógnitas y las relaciones de

uso frecuente, sin embargo los cálculos se hacen en el lenguaje natural, dando origen a lo que se entiende como "álgebra sincopada."[32]
En cuestiones del cálculo los griegos lo derivaron de la geometría. Demócrito calculó el volumen de pirámide y conos, se cree que, considerándolos formados por un número infinito de secciones de grosor infinitesimal (Infinitamente pequeño) y Eudoxio y Arquímedes utilizaron el "método de agotamiento" para encontrar el área de un círculo con la exactitud requerida mediante el uso de polígonos inscritos. Sin embargo las dificultades para trabajar con números irracionales y las paradojas de Zenón de Elea impidieron formular una teoría sistemática del cálculo.[33]

Es decir, el cálculo tuvo sus semillas en las dificultades lógicas encontradas por matemáticos de la Grecia antigua en sus intentos por expresar sus ideas intuitivas de los radios o rectas proporcionales, las cuales fueron vagamente relacionadas como continuas, en términos de números considerados como discretos. Esto comprometió casi inmediatamente con la insatisfacción lógica (pero intuitivamente atractivo) sobre el concepto de infinitesimal.

El rigor del pensamiento griego, sin embargo, excluyó el pequeño infinitésimo de las demostraciones geométricas, y así reemplazadas y evitadas, pero incómodas para el método de exhausión que exigían ellos. El paso al límite está implícito en el método heurístico de aproximaciones sucesivas que conduce al hallazgo, gracias a la intuición geométrica y conocimiento sobre mecánica, y que luego demuestra por reducción al absurdo.

En la época griega se presentan situaciones que dan oportunidad a las primeras manifestaciones intuitivas de la idea de límite. Ellas tienen que ver con el encuentro de procesos geométricos infinitos que surgen de las paradojas de Zenón, en el descubrimiento de los inconmensurables o irracionales y la comparación de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas por aproximación de figuras rectilíneas. Por ejemplo el problema de calcular el área del círculo proporciona una oportunidad para desarrollar herramientas muy similares al concepto de límite (Cornú, 1991) citado en MEN. (2004) "Pensamiento variacional y tecnologías computacionales".

Los problemas de variación no fueron atacados cuantitativamente por los científicos griegos. Sin ningún método que pueda desarrollar esto y explicarlo, más que el método de exhausión hizo que se ilustren estas dificultades y de alguna

---

[32] MEN. (2004) Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá - Colombia. Pág. 1-4
[33] MEN. Estándares curriculares en matemáticas. (1998) Propósitos generales del currículo en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 77 – 78

manera evitadas desde las paradojas de Zenón y otras tantas famosas para hablar de problemas del movimiento, velocidades, etc.[34]
Los árabes retomando el trabajo griego, permitieron que estos avances llegaran a occidente, se amplió y perfeccionó los sistemas de interpolación esenciales para la tabulación de funciones, no obstante el cambio no fue tan sustancial, es decir no permitió que se avance hacia un concepto general de ellos.

Es importante destacar que en la edad media fue el estudio de las cosas sujetas al cambio y en particular al movimiento una de las mayores preocupaciones. Las escuelas de Oxford y París del siglo XIV tomaron las herramientas griegas para estudiar los fenómenos de la naturaleza, aquí se destaca el estudio cuantitativo del movimiento local no uniforme, partiendo de las doctrinas aristotélicas.

Desde el siglo XIII el estudio cuantitativo de fenómenos adquiere gran relevancia, se analizan cualidades y formas en fenómenos diversos; como el calor, la luz, la densidad, la velocidad. Por ejemplo la intensidad se la considera ya en relación a su “extensión” con el tiempo o cantidad de materia; empiezan entonces a aparecer conceptos fundamentales como la cantidad variable (grado de cualidad), velocidad instantánea o puntual, aceleración, todos ellos íntimamente ligados a la idea de función.

Nicolás Oresme en su estudio cinemático (tratado “configurationibus qualitatum et mootum”), se fundamenta en el uso de segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía (todo lo medible puede imaginarse como cantidad continua), la velocidad de un móvil a lo largo del tiempo, variación de latitudes, etc.

Estos tipos de representaciones se interpretan como el uso de la representación gráfica de una función en términos “cartesianos” donde se explica mejor la naturaleza de los cambios, ya sean cuantitativos o cualitativos.

Este apogeo en el estudio de procesos de variación relacionados con el movimiento, la intensidad luminosa, la intensidad de calor (Siglo XV – XVII) con Tartaglia, Cardan, Vieta, Galileo, Descartes, Wallis, Newton y Leibniz; con Vieta y Napier dieron un avance significativo hacia el álgebra simbólica. Aquí ya se usan letras para las cantidades y los signos para la representación de operaciones, el lenguaje simbólico sirve también para realizar demostraciones de reglas generales aparte de su uso conocido para resolver ecuaciones.

---

[34] Boyer Carl. (1961) “The history of the Calculus and its Conceptual development” Editorial. Dover Publications.

La algebrización de la geometría (Descartes) afectó en forma decisiva a las funciones pues una ecuación en X e Y es una forma para expresar dependencia entre dos cantidades variables, de manera que a partir de ella es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de otra. Es así como nace primero la geometría analítica y luego el cálculo infinitesimal.

A partir de la mitad del siglo XVII, a manera de síntesis se puede señalar que Newton hizo grandes contribuciones al desarrollo de las funciones, en las que se destacan:
Su interpretación geométrica – cinemática de los conceptos fundamentales del análisis matemático. Siguiendo las ideas de I. Barrow en las que tomado el tiempo como argumento analiza las variables dependientes como variables continuas que poseen una determinada velocidad de cambio.

Sus ideas sobre el cálculo infinitesimal, expuestas en uno de sus trabajos principales, el método de fluxiones y series infinitas, escrito en 1671 y publicado en 1736, en los que a partir de la exposición de sus ideas básicas a través de la mecánica, presentó los dos principales problemas del cálculo infinitesimal, la diferenciación y la integración, en términos de movimiento, es decir, dada, la ley para la distancia, determinar la velocidad, para el primer caso. Y dada la velocidad determinar la distancia para el segundo.

Gottfried Leibniz contemporáneo y rival de Newton, otro matemático de la segunda mitad del siglo XVII, contribuyó decididamente a el concepto de función, sus primeras obras fueron dedicadas al estudio de las series infinitas, se dio cuenta que la determinación de la tangente a una curva depende de la razón entre las diferencias de las ordenadas y de las abscisas cuando esta tienden a cero. Así como el cálculo de las áreas depende de las sumas de las ordenadas o de los rectángulos cuya abscisa tiende a cero y que ambos son problemas inversos (la misma conclusión de Newton).

El término función aparece por primera vez en un escrito de Leibniz de 1673. Inicialmente tiene un significado muy particular pues se refiere a un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes. Conjuntamente con Jean Bernoulli muestra como el deseo para expresar mediante una palabra cantidades que dependen de una cierta variable se encuentra todavía restringida a las expresiones analíticas.[35]

[35] MEN. (2004) Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá - Colombia. Pág. 1-4

A mediados del siglo XVIII, los llamados métodos infinitesimales no eran entonces sino un conjunto de reglas de acentuado carácter algorítmico que justificaban el nombre de “cálculos” y así designados: cálculo diferencial, cálculo integral, cálculo de variaciones, que, por lo demás, acusaban cierto desequilibrio en sus partes, ya que el cálculo diferencial privaba sobre la integral, por cuanto la integración no era sino la operación inversa de la diferenciación y la integral definida perdió su autonomía al convertirse en una aplicación de la integral indefinida.

Pero la característica saliente de los métodos infinitesimales del siglo XVIII era el hecho de estar privados de todo fundamento riguroso causando dificultad al concepto...la frase de Jean D´Alambert (1717-1783) que despertaba las dificultades lógicas del cálculo “Allez en evant et la foi vous viendra” hacía ver que todavía no existía una definición clara sobre el concepto de límite y derivada, y eso que él era el que más se aproximo a una definición de estos conceptos.

Por la misma época el sacerdote Berkeley hizo una crítica incisiva sobre los llamados infinitesimales respondiendo a los ataques de Edmund Halley sobre los cuestionamientos que él hacía sobre las verdades de la fe, Berkeley decía que “su crítica era pertinente, aguda y decisiva en vista de los principios oscuros, vagos y contradictorios que los envolvía...critica y satiriza esos incrementos evanescentes, esos momentos que no son cero, pero que luego se anulan y que califica de fantasmas de cantidades desaparecidas ...aquellos infinitamente pequeños de infinitamente pequeños”.

Pero en el siglo XIX son los matemáticos mismos que gracias a estas y otras críticas fuertes, se lanzan al ataque iniciando una revisión de los principios del análisis infinitesimal, mediante un proceso del cual fue precursor B. Bolzano (1781-1848) y constructores como A. Cauchy (1789-1857), N. Abel (1802-1829), entre otros. Gracias a Cauchy el análisis infinitesimal adquiere bases sólidas.[36]

Un nuevo hecho que se encontró con el pasar de los años luego de que Euler, Newton, Descartes, y que Cauchy diera una definición clara sobre función (definición de Cauchy), límite, tomando el concepto de límite como punto de partida del análisis y otros objetos matemáticos, la definición de este concepto (límite) pasó a términos de (ε - δ) que es el resultado de esfuerzos que se realizaron por más de cientos de años de ensayo y error, y que fue sintetizado e incorporado en pocas palabras consecuencia y fruto del mismo esfuerzo persistente para dotar a este concepto de una base matemática sólida...sin

---

[36] Babini José. (1981). Historia de las ideas modernas en la matemática. Serie de Matemática OEA. Monografía No 4. Segunda Edición. Capítulo: Aritmetización del análisis.

embargo una comprensión clara y una definición precisa de los límites estuvieron bloqueadas durante largo tiempo por una dificultad aparentemente insuperable.[37]

De la misma manera la historia nos revela las dificultades que tuvieron determinados matemáticos para entender y formalizar el concepto de límite (afirmaciones de Cajori (1915); Grattan Guiness 1970; Bell 1940), de ahí entonces que ellas también se presenten en el aula de clases.

Podemos sintetizar esta serie de dificultades a través de la historia de la siguiente manera:

Las dificultades identificadas que nacen en la antigüedad griega son: la influencia de la intuición geométrica, el excesivo rigor en los métodos y falta de hallar resultados directos, en la edad media y renacimiento surgen el carácter empírico y heurístico de las matemáticas que impide la explicación de los resultados, luego aparecen las dificultades asociadas al álgebra como influencia de la posición finitista del álgebra de Vietè (S. XVII) que lleva a ver el cálculo como una extensión del álgebra (S. XVIII). Por otro lado surgen las dificultades generadas por el uso de expresiones dinámicas (finales del S. XVIII y comienzos del S. XIX) y en las cuales se detecta la noción clara de conjunto infinito y la omisión de una definición clara de número (S. XIX), para poder llegar a la definición formal y simbólica de límite, la cual también a generado dificultades didácticas.

A continuación se indica tal transición.

Método de Exhausión	Carácter empírico	Carácter heurístico	Predominio de fórmulas	Uso de expresiones dinámicas	Carácter formal
S. VI AC – S. II DC	S. IV – S. XV	S. XVI – S. XVII	S. XVIII	S. XVIII – A comienzos S. XIX	S. XIX

[38]

5.2 EL APRENDIZAJE DE UN CONCEPTO MATEMÄTICO.

El comprender como aprenden nuestros alumnos no es una tarea fácil, ya que el aprendizaje y el pensamiento son actividades mentales complejas y además cada estudiante es diferente de los demás; la forma en que cada estudiante aprende, piensa y responde es única. Sin embargo algunos psicólogos han establecido ciertos “principios de aprendizaje” que probablemente permitan identificar como se aprende matemáticas. Piaget por ejemplo visualiza el aprendizaje como un

[37] Courant y Robbins.1941. Apartes de su conferencia. Versión en Internet. www. Google +Artículos Académicos.

[38] Medina Ana Cecilia. (2000) Concepciones Históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá – Colombia.

proceso de evolución asociado a la madurez. De manera similar Zoltan p. Dienes un educador inglés y Bruner, Psicólogo norteamericano, describen el aprendizaje, iniciándose con la manipulación de objetos físicos, continuando con un estado gráfico antes de alcanzar el estado analítico abstracto. Nótese que estos autores están de acuerdo en que el aprendizaje principia con lo concreto y que el proceso hacia lo abstracto depende del nivel de madurez y comprensión, estas ideas acerca del aprendizaje, sugieren en que nosotros usemos la siguiente secuencia de aprendizaje en la enseñanza de conceptos matemáticos:

1). Usar objetos que den una representación física del concepto (si es posible, hacer que los estudiantes manipulen los objetos) aprendemos mejor aquellas cosas que hacemos, que tocamos, que movemos, que vemos o que oímos. Estas son experiencias que un libro no puede proporcionar. Necesitamos hacer esto con nuestros alumnos para introducir los conceptos que se exponen en el libro de texto.

2). Usar dibujos hechos en clase o bien gráficas que representen el concepto a ser enseñado. Esta parte es en la cual el pizarrón o rincón de aprendizaje son los instrumentos más útiles. Por su puesto se puede utilizar fotografías o dibujos del libro de texto, pero algunas veces esas gráficas son engañosas para el estudiante. Construir paso a paso una gráfica o un dibujo en el pizarrón suele ser mejor que usar las que se encuentran en el libro de texto.

3). Como paso siguiente, si es posible, hay que relacionar el concepto a un modelo matemático, tal como la recta numérica o una gráfica que encaje en el contexto del concepto. Una parte crucial del proceso de aprendizaje es la transferencia de representaciones físicas a símbolos abstractos. La clave de esta transferencia es el entendimiento del concepto implicado (sea este una operación, una relación o un algoritmo).

4). Después de que los alumnos entiendan el concepto, podremos usar símbolos para representar variables, operaciones y relaciones. Estos símbolos tendrán un gran significado si previamente los estudiantes conocieron, manejaron y contestaron ejercicios oralmente, antes de escribirlos o identificarlos de manera impresa en el libro de texto. Una vez más, es crucial que el alumno entienda la operación o algoritmo representados por los símbolos.[39]

El proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas debe construirse a través de una gran diversidad de experiencias, donde el pensamiento abstracto, el

[39] Vázquez Cobo Manuela. (2004) la teoría del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas. Ministerio de Educación nacional. Chile. Unidad de currículo y evaluación. Artículo Revista red Escolar. Chile. Versión en Internet. http //: www. rmm.cl./bitácora/vista_resumen.php?proy_ccod=37

pensamiento lógico, la transferencia a nuevas situaciones, el usar el concepto para descubrir uno nuevo, son el máximo nivel alcanzable del proceso de aprendizaje.

5.2.1 Obstáculo epistemológico y su incidencia en el aprendizaje de un concepto matemático. La noción de obstáculo epistemológico, que aparece por primera vez en el ámbito de la epistemología de las ciencias experimentales (Bachellard 1938), fue retomada por Brosseau en 1976 y definida en términos de la teoría de situaciones didácticas. En dicha teoría se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones en las que es útil como estrategia de solución. La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida afrontando situaciones en las que dicha noción está implicada. Ahora bien, la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática en conjunto de todas las situaciones en las que este interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones. En los casos, en los que la aplicación del campo de problemas exige la situación de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, se dice que la concepción es un obstáculo. Y esa concepción obstáculo se pondrá de manifiesto a través de errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproducibles y resistentes.

Brosseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos (1980-1981-1983-1988-1989) entre ellas figura una clasificación de los obstáculos atendiendo a que su origen se sitúe en uno o en otro de los polos del sistema didáctico – alumno, profesor – saber – o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre obstáculo ontogenético, didáctico, epistemológico o cultural. En particular, clasifica un obstáculo de epistemológico si se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de las necesidades de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo forma parte del saber matemático actual. Por otro lado, Duroux (1982) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo a una concepción. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brosseau, es la siguiente:

a) Obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.

b) Este conocimiento produce respuestas desadaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
d) Además este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el presente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acumulación de Piaget) es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brosseau 1989).[40]

En síntesis, si para la solución se requiere de un cambio importante o radical de punto de vista, o sea se requiere de una nueva concepción, se dice que un "obstáculo" ha sido superado.

Ha estos obstáculos presentados en el desarrollo histórico del conocimiento se les ha denominado "obstáculos epistemológicos", término introducido por Bachelard para afirmar que:

"El conocimiento científico no se desarrolla en un proceso continuo, sino que resulta del rechazo de formas previas de conocimiento que se constituyen en obstáculos epistemológicos" Bachelard (1993).

Cornú y Sierpinska han relacionado estas dificultades con aspectos históricos del concepto de límite estableciendo así obstáculos de corte epistemológico.

Es evidente que la enseñanza de los principios del cálculo es problemática. Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se pueden enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentra grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas.

En Francia por ejemplo, el sistema educativo acepta la administración del hecho de que es imposible enseñar de golpe los saberes del cálculo bajo su forma definitiva. Entonces opta por una aproximación intuitiva que pretende darle

[40] Brousseau G. (2000) Los obstáculos epistemológicos en los problemas en matemáticas. Recherches en didactique des mathématiques. Versión en Internet – www.google.com: artículos académicos + Brousseau G. (2000) + Recherches en didactique des mathématiques.

significado al cálculo por medio de la selección de problemas y por medio de la puesta en práctica de técnicas de aproximación como las exploraciones numéricas y gráficas por medio de las calculadoras en casos típicos simples (funciones y sucesiones de referencia) que se encuentran en el centro de este campo.[41]

5.2.2 Dificultades asociadas al aprendizaje de un concepto matemático. La dificultad entendida como carencia o debilidad a escala cognitivo presumiblemente con algún tipo de déficit que impide establecer relaciones necesarias entre los contenidos a aprender; se entiende también como las que se caracterizan en base a la discontinuidades en los procesos de no negociación que tienen lugar en las interacciones, en los diverso contextos donde se construyen los significados matemáticos (Morgan 2000); entorno al área cognitiva comprende ausencia de conexiones entre pensamiento, conocimiento y soluciones de problemas.

Su incidencia hacia el aprendizaje y específicamente hacia el aprendizaje de las matemáticas escolares se sitúa en el hecho de que estas matemáticas se han entendido como un conjunto organizado de conceptos y procedimientos; en este mismo sentido el aprendizaje de las matemáticas escolares se ha reducido a la adquisición de dichos contenidos sin embargo se ha dado un viraje hacia el desarrollo de la competencia y dominio sobre unos contenidos matemáticos. En los trabajos actuales sobre el aprendizaje y las didácticas de las matemáticas, saber y hacer matemáticas se concibe como una actividad cultural y social (Lerman 2000) entender las dificultades de aprendizaje matemático desde una perspectiva sociocultural marca importantes diferencias en relación con las diversa interpretaciones entorno a la noción de dificultades sugeridas por las teorías cognitivas y constructivistas del aprendizaje.

El aprendiz de matemáticas es un sujeto cognitivo que se enfrenta a retos importantes y complejos al aprender matemáticas e intentar participar en un entorno de practicas matemáticas. Este sujeto, además de actuar según su propio desarrollo cognitivo debe ajustarse a un cierto entorno sociocultural que genera en él unas determinadas respuestas emocionales y ejerce, a su vez, una acción mediadora sobre su desarrollo cognitivo (Valero, 2002). El aprendiz de matemáticas se halla inmerso en un entorno que le exige respuestas en relación con su bagaje cultural, su posición social, sus creencias sentimientos... De ahí que las muchas dificultades de aprendizaje que habitualmente se explican en base al desarrollo cognitivo del sujeto deban ser reinterpretadas de acuerdo con las características socioculturales del entorno donde aprende dicho sujeto. [42]

[41] Artigue Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia. Pág. 97-140

[42] Planas Nuria, Font VicenÇ (2000). Una aproximación socio cultural a las dificultades de aprendizaje matemático.

Una “dificultad” aparece cuando un problema nuevo se resuelve reorganizando la teoría de la concepción que se dispone.

5.2.3 ¿Qué es comprender un concepto matemático?. Conocer y comprender consiste en “tener la idea o noción de alguna cosa, llegar a saber por el ejercicio de las facultades intelectuales la naturaleza, cualidades y relaciones de las cosas”; “tener en la mente la representación de alguien o algo”; “percibir el objeto como distinto de todo lo que no es él; distinguir a alguien o algo entre otros semejantes” (Cuervo 1998; Seco, Andrés y Ramos, 1999).

En este mismo orden de reflexión comprender significa” percibir mentalmente algo”, “captar el significado de algo”,”entender con claridad lo que quiere decir alguien”, “conocer en un objeto todo lo que en el es conocible”, “llegar a conocer la naturaleza o modo de ser de una cosa”.

Conocer es una actividad intencional, dirigida a un estado de cosas que debe aprenderse, que tiene como resultado lo que llamamos saber disponible inter subjetivo, organizado y estructurado mediante representaciones (Krings y Cols; 1978). El conocimiento humano es central en los procesos de enseñanza – aprendizaje, procesos que tienen como objetivo final el incremento de la comprensión sobre un campo concreto.
Se consideran a los conceptos como adaptaciones a estructuras conceptuales, llamados esquemas…

...un concepto entonces requiere para su formación cierto número de experiencias las cuales tienen algo en común, un concepto es un objeto puramente mental.

Vergnaud (1990) considera el concepto como una tripleta:
- Referencia. Conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.
- Significado. Conjunto de invariante sobre las cuales se basan las operaciones.
- Significante. Conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten la representación simbólica del concepto, sus propiedades, situaciones y procedimientos.[43]

Es bien sabido que los objetos matemáticos no son directamente accesibles por medio de los sentidos y solamente a través de las representaciones semióticas tenemos acceso a esos objetos. Por tal motivo es importante analizar el papel que juegan las representaciones en la construcción del conocimiento matemático.

[43] Vergnaud Gérard. (1990) Investigaciones en didáctica de las matemáticas. Vol. 10, No 2 y 3. Francia. pág. 133 – 170

Comprensión: Se define en términos de la manera en que la información es representada y estructurada. Una idea matemática o procedimiento es entendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de entendimiento es determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea matemática, procedimiento, o hecho, es entendido profundamente si este está ligado a una red existente con fuertes o más numerosas conexiones; [44] es un acto que está inmerso en un proceso de interpretación y que, se desarrolla en forma de dialéctica, lo que produce un nuevo conocimiento, ligado a cuatro actos de comprensión identificación, discriminación, generalización y sintetización donde el proceso de interpretación está relacionado con sus representaciones y, por tanto, con el dominio del concepto como lo indica Castro y Castro.

Un concepto matemático esta determinado por un terna (S, I, S) en donde S: es el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto, I: el conjunto de invariantes que constituyen el concepto y s: el conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y sus situaciones a las que se refiere".

Análogamente una concepción estaría formada por esta misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto (Vergnaud 1982, citado por Ruiz, 1993).
Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada unas de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando que sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades (castro y castro 1997)

5.3 REPRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS.

Una de las preocupaciones de los investigadores en la didáctica de la matemática se centra en averiguar cómo se produce el conocimiento en los alumnos. Una vez que el investigador establece lo que entiende por conocimiento, inevitablemente, este estará vinculado a las representaciones de los conceptos, ideas o relaciones, de ahí la importancia que, en investigación, se le da hoy en día a las representaciones en educación matemática.

[44] Hitt Fernando. (2000) Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. Departamento de matemática educativa. Cinvestav – IPN- México. Pág. 1-15.

5.3.1 ¿Qué es una representación? Representar es atribuir significado, ubicarse en un sistema, es un acto creador, consiste en cambiar de aspecto un mismo dato para verlo de otro modo [45](Representación en matemáticas).

Desde la década de los 80, las ideas en torno a las representaciones y a los sistemas de representación han ido ganando terreno a la hora de abordar el estudio de la cognición en matemáticas. Y se han ido consolidando como una herramienta útil a tal efecto. Las representaciones matemáticas se han entendido desde entonces, en sentido amplio, como todas aquellas herramientas – signos – gráficos, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos y con los cuales los sujetos particulares abordan e interactúan con el conocimiento matemático, es decir, registran y comunican su conocimiento sobre las matemáticas.[46]

Mediante el trabajo con las representaciones las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas; de ahí su interés didáctico (Radford 1998) desde entonces las representaciones se han considerado parte esencial del aparato conceptual necesario para analizar los procesos de aprendizaje y comprensión de las matemáticas.

Un sistema semiótico de representación cumple con varias funciones:

- De expresión; de estructuras y operaciones mentales, con vistas a la comunicación con otros.
- De objetivación; con vista a probar la validez para uno mismo.
- De tratamiento; que define como una transformación de la representación.

Duvall hace hincapié en la existencia de diversos sistemas semióticos ligados a un mismo concepto matemático. Cada uno de estos sistemas tiene sus dificultades y limitaciones propias en cuanto a su significado y su funcionamiento y es esencial en la actividad matemática.[47]

Para Castro y Castro, los conceptos matemáticos se pueden expresar por varios sistemas dando lugar a lo que Janvier et (1993) llaman representaciones sinónimas (representaciones diferentes de un mismo objeto matemático). En el concepto de límite se consideran cuatro sistemas de representación: Verbal, numérico, gráfico y simbólico.

---

[45] Rico Luís. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática – Universidad de Granada – España.
[46] Ibidem
[47] Romero Isabel, Rico Luís. (1999) Representación y comprensión del número real.- una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA. Vol. 4, No 2. Pág. 117-151

5.3.2 ¿Cuándo un sistema semiótico puede ser un registro o sistema de representación? Registro entendido como función esencial para toda actividad cognitiva, si se permite tres actividades cognitivas:

1) La presencia de una representación identificable.
2) El tratamiento de una representación; que es la transformación de una representación dentro del mismo registro donde ha sido formada.
3) La conversión de una representación; que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro, en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial. [48]

Las actividades que se ilustran con referencias a la didáctica del concepto de límite son las siguientes:

1) Formación de representaciones identificables en un sistema dado; dentro de un mismo sistema hay multitud de representaciones, que caracterizan cada uno de los sistemas de representación, implica una selección de rasgos y datos en el contenido que se quiere representar. Debe respetar unas reglas cuya función es asegurar las condiciones de identificación y reconocimiento, se tratan de reglas de conformidad y no de regla de producción efectiva de un sujeto. La enunciación de una frase, la elaboración de un texto, el diseño de una figura geométrica, la escritura de una fórmula son ejemplos de acciones cognitivas o actividades matemáticas asociadas con sistemas dados de representación.

2) Transformación dentro de un sistema de representación. Puesto que existen distintas representaciones dentro de un mismo sistema es necesario considerar las transformaciones de unas a otras, debe respetar unas determinadas reglas sintácticas, con o sin referencias a significados exteriores por ejemplo, un sistema algebraico para representar el límite debe incluir una serie de reglas para pasar de la definición topología a la definición métrica.

3) Traducción entre sistemas de representación. Bajo esta acción, es posible conservar la totalidad o solo parte del contenido, o ampliar el contenido de la representación inicial. De cualquier forma, traducción supone la coordinación entre distintos sistemas de representación, además de existir distintas representaciones dentro de una sistemas, existe pluralidad de sistemas de representación vinculados a un mismo concepto, con lo que la traducción de un sistema a otro se hace imprescindible, ejemplo los cuatro sistemas considerados; verbal, numérico,

[48] Hitt Fernando. (2000) Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. Departamento de matemática educativa. Cinvestav – IPN- México. Pág. 1-15.

gráfico y simbólico) representan el mismo concepto, aunque algunos destacan unos aspectos más que otros.

4) Cristalización o consolidación de relaciones y/o procesos en objetos conceptuales o “entidades cognitivas” los cuales, pueden ser utilizados en relaciones o procesos en un nivel de organización más elevado; un paso más general que la simple traducción entre sistemas de representación supone la formación de relaciones entre objetos de la estructura conceptual considerada. Una vez que consigue la traducción entre todos los sistemas de representación asociados, el concepto surgirá como aquello que tiene en común todas sus representaciones y el campo conceptual de límite habrá cristalizado.

5) Modelización. Este tipo de actividad incluye la construcción y prueba de modelos matemáticos. Supone una traducción entre aspectos de situaciones y sistemas de representación. Aún más general es el hecho de traducir situaciones a uno o varios sistemas de representación, de utilizar la estructura conceptual creada en la mente para modelar determinadas situaciones. La estructura conceptual asociada al límite sirve para modelizar muchas situaciones, por ejemplo: aquellas en las que existe una variación relativa entre magnitudes. [49]

La modelación matemática permite realizar la conexión con las aplicaciones las cuales son una forma de describir ese juego o interrelación entre el mundo real y las matemáticas.

Hans Freudenthal considera que el núcleo básico del currículo en matemáticas en la escuela debe ser el aprendizaje de las estrategias de matematización. El punto de partida de la modelación es una situación problemática real.
Los datos, conceptos, relaciones, condiciones y suposiciones del problema enunciado deben trasladarse alas matemáticas, es decir deben ser matemátizadas y a sí resultará un modelo matemático de la situación original.

El proceso de su resolución, conlleva a sacar conclusiones, a calcular y revisar ejemplos concretos, a aplicar métodos y resultados matemáticos conocidos, como también desarrollar otros nuevos.

---

[49] Romero Isabel, Rico Luís. (1999) Representación y comprensión del número real.- una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA. Vol. 4, No 2. Pág. 117-151;
* Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). “los sistemas de representación en la enseñanza del límite”. revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236

Estos resultados deben ser validados, es decir se traducen de nuevo al mundo real, para ser interpretados en relación con la situación original.

Pueden ocurrir discrepancias en este proceso lo que conducen a una modificación del modelo o a su reemplazo por uno nuevo. Sin embargo, en ocasiones ni siquiera varios intentos conducen a resultados razonables y útiles, tal vez porque el problema simplemente no es accesible al tratamiento matemático desde el nivel de conocimientos matemáticos del que trata de resolverlo; cuando se consigue un modelo satisfactorio este se puede utilizar como base para hacer predicciones acerca de la situación problema real para tomar decisiones y emprender acciones.

Treffers y Gofree describen la modelación como una actividad estructural y organizada donde el conocimiento y las habilidades adquiridas se utilizan para describir regularidades, relaciones y estructuras desconocidas.[50]

La variación está íntimamente ligada a la modelación ya que permite interpretar y atacar un problema:

- Esquematizando.
- Formulando y visualizando un problema de diferentes formas.
- Descubriendo relaciones y regularidades.
- Reconociendo aspectos isomorfos de diferentes problemas.[51]

5.3.3 Sistemas de representación para el concepto de límite y su relación con el pensamiento variacional. Castro y Castro (1977) hacen una revisión bibliográfica sobre la noción de representación y muestran cómo para pensar y razonar sobre ideas matemáticas, es necesario hacer representaciones internas de las mismas (para que así la mente pueda operar sobre ellas), mientras que para comunicar estas ideas se necesitan representaciones externas de las mismas por medio de símbolos. Según Duvall (1993) las primeras se desarrollan al interiorizar las segundas y la diversificación de representaciones del mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto, y en este sentido para Castro y Castro (1997), "dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades".

Sierpinska (1990) propone la comprensión como un acto que está inmerso en un proceso de interpretación y que se desarrolla en forma de dialéctica; lo que

[50] MEN. (1998) Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 77-78.
[51] MEN. (1998) Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 78-79

produce un nuevo conocimiento, ligado a cuatro actos de comprensión (identificación, discriminación, generalización y sistematización) en esa dirección, Castro y Castro dice que los conceptos matemáticos se pueden expresar por varios sistemas de representación "representaciones sinónimas" (Janvier – 1993) que son representaciones diferentes de un mismo objeto matemático, llegando así a los cuatro sistemas de representación que plantean Sonsoles Blázquez y Tomás Ortega; Verbal, numérico, gráfico y simbólico (algebraico – analítico) sobre el concepto de límite de una función.[52]

● Sistema de representación verbal. En una situación de cambio, como la que estamos considerando que es el límite de una función, se presentan ciertas magnitudes que puedan cambiar o no cambiar. Es importante identificar estas magnitudes y la relación que existe entre ellas. La identificación de las magnitudes y la descripción verbal y escrita de la manera como esta magnitud se comportan en la situación. Es el acercamiento cualitativo al fenómeno que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer las primeras predicciones de lo que sucederá con el tiempo. Se espera que en las descripciones de las situaciones de cambio se usen expresiones como: tal magnitud aumenta, tal magnitud disminuye, tal magnitud aumenta más rápido que tal otra, tal magnitud disminuye más lentamente que tal otra, tal magnitud ni aumenta ni disminuye, etc.

Para poder comunicar las observaciones que se hacen de las situaciones de variación se debe disponer de sistemas de representación que sean familiares para el grupo de estudiantes. Uno de estos sistemas es el lenguaje escrito. El estudiante debe ser capaz de escribir con sus propias palabras lo que está sucediendo en la situación de cambio, al igual que las conclusiones que se deduzcan de sus observaciones.

Los dibujos y gráficos son también, medios de representación en las situaciones de variación ya que muestra de otra forma lo que el estudiante entiende acerca de la situación. Estos dibujos y gráficos pueden ser en un comienzo muy concretos y mostrar lo que sucede en diferentes momentos de la situación de cambio.

En sistema entra en juego el uso del lenguaje y en especial el uso de la palabra, la cual es un complejo representativo e incluye cuatro tipos:

La palabra oída, la palabra emitida, la palabra escrita y la palabra leída. De ahí que las representaciones verdaderas se pueden reducir a una imagen visual, que

[52] Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). "los sistemas de representación en la enseñanza del límite". revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.

remite directamente a una cosa y a una forma verbal que propone el sentido de la cosa mediante un concepto.[53]

En el sistema verbal, el concepto de límite de una función en un punto se presenta como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto.

El sistema verbal muestra una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de esta, más vinculada a fenómenos reales, y más próxima al desarrollo cognitivo del alumno de educación secundaria; además las producciones escritas de los alumnos son muy extensas y ricas en matices, lo que ponen en evidencia sus dificultades respecto de la representación verbal.

● Sistema de representación numérico. Aparece cuando se está en capacidad de producir diferentes medidas de las magnitudes involucradas en la situación de cambio. Estos datos numéricos permiten encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables.

