



VISUALIZACIÓN EN LA MEDICIÓN DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS.  
RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES PROPUESTAS POR LOS TEXTOS  
ESCOLARES.

JONNATHAN CAMILO CABRERA MONCAYO

EDGAR ALBERTO VEGA NOGUERA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
SAN JUAN DE PASTO  
2013

VISUALIZACIÓN EN LA MEDICIÓN DE ÁREAS DE SUPERFICIES PLANAS.  
RESOLUCIÓN DE ACTIVIDADES PROPUESTAS POR LOS TEXTOS  
ESCOLARES.

JONNATHAN CAMILO CABRERA MONCAYO

EDGAR ALBERTO VEGA NOGUERA

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de  
Licenciado en Matemáticas

Director:

GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENIA  
Mg. en Educación con Énfasis en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
SAN JUAN DE PASTO  
2013

Nota de Responsabilidad:

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1° del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación:

---

---

---

---

---

Director

---

Jurado

---

Jurado

San Juan de pasto, Octubre de 2013

## CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	13
1. LA VISUALIZACIÓN ASOCIADA A LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS. UNA PROBLEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁREA DE SUPERFICIES PLANAS.....	17
1.1 DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA.....	18
1.2 ANTECEDENTES.....	23
1.3 REFERENTES TEÓRICOS.....	30
1.3.1 Conversión de las representaciones semióticas.....	31
1.3.2 Tratamiento de las representaciones semióticas.....	32
1.3.3 Visualización.....	35
1.3.4 Tipos de aprehensión de las figuras.....	35
2. METODOLOGÍA.....	40
2.1 APROXIMACIÓN METODOLÓGICA.....	40
2.2 ENFOQUE Y TIPO DE LA INVESTIGACIÓN.....	40
2.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS.....	41
2.4 POBLACIÓN.....	41
2.5 TRABAJO DE CAMPO.....	42
2.6 CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES.....	42
2.7 INSTRUMENTO DE ANÁLISIS.....	45
2.8 ANÁLISIS DE DATOS.....	50
3. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	53
3.1 TIPOS DE VISUALIZACIONES.....	53
3.2 VISUALIZACIONES DESPLEGADAS POR LOS ESTUDIANTES DURANTE EL DESARROLLO DE LAS TAREAS.....	60
CONCLUSIONES.....	72
BIBLIOGRAFÍA.....	75
ANEXOS.....	82

## LISTA DE CUADROS

	Pág.
Cuadro 1.....	34

## LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1.....	52
Tabla 2.....	60
Tabla 3.....	61
Tabla 4.....	62
Tabla 5.....	63
Tabla 6.....	64
Tabla 7.....	67
Tabla 8.....	67-68

## LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1.....	36
Figura 2.....	38
Figura 3.....	39
Figura 4.....	54
Figura 5.....	55
Figura 6.....	56
Figura 7.....	57
Figura 8.....	59
Figura 9.....	59
Figura 10.....	65

## LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A.....	82
Anexo B.....	83
Anexo C.....	84
Anexo D.....	85
Anexo E.....	86

## RESUMEN

Este trabajo se enmarca dentro de la investigación “El papel de la visualización en la enseñanza del área de superficies planas en España y Colombia. Análisis de textos escolares y su uso en el aula de clase”<sup>\*</sup>, el cual presenta una metodología de análisis de actividades propuestas por textos escolares de España y Colombia, con el fin de valorar la visualización en la construcción del área de superficies planas. De esta manera, el interés de este trabajo recae en la visualización sobre el registro de las figuras geométricas, caracterizando las maneras de ver sobre este registro que son desplegadas por los alumnos cuando desarrollan tareas que reflexionan sobre la medida de áreas de un manual escolar de grado quinto. La población seleccionada para la aplicación de dichas actividades estuvo conformada por 2 estudiantes de grado quinto del colegio Gimnasio los Andes de la ciudad de Pasto. La aproximación metodológica de esta investigación se basó en un estudio de caso, el cual no pretende generalizar sino observar, describir e informar sobre los procesos visuales que subyacen al desarrollo de las actividades que reflexionan sobre la medida del área.

Palabras claves: Visualización, Figuras, Áreas y textos escolares.

---

<sup>(\*)</sup>“El papel de la visualización en la enseñanza del área de superficies planas en España y Colombia. Análisis de textos escolares y su uso en el aula de clase”. Es el trabajo de investigación doctoral realizado por el Mg. Gustavo Marmolejo profesor del área de educación matemática del departamento de matemáticas y estadística de la Universidad de Nariño y la Dr. María Teresa González profesora de la Universidad de Salamanca.

## ABSTRACT

This work is part of research " The role of visualization in teaching the flat surface area in Spain and Colombia. Analysis of textbooks and their use in the classroom" , which presents an analysis methodology proposed activities textbooks Spain and Colombia, in order to assess the visualization in the construction of flat surface area. Thus, the interest of this work lies in the display on the registration of geometric figures, characterizing the ways of thinking about this record that are displayed by students when performing tasks that reflect on the extent of areas of a school handbook fifth grade. The target population for the implementation of these activities consisted of two fifth grade students from school Gym Andean city of Pasto. The methodological approach of this research was based on a case study, the which is not intended to generalize but observe, describe and report on the visual processes underlying the development of activities that reflect on the extent of the area.

Keywords : Visualization, Figures , Areas and textbooks.

---

<sup>(\*)</sup> *The role of visualization in teaching the flat surface area in Spain and Colombia. Analysis of textbooks and their use in the classroom. It is the doctoral research project conducted by the Mg. Gustavo Marmolejo lecturer in mathematics education in the department of mathematics and statistics at the University of Nariño and Dr. María Teresa González professor at the University of Salamanca.*

## INTRODUCCIÓN

En los fenómenos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, según Duval<sup>1</sup>, se involucran tres actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento, relacionado con los procesos discursivos; y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales para la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas.

Las investigaciones realizadas por Duval<sup>2</sup> han aportado un importante marco de análisis acerca del desarrollo de estos tres procesos en los escolares, en el que la visualización se puede imponer como un elemento a privilegiar en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ya que, por un lado, no existe una jerarquía<sup>3</sup> entre ninguna de las actividades cognitivas mencionadas, y por otro, esta actividad cognitiva es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para encontrar objetos o propiedades matemáticas relevantes en la solución de un problema o en el proceso deductivo de una demostración.

Por otra parte, una característica cognitiva propia de la actividad matemática, es que la mayoría de los objetos matemáticos son accesibles únicamente a través de sus representaciones, es decir, que aprender matemáticas desde una perspectiva semiótica, reside en la capacidad de reconocer el objeto y su representación por la movilización de diferentes tipos de registros de representación semióticos y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza. En particular, para la enseñanza de la geometría se destacan dos registros de representación sobre los cuales se realiza la actividad cognitiva en esta disciplina: el registro figural y el registro discursivo. El primero que es de interés para este trabajo hace alusión a las figuras geométricas y sus propiedades; y el segundo, enuncia las definiciones, proposiciones, teoremas e hipótesis. Cabe aclarar que para lograr un aprendizaje en geometría, no es suficiente con que se trabajen los tratamientos de estos registros de representación por separado, sino que además, debe darse una coordinación entre los tratamientos que se hagan sobre las representaciones en cada uno de los registros que involucra la actividad geométrica.

De esta forma la importancia de los tratamientos sobre las representaciones figurales para el aprendizaje geométrico, reside en que estas representaciones juegan un rol determinante en la actividad geométrica puesto que constituyen un

---

<sup>1</sup>RAYMOND, Duval. La geometría desde un punto de vista cognitivo. Traducción realizada por Víctor Hernández y Martha Villalba. [documento pdf]. [s.l.]. PMME-UNISON. febrero 2001. [consultado el 8 de agosto de 2012]. p. 1. Disponible en internet: <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>

<sup>2</sup> Ibid., p. 2

<sup>3</sup> Ibid., p.11

importante soporte intuitivo para el desarrollo de las actividades, dado que permiten ver mucho más de lo que los enunciados dicen, permiten en la resolución de un problema aquella conducta que se describe con el término de *abducción*, consistente en limitar de entrada las hipótesis o alternativas que han de considerarse para la solución del problema.

Sin embargo, estudios<sup>4</sup> realizados muestran la presencia de dificultades en los estudiantes, tanto para lograr la coordinación entre los tratamientos de los dos registros, como en el momento de hacer de las figuras herramientas intuitivas que favorezcan la resolución de un problema geométrico, ya que no basta con que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras (que pueda realizar o resaltar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella sub-figuras, realizar transformaciones y rotaciones, transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente), sino que también es necesario que pueda discriminar aquellas transformaciones que por su naturaleza son pertinentes, potentes y económicas cognitivamente para la solución del problema planteado. Por ello, cobra interés e importancia el estudio de la visualización sobre el registro de las figuras en geometría como proceso cognitivo para entender el papel heurístico que juegan estas representaciones en el aprendizaje de esta disciplina.

De otro lado, quien permite introducir la visualización como un objeto de estudio es el área de superficies planas, dado que las exigencias cognitivas que caracterizan su enseñanza en los primeros grados de la educación básica (aplicación de modificaciones sobre las figuras, no es necesaria la aplicación de razonamientos de naturaleza deductiva y no exigen construcciones con instrumentos geométricos) coinciden en gran parte con los elementos a considerar en la enseñanza de la visualización. Además, el área es una de las magnitudes a la cual se le asigna mayor cantidad de tiempo, así como también mayor importancia en la educación básica (esto se evidencia al revisar los textos escolares y los estándares básicos de competencias en matemáticas). Esta magnitud juega un papel de gran relevancia en lo que concierne a la construcción de nuevos conceptos (fracciones, porcentajes, entre otros...), así como al desarrollo de pensamiento matemático.

No obstante, los resultados de pruebas nacionales<sup>5</sup>, que evalúan los tópicos del área de matemáticas, muestran la presencia de dificultades en el aprendizaje de algunos conceptos y nociones, puesto que esos resultados indican que un porcentaje significativo de la población estudiantil sólo cumple las competencias mínimas para el desarrollo de la prueba en relación con los tópicos de geometría y medición, y mucho más significativa es la diferencia a nivel internacional<sup>6</sup> respecto

---

<sup>4</sup> MARMOLEJO (2007 y 2010); MARMOLEJO y VEGA (2012)

<sup>5</sup> INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. Pruebas saber 5° y 9° 2009 resultados nacionales. LOPERA, Carolina; RONDEROS, Natalia; UZAHETA, Álvaro; CERVANTES, Víctor; QUINTERO, Luis. (Eds). Bogotá D.C., ICFES, 2010.

<sup>6</sup> INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. Resultados de Colombia en TIMSS 2007. FERNANDEZ, María Isabel; CERVANTES, Víctor; LOPERA, Carolina. (Eds). Bogotá D.C., ICFES, 2010.

al dominio de los contenidos de formas geométricas y medidas, puesto que Colombia se ubica muy por debajo del promedio estándar del TIMSS, lo que indica que los estudiantes colombianos tienen serias dificultades en la resolución de problemas matemáticos relacionados con el uso y medición de formas geométricas.

La presencia de estas dificultades puede deberse al abandono del estudio de los sistemas geométricos causado por la adopción de las matemáticas modernas en los currículos escolares (años 1960-1980), lo que produjo la exclusión de la geometría intuitiva. Los anteriores hechos reflejan el fracaso de la metodología tradicional en el aprendizaje de las matemáticas, y en particular, en el aprendizaje de las magnitudes y de los procesos de medida, conocimientos esenciales para que los alumnos puedan comprender lo que sucede a su alrededor.

Sin embargo, en la actualidad se ven grandes esfuerzos por regresarle ese espacio de gran importancia a la geometría. Muestra de ello es la propuesta de renovación curricular dada en los lineamientos, la cual adopta a la geometría activa como alternativa para reestablecer el estudio no sólo de los sistemas geométricos como herramienta de exploración y representación del espacio, sino con el propósito de recuperar el desarrollo del pensamiento espacial intuitivo en toda la matemática.

En consecuencia, este trabajo privilegia la temática área de superficies planas frente a otras que se desarrollan y están presentes en el currículo de matemáticas, y a la visualización, pues por un lado, esta última asociada a las figuras geométricas desempeña un papel importante para abordar la problemática relacionada con el aprendizaje de esta magnitud y su medida, y por otro, debido a la falta de espacios escolares en los que explícitamente se trabaje sobre los tratamientos y las formas de ver que el registro de las figuras permite.

Finalmente, en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, los textos escolares cobran importancia en cuanto a que son una herramienta clave para enseñar los diferentes conceptos y objetos matemáticos (entre ellos el área) en los distintos ciclos de educación (sobre todo en los primeros, donde la enseñanza de las matemáticas la controlan los textos elegidos por el educador), como también se constituyen en un lugar ideal que permite estudiar la forma en que la visualización subyace en la construcción del conocimiento matemático. Por tanto, debido a la relevancia que tienen los textos como material didáctico surge el interrogante sobre si los estudiantes movilizan o no conocimiento matemático cuando desarrollan actividades que proponen dichos textos.

De esta manera, esta investigación caracterizó las maneras de ver sobre el registro de las figuras geométricas que son desplegadas por los alumnos cuando desarrollan tareas que reflexionan sobre la medida de áreas de un manual escolar de grado quinto. El trabajo está estructurado en cuatro partes: En la primera se

contextualiza el problema, se plantean las preguntas que orientan este estudio y los objetivos, como también se presentan los referentes teóricos desde donde se sustenta esta investigación, en este caso desde la perspectiva semiótica de aprendizaje de las matemáticas de Duval; En la segunda, se plantea la metodología de la investigación, donde se presenta el enfoque y tipo de la investigación, la población seleccionada para este estudio, también se describe como se realizó el trabajo de campo, los instrumentos para recolectar los datos y se presenta el instrumento de análisis y como se hizo el posterior análisis de la información recolectada; En la tercera parte, se presenta el análisis de resultados que se divide en dos apartados: el primero, en el que se presentan los tipos de visualización identificados en esta investigación; y el segundo, en el que se describe la manera en que los estudiantes recurrieron a estas visualizaciones para el desarrollo de las tareas propuestas por el manual escolar seleccionado y su relevancia o limitante respecto a la asimilación del concepto de área de superficies planas. Por último se plantean las conclusiones de este trabajo.

## 1. LA VISUALIZACIÓN ASOCIADA A LAS FIGURAS GEOMÉTRICAS. UNA PROBLEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DEL ÁREA DE SUPERFICIES PLANAS

Una de las ramas más importante de la matemática es la geometría, disciplina a la que hasta hace un tiempo se la desplazó de la enseñanza escolar y de los currículos educativos, debido al surgimiento de las llamadas matemáticas modernas. No obstante, en la actualidad existe un creciente interés por retomar el estudio de la geometría intuitiva para recuperar el desarrollo del pensamiento espacial intuitivo y así devolverle a esta disciplina el lugar que le corresponde en la enseñanza escolar. En este sentido, para retomar el estudio de la geometría intuitiva y garantizar un aprendizaje significativo, se debe precisar que, desde una perspectiva semiótica, la actividad cognitiva sobre la que se moviliza el aprendizaje geométrico requiere de un trabajo coordinado entre los tratamientos que el registro de las figuras y el registro discursivo permiten. Sin embargo, la discriminación y ejecución de los tratamientos, en el caso de las representaciones figurales, no es obvia ni espontánea; algunos estudios han puesto en evidencia las debilidades y dificultades que tienen los alumnos al ver en las figuras bidimensionales cuando en el desarrollo de una situación problema donde las formas geométricas son de gran relevancia para obtener su solución, las representaciones figurales juegan un papel poco significativo o casi nulo para la búsqueda de esa solución, lo que claramente muestra que si los estudiantes no pueden tratar las representaciones figurales, mucho menos podrán lograr una coordinación entre los tratamientos de los registros que requiere la actividad geométrica. De este modo, aquí residen precisamente muchos de los problemas de aprendizaje y comprensión de la geometría, ya que la discriminación de los tratamientos figurales requiere de un aprendizaje específico que depende en gran medida de las formas de ver que este registro permite, procesos que en la escuela no se desarrollan.

Por otra parte, una de las temáticas de mayor importancia en la enseñanza de las matemáticas es la construcción y medición de magnitudes, que para el caso del área de superficies planas, permite la construcción de futuros conceptos. Pero su enseñanza se ha tipificado con un uso excesivo de formas geométricas en las que el estudio del área se centra en racionalidades de orden numérico, privilegiando tratamientos aritméticos para la medición de dicha magnitud, que han dejado de lado el desarrollo de otros procesos, previos a la asociación de un número con la cantidad de superficie, como los procesos de comparación de este atributo sin necesidad de recurrir a la medida numérica; es decir, por medio de la comparación directa de las superficies de las figuras. Por tanto, una estrategia didáctica que privilegie sólo tratamientos numéricos no bastará para asegurar una verdadera movilización de pensamiento métrico. En este sentido, en un ambiente de comparación de áreas, la movilización y explicitación de los tratamientos figurales y formas de ver permitidos por el registro semiótico de las figuras se constituye, no

sólo en la principal y más potente opción para cargar de sentido el aprendizaje del área e introducir a los estudiantes en el desarrollo de pensamiento métrico, sino además, la visualización en las figuras geométricas bidimensionales, tras las carencias de tiempos escolares, adquiere en los primeros ciclos de la educación básica verdaderos y muy fructíferos lugares de aprendizaje. Respecto a lo descrito anteriormente, a continuación se profundiza en la problemática relacionada con el aprendizaje del área de superficies planas y sobre los tratamientos de las formas geométricas, así como también se describen los propósitos de algunos estudios e investigaciones que se aproximan a la problemática brevemente descrita, para finalmente presentar los referentes conceptuales en los cuales se enmarca este trabajo.

## 1.1 DESCRIPCIÓN Y JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En los fenómenos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, según Duval<sup>7</sup>, se involucran tres actividades cognitivas: la construcción, que alude al diseño de configuraciones mediado por instrumentos geométricos; el razonamiento, relacionado con los procesos discursivos, y la visualización, cuya atención recae en las representaciones espaciales para la ilustración de proposiciones, la exploración heurística de situaciones complejas, miradas sinópticas sobre ellas y verificaciones subjetivas. Cada una cumple funciones epistemológicas distintas y puede desarrollarse de forma separada, pero la articulación entre ellas es un requisito ineludible para asegurar el aprendizaje de la geometría.

Las investigaciones realizadas por Duval<sup>8</sup> han aportado un importante marco de análisis acerca del desarrollo de estos tres procesos en los escolares, mostrando que dichos procesos deben desarrollarse separadamente, que se debe realizar un trabajo de diferenciación entre los procesos y que la coordinación de estas tres clases de procesos puede ocurrir solamente después de un trabajo de diferenciación. Sin embargo, la visualización se puede imponer como un elemento a privilegiar en la enseñanza y aprendizaje de la geometría, ya que, por un lado, no existe una jerarquía<sup>9</sup> entre ninguna de las actividades cognitivas mencionadas, y, por otro, esta actividad cognitiva es un recurso intuitivo que algunas veces es necesario para encontrar objetos o propiedades matemáticas relevantes en la solución de un problema o en el proceso deductivo de una demostración.

Por otra parte, una característica cognitiva propia de la actividad matemática, que marca diferencia con los procesos cognitivos de otras disciplinas, es que la mayoría de los objetos matemáticos son accesibles únicamente a través de sus

---

<sup>7</sup>RAYMOND, Duval. La geometría desde un punto de vista cognitivo. Traducción realizada por Víctor Hernández y Martha Villalba. [documento pdf]. [s.l.]. PMME-UNISON. febrero 2001. [consultado el 8 de agosto de 2012]. p. 1. Disponible en internet: <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>

<sup>8</sup> Ibid., p. 2

<sup>9</sup> Ibid., p.11

representaciones, lo que hace movilizar a la actividad matemática sobre varios registros de representación y que el aprendizaje en esta disciplina dependa de la coordinación entre ellos; es decir, que aprender matemáticas, desde una perspectiva semiótica, reside en la capacidad de reconocer el objeto y su representación, por la movilización de diferentes tipos de registros de representación semióticos y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza<sup>10</sup>. En particular, para la enseñanza de la geometría se destacan dos registros de representación sobre los cuales se realiza la actividad cognitiva en esta disciplina: el registro figural y el registro discursivo; el primero hace alusión a las figuras geométricas y sus propiedades, y el segundo enuncia las definiciones, proposiciones, teoremas e hipótesis. Cabe aclarar que, para lograr un aprendizaje en geometría, no es suficiente con que se trabajen los tratamientos de estos registros de representación por separado, sino que, además, debe darse una coordinación entre los tratamientos que se hagan sobre las representaciones en cada uno de los registros que involucra la actividad geométrica.