Muestra claramente el aspecto de aproximación del límite, sugiere una idea dinámica, local, y vinculada con la realidad (por ejemplo, se puede trabajar la velocidad instantánea como proceso de límite, a partir de la observación de una tabla de espacios recorridos y tiempos) pero muestra una cierta desvinculación de tendencias de X e Y.

La interpretación y elaboración de tabla numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas o de expresiones funcionales, teniendo en cuenta el fenómeno que se refiere, usando software que escriba tablas de valores, hojas de cálculo o estudiando la programación de rutinas numéricas, el registro numérico muestra el mejor de los aspectos de la aproximación. La visión numérica se complementa con la gráfica y, en etapas avanzadas se puede complementar con la algebraica.

● Sistema de representación gráfico. Se hace mediante la representación en un plano con un sistema de coordenadas cartesianas de los datos de la tabla que consigna las mediciones de las magnitudes involucradas. Se puede así mismo producir la gráfica a partir de las expresiones algebraicas que se obtuvieron de la tabla.

Los sistemas de representación gráficos recogen los tipos de representaciones de tipo figurativo, de carácter analógico, cuya sintaxis viene dada principalmente por reglas de composición y convenios de interpretación (Castro y Castro 1997).

[53] Romero Isabel, Rico Luís. (1999) Representación y comprensión del número real.- una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA. Vol. 4, No 2. Pág. 117-151

El sistema gráfico es más estático que el numérico y menos formal que el algebraico, recoge el aspecto visual y ayuda a vincular las tendencias de ambas variable siempre que se entienda la gráfica como vía de relación entre ellas.

Los análisis y descripciones que puede hacer un estudiante de las diferentes representaciones serán de vital importancia en el entendimiento del fenómeno de variación. Por ejemplo; la lectura de una gráfica una tabla o una fórmula, etc; en términos cualitativos, describiendo la forma en que una variable se comporta con respecto a otra y explicando la relación que existe entre las diferentes formas de representación.

Los estudiantes observan por medio de la representación gráfica que el trabajo con los límites no se reduce simplemente a una forma mecánica relacionada con la factorización, con este registro observa primero la argumentación geométrica y luego hace conjeturas acerca de la condición algebraica de las funciones con las que trabaja y más importante aún, determina, el estudiante en forma visual las condiciones geométricas de la función y las vincula con la escritura algebraica de dicha función.[54]

Las actividades de asignación de gráficos a descripciones verbales de características funcionales y en algunos casos a fórmulas, permiten un tratamiento del comportamiento tendencial que obvia en parte disociaciones como las siguientes: el límite cuando x tiende a infinito sea cero se toma como dos tendencias: una de infinito de la y, cuando x tiende a cero y otra al cero de la y cuando x tiende a infinito.

- Sistema de representación simbólico (algebraico – analítico). De acuerdo a los patrones de regularidad encontrados en la tabla se puede establecer expresiones algebraicas que condensan toda la información acerca de la situación de cambio. Las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspectos del comportamiento de las variables relacionadas.

El estudio de expresiones algebraicas en el contexto de la variación contribuye de manera significativa en el desarrollo del pensamiento algebraico, para extraer información sobre el comportamiento de las variables involucradas en la expresión, contribuirá con la comprensión del fenómeno en estudio y será una herramienta para la solución de problemas.

En el sistema simbólico (algebraico analítico), aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de ε y δ que no son otra cosa que los controles de

[54] Saucedo René, Cuevas Machado Francisco, Hernández Luís. (2000) Un estudio de límite de funciones racionales: formas indeterminadas 0/0.

las aproximaciones, o la definición topológica de entornos. Además de éstas se han considerado otras representaciones sinónimas, lógicamente, siempre encaminadas a la concepción del límite como aproximación óptima. El sistema algebraico analítico muestra una concepción formal del límite, un aspecto estático y abstracto. El grado de precisión es inmejorable, si bien muestra poca vinculación con fenómenos reales.

5.4 DIFICULTADES ENCONTRADAS EN EL APREDIZAJE DEL CÁLCULO.

Dentro de las investigaciones de M. Artigue, se consideran tres grandes tipos de dificultades evidentes en el aprendizaje del cálculo:

- Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones)[55] y el hecho de que estos objetos se conceptualizan plenamente cuando se inicia una enseñanza del cálculo que va a contribuir de forma fuerte a tal conceptualización.
- Aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite, centro del campo del cálculo.
- Aquellas vinculadas con las rupturas necesarias con relación a los modos de pensamientos puramente algebraicos, muy familiares, y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo.

En cuanto a la primera categoría se tiene que cuando se inicia la enseñanza del cálculo, los números reales y las funciones no son objetos que los estudiantes desconocen del todo. El cálculo con los números irracionales, las situaciones funcionales ligadas a las funciones lineales y afines se trabajan también a lo largo de la enseñanza secundaria y media[56.] Pero se trata de objetos "en construcción" que no se pueden considerar "inertes" a medida que se efectúa el aprendizaje del cálculo, y el cálculo se convertirá en uno de los motores de su conceptualización.

Con los números reales numerosas investigaciones muestran, por ejemplo, que, para los estudiantes, las relaciones existentes entre los diferentes conjuntos de números distan de ser claras. Si para los estudiantes, R comprende categorías diferentes de números (los enteros, las fracciones, los decimales, los números que se expresan con radicales y otros tales como π, $\sqrt{2}$, e) todas estas categorías tienden a confundirse en la asociación entre número real y número decimal (con un número decimal reducido) esto tiende a reforzarse con el uso de las

[55] Esta organización del campo en torno a la noción de función non es nada novedoso ya que se encuentran en el trabajo de Euler "Introductio in analysim infinitorum", de 1748
[56] MEN (2003). Estándares curriculares para la educación (matemáticas). Grados 9, 10, 11. Bogotá – Colombia.

calculadoras[57]. De igual manera, si hay asociación de los reales con la recta numérica, esta asociación no corresponde necesariamente con la visión del continuo numérico.

En lo concerniente a las funciones, se han detectado dificultades con la identificación de lo que en verdad es una función. Varias investigaciones han mostrado la brecha existente entre las definiciones dadas por los estudiantes, de un lado, y los criterios utilizados en las tareas de reconocimiento de objetos funcionales o de clasificación de funciones y no funciones dadas en registros diferentes (numéricos, gráficos, algebraicos, simbólicos) es decir la definición de función no está organizada en torno a la concepción de la noción de función, sino alrededor de prototipos comunes encontrados, de la asociación entre función y fórmula o de la asociación función-curva regular y estos criterios dependen mucho del registro de representación utilizado.

También se han encontrado dificultades para articular los diferentes registros simbólicos de las expresiones de noción de función; junto con las dificultades cognitivas que son reales en las conversiones de un registro a otro.[58]

En los últimos años se han desarrollado numerosos trabajos que han estudiado las posibilidades que ofrecen las herramientas informáticas, bien sean calculadoras gráficas o computadores, con capacidad para presentar varios tipos de representaciones.

A partir de 1998 el MEN (Colombia) a través de su proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías (NT´s) al currículo de matemáticas inicia un proceso sistemático que intenta subsanar los errores pasados, acerca de las posibles causas que provocan dificultades en los estudiantes en el aprendizaje de los conceptos matemáticos. A este proceso se ha vinculado el instituto educativo INEM – Pasto, sin embargo como lo afirman los responsables de este proyecto el éxito o fracaso de cualquier proyecto depende del grado de efectiva participación de sus integrantes; entendiendo esto como la capacidad de influir en la toma de decisiones, además una buena asimilación de los conceptos y una buena base teórica permitirá una buena práctica con estas herramientas tecnológicas.[59]

Si bien algunos de estos resultados son alentadores hay que reconocer también que las investigaciones ponen al descubierto fenómenos de adaptación perceptiva

[57] Números como π, $\sqrt{2}$, e son ejemplos frecuentes de números que se identifican con aproximación decimal que de ellos hace la calculadora.
[58] Trabajos de R. Duvall. Nociones de Variables. www. Google + artículos académicos + “Trabajos de R. Duvall.”
[59] Soto Oscar Fernando, Narváez Oscar. (2004) La calculadora en el Aula. Editorial Universitaria. Pasto – Colombia.

global, cuya corrección y profundidad matemática no son fáciles de controlar y cuya capacidad de transferencia a otros ambientes no es evidente.[60]

En la segunda categoría que nos habla de las dificultades asociadas con la conceptualización de límite, investigaciones han demostrado que estas concepciones son muy dependientes de una "geometría de la forma" que no obligan a identificar con claridad sobre cuáles de estos objetos con exactitud se lleva a cabo el proceso de límite y la topología subyacente. Esto causa dificultades en la precisión del juego sutil entre el contexto numérico y el contexto geométrico que subyace al proceso de límite, e introduce o refuerza convicciones erróneas, como la creencia que si "geométricamente" un objeto tiende hacia otro, todas las magnitudes que le están asociadas tendrán por límite valores correspondientes a las magnitudes del objeto límite.[61]

Esto provoca una serie de obstáculos epistemológicos sobre la concepción del límite, entendiéndose el obstáculo no como dificultades desorganizadas o derivadas de ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos.

En los trabajos sobre límites también se pueden considerar estudios que, con base o no en un enfoque histórico identifica las dificultades relacionadas con el doble estatus operacional y estructural del límite, lo cual se traduce en la dificultad de separarse de una versión del límite en simples términos de proceso para disociar con claridad el objeto límite del proceso que ha permitido construirlo, para dotarlo de una identidad propia. Por ejemplo estudiantes de una investigación realizada por Tall confunden a 0.999 y a 1 como el mismo objeto, no detallan que el primero es un proceso y el segundo es ya un objeto matemático definido.

En fin, no se puede dejar de subrayar las dificultades de la formalización estándar de la noción de límite. Por un lado esta formalización funciona como un todo indivisible, mientras que por el otro, el estudiante tiende a considerarlos como dos procesos distintos: uno que se efectúa sobre la variable y el otro sobre los valores de la función.

A pesar de la introducción de un enfoque intuitivo al cálculo y del deseo de que cuando se introduzca la formalización, esta responde a las necesidades en

[60] Al respecto se puede hacer referencia a trabajos como: Scharwz 1989; Dagher 1993, Schoenfeld 1990
[61] en un estudio detallado, A. Sierpinska (1985) clasifica los obstáculos que encontró en 5 categorías: "horror infiniti" que agrupa el rechazo al status operacional que permite el paso al límite, además de los obstáculos asociados con la noción de función, obstáculos geométricos, lógicos y simbólicos.

realidad sentidas por los estudiantes, la enseñanza no logrará construir ese sentido fácilmente.

En la tercera categoría de las dificultades asociadas a la ruptura del álgebra/cálculo, nos dice que el cálculo es un dominio donde la actividad matemática se apoya bastante en las competencias algebraicas. Pero al mismo tiempo es un dominio donde se necesita de una ruptura con una cierta cantidad de prácticas algebraicas para acceder a él. Por lo tanto, hay que subrayar que, si la ruptura numérico-algebraica se identificó de forma clara en las investigaciones sobre el aprendizaje del álgebra, la ruptura álgebra-cálculo, por el contrario, se ha trabajado muy poco en investigaciones sobre el aprendizaje del cálculo.

La ideología tradicional de la enseñanza no ayuda a los estudiantes a tomar conciencia de estos cambios que conducen a minimizar las rupturas y a mantener la ficción de un aprendizaje progresivo y continuo.

De igual modo esto es difícil porque los modos de razonamiento que subyacen a este trabajo son nuevos para los estudiantes y porque las técnicas matemáticas de trabajo son delicadas. Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.

En esto hay todo un juego sutil que supone una familiaridad con las expresiones y con los órdenes de tamaño respectivos que no pueden aprenderse sino en largo plazo.[62]

Con esto también se mide la distancia que va a separar necesariamente la capacidad de restituir las definiciones formales, aún si las ilustran de forma inteligente con imágenes que muestran una cierta comprensión, de la capacidad de operacionalizar estas definiciones en el tratamiento de un problema preciso.

5.5 DIFICULTADES PRESENTES ENTRE LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

Tall y Vinner (1981) detectaron en sus estudios “Concept image and concept definition” que las dificultades que surgen entre los diversos sistemas de representación para un mismo objeto o concepto matemático se explican en las deficiencias en sus formas de articulación, enfatiza sobre la importancia de las conexiones, los aspectos de proceso y de conversión entre representaciones,

[62] F.Praslon, en su tesis de maestría en 1994, analiza de manera minuciosa todo el trabajo conceptual y técnico que se pone en juego al inicio de un curso de cálculo en la universidad y evidencia las rupturas existentes con el funcionamiento de un cálculo de tipo algebraico

Duvall(1988) nos explica que la dificultad del paso de un sistema de representación o de un registro tiene que ver con el desarrollo de la habilidad para distinguir las variables en cada representación.[63]

En cuanto a cada uno de los sistemas de representación se han identificado las siguientes dificultades:

- Dificultades presentes en el sistema de representación verbal del concepto de límite.

La utilización de representaciones verbales para trabajar el concepto de límite choca con las dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. Cornú (1983) señala distintas concepciones que los alumnos tienen de tendencia y de límite, muchas de ellas influenciadas por su uso en otros contextos: a la expansión "tender a" asocia las ideas de aproximarse, aproximarse sin llegar, aproximarse hasta que se alcance y semejanza (sin variación, como en la expresión "este azul tiende a violeta"), mientras que junto a la palabra límite aparecen las ideas de punto al que uno se acerca sin alcanzarlo, punto al que uno se acerca y alcanza, máximo ó mínimo, lo que viene "inmediatamente después" de lo que se puede alcanzar, restricción y fin.[64]

- Dificultades presentes en el sistema de representación numérica del concepto de límite.

El concepto de límite de una función en un punto dentro del registro numérico, se trata como un proceso de tendencia en una tabla de valores e imágenes de éstos, en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés. Resulta muy difícil que el alumno adquiera el concepto de límite si este sólo se trabaja en el sistema numérico, por lo que es necesario complementar dicho concepto, al menos con una visión gráfica. Cuando se trabaja el cálculo de errores con expresiones numéricas se presupone que dichos cálculos son mucho más sencillos que cuando ase trabaja con expresiones algebraicas o gráficas de una función; sin

---

[63] Hitt Fernando. (2000) Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. Departamento de matemática educativa. Cinvestav – IPN- México. Pág. 1-15

[64] Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). "los sistemas de representación en la enseñanza del límite". revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.

embargo el sistema numérico se ve limitado, ya que una tabla no proporciona suficientes valores para comprobar que un número es el límite de una función.

● Dificultades presentes en el sistema de representación gráfica del concepto de límite.

En el sistema gráfico, el límite se representa como un punto del eje OY, tal que: a todo segmento que le contiene le corresponde otro entorno al punto de interés que se proyecta. El sistema de gráfico de representación tiene evidentes limitaciones (no se puede observar "toda la gráfica a la vez"), e incluso, muchos alumnos no comprenden el significado de la gráfica como forma de relacionar dos magnitudes, confundiéndola con un dibujo. Por tanto es necesario considerar además representaciones numérica e incluso la representación algebraica, que tiene menos limitaciones, aunque es mucho más abstracta, sin embargo el excesivo dinamismo que sugiere la definición de límite como aproximación óptima en el sistema numérico se atenúa utilizando el registro gráfico, que sugiere menor dinamismo, y se pasa a una representación estática al traducir dicha definición al sistema algebraico.

La expresión gráfica impide en algunos casos que sea comprendida la lateralidad del límite, pues los alumnos asocian la tendencia a un movimiento por la recta; así por ejemplo, tender por la derecha suele asimilarse a la tendencia al infinito. Relacionar esta tendencia gráfica con la numérica evita esta identificación errónea.

● Dificultades presentes en el sistema de representación simbólico (algebraico – analítico) del concepto de límite.

La multitud de errores que cometen los alumnos en las manipulaciones algebraicas, constituyen uno de las mayores dificultades para la comprensión del concepto, por lo que es necesario un trabajo previo de tipo numérico y gráfico para que les ayuden a captar la idea de límite. Además, las representaciones formales(a través de la programación o el uso de los manipuladores simbólicos) donde los objetos se manipulan a través de definiciones y no de descripciones, y que constituyen el Análisis matemático. [65]

El símbolo para el concepto de límite es resultado de una nueva abstracción, la cual es composición de otras ya conocidas y que son, por tanto, objetos concretos

[65] Artigue Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia. Pág. 97-140

para el estudiante. El símbolo Lim $\chi \rightarrow p$ de *f(x)* es igual a, evoca la noción abstracta de límite de la función f cuando $\chi \rightarrow p$. La cual a su vez, ha sido expresada en términos de una definición mediante un lenguaje convenido, construido por un sistema de símbolos. El símbolo además de recordar los elementos esenciales de la noción y sus relaciones, permiten cosificar los conceptos facilitando su manipulación y por medio de ella obtener nuevas abstracciones, la capacidad de simbolizar el concepto es un buen indicativo del nivel de comprensión de la noción [66], sin embargo la definición formalizada del concepto de límite ha hecho que: se presente a los alumnos un exceso de simbolismo, al hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber lo que se está haciendo (formalismo prematuro) y a olvidar que, para comprender un concepto matemático, son necesarias situaciones de referencia que le den sentido y al mismo tiempo que permitan descubrir las relaciones con otros conceptos.[67]

En experiencias investigativas se ha observado que usualmente el eje organizador tanto de los conceptos teóricos que se desarrollan en los textos, como del aprendizaje del alumno, es la estructura formal bajo la cual se construyen los conceptos de la disciplina.[68]

En la enseñanza tradicional de este concepto es fácil observar a profesores que indican a sus alumnos que para obtener un límite es suficiente evaluar la función en el valor al cuál tiende el límite, por otra parte otros profesores ven el límite de una función con la definición ε y δ, en la forma tradicional se sigue la pauta, por muchos de nosotros conocida para abordar límites, se hace una presentación formal del concepto en cuestión dando la definición informal, luego se dan algunos ejemplos, clasificándolos por formas, dificultad, estrategias de solución, etc.[69]

5.6 PRECONCEPTOS BASICOS PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN.

En primer lugar se comentará que se entiende por preconceptos en el aprendizaje matemático, pues bien, desde el punto de vista de Ausubel, la manera de aprender, tomando decisiones, en forma consciente, facilita y hace posible el aprendizaje significativo, ya que se promueve que los alumnos relacionen lo que ya saben con la nueva información, decidiendo cuales son los procedimientos más adecuados para realizar dicha actividad, lo que les permite además aprender

[66] Delgado Cesar Augusto. (Mayo 1994) Sobre la enseñanza del concepto de límite. Universidad del Valle. Vol. 3 No 2. Revista Matemáticas – enseñanza universitaria
[67] Font Vicenç. (2003) Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la educación matemática. Boletín de asociación matemática venezolana. Vol. 10. No 2. Pág. 249 – 279.
[68] De Torres Mónica. (2000) Algunas Pautas didácticas para la introducción del concepto de límite finito. Revista EMA, Vol. 6, No 1. Pág. 40-55
[69] Hitt Fernando. (1998).Visualización matemática – representaciones, nuevas tecnologías y currículo.

cuando y por qué puede utilizarlos y cuales son sus beneficios. Estos conocimientos previos, también llamados "declarativos" por cuanto pueden declararse mediante el lenguaje oral, no son suficientes. Los alumnos también necesitan recuperar los conocimientos "procedimentales" es decir, aquellos ligados a la acción o ejecución necesarios para medir distancias, para dibujar objetos, o para escribir la simbología.[70]

Romberg y Tufte proponen un enfoque que tenga en cuenta las concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas; según ellos, la concepción más difundida es considerar las matemáticas como una colección estática de conceptos y habilidades que deben ser dominadas unas con otras, este proceso sé da en el salón de clase con el aprendiz tratando de hallarle sentido a la información recibida, evaluándola, conectándola y organizándola con respecto a sus experiencias anteriores y a la estructura de conocimiento que posee en ese momento.[71]

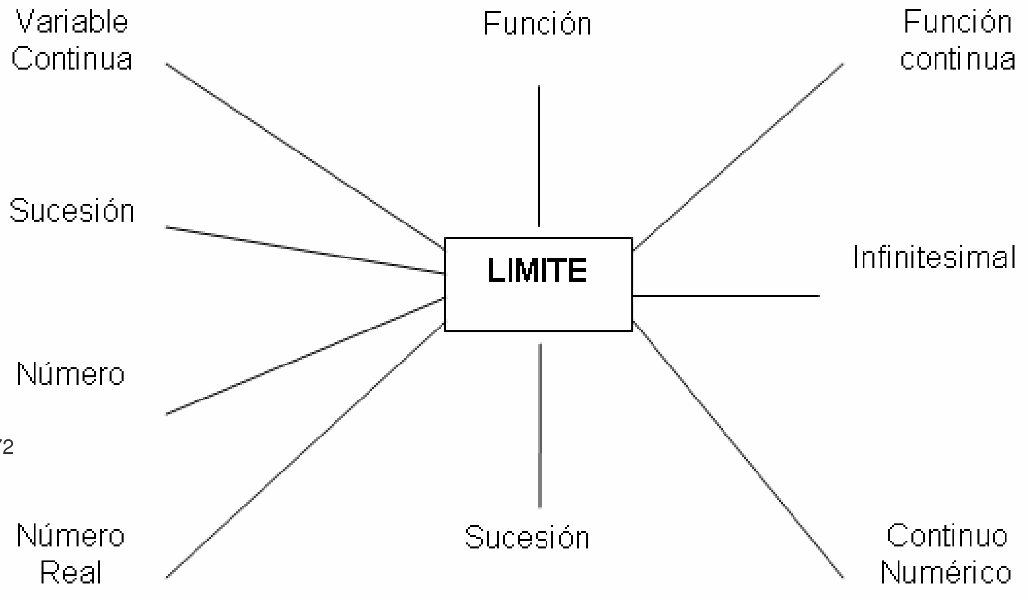
En general un estudiante que inicia el estudio del cálculo debe tener una formación sólida en los conceptos de Factorización, racionalización, simplificación y desarrollo de expresiones algebraicas, dominar las técnicas de acotamiento mediante desigualdades y sobre todo dominar la teoría básica de funciones y operaciones con funciones. Con respecto a este último aspecto debe conocer las funciones elementales básicas; como función lineal, función cuadrática, funciones trigonométricas, función exponencial y logarítmicas y dominar las propiedades básicas de dichas funciones.

Michèle Artigue considera como elementos esenciales en el cálculo: los números reales y las funciones, así como también la variabilidad y la noción de límite.

A continuación se plantea un esquema donde se relaciona los diferentes conceptos que intervienen en la enseñanza aprendizaje del límite de una función:

[70] Vázquez Cobo Manuela. (2004) la teoría del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas. Ministerio de Educación nacional. Chile. Unidad de currículo y evaluación. Artículo Revista red Escolar. Chile. Versión en Internet. http //: www. rmm.cl./bitácora/vista_resumen.php?proy_ccod=37

[71] Ferrini – Mundi, Geuther Joan. (Mayo de 1993) La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza, desarrollo curricular. Una perspectiva. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol. 3 No 1. Pág.53-69



[72]

5.6.1 Dificultades encontradas en algunos preconceptos, básicos para el aprendizaje del concepto de límite de una función.

- Asociadas a los números reales. Diferentes investigaciones muestran claramente que las concepciones de los números reales que desarrollan los estudiantes, no son apropiadas para el aprendizaje del cálculo (Robinet 1986). Sus criterios de distinción entre los diferentes conjuntos de números quedan flojos y muy dependientes de las representaciones semióticas elegidas (Munyazikwiye, 1995). Además de esto, el uso creciente y poco controlado por la enseñanza de las calculadoras tiende a reforzar la asimilación: Número real es igual a número decimal e incluso a un número decimal con menos de diez cifras decimales.

Cuando se empieza la enseñanza del cálculo, los números reales son objetos algebraicos, los estudiantes saben bien que su orden es denso, pero, según el contexto, pueden conciliar esta propiedad con la existencia de número precedente y sucesor de un real dado (ejemplo considerar que 0.999... se percibe a menudo como el predecesor de 1).[73]

En el caso del concepto de número real, los sistemas de representación simbólica, los sistemas de representación gráfica juegan un papel clave puesto que permiten expresar las ideas y las relaciones constitutivas de dicho concepto y tienen un uso aceptado y establecido, se maneja el sistema de notación decimal y el modelo de la recta respectivamente.[74]

---

[72] Medina Ana Cecilia. (2003) Concepciones Históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá – Colombia.
[73] Artigue Michèle (1988) Revista Relime Vol. 1 No 1.
[74] Romero Isabel, Rico Luís. (1999.) Representación y comprensión del número real.- una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA .Vol. 4, No 2. Pág. 117-151

● Asociadas a las Funciones. Diversos investigadores han estudiado cómo entiende el estudiante el concepto de función, el concepto de función es fundamental en el cálculo; a pesar de ello, los estudiantes llegan al curso de cálculo, con una comprensión muy primitiva del concepto y de concepciones erróneas firmemente arraigadas. Para ellos una función es una fórmula. Para la inmensa mayoría de los estudiantes que inician los cursos de cálculo una representación gráfica sin fórmula carece de significado. Además su concepto de función es estático en cuanto consideran la función pensando en un punto cada vez.

A partir de entrevistas con estudiantes de álgebra, Dreyfus y Eisemberg establecieron otros hechos relacionados con el concepto de función en los estudiantes. Primero una fuerte subordinación al simbolismo. Segundo, una fuerte atracción por la linealidad que nos lleva a tratar funciones generales como si fueran lineales. La idea de que una relación es una función solamente si se puede encontrar una sola fórmula que la represente. Finalmente, la tendencia a ver los datos algebraicos y los gráficos como independientes unos de otros.

Existe poca evidencia de que los estudiantes consideren las funciones como objetos de estudio de las matemáticas; más bien cuando se da una función en forma de ecuación se espera que se haga con ella algo, tal como reemplazar algún valor. Esta parte del estudio de funciones, la sustitución de valores parece grabado en el estudiante y se convierte en su forma de trabajar otros conceptos del cálculo, tal como el de límite. [75]

● En el álgebra y sus relaciones con el pensamiento variacional. El álgebra es un tema central del currículo central en el que existe una tradición en cuanto a su enseñanza y aprendizaje. Diversos estudios (Kieran 1992) muestra que los estudiantes no están logrando una formación matemática adecuada en este tema. El estudio del álgebra debe ser, entre otras cosas, la base para el inicio del estudio de las funciones como herramienta de modelaje de situaciones reales, es así como el precálculo, área que profundiza en el estudio de funciones, sirven de base para desarrollar dos aspectos centrales en la formación matemática del bachiller: su capacidad

[75] Ferrini – Mundi, Geuther Joan. (Mayo de 1993) La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza, desarrollo curricular. Una perspectiva. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol. 3 No 1. Pág.53-69

para modelar situaciones y fenómenos reales y su capacidad y conocimiento para enfrentar los problemas del aprendizaje del cálculo. (MEN 2003); el pensamiento variacional es quien permite la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos, permite además en el estudiante formarse progresivamente en una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollarse en su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas.

Desarrollar en ellos la capacidad de analizar el cambio en varios contextos y de utilizar modelos matemáticos para entender e interpretar relaciones cuantitativas. En particular los sistemas analíticos provienen del análisis matemático donde sus objetos son las funciones quienes permiten pensar en forma variacional.

Martín Socas señala que: Las dificultades que se presentan en el álgebra no son tantas dificultades del álgebra misma sino errores que quedan sin corregir en la aritmética y que luego se traducen erróneamente en el campo algebraico.

La poca comprensión de lectura entre el lenguaje cotidiano y matemático y viceversa, genera diversas interpretaciones de los símbolos y las letras.

En el álgebra las letras aparecen con los símbolos que pueden significar cualquier clase de objetos, lo que puede considerar diferentes tipos de álgebra: álgebra de conjuntos, de funciones, etc.[76]

El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas. El significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación de la vida práctica.

Sin obedecer a una clasificación excluyente los procesos presentes en toda la actividad matemática tienen que ver con:

- La resolución y planteamiento de problemas.
- El razonamiento.
- La comunicación.
- La modelación.
- La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.[77]

---

[76] Mena Mónica y Moreno Eduardo.(1997) Aproximaciones al concepto de Variable. Revista EMA., Vol. 3, No 1, pág. 53-63.
[77] MEN (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia.

La elección de estas representaciones y de los conceptos previos que se deben tener presente para la enseñanza aprendizaje del concepto de límite supone que de alguna manera se articulen eficazmente para que el estudiante logre captar (una visión muy ambiciosa) la importancia del concepto de límite, su utilidad y su esencia, y también alcance lo exigido por los estándares curriculares actuales en el área de matemáticas.

"Al terminar el undécimo grado, el programa de matemáticas que los estudiantes hayan completado de acuerdo con el currículo implementado en cada institución, deberá garantizar, como mínimo, los siguientes estándares (en el concepto de límite)".

- Analiza las propiedades de la gráfica de una variedad de funciones en el plano cartesiano.
- Explora las distintas maneras de representar una función (tablas, gráficas, etc.)
- Utiliza con propiedad una calculadora graficadora para trazar y analizar gráficas de funciones y sus diversas transformaciones.
- Explora y comprende el concepto de límite de una sucesión y de una función
- Desarrolla las propiedades del límite de una función y calcula el límite de una variedad de ellas.
- Investiga y comprende límites infinitos y en el infinito.[78]

Por tanto nuestro trabajo pretende contribuir en la búsqueda de mejoras para la enseñanza del cálculo en particular del concepto de límite, detectando algunas de las dificultades que en él existen y así en conjunto con los docentes interesados en este esfuerzo buscar alternativas metodológicas, para la mejoría de ellas.

[78] MEN (2003). Estándares curriculares en matemáticas – Grado once (secundaria). Bogotá Colombia

6. METODOLOGÍA

La metodología está estructurada en cuatro partes: En la primera, se sustenta el enfoque de la investigación; en la segunda, se hace una breve descripción al proceso de la selección de la unidad de trabajo; en la tercera, se enuncian los instrumentos de recolección de información explicando cada uno de los propósitos y su estructura, y en la cuarta, se desarrolla cada etapa de la investigación.

6.1 ENFOQUE INVESTIGATIVO.

El trabajo de investigación se enmarca dentro del enfoque cualitativo , puesto que, a través de la observación, la aplicación de encuestas, test, la interacción y la interpretación de los registros de trabajo, se identifico las dificultades que tienen los estudiantes frente al aprendizaje del concepto de límite de una función; además para la interpretación de algunos resultados de los test aplicados se tuvo en cuenta datos estadísticos por lo que no se desecha por completo el enfoque cuantitativo.

Por ser cualitativa, se fundamenta en los enfoques estructural, sistémico, gestáltico y humanista, propios de la epistemología post positivista; se propone comprender cómo los actores interpretan y construyen sus propios significados en una situación dada. El objeto de estudio está dentro de un acontecimiento o una organización, que se da en su integridad fenomenológica y en su dinámica existencial. Todo esto, para una adecuada comprensión de la realidad educativa sobre las dificultades que el estudiante manifiesta en el aprendizaje del concepto de límite de una función.

Adopta inicialmente una actitud exploratoria y de apertura mental para comprender los procedimientos que siguen los estudiantes en desarrollo del concepto de límite a partir de sus diferentes formas de representación y así identificar algunas de las dificultades ya sea del concepto como tal o de los procesos que se efectúan para su cálculo donde juegan un papel muy importante los preconceptos.

Estas percepciones y significados dependen de su formación individual, expectativas, actitudes, creencias, necesidades, intereses e ideales. Como dijera Miguel Martínez: “Todo conocimiento es conocimiento personal”.

6.2 UNIDAD DE TRABAJO.

Para el estudio se selecciono la sección once uno de educación media de la institución educativa INEM - Pasto (año lectivo 2005 – 2006), jornada de la mañana, cuyas edades de los estudiantes oscilan entre los 16 y 17 años, el motivo para la selección de este grupo se debe a que estos estudiantes miran por primera vez el concepto de limite de una función, atendiendo a los lineamientos del Ministerio de Educación Nacional y al programa curricular de matemáticas de la institución para los grados undécimos; además el uso de las nuevas tecnologías que se maneja (TI 92 – Computador) como nueva propuesta metodológica para la enseñanza de este concepto nos permitieron ver con mas detenimiento el desarrollo de dicha temática al paso por sus diferentes formas de representación.

6.3 INSTRUMENTOS.

6.3.1 Encuesta. La encuesta, conformada de siete preguntas tanto abiertas como cerradas (Ver Anexo B), se aplicó a cinco docentes del colegio INEM – Pasto, encargados de la asignatura de matemáticas en los grados undécimos. Se la aplicó en el mes de abril del año 2006.

Esta encuesta tuvo como propósito indagar acerca de los diferentes sistemas de representación que son utilizados por los docentes para el tratamiento del concepto de límite de una función, como también para ver las relaciones que mantienen estos sistemas con los ya mencionados en algunos estudios consultados.

Otro de los propósitos de esta encuesta fue el de identificar las diferentes dificultades que ha encontrado el docente en sus alumnos en el proceso de enseñanza aprendizaje del concepto de límite.

De la encuesta aplicada se seleccionaron cuatro preguntas de las cuales dos de ellas dieron una información concreta de los sistemas de representación que el docente conoce y utiliza, así como los procesos con los cuales trabaja. Las dos restantes nos brindaron una primera aproximación acerca de las dificultades develadas por los estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite de una función.

6.3.2 Test para los estudiantes. Con base a los criterios y pruebas de evaluación del ICFES del año 2005 (marzo) y del año 2006 (abril), en test elaborados por investigaciones ya realizadas y contenidos en guías de trabajo (11-1) 79se planteó al estudiante dos pruebas:

---

[79] PRUEBAS ICFES (ENSEÑANZA MEDIA) AÑOS 2005 – 2006 – MATEMÁTICAS.
*Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). "los sistemas de representación en la enseñanza del límite". revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.
*Jaramillo Carlos Mario, Duarte Pedro Vicente y otros. (2003)Aspectos de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. IX Encuentro ERM – USCO. Neiva – Septiembre. Colombia.

● La primera prueba (ver anexo C), estuvo relacionada con los conocimientos previos para abordar el concepto de límite de una función. Tuvo su aplicación el 16 de mayo de 2006; con un tiempo de 60 minutos.