Los tratamientos que se emplean sobre las representaciones de los registros que implican la actividad cognitiva en geometría, tienen la característica de no ser de uso exclusivo de las matemáticas; por ejemplo, los tratamientos figurales parecen proceder de las leyes de organización de la percepción visual, y los tratamientos discursivos parecen ser la prolongación directa de la comprensión inmediata de la lengua utilizada para comunicar. Este pretendido acercamiento entre los tratamientos que se realizan espontáneamente y los solicitados por la actividad matemática, según Duval<sup>11</sup>, produce un fenómeno de falsa proximidad, que puede entenderse como una cercanía entre tratamientos pertinentes y no pertinentes que se producen en un mismo registro, ya que de todos los tratamientos que espontáneamente los individuos realizan en estos dos registros, cuando se está en el contexto de las matemáticas, algunos se utilizan ocasionalmente y otros se rechazan. De esta forma, Duval<sup>12</sup> menciona que las dificultades que se presentan en el aprendizaje y comprensión de la disciplina geométrica, por un lado, se deben a la necesidad de establecer una coordinación entre los tratamientos que provienen del registro figural y los que provienen del registro discursivo, y, por otro, a la presencia de la falsa proximidad entre los tratamientos matemáticos pertinentes y aquellos que se efectúan espontáneamente en cada uno de los registros.

La importancia de los tratamientos sobre las representaciones figurales, para el aprendizaje geométrico, reside en que estas representaciones juegan un rol determinante en la actividad geométrica, puesto que constituyen un importante soporte intuitivo para el desarrollo de las actividades, dado que permiten ver

---

<sup>10</sup> DUVAL, Raymond. *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Santiago de de Cali.: Artes Gráficas Univalle, 1999. 314 p.

<sup>11</sup> *Ibíd.*, p. 147

<sup>12</sup> *Ibíd.*, p. 148

mucho más de lo que los enunciados dicen; permiten, en la resolución de un problema, aquella conducta que se describe con el término de *abducción*, consistente en limitar de entrada, las hipótesis o alternativas que han de considerarse para la solución del problema.

Sin embargo, estudios<sup>13</sup> realizados muestran la presencia de dificultades en los estudiantes, tanto para lograr la coordinación entre los tratamientos de los dos registros, como en el momento de hacer de las figuras herramientas intuitivas que favorezcan la resolución de un problema geométrico, ya que no basta con que un alumno pueda acceder a los diferentes tratamientos que permiten las figuras (que pueda realizar o resaltar trazos sobre una figura, dibujar sobre ella sub-figuras, realizar transformaciones y rotaciones, transformar una figura dada en otra figura de contorno global diferente), sino que también es necesario que pueda discriminar aquellas transformaciones que por su naturaleza son pertinentes, potentes y económicas cognitivamente para la solución del problema planteado.

Estas dificultades probablemente se deban a que, primero, en la única etapa escolar en la que se tiene intencionalidad de enseñanza del registro de las figuras es en preescolar, la cual no desarrolla ningún tipo de racionalidad de orden geométrico; y, segundo, la concepción que se tiene de que las figuras hablan por sí solas y, por tanto, no se hace necesario un proceso que enseñe a tratar estas representaciones. De allí que dichos estudios pongan de manifiesto la urgente necesidad de realizar investigaciones que evalúen el papel que juega la visualización, así como la demanda de su inclusión en los currículos escolares para su enseñanza explícita. De esta manera, cobra interés e importancia el estudio de la visualización sobre el registro de las figuras en geometría como proceso cognitivo para entender el papel heurístico que juegan estas representaciones en el aprendizaje de esta disciplina.

De otro lado, quien permite introducir la visualización como un objeto de estudio es el área de superficies planas, dado que las exigencias cognitivas que caracterizan su enseñanza en los primeros grados de la educación básica (aplicación de modificaciones sobre las figuras, no es necesaria la aplicación de razonamientos de naturaleza deductiva y no exigen construcciones con instrumentos geométricos) coinciden en gran parte con los elementos a considerar en la enseñanza de la visualización. Además, el área es una de las magnitudes a la cual se le asigna mayor cantidad de tiempo, así como también mayor importancia en la educación básica (esto se evidencia al revisar los textos escolares y los estándares básicos de competencias en matemáticas); esta magnitud juega un papel de gran relevancia en lo que concierne a la construcción de nuevos conceptos (fracciones, porcentajes, entre otros...), así como al desarrollo de pensamiento matemático.

---

<sup>13</sup> MARMOLEJO (2007 y 2010); MARMOLEJO y VEGA (2012)

En otras palabras, en el marco del aprendizaje de este objeto matemático es que se puede asegurar y hacer posible un aprendizaje de la visualización y de los tratamientos sobre el registro de las figuras. No obstante, los resultados de pruebas nacionales<sup>14</sup>, que evalúan los tópicos del área de matemáticas, muestran la presencia de dificultades en el aprendizaje de algunos conceptos y nociones, puesto que esos resultados indican que un porcentaje significativo de la población estudiantil sólo cumple las competencias mínimas para el desarrollo de la prueba en relación con los tópicos de geometría y medición (hacer recubrimientos y descomposición de figuras planas, hacer clasificaciones elementales de formas planas, congruencias entre figuras), y que en un porcentaje muy pequeño se encuentran los estudiantes que tienen las competencias avanzadas para el desarrollo de la prueba en lo que se refiere a dichos tópicos (comparar diferentes atributos de figuras y sólidos a través de sus medidas), y mucho más significativa es la diferencia a nivel internacional<sup>15</sup> respecto al dominio de los contenidos de formas geométricas y medidas, puesto que Colombia se ubica muy por debajo del promedio estándar del TIMSS, lo que muestra que los estudiantes colombianos tienen serias dificultades en la resolución de problemas matemáticos relacionados con el uso y medición de formas geométricas.

La presencia de estas dificultades puede deberse al abandono del estudio de los sistemas geométricos causado por la adopción de las matemáticas modernas en los currículos escolares (años 1960-1980), lo que produjo la exclusión de la geometría intuitiva. Además, la desatención de la geometría como materia de estudio y el tratamiento de los sistemas métricos desde concepciones epistemológicas y didácticas sesgadas, por un lado descuidó el desarrollo histórico de la medición, que está ligado al desarrollo de la aritmética y la geometría\*, y, por otro lado, logró reducir el proceso de medición a una mera asignación numérica, quitándole así importancia a los procesos de medición.

Los anteriores hechos dejan ver el fracaso de la metodología tradicional en el aprendizaje de las matemáticas y, en particular, en el aprendizaje de las magnitudes y de los procesos de medida, conocimientos esenciales para que los alumnos puedan comprender lo que sucede a su alrededor. Dicho fracaso revela una especie de desconexión entre las demandas sociales y culturales relativas a la medida y su transposición didáctica en la enseñanza, en la que se evitan las prácticas educativas de medición, lo que convierte a la enseñanza de la medida en

---

<sup>14</sup> INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. Pruebas saber 5° y 9° 2009 resultados nacionales. LOPERA, Carolina; RONDEROS, Natalia; UZAHETA, Álvaro; CERVANTES, Víctor; QUINTERO, Luis. (Eds). Bogotá D.C., ICFES, 2010.

<sup>15</sup> INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. Resultados de Colombia en TIMSS 2007. FERNANDÉZ, María Isabel; CERVANTES, Víctor; LOPERA, Carolina. (Eds). Bogotá D.C., ICFES, 2010.

(\*) "Debido a que estas disciplinas, para los antiguos pueblos egipcios y babilónicos tenían un punto de encuentro, por cuanto la aritmética para ellos consistía en algunas reglas de cálculo que permitían resolver algunos problemas prácticos como el de la medición de las distintas magnitudes geométricas, es decir el desarrollo de los procesos de medición estuvo ligado a necesidades sociales y actividades prácticas". tomado de: BELMONTE, Juan Miguel. La importancia de la medición. Aspectos teóricos. En: El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. 3 ed. Madrid, Editorial síntesis, 2000. p. 121.

un discurso teórico<sup>16</sup>, puesto que se da un salto prematuro que privilegia actividades de tipo aritmético referidas tanto a la correcta escritura de las unidades como al manejo de algoritmos para la conversión de unidades de medida que, como afirma Belmonte<sup>17</sup>, “privan al alumno de una fuente inagotable de ocasiones para aprehender que proceden de la propia experiencia, cercana a su intuición, y, lo que es más importante, retrasa, y a veces impide la formación de conceptos, lo que obliga al escolar a recurrir a la memorización de reglas no comprendidas, que solo se aplican bien durante un corto espacio de tiempo”. Lo anterior va en contravía de las políticas educativas actuales, las cuales proponen que los procesos de construcción de las magnitudes deben comenzar a partir de la clasificación o comparación, de atributos o fenómenos observables de los objetos, para de allí sí empezar a desarrollar los logros y procesos ligados al pensamiento métrico y a los sistemas de medidas (construcción, conservación, estimación y apreciación del rango de las magnitudes, selección de una unidad de medida, diferencia entre unidad y patrón, asignación numérica, etc.)<sup>18</sup>.

De este modo, para el caso de la magnitud superficie, por un lado, lo usual es utilizar formas geométricas (polígonos), bien conocidas y reconocibles, que se presentan dibujadas sobre una hoja de papel, lo que ya causa una difícil diferenciación entre los atributos longitud y superficie, ya que la línea que constituye la frontera predomina en la figura, lo que hace que el alumno no reconozca la superficie como el interior de la figura delimitada por dicho borde, convirtiendo este hecho en un claro obstáculo didáctico. Y, por otra parte, se tiene que para la medición de esta magnitud, lo habitual es cuadricular las representaciones figurales que se presentan mediante el trazo de líneas perpendiculares y preguntar, por ejemplo, ¿cuántos cuadrados recubren la figura? La unidad patrón es el cuadrado, y el número de estos es una medida del área de dicha figura.

Estas actividades llevan a la noción de recubrimiento por repetición de una unidad y son previas al desarrollo de procesos de medición del área. Sin embargo, es necesario realizar otro tipo de actividades que permitan captar la naturaleza continua y aproximativa de la medida, ya que las anteriores tienen las desventajas de promover un carácter discreto y exacto de la medida, lo cual no es sino una primera aproximación que, si no se supera oportunamente, obstaculiza el desarrollo interior de los procesos de medición<sup>19</sup>, y, por tanto, se está llevando muy pronto al alumno a la automatización, sin tener garantía de si hubo o no comprensión del concepto; es decir, existe una problemática en relación con la comprensión del área de superficies planas y su medida.

---

<sup>16</sup> CHAMORRO, María del Carmen. El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En: Didáctica de las matemáticas para primaria. (Número de edición). (Lugar de edición), Editorial Pearson Prentice Hall, (2003). p. 223

<sup>17</sup> CHAMORRO, María del Carmen. Tratamiento didáctico: el problema de la medida. En: El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. 3 ed. Madrid, Editorial síntesis, 2000. p. 42

<sup>18</sup> COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas lineamientos curriculares. Bogotá D.C: MEN, 1998. 131 p.

<sup>19</sup> Ibíd., p. 65

No obstante, en la actualidad se ven grandes esfuerzos por regresarle ese espacio de gran importancia a la geometría; muestra de ello es la propuesta de renovación curricular dada en los lineamientos, la cual adopta a la geometría activa como alternativa para restablecer el estudio no sólo de los sistemas geométricos como herramienta de exploración y representación del espacio, sino con el propósito de recuperar el desarrollo del pensamiento espacial intuitivo en toda la matemática.

Por tanto, este trabajo privilegia la temática área de superficies planas frente a otras que se desarrollan y están presentes en el currículo de matemáticas, pues, por un lado, la visualización asociada a las figuras geométricas desempeña un papel importante para abordar la problemática relacionada con el aprendizaje de la magnitud superficie y su medida, y, por otro, debido a la falta de espacios escolares en los que explícitamente se trabaje sobre los tratamientos y las formas de ver que el registro de las figuras permite, en la enseñanza del área de superficies planas la visualización obtiene un lugar de reconocimiento y se convierte en una actividad cognitiva susceptible de aprendizaje explícito.

Finalmente, en el desarrollo de los procesos de enseñanza y aprendizaje, los textos escolares cobran importancia en cuanto a que son una herramienta clave para enseñar los diferentes conceptos y objetos matemáticos (entre ellos el área) en los distintos ciclos de educación (sobre todo en los primeros, donde la enseñanza de las matemáticas la controlan los textos elegidos por el educador), como también se constituyen en un lugar ideal, que permite estudiar la forma en que la visualización subyace en la construcción del conocimiento matemático. Por tanto, debido a la relevancia que tienen los textos como material didáctico surge el interrogante sobre si los estudiantes movilizan o no conocimiento matemático cuando desarrollan actividades que proponen dichos textos.

## 1.2 ANTECEDENTES

En la actualidad, en el campo de la educación matemática, la visualización se ha convertido en objeto de estudio y de gran interés para algunos investigadores; esta actividad cognitiva ha cobrado gran relevancia en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular para la disciplina geométrica, debido a que la visualización se ha convertido en un espacio de enorme potencia para devolverle a la geometría el lugar que le corresponde en el currículo escolar. Muestra de ello es la diversidad de enfoques que tienen las investigaciones que se interesan por el estudio de esta actividad cognitiva en los procesos de aprendizaje de algunos conceptos geométricos. De esta manera se encuentran investigaciones que tratan problemáticas que van desde aspectos relacionados con la adquisición, evaluación y desarrollo de las capacidades de visualización y razonamiento espacial de los maestros en formación, pasando por estudios que centran su atención en la visualización como herramienta cognitiva para el impulso del desarrollo geométrico en la escuela, así como también trabajos que analizan el rol

que desempeña la visualización en el desarrollo de actividades que proponen los manuales escolares.

Por otra parte, son de interés para este trabajo las investigaciones que abordan el análisis de textos escolares; la revisión de la literatura especializada sobre estas investigaciones ha permitido identificar algunos estudios con una variada gama de enfoques, así como la discriminación de diversos objetos y contenidos matemáticos que son motivo de análisis y reflexión, y permiten observar que en número son limitadas las investigaciones que abordan el análisis de textos escolares en relación al objeto matemático área. Por último, también es importante destacar los trabajos de algunos autores que han centrado su atención en el estudio de los fenómenos que subyacen a los procesos de enseñanza y aprendizaje del área de superficies planas, debido a que dichos estudios surgen como alternativas didácticas para tratar de solventar la problemática relacionada con la comprensión de la magnitud superficie y su medida.

En lo que sigue, se describen en detalle los propósitos de algunas investigaciones que aluden a la problemática planteada al inicio de este capítulo y que se presentan en las siguientes categorías: análisis, evaluación y desarrollo de las competencias de visualización y razonamiento espacial de maestros en formación, la visualización asociada a las figuras geométricas como herramienta cognitiva para el impulso del desarrollo geométrico en la escuela, la visualización asociada a las figuras geométricas en el análisis y/o desarrollo de actividades sobre medida de superficies planas propuestas por textos escolares, análisis de textos escolares y sobre los fenómenos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje del concepto de área.

- Análisis, evaluación y desarrollo de las competencias de visualización y razonamiento espacial de maestros en formación: En esta categoría, se presentan algunas investigaciones sobre evaluación y desarrollo de capacidades de visualización y razonamiento espacial con estudiantes en formación docente. De esta manera, Gonzato<sup>20</sup> y otros evalúan aspectos específicos de los conocimientos de maestros en formación sobre visualización de objetos tridimensionales representados en el plano. Con el propósito de identificar los principales errores y dificultades, este estudio reporta los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario sobre el tópico en mención a 241 futuros profesores de educación primaria, encontrando que el conocimiento de visualización, de los maestros en formación, no es el esperado, y que, en forma general, se puede clasificar como insuficientes las capacidades de visualización de representaciones planas de objetos tridimensionales, de los futuros educadores. En este mismo sentido, Torregrosa<sup>21</sup> presenta un estudio que

---

<sup>20</sup> GONZATO, Margherita; DÍAZ, Juan y CONTRERAS, J.M. Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. (s.d.) p. 383-392

<sup>21</sup> TORREGROSA GIRONÉS, Germán; QUESADA VILELLA, Humberto y PENALVA MARTÍNEZ, María. Razonamiento Configural como coordinación de procesos de visualización. En: Enseñanza de las ciencias. (2010). Vol. 28, No. 3, p. 327-340.

identifica los procesos de visualización de estudiantes que se están formando para ser docentes, cuando resuelven problemas de geometría que requieren una prueba matemática en un entorno de lápiz y papel, así como una coordinación entre las aprehensiones discursiva y operativa que constituye el vínculo entre los procesos de razonamiento matemático y la visualización, con el propósito de determinar las posibles causas por las que la coordinación no se da o se interrumpe entre estos tipos de aprehensión en el desarrollo de problemas geométricos. El análisis de los resultados muestra la caracterización de las diferentes formas sobre cómo los estudiantes realizan la coordinación entre dichas aprehensiones, permitiendo comprender qué acciones desarrolla el alumno, cómo razona y qué dificultades obstaculizan el proceso de coordinación para la resolución de los problemas.

- La visualización como herramienta cognitiva para el impulso del desarrollo geométrico en la escuela: En esta categoría se destacan algunos trabajos que asocian la visualización con el aprendizaje de conceptos matemáticos. En este sentido, primero se destacan los trabajos que asocian la visualización con el aprendizaje de algunos conceptos geométricos; así Gualdrón<sup>22</sup> acomete el estudio de las formas y evolución del razonamiento que tienen los estudiantes al abordar tareas relacionadas con la semejanza, a través de una unidad de enseñanza diseñada para estudiantes de grado noveno; la implementación de esta unidad de enseñanza da cuenta del uso que hacen los estudiantes de las imágenes mentales y de las habilidades de visualización en la resolución de tareas matemáticas relacionadas con la semejanza, además de mostrar la compleja relación que existe entre la habilidad para construir y usar imágenes mentales, y del papel de estas imágenes en la construcción de significados en el aprendizaje de este tópico geométrico.

En este mismo sentido, Acevedo y Camargo<sup>23</sup> presentan una aproximación metodológica que busca el establecimiento de relaciones entre el modelo Modificabilidad Estructural Cognitiva (MEC)\* y algunos procesos y habilidades de visualización, puesto que, en relación con el aprendizaje de las matemáticas, existen algunas dificultades para llevar el modelo a la práctica, pues no discrimina acciones específicas asociadas al uso de conceptos y procedimientos matemáticos. De esta manera, este estudio selecciona, redefine y caracteriza, a partir del análisis de las actuaciones de estudiantes, algunas de las operaciones que considera propias de la actividad matemática, específicamente en el dominio

---

<sup>22</sup> GUALDRON, Élgar. Elementos de visualización en la resolución de tareas de semejanza. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (11: 7-9, octubre: Colegio Champagnat de Bogotá.). Memorias. Bogotá D.C. 2010. p. 33-40.

<sup>23</sup> ACEVEDO, Jenny Patricia y CAMARGO, Leonor. Modificabilidad estructural cognitiva versus visualización. Un ejemplo de análisis del desempeño en tareas relacionadas con el aprendizaje de la rotación. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (11: 7-9, octubre: Colegio Champagnat de Bogotá.). Memorias. Bogotá D.C. 2010. p. 13-21.

(\*) Este modelo, desarrollado por Reuven Feuerstein, busca atender niños que tienen dificultades de aprendizaje y/o emocionales considerando un conjunto de funciones intelectuales, correspondientes a estructuras cognitivas básicas, que sirven de soporte a ciertas acciones u operaciones con las que se resuelven situaciones problema.

de la geometría. Con el fin de realizar un acercamiento intuitivo a los conceptos de rotación y traslación por medio del juego tetris en estudiantes de grado quinto, tienen en cuenta desarrollos investigativos acerca de procesos y habilidades de visualización propuestos por Bishop (1989), Del Grande (1990), Duval (1998).