Con base en las diferentes investigaciones encontradas, se observó que para el tratamiento introductivo al concepto de límite es necesario tener en claro ciertos preconceptos entre los más importantes están el de número real, el de función y los procesos algebraicos.

Teniendo en cuenta lo anterior se eligieron para el estudio preguntas que representen estos conceptos en sus diversos registros (sistemas de representación).

Las dos primeras preguntas estuvieron enmarcadas dentro de los números reales (fracción continua, ubicación en la recta numérica).[80]

Las siguientes tres preguntas dejaron ver el estado cognoscente de los estudiantes frente al concepto de función, en cuanto al manejo de sus elementos principales, el reconocimiento en sus principales sistemas de representación y como manejo útil para la interpretación de situaciones.

La última pregunta en cuanto a los preconceptos reunió las dos intencionalidades anteriores, esta vez presentando el número real y la función en situaciones diferentes, esto permitió analizar el alcance de sus conocimientos previos y sus dificultades.

● La segunda prueba (ver anexo D), se elaboró con el objetivo de analizar que tipo de dificultades presenta el estudiante una vez que se haya desarrollado el concepto de límite de una función. Tuvo su aplicación el 25 de mayo de 2006; con una duración de 60 minutos.

Esta prueba se realizó al terminar el desarrollo de la temática del concepto de límite en el curso seleccionado. De las observaciones tomadas en clase, el estudio hecho a las diversas guías de trabajo y teniendo en cuenta los trabajos investigativos consultados[81] acerca de las dificultades en el aprendizaje del concepto de límite se diseñó el test en el siguiente sentido:

---

* Erazo Humberto, Narváez Oscar. (2006) Guías de trabajo. Grado once. INEM – Pasto. Colombia.

[80] Romero Isabel, Rico Luís. (1999) Representación y comprensión del número real.- una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA. Vol. 4, No 2. Pág. 117-151

[81] Ver Anexo D

Antes de ello se introdujeron en el análisis de este test las dos últimas preguntas del primer test, la razón obedece a que estas situaciones pertenecen a la temática del limite de funciones; la pregunta 7 del primer test tuvo la finalidad de analizar la manipulación algebraica de la expresión de la función dada para calcular el límite que se le pide.

La pregunta 8 de este mismo test, buscó analizar como el estudiante interpreta la representación gráfica de las tendencias en el cálculo del límite para la función dada en cuanto hacia la tendencia al infinito y hacia un punto.

La primera pregunta del segundo test se ubica dentro de los sistemas de representación numérico, gráfico y simbólico (algebraico – analítico) en el concepto de límite de una función, para ello se le planteó diversas situaciones acerca del crecimiento de la población en tres bacterias en las cuales los estudiantes analicen los valores al cual se aproxima el límite.

En el primer sistema (numérico) se pretendió que el estudiante observe el comportamiento tanto en la variable independiente como en la dependiente y de acuerdo con esta información conteste las preguntas; en el segundo sistema (gráfico) se le presentó al estudiante una situación gráfica la cual modela el crecimiento de la bacteria respectiva, en ella debió analizar el comportamiento gráfico, y en el último sistema (simbólico) está la representación algebraica de la bacteria respectiva donde el estudiante debió analizar su comportamiento teniendo en cuenta las características propias de esta expresión (dominio, continuidad, procesos de racionalización) y de acuerdo con dicha información dar respuesta a las preguntas que se le plantearon.

La segunda pregunta tuvo la misma finalidad de la anterior, es decir, aquí se le planteó una situación la cual vincula el uso del sistema de representación numérico para una función y de igual manera que en la bacteria A de la primera pregunta, con la valoración y comprensión del estudiante, responda a las preguntas que se le plantearon.

La tercera y cuarta pregunta de este test pretendieron explorar en el estudiante los conceptos elaborados en cuanto al comportamiento asintótico de una función, sus incidencias en el cálculo del límite y su comportamiento general analizando la tendencia hacia el infinito, todo ello utilizando el sistema de representación gráfico.

La sexta pregunta pretendió observar como el estudiante traduce o realiza las transiciones respectivas de una misma situación (usando las funciones) recurriendo a los sistemas de representación verbal (implícito en el enunciado de la pregunta), gráfico y simbólico (expresión algebraica de la función) para darle respuesta y analizar las dificultades acaecidas en estos procesos.

La séptima y última pregunta se realizó con el fin de obtener de primera mano las ideas que ya ha formado el estudiante con respecto a elementos que están dentro de la temática del limite de una función, tales como; su aproximación a la definición del mismo, cuándo su valor es determinado, cuándo es indeterminado, y cuándo el límite no existe, esto nos ofreció herramientas para el análisis respectivo interpretando las diferentes afirmaciones de los estudiantes y relacionando éstas con nuestro marco teórico.

6.3.3 Observación de clases (grabación de video). Durante todo el proceso de investigación, se observó detenidamente cada una de las clases desarrolladas por el docente encargado del curso; tomando nota de los aspectos más relevantes y significativos para el desarrollo de la investigación, se efectuó grabaciones en video de algunos de los procesos realizados por los estudiantes para calcular el limite de funciones teniendo en cuenta los diferentes sistemas de representación; con el fin de detectar algunos detalles que se escapan de la observación directa.

6.3.4 Registros de los estudiantes. Los registros de los estudiantes son las evidencias escritas que permitieron observar los procedimientos que utilizaron en el momento de desarrollar un ejercicio sobre el cálculo de límites, propuesto por el docente o por los test planteados en esta investigación.

6.4 ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología contemplo dos etapas estructuradas en fases transversales.

6.4.1 Primera etapa: Sensibilización con la problemática. Para esta etapa se identifican tres fases: revisión conceptual, aplicación de la encuesta y aplicación de los test.

6.4.1.1 Revisión conceptual. La revisión conceptual se llevó a cabo durante todo el proceso de investigación se centró sobre los sistemas de representación utilizados para la enseñanza del concepto de limite de una función y sobre las dificultades que manifiestan los estudiantes en el aprendizaje de esta temática.

Esta fase nos proporcionó unas ideas desde la perspectiva teórica de algunos autores y sobre algunas investigaciones existentes en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función resaltando las dificultades que manifiesta el estudiante.

Lo anterior nos brindó un soporte teórico para contrastar lo encontrado en el aula de clases y lo que afirman algunos autores frente al tema de estudio.

Esta fase, presente en todas las etapas, permitió construir los instrumentos de recolección de información tales como la observación en video (como testimonio fiel y real), las encuestas dirigidas a los docentes, y los test aplicados a los estudiantes.

6.4.1.2 Construcción y aplicación de la encuesta. La encuesta a docentes fue elaborada por los investigadores: se la aplico a 5 docentes del colegio INEM Pasto, encargados de la materia de matemáticas en los grados undécimos, estas fueron recepcionadas en su totalidad.

6.4.1.3 Construcción y aplicación de test. Se aplicaron dos test en dos momentos diferentes, así:

a) Primer test. Fue elaborada y aplicada por los investigadores, a 42 estudiantes de manera usual, con el objeto de identificar el nivel de conocimiento, en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función; entre los mas relevantes están: numero real, funciones y procesos algebraicos.

b) Segundo test. Fue elaborado y aplicado por los investigadores, a 35 estudiantes; se lo realizó en un campo abierto fuera del salón de clases, el objeto fue identificar las dificultades que manifiestan los estudiantes al realizar el cálculo de límites teniendo en cuenta los diferentes sistemas de representación.

6.4.2 Segunda etapa: Análisis de la información obtenida. En esta etapa se llevó a cabo el análisis concreto de la realidad encontrada en el aula de clases de la sección once uno del colegio INEM - Pasto frente a las dificultades encontradas en cuanto al aprendizaje del concepto de límite de una función.

En primer lugar se analizaron las diferentes opiniones de los docentes a través de la encuesta formulada, seguido a esto se analizaron las dos pruebas realizadas a los estudiantes tanto en los preconceptos como en el desarrollo en pleno del concepto de límite; complementando estos análisis con las observaciones hechas en el aula de clases.

7. ANALISIS DE LOS RESULTADOS

7.1 ANALISIS DE RESULTADOS DE LA ENCUESTA APLICADA A LOS DOCENTES.

Como se comentó en la metodología de este estudio, la encuesta que se efectuó a los docentes responsables de la asignatura de cálculo en esta institución, pretendió conocer los sistemas de representación para la enseñanza del concepto de límite que dichos profesores manejan y desarrollan en el ejercicio de sus clases.

Los siguientes son los resultados obtenidos a este proceso con su correspondiente análisis.

En la primera pregunta se les pidió a los docentes: señalar los procesos y sistemas que utilizan para trabajar el concepto de límite de una función en el grado once de enseñanza secundaria.

CATEGORÍA: SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN
Subcategoría: Sistemas de representación utilizados por el docente para la enseñanza del concepto de límite de una función. (E. C. L. F.)

Tabla 1. Sistemas de representación utilizados por el docente (E. C. L. F.)

Profesores Encuestados	Sistemas de representación			
	S. Verbal	S. Numérico	S. Gráfico	S. Simbólico
A	0	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	1
E	0	1	1	1

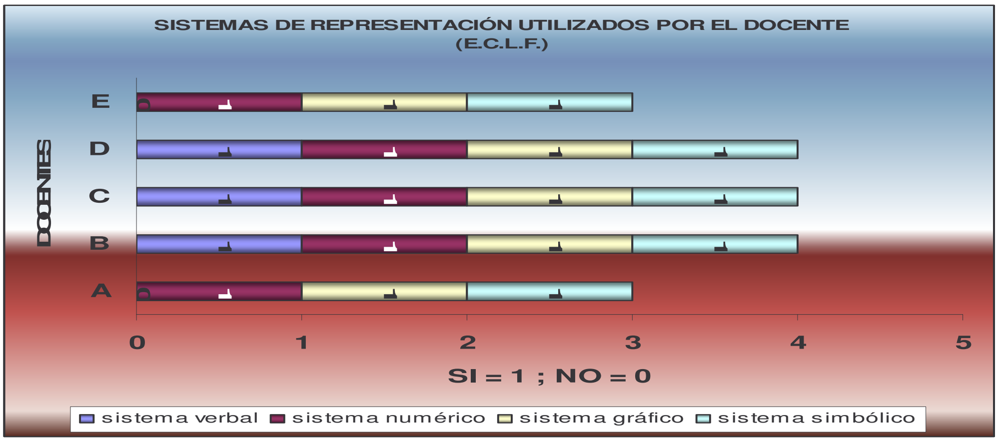
1: Utiliza el sistema de representación
0: No utiliza el sistema de representación

Una de las formas de aproximarnos al problema de este estudio fue el indagar qué elementos son considerados o que formas utilizan los docentes para aproximarse al concepto de límite, para ello es importante considerar “las representaciones o sistemas de representación”.

“Las representaciones en matemáticas son entendidas como todas aquellas herramientas, signos, gráficos, que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos. Ayudan a comprender las estructuras matemáticas; de ahí su interés didáctico, además permiten analizar los procesos de aprendizaje y comprensión en matemáticas" – lo afirma Luís Rico –

"Los conceptos matemáticos, se pueden expresar por varios sistemas dando lugar a lo que Janvier (1993) llama, representaciones sinónimas (representaciones diferentes de un mismo objeto matemático). En el concepto de límite se consideran cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico" – según Castro y Castro –

Gráfica 1. Sistemas de representación utilizados por el docente (E. C. L. F.)



En los profesores encuestados se observa en su totalidad, que ellos utilizan los diferentes sistemas de representación propuestos anteriormente, lo que permite ver que dichos docentes conocen el concepto de límite en sus diversas representaciones.

"Esto favorece en primera instancia el aprendizaje basado en estos sistemas de representación donde se aprecia un cambio en el desenvolvimiento de los alumnos; observando en ellos un mejor desempeño". [82]

Además del uso de estos sistemas de representación los docentes plantean la utilidad que subyace procesos tales como;

"…ayuda de las nuevas tecnologías, solución de problemas, entre otros" [83]

---

[82]Castsigeras Eleonora, Curiote Karina, Miguez Marina.(2005) Un enfoque constructivista en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad. Universidad de la República. Montevideo Uruguay. Julio 4. versión en Internet.

Foto 1 y 2 aplicación de las nuevas tecnologías para el desarrollo del concepto de límite de una función (se aprecia el trabajo en clase del concepto de límite en su representación numérica y gráfica, a través de las tablas de valores y sus procesos de variación en el contexto matemático).

Foto 1

Foto 2

El material utilizado, son un compendio de parte teórica y ejercicios que se comprobarán usando la calculadora TI 92PLUS, dentro de este material se observa un trabajo del concepto de límite a través de los diferentes sistemas de representación ya mencionados, los ejercicios sin embargo son trabajados únicamente en el contexto matemático y su tratamiento con funciones en sus expresiones algebraicas llevando una secuencia con el grado de dificultad. (Ver anexo H).

El docente del grado en estudio señala y recalca la importancia de este material para el desarrollo de sus clases, se hace una lectura previa y se procede a practicar en los equipos o calculadora, esto lo hace en cada sesión. (Ver E – línea 1 y 2).

En el desarrollo de los siguientes sistemas de representación*:*

a) Sistema verbal.
b) Sistema numérico.
c) Sistema gráfico.
d) Sistema simbólico.

[83] Esta Investigación. Encuesta a docentes INEM – observaciones en clase. Anexo A -E

Se les preguntó a los docentes ¿Con cuál(es) de ellos introduce usted el concepto de límite de una función?

CATEGORIA: SISTEMAS DE REPRESENTACION.
Subcategoría: Sistemas de representación utilizados por el docente para la enseñanza del concepto de límite de una función. (E. C. L. F.)

Tabla 2. Sistemas de representación utilizados por el docente en la enseñanza del concepto de límite de una función.

Profesores Encuestados	Sistemas de representación			
	S. Verbal	S. Numérico	S. Gráfico	S. Simbólico
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
C	1	1	1	1
D	1	1	1	1
E	0	1	1	0

1: Utiliza el sistema de representación.
0: No utiliza el sistema de representación.

Dentro de la teoría referida a la enseñanza del concepto de límite, se estableció una serie de sistemas de representación, los cuales han sido resultado de la misma evolución del concepto. Ellos fueron considerados como unas de las categorías para este estudio.[84]

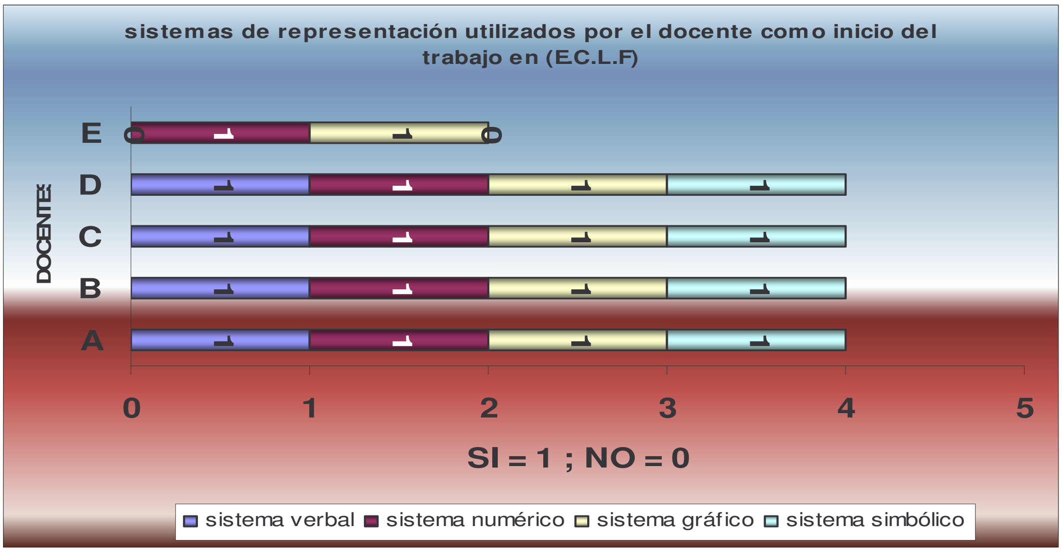
Según Piaget y Zoltan Diennes, "manifiestan que el aprendizaje principia con lo concreto y que el proceso hacia lo abstracto depende del nivel de madurez y comprensión por parte del estudiante, además sugieren que se lleve una secuencia en la enseñanza de un concepto".

En cuanto a la enseñanza del concepto del límite de una función este desarrollo lo facilitan los sistemas de representación: el verbal que permite describir, analizar, concluir sobre fenómenos relacionados con situaciones de cambio; el numérico que muestra claramente el aspecto de aproximación de límite además conlleva a encontrar expresiones algebraicas que condensan el comportamiento de las variables; el gráfico que ayuda a vincular las tendencias de ambas variables, ayuda a determinar las condiciones geométricas de la función y las vincula con la

[84] Ver Página 50 y página 61 de esta investigación.

escritura algebraica de dicha función; el algebraico que condensa toda la información de una situación de cambio, además las propiedades algebraicas de las expresiones permiten encontrar aspecto del comportamiento de las variables relacionadas, sin embargo este último muestra una concepción formal de límite con un aspecto estático y abstracto.[85]

Gráfica 2. Sistemas de representación utilizados por el docente en la enseñanza del concepto de límite de una función.



El paso por estos sistemas de representación permite a que el estudiante domine dicho concepto en la transición a través de ellos, esto brinda además a que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo así escoger la representación más apropiada para cada situación y se puede ver la variabilidad como un eje transversal en todo este proceso; en el sentido del manejo de la variable en contexto numérico (números decimales), el contexto geométrico a través de las áreas y volúmenes, el algebraico y simbólico a través del comportamiento de las funciones, entre otras.

Según las apreciaciones obtenidas en la encuesta dichos docentes introducen el concepto de límite de una función teniendo en cuenta los sistemas de representación mencionados anteriormente. En las observaciones hechas en clase el docente del grado en estudio trabaja el concepto de límite siguiendo unas

[85] MEN Lineamientos curriculares en matemáticas (7 de junio de 1998) Bogotá. Páginas 52 y 76,77,78

fases considerando un modelo de función en su expresión algebraica que posteriormente le hace un primer tratamiento numérico mediante tablas de valores y teniendo en cuenta unos incrementos establecidos en el material de trabajo, una vez agotado esto se sigue con un tratamiento gráfico de la función, y finalmente la expresa en términos formales; este proceso lo sigue con diferentes tipos de funciones y a lo largo de todo el material del trabajo, lo único que varia es el grado de dificultad de la función; cabe resaltar que son expresiones totalmente trabajadas en el contexto matemático. (Ver anexo H y E línea 16 – 19; 24 – 30; 33 – 38; 57 – 65; 96 – 99; 113 – 116)

El análisis obtenido a las dos anteriores preguntas nos responde al primer objetivo específico, pues en éstas se señala claramente de los diferentes sistemas que conocen los docentes del colegio INEM – Pasto, para la enseñanza del concepto de límite de una función los cuales son:

- Sistema de representación verbal.
- Sistema de representación numérico.
- Sistema de representación gráfico.
- Sistema de representación simbólico (analítico – algebraico).

Esto nos permitió avanzar hacia las dificultades que presentan los estudiantes del grado once, desde la perspectiva y experiencia de los docentes, pues es necesario conocer en primera instancia conocer cómo se trabaja en el contexto real el concepto de límite de una función estableciendo unas relaciones con lo que afirma algunos autores de la presente investigación.

Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Castro y Castro (1997). En el concepto de límite se consideran cuatro sistemas de representación: Verbal, numérico, gráfico y simbólico. Según esto se preguntó:
¿Con cuál(es) de los anteriores sistemas a lo largo de su experiencia docente ha encontrado mayor dificultad en sus alumnos?

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE
Subcategoría: Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite de una función. (A. C .L F.).

Tabla 3. Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en la enseñanza del concepto de límite de una función.

Profesores Encuestados	Sistemas de representación			
	S. Verbal	S. Numérico	S. Gráfico	S. Simbólico
A	0	0	1	1
B	0	0	0	1
C	0	0	0	1
D	0	0	0	1
E	0	0	0	0

1: Encuentra dificultad
0: No encuentra dificultad / no responde.
Se observó que la mayoría de los docentes coincide en que la mayor dificultad en el aprendizaje del concepto de límite por parte de sus estudiantes se presenta dentro del sistema de representación simbólico, esto involucra la manipulación algebraica y la concepción formal del concepto de límite.

Ferrini expone:

"Que la multitud de errores que cometen los estudiantes en las manipulaciones algebraicas, constituyen una de las mayores dificultades para la comprensión del concepto de límite, además la definición formalizada del concepto de límite ha hecho que: se presente a los alumnos un exceso de simbolismo, al hacerlos manipular mecánicamente estos símbolos, sin saber que se esta haciendo y a olvidar que, para comprender un concepto matemático son necesarias situaciones de referencia que le den sentido y al mismo tiempo que le permitan descubrir las relaciones con otros conceptos."[86]

Gráfica 3. Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en la enseñanza del concepto de límite de una función.

[86] Font VicenÇ. (2003) Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la educación matemática. Boletín de asociación matemática venezolana. Vol. 10. No 2. Pág. 249 – 279. Universidad de Barcelona - España.

Otras de las dificultades que han encontrado los docentes en sus alumnos en el aprendizaje del concepto de límite son las que están asociadas a los conceptos previos:

Para Michèle Artigue: una de las tres grandes dificultades evidentes en el aprendizaje del cálculo consiste en;

"Aquellas asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones)…"
Además Michèle Artigue considera a los números reales, las funciones y la variabilidad como elementos esenciales para el desarrollo del cálculo.

Esto se entiende a que los docentes miren dificultades en cuanto a los números reales, las funciones como principales, relacionando sus diferentes propiedades y representaciones.

Los preconceptos juegan un papel importante en el desarrollo del concepto del límite, entre lo más útil desde un manejo del concepto de tipo operatorio como herramienta están;

El conocer las operaciones y propiedades básicas con los números enteros, racionales e irracionales; el número real, factorización, racionalización, simplificación y desarrollo de expresiones algebraicas, dominar la teoría básica de funciones, conociendo las funciones elementales básicas; como la función lineal, cuadrática, trigonométricas, exponencial y logarítmicas.[87]

El trabajo en el aula de clases brinda en el profesor unas herramientas de juzgamiento donde él detecta dificultades en el aprendizaje de sus alumnos por tal razón se planteó la siguiente pregunta: En su experiencia como docente, ¿qué tipo de dificultades manifiesta o presenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de límite de una función?, en lo referente a: (puede señalar más de una opción)

a) Concepto de variable; concepto mismo, distinción entre variable independiente y dependiente.
b) Concepto de función: concepto mismo, dominio, rango, gráfico, herramienta para modelar situaciones o fenómenos.
c) Transición del método gráfico al numérico, verbal al gráfico, del numérico al algebraico, del numérico al gráfico, en cuanto a función y límite de una función.
c) La naturaleza de la noción de límite.
d) La manipulación algebraica y formal para el cálculo de límites.

[87] MEN (1998) Lineamientos Curriculares. Área de Matemáticas. Bogotá – Colombia.

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite de una función. (A. C .L F.)

Tabla 4**.** Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite de una función (A. C. L. F.)

Preguntas de la encuesta	Profesores Encuestados				
	A	B	C	D	E
Concepto de variable	0	1	0	1	1
Concepto de función	1	1	0	0	0
Transición entre los sistemas de representación	0	1	0	1	0
La naturaleza de la noción de límite	0	1	0	0	0
Manipulación algebraica y formal en el calculo de limites	1	1	1	1	1

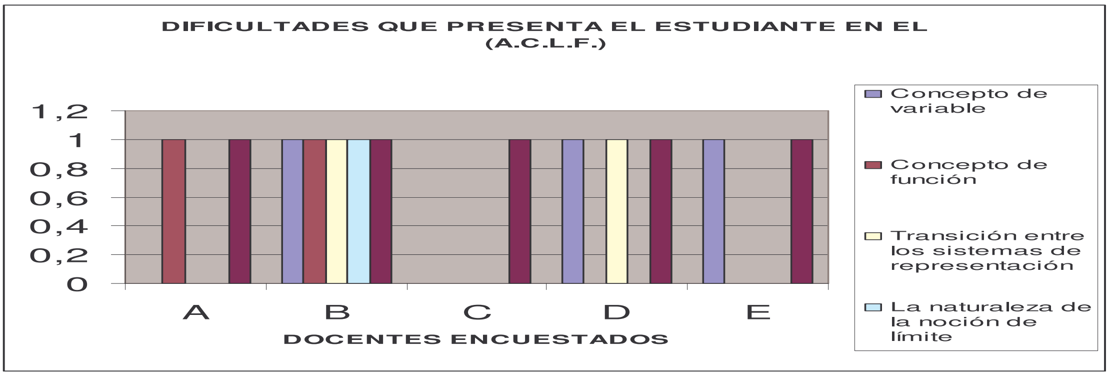
1: Hay dificultad
0: No hay dificultad

Según Héctor Lara Chávez, en sus estudios acerca del la enseñanza del concepto de límite se ha encontrado que el estudiante presenta dificultades en el aprendizaje del concepto de límite en lo referente a:

"Concepto de variable, concepto de función, transición entre los diferentes sistemas de representación, la naturaleza de la noción de límite y la manipulación algebraica y formal para el cálculo de límites".

Teniendo en cuenta estas referencias teóricas, los docentes manifiestan en concordancia nuevamente con estos estudios, que la mayor dificultad que presenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de límite de una función se ubica dentro del sistema de representación simbólico donde la manipulación algebraica y formal para el cálculo de límites es deficiente.

Gráfica 4. Dificultades encontradas por los docentes en sus estudiantes en el aprendizaje del concepto de límite de una función (A. C. L. F.)



Seguido a esto marca una dificultad importante la comprensión del concepto de variable concepto de función; conceptos previos que son fundamentales para abordar el concepto límite y lógicamente la transición entre los diferentes sistemas de representación.

Los docentes manifiestan además, que hay una débil fundamentación en los preconceptos:
"...en general, una débil fundamentación en los prerrequisitos que exige el aprendizaje del límite de una función"
"... problemas en el manejo de expresiones fraccionarias".[88]

Registro escrito 1. Opinión de los docentes – dificultades encontradas en sus estudiantes. (A. C. L. F)

¿Cuál(es)? En general una débil fundamentación en los prerequisitos que exige el aprendizaje del concepto del límite de una función.

¿Cuál(es)? Los estudiantes presentan problemas en el manejo de expresiones fraccionarias.

En cuanto a la naturaleza de la noción de límite se entiende que el docente maneja el límite en una primera etapa como útil matemático cuya finalidad es analizar el comportamiento de tendencias en algunas funciones, esto se aprecia claramente en el material de trabajo y en el desarrollo de las clases. (Ver anexos H y E línea: 7, 21, 23 – 25, 30, 36, 60 – 63, 77 – 82)

[88] Esta Investigación. Encuesta a docentes INEM – Pasto.

El análisis obtenido a las preguntas 3 y 5 seleccionadas de la encuesta general de docentes del colegio INEM – Pasto, responsables de la cátedra de matemáticas (y encargados del tratamiento del concepto de límite de una función), nos responden al segundo objetivo específico.

De lo anterior se asume la concordancia en cuanto a las dificultades que manifiestan los autores en diversas investigaciones referidas en este trabajo y las dificultades que han encontrado los docentes de esta institución en sus alumnos al paso por esta temática. Ambas partes (estudios consultados y docentes) concuerdan en que las mayores dificultades encontradas en los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite de una función se presentan en cuanto:

- Al sistema de representación simbólico (algebraico – analítico)
- Poca fundamentación en los conceptos previos para abordar el concepto de límite de una función.

Para esta investigación se puede decir también que dichos docentes enfatizan la enseñanza del concepto de límite dentro del sistema de representación simbólico olvidando de cierta manera el tratamiento de dicho concepto en los otros sistemas de representación, pues no se anotan otras dificultades asociadas a otros sistemas de representación, ni se hacen sugerencias al respecto, el énfasis el sistema de representación simbólico impide que el estudiante no observe en todas sus dimensiones las variaciones que presenta cualquier función en cuanto a sus mismas variables, sus cantidades y su comportamiento hacia el límite de sus magnitudes en juego. El tratamiento algebraico es muy sintético y dificulta que el estudiante entienda los patrones de variación que si se pueden ver usando otras representaciones tales como las numéricas, las geométricas y las gráficas. En el material de trabajo y en el desarrollo de las clases se hace poco énfasis hacia ejercicios prácticos y de contextos no matemáticos, relacionados con fenómenos naturales y reales de variación y cambio. (Ver anexo H y E)

7.2 ANALISIS DE RESULTADOS DE LOS TEST PLANTEADOS A LOS ESTUDIANTES.

Una vez hecha la aproximación a las dificultades en la comprensión del concepto de límite desde la óptica y la experiencia de los docentes que trabajan en esta institución, se realizaron una serie de observaciones y de registros cuyos resultados están consignados en los test planteados y en los comentarios que se trascribieron del testimonio vivo obtenido a través del video. Dichos resultados son el producto del quehacer diario del estudiante, de su aprendizaje y comprensión de la temática que se trabajó durante las sesiones determinadas para el desarrollo del tema “concepto de límite de una función”

7.2.1 Análisis de resultados test Nº.1. Como una primera pregunta se indagó sobre el número real en relación con su representación decimal.

El número real:

$$0,\bar{5} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000} + \ldots;$$ es un número

a) Racional menor que $\frac{5}{8}$

b) Irracional menor que $\frac{5}{10000}$

d) Irracional, porque su expresión decimal es infinita.

e) Racional, porque su expresión decimal es infinita no periódica.

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

- Asociadas a Número real.

Tabla 5. Preconceptos – número real.

PREGUNTA Nº 1	CORRECTO	INCORRECTO
ESTUDIANTES	50%	50%

Las respuestas a esta pregunta muestran que la mitad de los estudiantes, no identifican correctamente el número real como una expresión decimal infinito, pese a que el método más adecuado para iniciar la construcción de los números reales en bachillerato es a través de estos métodos de aproximación.

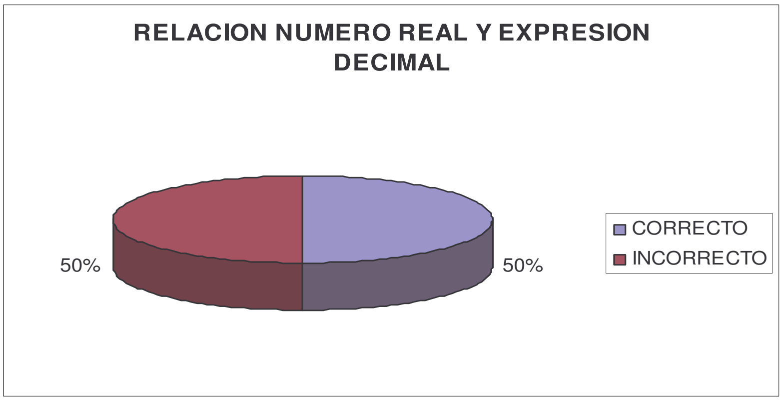
Pues en la historia vemos como Cantor y Dedekind entendieron que los racionales constituían la materia prima indispensable para la construcción de la totalidad del conjunto de los números reales. Cantor y Dedekind formalizaron y generalizaron la aproximación de algunos irracionales típicos a partir de los racionales.[89]

Por lo que para la construcción de los números reales se llevaron procesos como:

[89] Recalde Luís Cornelio. (2004) La Lógica de los números infinitos. Un acercamiento histórico. Revista Matemáticas –Enseñanza Universitaria. Septiembre. Vol. 12, No 1. pág. 51-72.

- Cortaduras de Dedekind – cortaduras en los racionales.
- Sucesiones fundamentales – Cauchy
- Construcción axiomática – Hilbert
- Construcción decimal – fracciones continuas.[90]

Gráfica 5. Preconceptos - número real.



En algunos de los estudios comentados en este trabajo, como los de Isabel Romero Y Luís rico, se establece que a pesar de que los estudiantes conocen los sistemas de representación de número real: [91] (Ver anexo F)

“La dificultad radica en que los estudiantes a menudo confunden los conjuntos numéricos y las notaciones numéricas,...Se suele hablar de números racionales, decimales y fracciones, por ejemplo, sin diferenciar explícitamente entre conjunto numérico y sus sistemas de representación. Para los estudiantes todo esto son números y les cuesta ver a los números como entidades que pueden venir representadas de varias formas”. [92]

Además del test, dentro de las observaciones hechas en clase, se observó que para el conjunto de los números reales la ley de los signos en las operaciones aritméticas (sobre todo en números enteros) no se recuerda al instante, pues fue necesario que el profesor las retome.(ver anexo E línea 66 - 71)

Foto 3. Preconceptos – operaciones aritméticas equivocadas con fracciones, esta fotografía muestra el uso inadecuado de la ley de los signos por parte de la estudiante.

---

[90] Boyer Carl.The deveopment of the calculus (1979). Edit. Dover publications.
[91] Romero Isabel, Rico Luís. (1999) Representación y comprensión del número real.- una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA. Vol. 4, No 2. Pág. 117-151
[92] Ibidem.

Foto 3

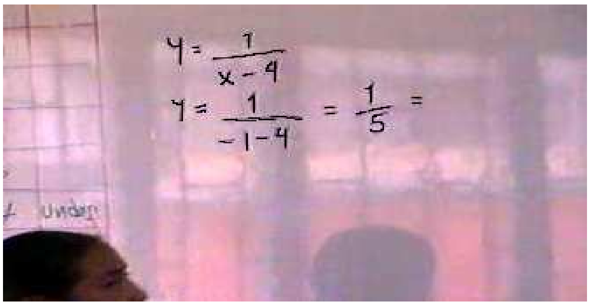


Foto 4 y 5: preconceptos – observaciones del docente en clase; estas fotografías indican la acción de corrección por parte del docente al anterior proceso equivocado de la estudiante.

Foto 4

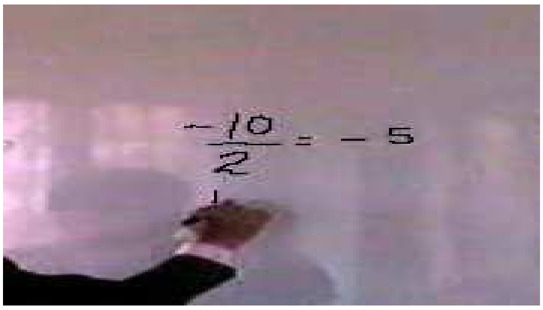
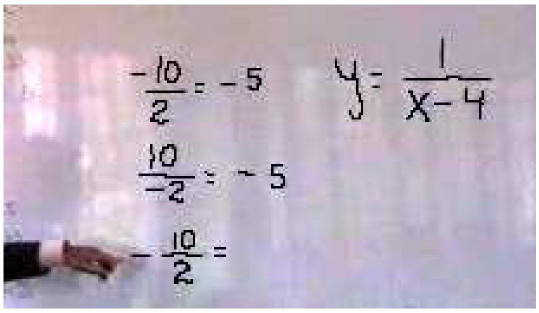
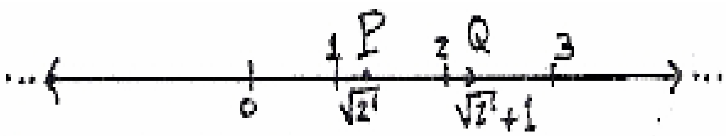


Foto 5



Los números reales se encuentran representados geométricamente en la recta numérica con su propiedad de ser un conjunto denso, en la recta numérica que se muestra, se han localizado dos números reales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+1$



Entonces se pidió a los estudiantes analizar:
La afirmación: “entre los puntos P y Q es posible ubicar otro número irracional” es:

a) Falsa, porque $\sqrt{2}+1$ es el siguiente de $\sqrt{2}$

b) Verdadera, porque un irracional que está entre P y Q es $\sqrt{3}$
c) Falsa, porque solo se pueden ubicar racionales entre P y Q
d) Verdadera, porque un irracional que está entre P y Q es $\frac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{2}$

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

- Asociadas a Número real.

Tabla 6. Preconceptos – número real.

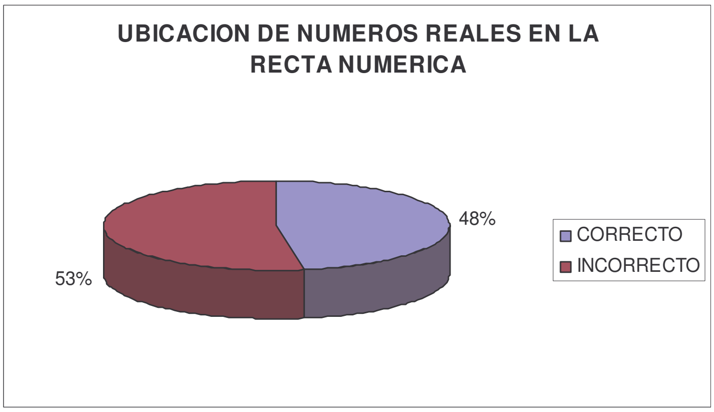
PREGUNTA Nº 2	CORRECTO	INCORRECTO
ESTUDIANTES	48%	53%

Se observa que un 53% de los estudiantes no reconocen un número real y no lo ubican correctamente en la recta numérica, esto reafirma la dificultad de los estudiantes frente al reconocimiento de número real en sus formas de representación. (Recta real: sistema de representación gráfico).

Como afirma Michèle Artigue:

“La asociación entre números reales y la recta real carece también de coherencia, aún cuando por experiencia los estudiantes declaran aceptar el principio de una correspondencia biyectiva entre los números reales y la recta, pues no están convencidos por ejemplo, que tal o cual número preciso se puede colocar en la recta”

Gráfica 6. Preconceptos - número real.



Se observa en las siguientes imágenes como algunos estudiantes tienen dificultades en ubicar los números reales en la recta numérica y en el plano cartesiano como parejas ordenadas de puntos.

Foto 6, 7 y 8: ubicación incorrecta en el plano cartesiano y en la recta real de un número racional, se observa la dificultad en la comprensión de densidad de la recta numérica.

Ejercicio “ubicar el punto $\frac{-1}{3}$ en el eje y”

Foto 6

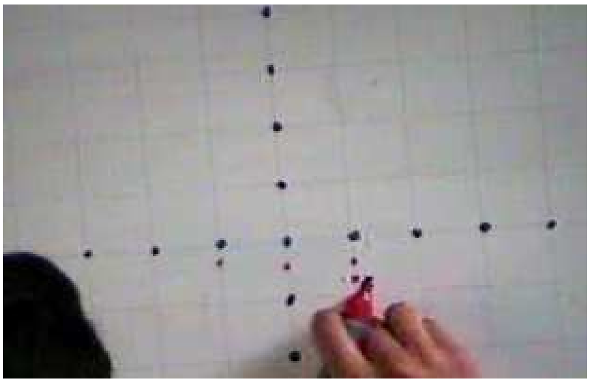


Foto 7

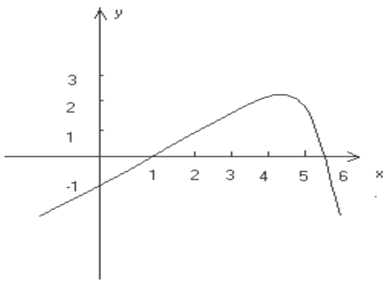
Foto 8

Teniendo en cuenta las apreciaciones encontradas tanto en el test aplicado a estudiantes como en las observaciones hechas en clase, se puede establecer que existe algunas deficiencias en la comprensión del número real a través de sus diferentes sistemas de representación. Y como afirma Michèle Artigue, el número real es uno de los principales conceptos, necesarios para abordar el concepto de límite de una función, he ahí una dificultad importante con este preconcepto. Teniendo en cuenta que el número real está dentro del pensamiento variacional cuando se relaciona con las cantidades y el continuo numérico y en su interior con los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas los cuales se van trabajar en el desarrollo de límite de funciones), divisibilidad; particularmente este trabajo debe hacerse con las representaciones decimales, lo que cobra especial relevancia por los procesos infinitos.

Michèle Artigue en su estudio “Ingeniería didáctica en educación matemática” identificó esta dificultad como una importante y señala:

“Estas están asociadas con la complejidad de los objetos básicos del cálculo; uno de ellos es el número real”

En la siguiente situación a función f está dada por el gráfico que aparece en la figura.



Para ello se les pidió a los estudiantes:
a) Determinar
f(o) =
f(1) =
f(2) =

b) Determinar el valor de x sí:
f(x) = 0, entonces x =
f(x) = 1, entonces x =
f(x) = 2, entonces x =

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

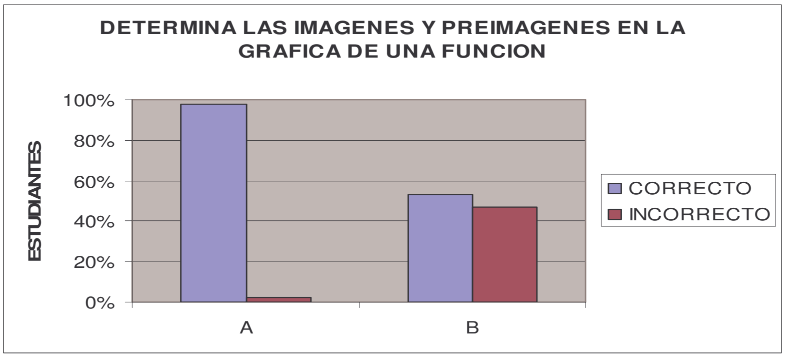
- Asociadas a las Funciones.

Tabla 7. Imágenes y preimágenes de una función.

OPCIONES	CORRECTO	INCORRECTO
A (IMAGEN)	98%	2%
B(PREIMAGEN)	53%	47%

Se observa que el 47% de los estudiantes encuentran erróneamente las preimágenes en una función en su representación gráfica, se asume que este porcentaje de estudiantes desconoce que cada imagen y preimagen se le hace corresponder un punto sobre la gráfica, ya sea una recta, o una curva. Se puede interpretar esto como una débil fundamentación en estos elementos mencionados.[93]

Gráfica 7. Imágenes y preimágenes de una función.



Dentro del pensamiento variacional se puede ver que no existe una conexión entre las variables involucradas en una función, pues, se las trata por separado. Particularmente la gráfica tiene como fin abordar los aspectos de la dependencia entre variables, gestando la noción de función como dependencia.

Se presentó a continuación una serie de expresiones algebraicas donde se le pidió al estudiante; Determinar cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales y cuáles definen funciones cuadráticas.

a) $y = x - 2$ b) $y = x^3 + 5$ c) $y = \sqrt{2}$ d) $x = -y^2+3y-1$

e) $x + 2y = 8$ f) $y = \frac{1}{x^2}$ g) $y = -x^2 + 0.5$ h) $y^2+x^2 =1$

[93] MEN. (1998) Lineamientos Curriculares. Área de Matemáticas. Grado Octavo – Noveno (secundaria). Bogotá – Colombia.

i) $y = \frac{3}{x} + 1,\ x \neq 0$ j) $v = at^2 + 3t$

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

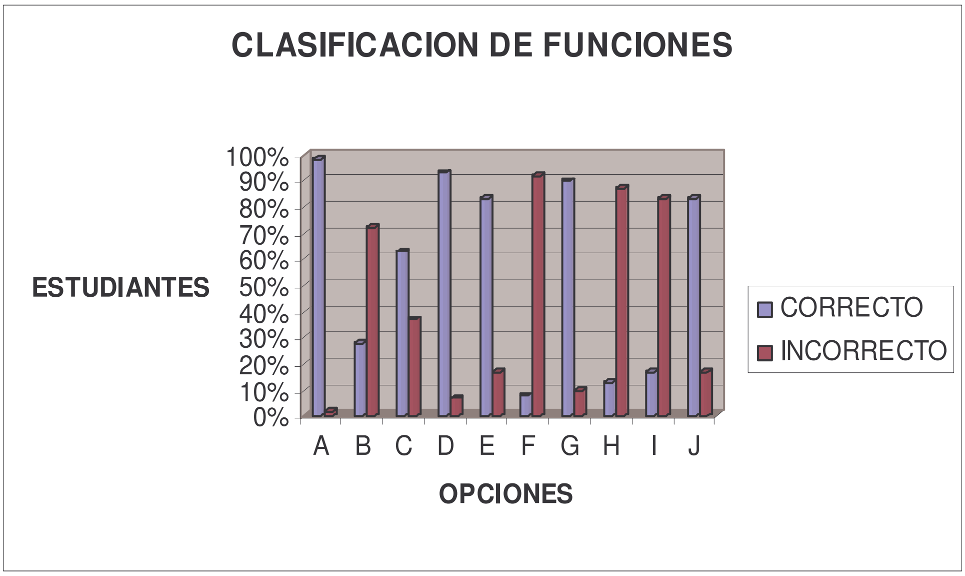
- Asociadas a las Funciones.

Tabla 8. Preconceptos – funciones y su clasificación.

OPCIONES	CORRECTO	INCORRECTO
A	98%	2%
B	28%	72%
C	63%	37%
D	93%	7%
E	83%	17%
F	8%	92%
G	90%	10%
H	13%	87%
I	17%	83%
J	83%	17%

En primer lugar se observa que el 72 % de los estudiantes interpretan, erróneamente la función y = x3 + 3, se asume que los estudiantes la confunden como si fuera una función cuadrática por el hecho de tener un exponente.

Gráfica 8. Preconceptos - funciones y su clasificación.



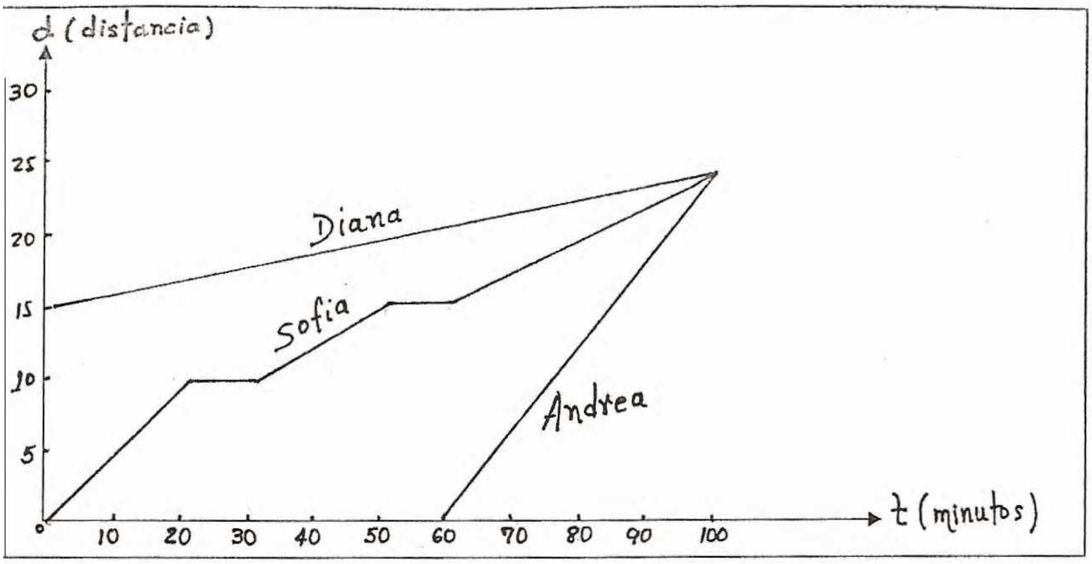
Otra de las dificultades que se puede observar es con respecto a la función $y = \frac{1}{x^2}$ donde el 92% de los estudiantes asumen esta función como cuadrática. Esto se debe a que los estudiantes asumen una función general como cuadrática, es decir, se limitan solo a ver el exponente.

Con respecto a la ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el 87% de los estudiantes asumen esta ecuación como una función cuadrática, esto se da porque el estudiante tiende a relacionar una función cuadrática con toda ecuación general que tenga exponente 2.

La función $y = \frac{3}{x} + 1$, $x \neq 0$ el 83% de los estudiantes interpretan incorrectamente esta función, ellos la interpretan como lineal por el hecho de estar presente la variable x sin observar su posición.

En conclusión en lo que se refiere a las funciones Dreyfus y Eisemberg, hablan que por parte de los estudiantes existe una fuerte subordinación al simbolismo y una fuerte atracción por la linealidad que lleva a tratar funciones generales como si fueran lineales y además como si fueran cuadráticas, esto resume lo observado en las diferentes situaciones anteriores, es necesario enfrentar a los estudiantes a situaciones donde la función no exhiba una regularidad con el fin de alejar la idea de que su existencia o definición está determinada por la presencia de la expresión algebraica.

En seguida se mostró una situación cuya gráfica muestra la distancia recorrida por Andrea, Sofía y Diana durante un entrenamiento de atletismo:



De la gráfica anterior se puede afirmar que:

5.1
a) Las tres atletas recorrieron la misma distancia.
b) Las tres atletas estuvieron corriendo el mismo tiempo.
c) Sofía recorrió más distancia que Andrea.
d) Andrea corrió durante menos tiempo que Diana y que Sofía.
5.2 Durante el entrenamiento, la mayor velocidad que alcanzó Sofía la obtuvo:
a) En los primeros veinte minutos.
b) Entre el minuto veinte y el minuto treinta.
c) Entre el minuto treinta y el minuto sesenta.
d) En los últimos cuarenta minutos.

5.3 La relación entre distancia recorrida d por Diana y el tiempo t empleado para recorrerla está representada por la ecuación:

a) $d = 15t + 100$
b) $d = 100t + 15$
c) $d = (1/10)t + 15$
d) $d = 10t + 100$

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

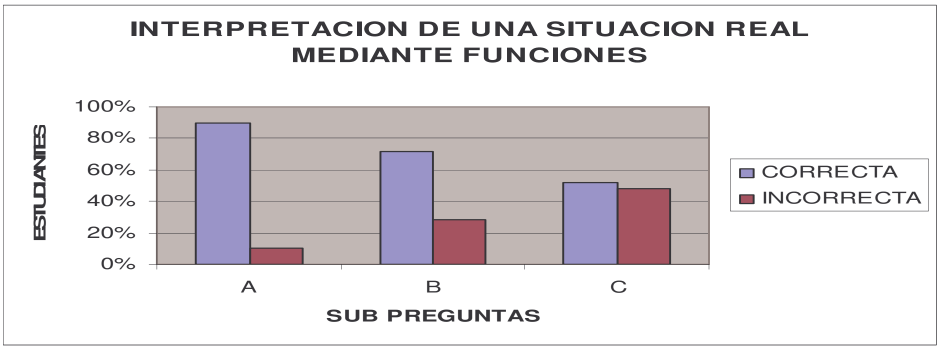
- Asociadas al Pensamiento variacional – función.

Tabla 9. Interpretación de una situación mediante funciones.

SUBPREGUNTAS	CORRECTA	INCORRECTA
A	90%	10%
B	72%	28%
C	52%	48%

El 10% y el 28% de los estudiantes manifiestan una leve dificultad en la interpretación y lectura gráfica de una función relacionada con una situación de variación, en este caso la variación entre distancia y tiempo; pero, cuando se les pide que representen la situación dada mediante una función el 48% de ellos la traduce equivocadamente, se nota entonces que hay una ruptura en la transición del sistema de representación gráfico al simbólico (algebraico) pues no está claro la relación entre las variables, ello impide que los estudiantes entiendan que la variación o el cambio se da como un suceso o fenómeno observable con el transcurso del tiempo, en este caso, la observación de los intervalos de tiempo es representativo para este ejercicio y si el estudiante hace un uso adecuado de su comprensión en el sistema de representación verbal y gráfico podrá aproximarse con exactitud a la expresión algebraica que se requiere pues los patrones de variación en estos intervalos de tiempo ayudan a comprender la sintaxis de la expresión algebraica en las opciones de respuesta, por lo que también se puede afirmar que el estudiante no hace una traducción adecuada entre estos sistemas de representación.

Gráfica 9. Preconceptos - interpretación de una situación mediante una función.



Como lo muestra un estudio de Margarida Frada; cuando se da una función a trozos o por intervalos los estudiantes no realizan el empalme correcto dentro de ella siendo esto necesario para integrar y hacer compatibles las informaciones del enunciado y además persiste de nuevo la idea de linealidad en la función. [94]

Las siguientes fotos muestran como todavía algunos estudiantes interpretan incorrectamente y trazan erróneamente una función en su representación gráfica. (La imagen a la izquierda es la correcta).

Foto 9

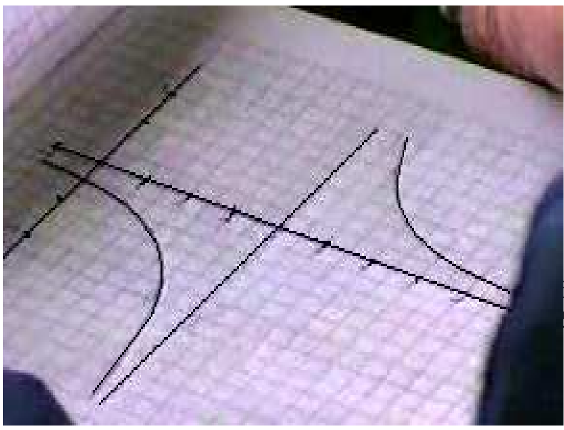
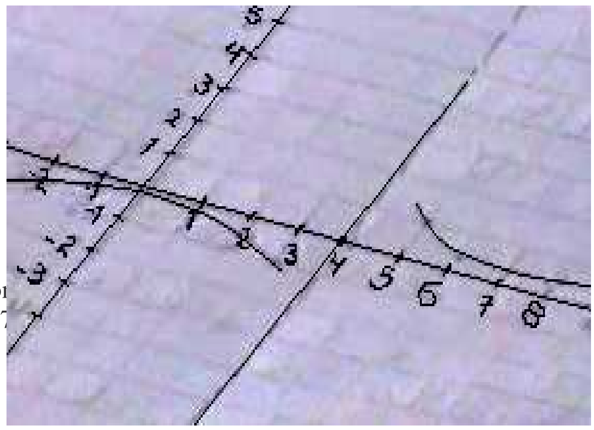


Foto 10



La foto 9 nos indica el trazo correcto que hace un estudiante de una función asintótica, la foto 10 nos hace ver el trazo incorrecto, la tendencia de la función y su imagen icónica es confusa.

Como lo expone Castro y Castro: “El concepto de límite está basado en los conceptos de número y función”.[95]
A lo que agrega Michèle Artigue:

“En la enseñanza y aprendizaje del cálculo, juega un papel importante el concepto de función (categoría: Dificultades ligadas a los objetos básicos del cálculo)[96]

Finalmente Carlos Uribe manifiesta que:

“Las funciones son las que nos permiten pensar en forma variacional y son parte fundamental al introducirse a los sistemas analíticos... en la modelación matemática, se trata de la utilización de todas las funciones conocidas, de otras ya inventadas pero desconocidas, así como de otras nuevas que se van a inventar, para simular, representar o modelar procesos reales que están ocurriendo en el mundo “[97]

De lo anterior se asume que los estudiantes tanto en el test aplicado como en las observaciones hechas en clase, exhiben algunas deficiencias en la comprensión del concepto de función a través de sus diferentes sistemas de representación, nuevamente se observa una gran dificultad con los preconceptos, esta vez con el de función, el cual es una herramienta esencial para el desarrollo del concepto de limite.

Las dificultades asociadas a las funciones, impiden que el estudiante entienda fenómenos de variación y cambio al hacer el tratamiento por aproximaciones numéricas en las tablas, por el comportamiento o trasformaciones que sufre la gráfica y por las propiedades que maneja su expresión analítica cuando se evalúa en cierto tipo de valores, todos esto ligado a la importancia que subyacen las variables de la función trabajada, ello se refleja en la disociación que hacen los

[95] Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). “los sistemas de representación en la enseñanza del límite” . revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.
[96] Artigue Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia.
[97] Uribe Carlos. (2000) El computador en la clase de matemáticas: La modelación matemática. Universidad de Valle, Pontificia universidad Javeriana. Cali – Colombia.

estudiantes en la función entre sus variables y en el no reconocimiento de un mismo fenómeno descrito por una función a través de sus cuatro tipos de representación.

El no asimilar bien el concepto de función impide o dificulta que se comprenda el concepto de límite de una función, pues la dependencia entre variables es necesaria que se maneje con propiedad para los procesos propios en el cálculo de límites y en ejercicios cualitativos (en aproximaciones numéricas, tendencias, transformaciones geométricas) dentro del concepto mismo.

De nuevo hay concordancia con las dificultad que señala Michèle Artigue en cuanto a los objetos básico del cálculo, esta vez con el concepto de función.

En siguiente pregunta se ofreció una serie de situaciones con las cuales se pidió que el estudiante responda al frente de cada afirmación si es falsa o verdadera.

a) y = 4 es una función ____________

b) La función $\frac{1}{x^2-1}$ toma valores reales en –1 y 1 _______________

c) 0.999999.... y 1 representan la misma cantidad ______________

d) $x^2 + y^2 = 1$ representa gráficamente una función _______________

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.

Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

- Asociadas a Funciones y número real.

Tabla 10. Preconceptos – funciones y número real.

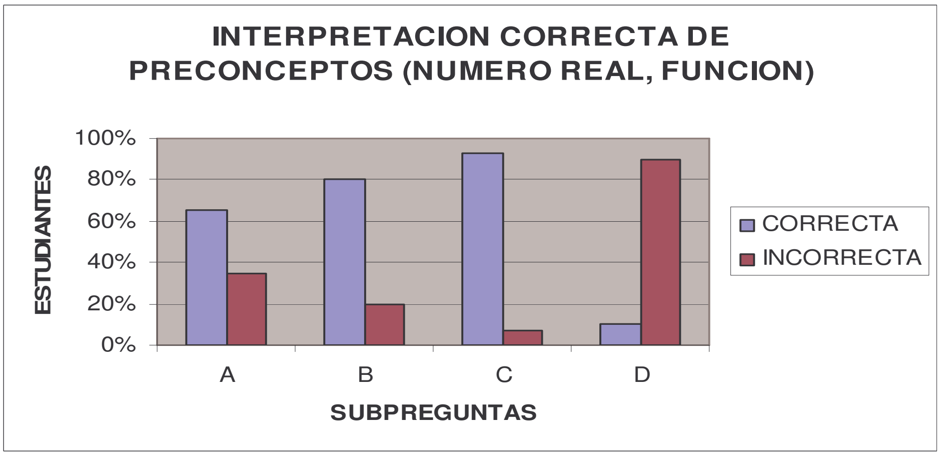
SUBPREGUNTAS	CORRECTA	INCORRECTA
A	65%	35%
B	80%	20%
C	93%	7%
D	10%	90%

Para el numeral a, el 35% de los estudiantes manifiestan que y =4 no es una función, se observa una leve dificultad en cuanto a que dicha función no está expresada explícitamente en términos de su variable independiente y dependiente.

Como afirma Michèle Artigue, cuando se define una función de esta manera el estudiante no la reconoce como tal, porque la expresión algebraica dada no depende de x.

Para la situación b, el 20% de los estudiantes manifiesta que la función f = $\frac{1}{x^2 - 1}$ toma valores reales en -1 y 1, se asume que para ellos no está claro lo que representa una función asintótica usando el sistema de representación simbólico, también se puede decir que no tiene claro cual es el dominio de la función.

Gráfica 10. Preconceptos - funciones y número real.



Según Ferrini Mundi, el concepto de función para el estudiante se muestra estático pues considera la función pensando en un punto cada vez, cuando se da una función en forma de ecuación la sustitución de valores parece grabada en el estudiante y no tiene en la mente las implicaciones globales de estas sustituciones.

Con respecto al numeral d, que expresa la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$, el 90% de los estudiantes cometen el error nuevamente tal como se lo observó en la pregunta 4 Lit. H. El estudiante asocia cualquier ecuación con una función, claramente se ve la deficiencia entre "definición del concepto" e "imagen del concepto". [98]

En síntesis podemos establecer que los estudiantes de este curso (sección 11-1) aún presentan las dificultades que ya han encontrado los docentes consultados a lo largo de su trabajo con otros grupos, en cuanto al manejo de conceptos previos

[98] Tall D, Vinner S, Imagen del concepto y definición del concepto en matemáticas con particular referencia en los límites y continuidad. Educational Studies in mathematics. Vol.. 12. Pág. 151-169

y necesarios para la introducción del concepto de límite de una función entre estas dificultades están:

En cuanto a los números reales.

- No identifican un número real como una expresión decimal infinito, pues confunde los conjuntos numéricos y notaciones numéricas.
- No reconocen a un número real y tienen dificultades en la ubicación correcta en la recta numérica.
- Tiene dificultad en cuanto a la ley de los signos en las operaciones aritméticas.
- Existen deficiencias en la comprensión del número real a través de sus diferentes sistemas de representación.

En cuanto a las funciones.

- Tienen dificultad en encontrar las preimágenes de una función expresada en el sistema de representación gráfico.
- Se tratan funciones generales como si fueran lineales o cuadráticas.
- Tienen dificultad en comprender una función a través de sus diferentes sistemas de representación, como modelar una situación o realizar la transición de un sistema a otro.

Respondiendo así con el tercer objetivo específico de esta investigación.

4.2.2. Análisis de resultados test Nº. 2 . Antes de abordar el análisis del test dos se ha querido vincular a este proceso de interpretación las preguntas No 7 y 8 del primer test, pues se considera conveniente por el tratamiento de ellas ya dentro de la temática de límite de funciones.

Se pidió a los estudiantes calcular el límite de la función racional f(x) = $\frac{(x-1)(x-2)^2(x+1)}{(x^2-4x+4)(x-1)}$ cuando x→2 es:

a) 0/0
b) Infinito (∞)
c) 3
d) –3

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función.

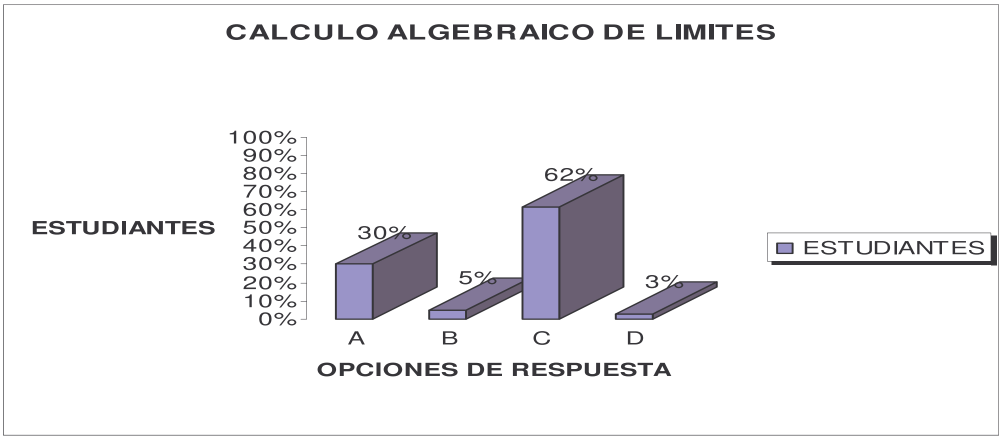
● Sistema de representación simbólico - manipulación algebraica.

Tabla 11. Sistema de representación simbólico - manipulación algebraica.

SUBPREGUNTAS	ESTUDIANTES
A	30%
B	5%
C	62%
D	3%

Se observa que el 62% de los estudiantes obtienen la repuesta correcta, sin embargo el 30% de ellos obtienen como respuesta una indeterminación, esto se debe a que el estudiante calcula el límite como una simple sustitución en la expresión algebraica.

Gráfica 11. Sistema de representación simbólico - manipulación algebraica.



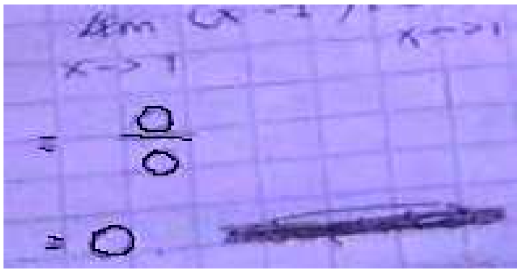
Se asume que el límite de una función en un punto es algo calculable (aunque pueda valer infinito) y el problema radica en realizar dicho cálculo, a pesar de que el campo de funciones es restringido (racionales o irracionales simples) con su expresión algebraica o gráfica.

Las imágenes muestran que después de haber realizado una simple sustitución en el cálculo del límite de una función racional, el estudiante obtiene una indeterminación.

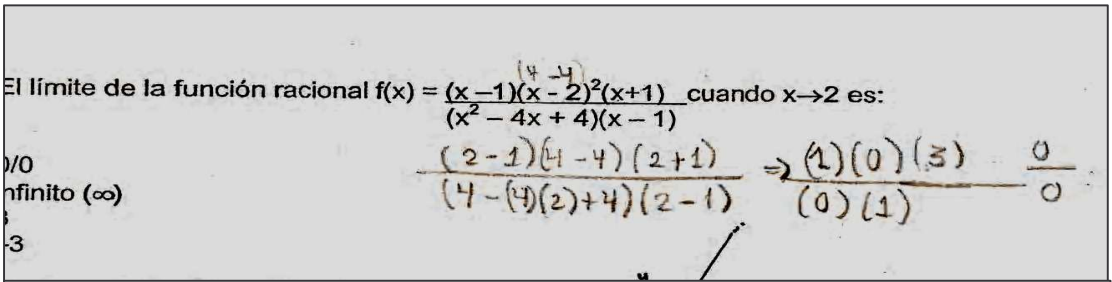
Foto 11 y 12: manipulación algebraica y sus dificultades en el cálculo de límites; por simple sustitución, en estas expresiones se obtienen indeterminaciones.

Foto 11

Foto 12



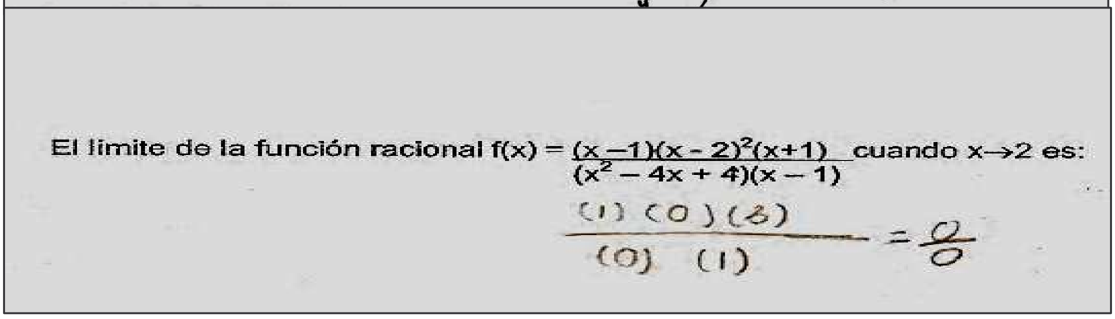
Registro escrito 2 (Estudiantes). Manipulación algebraica y sus dificultades en el cálculo de límites



El límite de la función racional $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)^2(x+1)}{(x^2-4x+4)(x-1)}$ cuando $x \to 2$ es:

$$\frac{(2-1)(4-4)(2+1)}{(4-(4)(2)+4)(2-1)} \Rightarrow \frac{(1)(0)(3)}{(0)(1)} \quad \frac{0}{0}$$

0/0
infinito (∞)
3
-3



El límite de la función racional $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-2)^2(x+1)}{(x^2-4x+4)(x-1)}$ cuando $x \to 2$ es:

$$\frac{(1)(0)(3)}{(0)(1)} = \frac{0}{0}$$

Como lo expone Ferrini:

"Para los estudiantes una función escrita algebraicamente es una "fórmula" y se espera que se haga con ella algo, como reemplazar algún valor, esta sustitución de valores parece grabada en ellos y se convierte en su forma de trabajar conceptos del cálculo tal como el de límite".[99]

[99] Ferrini – Mundi, Geuther Joan. (Mayo de 1993) La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza, desarrollo curricular. Una perspectiva. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol. 3 No 1.