Ramírez y otros autores<sup>24</sup> estudian la relación existente, en educación matemática, entre visualización y talento matemático. En estos estudios, se observa la visualización de estudiantes durante la realización de actividades geométricas, bajo el supuesto de que la visualización es una cualidad que puede desarrollarse. El propósito de este estudio es analizar algunas de las dimensiones de visualización que ponen en juego este tipo de alumnos, las cuales pueden servir de ayuda y complemento para el diseño de prácticas docentes en las que los alumnos puedan ampliar sus capacidades matemáticas.

En esta misma categoría, por otra parte, se pueden destacar los trabajos que asocian la visualización sobre el registro de las representaciones figurales con el concepto de superficie. De esta manera, se resalta a Marmolejo<sup>25</sup> y Marmolejo y Vega<sup>26</sup>; el primero llama la atención sobre la dificultad para ver en las figuras geométricas, mostrando que es un acto complejo, no espontáneo y susceptible de aprendizaje. Igualmente, propone resaltar las oportunidades que en el aprendizaje de las matemáticas tienen los alumnos que han estudiado las posibilidades heurísticas que brindan las figuras. En el segundo, se presentan y discuten formas de proceder cognitivamente potentes y económicas que un grupo de estudiantes puso en acto en el desarrollo de actividades donde se tenían que comparar figuras según sus cantidades de área, con el propósito de contrastar las visualizaciones privilegiadas de estudiantes que tuvieron la oportunidad de reflexionar sobre las posibilidades heurísticas y operativas que permiten las figuras con las formas de ver introducidas por alumnos que, al contrario, nunca participaron en tales procesos de reflexión; concluyen, así, que la visualización es un espacio de enorme potencia para devolverle a la geometría el lugar que le corresponde en el currículo escolar, como también la necesidad de abrir espacios específicos en los currículos escolares que expliciten la enseñanza del registro de las figuras por medio de la visualización.

- La visualización asociada a las figuras geométricas en el análisis y/o desarrollo de actividades sobre medida de superficies planas propuestas por textos escolares: En esta categoría, se puede resaltar el trabajo que Marmolejo<sup>27</sup>

---

<sup>24</sup> RAMÍREZ, R. FLORES, P. y CASTRO, E. Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En: Investigación en Educación Matemática. M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds). 2010. Vol. 14. p. 499-510.

<sup>25</sup> MARMOLEJO, Gustavo. La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. En: Revista Sigma. 2010. Vol. 10, no. 2, p. 10-26.

<sup>26</sup> MARMOLEJO, Gustavo y VEGA, Myriam. La visualización en las figuras geométricas un asunto complejo y de importancia en el aprendizaje de la geometría en la educación básica. En: Educación matemática, (2012). Vol. 24, No. 2, p. 7-32

<sup>27</sup> MARMOLEJO, Gustavo. Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras: procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de maestría. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de educación y Pedagogía, 2007.

presenta sobre las posibilidades que brinda el aprendizaje del registro semiótico de las figuras en contextos de área de figuras geométricas bidimensionales. De esta manera, en la implementación de una serie de situaciones donde predomina la exigencia de transformar unas figuras en otras de contorno global diferente e igual área, esta investigación analiza la complejidad que subyace al aprendizaje de este registro de representación. Además, reflexiona sobre el papel que juegan las figuras, su visualización y los factores de visibilidad, en las apuestas de aprendizaje que sobre el área de figuras geométricas bidimensionales presentan algunos libros de mayor uso en las escuelas de Cali, encontrando que en la forma como los textos escolares asumen la construcción del área de figuras bidimensionales, inducen una visualización local sobre ellas. En consecuencia, los libros propenden a la aplicación de tratamientos aritméticos y las actividades no permiten la reflexión sobre el área a partir de comparaciones cualitativas, como debe ser en el caso de las magnitudes.

En esta misma línea, Marmolejo y González<sup>28</sup> presentan, en su investigación, una metodología de análisis de textos escolares usados en España y Colombia, cuyo propósito se encamina a caracterizar el rol que desempeña la visualización en el desarrollo y comprensión de tareas de área de superficies planas propuestas por los textos, aspecto de importancia en la búsqueda de discriminar los fenómenos que subyacen a la enseñanza y aprendizaje del área de superficies planas, pues, por un lado, la visualización asociada a las figuras geométricas desempeña un importante papel para cargar de sentido y significado la enseñanza del área de superficies planas y, por otra parte, estos materiales didácticos tienden a caracterizar las formas como los profesores de matemáticas desarrollan sus clases.

De la misma manera, debido a que, en España, la adquisición de habilidades de orientación y representación espacial es un objetivo incluido en los diseños curriculares, debido a las aplicaciones prácticas e implicaciones en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, y que, además, la enseñanza de estos procesos no es una tarea fácil para los profesores, Gonzato<sup>29</sup> y otros proponen una clasificación de tareas, relacionadas con la orientación y visualización de espacios y objetos tridimensionales, encontradas en algunas investigaciones y en los libros de texto escolares, realizando una distinción en tres tipos de familias de tareas de visualización y orientación espacial, con el propósito de ayudar a los profesores en la planificación de clases que cubran los diferentes aspectos relacionados con las habilidades de orientación y representación espacial, de tal manera que incluyan trabajos de manipulación y físicos. Además, determinan que las tareas, encontradas en los libros de texto, muestran un escaso interés y cubren parcialmente los aspectos principales del tópico en cuestión, puesto que los textos

---

<sup>28</sup> MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 1-21.

<sup>29</sup> GONZATO, Margherita; FERNÁNDEZ, Teresa y DÍAZ, Juan. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. En: *Números Revista de didáctica de las matemáticas*. Julio, 2011. Vol. 77. p. 99-117.

trabajan únicamente con representaciones planas de objetos y espacios sin hacer una referencia a los objetos y espacios reales que representan; es decir, los textos no trabajan en espacios conocidos, sino con representaciones de espacios ficticios y personajes imaginarios.

- Investigaciones enfocadas al análisis de textos escolares: La revisión de la literatura especializada sobre investigaciones que abordan el análisis de textos escolares de matemáticas ha permitido identificar: uno, estudios con una variada gama de enfoques, así como la discriminación de diversos objetos y contenidos matemáticos que son motivo de análisis y reflexión, y, dos, que las investigaciones que hacen análisis de textos escolares referidas al concepto de área, son reducidas en número. De este modo, de un lado se tienen algunas investigaciones<sup>30</sup> que realizan análisis de textos escolares que abordan problemáticas en relación con el aprendizaje y comprensión de conceptos y objetos matemáticos (números fraccionarios, números enteros, números reales, funciones lineal y cuadrática, transformaciones geométricas, polinomios, cónicas) que van desde las dificultades presentes en la comprensión lectora que los estudiantes tienen al abordar problemas propuestos por textos, pasando por la articulación que se da entre el contenido del texto y las políticas curriculares, así como estudios que identifican nuevas variables didácticas presentes en las actividades de los textos para el diseño de nuevas secuencias de enseñanza; o trabajos que centran su atención en las posibilidades que brindan los registros de representación semiótica en la construcción de algunos conceptos matemáticos en los textos, hasta trabajos que se preocupan por el desarrollo histórico o por la presencia de obstáculos epistemológicos en la construcción de los conceptos y cómo esto influye en la organización curricular de los textos.

Por otro lado, entre los estudios que centran su atención en el análisis de textos, pero referidos al concepto de superficie, sobresalen Duque y Maca<sup>31</sup>, quienes proponen un análisis histórico-epistemológico del concepto de área presente en los Elementos de Euclides, en virtud de caracterizar algunas incidencias en el ámbito escolar respecto al tratamiento didáctico de la medida del área de figuras rectilíneas regulares e irregulares. Para tal fin, apelan a la revisión de textos escolares de grado séptimo, para determinar si, en efecto, hay o no hay aportes, indicios o rastros que revelen un tratamiento de la medida en la escuela desde el método de aplicación de áreas consignada en el libro II de los Elementos. En este mismo sentido, el trabajo de Beltrán<sup>32</sup> indaga acerca del tratamiento didáctico que plantean los textos de matemáticas más usados en el periodo comprendido entre 1996-1999 respecto a la magnitud área. Para dar cuenta del tratamiento didáctico,

---

<sup>30</sup> LONDOÑO y CUERO (2010); QUIÑONES (2011); HURTADO (2011); OBANDO (2008); FERNÁNDEZ y MEJÍA (2010); SUÁREZ (2008); FORY (2010); GUZMÁN & INSUASTY (2008); CÓRDOBA (2008); RICO (2012); VÉLEZ (2011)

<sup>31</sup> DUQUE, Jhonatan y MACA, Oscar. Análisis histórico-epistemológico de la noción de cuadratura en los libros I y II de los elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2011.

<sup>32</sup> BELTRÁN, Holdan. El tratamiento didáctico de las magnitudes un acercamiento desde el análisis de texto. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2008.

establece como categoría de análisis la estructura general que cada texto tiene para caracterizar el concepto de magnitud. De igual forma, analiza la estructura de la presentación de la temática área, donde se revisan los elementos constitutivos de los discursos. Además, se caracterizan los usos que los docentes hacen de los libros de texto durante el desempeño de su labor. Se puede también resaltar algunos trabajos que abordan el análisis de textos escolares vinculado a la visualización sobre el registro de las figuras geométricas; Coral<sup>33</sup> realiza un análisis de textos escolares de matemáticas empleando una perspectiva semiótica del pensamiento que permite identificar las formas de movilización del saber geométrico durante el primer ciclo de educación básica primaria, identificando y analizando, a la vez, diferentes formas de designar las figuras geométricas en los textos escolares, los procesos de visualización puestos en marcha dentro de las actividades expuestas en las secciones de geometría de los libros escolares, así como los principales factores de visibilidad que intervienen en el tratamiento y aprendizaje de los registros semióticos de las figuras geométricas.

- Investigaciones sobre los fenómenos que subyacen en el aprendizaje y enseñanza del área: En esta categoría, se puede destacar el interés, de algunos investigadores que han centrado su atención en el estudio de los fenómenos que subyacen en el aprendizaje y enseñanza del área de superficies planas. Algunos autores<sup>34</sup> asumen que el desarrollo del pensamiento geométrico está orientado por los avances de la psicología cognitiva en relación con la concepción del espacio y los niveles del pensamiento geométrico, y con base en esto el posterior diseño de estrategias metodológicas que involucran a la geometría activa con la intención de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático. Otros investigadores<sup>35</sup>, por su parte, diseñan secuencias didácticas de enseñanza que incluyen el uso de materiales de naturaleza física con el fin de alcanzar una significación mayor en la comprensión de la noción de área, así como también los trabajos<sup>36</sup> que incorporan el uso de nuevas tecnologías (cabri II plus) para el diseño de estrategias metodológicas apoyadas en el marco de la teoría de las situaciones didácticas, de tal manera que dichas tecnologías se conviertan en medios facilitadores para lograr un aprendizaje por adaptación. Por último, se puede señalar el trabajo de Mapallo<sup>37</sup>, en el que se aborda el estudio de las propuestas, programas y contenidos curriculares del concepto área, con el propósito de identificar y caracterizar las concepciones y visiones relativas al tratamiento didáctico de la noción de área.

---

<sup>33</sup> CORAL, Luz Adriana. Introducción al registro semiótico de las figuras geométricas en los textos escolares del primer ciclo de la educación básica primaria. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2008.

<sup>34</sup> BARAJAS y RAMÍREZ (2006); CADAVID et. al. (2008); LÓPEZ y SUAREZ (2010)

<sup>35</sup> MENDOZA (2010); MURCIA (2004); QUIJANO (2009)

<sup>36</sup> BALLESTEROS, Iván Darío y ROJAS, David Antonio. Análisis de la implementación de las actividades para la conceptualización de área del rectángulo en el grado séptimo con la mediación del programa cabri geometry. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas: Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas, 2011.

<sup>37</sup> MAPALLO, Dora. La transposición didáctica de la noción de área a partir de los programas y propuestas curriculares colombianos: un estudio monográfico. Trabajo de grado licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, 2011.

### 1.3 REFERENTES TEÓRICOS

Este proceso de indagación se enmarca dentro de la perspectiva semiótica, que considera que el aprendizaje y comprensión de las matemáticas pasa por la distinción que se haga entre objeto y representación, por la movilización de diferentes registros de representación semióticos y por una debida coordinación entre los sistemas semióticos que el conocimiento matemático moviliza. En este sentido, se centra la atención en la visualización sobre el registro figural como proceso cognitivo clave para el aprendizaje de la disciplina geométrica, así como también sobre las formas que existen para discriminar información sobre las figuras; es decir, el interés recae en los tratamientos y formas de ver que permiten las representaciones figurales. A continuación se describen en detalle los aspectos conceptuales aludidos anteriormente.

Para hablar de las representaciones semióticas y de los registros de representación, en específico de las figuras geométricas, es necesario aclarar primero que, desde el punto de vista de la psicología cognitiva, la noción de representación ha sido un factor importante para el estudio de los fenómenos relativos a la adquisición de conocimientos, esto debido a que no existe conocimiento alguno que los sujetos puedan movilizar, sin recurrir al uso de las representaciones.

El proceso de diferenciación del concepto de representación, a lo largo de la historia, ha tenido diferentes concepciones y perspectivas; un ejemplo de esto se muestra en los estudios piagetianos de los años 1924-1926, en los que la noción de representación se asumió como una representación mental referida a las creencias y explicaciones de los niños sobre los fenómenos de la naturaleza, o como más adelante, en 1937, el mismo Piaget la asumiría como la acción de evocar representaciones de objetos ausentes. Sin embargo, no fue hasta 1985 cuando se comienza a realizar una distinción más profunda de la noción de representación, esto gracias a los trabajos relacionados con la asimilación de conocimientos matemáticos y sobre las dificultades que produce su enseñanza y aprendizaje.

Dicha distinción surge en razón de que las dificultades presentes en el aprendizaje de las matemáticas residen en una las principales características que tiene esta disciplina y que la diferencian de otras disciplinas del conocimiento: no ser accesible a través de los sentidos, sino únicamente a través de las representaciones de los contenidos y los objetos que la conforman. De esta manera, la perspectiva semiótica que desarrolla Duval<sup>38</sup> considera que el aprendizaje y comprensión de las matemáticas pasa por la distinción que se haga entre los objetos y sus representaciones, así como por un trabajo centrado tanto

---

<sup>38</sup> DUVAL, Raymond. *Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali.: Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, 1999. 314 p.

en la utilización de varios registros de representación, así como en la consecución de una debida coordinación de los registros que moviliza el conocimiento matemático.

En este orden de ideas, es importante tener en cuenta dos cosas: la primera, la definición que Duval plantea acerca de las representaciones semióticas; y la segunda, relacionada con las actividades cognitivas que debe cumplir un sistema semiótico para considerarse registro de representación. Respecto a la primera, Duval afirma que: “Las representaciones semióticas son, a la vez, representaciones conscientes y externas, que permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes”<sup>39</sup>. De esta manera, existe una gran variedad de representaciones posibles (figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc.).

Respecto a la segunda idea, Duval<sup>40</sup> plantea que un sistema de signos va a constituir un registro de representación si permite cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación: uno, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles, identificables como *una* representación de alguna cosa en un sistema determinado. Dos, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, las representaciones producidas en un sistema de representaciones puedan convertirse en representaciones de otro sistema, de manera que estas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas al objeto que se representa.

De esta manera, de las dos últimas actividades cognitivas que debe cumplir un sistema de signos para catalogarse como registro de representación, se derivan dos clases de transformaciones, el tratamiento y la conversión, que tienen en común que son transformaciones sobre las representaciones semióticas, pero que la función que desempeñan en los registros diferencia la una de la otra. A continuación se describe en detalle cada una de estas transformaciones, puesto que su manejo es esencial para la adquisición de conocimientos matemáticos.

### 1.3.1 Conversión de las representaciones semióticas

Según Duval<sup>41</sup>, la conversión es la transformación de la representación de un objeto, que se da en un registro, en una representación del mismo objeto en otro registro; dicho de otra manera, la conversión es una transformación externa relativa al registro de representación de partida. Una ilustración de este tipo de

---

<sup>39</sup> *Ibíd.*, p. 34

<sup>40</sup> *Ibíd.*, p. 29

<sup>41</sup> *Ibíd.*, p. 44

situaciones se presenta en el planteamiento algebraico de una ecuación a partir de un enunciado escrito o un problema, en el que la conversión se da en el sentido de la sustitución de las relaciones expresadas lingüísticamente por relaciones que se expresan simbólicamente.

### 1.3.2 Tratamiento de las representaciones semióticas

Según Duval<sup>42</sup>, un tratamiento es la transformación de una representación inicial en otra representación terminal, pero al interior de un mismo registro de representación; es decir, el tratamiento es una transformación interna. Un ejemplo de este tipo de transformación incluye los tratamientos aritméticos que se realizan sobre las representaciones del registro numérico; es decir, los cálculos aritméticos que se realicen sobre algún sistema numérico, donde en el mismo registro se sustituyen unas representaciones por otras que permiten la ganancia de conocimiento respecto de las primeras representaciones.

- Tratamiento de las figuras geométricas: De otro lado, la actividad cognitiva que se realiza en geometría se desarrolla en dos registros de representación: el figural, que se usa para designar las figuras y sus propiedades; y el discursivo, que se utiliza para enunciar las definiciones, los teoremas, las hipótesis, etc. Sin embargo, esto no quiere decir que los tratamientos que se hagan en estos registros se deban realizar separada y alternativamente; por el contrario, la actividad cognitiva que requiere la geometría no trata solamente de un cambio de registro, como en el caso de las representaciones cartesianas y la escritura algebraica de algunas relaciones, sino que involucra, además, que tanto los tratamientos propios del registro de las figuras como del registro discursivo se efectúen simultáneamente; es decir, se presente una coordinación entre los tratamientos específicos a cada registro para que se dé un aprendizaje significativo en geometría.

No obstante, la identificación de los tratamientos figurales pertinentes, que se deben emplear en una situación geométrica, no es para nada espontánea, a pesar de que las figuras dan un importante soporte intuitivo a las actividades geométricas, dado que ellas dejan ver mucho más de lo que los enunciados dicen; permiten, en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración, aquella conducta que se describe con el término abducción, consistente en limitar de entrada, las alternativas que se han de tener en cuenta al inicio y que han de evitar la exploración de todos los caminos posibles, atrayendo la atención sobre aquellos que han de conducir a la solución.

Dichos tratamientos no pueden llegar a ser dominados sin un aprendizaje específico, y su determinación es de suma importancia para la enseñanza de la geometría, debido a que su discriminación permite a las figuras jugar un rol heurístico en el desarrollo de problemas, y, cuando se dice que las figuras

---

<sup>42</sup> *Ibíd.*, p. 42

cumplen el papel o función heurística en la resolución de una tarea, se alude a que la conducta de abducción orienta los procesos deductivos de razonamiento para la búsqueda de la solución de un problema. Por eso, para efectos de este trabajo se privilegió la transformación de tratamiento sobre las representaciones del registro figural, que es el registro donde se centra nuestra atención. De esta manera Duval<sup>43</sup>, menciona que una condición previa para la descripción precisa de los diferentes tratamientos matemáticos pertinentes en el registro de las figuras geométricas, es un análisis semiótico relativo a la determinación de las unidades elementales constitutivas de este registro, a las posibilidades de su articulación en figuras y la modificación de las figuras obtenidas.

Entonces, en este sentido, en primer lugar es necesario determinar las unidades elementales constitutivas que conforman semióticamente una figura, para posteriormente poder entender cómo las figuras permiten la conducta de abducción. Para hacer esto, se debe tener en cuenta que para que pueda haber una figura es necesario que se presente un contraste sobre un campo perceptivo de tal manera que se pueda destacar algo sobre él. Duval<sup>44</sup> menciona que el contraste es el primer elemento de toda representación visual que forma una mancha visible; dicho contraste es susceptible de algunas variaciones visuales que se identifican en dos clases: variaciones relacionadas con el número de dimensiones (punto dimensión 0, línea dimensión 1 y área dimensión 2), y variaciones cualitativas, que son variaciones ligadas al cambio de forma, tamaño, orientación, color (de ellas sólo la forma se considera una variable cualitativa visual, que puede determinar una unidad figural elemental).