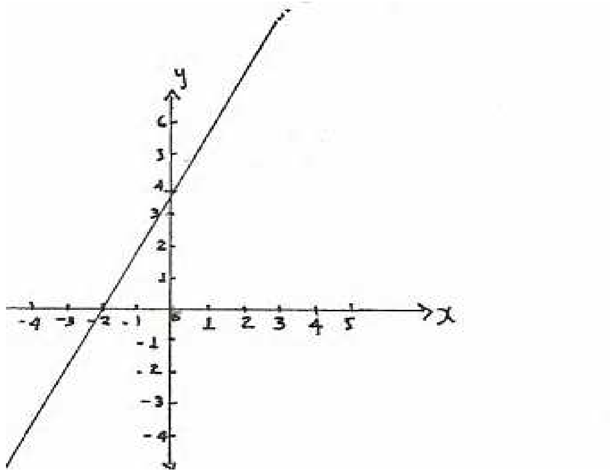
La dificultad se hace visible cuando el estudiante no recuerda los procesos algebraicos necesarios para este tipo de ejercicios de calcular límites, por ejemplo, para quitar indeterminaciones se hace indispensable recordar casos de factorización.

Los estudiantes en general realizan procesos de sustitución de valores y no miden sus implicaciones. (Ver Anexo E línea 113 - 116).

Se le presentó al estudiante la gráfica de una función que se observa
y se pidió calcular:

El límite cuando x tiende a infinito es:
a) Cero.
b) Infinito.
c) Cuatro.

Cuando x tiende a cero es:
a) Cero.
b) Infinito.
d) Cuatro.



CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los sistemas de representación del concepto de límite de una función.

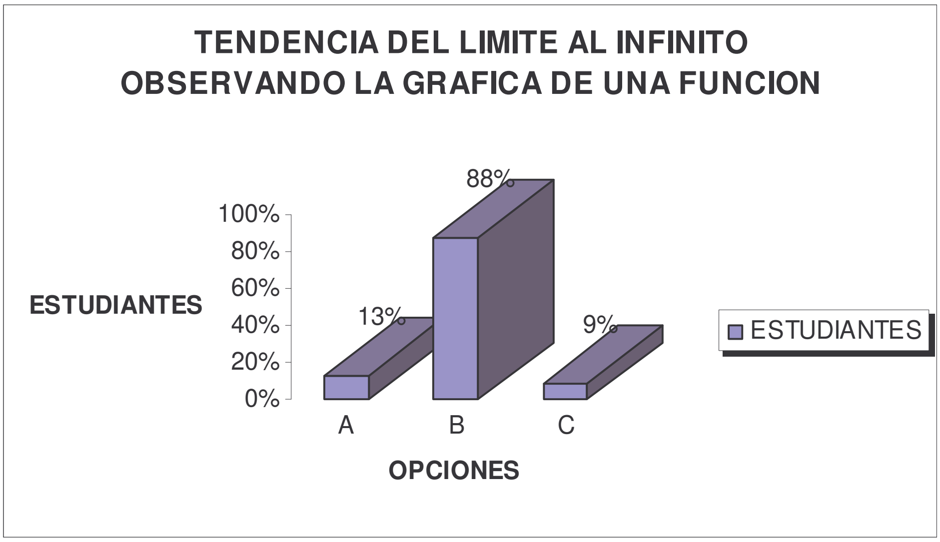
● Sistema gráfico – Dificultades en la comprensión de la “Tendencia hacia el infinito”.

Tabla 12. Sistema gráfico – tendencia hacia el infinito.

OPCIONES	ESTUDIANTES
A	13%
B	88%
C	9%

Se puede observar que la mayoría de los estudiantes, gracias al énfasis que el docente de este curso le ha dado usando nuevas tecnologías (calculadora TI 92) que complementa con la construcción manual (tablero) y con la participación de los estudiantes en la clase, la tendencia de una función se entienda mejor, cuando se pide calcular el límite de esta hacia el infinito apoyándose en el sistema de representación gráfico.

Gráfica 12. Sistema de representación gráfico – tendencia hacia el infinito.

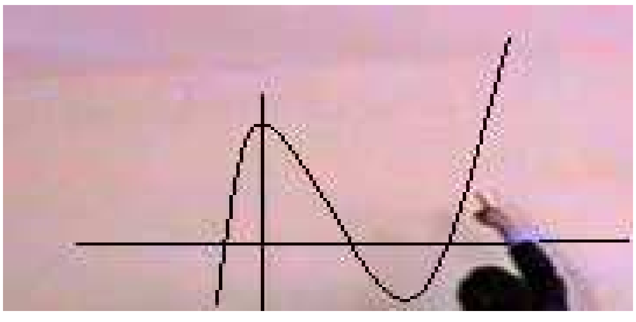


Se pudo observar en las clases que el docente hace énfasis en la tendencia de una función, teniendo en cuenta tablas numéricas y su gráfica apoyándose en la calculadora graficadora, habla de las tendencias y las relaciona con las variaciones en la función dentro de su gráfica y en los valores que va tomando. (Ver anexo E línea 4, 30, 33).

Foto 13 y 14: uso de las nuevas tecnologías para explicar tendencias en el sistema de representación gráfico; ayudas claves para que se entienda mejor este comportamiento.

Foto 13

Foto 14



● Sistema gráfico – Dificultades en la comprensión de la “Tendencia hacia un punto”.
Tabla 13. Sistema gráfico – tendencia hacia un punto.

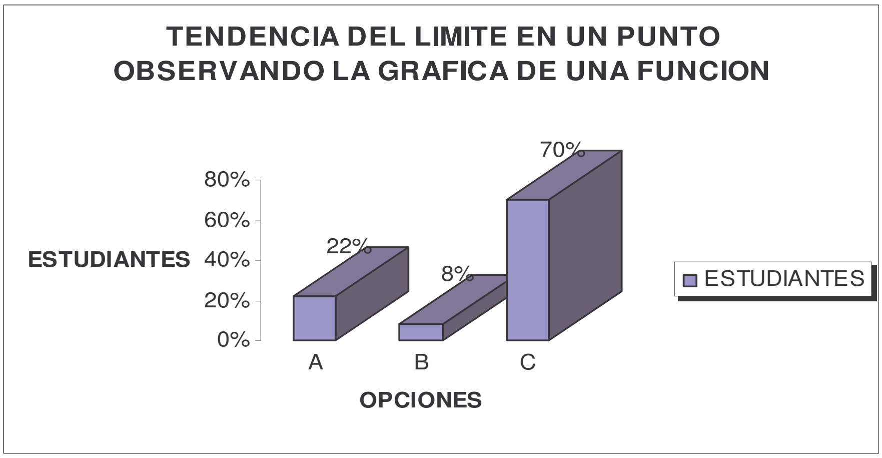
OPCIONES	ESTUDIANTES
A	22%
B	8%
C	70%

Se puede observar que la dificultad se manifiesta con un 22% de los estudiantes al interpretar equivocadamente la tendencia del punto de la variable x y su relación con la tendencia en la variable y, el estudiante mira por separado las variables y la grafica.

Esto se puede explicar cuando se descuida la complementación entre los diversos sistemas de representación, pues según Luís Rico:

“La utilización de los diversos sistemas de representación de un concepto matemático permite que el estudiante se enriquezca al paso por ellos y puede así escoger el más provechoso para entender una situación y no hacer lo contrario, ceñirse solamente a uno”.

Gráfica 13. Sistema de representación gráfico – tendencia hacia un punto.



También se observó que el estudiante interpreta la tendencia hacia el punto no como el recorrido por el eje x, sino por el recorrido que describe la gráfica.

La siguiente imagen muestra como el docente explicó el comportamiento del límite de una función utilizando el sistema de representación gráfico con el fin de hacer claridad a esta dificultad.

Foto 15. Explicación de las tendencias – docente.

Foto 15

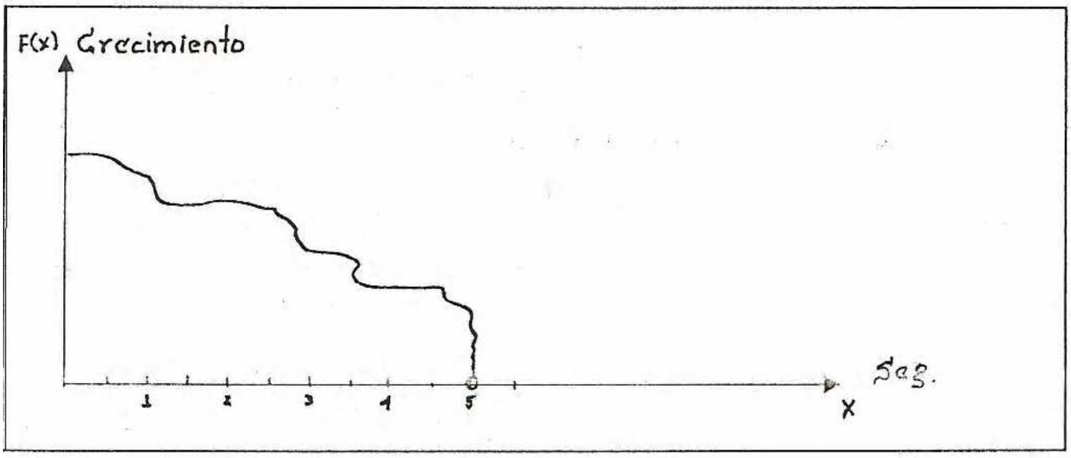
Una vez abordado la temática de límite se realizó un segundo test que se inició con la siguiente situación: El crecimiento de la población de tres clases de bacterias; A, B, C viene dada por las siguientes expresiones:

BACTERIA A.

X (cientos de bacterias)	*F (X) (crecimiento de bacterias por segundo)*
4	*9*
4.5	*9.5*
4.9	*9.9*
4.99	*9.99*
4.999	*9.999*

X (cientos de bacterias)	*F(X) (crecimiento de bacterias por segundo)*
5.001	*10.001*
5.01	*10.01*
5.1	*10.1*
5.5	*10.5*
6	*11*

BACTERIA B.



BACTERIA C.

$$f(x) = \frac{10-2\sqrt{5x}}{5-x}$$

Vamos a estudiar lo que ocurre en cada tipo de bacterias al cabo de 5 segundos: ¿A qué valor se aproxima el crecimiento de las bacterias de cada clase?

Bactéria A:

Bactéria B:

Bactéria C:

¿Qué es lo que ocurre al cabo de 5 segundos en cada clase de bacteria?

Bactéria A:

Bactéria B:

Bactéria C:

CATEGORIA: DIFICULTADES.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los sistemas de representación del concepto de límite de una función.

- Sistemas de representación numérico, gráfico, simbólico.

Tabla 14. Sistemas de representación numérico, gráfico, simbólico.

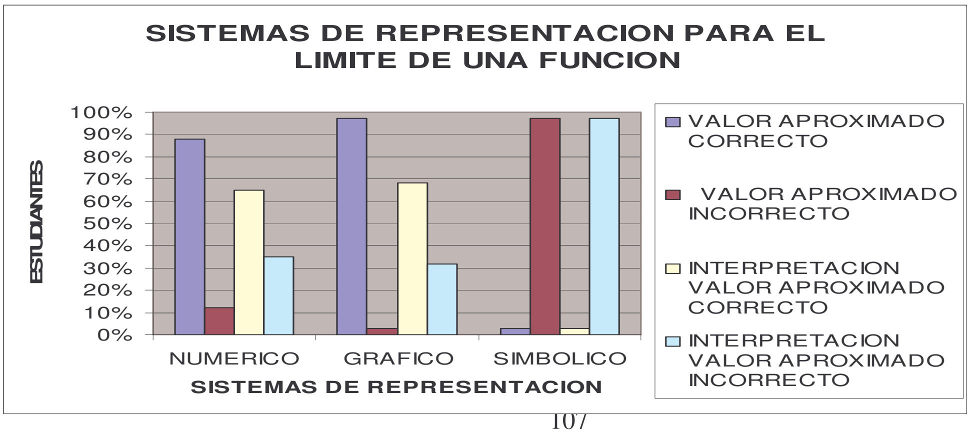
Sistemas de representación	Valor aproximado correcto	Valor aproximado incorrecto	Interpretación valor aproximado Correcto	Interpretación valor aproximado Incorrecto
NUMERICO	88%	12%	65%	35%
GRAFICO	97%	3%	68%	32%
SIMBOLICO	3%	97%	3%	97%

Se observa claramente que persiste una gran dificultad en el sistema de representación simbólico en lo correspondiente al álgebra, esta vez con un 97% de los estudiantes. Cuando se pide estimar el límite de una función (racional) encontrando la tendencia, nos dice claramente que los estudiantes en el manejo algebraico presentan deficiencias, pues se obtienen valores incorrectos, también se presenta una leve dificultad con el 32% de los estudiantes para el sistema de representación gráfico.

Con respecto al sistema simbólico Castro y Castro, afirma que el lenguaje algebraico:

"Significado y uso de las letras para representar números, proporcionan un buen indicador para establecer el nivel de comprensión de los conceptos matemáticos por parte del estudiante".

Gráfica 14. Sistema de representación numérico, gráfico, simbólico.



Mónica Mena y Eduardo Moreno, comentan que:

“La manipulación algebraica incorrecta evidencia un uso inapropiado de fórmulas y reglas de procedimientos, en este caso, para la resolución de un ejercicio en el cual está involucrado expresiones algebraicas”

Esto nos da cuenta que el estudiante carece de fundamentación en conceptos previos como las herramientas algebraicas para el cálculo de límites y coinciden con las ya señaladas por los docentes en cuanto a los preconceptos.

Michèle Artigue señala que:

“La multitud de errores que cometen los alumnos en las manipulaciones algebraicas constituyen una de las mayores dificultades para la comprensión del concepto de límite, por lo que es necesario un trabajo previo de tipo numérico y gráfico, para que les ayude a captar la idea de límite”.

Además como se expone en los lineamientos curriculares del MEN el pensamiento variacional que entra en juego en este escenario, es quien permite acercarse a una formulación correcta de la situación, es decir cuando se ha trabajado con una exposición repetida de construcciones de fórmulas; como expresiones que explicitan un patrón de variación, ayuda a los estudiantes a comprender la sintaxis de las expresiones algebraicas mismas, se constituye también como una herramienta importante para la comprensión de la variable.

La tabla numérica del ejercicio tuvo el propósito de que el estudiante comprenda que una variable puede tener un número infinito de valores de reemplazo, el uso de estas variables en la tabla ayuda a entender la escritura de las expresiones algebraicas y describir la variación o el cambio cometidas en ella.

Se ve claramente en los resultados estadísticos que se analizaron que los estudiantes con un 65% interpreta esa tendencia en el ambiente del continuo numérico con algunas dificultades, pero estas se incrementan al dar el paso hacia interpretación algebraica de la misma situación, pues en lugar de analizar la expresión algebraica se limitan a hacer procesos mecánicos y algorítmicos de reemplazos en la expresión, con lo cual se muestran una desvinculación entre los sistemas de representación numérico, gráfico y simbólico. No se utilizan como complementarios.

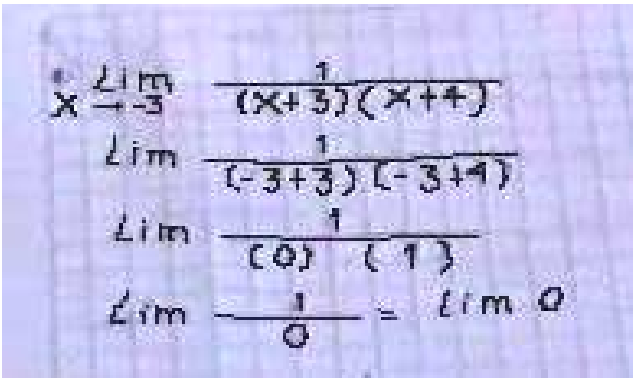
En lo referente a esto Héctor Lara Chávez señala:

“Que se han observado dificultades en la transición entre los diferentes sistemas de representación; del sistema gráfico al numérico, del verbal al gráfico, del numérico al algebraico, del numérico al gráfico”. (Ver anexo E).

Las siguientes fotos muestran el uso inadecuado de procesos algebraicos (como la sustitución de valores) para el cálculo del límite de una función.

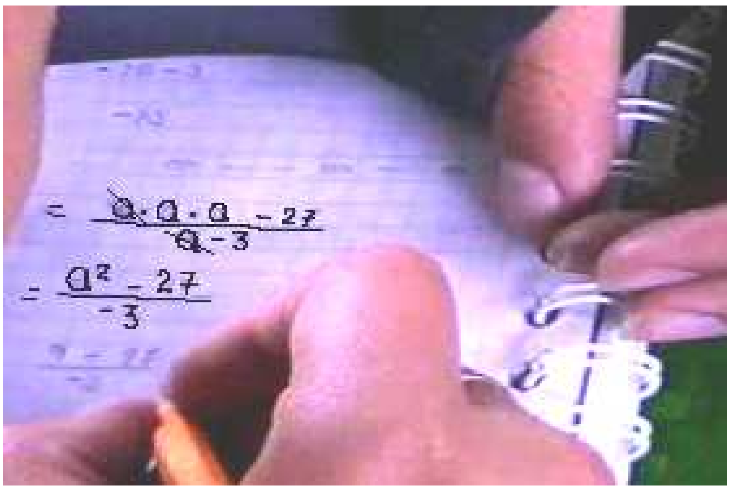
Foto 16 y 17: sistemas de representación simbólica – manipulación algebraica y sus dificultades.

Foto 16



La siguiente imagen muestra como la estudiante cancela un término en a del numerador con el termino en ***a*** del denominador en la expresión: Lim x $\rightarrow 3$ $\frac{a^3 - 27}{a - 3}$.

Foto 17



El proceso de la estudiante es:

"Lim $x \to 3$ $\dfrac{a^3-27}{a-3} = \dfrac{a.a.a-27}{a-3} = \dfrac{a^2-27}{-3}$ ..." el cual es un proceso algebraico erróneo.

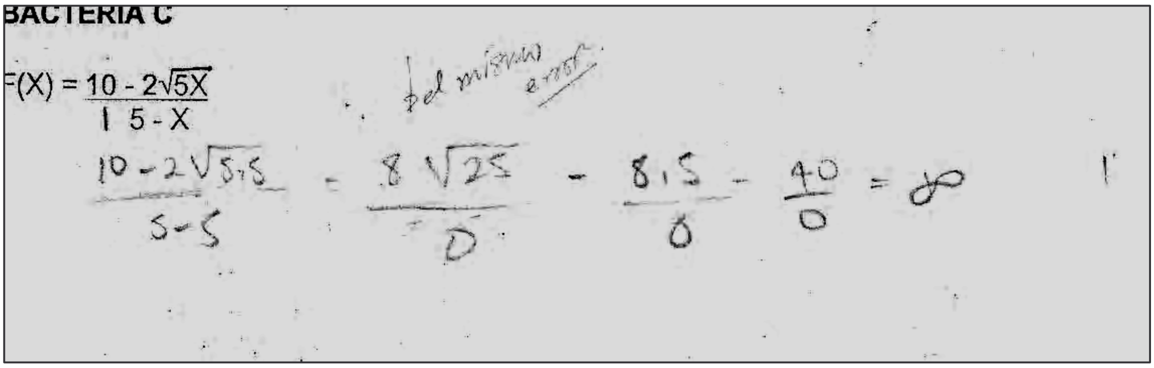
En cuanto a lo gráfico Romero (2000) señala que al utilizar el sistema de representación gráfico teniendo en cuenta un vocabulario y símbolos adecuados, proporcionan también un buen indicador de que los estudiantes están manejando adecuadamente los procedimientos como una etapa para la construcción del concepto de límite.[100]

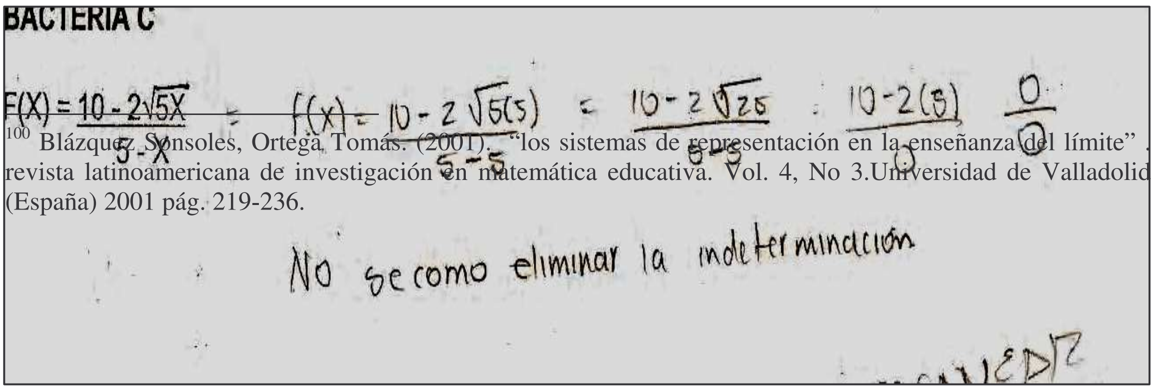
Asumiendo entonces en este caso que algunos estudiantes no poseen claridad en estos procesos de construcción.

Algunas afirmaciones de los estudiantes:
Con respecto a la bacteria B
"Se hace infinito el número de bacterias" --------- tendencia errónea

Con respecto a la bacteria C
"No entiendo, me equivoco al hacer operaciones" ----- manipulación algebraica deficiente.

Registro escrito 3 (Estudiantes). Manipulación algebraica y sus dificultades.





[100] Blázquez, Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). "los sistemas de representación en la enseñanza del límite" . revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.

Se observa como algunos estudiantes hacen operaciones indiscriminadamente números enteros con irracionales: “10 - $2\sqrt{5.5}$ = $8\sqrt{25}$ “realizando operaciones incorrectas.

La situación partió de la observación de la siguiente tabla numérica:

X	F(X)
0.87	3.59
1.02	2.41
1.005	2.7
0.9997	3.01
1.0001	3.0025
0.999995	2.9994
1.6666662	3.0001
1.999999996	2.999995
1.00000000341	2.9999999998
1.000000000007	3.000000000001

Contesta ahora observando la tabla:

a) ¿A qué número a se aproxima x? ________________________________
b) ¿A qué número L se aproximan sus imágenes F(x)? _________________
c) Busca una aproximación de L _______________

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los sistemas de representación del concepto de límite de una función.

- Sistema de representación numérico.

Tabla 15. Sistema de representación numérico y sus dificultades (A. C. L. F.)

SUBPREGUNTAS	CORRECTA	INCORRECTA
A	56%	44%
B	59%	41%
C	47%	53%

Cuando se pidió encontrar la aproximación en la variable independiente el 44% de los estudiantes calcularon erróneamente su valor, de la misma forma sucedió cuando se pidió calcular la aproximación de sus imágenes con el 41% , por último cuando se pide dar una aproximación al límite el 53% de los estudiantes lo estiman en forma errónea.

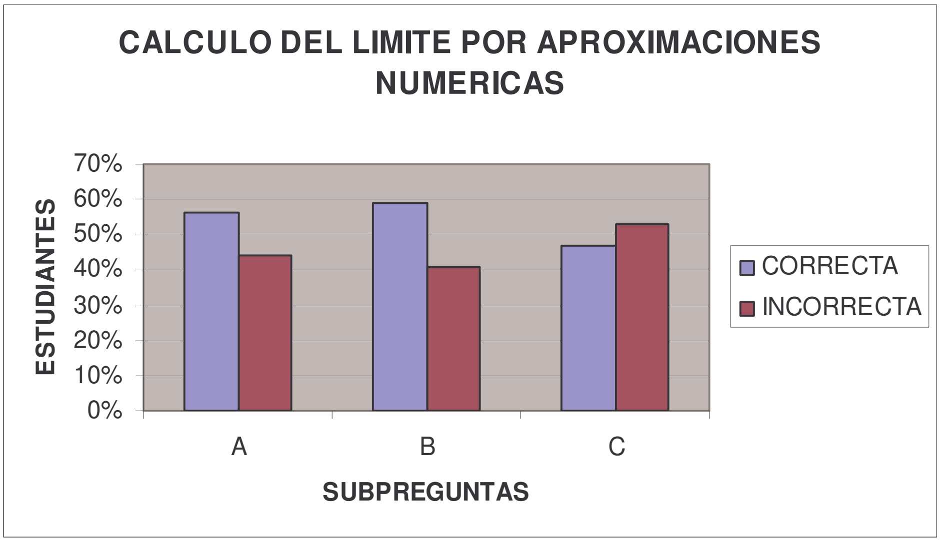
Esto explica nuevamente la afirmación que hace Margarida Fabra:

"Errores comunes para la lectura de tablas y gráficos son la disociación que ocurre entre la variable independiente x y la variable dependiente y "las ven por separado".

Y como lo reafirma Sonsoles Blázquez:

"El uso de las tablas numéricas sin situaciones que la interpreten provoca cierta desvinculación de las tendencias en *x* e *y.* Además la estimación errónea del límite vista en una tabla numérica puede ser dada por la falta de valores para comprobar que un número es el límite de una función".

Gráfica 15. Sistema de representación numérico y sus dificultades (A. C. L. F.).

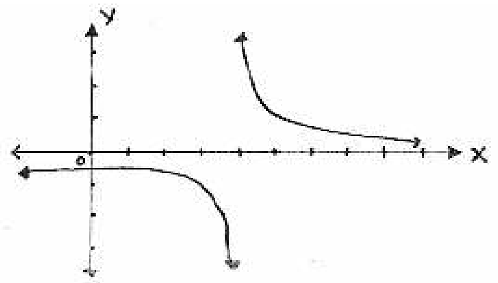


Los resultados obtenidos nos muestran que para estos estudiantes, tales situaciones (el uso de tablas numéricas), no se les ha dado un uso adecuado para observar el comportamiento de las variables y poder así estimar el límite, es decir, la organización de la variación en tablas numéricas permiten que se involucren procesos aritméticos, ayuda a comprender la variable y el comportamiento de las posibles fórmulas, la aproximación numérica y la estimación deben ser argumentos usados para la solución de problemas y de este ejercicio en especial.

En el desarrollo de las clases el trabajo sobre tablas numéricas y aproximaciones si llevó a cabo pero siempre a partir de una función dada y dentro de un contexto matemático, se observó que los estudiantes usaban la calculadora para este cometido, repitiendo una instrucción continuamente en este instrumento.
(Ver H y E línea 5, 21, 35, 37).

Nos permite también concluir que existe una dificultad en el núcleo conceptual del continuo numérico en sus procesos infinitos, tendencias y aproximaciones sucesivas las cuales interactúan con la variación. (Ver anexo E línea 25 -27; 72 - 76).

Para el análisis de una situación de una función con comportamiento asintótico se planteó que en la siguiente gráfica se señale la posición aproximada del valor de x para el cual el límite no existe, explicando su respuesta:



Explicación: ______________________________
____
____
____

Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los sistemas de representación del concepto de límite de una función.

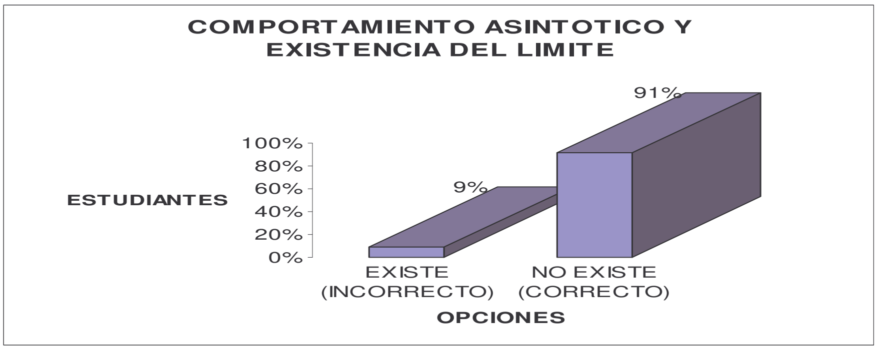
- Sistema de representación grafico (Comportamiento asintótico, existencia del límite).

Tabla 16. Sistema de representación gráfico (Comportamiento asintótico, existencia del límite).

EXISTE (INCORRECTO)	9%
NO EXISTE (CORRECTO)	91%

Para el 91% de los estudiantes se entiende el comportamiento asintótico en la gráfica de esta función en especial, ubican correctamente el punto donde la gráfica no toma valores reales y por tanto su límite no existe, sin embargo esta gráfica ya es familiar para ellos, pues se le dio tratamiento en las guías de trabajo y en clase con el uso de la calculadora graficadora.

Gráfica 16: Sistema de representación gráfico (comportamiento asintótico, existencia del límite).



Las fotos 18 y 19 muestran la representación simbólica de una función.

Foto 18

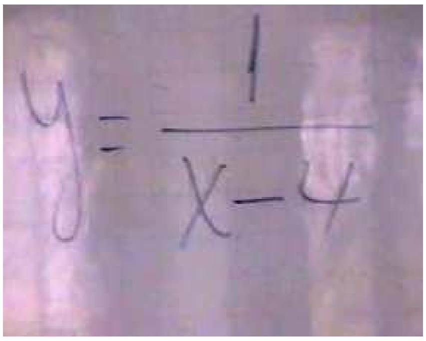


Foto 19

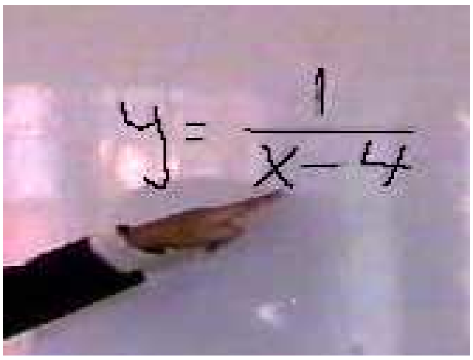


Foto 20. Representación numérica de la función Y = $\frac{1}{x-4}$, a través de la tabla de valores, con relación al comportamiento asintótico de la misma.

Foto 21 y 22. Muestran el tratamiento de la misma función a través del sistema de representación gráfico, con relación al comportamiento asintótico de la misma.

Foto 21

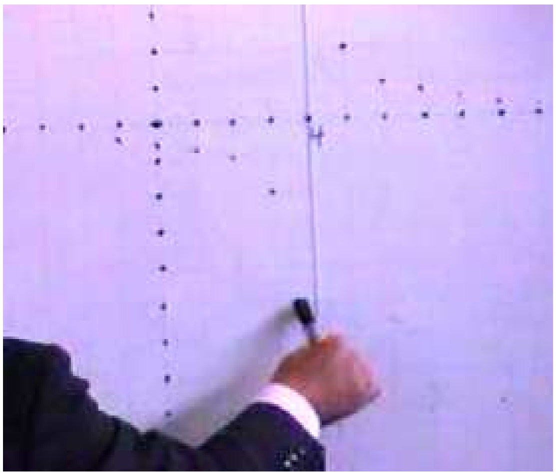
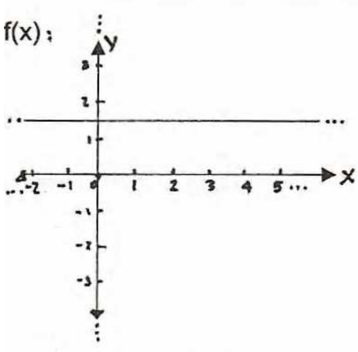


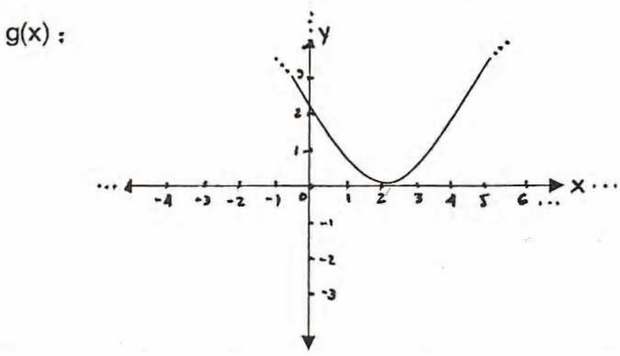
Foto 22

Las anteriores imágenes muestran claramente la explicación que da el docente acerca de una función asintótica en su manejo a través de sus sistemas de representación, que favorece la comprensión de la misma a través del paso por estas diferentes representaciones.

El docente también hace énfasis continuamente en lo concerniente al comportamiento asintótico, lo charla a sus estudiantes utilizando varios ejemplos y haciendo uso del lenguaje cotidiano y de las herramientas como la calculadora.
(Ver anexo E, línea 54 - 84).

Para cada una de las siguientes gráficas de funciones se solicitó al estudiante que indique si el límite existe cuando ***x*** tiende a infinito (∞) ó cuando tiende a menos infinito (-∞).





Para
f(x):____
____

Para
g(x):____
____

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a los sistemas de representación del concepto de límite de una función.

● Representación gráfica - Dificultades en la comprensión de la "Tendencia hacia el infinito".

Tabla 17. Tendencia del límite al infinito observado en el sistema de representación gráfico.

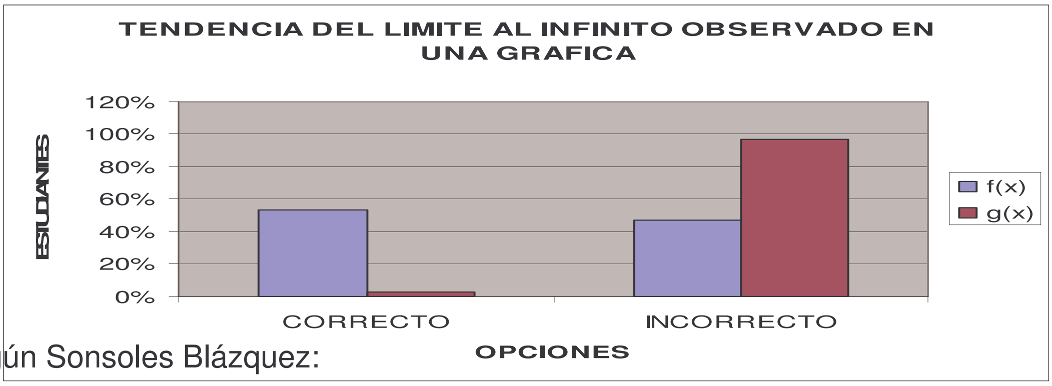
FUNCIONES	CORRECTO	INCORRECTO
f(x)	53%	47%
g(x)	3%	97%

Para el primer gráfico de f(x) que representa una función constante el 47% de los estudiantes muestra una dificultad cuando se les pide hallar el límite en dicha situación ($x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$).