A partir de esta distinción, Duval<sup>45</sup> asegura que toda figura combina dos tipos de variación, es decir, una figura no es más que el cruce de valores de la variable dimensión con la variable cualitativa forma, lo cual le permite distinguir las unidades figurales elementales, que se presentan en el cuadro 1, a la vez que define una figura geométrica como una configuración, de al menos, dos unidades figurales elementales: así, una circunferencia y su diámetro trazado, o un triángulo y sus alturas, son ejemplos de configuraciones formadas por dos unidades figurales elementales, como las descritas en el Cuadro 1.

Por tanto, debido a que los tratamientos que se dan en el registro de las figuras están lejos de ser obvios y espontáneos, y, por el contrario, su discriminación requiere de un aprendizaje específico, que no se presenta en la escuela porque no se promueve en el desarrollo de tareas propuestas por los docentes, de tal manera que desplieguen en los estudiantes este tipo de procesos cognitivos, se debe señalar que las dificultades de identificación de estos tratamientos pueden deberse a que no siempre es fácil ver sobre una figura geométrica las relaciones o

---

<sup>43</sup> *Ibíd.*, p. 148

<sup>44</sup> *Ibíd.*, p. 149- 150

<sup>45</sup> *Ibíd.*, p. 150

las propiedades relativas a las hipótesis dadas que permiten encontrar la solución de un problema; de esta manera, aquí el papel de la visualización juega un rol determinante para la discriminación de los tratamientos figurales, ya que esta actividad cognitiva, que se diferencia de un proceso perceptual común, permite la identificación en una figura tanto de las subconfiguraciones que explícitamente se utilizaron para su construcción, como de aquellas que permanecen ocultas, además de las que son pertinentes para obtener la solución de una tarea, y que sólo pueden ser identificadas a través de los procesos de visualización que se ponen en ejecución cuando se enfrenta una situación problema.

En consecuencia, para comprender como las figuras juegan ese papel heurístico y permiten la conducta de abducción, en lo que sigue se ha de distinguir la forma en que se asume la visualización como actividad cognitiva, y para describir cuál puede ser el aporte heurístico de una figura en un problema de geometría, se procederá a presentar tres formas distintas de discriminar información sobre una figura; es decir, la atención recaerá sobre la distinción que Duval realiza sobre los tipos de aprehensión que permiten las figuras y que son susceptibles de sugerir la solución de una tarea.

Cuadro1. Clasificación de unidades figurales elementales

Dimensión	Forma		Descripción	Representación
0			Punto	
1	Rectilínea		Recta, o parte de una recta	
	Curva		Arco de curva	
2	Rectilínea	Abierta	Angulo, intersección de dos rectas o de dos segmentos	
		Cerrada	Triángulo, cuadrado, rectángulo (figuras poligonales)	
	Curva	Abierta	Curva en punta, curva en e	
		Cerrada	Óvalos, circunferencias	

Fuente: DUVAL, Raymond. Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali.: Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, 1999. 314 p

### 1.3.3 Visualización

Entre la gran variedad de acepciones con que el término visualización<sup>46</sup> tiende a ser asumido en el campo de la educación matemática, en esta investigación se adaptará la postura conceptual que Marmolejo y Vega<sup>47</sup> asumen acerca de esta actividad cognitiva; es decir, se entenderá no solo como la articulación entre las modificaciones y los cambios de focalización bidimensional aplicados sobre las figuras, sino que además, también se tendrá en cuenta la articulación de los cambios dimensionales, figúrales y flujos visuales aplicados sobre la figura, sub-figuras y/o sub-configuraciones que conforman la figura de partida y que han de considerarse en el desarrollo y comprensión de la tarea propuesta.

### 1.3.4 Tipos de aprehensión de las figuras

Duval<sup>48</sup>, por un lado, ha mostrado que una misma figura puede dar lugar a aprehensiones de naturaleza diferente (aprehensión perceptiva, aprehensión operatoria y aprehensión discursiva). Por otro, que en algunos casos estas formas de discriminación se subordinan unas a las otras, en otros se relacionan, o en otros se oponen. A continuación se describe en detalle cada uno de los aspectos mencionados.

- Aprehensión perceptiva: Según Duval<sup>49</sup>, en este nivel se reconocen, de manera automática e inmediata, las diferentes unidades figúrales discernibles en una figura dada; es decir, se presenta una identificación perceptiva espontánea. Esta forma de aprehensión está ligada a las leyes gestálticas de organización de la percepción: cuando las unidades figúrales de dimensión 2 están separadas, su reconocimiento no tiene ningún tipo de dificultad, pero no sucede lo mismo cuando se encuentran integradas en una configuración. Esto sucede por dos razones diferentes: en primer lugar, algunas unidades figúrales de dimensión 2 predominan sobre otras unidades también de dimensión 2, de conformidad con la ley gestáltica de cierre. En segundo lugar, una figura geométrica contiene, con frecuencia, más unidades figúrales elementales que las requeridas para construirla. Para Duval, este tipo de aprehensión puede tener un rol facilitador o inhibidor en el desarrollo de una tarea.

A continuación se presenta una situación en la que la figura se encuentra dividida en varias subfiguras y es necesario inhibir algunos trazos para poder visualizarlas. Situación 1: Observo la Figura 1 y determino todas las subfiguras geométricas que la conforman. Al momento de observar la Figura 1, espontáneamente se

---

<sup>46</sup> Arcavi( 2003); Presmeg (2006); Zimmermann y Cunnigham (1991)

<sup>47</sup> MARMOLEJO, Gustavo y VEGA, Myriam. La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *En*: Educación matemática, (2012). Vol. 24, No. 2, p. 12

<sup>48</sup> DUVAL, Raymond. Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. *En*: R. Sutherland y J. Mason (eds), Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, Berlin, 1995. p.142-157

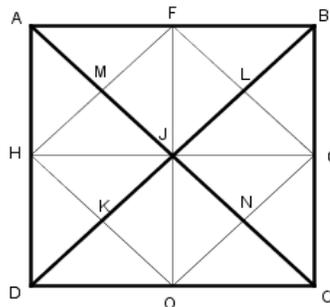
<sup>49</sup> DUVAL, Raymond. Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. 1999. Op. cit. p. 153

identifican sobre ella un cuadrado grande ABCD y 4 triángulos rectángulos AJD, DJC, CJB, y BJA. Para distinguir otras subconfiguraciones, que se encuentran presentes en la misma configuración, es necesario equilibrar la organización perceptiva que hace prevalecer las subfiguras anteriormente mencionadas. Para esto, se inhiben los segmentos DB y AC, de donde se obtienen 8 triángulos rectángulos medianos, HAF, HJF, HDO, OJH, OJG, GCO, GBF, FGJ; 5 cuadrados, 4 pequeños AFJH, FBGJ, JGCO, HJOD y uno mediano FGOH formado por cuatro triángulos rectángulos medianos, y 4 rectángulos ABGH, HGCD, AFOD, FBCO. Además, si se tiene en cuenta el cuadrado FGOH y los segmentos FO y HG se observan 4 triángulos HGF, FOG, GHO, OFH. Estas subfiguras no son tan perceptibles a primera vista debido a que el grosor de algunos trazos de la figura inicial se sobrepone al espesor de los trazos más débiles.

Sin embargo, existen otros 8 triángulos rectángulos que no pueden determinarse fácilmente debido a las características de la figura; para ello es necesario regresar la atención otra vez sobre los segmentos DB y AC, y sobre los segmentos FO y HG para determinar los triángulos rectángulos AHJ, AFJ, JFB, JBG, JGC, JCO, JOD y JDH. Y, por ultimo si centra la atención sobre los segmentos AC, DB, FO, HG y sobre el cuadrado FGOH se observan 16 triángulos rectángulos más pequeños AFM, FMJ, JMH, HMA, FJL, FLB, BLG, JLG, GJN, GNC, CNO, ONJ, OJK, JHK, HDK, DKO, y 4 cuadrados más pequeños FMJL, LJNG, JNKO, JKHM.

Esta actividad invita al estudiante a centrar su atención en la figura inicial y a examinar en ella nuevas subfiguras. En total, se pueden discriminar 54 subfiguras geométricas, pero perceptualmente solo 5, el cuadrado grande ABCD y los 4 triángulos rectángulos AJD, DJC, CJB, y BJA; es decir, solo es discernible espontáneamente un número muy reducido de subfiguras, en comparación con la totalidad de subfiguras presentes en la configuración geométrica. Para identificar el resto de subconfiguraciones presentes es necesario poner en juego algo más que una percepción espontánea, que dependerá del grado de escolaridad de quien esté resolviendo esta tarea y de la capacidad de visualización como acción cognitiva que tenga el sujeto.

Figura 1. Configuración geométrica



Fuente: de esta investigación

- Aprehensión operatoria: Según Duval<sup>50</sup>, la aprehensión operatoria de las figuras, es una aprehensión centrada sobre las modificaciones posibles de una figura de partida y, por consiguiente, sobre las reorganizaciones perceptivas que estas modificaciones introducen. Una figura de partida se puede dividir en diversas subfiguras, a partir de las cuales se puede transformar en otra figura de un contorno global diferente o no; las modificaciones que tienen estas características son modificaciones mereológicas, que ponen en juego las relaciones existentes entre las partes y el todo. Pero también una figura se puede agrandar, reducir o deformar; en este caso se habla de modificaciones ópticas, que transforman una figura en otra apelando a su imagen; esta transformación puede conservar la forma de partida o alterarla. Por otro lado, también es posible desplazar o rotar, tanto la figura de partida como las subfiguras que la componen en relación con la orientación del campo en el que se destaca; cuando esto sucede, se habla de modificaciones posicionales.

Luego, a partir de las modificaciones que se producen en una figura por la aplicación de una operación cognitiva determinada, se generan ideas, procesos y posibilidades que permiten reconocer los tratamientos matemáticos que se deben aplicar para resolver una actividad determinada. De esta manera, por cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística; es el caso de la reconfiguración para la modificación mereológica, la superponibilidad y la anamorfosis para las modificaciones ópticas, y la rotación y traslación para las modificaciones posicionales.

En la situación 2<sup>51</sup>, que se presenta a continuación, se muestra la aplicación de las operaciones de rotación y traslación para el caso de las modificaciones posicionales, en una situación donde se pide comparar dos áreas que se encuentran en una configuración geométrica. Situación 2: Dado el rectángulo ABCD de tal forma que los segmentos FG y HE son las mediatrices de los lados opuestos AB, DC y AD, BC respectivamente, y los segmentos DB y DF son las diagonales de los rectángulos ABCD y AFGD respectivamente, ¿es equivalente el área de la figura triangular DFB a la del rectángulo JEFG sombreadas en el rectángulo grande?

A simple vista podría parecer que el área del triángulo DFB y el rectángulo JEFG, que aparecen sombreadas, como se ve en la Figura 2, son distintas, pero al aplicar modificaciones posicionales, como la traslación y la rotación sobre algunas subfiguras que se encuentran presentes en la configuración inicial, se puede constatar que las áreas de las dos figuras geométricas en cuestión son equivalentes; para ello primero se identifica perceptualmente las subfiguras

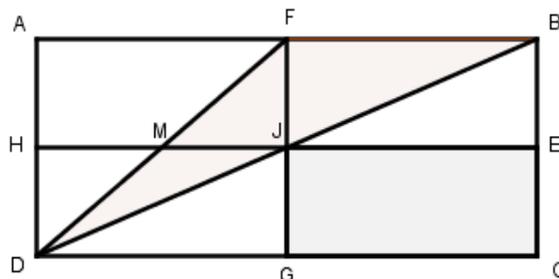
---

<sup>50</sup> Ibid., p. 156

<sup>51</sup> Tomada de: ESCUELA DE CAPACITACIÓN DOCENTE - CePA. Especialización superior en enseñanza de la Matemática para Nivel Primario. Seminario geometría: Más actividades de comparación de áreas. Marzo-abril 2008. [En línea]. [Consultado el 2 de septiembre de 2012]. Disponible en internet: [http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/geom\\_masactividades.pdf](http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/geom_masactividades.pdf)

pertinentes sobre las que hay que aplicar las modificaciones posicionales, en este caso los triángulos MFJ y DMJ; por tanto si el triángulo MFJ se traslada sobre el segmento HE de tal manera que se haga coincidir el segmento FJ con el segmento BE y el triángulo DMJ se rota un cierto ángulo alrededor del punto J de tal manera que se haga coincidir el lado DJ con el lado JB, por consiguiente, mediante la aplicación de estas operaciones, se ha recubierto la mitad del rectángulo FBEJ con los triángulos MFJ y MJD, ya que la mitad restante ya estaba cubierta por el triángulo FJB; así, lo que se está mostrando es que el área del rectángulo FJEB es equivalente a la suma de las áreas de los triángulos FJB, MJF y MJD; de esta forma resulta más sencillo comparar el área del rectángulo JEFG con el área del rectángulo FBEJ, que con el área del triángulo DFB, con lo cual se concluye que las dos áreas son equivalentes.

Figura 2. Comparación de áreas



Fuente: ESCUELA DE CAPACITACIÓN DOCENTE - CePA. Especialización superior en enseñanza de la Matemática para Nivel Primario. Seminario geometría: Más actividades de comparación de áreas. Marzo-abril 2008. [En línea]. [Consultado el 2 de septiembre de 2012]. Disponible en internet: [http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/geom\\_masactivadaes.pdf](http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/cepa/geom_masactivadaes.pdf)

- Aprehensión discursiva: Según Duval<sup>52</sup>, una figura representa una situación geométrica sólo en la medida en que la significación de ciertas unidades figurales y de algunas de sus relaciones estén explícitamente fijadas de entrada. En este sentido, se debe tener en cuenta que las figuras por sí mismas no constituyen un registro de tratamiento autónomo; es decir, no basta con un simple reconocimiento perceptivo en ellas para asignar propiedades o fijar relaciones existentes entre las unidades figurales que conforman la figura. Por el contrario, la consigna juega un papel determinante, impone de entrada las características matemáticas de la figura; es decir, las propiedades de una figura geométrica dependen de lo que se enuncia como hipótesis.

De este modo la aprehensión discursiva de una figura es una aprehensión que se encuentra ligada a las propiedades asociadas a las hipótesis y puede entenderse como la acción cognitiva que produce una asociación entre las hipótesis o afirmaciones de la entrada discursiva de la figura y las unidades figurales que la conforman. Dicha asociación puede presentarse de dos maneras, según el tránsito que se haga entre los registros figural y discursivo, y se denomina cambio de

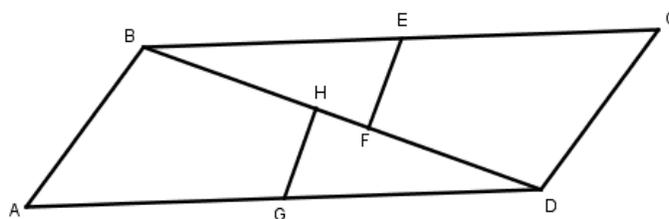
<sup>52</sup> Ibíd., p. 159

anclaje. De esta forma, se distinguen dos tipos de tránsitos: uno, el cambio de anclaje que se da en el paso de lo visual a lo discursivo, que se presenta cuando a una representación se le asocia una información; y, dos, el cambio de anclaje que se da en el paso de lo discursivo a lo visual, que se presenta cuando a partir de una afirmación se puede construir la representación con las características y propiedades que se fijan de entrada en el enunciado.

A continuación se describe una situación geométrica\* en la que el cambio de anclaje se da de lo discursivo a lo figural, es decir, se asocian a las unidades figurales de la configuración geométrica afirmaciones dadas en el enunciado. Situación 3: Dado el paralelogramo ABCD, que se presenta en la Figura 3, donde E y G son los puntos medios de los segmentos BC y AD respectivamente, EF y GH son perpendiculares a BD. Demuestre que EF es congruente con GH.

La afirmación del enunciado “Dado el paralelogramo ABCD...” permite asociar la definición de paralelogramo con la unidad figural de dos dimensiones ABCD de la Figura 3; es decir, permite asegurar que AB y AD son paralelas a CD y CB respectivamente. Además, la afirmación de que “...E y G son los puntos medios de los segmentos BC y AD respectivamente...”, asocia la definición de puntos medios con unidades figurales de dimensión cero de la Figura 3, en este caso los puntos E y G, lo que permite afirmar, que las distancias BE, EC, AG y GD son congruentes. Por último, la afirmación del enunciado “...EF y GH son perpendiculares a BD...” asocia el sentido de perpendicularidad entre dos rectas con unidades figurales de una dimensión de la Figura 3, en este caso los segmentos GH y FG, permitiendo asegurar que los ángulos GHD, GHB, EFD y EFB son rectos. Es claro que sin la entrada discursiva de la situación 3, las afirmaciones del enunciado no se pueden deducir basándose en una percepción visual de la figura, lo cual reafirma que la entrada de una figura geométrica debe ser siempre discursiva.

Figura 3. Asociación Discursivo - figural



Fuente: RICH, Barnett. Geometría. 2 ed. México. Traducción realizada por Rafael Morones E. Editorial McGRAW-HILL INTERAMERICANA DE MÉXICO, 1997. p. 90

\* Tomada de: RICH, Barnett. Geometría. 2 ed. México. Traducción realizada por Rafael Morones E. Editorial McGRAW-HILL INTERAMERICANA DE MÉXICO, 1997. p. 90

## 2. METODOLOGÍA

### 2.1 APROXIMACIÓN METODOLÓGICA

La metodología seleccionada para el desarrollo de esta investigación fue la de un estudio de caso puesto que como lo afirman Álvarez y San Fabián<sup>53</sup>, este ofrece valiosas posibilidades para informar de realidades educativas complejas invisibilizadas por la cotidianidad, además, según Pérez<sup>54</sup> lo que caracteriza a un estudio de caso es la capacidad de permitir hacer una descripción intensiva y a la vez holística mediante el análisis de una entidad singular, o de un fenómeno o unidad social, cuyo objetivo básico es comprender el significado de una experiencia. Para este autor los estudios de casos son particularistas, descriptivos y heurísticos y se basan en el razonamiento inductivo al manejar múltiples fuentes de datos. Por otra parte, la modalidad de estudio de caso seleccionada se fijó teniendo en cuenta la clasificación que realiza Stake<sup>55</sup> sobre este tipo de metodología que atiende a la finalidad última del mismo, de esta manera se consideró cómo un estudio de caso instrumental y como un estudio de caso colectivo, ya que los casos instrumentales se distinguen porque se definen en razón del interés por conocer y comprender un problema más amplio a través del conocimiento de un caso particular, el caso es la vía para la comprensión de algo que está más allá de él mismo, para iluminar un problema o unas condiciones que afectan al caso seleccionado, y también se definió como caso colectivo, puesto que estos se distinguen por tomar más de un caso para comprender la problemática en cuestión. En este sentido, en esta investigación los casos (los estudiantes) son la vía para el estudio y comprensión de la problemática que gira en torno a la movilización de conocimiento matemático cuando estos desarrollan tareas que se proponen en los manuales escolares sobre el área de superficies planas, y del papel que la visualización sobre la figuras geométricas juega en ese proceso.

### 2.2 ENFOQUE Y TIPO DE LA INVESTIGACIÓN

Esta investigación privilegia un enfoque semiótico, debido a que se hace referencia al uso de las representaciones figurales en la resolución de actividades que reflexionan sobre el área de superficies planas propuestas por un manual escolar de grado quinto. Por otra parte, esta investigación se puede caracterizar

---

<sup>53</sup> ÁLVAREZ, Carmen, y SAN FABIÁN, José. La elección del estudio de caso en investigación educativa. En: *Gazeta de antropología*. (2012). Vol. 28, No 1, artículo 14, p.4.

<sup>54</sup> PÉREZ SERRANO, Gloria. *Investigación cualitativa. Retos, interrogantes y métodos*. Madrid, España. Editorial La Muralla S.A. 1994. 232 p. Citado por ÁLVAREZ, Carmen, y SAN FABIÁN, José. La elección del estudio de caso en investigación educativa. En: *Gazeta de antropología*. (2012). Vol. 28, No 1, artículo 14, p. 2-3.

<sup>55</sup> STAKE, Robert. *Investigación con estudio de casos*. 4 ed. Madrid, España. Editorial Morata. (2005). 159 p. Citado por ÁLVAREZ, Carmen, y SAN FABIÁN, José. La elección del estudio de caso en investigación educativa. En: *Gazeta de antropología*. (2012). Vol. 28, No 1, artículo 14, p. 2-3.

de acuerdo a la naturaleza de sus propósitos, de esta manera este estudio se cataloga como de carácter descriptivo, inductivo y deductivo. Es descriptivo, puesto que para caracterizar las maneras de ver sobre las figuras geométricas que subyacen al desarrollo de actividades que aluden a la medida de áreas, se describió los procesos visuales que están relacionados con las operaciones, cambios dimensionales, cambios figurales, cambios de focalización bidimensionales y flujos visuales que ejecutaron los estudiantes en los procedimientos de solución de las tareas. Además, el propósito de esta investigación es de carácter mixto, es decir inductivo y deductivo, puesto que por un lado, para el estudio de la problemática en cuestión, se recurrió a las producciones escritas y comunicaciones orales de los estudiantes como herramientas inductivas para caracterizar las maneras de ver sobre las figuras geométricas; y por otra parte es deductiva, ya que para el análisis de los procedimientos aplicados por los estudiantes en la resolución de las tareas, se adoptó el instrumento metodológico de análisis sobre la complejidad visual de las tareas que son propuestas en los manuales escolares que tratan sobre la medida de superficies planas, que fue presentado en la investigación de Marmolejo y Gonzales<sup>56</sup>.

### 2.3 INSTRUMENTOS DE RECOLECCIÓN DE DATOS

Los datos se recolectaron y registraron por medio de: 1) grabaciones fílmicas de las sesiones de aplicación de las actividades, 2) de las producciones escritas de los estudiantes al resolver las tareas propuestas por el texto, y 3) de la aplicación de entrevistas semi-estructuradas en casos puntuales para ampliar o despejar incertidumbres de las descripciones escritas y explicaciones orales desarrolladas por ellos.

### 2.4 POBLACIÓN

La población seleccionada para este estudio estaba conformada inicialmente por 5 estudiantes de grado quinto de básica primaria (con edades que oscilan entre los 9 y 11 años de edad) del colegio campestre GIMNASIO LOS ANDES<sup>†</sup> de la ciudad de Pasto. Institución educativa de carácter privado cuyo enfoque constructivista propicia y practica una enseñanza personalizada. Pero para esta investigación se consideró solo dos de ellos, los cuales en el desarrollo de las actividades se caracterizaron por tener un grado significativo de competencias comunicativas, argumentativas y participativas, por lo cual se pudo recoger información clara y concreta de sus producciones escritas y sus comunicaciones orales. Los casos

---

<sup>56</sup> MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 1-21

(\*) La población con la cual se pretendía realizar este trabajo y que aparecía en el proyecto inicial se cambió, puesto que uno de los investigadores se encuentra vinculado a la institución en mención como docente del área de matemáticas de básica primaria, en particular del grado quinto.

restantes fueron descartados ya que en dos de ellos circunstancias ajenas a la investigación ocasionaron que sea imposible la recolección total de los datos para su posterior análisis (los estudiantes asistieron ocasionalmente a las sesiones de aplicación de las tareas), mientras que en el otro caso a pesar de su participación y colaboración en el trabajo de campo, sus producciones tanto escritas como orales no permitieron extraer información relevante para los intereses de este estudio.

## 2.5 TRABAJO DE CAMPO

Las actividades implementadas se dividieron en tres tipos, las cuales presentaban definiciones y algunos ejemplos desarrollados relacionados con la temática superficie de figuras planas. Estas definiciones fueron explicadas por el docente con el propósito de contextualizar a los alumnos sobre la intencionalidad matemática de cada uno de los tipos de tarea a desarrollar. Se trabajó con cada estudiante de manera individual, solicitándoles que desarrollaran las actividades, donde el docente encargado observaba y otra persona registraba en video dichos procesos. Posteriormente el estudiante explicó el desarrollo de cada una de las actividades en forma oral mientras se registraba en video estos procesos comunicativos. Por último, se le pidió al estudiante describir los procedimientos puestos en juego para el desarrollo de las tareas por escrito. El trabajo de campo se desarrolló en seis sesiones de 45 minutos por estudiante, la primera sesión para el primer grupo de tareas, la segunda y tercera para el segundo grupo de tareas, y las tres posteriores para el último grupo de tareas. Cuando fue necesario se aplicó entrevistas semi-estructuradas para aclarar o despejar dudas sobre los procedimientos que los estudiantes emplearon en el desarrollo de las tareas.

## 2.6 CARACTERIZACIÓN DE LAS ACTIVIDADES

Esta investigación está ligada a un estudio de mayor envergadura<sup>\*</sup>, el cual presenta una metodología de análisis para actividades que reflexionan sobre el área de superficies planas propuestas por manuales escolares (de España y Colombia) con el fin de valorar la visualización en la construcción de este concepto. Por tanto, se decidió tomar las tareas que presenta uno de los seis textos de grado quinto (tres de España y tres de Colombia) que pertenecen al grupo de los manuales escolares analizados en el mencionado estudio. El texto elegido para esta investigación fue seleccionado bajo los criterios de que, primero, dado que el estudio se realizó en Colombia, convenía optar por un texto que estuviera inmerso en el contexto educativo del país, y segundo, que la elección de

---

<sup>(\*)</sup> El papel de la visualización en la enseñanza del área de superficies planas en España y Colombia. Análisis de textos escolares y su uso en el aula de clase. Trabajo de investigación doctoral desarrollado por el Mg. Gustavo Marmolejo profesor del área de educación matemática adscrito al departamento de matemáticas y estadística de la Universidad de Nariño y la Dr. María Teresa González profesora de la Universidad de Salamanca.

este texto escolar en la investigación de Marmolejo y González<sup>57</sup> fue hecha debido a que estos autores distinguieron que a diferencia de otros manuales escolares este abarcaba en mayor medida las diferentes formas de concebir el concepto de área de superficies planas y por ende permitía realizar un análisis profundo sobre cómo se presenta la visualización en este texto escolar cuando los estudiantes movilizan el concepto de área.

Este texto presenta un total de 40 tareas divididas en ejemplos y ejercicios, por lo cual inicialmente se pasó a agrupar dichas tareas en tres tipos según la intencionalidad matemática que el texto propone en ellas. Las tareas del manual escolar se organizaron en tres tipos a saber: tareas tipo uno, que aluden a la medida directa del área de figuras irregulares con unidades no estándar; tareas tipo dos que reflexionan sobre la medida directa del área de figuras irregulares con una unidad estándar y tareas tipo tres cuya intencionalidad se relaciona con la medida indirecta del área de figuras planas por medio de la aplicación de fórmulas. Con la finalidad de reducir la cantidad de tareas se definió algunos criterios que permitieron disminuir a 16 el número de tareas que posteriormente se implementaron. A continuación se describe las tareas seleccionadas y los criterios que se establecieron para elegir las.

- Tareas de medida directa del área de figuras irregulares con unidades no estándar (tareas tipo 1): En este grupo se presenta una serie de tareas cuya intención es enseñar a medir la superficie de figuras planas por medio del conteo de una unidad no estándar asignada, el propósito de estas tareas está encaminado a mostrar a los alumnos que la medida del área depende de la unidad no estándar que se elija. Este tópico presenta un total de siete tareas, de las cuales se implementó en este estudio tres, la primera que se presenta de manera discursiva pero que alude a una representación figural presente en un ejemplo desarrollado por el texto cuyo fin es discriminar una unidad no estándar de medida diferentes de las dos ya estipuladas por el texto; Las dos tareas restantes aplicadas pertenecen a un grupo de tareas que presentan una figura rectilínea sombreada sobre un fondo cuadrículado, cuya intencionalidad es la misma, calcular el área con dos unidades no estándar diferentes (cuadrado y triángulo). La primera de ellas presenta un contorno asimétrico y por tanto su proceso de solución se limita netamente al conteo tal como se muestra en la definición que el texto introduce sobre la medida de área con una unidad no estándar, mientras que en la otra se puede distinguir de manera inmediata un contorno simétrico lo cual puede ser un recurso que de ser discriminado puede agilizar el conteo en el proceso de solución. El resto de tareas tipo uno se puede ver en el anexo A.

---

<sup>57</sup>MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Visualización en el área de superficies planas. Elementos para el análisis de textos escolares. En: Coloquio Regional de Matemáticas y Simposio de Estadística (11 y 1: 6-8, mayo: Nariño, Pasto). Memorias. Pasto: Universidad de Nariño, 2012

- Tareas de medida directa del área de figuras irregulares con una unidad estándar (tareas tipo 2): En este grupo se presenta una serie de tareas encaminadas a introducir la noción de centímetro cuadrado como unidad estándar de medida de superficies planas y a definir el proceso de medición mediante el conteo de esta unidad. Este tópico presenta un total de nueve actividades de las cuales se implementó cinco, la primera es una de las dos tareas que presenta figuras de contorno irregular sobre un fondo cuadrículado cuya intencionalidad es hallar el área contando los cuadrados sombreados. Esta figura a diferencia de la otra se caracteriza por tener un contorno simétrico el cual de ser discriminado permite agilizar el proceso de solución de la tarea. La siguiente tarea fue escogida al azar de un grupo de tres representaciones figurales en las que se ilustra un proceso de transformación de una figura en otra con igual cantidad de área pero en la cual se facilita el proceso de conteo de la unidad estándar para determinar el valor de la superficie de la figura. Las tres restantes pertenecen a un grupo de cuatro tareas que muestran figuras de contorno irregular ubicadas sobre un fondo cuadrículado, las cuales están descompuestas en subfiguras, algunas de ellas con forma y cantidad de área equivalente a la unidad estándar (centímetro cuadrado) y otras con forma distinta y con una fracción del área de la unidad de medida, cuyo propósito es hallar el área de las figuras en centímetros cuadrados. Dos de las cuatro tareas de este grupo aunque poseen diferente contorno están descompuestas por las mismas subfiguras y por ello se eligió una al azar. Para dar solución a estas tareas se debe proceder de igual manera que en las tres tareas anteriores. El resto de tareas tipo dos se puede ver en el anexo B.

- Tareas de medida indirecta del área de figuras planas por medio de la aplicación de fórmulas (tareas tipo 3): En este grupo se presenta una serie de tareas cuya intención es introducir la medida indirecta de la superficie de figuras planas por medio de la aplicación de fórmulas. Este tópico presenta un total de diez y ocho tareas de las cuales fueron ocho las implementadas, las cuatro primeras pertenecen a un grupo de nueve tareas en las cuales se presenta figuras cuyo contorno alude a un cuadrilátero (cuadrados, rectángulos y romboides), en las cuales el propósito es discriminar la medida de sus lados y aplicar fórmulas para hallar el área. El criterio de elección de las tareas fue implementar una al azar por cuadrilátero, a excepción del romboide en el cual se implementó una tarea adicional que a diferencia de las demás requiere el uso de materiales (papel, tijeras, regla) para su desarrollo, donde se solicita obtener un romboide a partir de la reconfiguración de un rectángulo.

La quinta se escogió al azar entre las dos tareas que presentan figuras de contorno triangular cuya intención es hallar el área por medio de la aplicación de fórmulas. La sexta tarea presenta una figura de contorno irregular conformada por tres subfiguras (rectángulo, cuadrado y triángulo) de las cuales se conoce fórmulas para determinar su área, y mediante la suma de estas determinar la superficie total de la figura. Las dos últimas pertenecen a un grupo de seis actividades cuyo propósito es calcular el área de cada una de ellas. Estas figuras

presentan un contorno irregular que suscita la introducción de un fraccionamiento en la figura que la descompone en subfiguras de las cuales se conoce fórmulas para calcular el área. Estas dos tareas fueron seleccionadas de la siguiente manera: al azar, una de aquellas que el contorno permita discriminar de inmediato una misma subfigura más de una vez (rectángulos), y al azar, otra de aquellas que el contorno permita discriminar a primera vista subfiguras diferentes (triángulo, rectángulo). El resto de tareas tipo tres se puede ver en el anexo C, D y E. Para referenciar con mayor facilidad las tareas del texto que se implementaron se estructuró una codificación conformada por cuatro caracteres: los dos primeros caracteres hacen referencia al tipo de tarea que se está aplicando, a saber:

- T1 (tareas tipo uno), que alude a la medida directa del área de figuras irregulares con una unidad no estándar.
- T2 (tareas tipo dos), que alude a la medida directa del área de figuras irregulares con una unidad estándar.
- T3 (tareas tipo tres), que alude a la medida indirecta del área de figuras planas por medio de la aplicación de fórmulas.

Los dos últimos caracteres hacen referencia al número de la tarea discriminada dentro de cada tipo. De esta manera, para referirnos a la primera actividad del segundo grupo de tareas utilizamos la codificación T2-T1.

## 2.7 INSTRUMENTO DE ANÁLISIS

Se adoptó el instrumento metodológico de análisis presentado por Marmolejo y González<sup>58</sup>, el cual clasifica las tareas de los manuales escolares según la complejidad visual y a la vez determina cuáles de ellas brindan a las figuras mayores posibilidades de que jueguen un rol determinante en la solución de la problemática planteada. De este instrumento se consideró 5 categorías para caracterizar los procesos visuales que los estudiantes ponen en juego en el desarrollo de las tareas, a saber: Operaciones, cambio dimensionales, cambio figurales, cambios de focalización bidimensional y flujos visuales. En lo que sigue se describirán en detalle cada una de ellas.

Operaciones (OP): Para Duval<sup>59</sup> las figuras permiten distintos tipos de modificaciones, por cada modificación existen varias operaciones cognitivas que brindan a las figuras su productividad heurística (reconfiguración, traslación, rotación, achicamiento y agrandamiento). Pero según el papel que juegan las operaciones a aplicar sobre figuras en el desarrollo y comprensión de tareas

---

<sup>58</sup> MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 1-12.

<sup>59</sup> DUVAL, Raymond. Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali.: Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, 1999, citado por MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 5.

matemáticas, Marmolejo y González<sup>60</sup> introducen seis operaciones de naturaleza distinta a las descritas por Duval: configuración (unión de figuras para formar una nueva), simetría axial, cuadratura, superposición, fraccionamiento y arrastre (la forma y/o relaciones entre las unidades constituyentes de la figura varían, pero, su cantidad de superficie permanece invariante). Sin embargo, fueron sólo dos las operaciones privilegiadas por los estudiantes en este estudio: la reconfiguración (Re) y el fraccionamiento (Fr).

- Reconfiguración (Rec): consiste “en la división de una figura en sub-figuras, en su comparación y en su reagrupamiento eventual en una figura de un contorno global diferente”<sup>61</sup>. En los procesos de solución de las tareas se distinguió de dos maneras, reconfiguración simple (Res) y reconfiguración por exceso (Rex). Marmolejo y González en su instrumento de análisis identifican la primera cuando “la figura de partida se transforma en otra de forma distinta e igual cantidad de área. Las unidades 2D que le conforman (o algunas de ellas) son re-ubicadas bajo la acción de traslaciones y/o rotaciones y/o reflexiones en lugares distintos al inicialmente ocupado por ellas”<sup>62</sup>. Y la segunda cuando “...la figura de partida es transformada en otra figura con mayor cantidad de área. En el proceso toda la superficie de la figura de partida o una de sus partes pasa a conformar una fracción de la superficie de la figura de llegada”<sup>63</sup>.
- Fraccionamiento (Fr): Según Marmolejo y González<sup>64</sup> es la descomposición bidimensional de una figura en sub-figuras o sub-configuraciones. En los procesos empleados por los estudiantes en el desarrollo de las tareas se presentó de la siguientes formas, la primera cuando la figura de inicio es dada fraccionada, pero, para el desarrollo de la tarea propuesta es necesario reorganizar internamente la figura en estudio, es decir, introducir un tipo de fraccionamiento distinto al inicialmente representado; en consecuencia, es necesario introducir o inhibir trazos en la figura. La segunda, cuando la figura de partida no se presenta fraccionada y el estudiante debe introducir trazos para descomponer la figura de partida en partes previamente determinadas.

Cambio figural (CF): Según Duval<sup>65</sup> el cambio figural, o aprehensión operativa, alude el efecto que produce en una configuración geométrica la aplicación de acciones que transforman su organización perceptual, son tres los cambios figurales identificados por Duval: mereológico, posicional y ópticos.

---

<sup>60</sup> MARMOLEJO y GONZÁLEZ. Op. Cit., p. 6.

<sup>61</sup> DUVAL, Raymond. Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali.: Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, 1999, citado por MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 6.

<sup>62</sup> MARMOLEJO y GONZÁLEZ, Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares, Op. Cit., p. 6.

<sup>63</sup> *Ibíd.*, p. 6.

<sup>64</sup> *Ibíd.*, p. 10.

<sup>65</sup> DUVAL, Raymond. La geometría desde un punto de vista cognitivo (1998), citado por MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 11.

Sin embargo, según Marmolejo y González<sup>66</sup>, en la manera en que los textos escolares analizados construyen el área de superficies planas, ellos observaron la presencia de tres cambios figurales adicionales: interior, intermitente, no real, además agrupan en una misma categoría los cambios figurales de naturaleza posicional y óptica. En consecuencia, tienen en cuenta cinco cambios figurales: real, parcial, intermitente, intrínseco y no real. No obstante, fueron sólo tres los cambios figurales privilegiados por los alumnos en el desarrollo de las tareas: real, intermitente (Inter) e intrínseco (Intrí).

- Real: En este tipo de modificación figural Marmolejo y González<sup>67</sup> se refieren a la transformación de la figura de inicio en otra de contorno global distinto, en el proceso puede o no conservarse la cantidad de área.
- Intermitente (Inter): Según Marmolejo y González<sup>68</sup> es el caso en el que las modificaciones se aplican sobre unidades constituyentes de dimensión 2 de la figura de partida, en este caso, la organización perceptual de las unidades sobre las cuales se aplica las modificaciones cambia momentáneamente y la figura de partida no sufre transformación alguna.
- Intrínseco (Intrí): Marmolejo y González<sup>69</sup> lo identifican cuando la organización perceptiva de la figura de partida es transformada a nivel interno bajo la introducción de trazos, además de no aplicar sobre ninguna de las unidades 2D constituyentes o sub-figuras o sub-configuraciones o en la figura inicialmente dada cambios en sus contornos.

Cambio dimensional (CD): Según Duval<sup>70</sup> “las figuras bidimensionales imponen, según la primera de las leyes gestálticas de organización y reconocimiento perceptivo de las formas, una prioridad en la discriminación de unidades 2D sobre unidades 1D y 0D”. Es decir, que primero se reconoce el contorno de una figura y luego se procede a discriminar los lados que le constituyen. Además para Duval<sup>71</sup> “la descomposición por deconstrucción dimensional se refiere al acto de vencer esta particularidad de las figuras bidimensionales, y consiste en descomponer la figura en unidades figurales de dimensión inferior a la de la figura de partida”. Los tres cambios dimensionales identificados por Marmolejo y González<sup>72</sup> en su

---

<sup>66</sup> MARMOLEJO y GONZÁLEZ, Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares, Op. Cit., p. 11.

<sup>67</sup> *Ibíd.*, p. 11.

<sup>68</sup> *Ibíd.*, p. 12.

<sup>69</sup> *Ibíd.*, p. 12.

<sup>70</sup> DUVAL, Raymond. Como hacer que los alumnos entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y ... una quinta (2004), citado por MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 13.

<sup>71</sup> DUVAL, Raymond. Voir en mathématiques. (2003), citado por MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 13.

<sup>72</sup> MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2012. p. 13.

instrumento de análisis: fijo, desdoblamiento (Des) y operatorio (Op) estuvieron presentes en los procesos de solución de las tareas.