Para la gráfica g(x) la cual representa una función cuadrática, el 97% de los estudiantes responden incorrectamente a la situación en ($x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$).

Las anteriores funciones representan situaciones "nuevas" para el estudiante, ya que explora la capacidad de análisis por parte de él en las tendencias, estos errores tan marcados nos hablan de una dificultad para analizar la existencia del límite utilizando el sistema de representación gráfico con funciones no tan familiares a ellos.

Gráfica 17. Tendencia del límite al infinito observado en el sistema de representación gráfico.



Según Sonsoles Blázquez:

"El sistema gráfico tiene sus limitaciones en cuanto a que no se puede ver toda la gráfica a la vez, además impide en algunos casos que sea comprendida la lateralidad del límite asimismo los alumnos asocian la tendencia a un movimiento por la recta".

Esto se ve claramente cuando en la apreciación de una función lineal a una cuadrática cambia sustancialmente su análisis en las tendencias, pues hay mayor dificultad en la representación de una función cuadrática a la de una lineal.

Algunas afirmaciones de los estudiantes:
"Si existe la gráfica para cuando x tiende a $+\infty$ y $-\infty$".

Además en las observaciones hechas en clase se pudo evidenciar que hay una dificultad por parte del estudiante en comprender la tendencia de una gráfica cuando la calculadora arroja como resultado una ilustración donde no se aprecia a simple vista las variaciones o cambios y/o puntos de corte con los ejes de la función, entre otros. Se notó también que el estudiante queda perdido cuando esto ocurre y es necesario que el docente le recuerde que puede utilizar otro sistema de representación para solucionar la dificultad del gráfico, por lo que se puede decir que no hay una traducción ni uso adecuado entre sistemas de representación para un mismo objetivo que en este caso era el de un ejercicio en mención.

La expresión gráfica impide en algunos casos que sea comprendida la literalidad del límite, pues los alumnos asocian la tendencia a un movimiento por la recta; así por ejemplo, tender por la derecha suele asimilarse a la tendencia al infinito.

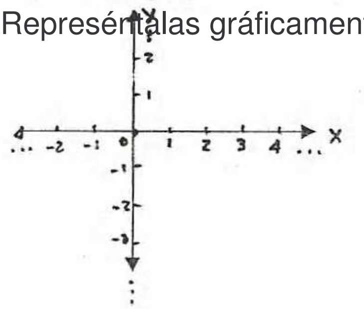
Relacionar esta tendencia gráfica con la numérica evita esta identificación errónea.[101] (Ver anexo E, línea 9 – 14, 44 - 53).

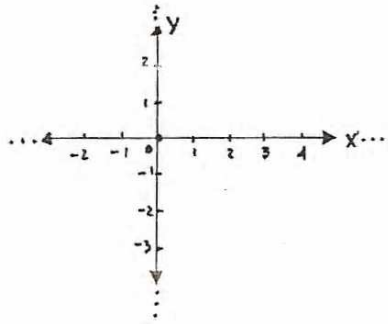
Posteriormente se plantearon las siguientes situaciones:

a) Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en x = 2;

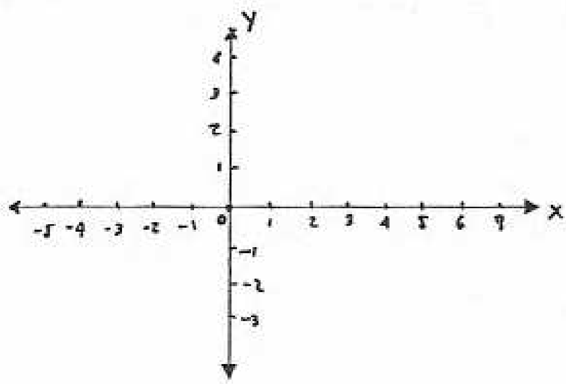
f(x) = g(x) =

Represéntalas gráficamente





b) Escribe una expresión algebraica de una función que no tenga límite en x = 1 y dibuja su gráfica
f(x) =



[101] Blázquez Sonsoles, Ortega Tomás. (2001). "los sistemas de representación en la enseñanza del límite" . revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.

Opción A.

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultad que presenta el estudiante en la transición entre sistemas de representación.

Tabla 18.Transición entre sistemas de representación.

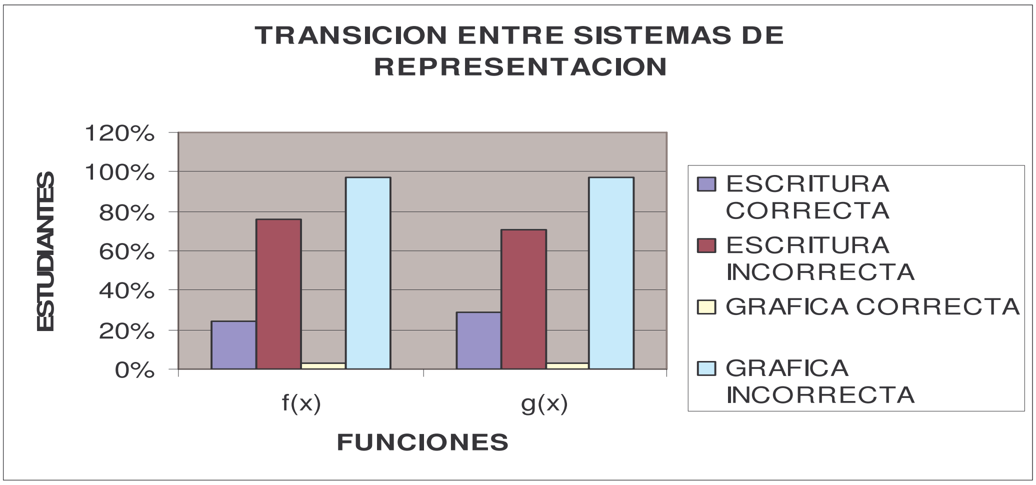
FUNCIONES	EXPRESIÓN ALGEBRAICA		GRAFICA	
	CORRECTA	INCORRECTA	CORRECTA	INCORRECTA
f(x)	24%	76%	3%	97%
g(x)	29%	71%	3%	97%

Sonsoles Blázquez, indica que la imagen conceptual que tiene el alumno del limite se enriquece o no al considerar éste desde distintas perspectivas (registros o sistemas de representación).

Para la situación a) con un 76% en f(x) y con un 71% en g(x) se observa que los estudiantes revelan una acentuada dificultad al no poder traducir la circunstancia del sistema de representación verbal al simbólico ya que los estudiantes no son capaces de encontrar una expresión algebraica apropiada que reúna los requerimientos pedidos por el problema y que garanticen la estimación adecuada del límite; se asume que ellos tienen una bases débiles en la formación del pensamiento algebraico analítico y también en el variacional, muestran también dificultad en cuanto a la traducción de la situación algebraica hacia un sistema de representación gráfico, pero esto es consecuencia de lo anterior y se ve claramente el esquema que se ha formado en el estudiante de que "sin fórmula no hay gráfica"[102], indicándonos que los estudiantes no han sabido complementar un registro con otro, es decir, los maneja como independientes, pues según Héctor Lara Chávez esta es una dificultad "evidente" en el aprendizaje del concepto de límite.

[102] Ferrini – Mundi, Geuther Joan. (Mayo de 1993) La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza, desarrollo curricular. Una perspectiva. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol. 3 No 1. Pág.53-69

Gráfica 18. Transición entre sistemas de representación.



Opción B.

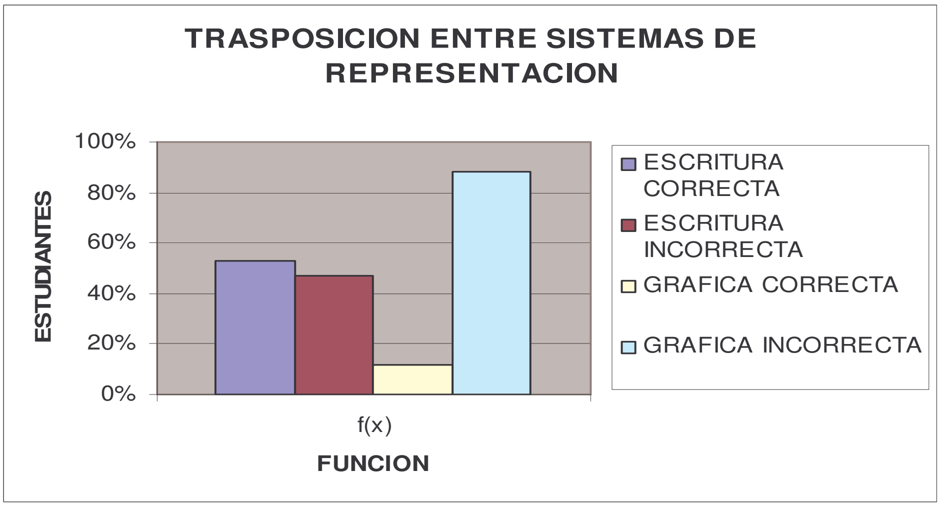
CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultad que presenta el estudiante en la transición entre sistemas de representación.

Tabla 19. Transposición entre sistemas de representación.

FUNCIÓN	EXPRESION ALGEBRAICA		GRAFICA	
	CORRECTA	INCORRECTA	CORRECTA	INCORRECTA
f(x)	53%	47%	12%	88%

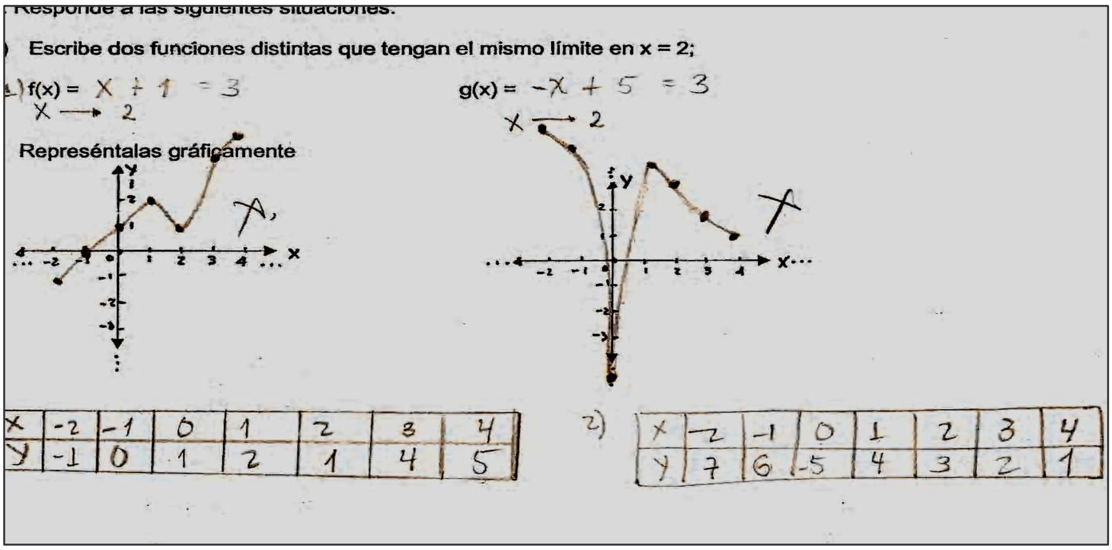
Para la situación b), con un 47% de respuestas incorrectas para la expresión algebraica y con un 88% para la representación gráfica muestran que los estudiantes tienen una acentuada dificultad en la transición entre el sistema de representación simbólico (algebraico – analítico) al sistema de representación gráfico; asumimos también que el estudiante cuando se da una gráfica de una función con asíntota este la entiende y la analiza y calcula el límite de ella, pero cuando se la da utilizando el sistema de representación verbal, que es lo que corresponde a esta situación, los estudiantes tienen dificultad al hacer la traducción del enunciado a un sistema de representación simbólico y gráfico y no establece nexos entre ellos, con lo cual se puede decir que el concepto de comportamiento asintótico de las funciones no está muy claro, agudizando también las dificultades algebraicas y de graficación impidiendo también el cálculo del límite de la función.

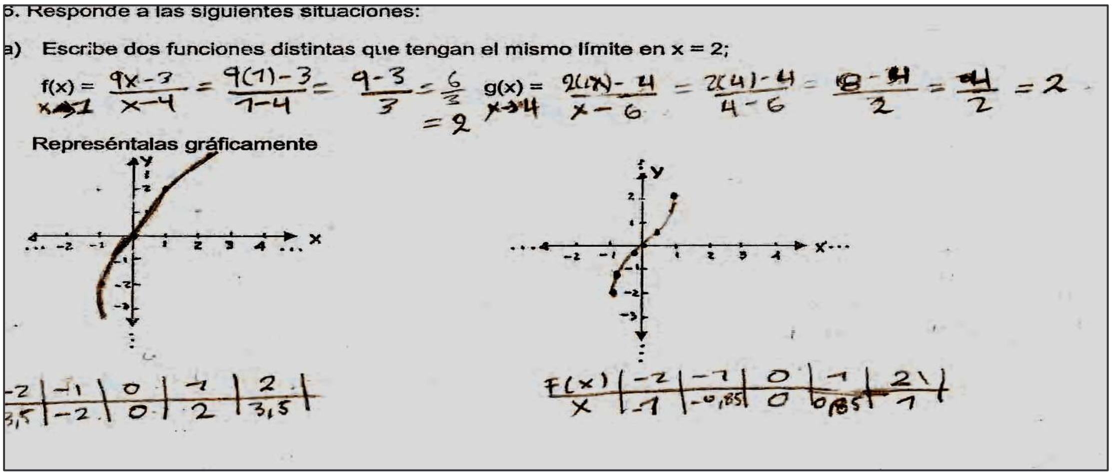
Gráfica 19. Transposición entre sistemas de representación.



De las observaciones hechas en clase y en el material de trabajo, se pudo apreciar que este tipo de ejercicios como los planteados por el test no se dan, los ejercicios que se toman para trabajar son condicionados por una expresión algebraica establecida que luego se pasa a dibujar o a evaluar numéricamente por medio de tabulaciones. No se le da un espacio para que el estudiante plantee sus ejercicios analizando el comportamiento de las variables que entran en juego.

Registro 4. Sistema representación gráfico incorrecto.





"El estudio de las expresiones algebraicas, entre otras cosas, debe servir como base para el inicio del estudio de las funciones siendo una herramienta de modelaje de situaciones reales, es así como el precálculo, área que profundiza en el estudio de funciones, sirven de base para desarrollar dos aspectos centrales en la formación matemática del bachiller: su capacidad para modelar situaciones y fenómenos reales y su capacidad y conocimiento para enfrentar los problemas del aprendizaje del cálculo" (MEN 2003)

El pensamiento variacional es quien ayuda a la formulación de modelos matemáticos para diversos fenómenos, permite además en el estudiante formarse progresivamente en una comprensión de patrones, relaciones y funciones, así como desarrollarse en su capacidad de representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas mediante símbolos algebraicos y gráficas apropiadas.

Por lo que se puede decir que hace falta en la enseñanza del concepto de límite tener en cuenta estos aspectos mencionados por el MEN.

Finalizando este test se consultó al estudiante sobre las ideas y nociones de los conceptos que entran en juego en la temática de límite de funciones, una primera situación fue la siguiente:

¿Qué ideas tienes acerca de las siguientes expresiones?

a) Límite de una función:

b) El límite es determinado:

c) El límite es indeterminado:

d) El Límite no existe:

CATEGORIA: DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE.
Subcategoría: Dificultades que presenta el estudiante en cuanto a la noción de límite.

Se obtuvieron los siguientes términos comunes que reúnen la mayoría de las afirmaciones de los estudiantes; se hace la aclaración de que algunas de las afirmaciones provienen al mismo tiempo de un solo estudiante:

Para la alternativa a)

Tabla 20. Afirmaciones de los estudiantes en cuanto al límite de una función.

Afirmaciones de los estudiantes	Frecuencia
Es un valor al cual tiende la variable x en un punto	13
Cuando se reemplaza y da un valor	1
Cuando la gráfica se acerca a un valor	6
No está claro	6
En blanco	4
Cuando se ve la tendencia de la función	7
Cuando hay relación entre las variables	5
Es cuando se tiende a algo pero nunca llega	4
Punto de finalización de la grafica hasta donde llega	1

Se observa que los estudiantes tienen algunas ideas intuitivas acerca de la noción de límite una vez desarrollada la temática en el aula de clases, pero vemos como algunas de estas afirmaciones están condicionadas, por ejemplo las afirmaciones "Cuando se reemplaza y da un valor" "Es un valor al cual tiende la variable x en un punto " demuestra que algunos estudiantes piensan que el límite de una función es una simple sustitución del valor dado en la expresión algebraica de la función correspondiente y le dan desde ya un valor concreto, esto ya se había comentado con los estudios hechos por Ferrini mundi, Michelle Artigue, Luís Rico, Mónica Mena y Eduardo Moreno.

En las observaciones de clase se puedo apreciar que cuando al estudiante se le pide calcular el límite de una función la gran mayoría se limita a realizar simples sustituciones sin tener en cuenta el verdadero significado de los que representa el concepto de límite. (Ver anexo E, línea 113 - 116).

"Cuando la gráfica se acerca a un valor", "Cuando se ve la tendencia de la función "estas afirmaciones también dan a entender de la dependencia de algunos estudiantes hacia el sistema de representación gráfico y su inconexión con los demás sistemas.

"Es cuando se tiende a algo pero nunca llega" vemos aquí como el estudiante interpreta el término límite a partir del uso de términos que encuentra en el contexto como lo afirma Cornú (1983); "tender a" lo asocian como aproximarse sin llegar.

Para la alternativa b)

Tabla 21. Afirmaciones de los estudiantes acerca de “el límite es determinado”.

Afirmaciones	frecuencia
Cuando da un valor exacto	4
Cuando da un valor real	7
No esta claro	5
Cuando da un número entero	2
Cuando por sustitución es posible hallarlo	9
Cuando hay grafica para una función	10
Cuando se sabe la tendencia o punto de aproximación de algo	2
Cuando no da cero o infinito	1
Cuando da um Valor exacto o aproximado	1
Cuando da Valores naturales como resultado	1
En blanco	2

Con las afirmaciones anteriores se expone que:

Al decir “Cuando hay gráfica para una función” los estudiantes se están refiriendo a que si una función se la puede representar gráficamente entonces ésta tiene limite, de esto se observa la fuerte inclinación de los estudiantes hacia el sistema de representación gráfico como único para entender el concepto de límite, asocian la “continuidad” con el trazo uniforme de la función y la discontinuidad con las asíntotas que se observan en la gráfica (ideas intuitivas), pero no tienen una visión global de este concepto en cuanto al análisis de los dominios de las funciones.

“Cuando por sustitución es posible hallarlo” caemos nuevamente en la dificultad comentada anteriormente de que el cálculo de límites se hace por una simple sustitución, sin embargo hay estudiantes que comprenden el significado de “el límite es determinado” con la afirmación “es cuando da un valor real”

Para la alternativa c)

Tabla 22. Afirmaciones de los estudiantes acerca de “el límite es indeterminado”.

Afirmaciones	Frecuencia
Cuando obtenemos indeterminaciones	14
Cuando es infinito	4
Cuando la función es asintótica	5
Cuando no se puede saber a que se aproxima	3
Cuando no existe la gráfica	3
Cuando no existe una cantidad determinada	1
No es claro	4
En blanco	2

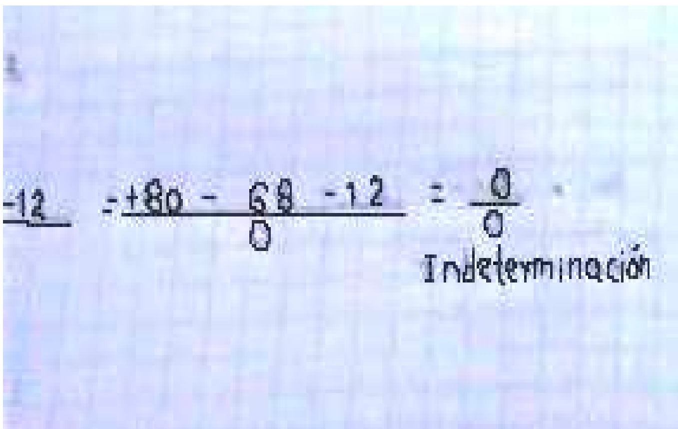
Para esta alternativa podemos decir que los estudiantes demuestran con las diferentes afirmaciones una aproximación hacia la comprensión de las indeterminaciones con respecto al límite de una función y cual es su rol, esto es alentador ya que la comprensión de algunas indeterminaciones históricamente han tenido unas grandes dificultades, sobre todo en expresiones como:

$\frac{c}{o}=\infty, \frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ [103]

La siguiente foto muestra como algunos estudiantes comprenden estas expresiones.

Foto 23. Comprensión de expresiones indeterminadas.

Foto 23



103 Camacho Alberto, Aguirre Mónica (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Revista RELIME. Vol. 4. Núm. 3. Noviembre. Pág. 237-265

Para la alternativa d)

Tabla 23. Afirmaciones de los estudiantes acerca de “el límite no existe”.

Afirmaciones	Frecuencia
Cuando al factorizar no se quita la indeterminación y la discontinuidad	7
“Cuando es un número no divisible en cero”	3
Cuando existe una asíntota	8
Cuando tiende a más infinito o menos infinito	7
Cuando no hay una gráfica para la función	4
Cuando la función se va al infinito	1
No es claro	3
En blanco/ no me acuerdo	2
Odio las matemáticas	1

Para esta opción los estudiantes se aproximan adecuadamente a establecer cuando un límite no existe.

Esto supone que hace posible que los estudiantes apliquen procesos algebraicos a la función para quitar su indeterminación, sin embargo el docente tuvo que hacer correcciones con respecto a este proceso algebraico. (Ver anexo E)

Esto se ve claramente en las siguientes imágenes.

Foto 24 a 27: uso de procesos algebraicos para eliminar indeterminaciones; el docente realizó las correcciones para el empleo procesos algebraicos y algorítmicos para eliminar las indeterminaciones.

Foto 24

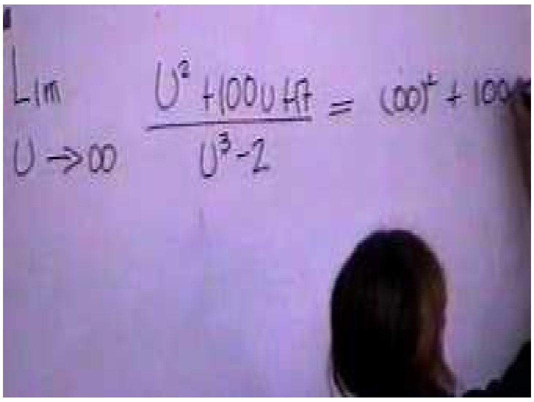


Foto 25

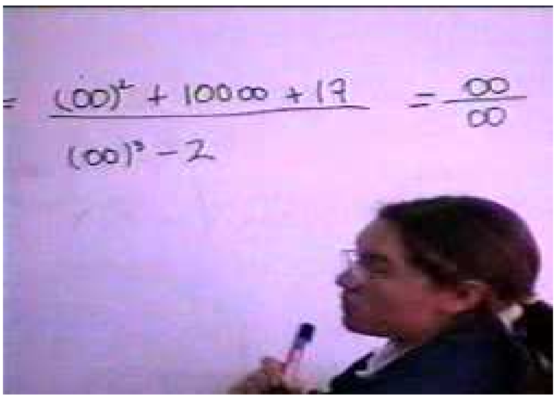
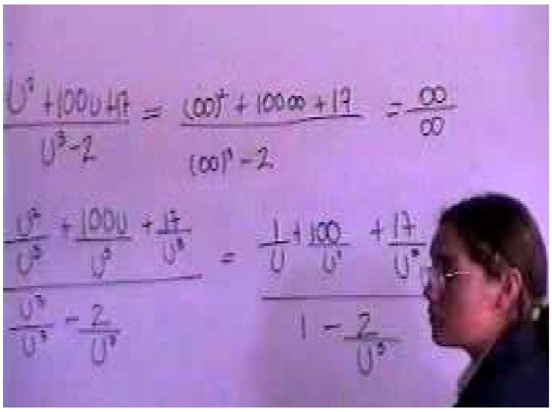
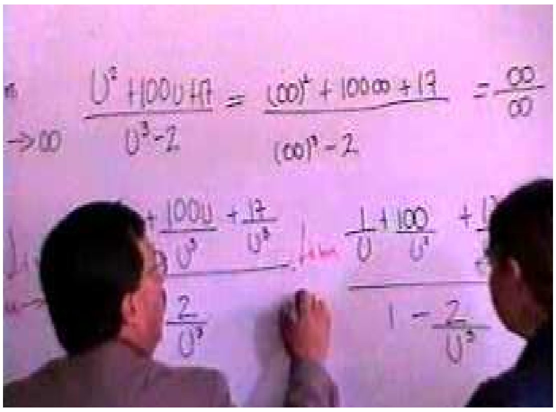


Foto 26

Foto 27





Teniendo en cuenta los anteriores análisis hechos en el test – 2 y en las observaciones realizadas en clase, podemos afirmar que los estudiantes de esta sección (11-1) manifiestan mayor dificultad hacia el manejo de expresiones algebraicas para el cálculo de limites de funciones el cual esta dentro del sistema de representación simbólico, además se expone claramente la inconexión e intransitividad entre los diferentes sistemas de representación (traducción deficiente entre ellos) lo que concuerda con los estudios comentados en esta investigación y con las apreciaciones hechas por los docentes en cuanto a las dificultades encontradas en los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje del concepto de límite de una función, de esta manera se da respuesta al cuarto objetivo específico planteado en este estudio.

8. CONCLUSIONES.

Se retoman los resultados más sobresalientes y en sentido general, relacionados con concepto de límite y las dificultades que manifiestan los estudiantes en su aprendizaje, según los sistemas de representación y los conceptos previos para su desarrollo teniendo en cuenta el pensamiento variacional.

Se establecen entonces las siguientes reflexiones:

- Los docentes de la institución INEM – Pasto, encargados de la materia de matemáticas en el grado once, conocen los sistemas de representación, numérico, gráfico, simbólico (algebraico – analítico) para el desarrollo del concepto de límite de una función, pero teniendo en cuenta los resultados obtenidos en las observaciones y test elaborados aplicados a los estudiantes del grado once uno de esta institución, se concluye que se hace mayor énfasis en el sistema de representación simbólico (algebraico-analítico) puesto que el interés de este curso es que el estudiante manipule el concepto algorítmicamente. El uso de la calculadora a través de las tablas numéricas y de los gráficos es muy esquemático pues estos ejercicios están exclusivamente dentro de un contexto formal; no se dan ejemplos de variación de magnitudes como la velocidad y el tiempo, no se dan ejemplos de la vida práctica donde interactúan las variables a través de las diversas magnitudes. El material de trabajo plantea ejemplos y ejercicios donde el tratamiento del concepto de límite parte siempre de expresiones algebraicas para luego llevarlas a los demás sistemas de representación, esto se hace por el manejo de la calculadora al ingresar la expresión algebraica necesariamente en ella. La revisión de los textos escolares de esta institución no proporciona ejercicios de modelación matemática, ni de procesos propios que exploren el pensamiento variacional en relación con el concepto de límite de una función, pues estos textos lo desarrollan dentro de un marco numérico como primera instancia a través de aproximaciones en tablas numéricas y luego dan el salto a las expresiones algebraicas y los procesos mecánicos de resolución de límites. La definición es muy formal y cargada de símbolos. Las aplicaciones están dentro del contexto matemático donde la demostración es una aplicación de unas reglas básicas para encontrar unos valores.

- Las dificultades que ha encontrado el docente en sus estudiantes en el desarrollo del concepto de límite de una función han sido en cuanto a la deficiencia en los conceptos previos, necesarios para su desarrollo y en el sistema de representación simbólico (algebraico – analítico), puesto que para obtener una buena comprensión de este concepto en el marco simbólico algebraico (que es lo que se enfatiza en esta institución) el estudiante debe tener una formación sólida en los procesos propios de factorización, racionalización, simplificación y desarrollo de expresiones algebraicas, dominar la teoría básica de funciones conociendo las funciones elementales básicas (lineal, cuadrática, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas) y según Michèle Artigue considera como elementos esenciales en el cálculo: los números reales y las funciones, así como también la variabilidad; la cual permitirá analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre como de las ciencias y las propiamente matemáticas. Concluimos que estos procesos mencionados anteriormente los construye mejor el trabajo en el pensamiento variacional, pues el continuo numérico, las funciones, las magnitudes y las expresiones algebraicas se interrelacionan entre ellas cuando el estudiante toma acciones de observación, registro y utilización del lenguaje matemático, para aproximarse a una modelación haciendo uso de sus conocimientos en estos núcleos conceptuales.

- En los preconceptos necesarios para el desarrollo del concepto de límite de una función, se pudo observar, que el estudiante tiene las siguientes dificultades en cuanto a: Los números reales; no identifican un número real como un expresión decimal infinita, el tratamiento dentro del pensamiento variacional a través de las expresiones decimales como aproximación a un número real son deficientes, las diversas operaciones con los conjuntos numéricos en un tratamiento aritmético y algebraico son débiles en relación con los números enteros, racionales e irracionales, tienen dificultad en cuanto a la ley de los signos en las operaciones aritméticas, no reconocen a un número real y tienen problema al ubicarlo en la recta numérica, es decir, existe deficiencias en la comprensión del número real a través de sus diferentes sistemas de representación. En cuanto a las funciones hay dificultad al encontrar las preimágenes de una función expresada en el sistema de representación grafico, se interpretan funciones generales como si fueran lineales o cuadráticas, se comprende con dificultad una función a través de sus diferentes sistemas de representación, hay conflicto al modelar una situación o realizar la transición de un sistema a otro de ella, pues las situaciones que involucran los procesos de variación y cambio están dentro de un contexto netamente matemático, a esto se le puede agregar que no se hace mención de ejercicios y/o aplicaciones en un contexto real o de algunos fenómenos físicos o sociales que ejemplifiquen las funciones, la variación y el comportamiento de las magnitudes; impidiendo que el estudiante tenga una visión más amplia del mismo concepto con respecto a sus aplicaciones, es decir el estudiante lo ve desconectado de la realidad. En lo algebraico, la dificultad que presenta el estudiante es en cuanto a la manipulación algebraica, con sus diferentes operaciones; como la racionalización, factorización , simplificación y desarrollo de expresiones algebraicas, lo que se puede explicar en el descuido en el tratamiento de los demás sistemas de representación y sus interrelaciones que es lo que nutre el paso hacia un sistema simbólico - algebraico , la poca fundamentación en estos procesos hace que el manejo de los límites de funciones en su operatoria mantenga las dificultades observadas como procesos erróneos y mala interpretación de la noción de límite de una función por parte del estudiante sin tener en cuenta su verdadero significado.

● En cuanto al tratamiento de la noción del concepto de límite de una función a través de los sistemas de representación se concluye:

1. En el sistema de representación verbal, la dificultad radica en que el estudiante no interpreta claramente situaciones de variación y cambio relacionados con la estimación del límite de una función, esto se debe al poco énfasis que se le ha dado a este sistema de representación, es muy superficial, es decir, no se le da la importancia que requiere, pues para entender la noción de límite es importante identificar las magnitudes y la relación que existe entre ellas, describiendo en un lenguaje usual su comportamiento y haciendo un tratamiento cualitativo al fenómeno, que permitirá sacar algunas conclusiones y hacer unas primeras predicciones de lo que sucederá. El tratamiento superficial de este sistema de representación impide que el estudiante interprete y se aproxime con sus propias palabras e ideas sobre esta noción, lo cual sería valioso en el tratamiento de las dificultades que surgen en el desarrollo y la maduración de este concepto, como una herramienta metodológica para el docente.

2. En el sistema de representación numérico, los estudiantes del grado once uno de esta institución muestran dificultades en el tratamiento del límite de funciones cuando este se traslada a una tabla de valores, las aproximaciones y estimaciones no son las esperadas y se explica esto en la deficiencia del núcleo conceptual del continuo numérico, también se mira una disociación entre las variables que interactúan en la tabla misma, lo que hace que la variación y el cambio no se aprecie como es debido, se dan muy pocos ejemplos que modelen la noción de límite por medio del comportamiento de las variables a través de las tablas numéricas, el contexto predominante es el matemático donde se analizan unos valores de funciones algebraicas con una tendencia hacia un punto y no más. Lo que se rescata es el uso de las nuevas tecnologías para las aproximaciones, en este caso la calculadora TI92.

3. En el sistema de representación gráfico, lo que se observó es que el estudiante depende mucho de una fórmula para hacer la representación gráfica correspondiente, al enfrentarse a gráficas nuevas o modelos nuevos de ellas, el estudiante las reconoce con dificultad y las traduce erróneamente hacia los otros sistemas de representación, tiene dificultades en construir una expresión algebraica a través de la gráfica lo que muestra la falta de complementación de un registro a otro, la tendencia y la variación de ella no se entiende en las implicaciones que le atañen ya sea dentro de un sistema de representación numérico y/o algebraico lo que impide que la noción de límite como variación entre las variables y el comportamiento gráfico sean disociados, es decir no tengan conexión los unos con los otros.

4. La falta de ejemplos alusivos a la noción de límite dentro de este sistema de representación son escasos, los que se dan están dentro del contexto matemático que dependen mucho y están en relación con una fórmula o expresión algebraica, de ahí las afirmaciones “sin fórmula no hay gráfica”, no se explora el tratamiento gráfico de situaciones o fenómenos cotidianos, como distancias, velocidades, magnitudes proporcionales, entre otros. Esto conlleva a que al estudiante se le dificulte interpretar la noción de límite por medio de un gráfico.