- Fijo: Marmolejo y González<sup>73</sup> consideran que si bien superficie y las unidades figurales de dimensión 1 y 0 son asumidas una y otras como elementos constitutivos de la figura, las segundas tienden a ser reconocidas como elementos fijos, estáticos, no separables de la primera. Por tanto ellos se refieren a este cambio dimensional como el acto de pasar de centrar la atención en la figura como una gestal a hacerlo en sus lados.
- Operatorio (Op): Para este cambio dimensional Marmolejo y González<sup>74</sup> tienen en cuenta que, a lo menos una de las unidades de 1D que constituyen la figura de inicio es discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual hace parte, y por tanto, es asumida como una unidad constitutiva de naturaleza dinámica sobre la cual se aplican operaciones de naturaleza unidimensional: sustracciones.
- Desdoblamiento (Des): Según Marmolejo y González<sup>75</sup> este cambio dimensional considera que por lo menos una de las unidades de dimensión 1 que constituyen la figura de partida sea discriminada de manera independiente a la superficie de la figura de la cual hace parte, a la vez, que es asumida simultáneamente como un elemento constitutivo en dos o más sub-figuras o sub-configuraciones distintas presentes en la figura de inicio y sobre las cuales se reflexiona.

Cambio de focalización bidimensional (CFB): Marmolejo y González<sup>76</sup> definen tres tipos de cambio de focalización bidimensional: Configural, Intrafigural y mixto. Ya que estos autores consideran que no basta con la discriminación de las operaciones a aplicar sobre una figura y las transformaciones que se generan en ella para describir la visualización asociada a las figuras bidimensionales, que subyace al desarrollo y comprensión de tareas de áreas de superficies planas. Si no que también es necesario considerar las distintas maneras en que en el desarrollo de una tarea, se apliquen sobre la figura en estudio cambios en la manera de ver en ella centrados en unidades visuales 2D, es decir, dejar de lado características globales 2D de la figura de partida para enfocarse en sus partes 2D constituyentes (sub-figuras o sub-configuraciones) y/o en caso de haber varias figuras de partida, pasar de centrar la atención de una a otra y/o considerar simultáneamente la forma y contorno de la figura de partida y de la figura de llegada. Fueron sólo dos los cambios de focalización puestos en juego durante la resolución de las tareas por los estudiantes: Intrafigural y mixto.

---

<sup>73</sup> *Ibíd.*, p. 13.

<sup>74</sup> *Ibíd.*, p. 13.

<sup>75</sup> *Ibíd.*, p. 13-14

<sup>76</sup> *Ibíd.*, p. 14.

- Intrafigural (Intra): Para Marmolejo y González<sup>77</sup> se presenta cuando se deja en un segundo plano las características globales de la figura de partida, y la atención recae en sus unidades 2D constituyentes, sub-figuras o sub-configuraciones. Sean en las representadas en la figura de inicio o en aquellas que el lector debe introducir en el proceso de desarrollo o comprensión de la tarea planteada.
- Mixto: Este cambio de focalización bidimensional Marmolejo y González<sup>78</sup> lo discriminan cuando el inicio de la tarea propuesta, exige de entrada, considerar simultáneamente las características perceptuales globales e internas de la figura de partida y de llegada, es decir por medio de una comparación en la que se considera en la figura de llegada únicamente su forma (en este caso la figura de llegada está determinada figuralmente o en lengua natural) y en la de partida sus partes internas 2D.

Flujo visual (FL): Según Marmolejo y González<sup>79</sup> el flujo visual alude al sentido de la secuencia visual aplicada en el desarrollo de las actividades propuestas en los textos escolares, es decir, a la manera como en el desarrollo de la tarea propuesta se organizan los distintos cambios (figural, dimensional, focalización 2D) y operaciones a considerar para determinar la manera de ver pertinente al desarrollo o comprensión de la problemática planteada. Los autores en mención definen dos tipos de flujo visual: lineal y en circuito, pero en esta investigación se tuvo en cuenta un flujo visual adicional, el discreto. Además, a diferencia de Marmolejo y González<sup>80</sup> se consideró necesario la presencia de al menos un cambio de los antes citados o uno de ellos y la aplicación de una operación para que se presente un flujo visual. De esta manera los flujos visuales puestos en marcha por los estudiantes en el desarrollo de las tareas fueron: discreto, lineal y circuito.

- Discreto: Cuando la atención recae en una de las partes constituyentes (1D, 2D) de la configuración de partida, y en el proceso de solución no es necesario aplicar ninguna transformación sobre la figura de inicio ni más de un cambio en la manera de ver.
- Lineal: Según Marmolejo y González<sup>81</sup> cuando la atención recae en una de las partes constituyentes (1D, 2D) de la configuración de partida y, a continuación, se aplica sobre ella un cambio en la manera de ver y/o una operación se aplica un flujo visual de naturaleza lineal, en este caso las características perceptuales de la figura de partida son puestas en segundo plano y la atención recae únicamente en las características perceptuales de la parte de la configuración privilegiada.

---

<sup>77</sup> *Ibíd.*, p. 15.

<sup>78</sup> *Ibíd.*, p. 15.

<sup>79</sup> *Ibíd.*, p. 16.

<sup>80</sup> *Ibíd.*, p. 16.

<sup>81</sup> *Ibíd.*, p. 16.

- Circuito: Según Marmolejo y González <sup>82</sup>Alude al hecho de que en algún momento del flujo visual es necesario apoyarse en más de una ocasión en alguna(s) de las características perceptuales presentes tanto en la figura de partida, como en las unidades constituyentes (1D, 2D) que surgen durante los procesos de solución y que son necesarias para el desarrollo de la actividad. En consecuencia, es indispensable realizar un flujo visual ya sea de naturaleza discreta o lineal y posteriormente retornar o considerar, en más de un momento del proceso de resolución, la configuración de inicio o las configuraciones que van surgiendo en el proceso de solución e iniciar otro tipo de flujo visual. Por tanto, para que se presente este tipo de flujo en el desarrollo de la tarea, debe presentarse más de un flujo visual ya sea de naturaleza discreta y/o lineal.

## 2.8 ANÁLISIS DE DATOS

Los datos analizados fueron recopilados de las transcripciones de las comunicaciones orales o diálogos llevados a cabo entre el docente y cada uno de los estudiantes durante el desarrollo de las tareas (registro fílmico), también los recopilados de las producciones escritas de los estudiantes y de las transcripciones de las entrevistas semi-estructuradas aplicadas en situaciones en las que fue necesario aclarar dudas o incertidumbres acerca de los procesos empleados por los estudiantes para la resolución de las tareas (registro fílmico).

Para el análisis de los datos, en primer lugar se realizó la transcripción de los diálogos entre profesor y alumnos discriminando en ellos las acciones realizadas durante el desarrollo de las tareas. En segundo lugar, se procedió a triangular la información recogida de las tres unidades de información (Comunicaciones orales, producciones escritas y entrevistas) para cotejar y poder discriminar las operaciones y cambios en la manera de ver sobre las figuras aplicados sobre las representaciones figurales de las tareas.

Para caracterizar la manera en que los estudiantes articularon los cambios figurales, dimensionales y de focalización bidimensional con las operaciones en el desarrollo de las tareas, se recurrió a la representación esquemática de dichos procesos mediante el uso de esquemas como el que se presenta en la tabla 1, que está conformado por óvalos, recuadros, líneas, flechas, y puntos sobredimensionados, que se articulan de la siguiente manera: dentro de los óvalos se ubicaron las categorías del instrumento de análisis que los estudiantes colocaron en juego en el desarrollo de cada una de las tareas, estos óvalos se unieron por medio de líneas y flechas para darle un orden y un sentido a la articulación de los procesos visuales ejecutados: unir dos óvalos por medio de una línea y ubicarlos dentro de un recuadro rectangular significa que los procesos que están en los óvalos se realizaron simultáneamente, mientras que unir dos óvalos, o un recuadro con un óvalo, o con un punto por medio de una flecha hace

---

<sup>82</sup> *Ibíd.*, p. 17.

referencia a que los procesos que se han puesto en juego en el desarrollo de la tarea tienen un orden. El punto sobredimensionado se utilizó para representar en el esquema acciones de naturaleza diferente a las que analiza el instrumento de análisis de esta investigación y que se presentaron en el desarrollo de las tareas, como es el caso de la aplicación de tratamientos aritméticos tipo conteo o aplicación de fórmulas. Por último, cuando la articulación de los procesos visuales fue de tipo circuito se utilizó en la representación esquemática números para mostrar el orden en que se realizaron los distintos flujos visuales.

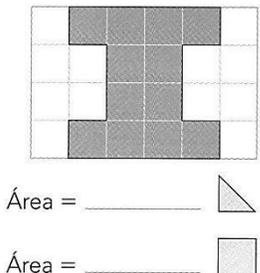
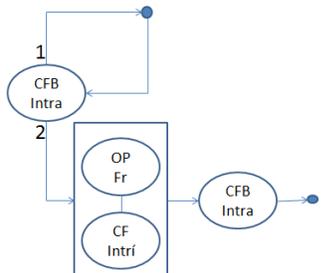
De esta manera, como ejemplo podemos ver la representación esquemática que se muestra en la tabla 1 que alude a la manera como José articuló los cambios y las operaciones en el proceso de solución de una de las tareas tipo 1, que le solicitó encontrar el área de una figura de contorno irregular con dos unidades de área diferentes. La interpretación del esquema que se presenta en la tabla 1 se puede describir de la siguiente forma; para el desarrollo de la tarea José primero aplicó un cambio de focalización bidimensional para discriminar las unidades 2D de contorno cuadrado que conforman la figura de inicio, después aplicó algunos de tratamientos aritméticos, en este caso realizó un conteo de las unidades cuadradas que discriminó anteriormente, y, luego regresó nuevamente a discriminar las unidades 2D de la figura de partida. Lo anterior se ilustra en el esquema ya que la flecha que sale del numeral uno y que une al óvalo principal con el punto sobredimensionado regresa nuevamente al óvalo. Después de esto, José inicia un nuevo flujo visual que en el esquema se representa mediante la flecha del numeral dos que sale del óvalo principal, que indica la modificación que hizo José al interior de la figura cambiando la organización interna de ésta, introduciendo un nuevo fraccionamiento sobre las unidades 2D que había vuelto a discriminar. Finalmente después de fraccionar la superficie de la figura centró su atención en las nuevas unidades 2D sobre las que aplica nuevamente un conteo para determinar el área de la figura de partida. En otras palabras José puso en juego un flujo visual tipo circuito, puesto que para el desarrollo de la tarea él tuvo que apoyarse en más de una ocasión en las características perceptuales de la figura de partida.

El mismo procedimiento se aplicó para ilustrar la manera en que cada uno de los estudiantes articuló los cambios y las operaciones en el desarrollo de las tareas que fueron implementadas. La cantidad de representaciones esquemáticas que ilustraron los procesos visuales puestos en juego en cada una de las tareas implementadas fue igual a la cantidad de tareas puestas a prueba (16 tareas) en cada estudiante, por ello, para reducir esta cantidad, como primera medida se agrupó las representaciones esquemáticas de las tareas que resultaron ser idénticas, lo que redujo de 16 a 12 los esquemas que ilustraron los procesos visuales caracterizados en Antonia, y de 16 a 10 los esquemas en José. Sin embargo, la cantidad de representaciones esquemáticas que aluden a los procesos visuales de cada estudiante siguió siendo muy alta, por lo que se decidió agrupar las representaciones esquemáticas según la naturaleza del flujo visual

movilizado en ellas, lo que permitió encontrar similitudes en los esquemas que permitieron definir procesos visuales que agruparon en mayor número las representaciones esquemáticas.

Por tanto al finalizar el proceso de depuración, en Antonia al igual que José se caracterizaron cinco visualizaciones para cada uno, con lo cual se encontró diez visualizaciones en total. De las cinco visualizaciones caracterizadas en Antonia, solo una de ellas se diferenció claramente de las visualizaciones caracterizadas en el otro estudiante (las que denominaremos V1), del mismo modo de las cinco visualizaciones caracterizadas en José, solo una de ellas se diferenció de las de Antonia (la que denominaremos V3). Las cuatro visualizaciones restantes tanto de Antonia como de José se definieron de manera similar, ya que en ellas se observó que los estudiantes para desarrollar las tareas pusieron en juego los mismos procesos visuales, y por ende de estas ocho visualizaciones se definieron solo cuatro (las que denominaremos V2, V4, V5, V6).

Tabla 1. Representación esquemática de la articulación de los procesos visuales puestos en marcha por José en el desarrollo de una de las tareas tipo 1

TAREA T1-T7	REPRESENTACIÓN ESQUEMATICA DE JOSÉ
	

En conclusión fueron seis las visualizaciones identificadas en los procesos de solución de las tareas del texto escolar que aluden al concepto de área de figuras planas de los dos estudiantes. En el capítulo siguiente se definen e ilustran cada una de las visualizaciones encontradas en la investigación así como también se realiza un análisis más profundo acerca del despliegue de estos procesos en el desarrollo de las tareas.

### 3. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta investigación se aplicó a dos estudiantes una serie de tareas de un manual escolar de grado quinto que reflexionan sobre el área de figuras planas. Con el propósito de caracterizar los procesos visuales puestos en juego en el desarrollo de las tareas, se tuvo en cuenta la manera en que los estudiantes articularon los distintos cambios (figural, dimensional y focalización) en la forma de ver sobre las figuras y las transformaciones aplicadas sobre ellas que fueron descritas en el capítulo anterior. En este sentido, en esta sección se describe en primera instancia los tipos de visualización identificados en este estudio que fueron considerados por los estudiantes en el desarrollo de las tareas antes mencionadas. Posteriormente, se describe las formas en que los estudiantes recurrieron a estas visualizaciones para el desarrollo de las tareas propuestas, para este caso se considerara tres momentos según la naturaleza de la tarea desarrollada.

#### 3.1 TIPOS DE VISUALIZACIONES

Como se hizo referencia en la sección análisis de datos del capítulo dos, los flujos visuales fueron relevantes a la hora de organizar las distintas visualizaciones encontradas, e hicieron notar cualidades comunes en estas que influyeron en el momento de reducir los procesos visuales en mayor medida. Por ello en este apartado, la presentación y descripción de los tipos de visualizaciones encontradas en este estudio, se realiza según la naturaleza del flujo visual de cada una de ellas.

- Visualizaciones caracterizadas por articular cambios y operaciones mediante un flujo visual de naturaleza lineal:

Visualización (V1): En este tipo de visualización se aplica al inicio de la tarea un cambio de focalización Intrafigural o mixto, es decir la atención recae sobre algunas unidades 2D que constituyen la figura de inicio, y también sobre las características globales de la figura de llegada de ser necesario. Se aplica una reconfiguración simple en la figura de partida para reubicar algunas subfiguras en lugares distintos al que inicialmente ocupaban. Lo que caracteriza a esta visualización es que en el proceso de transformación de la figura de inicio se produce, sobre la organización perceptual de las unidades 2D que la componen, un cambio figural intermitente, y la figura de partida conserva su contorno y su cantidad de área. Por último, puede que para finalizar la resolución de la actividad se necesite aplicar un cambio dimensional fijo, es decir, enfocar la atención en algunas unidades unidimensionales para discriminar números en ellas que aluden al valor de su medida, y posteriormente aplicar fórmulas para encontrar el área; o poner en juego nuevamente un cambio de focalización bidimensional Intrafigural para centrar la atención en las unidades 2D de la figura de llegada y emplear un

tratamiento aritmético tipo conteo de las subfiguras que la componen para determinar la cantidad de área de la figura de inicio.

Este tipo de visualización se evidencia en el proceso visual puesto en juego por Antonia en el desarrollo de la actividad T2-T6 (figura 4). Esta actividad solicita hallar el área de la figura en centímetros cuadrados. En su resolución la estudiante conformó con las unidades 2D de contorno triangular, subfiguras cuadradas que equivalen a la unidad estándar de medida del área (centímetro cuadrado), por ello no se interesó en el contorno de la figura sino en aquellas subfiguras triangulares que necesitó reubicar. En este proceso la reubicación de las subfiguras triangulares fue realizada mentalmente ya que no se valió de la introducción de trazos o marcas para reubicar dichas subfiguras (la figura de inicio no se modificó). Por último para dar la solución de la actividad no se interesó por el contorno de la figura que obtuvo, sino que procedió a realizar un conteo tanto de los cuadrados que completó, como de los que ya estaban presentes en la figura de inicio.

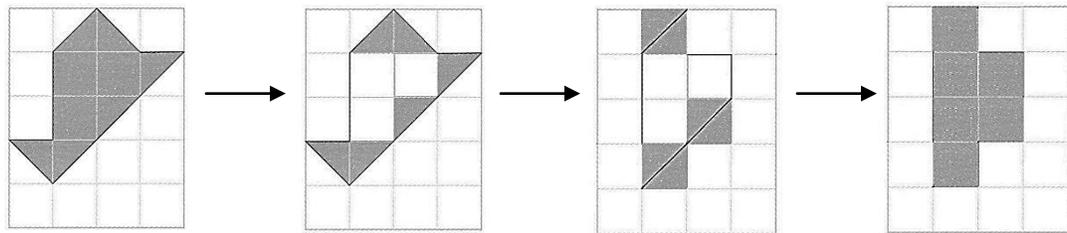


Figura 4. Representación figural del proceso visual puesto en marcha por Antonia en el desarrollo de la tarea T2-T6 que ejemplifica la visualización (V1)

Visualización 2 (V2): En esta visualización al inicio de la tarea puede que se aplique un cambio de focalización bidimensional para discriminar las unidades 2D que constituyen la figura de partida que se van a transformar, o simplemente pasar de manera directa a modificar las características globales de la figura de partida. En todo caso las transformaciones aplicadas (fraccionamiento de la superficie de la figura, reconfiguración de la figura por exceso de partes) producen cambios figurales reales o intrínsecos. Así, puede que se modifiquen las características globales o internas de la figura de inicio, que a diferencia de la visualización anterior, en este proceso puede que se conserve o no la cantidad de área. Adicionalmente, para terminar de solucionar la actividad es necesario aplicar un cambio dimensional fijo, es decir enfocar la atención en algunas unidades unidimensionales para discriminar números en ellas que aluden al valor de su medida y posteriormente, aplicar fórmulas para encontrar el área; o poner en juego nuevamente un cambio de focalización bidimensional Intrafigural para centrar la atención en las unidades 2D de la figura de llegada y emplear un tratamiento aritmético tipo conteo de las subfiguras que la componen para determinar la cantidad de área de la figura de inicio.

Esta clase de visualización se refleja en el proceso visual puesto en marcha por Antonia en el desarrollo de la actividad T1-T1 (figura 5). Esta actividad solicita elegir una unidad de medida de superficie diferente a la unidad 2D de contorno cuadrado que ya se destaca en el fraccionamiento presente en la figura de inicio, o de la unidad 2D de contorno triangular que equivale a la mitad de la subfigura cuadrada, y posteriormente con la unidad seleccionada, medir el área de dicha figura. Para ello la estudiante se interesó en las subfiguras cuadradas que componen la figura de inicio e introdujo sobre cada una de ellas un fraccionamiento, transformando así la figura de inicio a nivel interno, lo cual le permitió distinguir unidades constituyentes 2D de contorno rectangular sobre dicha figura. Finalmente para encontrar el área de la figura, centró su atención en las subfiguras rectangulares y realizó un conteo de ellas.

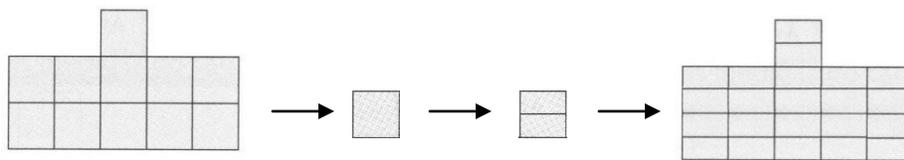


Figura 5. Representación figural del proceso visual puesto en juego por Antonia en el desarrollo de la tarea T1-T1 que ejemplifica la visualización 2 (V2)

Visualización 3 (V3): Este tipo de visualización se caracteriza porque articula algunos de los aspectos presentes en las dos visualizaciones anteriores. Al inicio de la tarea se aplica un cambio de focalización bidimensional que puede ser de carácter Intrafigural o mixto, es decir la atención recae sobre algunas unidades 2D que constituyen la figura de inicio y sobre las características globales de la figura de llegada de ser necesario. Luego se aplica una reconfiguración simple sobre la figura de partida para reubicar algunas subfiguras en lugares distintos al que inicialmente ocupan. El cambio figural producido por la reconfiguración es real, ya que a diferencia de la visualización V1, en este caso la modificación ejecutada sí transforma las características globales de la figura de partida. Además, se diferencia de la visualización V2, puesto que en el desarrollo de la tarea la cantidad de área de la figura de inicio siempre se conserva. Para finalizar la resolución de la actividad puede que se recurra a un cambio dimensional fijo, es decir, enfocar la atención en algunas unidades unidimensionales para discriminar en ellas números que aluden al valor de su medida, y posteriormente aplicar fórmulas para encontrar el área; o si es el caso, poner en juego nuevamente un cambio de focalización bidimensional Intrafigural para centrar la atención en las unidades 2D de la figura de llegada y emplear un tratamiento aritmético tipo conteo de las subfiguras que la componen para determinar la cantidad de área de la figura de inicio.