5. La mayor dificultad que presenta el estudiante en el manejo de expresiones algebraicas para el cálculo de límites que está dentro del sistema de representación simbólico, se debe a que el estudiante no domina procesos de factorización, racionalización, simplificación y desarrollo de expresiones algebraicas; esto se entiende como una finalidad netamente algorítmica en el cálculo de límites pues se reduce a una simple sustitución de valores llegando a obtener indeterminaciones sin comprender el verdadero significado de este campo conceptual. Esto se debe también a la inconexión que existe entre los sistemas de representación mencionados pues para la buena interpretación de este concepto por parte del estudiante se deben en primer lugar interpretar, cuantificar situaciones; describiendo, analizando trasladando esos datos a una tabla numérica y ver los patrones de comportamiento para luego poderlos pasar a una escritura correcta de expresiones algebraicas donde se entienda el papel de las variables en las situaciones de variación y cambio propias de la noción de límite. Los escenarios geométricos y numéricos permiten reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las trasformaciones, estas exploraciones permiten hacer en primera instancia una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades involucradas, posteriormente las tablas de datos extraídas permiten realizar un gráfico donde la identificación de la variable independiente y la dependiente juega un rol importante en las trasformaciones que sufre ella, y proporcionen una mejor comprensión de las fórmulas o expresiones algebraicas en el manejo de las variables ahí implicadas.

9. RECOMENDACIONES

Desde la teoría del concepto de límite de una función y del análisis de resultados, se sugiere:

- En el análisis teórico sobre el concepto de límite de una función y en relación con la enseñanza - aprendizaje de la noción del concepto de límite se considera importante desde la didáctica de las matemáticas, desarrollar el concepto de límite por cada uno de los sistemas de representación, trabajando este concepto dentro del pensamiento variacional, esto favorece al aprendizaje, y lo hace: por un lado compensando las limitaciones de unas representaciones con otras , y, por otro, permitiendo que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación más apropiada para cada situación, también hace que el estudiante analice e interprete fenómenos cotidianos, físicos; haciendo unas primeras exploraciones hacia la utilidad del límite como explicación de las regularidades y cambios que sufren estas situaciones, de acuerdo al comportamiento de las variables propias de cada problema y haciendo que se madure el proceso de modelación matemática.

- Para trabajar el límite finito en un punto se debe comenzar con situaciones expresadas en forma verbal, que se traducen al estudio tabular de la aproximación. Las tablas se pueden usar para llevar a los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto e identificación de la variable independiente y dependiente siendo esto más significativo, observando las trasformaciones que suceden en los sistemas de representación de una misma situación mirando y analizando sus variables. Es decir se compara este estudio numérico con el gráfico, y se ejemplifica también utilizando el algebraico, todos ellos interrelacionados.

- Las tendencias infinitas de una función se ejemplifican mejor desde el pensamiento variacional a través de los sistemas de representación como el gráfico donde los comportamientos de la función se observan al manipular las variables y viendo las trasformaciones que sufre la gráfica, el sistema de representación numérico completa el gráfico vinculando esta idea gráfica con la de límite infinito o en el infinito y aplicando la idea de tendencia secuencial, que es fácil trabajar a partir de tablas de valores y que cobra mayor sentido cuando se trabajan ejemplos concretos como variación de magnitudes, crecimientos de poblaciones, crecimientos de sustancias radiactivas, crecimientos exponenciales, etc.

El siguiente problema es extraído del examen de estado ICFES de Abril 15 de 2007. Se muestra claramente el sentido de la evaluación del estado colombiano.

Se observa un problema acerca de una situación de la vida real asociada a la aplicación de una vacuna en unos animales.

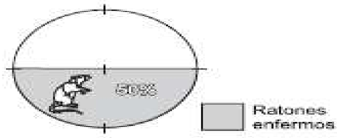
Para probar el efecto que tiene una vacuna aplicada a 516 ratones sanos, se realiza un experimento en un laboratorio. El experimento consiste en identificar durante algunas horas la regularidad en el porcentaje de ratones que se enferman al ser expuestos posteriormente al virus que ataca la vacuna. Las siguientes gráficas representan el porcentaje de ratones enfermos al cabo de la primera, segunda y tercera hora de iniciado el experimento.

Primera hora   Segunda hora   Tercera hora

13. Respecto al estado de los ratones con el paso del tiempo **NO** es correcto afimar que

A. al cabo de la primera hora hay 75 ratones sanos.
B. al cabo de la primera hora hay 129 ratones enfermos.
C. transcurridas dos horas y media hay más ratones sanos que enfermos.
D. entre la segunda y tercera hora el número de ratones enfermos aumentó en 6,25%.

14. Observando los datos anteriores y considerando la regularidad <u>en el porcentaje de ratones enfermos</u>, un integrante del equipo de investigación representó en la siguiente gráfica el porcentaje de ratones enfermos al cabo de la cuarta hora de iniciado el experimento.



Cuarta hora

Esta gráfica **NO** es correcta porque

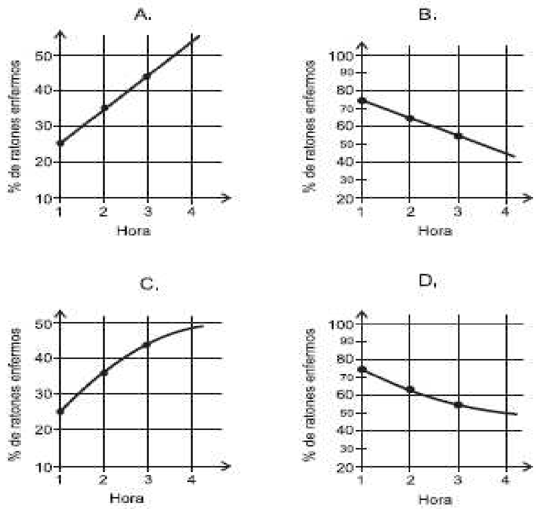
A. la información que se representa corresponde al porcentaje de ratones enfermos al cabo de la quinta hora de iniciado el experimento.
B. al cabo de la cuarta hora de iniciado el experimento debería haber 3,125% menos ratones enfermos que los representados.
C. la información que se representa corresponde al porcentaje de ratones enfermos al cabo de tres horas y media de iniciado el experimento.
D. al cabo de la cuarta hora de iniciado el experimento debería haber 56,25% de ratones enfermos.

Se pretende que el estudiante a través de su análisis, describa, interprete y resuelva la situación empleando procesos los propios de la variación, viendo el comportamiento de las variables y su relación con el fenómeno, e implícitamente se le pide calcular una aproximación y un límite para el fenómeno descrito a través de sus variables mismo.

Luego observamos la traducción que debe hacer el estudiante hacia otros sistemas de representación, esta vez el gráfico.[104]

[104] Examen de Estado ICFES. Prueba de matemáticas. Abril 15 de 2007.

15. La gráfica que representa mejor el porcentaje de ratones enfermos es



16. Sea t el número de horas transcurridas después de iniciado el experimento. La expresión que representa **el incremento** en el porcentaje de ratones enfermos entre el tiempo t y un tiempo $(t+1)$ es

A. $25\,t$

B. $25 \cdot 2^{t}$

C. $\frac{25}{2^{t}}$

D. $25 - \frac{25}{2^{t+1}}$

17. Luego de resultar infectado con el virus, un ratón tiene tan sólo un 35% de probabilidad de sobrevivir. Según esto, si se hubiera suspendido el experimento al cabo de la primera hora de iniciado, el número de ratones vivos, unas horas más tarde, posiblemente sería 432. Esta afirmación es

A. falsa, porque de los 516 ratones morirían 129.

B. falsa, porque al cabo de esta hora habría aproximadamente 180 ratones vivos.

C. verdadera, porque sobrevivirían 65 ratones de los 387 que se contagiaron con el virus.

D. verdadera, porque al cabo de esta hora lograrían sobrevivir 45 ratones de los infectados.

Por último se plantea como el estudiante puede describir el fenómeno o modelarlo a través de una función, lo que permitirá luego elaborar sus conclusiones y las claves para resolver el problema. Observamos como el límite para una función es una herramienta clave para resolver y entender el fenómeno, pero no está escrito en el lenguaje propiamente matemático sino que parte de un problema real, donde se quiere comprender la capacidad de los estudiantes para enfrentar un problema desde el análisis y comportamiento de sus variables.

Es decir en el bachillerato no se pretende que se hagan cálculos sin sentido si no que el concepto sea interpretado correctamente a partir de fenómenos reales.

BIBLIOGRAFÍA

- ALCALDE COLONIA, Oscar (2006). Una aproximación didáctica a nuestro hacer en matemáticas. Documento indexado. MEN – www.colombiaaprende.edu.co.
- ARTIGUE, Michèle (1988) Revista Relime Vol. 1 No 1.
- ARTIGUE, Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia.
- ARTIGUE, Michèle y otros. (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática. Grupo editorial Iberoamericana. Bogotá – Colombia.
- ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos.
- AUSUBEL, D. Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Paidós. Barcelona, 2002.
- BABINI, José. (1981). Historia de las ideas modernas en la matemática. Serie de Matemática OEA. Monografía No 4. Segunda Edición.
- BIXIO, C: Entrevista a José A. Castorina. Constructivismo. Una tesis epistemológica. Revista Aula Hoy, Nº 2, 1995.
- BLÁZQUEZ, Sonsoles y ORTEGA, Tomás. (2001). "Los sistemas de representación en la enseñanza del límite". Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa. Vol. 4, No 3.Universidad de Valladolid (España) 2001 pág. 219-236.
- BOYER, Carl. The history of the Calculus and its Conceptual Development. Editorial. Dover Publications. (1961).
- BROUSSEAU, G. (2000) Los obstáculos epistemológicos en los problemas en matemáticas. Documento en Internet.
- C. H, Edwards Jr (1979). The historical development of the calculus. Edit. Springer – Verlag. New York. Inc.
- CAMACHO, Alberto y AGUIRRE, Mónica (2001). Situación didáctica del concepto de límite infinito. Revista RELIME. Vol. 4. Núm. 3. Noviembre. Pág. 237-265.
- CASTSIGERAS, Eleonora; CURIOTE Karina y MIGUEZ, Marina. (2005) Un enfoque constructivista en la enseñanza de los conceptos de límite y continuidad. Universidad de la República. Montevideo Uruguay. Julio 4. Versión en Internet.
- CHEVALLARD, Y. (1985). La transposición didactique. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- DE TORRES, Mónica. (2000). Algunas Pautas didácticas para la introducción del concepto de límite finito. Revista EMA, Vol. 6, No 1. Pág. 40-55.
- DELGADO Cesar Augusto. (Mayo 1994) Sobre la enseñanza del concepto de límite. Revista Matemáticas enseñanza Universitaria. Vol. 3 No 2.
- ENCARTA 2007. Biblioteca Interactiva. Microsoft Service.

- ERAZO, Humberto y NARVÁEZ, Oscar. (2006) Guías de trabajo. Grado once. INEM – Pasto. Colombia.
- ESTÁNDARES CURRICULARES (matemáticas). Propósitos generales del currículo en matemáticas. MEN (Colombia).
- ESTÁNDARES CURRICULARES PARA LA EDUCACIÓN (matemáticas), grados 9, 10,11. MEN (2003). Bogotá.
- EXAMEN DE ESTADO ICFES. Prueba de matemáticas. Abril 15 de 2007.
- FABRA, Margarida y DEULOFEU, Jordi. (2000) Construcción de gráficos de funciones: "continuidad y prototipos". Revista Relime. Vol.3. No. 2. Julio. Pág. 207-230.
- FERRINI, Mundi y GEUTHER, Joan. (Mayo de 1993) La reforma de los cursos de cálculo: aprendizaje, enseñanza, desarrollo curricular. Una perspectiva. Revista Matemáticas: enseñanza universitaria. Vol. 3 No 1.
- FONT, VicenÇ. (2003) Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la educación matemática. Boletín de asociación matemática venezolana. Vol. 10. No 2. Pág. 249 – 279. Universidad de Barcelona - España.
- GARCÍA, Gloria; CERRANO, Selly y DÍAZ, Hernán. (2001). Una aproximación epistemológica, didáctica y cognitiva a nociones básicas y conceptos del cálculo. Departamento de Matemáticas. Universidad Nacional Pedagógica. Red Académica. Bogotá –Colombia. Pág. 1 – 6.
- GÓMEZ, Claudia P. y otros. (2002). Elementos de matemáticas con MAPLE .Udenar – Pasto. Pág.88
- HITT, Fernando. (1998).Visualización matemática – representaciones, nuevas tecnologías y currículo.
- HITT, Fernando. (2000) Construcción de conceptos matemáticos y de estructuras cognitivas. Departamento de matemática educativa. Cinvestav – IPN-México. Pág. 1-15.
- JARAMILLO, Carlos Mario; DUARTE, Pedro Vicente y otros. (2003). Aspectos de la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite. IX Encuentro ERM – USCO. Neiva – Septiembre. Colombia.
- LARA CHÁVEZ, Héctor. (2000) Instituto tecnológico de Zacatepec. Unidad de Matemáticas- México.
- LARSON, Roland y HOSTETLER, Robert P. (1991). Cálculo Undécimo Grado. Editorial MacGraw-Hill. Pág. 5 - 30
- MEDINA, Ana Cecilia. (2003) Concepciones Históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá – Colombia.
- MEN (2003). Estándares curriculares en matemáticas – Grado once (secundaria). Bogotá Colombia.
- MEN (2003). Estándares curriculares para la educación (matemáticas). Grados 9, 10, 11. Bogotá – Colombia.

● MEN. (1998) Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 77-78.
● MEN. (1998) Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 78-79
● MEN. (1998) Lineamientos Curriculares. Área de Matemáticas. Grado Octavo – Noveno (secundaria). Bogotá – Colombia.
● MEN. (2004) Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá - Colombia. Pág. 20.
● MEN. (2004) Pensamiento variacional y tecnologías computacionales. Bogotá - Colombia. Pág. 1-4
● MEN. (1998). Lineamientos curriculares en matemáticas. Bogotá – Colombia. Página 56, 76.
● MEN. Estándares curriculares en matemáticas. (1998) Propósitos generales del currículo en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 49 – 81.
● MEN. Estándares curriculares en matemáticas. (1998) Propósitos generales del currículo en matemáticas. Bogotá – Colombia. Pág. 77 – 78
● MENA, Mónica y MORENO, Eduardo. (1997) Aproximaciones al concepto de Variable. Revista EMA., Vol. 3, No 1, pág. 53-63.
● MORENO, Vladimir y RESTREPO, Mauricio. Alfa 11. Libro de texto de Matemáticas. Edit. Norma (2000).
● OCARA. Registro de notas periodo A-2005. FAC. Ingeniería .Udenar -Pasto
● PLANAS, Nuria, FONT, VicenÇ (2000). Una aproximación socio cultural a las dificultades de aprendizaje matemático. Versión en Internet.
● POZO, I (1993) Teorías cognitivas del aprendizaje. Morata, Madrid.
● PRUEBAS ICFES (Enseñanza media) (2005 – 2006) .MATEMÁTICAS.
● RECALDE, Luís Cornelio. (2004). La Lógica de los números infinitos. Un acercamiento histórico. Revista Matemáticas –Enseñanza Universitaria. Septiembre. Vol. 12, No 1. pág. 51-72.
● RECHERCHES EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. Versión en Internet – www.google.com + artículos académicos + Recherches en didactique des mathématiques.
● REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA. (2001) Vol. 4. núm. 3, Noviembre.
● RICO, Luís. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática – Universidad de Granada – España.
● ROMERO, Isabel y RICO Luís. (1999). Representación y comprensión del número real. Una experiencia didáctica en secundaria. Revista EMA. Vol. 4, No 2. Pág. 117-151.
● SAUCEDO, René; CUEVAS, Francisco; HERNÁNDEZ, Luís. (2000) Un estudio de límite de funciones racionales: formas indeterminadas 0/0.

● SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématique*s. Vol. 6.1, pp. 5-67.
● SONSOLES, Blázquez y ORTEGA Tomás (2001). “Sistemas de representación en la enseñanza del límite” Universidad de Valladolid (España) pág. 229-230.
● SOTO, Oscar Fernando y NARVÁEZ Oscar. (2004). “La calculadora en el aula” Udenar – Pasto. Pág. 127
● TALL D y VINNER S (1995) Imagen del concepto y definición del concepto en matemáticas con particular referencia en los límites y continuidad. Educational Studies in mathematics. Vol. 12. pág. 151-169.
● URIBE, Carlos. (2000) El computador en la clase de matemáticas: La modelación matemática. Universidad de Valle, Pontificia universidad Javeriana. Cali – Colombia. Versión en Internet.
● URIBE, Carlos (2000) La modelación matemática. Universidad de Valle. Cali – Colombia.
● VÁZQUEZ COBO, Manuela. (2004) La teoría del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas. Ministerio de Educación nacional. Chile. Unidad de currículo y evaluación. Artículo Revista red Escolar. Chile. Versión en Internet. http //: www. rmm.cl./bitácora/vista_resumen.php?proy_ccod=37
● VERGNAUD, Gérard. (1990) Investigaciones en didáctica de las matemáticas. Vol. 10, No 2 y 3. Francia. pág. 133 – 170.
● WILHELMI, Miguel; DE GODINO, Juan y LACASTA, Eduardo (2004) Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. Universidad Publica de Navarra – Pamplona – España.

ANEXOS.

Anexo A. registro de notas de estudiantes en el periodo a de 2005.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO			
SOLICITUD PROGRAMA DE MATEMATICAS - PROYECTO DE INVESTIGACION			
NOTAS DE ESTUDIANTES EN EL PERIODO A DE 2005			
18/05/2006 20:21			

COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	21010216	1031	4,1	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	21010256	1031	2,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	21010262	1031	3,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	21010271	1031	3,6	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	21010273	1031	2,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010232	1031	2,5	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010234	1031	4,1	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010244	1031	3	1

COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010245	1031	4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010246	1031	4,5	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010250	1031	3,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010259	1031	3,3	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	22010275	1031	3,1	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010222	1031	4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010223	1031	4,8	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010224	1031	4,7	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010228	1031	3,9	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010236	1031	3	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010241	1031	4,1	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010244	1031	3,3	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	23010257	1031	2	1
10	LICENCIATURA	23010270	1031	3,9	1

	EN INFORMATICA				
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010207	1031	4,5	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010208	1031	4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010210	1031	4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010211	1031	4,6	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010212	1031	4,8	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010217	1031	3,9	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010219	1031	3,8	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010220	1031	4,5	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010224	1031	4,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010225	1031	4,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010226	1031	4,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010242	1031	3,7	1
10	LICENCIATURA EN	24010243	1031	3,4	1

	INFORMATICA				
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010245	1031	4,6	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010252	1031	4,3	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010255	1031	4,6	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010257	1031	4,4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010258	1031	4,5	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010260	1031	2,9	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010265	1031	3	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010266	1031	5	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010267	1031	3,7	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010268	1031	4,3	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	24010271	1031	3,8	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	99010128	1031	4	1
10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	200010207	1031	0	1

10	LICENCIATURA EN INFORMATICA	200010229	1031	3,8	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011239	1031	2,6	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011250	1031	3,3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011251	1031	1,9	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011261	1031	2,3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011270	1031	1,9	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011272	1031	2,6	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011284	1031	2,7	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	23011285	1031	3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011208	1031	2,2	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011210	1031	3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011215	1031	3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011219	1031	2,2	1
11	LICENCIATURA	24011226	1031	2	1

	EN MATEMATICAS				
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011227	1031	2,6	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011231	1031	3,4	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011234	1031	3,8	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011235	1031	3,8	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011242	1031	3,1	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011248	1031	3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011249	1031	0,7	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011250	1031	2,7	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011253	1031	2,4	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011257	1031	4,3	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011259	1031	2,5	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011268	1031	4	1
11	LICENCIATURA EN	24011270	1031	2,6	1

	MATEMATICAS				
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011278	1031	2,7	1
11	LICENCIATURA EN MATEMATICAS	24011284	1031	2,4	1
33	INGENIERIA CIVIL	20153221	108	1,9	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
33	INGENIERIA CIVIL	21033202	108	3,5	1
33	INGENIERIA CIVIL	22033238	108	2,1	1
33	INGENIERIA CIVIL	22033238	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	23033206	108	1,6	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033231	108	0,5	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033234	108	0,8	1
33	INGENIERIA CIVIL	23033242	108	3	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033243	108	3,8	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033247	108	3,9	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033250	108	0,5	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033259	108	2,2	9
33	INGENIERIA CIVIL	23033259	108	2,3	1
33	INGENIERIA CIVIL	23033263	108	2,7	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033263	108	3,3	9
33	INGENIERIA CIVIL	23033267	108	2	9

33	INGENIERIA CIVIL	23033267	108	2,4	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033269	108	3	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033291	108	3,2	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033292	108	2,3	2
33	INGENIERIA CIVIL	23033292	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	23153206	108	3,1	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
33	INGENIERIA CIVIL	23153207	108	2,7	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153215	108	3,1	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153226	108	3	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153233	108	1,8	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153237	108	3,2	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153253	108	2	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153260	108	3,3	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153267	108	3,3	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153272	108	2	1
33	INGENIERIA CIVIL	23153273	108	3,1	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033207	108	4	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033210	108	3,1	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033211	108	2	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033213	108	2,2	1

33	INGENIERIA CIVIL	24033217	108	3,5	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033218	108	2,7	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033218	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033225	108	2,4	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033225	108	3,1	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033226	108	3	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033229	108	2,8	2
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
33	INGENIERIA CIVIL	24033229	108	3,1	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033231	108	2	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033231	108	2,3	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033232	108	3	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033233	108	3,4	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033236	108	2	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033239	108	2,5	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033239	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033240	108	1,8	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033240	108	2,7	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033242	108	2	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033242	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033243	108	2,1	1

33	INGENIERIA CIVIL	24033245	108	3,6	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033247	108	2,8	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033248	108	0,5	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033252	108	1,5	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033254	108	0,5	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033258	108	3,7	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033265	108	2	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033265	108	3	9
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
33	INGENIERIA CIVIL	24033283	108	2,6	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033283	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033285	108	2,7	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033285	108	3	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033289	108	0,7	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033290	108	3,1	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033291	108	3,2	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033293	108	3	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033301	108	2	9
33	INGENIERIA CIVIL	24033301	108	2,6	1
33	INGENIERIA CIVIL	24033302	108	0,5	2
33	INGENIERIA CIVIL	24033302	108	3	9

34	INGENIERIA DE SISTEMAS	21034259	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	22034226	108	2,5	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	22034261	108	3	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	22034298	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	22036221	108	3,1	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	22036275	108	0	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034226	108	2,9	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034243	108	3,5	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034245	108	1,8	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034249	108	1,5	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034256	108	1,6	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034266	108	3,2	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034269	108	3,5	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034291	108	2,4	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034293	108	3,1	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034308	108	3,3	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034310	108	3,1	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23034312	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036207	108	1,5	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036219	108	1,3	1

34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036222	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036224	108	3,2	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036227	108	1,9	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036230	108	1	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23036261	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	23039229	108	0	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034204	108	3,2	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034210	108	3,3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034211	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034221	108	2,1	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034222	108	3,3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034223	108	3,7	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034228	108	1,5	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034231	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034235	108	4,1	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034238	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034241	108	1,8	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034242	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034243	108	2,1	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034244	108	0	1

34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034245	108	1,9	9
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034245	108	2,8	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034246	108	0,7	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034247	108	4,2	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034248	108	3,4	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034251	108	1,9	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034251	108	3	9
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034252	108	2,5	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034255	108	4,2	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034257	108	2,1	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034259	108	1,4	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034261	108	1	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034265	108	0	2
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034266	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034275	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034277	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034278	108	1,3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034279	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	24034282	108	3	1
34	INGENIERIA DE SISTEMAS	200034206	108	2	1

160	INGENIERIA ELECTRONICA	21160212	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	22160212	256	3,1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	22160225	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	22160249	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160206	256	2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160219	256	2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160226	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160235	256	1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160236	256	2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160238	256	2,6	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160248	256	1,5	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160258	256	2,1	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160260	256	2,5	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160289	256	1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160291	256	1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	23160294	256	0	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160201	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160203	256	3,6	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160205	256	3,2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160208	256	4,6	1

160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160213	256	3,1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160215	256	4,1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160220	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160221	256	3,4	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160224	256	4,2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160228	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160229	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160231	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160234	256	3,2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160237	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160241	256	3,4	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160242	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160244	256	2,5	1
COD PROGRAMA	PROGRAMA	COD ESTUDIANTE	COD ASIGNATURA	NOTA	GRUPO
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160250	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160253	256	3,4	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160255	256	2,3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160256	256	0	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160258	256	1	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160261	256	4	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160262	256	3	1

160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160270	256	0	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160274	256	3	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160276	256	3,4	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160278	256	3,2	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	24160285	256	5	1
160	INGENIERIA ELECTRONICA	25160101	256	4,7	1

Procesado Centro de Informática. 05/18/2006 08:21:24 p.m. estad6.sql - luisca -		

Anexo B. Encuesta a docentes.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

INVESTIGACIÓN: "UN ESTUDIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN"

1. Señale los procesos y sistemas que usted utiliza para trabajar el concepto de límite de una función en los cursos que ha dirigido.

____
____
____
____
____
____

2. En el desarrollo de los siguientes sistemas ¿Con cuál(es) de estos sistemas introduce Usted el concepto de Límite de una función? (puede señalar más de una opción)

a) Sistema verbal.
b) Sistema numérico.
c) Sistema gráfico.
d) Sistema algebraico y analítico.
e) Sistema simbólico.

Justifique su respuesta:
____
____
____

3. Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades. Castro y Castro (1997). En el concepto de límite se consideran cuatro sistemas de representación: Verbal, numérico, gráfico y simbólico.

¿Con cuál(es) de los anteriores sistemas a lo largo de su experiencia docente ha encontrado mayor dificultad en sus alumnos?

____
____
____
____

4. Qué nivel de importancia le da Usted a los sistemas propuestos clasifíquelos al frente en orden ascendente de 1 a 4.

a) Sistema verbal ( )
b) Sistema numérico ( )
c) Sistema gráfico ( )
d) Sistema simbólico ( )

5. En su experiencia como docente, ¿qué tipo de dificultades manifiesta o presenta el estudiante en el aprendizaje del concepto de límite de una función?, en lo referente a: (puede señalar más de una opción).

a) Concepto de variable; concepto mismo, distinción entre variable independiente y dependiente.
b) Concepto de función: concepto mismo, dominio, rango, gráfico, herramienta para modelar situaciones o fenómenos.
c) Transición del método gráfico al numérico, verbal al gráfico, del numérico al algebraico, del numérico al gráfico, en cuanto a función y límite de una función.
d) La naturaleza de la noción de límite.
e) La manipulación algebraica y formal para el cálculo de límites.

Otra(s),
¿Cuál(es)?____
____
____

6. Señale las fases secuenciales que Usted emplea para la construcción del concepto de límite de una función y qué actividades o espacios didácticos propone.

____
____
____

7. ¿Cuando Usted enseña el concepto de límite de una función qué aspectos desea resaltar del mismo?

Anexo C. Test No 1. Estudiantes.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

INVESTIGACIÓN: “UN ESTUDIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN”

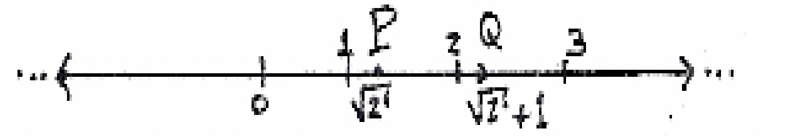
Responda de la manera más natural, clara y de acuerdo a sus conocimientos que ha obtenido a lo largo de su secundaria.

1. El número real:

$0,\bar{5} = \frac{5}{10} + \frac{5}{100} + \frac{5}{1000} + \frac{5}{10000}$ +...; es un número.

a) Racional menor que $\frac{5}{8}$.
b) Irracional menor que $\frac{5}{10000}$.
c) Irracional, porque su expresión decimal es infinita.
d) Racional, porque su expresión decimal es infinita no periódica.

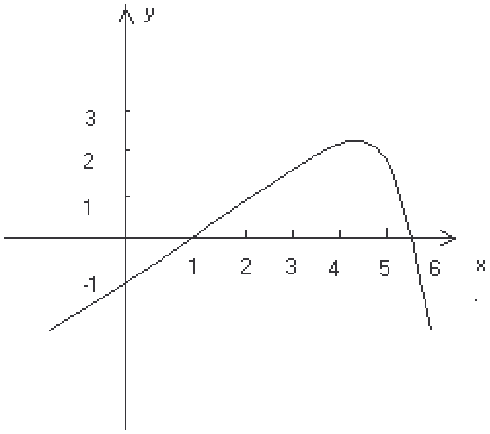
2. En la recta numérica que se muestra, se han localizado dos números reales $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}+1$



La afirmación: “entre los puntos P y Q es posible ubicar otro número irracional” es:

a) Falsa, porque $\sqrt{2}+1$ es el siguiente de $\sqrt{2}$
b) Verdadera, porque un irracional que está entre P y Q es $\sqrt{3}$
c) Falsa, porque solo se pueden ubicar racionales entre P y Q
d) Verdadera, porque un irracional que está entre P y Q es $\frac{(\sqrt{2}+1)-\sqrt{2}}{2}$

3. La función f está dada por el gráfico que aparece en la figura.



3.1 Determina
a) f(o) =
b) f(1) =
c) f(2) =

3.2 Determina el valor de x sí:
a) f(x) = 0, entonces x =
b) f(x) = 1, entonces x =
c) f(x) = 2, entonces x =

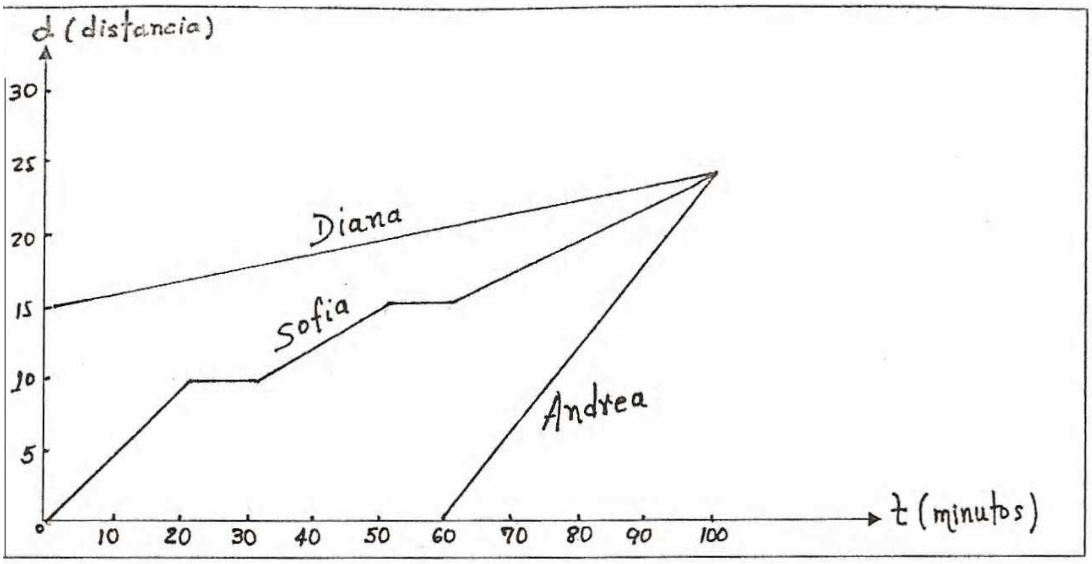
4. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones definen funciones lineales y cuáles definen funciones cuadráticas. Enciérralas con las correspondientes figuras lineales □, cuadráticas ○

a) $y = x - 2$ b) $y = x^3 + 5$ c) $y = \sqrt{2}$ d) $x = -y^2+3y-1$

e) $x + 2y = 8$ f) $y = \frac{1}{x^2}$ g) $y = -x^2 + 0.5$ h) $y^2+x2 =1$

i) $y = \frac{3}{x} + 1,\ x \neq 0$ j) $v = at^2 + 3t$

5. La gráfica muestra la distancia recorrida por Andrea, Sofía y Diana durante un entrenamiento de atletismo:



De la gráfica anterior se puede afirmar que:

5.1
a) Las tres atletas recorrieron la misma distancia.
b) Las tres atletas estuvieron corriendo el mismo tiempo.
c) Sofía recorrió más distancia que Andrea.
d) Andrea corrió durante menos tiempo que Diana y que Sofía.

5.2. Durante el entrenamiento, la mayor velocidad que alcanzó Sofía la obtuvo.
a) En los primeros veinte minutos.
b) Entre el minuto veinte y el minuto treinta.
c) Entre el minuto treinta y el minuto sesenta.
d) En los últimos cuarenta minutos.

5.3. La relación entre distancia recorrida d por Diana y el tiempo t empleado para recorrerla está representada por la ecuación:
a) d = 15t + 100
b) d = 100t + 15
c) d = (1/10)t + 15
d) d = 10t + 100

6. Responda al frente de cada afirmación si es falsa o verdadera.

a) y = 4 es una función ____________

b) La función $\dfrac{1}{x^2 - 1}$ toma valores reales en –1 y 1 ____________

c) 0.999999.... y 1 representan la misma cantidad ______________

d) $x^2+y^2=1$ representa gráficamente una función _______________

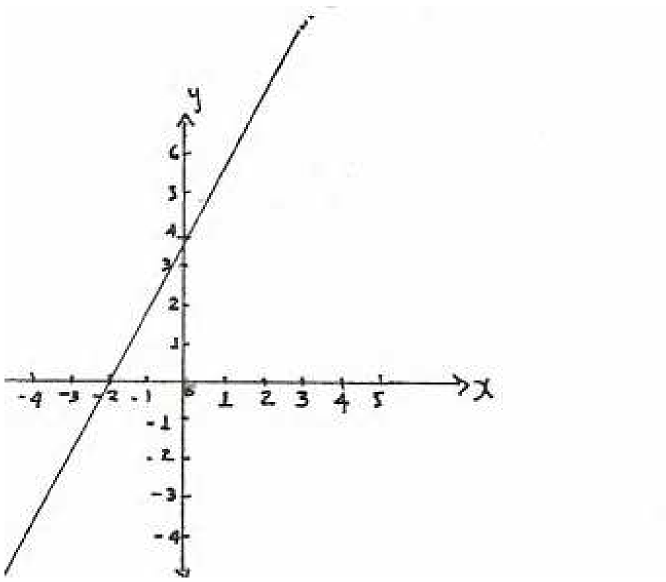
7. El límite de la función racional f(x) = $\dfrac{(x-1)(x-2)^2(x+1)}{(x^2-4x+4)(x-1)}$ cuando $x \to 2$ es:

a) 0/0
b) infinito (∞)
c) 3
d) –3

8. Dada la gráfica de una función:

El límite cuando x tiende a infinito es:
a) Cero.
b) Infinito.
c) Cuatro.