José al desarrollar la tarea T2-T7 puso en evidencia este tipo de visualización (figura 6). Esta actividad solicita hallar el área de la figura en centímetros cuadrados, y la intención del estudiante fue conformar con las unidades 2D de

contorno semicircular, subfiguras cuadradas que equivalen a la unidad estándar de medida del área (centímetro cuadrado), por ello no se interesó en el contorno de la figura sino en aquellas subfiguras semicirculares que necesitó reubicar. En este proceso la reubicación de dichas subfiguras fue realizada realmente ya que se valió de la introducción de trazos y marcas para trasladar e indicar la nueva posición que ocupan dichas subfiguras y desprejar su posición anterior (la figura de inicio se modificó). Por último para dar la solución de la actividad no se interesó por el contorno de la figura que obtuvo, sino que procedió a realizar un conteo tanto de los cuadrados que completo como de los que ya estaban presentes en la figura de inicio.

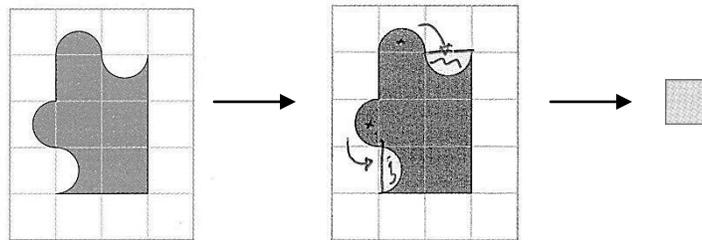


Figura 6. Representación figural del proceso visual ejecutado por José en el desarrollo de la tarea T2-T7 que ejemplifica la visualización 3 (V3)

- Visualizaciones caracterizadas por articular cambios y operaciones mediante un flujo visual tipo circuito:

Visualización 4 (V4): En este tipo de visualización los cambios (figural, dimensional y focalización) y operaciones presentes se articulan de tal forma que, al inicio quien resuelve la tarea aplica en más de una ocasión un cambio de focalización bidimensional Intrafigural, puesto que es necesario apoyarse en más de un momento tanto en las unidades 2D constituyentes de la figura de partida cuando se presenta fraccionada, como en las partes constituyentes 2D de la figura de llegada cuando no se presenta fraccionada, y seguido a esto realizar uno de los siguientes procesos:

- Aplicar un tratamiento aritmético tipo conteo para encontrar el valor del área.
- Realizar transformaciones sobre las unidades 2D discriminadas (introducción de trazos) modificando la organización interna de la figura de inicio, para aplicar nuevamente un cambio de focalización el cual permite reconocer nuevas unidades 2D en la figura y terminar con la aplicación de un tratamiento aritmético tipo conteo.
- Poner en juego un cambio dimensional fijo y/o por desdoblamiento, para fijar la atención en las unidades 1D y discriminar su valor, o determinar el valor de su media considerándolas simultáneamente como un elemento constitutivo en dos o más subfiguras, y finalmente aplicar un tratamiento aritmético tipo aplicación de fórmulas para encontrar el área de la subfigura en cuestión.

Para finalizar el desarrollo de la actividad, se debe tomar en consideración cada uno de los resultados obtenidos en cada proceso y realizar un tratamiento aritmético de naturaleza aditiva para dar la solución final. Lo que identifica a este tipo de visualización es que la figura de inicio puede cambiar o no a nivel interno, pero en ningún momento su contorno se modifica, es decir, se pone en juego un cambio figural intrínseco. Además, cada vez que se necesite centrar la atención de una parte 2D constituyente a otra, sea de la figura de partida o de llegada, se debe dar inicio a un nuevo flujo visual.

Es el caso del proceso visual puesto en marcha por José en el desarrollo de la actividad T3-T12, que se ilustra en la figura 7, la cual solicita hallar el área de una figura irregular que se presenta fraccionada y que permite distinguir de entrada tres subfiguras de las cuales se conoce fórmulas para determinar su área (rectángulo, cuadrado y triángulo). Primero el estudiante centró su atención en la subfigura rectangular y seguido a esto procedió a discriminar números que están sobre la subfigura y que aluden a la medida de sus dimensiones, para después multiplicar dichos valores y encontrar el área de la subfigura en cuestión. Luego, el estudiante procedió a encontrar el área de la subfigura cuadrada, para ello centró su atención en algunas de las características perceptuales de la figura de inicio (reconoce el valor de la medida de un lado del cuadrado) y aplicó la fórmula para determinar el área de dicha subfigura. Finalmente procedió a encontrar el área de la subfigura triangular, que en este caso, la subfigura cuadrada y la triangular tienen un lado en común (altura), y aunque en la figura de inicio no se presenta el valor de su medida, el estudiante reconoce, gracias al procedimiento aplicado en la subfigura anterior, que el valor de la altura del triángulo es igual a la del lado del cuadrado, por ello solo aplicó la fórmula para encontrar el área de la subfigura triangular.

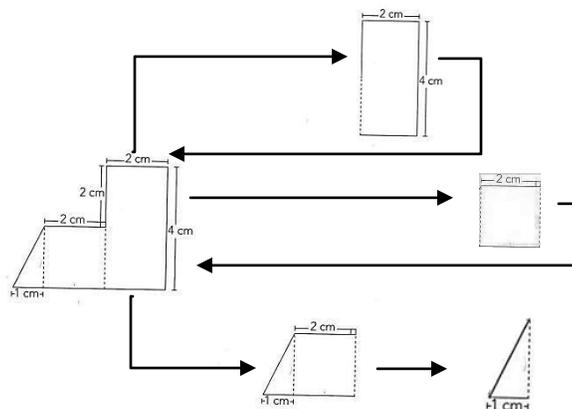


Figura 7. Representación figural del proceso visual ejecutado por José en el desarrollo de la tarea T3-T12 que ejemplifica la visualización 4 (V4)

Para terminar de solucionar la actividad sumó todos los valores obtenidos y así encontró el área de la figura inicial. Cabe resaltar que durante el desarrollo de la actividad el estudiante se apoyó en la aplicación de fórmulas para encontrar el

área de cada una de las subfiguras presentes en la figura de partida y por ello el contorno de esta figura se conservó.

Visualización 5 (V5): Este tipo de visualización es similar a la anterior, ya que al inicio quien resuelve la tarea aplica en más de una ocasión un cambio de focalización bidimensional Intrafigural, puesto que la atención puede recaer en más de un momento en las unidades 2D constituyentes de la figura de partida cuando se presenta fraccionada, o en las partes constituyentes 2D de la figura de llegada cuando no se presenta fraccionada, y seguido a esto realizar uno de los siguientes procesos descritos:

- Aplicar un cambio dimensional fijo, es decir, centrar la atención en las unidades 1D para discriminar su medida y finalmente realizar un tratamiento aritmético tipo aplicación de fórmulas.
- Aplicar un cambio dimensional operatorio, es decir, fijar la atención en unidades unidimensionales y proceder a realizar operaciones entre estas (comparaciones y operaciones entre segmentos como adición, sustracción) para determinar los valores de algunas unidades 1D que en la figura de inicio no aparecen, y seguido a esto, modificar el contorno de la figura mediante introducción de trazos rectilíneos al exterior del contorno, y así poder aplicar tratamientos aritméticos tipo aplicación de fórmulas. Cabe resaltar que esta forma de articular el cambio dimensional y la operación Rex se puede presentar de manera inversa, es decir, primero modificar la figura y luego discriminar el valor de la medida de las unidades 1D constituyentes.

Lo que diferencia a esta visualización de la anterior, es que se presenta un cambio figural real y en ocasiones también intrínseco, ya que la figura de partida puede o no cambiar a nivel interno, pero aquí el contorno de la figura de inicio si se modifica, ocasionando así que la superficie de la figura inicial se dilate transitoriamente. Además, por cada vez que en la figura se necesite pasar de centrar la atención de una parte 2D constituyente a otra, sea de la figura de partida o de llegada, se debe dar inicio a un nuevo flujo visual.

Es el caso del proceso visual puesto en marcha por Antonia en el desarrollo de la actividad T3-T17 que se ilustra en la figura 8, la cual solicita hallar el área de una figura irregular, donde apoyado de una regla encuentra las medida de sus lados. Para ello, la estudiante inducida por las características del contorno de la figura de partida introdujo un fraccionamiento, el cual le permitió separar dos subfiguras, un rectángulo y un triángulo.

De este modo centró su atención primero en la subfigura rectangular, donde para hallar el valor de su superficie se enfocó en sus lados (base y altura) y los midió con una regla, después aplicó la formula y de esta manera encontró el área de esta subfigura. Para continuar el desarrollo de la actividad retornó su atención sobre la subfigura triangular y para encontrar su área aplicó algunas

modificaciones sobre la organización perceptual de la subfigura mediante la introducción de algunos trazos rectilíneos sobre las características globales de esta, lo cual hizo que el contorno de la subfigura cambie, y por ende el contorno y el área de la figura de inicio no se conserva. Luego para hallar el área de la subfigura triangular, la estudiante no aplicó ningún tipo de transformación, sino que reconoció que la subfigura triangular pasó a conformar una parte o una fracción (la mitad) de la subfigura obtenida (cuadrado) y por tanto después de multiplicar base por altura dividió entre dos. Finalmente suma los dos valores de las áreas encontradas y así determinó el área total de la figura de inicio.

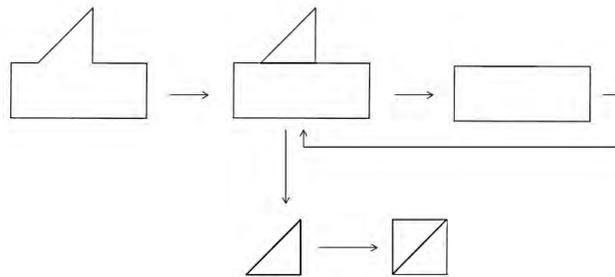


Figura 8. Representación figural del proceso visual ejecutado por Antonia en el desarrollo de la tarea T3-T17 que ejemplifica la visualización 5 (V5)

- Visualizaciones caracterizadas por articular cambios y operaciones mediante un flujo visual de naturaleza Discreta:

Visualización 6 (V6): En este tipo de visualización la atención recae en las unidades constituyentes 1D o 2D de la figura de partida, ya sea para reconocer las subfiguras presentes en esta o para discriminar la medida de sus lados. Las características globales de la figura no son consideradas, o no se aplican operaciones sobre la figura inicial, ni sobre las partes discriminadas, y la solución se limita a la aplicación exclusiva de tratamientos aritméticos tipo conteo o aplicación de fórmulas.

Es el caso del proceso visual puesto en marcha por José en el desarrollo de la actividad T2-T1, que se ilustra en la figura 5, donde se le solicita al estudiante contar los cuadros sombreados para hallar el área de la figura. Aquí el enunciado condicionó a que el estudiante en su proceso de solución no se interese en el contorno de la figura y pasó a enfocarse en las subfiguras que la constituyen.

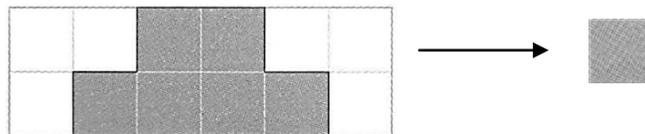


Figura 9. Representación figural del proceso visual ejecutado por José en el desarrollo de la tarea T2-T1 que ejemplifica la visualización 6 (V6)

Para dar la respuesta no necesitó aplicar ninguna transformación ni en la figura de inicio ni en sus subfiguras, sino que simplemente centró su atención en las unidades 2D cuadradas que constituyen la figura de partida y procedió a realizar un conteo de ellas. En la tabla 2 se presentan sintéticamente las seis visualizaciones anteriormente descritas, así como los elementos del instrumento de análisis tales como operaciones, cambios y flujos que las caracterizan.

Tabla 2. Visualizaciones caracterizadas

CATEGORÍAS INSTRUMENTO DE ANALISIS	VISUALIZACIONES					
	V1	V2	V3	V4	V5	V6
OPERACIONES	Res	Rex o Fr	Res	Fr	Res o Rex	Ausente
CAMBIOS FIGURALES	Inter	Real o Intrí	Real	Intrí	Real y/o Intrí	Ausente
CAMBIOS DIMENSIONALES	Fijo	Fijo	Fijo	Fijo y/o Des	Fijo y/o Op	Fijo
CAMBIOS DE FOCALIZACIÓN BIDIMENSIONAL	Intra o Mixto	Intra	Intra o Mixto	Intra	Intra	Intra
FLUJO VISUAL	Lineal	Lineal	Lineal	Circuito	Circuito	Discreto

### 3.2 VISUALIZACIONES DESPLEGADAS POR LOS ESTUDIANTES DURANTE EL DESARROLLO DE LAS TAREAS

- Visualizaciones presentes en el desarrollo de las tareas de medida directa del área de figuras irregulares con unidades no estándar (tareas tipo 1):

Para el desarrollo de las tareas que solicitan medir el área de figuras irregulares tomando unidades distintas a la unidad de medida estándar, tanto Antonia como José se valieron de las maneras de proceder V2 y V4, ya que para encontrar la medida del área de las figuras presentes en cada tarea, en ningún momento centraron su atención en el contorno de las figuras y sólo realizaron en cada una de las figuras de inicio un conteo de las unidades 2D constituyentes, de ser estas la unidad no estándar de media requerida, o fraccionaron las figuras de partida a nivel interno con la intención de obtener unidades 2D diferentes a las que se presentaba inicialmente, que equivalen a la unidad no estándar con la que se debe encontrar la medida del área por medio del conteo. Esto se evidencia al revisar el proceso de solución realizado por uno de los estudiantes en una tarea de este tipo, tal como se muestra a continuación:

Profesor: Necesito que me halles el área de esta figura en triángulos y en cuadrados [Señala la figura que presenta la tarea]

Antonia: Sería... aquí hay dos, cuatro, seis... once cuadrados [Cuenta de dos en dos las unidades 2D que componen la figura de partida]...y si los parto por la mitad... [El estudiante introduce un fraccionamiento sobre una de las subfiguras de la figura de partida]

Profesor: ¿Qué partes por la mitad?

Antonia: ...cada cuadrado, entonces me quedarían veintidós.

Profesor: ¿veintidós qué?

Antonia: veintidós triángulos y once cuadrados... [Escribe las respuestas sobre la hoja de la actividad]

Profesor: ¿Por qué sabes que te da veintidós triángulos?

Antonia: Son veintidós triángulos, porque cuento cada cuadro por dos.

De manera similar se presentaron los procesos de solución de este tipo de tareas por parte de los dos estudiantes. No obstante, se puede decir que las posibilidades figurales puestas en juego en el desarrollo de este tipo de tareas son muy bajas, porque si bien estas maneras de proceder transforman las figuras a nivel interno, su solución recae en un despliegue exclusivo del conteo. En las tablas 3 y 4 se presentan respectivamente la manera cómo se articularon los cambios figurales, dimensionales y de focalización con las operaciones en el desarrollo de las tareas tipo 1, así como los tipos de visualizaciones puestos en marcha por cada estudiante en el desarrollo de ellas.

Tabla 3. Representación esquemática de las estructuras visuales puestas en juego en el desarrollo de las tareas tipo 1

TAREAS TIPO 1		
Tareas	Esquemas Antonia	Esquemas José
T1-T1		
T1-T6 T1-T7		

Tabla 4. Visualizaciones presentes en el desarrollo de las tareas tipo 1

TAREAS	ACTIVIDADES	VISUALIZACIONES	
		ANTONIA	JOSÉ
Tareas tipo 1	T1-T1	V2	V2
	T1-T6	V4	V4
	T1-T7	V4	V4

- Visualizaciones presentes en el desarrollo de las tareas de medida directa del área de figuras irregulares con una unidad estándar (tareas tipo 2):

Para el desarrollo de las tareas en las que se debe medir el área de figuras irregulares con una unidad estándar, en este caso el centímetro cuadrado, Antonia colocó en juego la visualización V1, ya que el razonamiento ejecutado durante el desarrollo de las tareas se caracterizó porque sin necesidad de modificar la figura de inicio realizó reconfiguraciones en esta, que le permitieron obtener una figura constituida por unidades 2D que equivalen a la unidad estándar de medida, con lo cual se le facilitó realizar el conteo de dichas unidades y así encontrar la medida del área de la figura inicial. Así para el desarrollo de una de las tareas de este tipo el proceso realizado fue el siguiente:

- Antonia: muevo esta figura aquí, y ésta igual [Señala las dos subfiguras 2D cuya área es una fracción de la unidad de medida estándar y el lugar donde mentalmente las reubica indicando una señal de rotación con sus dedos]... y daría, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis centímetros cuadrados [Cuenta todas las unidades 2D, tanto las que equivalen en área a la unidad de medida estándar como las que completó reubicando mentalmente]
- Profesor: ¿Por qué sumas uno aquí? [Señala el lugar donde el estudiante reubicó mentalmente una de las unidades 2D que son una fracción de la unidad estándar]
- Antonia: Porque ahí ya quedó completo un cuadrado... Si muevo este aquí ya me queda un cuadrado [Señala el lugar donde reubicó una de las unidades 2D que es una fracción de la unidad estándar]

Caso contrario ocurrió con José, quien para el desarrollo de este tipo de tareas puso en marcha la visualización V3. El estudiante por medio de la introducción de trazos realizó reconfiguraciones en la figura inicial que transformaron a esta en otra figura de contorno diferente conformada por subfiguras que equivalen a la unidad estándar de medida del área y en la que finalmente realizó un conteo, así:

“...coloqué las medias lunas en el espacio en blanco y así se formó un rectángulo y al contar los cuadros me dio 6 centímetros cuadrados de área...”

Cabe resaltar, que las maneras de proceder ejecutadas en este tipo de tareas respecto a las empleadas en las tareas tipo uno son de mayor envergadura, ya

que en el desarrollo de las tareas se evidenció que la reconfiguración, sea real o momentánea, es una operación que implica un proceso más complejo que el fraccionamiento, puesto que ahora además de las características internas de la figura de partida también están en juego sus características globales. Sin embargo, debido a la presentación de las figuras, el rol heurístico de estas en la solución de las tareas es muy pobre y solo se privilegia el uso del conteo.

Por otro lado, debido al enunciado que se presenta en la tarea y a la simplicidad de la representación figural de la T2-T1, tanto Antonia como José dejaron de la lado las características globales de la figura inicial y centraron su atención en las subfiguras que la conforman, y sin necesidad de realizar modificación alguna, aplicaron un simple conteo para determinar la medida del área. Así para Antonia el proceso realizado fue el siguiente:

Antonia: Son seis centímetros cuadrados  
 Profesor: ¿Por qué?  
 Antonia: Porque cada cuadro mide un centímetro cuadrado y como hay seis, son seis centímetros cuadrados [Señala una de las unidades 2D cuadradas que componen la figura]

José procedió a desarrollar esta tarea de igual manera que Antonia dándole mayor importancia solo al conteo:

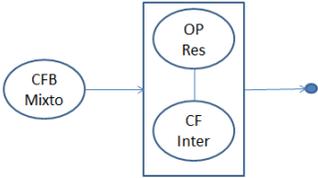
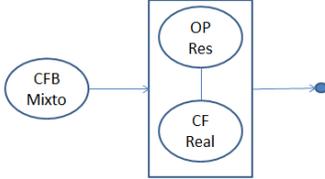
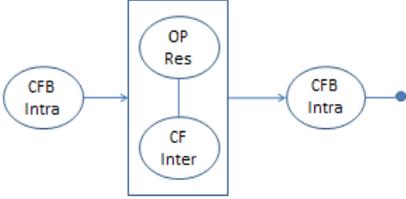
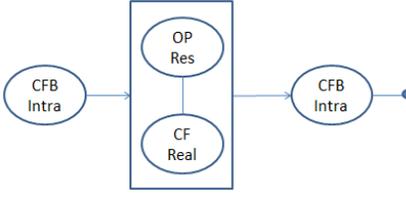
José: Cada cuadrito se me va a conformar en un centímetro cuadrado, entonces los cuento, un centímetro cuadrado, dos centímetros cuadrados... entonces el área de aquí es seis centímetros cuadrados [cuenta cada cuadrado que compone la figura inicial]

Por lo anterior, en esta tarea los dos estudiantes se valieron de la visualización V6 para su desarrollo, visualización que se distingue por ser la manera de proceder de más baja racionalidad. En la tablas 5 y 6 se presentan respectivamente los tipos de visualizaciones puestas en marcha por cada estudiante y la manera cómo articularon los cambios figurales, dimensionales y de focalización con las operaciones en el desarrollo de este tipo de tareas.