Cuando x tiende a cero es:
a) Cero.
b) infinito.
c) Cuatro.



Anexo D. Test No 2. Estudiantes.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.

INVESTIGACIÓN: “UN ESTUDIO ACERCA DE LAS DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN”

Responda de la manera más natural, clara y de acuerdo a sus conocimientos que ha obtenido sobre el concepto de límite de una función.

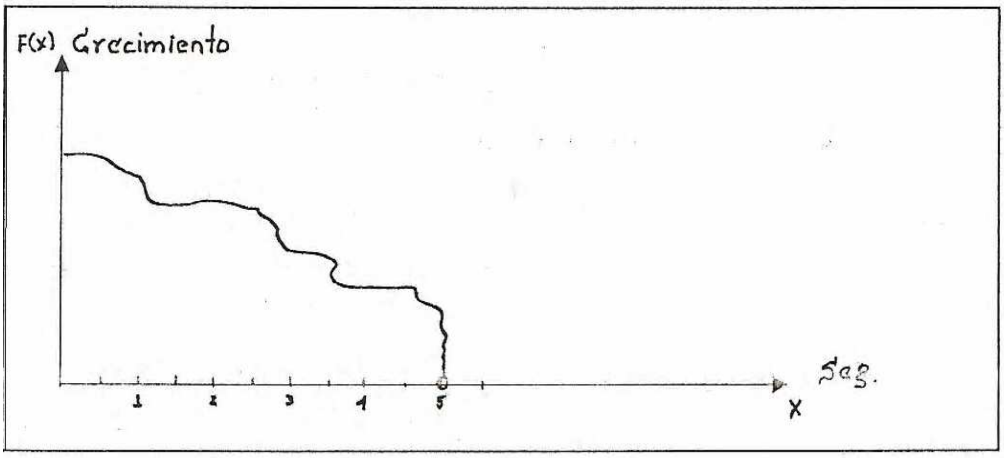
1. El crecimiento de la población de tres clases de bacterias; A, B, C viene dada por las siguientes expresiones:

BACTERIA A

X (cientos de bacterias)	F (X) (crecimiento de bacterias por segundo)
4	9
4.5	9.5
4.9	9.9
4.99	9.99
4.999	9.999

X (cientos de bacterias)	F(X) (crecimiento de bacterias por segundo)
5.001	10.001
5.01	10.01
5.1	10.1
5.5	10.5
6	11

BACTERIA B



BACTERIA C

$$F(X) = \frac{10 - 2\sqrt{5X}}{5 - X}$$

Vamos a estudiar lo que ocurre en cada tipo de bacterias al cabo de 5 segundos:
¿A qué valor se aproxima el crecimiento de las bacterias de cada clase?

Bacteria A:

____

Bacteria B:

____

Bacteria C:

____

¿Qué es lo que ocurre al cabo de 5 segundos en cada clase de bacteria?

Bacteria A:

____

Bacteria B:

____

Bacteria C:

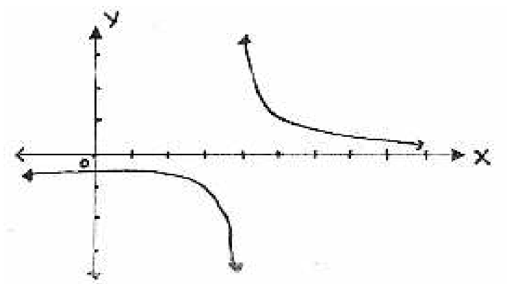
____

2. Observa la tabla siguiente:

X	F(X)
0.87	3.59
1.02	2.41
1.005	2.7
0.9997	3.01
1.0001	3.0025
0.999995	2.9994
1.6666662	3.0001
1.999999996	2.999995
1.00000000341	2.9999999998
1.000000000007	3.000000000001

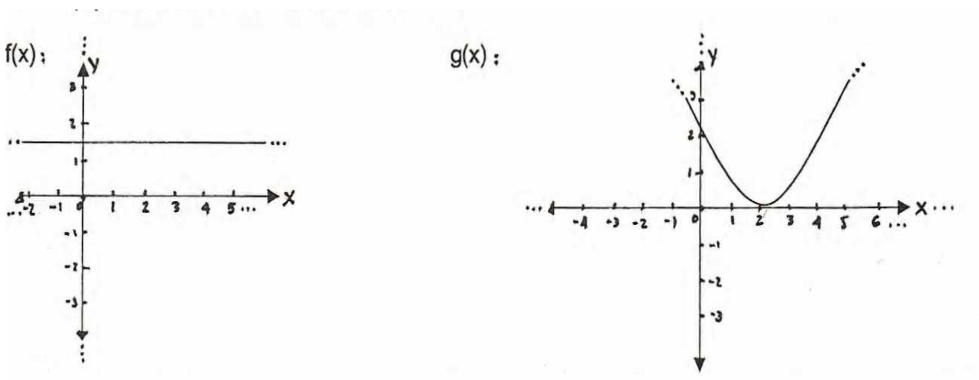
Contesta ahora observando la tabla:
a) ¿A qué número a se aproxima x? _______________________________
b) ¿A qué número L se aproximan sus imágenes F(x)? _________________
c) Busca una aproximación de L _______________

3. Para la siguiente gráfica señale la posición aproximada del valor de x para el cual el límite no existe, explique su respuesta:



Explicación: _______________________________
____
____
____

4. Para cada una de las siguientes gráficas de funciones indique si el límite existe cuando ***x*** tiende a infinito (∞) ó cuando tiende a menos infinito (-∞).



Para f(x):____

____

Para g(x):____

____

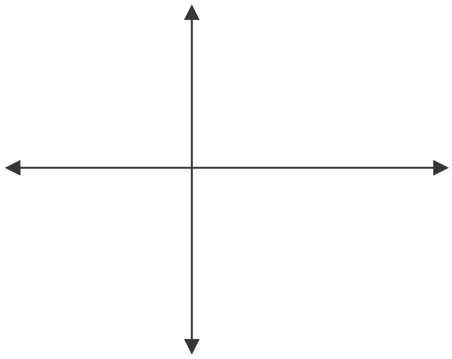
5. Responde a las siguientes situaciones:

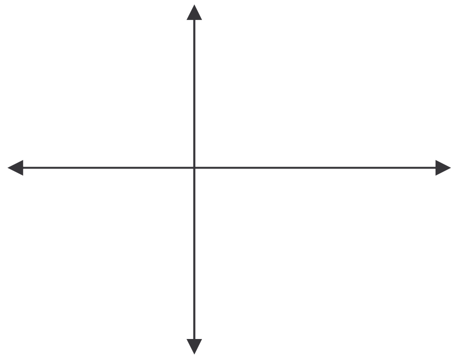
a) Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en x = 2;

f(x) =

g(x) =

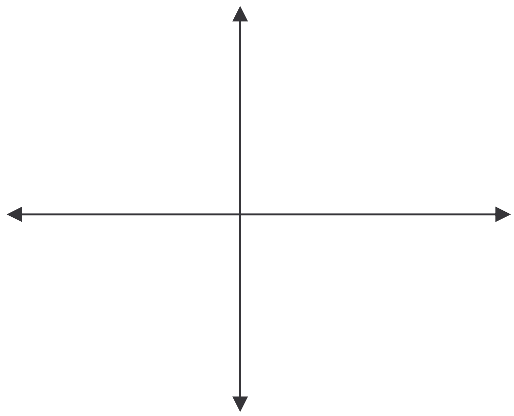
Represéntalas gráficamente





Escribe una expresión algebraica de una función que no tenga límite en x = 1 y dibuja su gráfica.

f(x) =



6. ¿Qué ideas tienes acerca de las siguientes expresiones:

a) Límite de una función:

b) El límite es determinado:

c) El límite es indeterminado:

d) El Límite no existe:

Anexo E. Trascripción de observaciones en video.

Disco 1.

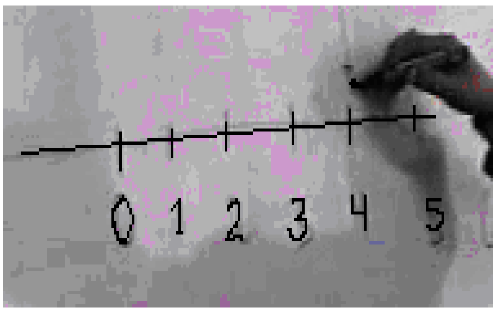
Docente: D
Estudiantes: E

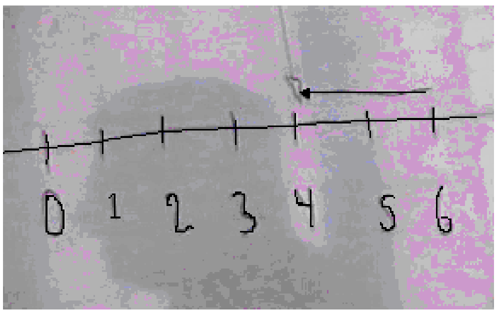
D:

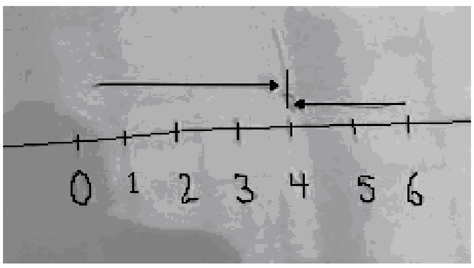
1. "… el material a diario hay que traerlo…" 0: 18: 30
2. "…estamos introduciendo el tema "límites de funciones"… hemos revisado la primera parte del material, hemos analizado la función lineal en dos puntos diferentes y hemos visto el tránsito de un punto hacia otro punto y lo hemos interpretado como la tendencia de la variable x hacia un determinado valor y esa tendencia hace que la otra, función y, tienda hacia otro valor.
3. ¿Por qué al variar x varia y?" (silencio)
4. D: "porque están entrelazadas por una función.
5. En el caso que hablamos es por la función lineal y = x+2; lo estudiamos el caso en los equipos y lo vimos en el papel"
6. D:"al variar x varia la y"
7. D: "observamos también cuando vimos una función cuadrática cuya gráfica fue una parábola, esa tendencia; pero que en esa función a diferencia que en la lineal, hay tramos en que la x siempre aumenta y la y ¿qué puede pasar?... que disminuye en algunos tramos y que aumente en otros, porque en esa curva la pendiente no es constante, está variando continuamente…" 0: 02: 37
8. D:"entonces vimos la función cuadrática… Ubíquense en el material (le dice a los estudiantes), de la función cuadrática. Esa fue la última parte que vimos en la página 5, vimos $y = x^2 – 8x + 18$ y hagamos esa gráfica (les dice a los estudiantes utilizando el computador y la calculadora graficadora TI 92 plus)
9. …comprueben si esa gráfica es idéntica a la que tenemos en el material"
10. (Se observa que los estudiantes la trazan en el computador y en la TI 92 plus) 0: 04: 39
11. D:"cuando no salga igual la grafica, por favor esto hay que anotarlo en el cuaderno (les dice a los estudiantes), se revisa el "zoom", que sea un "zoom" estándar o un "zoom square" si no produce nada ¿qué se hace?...se revisa la función…" 0: 06: 25
12. D:" en su caso se revisa la escritura de la función que puede variar" 0: 06: 44.
13. D:" ¿en que caso está diferente la gráfica?" (Hay unos minutos en silencio) 0: 06: 55
14. E:"… no, no sale bien…" 0: 07: 16
15. D:" entonces miren; primero, estamos hablando, para tomar nota,…estamos hablando de las representaciones semióticas…" 0:07:17

16. D:” ¿cuál es la primera representación semiótica?...
17. Aquella que aparece en el editor de funciones, o sea cuando uno escribe algebraicamente la función, esa es la primera representación,… ¿de acuerdo? 0: 07: 28.
18. D:” ¿cuál es la segunda representación? ¿Niña María? (interroga a una estudiante)… ¡la gráfica! (responde el mismo docente) 0: 07:46
19. D: (haciendo la lectura del material) “…dice, ingresando la función en el editor y obteniendo su registro gráfico estándar se observa inicialmente que a un valor de x = 4 (¡ojo vamos a analizar ese límite! exclama el docente)… corresponde un valor de y = 0, mírenlo en la gráfica… 0: 08:56
20. D: “¡miren en la gráfica!, es decir ojo, primera conclusión directa…
21. El límite de la función es cero cuando x tiende a 4, o dicho de otra forma, cuando x tiende a 4, la función directa $Y = x^3 - 5x^2 + 2x + 8$ tiende a cero. 0: 08:56…”
22. D: (luego de algunos instantes de revisión por parte del docente en la mayoría de los estudiantes, manifiesta) “… esa es la forma de decirlo y de escribirlo…” 0: 09: 18
23. D: “… vamos a calcular un límite, vamos a ver si este límite se da por la derecha o por la izquierda, vamos a acordarnos de eso…” 0:09:27
24. D: “… aquí tenemos 0, 1, 2, 3, 4 (anota en el tablero implícitamente un intervalo entero, (no menciona que es un intervalo). A ese cuatro me puedo acercar por la derecha, o sea, empezar por valores superiores hasta llegar a cuatro; me puedo acercar por la izquierda, o sea valores inferiores a cuatro,…, queremos ver, en ambos casos, tendiendo por la derecha o por la izquierda, ¡ la función tiende a cero!...” 0:09:46.

Ilustraciones

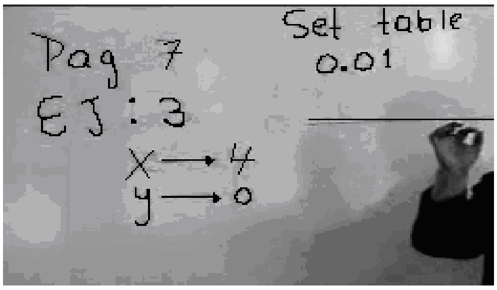






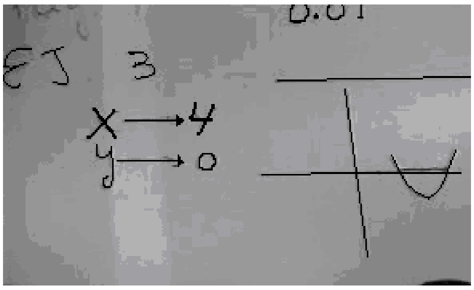
25. D: “… vamos a hacer lo siguiente; el incremento de la función, o sea en la tabla, o sea en el set table , lo vamos a colocar a este incremento, ¡por favor! (*exclama el docente)* de 0.01 ¿cómo se lee este número?...” 0:10:30

26. E: “… “cero coma cero uno” 0: 10:30.
27. D: “... ¡ay carajo!, ¡díganlo es español!,… dicho en español, en palabras, “una centésima”.
28. D: “… coloquemos el incremento… (Estudiantes inician el trabajo en la calculadora…” 0:11:01
29. D: “… observen la tabla ¿que queda de centésima en centésima? ¿en cualquier valor?... 0:11:41.
30. D: “… queremos comprobar esto, que cuando x tiende a 4;… entonces tiende a cero, pero tanto por la derecha como por la izquierda…” 0:12:02

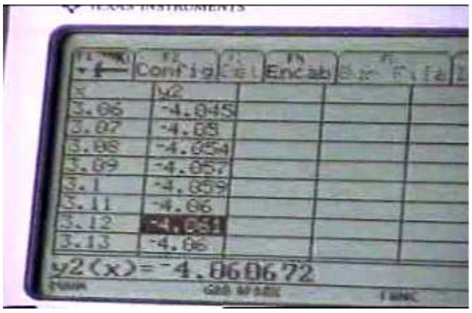


31. D: “… ubíquense por favor en la tabla, en dos, díganle, o sea “star en dos…” 0:12:37.
32. E: se observa a todos los estudiantes trabajando en la calculadora. 0:12:53

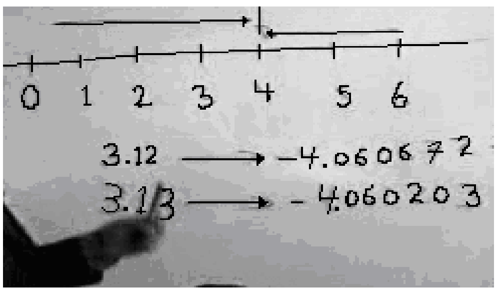
33. D: "… es que todas la representaciones semióticas concuerdan, ¿se dan cuenta?, ninguna contradice a la otra… aquí pueden ver como la curva está hacia abajo, los valores negativos…" 0.14:58



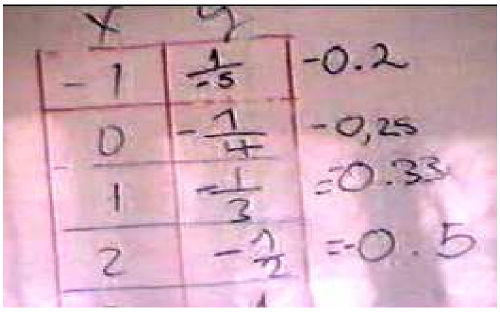
34. D:"… miren la tendencia de la función" 0:15:00
35. E: "… los estudiantes realizan los procedimientos en la tabla de valores en la calculadora, mediante la instrucción "Start" repitiendo el proceso continuamente. 0: 17:16 hasta 0:18:16.



36. D: "… el docente pasa ha analizar las tendencias de la calculadora en el tablero…" 0:18:50
37. D: "… el análisis numérico es fundamental; ver estos numeritos con otras cifras decimales, para ver cuál es el mayor, cuál es el menor, sobre todo cuando ese está en el campo negativo…" 0:19:36



38. D: "… esta es una primera visión de límite. Hagamos una segunda visión, que esta es tal vez la más visible,… por favor grafiquen la función…" 0:21:15
39. D: "… para la función escrita algebraicamente en el editor de ecuaciones en la calculadora Y= x^3…"
40. … ¿…en cuántos puntos corta está función al eje x…? 0:21:43
41. E: "… en cuatro…" 0:21:46
42. D:"… ¡en cuáles cuatro, carajo! …"0:22:43
43. D: "… ¿será que esta se regresa…? ¿… cómo haríamos para averiguar esto…? 0:23:00
44. D: "… ¿qué pasa para que esta función no regrese?... 0:23:09
45. D: "… ¿cada vez, sean menores (a la izquierda), cada vez sean mayores (a derecha)…? 0:23:15
46. D: "… ¡pero ojo! ¿Qué pasa cunado una paralela no corta al eje…?
47. ¿Qué pasa con los cortes? (Hay mucho silencio) 0:23:56
48. D: "… esta pregunta es importante…
49. Dice Santiago (estudiante)… dice que el grado de la función está en relación con los cortes…" 0:26:02
50. Se dice y = 4 (los estudiantes grafican la curva en la calculadora) háganle una cajita con "zoom box" con "F2" 0:24:07
51. D:"… veamos que pasa con la tabla en esa función entre 0 y 1…"
52. Los estudiantes observan el comportamiento de la gráfica con dichas aproximaciones en la tabla de valores 0:31:59
53. D: "… uno debe aprender a trabajar con el equipo y con el papel…" 0:33:55
54. D:"… ¿quién se acuerda de ustedes que es una función racional?
55. Después de unos instantes el docente mismo se responde: ¡como el cociente de dos funciones!
56. Vamos a ver la función, miren la página 9 de las guías de trabajo Y $= \frac{1}{x-4}$.
57. Tabulen por favor (se da la expresión algebraica) 0:34:25
58. E: "…"profe" ¿desde donde se empieza a tabular?..." 0:34:40
59. D:"… esta función tiene un problema, algo especial cuando x vale 4.
60. ¿Por qué? Pero miren por qué…
61. Para x = 4 tendríamos 4-4=0 y uno dividido entre cero ¡pregunten a su calculadora que les da!
62. Les da error o undef… (Indefinido)
63. Pues es una operación que no obtiene respuesta aritmética. 0:38:30
64. D:"… pues se tabulan unos puntos hacia un lado y los otros hacia el otro, derecha e izquierda, "undef" como punto central. (Dichos puntos son enteros)
65. En ese punto (undef) la función no existe y la gráfica no hay, o sea en ese lugar no está. 0:41:16



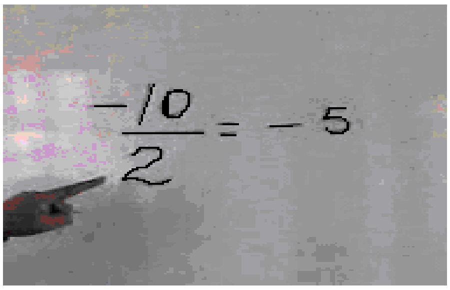
66. Cuando se tabuló por parte de los estudiantes unos valores en la tabla se observó unos errores acerca de la ley de los signos en la fracción a lo que el docente prosiguió a corregir:

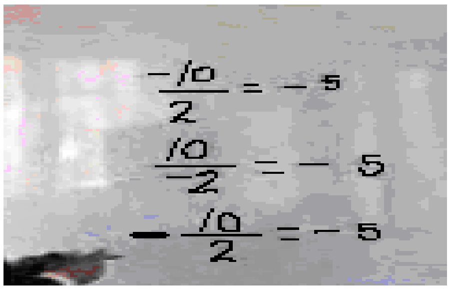
67. D:"…lo podemos trabajar el $\frac{-1}{5}$ como fracción o como su valor decimal, es igual. 0:41:40

68. D: "… para $\frac{-10}{2}$ se observa, menos entre más da menos, esto da como

69. resultado menos cinco. Que es lo mismo que decir $\frac{10}{-2}$, más dividido entre menos da menos. Y es lo mismo que decir -$\frac{10}{2}$.

70. Miren entonces, el menos se lo pueden dar al numerador, al denominador ó se lo pueden dar a la fracción, estos tres son equivalentes.





71. Yo veo que aquí hay unas dudas, pero no hay error, está bien escrito 0:42:58

72. Se inicia entonces a ubicar los puntos en el plano cartesiano, donde el docente dibuja el plano cartesiano como puntos y se trasladan los valores encontrados en el proceso de tabulación.

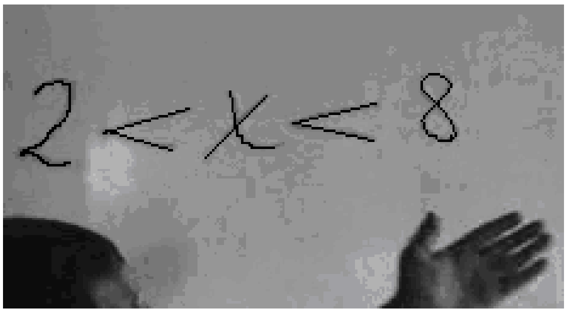
73. Cuando se inicia a ubicar los puntos en el plano, algunos de los estudiantes escogidos tuvieron problemas al ubicar las fracciones en el plano cartesiano.

74. D:"… Jóvenes, que es más grande ¿la tercera parte o la cuarta parte?... (Silencio)

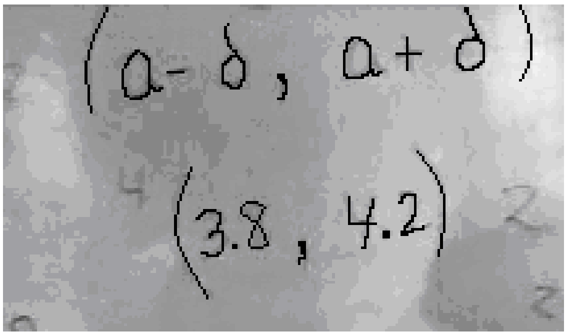
75. Ah, pues, cojan un pollo, ¿que es más grande un tercio de pollo o un cuarto de pollo?
76. Un estudiante que salió a ubicar el punto que le tocaba en el plano cartesiano tardó cerca de dos minutos para hacerlo, y lo hizo de manera incorrecta.
77. D: "… en cuatro la gráfica ¿se acerca o desaparece? ¿Cómo se llama este comportamiento?
78. Luego de unos instantes él mismo se responde: ¡asintótico! 0:49:36
79. D: "… ¿Qué pasa cuando los valores de x tienden a cero? ¿Qué pasa cunado x tiende a cuatro?
80. Sabemos que tender es acercarse por la derecha o por la izquierda.
81. … que pasa por ejemplo cuando usted se acerca al colegio en un bus…
82. … ¿dónde lo deja? 0:50:18
83. D:"… jamás la curva llega a topar este eje… ¿por qué? …porque para ese valor no existe.
84. ¡Ojo! con ese límite una cosa es acercarse por la derecha o por la izquierda…" 0:51:17

85. D:"… Vamos a leer en la página 13 la parte central de este concepto, dice la definición de límite, (inicia la lectura la estudiante)
86. E:"… para cualquier intervalo en el eje y de la forma (la estudiante hace una pausa prolongada y no lo puede leer)
87. D:"… ele menos epsilón, (aclara el docente)… hay una palabra que no es tan usual para nosotros que es intervalo, ¿qué es intervalo? (pregunta a los estudiantes)
88. los estudiantes explican gestualmente lo que es intervalo haciendo una especie de amplitudes con sus manos, es decir señalan espacios. Posteriormente en palabras exponen los estudiantes "una parte que va de un lado a otro" se prosigue la lectura pero con muchas dificultades. El docente aclara.
89. D:"…en una función cualquiera, por ejemplo una función lineal, cuadrática, de tercer grado… cuando la variable independiente o sea la x se va hacia a, tiende hacia a, la función se va hacia L, lo que hemos visto acá ¿se acuerdan de las tablitas?... porque las dos están amarradas, ligadas de una función, ahí está la dependencia…" los estudiantes no pueden leer la letra griega delta. 0.56:36
90. El docente se da cuenta que los estudiantes no pueden hacer la lectura de estas palabras a lo que agrega…
91. D:"…¡Hola, esto parece estar en griego o en chino, ¿verdad?!, rarísimo; nosotros, me refiero a los tres (Docente y los investigadores) ya estamos familiarizados no?..." 0:56:55
92. D:"… ¿quién quiere hablar de intervalo? ¿Quién nos dice algo?
93. E:"… la distancia de un punto hacia otro punto…"
94. D:"… por ejemplo, en una oficina,… atendemos de 2 a 5, ese es un intervalo; inicia a las 2 la atención y termina a las cinco,… ¿si?..."

95. otro,… hay películas triple x, para mayores de 18 años, pero ¿tiene fin? Hasta cuchitos pueden entrar allí, ¿cierto? 0:57:31
96. El docente anota unos intervalos numéricos en el tablero, utilizando enteros, en este caso entre 2 y 8.
97. D:"…para este intervalo entre 2 y 8, los números son; 3, 4, 5, 6, 7 y se escribe matemáticamente "2< x < 8"… o sea que va de un extremo inferior a otro superior, eso se llaman COTAS… cota inferior y cota superior…" 0:59:41



98. D:"… en épsilon menos delta, se dan cuenta ¿cómo se desvincula la lectura?... estoy hablando de que L es el límite, supongamos que el límite es 8 en un ejercicio… aquí dice al límite quítele épsilon; cuando se habla de épsilon se dice que son cantidades sumamente pequeñas…" 1:01:03



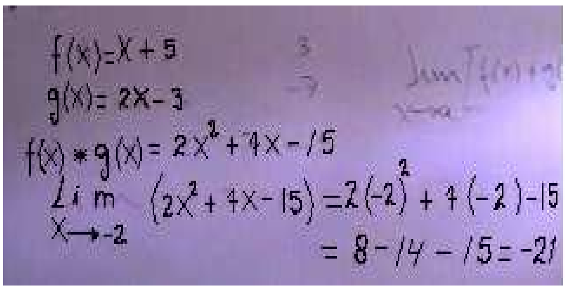
Disco 2.

Docente: D
Estudiantes: E

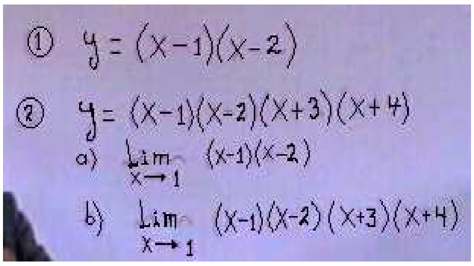
99. D:"… digamos que ese épsilon igual a una centésima, entonces si L es igual a 8 entonces ¿cuál es el valor de épsilon? …"
100. E:"… siete punto nueve…"

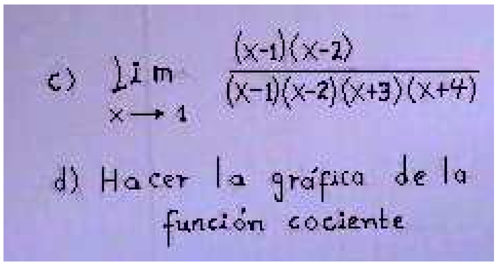
101. D:” sin miedo, y el otro valor es ¿qué?
102. E:”…ocho punto uno…”
103. D:”…imagínense esto así, ya no es del otro mundo.
104. con respecto a otro intervalo a menos delta y el otro que es a más delta ¿Qué es a en este caso? ¿en este caso que estamos viendo? , el valor al cual tiende x para que el valor sea L (se contesta el mismo docente) …” 0:0:22
105. D:”… siempre hay que estar escribiendo en matemáticas jóvenes…” 0:02:43
106. el docente repite otros ejercicios en la técnica épsilon delta para los intervalos
107. D:” …pertenecer a un intervalo es estar dentro de él…” 0:04:29
108. D:”… muchachos preguntas… ¿qué no se entiende? (el salón queda en silencio por unos momentos) en la lectura del intervalo esas barritas ¿qué quieren decir? ¿Qué es eso?
109. D:”…(docente practicante) el valor absoluto indica distancia…”
110. se toma como ejemplo el intervalo $|x-4|< 8$ 0:07:28
111. D:”… el tema de inecuaciones en verdad no lo hemos tratado…” 0:08:28

112. D:”… ¿Cómo en la gráfica se analiza que esos intervalos épsilon y delta son iguales? Existe un silencio en el salón de clases. Miren la página 13 de la guía…” 0:09:30
113. se dan ejercicios donde el límite se calcula por sustituciones… 0:09:50

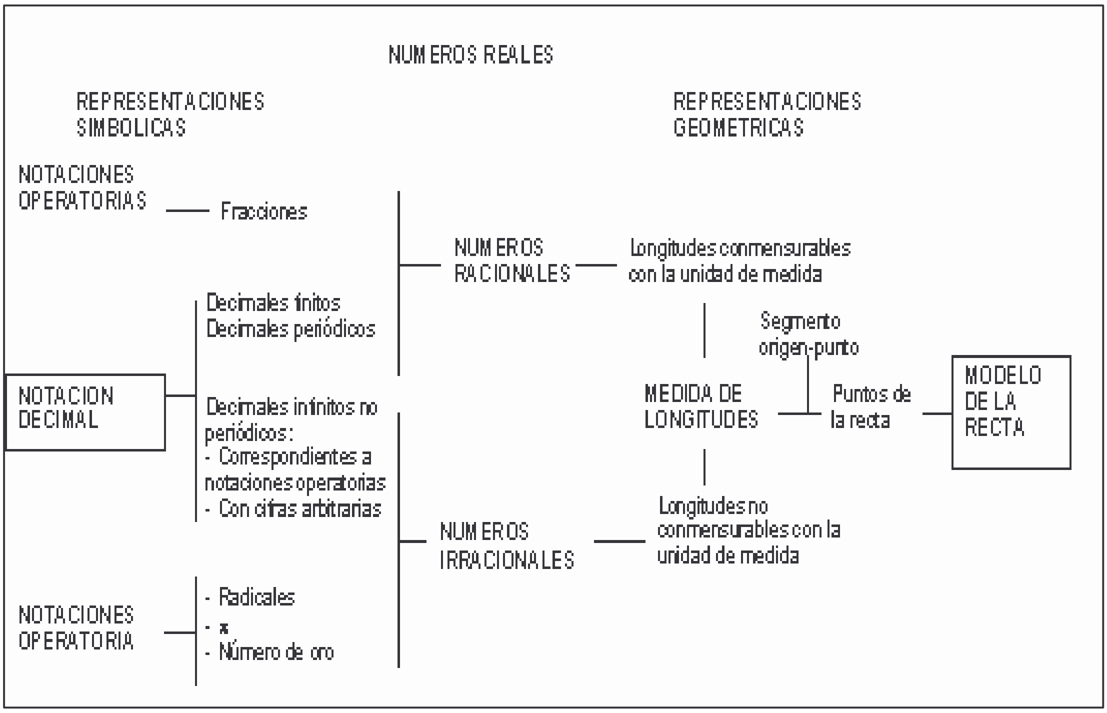


114. cuando se pidió calcular el producto de dos funciones para luego calcular el límite el estudiante al que se le preguntó respondió…
115. E:”… primer, primero, que, esto reemplazo a que tiende x ¿verdad?,(duda unos instantes y responde) … la verdad no recuerdo. Para dividir, tampoco es que no me acuerdo nada.
116. para evaluar lo aprendido se tuvo en cuenta el siguiente examen planteado por el docente… 0:12:00


① y = (x-1)(x-2)
② y = (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)
a) Lim (x-1)(x-2)
x→1
b) Lim (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)
x→1


c) Lim (x-1)(x-2) / (x-1)(x-2)(x+3)(x+4)
x→1
d) Hacer la gráfica de la función cociente

Anexo F. Sistemas de representación de números reales.



Anexo G. Cronograma de actividades.

Actividad		Año lectivo 2005 - 2006						2005 - 2006	
	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio	Agosto	septiembre	Octubre
1° ETAPA									
Revisión conceptual	X	X	X	X	X	X	X	X	
Construcción y aplicación de la encuesta			X						
Elaboración y aplicación de los test				X					
Primer test				X					
Segundo test									
2° ETAPA									
Análisis de la información obtenida						X	X	X	
Elaboración del informe final							X	X	X

Actividad	Año lectivo 2006 - 2007					
	Febrero	Marzo	Abril	Mayo	Junio	Julio
2ª ETAPA						
Análisis de la información obtenida	X	X	X			
Elaboración del informe final			X	X		

Anexo H. Guías de trabajo.