Tabla 5. Visualizaciones presentes en el desarrollo de las tareas tipo 2

TAREAS	ACTIVIDADES	VISUALIZACIONES	
		ANTONIA	JOSÉ
Tareas tipo 2	T2-T1	V6	V6
	T2-T4	V1	V3
	T2-T6	V1	V3
	T2-T7	V1	V3
	T2-T8	V1	V3

Tabla 6. Representación esquemática de las estructuras visuales puestas en juego en el desarrollo de las tareas tipo 2

TAREAS TIPO 2		
Tareas	Esquemas Antonia	Esquemas José
T2-T1		
T2-T4		
T2-T6 T2-T7 T2-T8		

- Visualizaciones presentes en el desarrollo de las tareas de medida indirecta del área de figuras irregulares (tareas tipo 3):

En la medida indirecta del área de figuras irregulares se concentra el mayor número de tareas que fueron implementadas, y a pesar de que las tareas agrupadas en este tipo tienen un propósito común, los estudiantes colocaron en juego para su solución diversos procesos visuales, lo que permitió la presencia de todas las maneras de proceder caracterizadas. Antonia para el desarrollo de algunas de las tareas tipo tres utilizó la manera de proceder V5, ya que lo más importante en estos casos fue tener figuras de las cuales se conozca la fórmula para hallar el área, o que por medio de modificaciones se llegue a obtener este tipo de figuras. Además, conocer o determinar la medida de los lados de la figura para así poder aplicar la fórmula y encontrar el área de cada una de las figuras de las tareas. Esto se evidencia en la figura 10, que presenta el proceso desarrollado por Antonia.

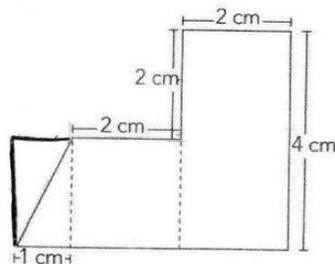


Figura 10. Imagen de una de las tareas tipo 3 en la que Antonia puso en juego la manera de proceder V5

José en cambio, para algunas de las tareas tipo tres puso en acción la visualización V4, ya que a diferencia de Antonia no fue común en él modificar el contorno de las figuras, en ocasiones si a nivel interno, pero lo que hizo simplemente fue discriminar las medidas de los lados de las figuras y aplicar fórmulas que ya conocía previamente para encontrar el área, como lo evidencia la transcripción de uno de sus procesos:

“Lo primero que yo hice fue hacer una línea para formar un triángulo y un rectángulo. Medí con la regla en el rectángulo me dio de ancho 5 cm y de largo 2 cm, luego multiplique 5 cm x 2 cm igual 10 cm<sup>2</sup>. Luego para poder hacer el triángulo medí la base y me dio 2 cm, luego medí altura y me dio 2 cm, luego multiplico base por altura 2 x 2 igual 4, luego divido entre dos igual 2cm<sup>2</sup>...”

En la tarea T3-T9 se evidenció nuevamente que Antonia aplicó la manera de proceder V1, ya que aplicó una reconfiguración sobre la figura de inicio sin necesidad de modificar el contorno de esta, así:

- Profesor: ... entonces para calcular el área de este romboide ¿Qué haces?  
 Antonia: Muevo esta parte... y la pongo aquí [Señala la subfigura triangular y el lugar donde la reubicó mentalmente]  
 Profesor: ¿Cómo?  
 Antonia: Lo muevo este triángulo [Señala el triángulo y el lugar donde lo pone]  
 Profesor: ¿Lo mueves dónde? [Señala el triángulo]  
 Antonia: A esta parte [Señala el lugar donde reubicó el triángulo mentalmente]  
 Profesor: ¿Y qué pasa ahí?  
 Antonia: Me queda un rectángulo  
 Profesor: ... ¿y entonces qué haces ahí?  
 Antonia: múltiplo base por altura  
 Profesor: ¿y cuánto te da?  
 Antonia: Seis centímetros cuadrados  
 Profesor: ¿Porque?  
 Antonia: ... porque aquí ya me dice las medidas [Señala la base y altura del romboide]

Mientras que José procedió a poner en juego la visualización V3, ya que en el proceso de solución realizó trazos sobre la figura de inicio reconfigurándola y que modificaron las características globales de esta:

“muevo el triángulo que está arriba, formo un rectángulo de base 2 cm y de altura 3 cm y multiplico  $2 \times 3 = 6$  centímetros cuadrados”

En las maneras de proceder puestas en marcha en la solución de estas tareas por parte de los estudiantes, a diferencia de las ejecutadas en algunas de las tareas del tipo dos, consideraron además de que la reconfiguración sea real o momentánea, la discriminación de las medidas de los lados de la figuras de llegada y la posterior aplicación de fórmulas para encontrar el área.

Por otra parte, debido a que el texto muestra cómo encontrar el área de una figura triangular a partir de una rectangular, Antonia en una de las tareas tipo 3 coloca en marcha la visualización V2, porque en el proceso para hallar el área de la figura inicial necesito modificar su contorno convirtiéndola en una fracción de la figura de llegada, como se demuestra a continuación:

- Profesor: ... entonces, ¿cuál sería el área de ese triángulo? [Señala la figura a la que alude la tarea]
- Antonia: Tengo que buscar primero el área del rectángulo, entonces aquí hago otro triángulo... [A partir del triángulo inicial forma un rectángulo]
- Profesor: ¿Y luego que haces?
- Antonia: Como ya me dice las medidas multiplico cuatro por dos y me da ocho [Señala los lados del triángulo inicial]
- Profesor: ¿Ocho qué?
- Antonia: Ocho centímetros cuadrados el área del rectángulo, y divido entre dos y me daría cuatro centímetros cuadrados porque el triángulo es la mitad del rectángulo...

José por su parte, debido a que ya conoce la fórmula para hallar el área de una figura triangular, puso en marcha la visualización V6 porque no modificó la figura inicial y sólo se interesó en reconocer la medida de los lados y aplicar la fórmula para encontrar el área:

“yo primero para hallar el área del triángulo, multiplique base por altura  $4 \times 2 = 8$  centímetros cuadrados y lo dividí entre dos y da 4”

En dos de las tareas del tipo 3 sin necesidad de hacer modificaciones a las representaciones figurales se puede encontrar el valor de su área por medio de la aplicación de fórmulas, así que tanto Antonia como José para dar solución a estas tareas sólo discriminaron la medida de los lados de las figuras y procedieron aplicar las fórmulas poniendo en juego así la visualización V6, que dicho anteriormente es la de más baja racionalidad. Esto se constata en esta transcripción:

Profesor: ... ¿Cuánto daría el área de este rectángulo?  
 Antonia: Dos centímetros cuadrados  
 Profesor: ¿Por qué?  
 Antonia: Porque aquí me dan dos centímetros cuadrados [mide con una regla el largo del rectángulo]  
 Profesor: ¿dos centímetros de qué?  
 Antonia: de largo y de base me da un centímetro... [Mide con una regla el ancho del rectángulo]... y si multiplico dos por una me dan dos centímetros cuadrados

En la tablas 7 y 8 se presentan respectivamente los tipos de visualizaciones puestas en marcha por cada estudiante y la manera cómo articularon los cambios figurales, dimensionales y de focalización con las operaciones en el desarrollo de este tipo de tareas.

Tabla 7. Visualizaciones presentes en el desarrollo de las tareas tipo 3

TAREAS	ACTIVIDADES	VISUALIZACIONES	
		ANTONIA	JOSÉ
Tareas tipo 3	T3-T3	V6	V6
	T3-T5	V6	V6
	T3-T6	V5	V5
	T3-T9	V1	V3
	T3-T11	V2	V6
	T3-T12	V5	V4
	T3-T17	V5	V4
	T3-T18	V4	V4

Tabla 8. Representación esquemática de las estructuras visuales puestas en juego en el desarrollo de las tareas tipo 3

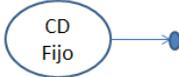
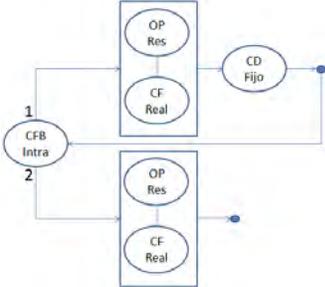
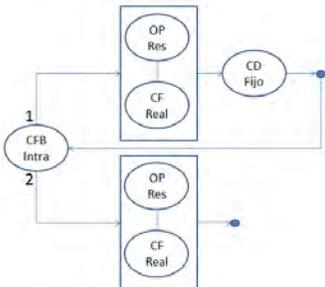
TAREAS TIPO 3		
Tareas	Esquemas Antonia	Esquemas José
T3-T3 T3-T5		
T3-T6		

Tabla 8. (Continuación)

TAREAS TIPO 3		
Tareas	Esquemas Antonia	Esquemas José
T3-T9		
T3-T11		
T3-T12		
T3-T17		
T3-T18		

En resumen se puede decir que en el desarrollo de las diferentes actividades aplicadas del texto que tratan sobre el área de figuras planas, fue común encontrar el hecho de que las visualizaciones desplegadas estuvieran condicionadas por la presentación de los enunciados y las figuras de las tareas propuestas. Es por lo anterior que las visualizaciones caracterizadas en esta investigación terminaron siendo tan limitadas y restringidas, ya que producto de las interpretaciones que los estudiantes le dieron a los ejemplos planteados por el texto y a la manera como los enunciados que acompañan a las actividades guiaron a estos sobre la manera de proceder en ellas, se obtuvo en algunos casos mucha similitud en las formas de proceder desplegadas por los alumnos para desarrollar las actividades. No obstante, la forma en que procedieron los estudiantes en el desarrollo de las tareas planteadas no implica que fuera la adecuada o la más óptima para decir que en realidad asimilaron el concepto, ya que en algunos casos se pudo evidenciar que esto no fue así. Por ello, a continuación se presenta un análisis en relación a si las formas de ver puestas en juego fueron relevantes para el aprendizaje del área de superficies planas o por el contrario fueron limitadas y condicionaron este proceso de aprendizaje.

Como se ha descrito anteriormente, el aprendizaje del concepto área de superficies planas ha mostrado ser una problemática en la educación básica, esto según Strutchens<sup>83</sup> puede que se deba a que el concepto de área a menudo es difícil de entender para los estudiantes, tal vez debido a sus experiencias iniciales en que está vinculado a una fórmula (tal como  $\text{área} = \text{largo} \times \text{ancho}$ ) en lugar de más actividades conceptuales tales como el recuento del número de unidades cuadradas que se necesitaría para cubrir una superficie". Es por esto que se debe considerar nuevos métodos de enseñanza como una manera de abordar y superar la problemática en relación al aprendizaje de este concepto, y aunque lo anterior fue tenido en cuenta por los autores del texto seleccionado para este estudio, a la hora de plantear las actividades que reflexionan sobre la medida del área, pasaron por alto el tener en cuenta actividades que permitan primero la exploración en dos dimensiones, algo de gran importancia para Piaget et al.<sup>84</sup>, quienes aseguran que en situaciones de aprendizaje tradicionales de papel y lápiz que involucran materiales concretos, los estudiantes pueden dominar la conservación de área a través de cortar, mover, pegar y de acciones de re-organización de las partes de una figura para producir otra con la misma área. En este sentido solo una de las actividades (presente en las tareas tipo tres: medida indirecta) fue la que permitió este tipo de procedimiento, al ser un proceso de manipulación y contacto. Dicho proceso de solución aplicado por los estudiantes dependió del despliegue de la visualización V5, haciendo de esta una herramienta muy eficaz para resolver

---

<sup>83</sup> MARTIN, y STRUTCHENS. Geometría y medición. En: Resultados de la Evaluación de Matemáticas del Séptimo Grado. 2000. p. 223, citados por KAMII, Constance y KYŪSHŪ, Judith. La dificultad de "largo x Ancho": ¿Es un cuadrado una unidad de medida?. En: Revista de Matemáticas Behavior. 2006. Vol. 25. p. 105-115

<sup>84</sup> KORDAKI, y BALOMENOU. Desafiando a los estudiantes a ver el concepto de área de triángulos en un contexto amplio: explotando de las funciones de CABRI-II. En: International Journal of Computers for Mathematical Learning 2006 Traducción realizada por Jhon López, 2013, p. 99

actividades de este tipo, ya que por admitir cambios en el contorno de la figura permite la exploración de la conservación del área por medio de transformaciones, lo que en palabras de Kordaky y Balomenau<sup>85</sup>, es fundamental, puesto que la comprensión de la conservación de la figura global de una forma y en consecuencia su área después de su transformación a través de movimientos rígidos utilizando una traslación, rotación y simetría también es esencial para la conceptualización del área.

No obstante, el uso la visualización V5 para otras tareas de medida indirecta utilizando fórmulas no fue tan pertinente, ya que como caso particular, se tiene a la estudiante Antonia, que guiada por el ejemplo aprendió como encontrar al área de un triángulo a partir de un rectángulo, pero no fue capaz de desligarse de este hecho y entender que el ejemplo quería mostrar cómo se obtenía la fórmula de dicha figura, mas no como se debía proceder para hallar el área de la misma, y en consecuencia la estudiante en actividades donde el texto le pedía de alguna manera hallar el área de una figura triangular o que contenía un triángulo, siempre pasó a utilizar ya sea la visualización V5 o si fuese el caso la visualización V2 (las dos contienen en su proceso la operación  $\times$ ), para conformar de un triángulo un rectángulo y después sí operar con las formulas, más nunca opero con la fórmula del triángulo directamente, y por ello en vez de asimilar el concepto, se generó en ella un obstáculo en su aprendizaje. Caso contrario ocurrió con el alumno José, que siempre utilizó las fórmulas para hallar el área de las figuras geométricas que el texto escolar fue introduciendo a medida que se iban desarrollando las tareas propuestas por este, mediante la aplicación de la visualización V4 o V6 óptimas en dichos casos puesto que el conocimiento que pretende movilizar el manual escolar es que los estudiantes se desliguen del conteo de unidades de medida y adquieran la capacidad de encontrar áreas por medio de la aplicación de fórmulas matemáticas.

En este mismo sentido, cuando José desplego la visualización V3 en una de las tareas de medida indirecta (tareas tipo tres), la que presentaba un romboide conformado por un trapecio y un triángulo con números ubicados sobre sus lados que aluden a la medida de estos, ocurrió que, el despliegue de este proceso visual (visualización V3) no fue tan pertinente, puesto que la figura no debería sufrir modificaciones, ya que el texto previamente planteo aspecto clave para solucionar este tipo de tarea el cual hace entender a los alumnos que para encontrar el área del romboide se debe operar de igual manera que en un rectángulo. Lo cual indica que José en esta ocasión no comprendió totalmente el conocimiento matemático que el manual escolar pretendía movilizar, haciendo que el proceso visual desplegado en esta oportunidad no fuera el adecuado. Mientras que los procesos visuales desplegados por Antonia en este mismo tipo de situaciones problema

---

<sup>85</sup> KORDAKI. y BALOMENOU. Desafiando a los estudiantes a ver el concepto de área de triángulos en un contexto amplio: explotando de las funciones de CABRI-II. En: International Journal of Computers for Mathematical Learning 2006 Traducción realizada por Jhon López, 2013, p. 100

(Visualización V1) fueron más acertados ya que se caracterizaron por no hacer modificaciones sobre las figuras, lo cual revela que a diferencia de José en estas tareas Antonia logró una mejor apropiación del concepto movilizado por el texto.

Lo anterior demuestra que las visualizaciones caracterizadas en este estudio pueden ser eficaces o limitadas y que, la pertinencia o no del despliegue de estos procesos visuales en la comprensión de la medida del área de superficies planas está íntimamente ligada al tipo de tarea en el cual fueron ejecutados.

## CONCLUSIONES

Una de las ramas más importante de la matemática es la geometría, disciplina a la que hasta hace un tiempo se la desplazó de la enseñanza escolar y de los currículos educativos debido al surgimiento de las llamadas matemáticas modernas. No obstante, en la actualidad existe un creciente interés por retomar el estudio de la geometría para recuperar el desarrollo del pensamiento espacial intuitivo y así devolverle a esta disciplina el lugar que le corresponde en la enseñanza escolar. En este sentido, desde una perspectiva semiótica para retomar el estudio de la geometría intuitiva y garantizar un aprendizaje significativo, se debe precisar que, la actividad cognitiva sobre la que se moviliza el aprendizaje geométrico solicita de un trabajo simultáneo entre los tratamientos que el registro de las figuras y el registro discursivo permiten. Sin embargo, la discriminación y ejecución de los tratamientos, en el caso de las representaciones figurales, no es obvia ni espontánea como han mencionado algunos estudios<sup>86</sup>, al notar las falencias y dificultades que tienen los alumnos al ver en las figuras geométricas, ya que estos estudios han puesto en evidencia que las representaciones figurales juegan un papel poco significativo en el momento de buscar solución a diversas situaciones problema. De este modo, es ahí que residen precisamente muchos de los problemas de aprendizaje y comprensión de la geometría, ya que la discriminación de los tratamientos figurales requiere de un aprendizaje específico que depende en gran medida de las formas de ver que este registro permite, procesos que en la escuela no se desarrollan.

Por otra parte, una de las temáticas de mayor importancia en la enseñanza de las matemáticas es la construcción y medición de magnitudes, que para el caso del área de superficies planas, permite la construcción de futuros conceptos. Sin embargo, su enseñanza se ha tipificado a través de un uso excesivo de formas geométricas en las que el estudio del área se centra en racionalidades de orden numérico, que han dejado de lado el desarrollo de otros procesos previos a la asociación de un número con la cantidad de superficie, y es así como una estrategia didáctica que privilegie sólo tratamientos numéricos no bastará para asegurar una verdadera movilización de pensamiento métrico. De esta manera es en un ambiente de comparación de áreas, que la movilización y explicitación de los tratamientos figurales y formas de ver permitidos por el registro semiótico de las figuras se constituye, no sólo en la principal y más potente opción para cargar de sentido el aprendizaje del área e introducir a los estudiantes en el desarrollo de pensamiento métrico, sino además, la visualización en las figuras geométricas, que tras las carencias de tiempos escolares, adquiere en los primeros ciclos de la educación básica verdaderos y muy fructíferos lugares de aprendizaje. En consecuencia, es a partir del análisis que se realizó en este trabajo que se formulan las siguientes conclusiones que pretenden dar respuesta tanto a los

---

<sup>86</sup> MARMOLEJO (2007 y 2010); MARMOLEJO y VEGA (2012)

cuestionamientos que orientaron esta investigación como a los objetivos propuestos.

En el presente trabajo, si bien no es el interés el analizar el texto y sus actividades, si es bueno hacer énfasis en que las tareas aquí planteadas son muy dirigidas y ejercen un control sobre los procedimientos desplegados por los estudiantes, puesto que no les permite, por medio de la exploración y del ensayo-error, ser capaces de desarrollar dichas tareas por sí mismos y que puedan razonar sobre que método es el más adecuado, condicionando al alumno a proseguir como lo exponen las definiciones o los ejemplos planteados, es decir, las visualizaciones de los estudiantes en su mayoría fueron predisuestas por el texto, lo cual a los ojos de la visualización no es aconsejable. Además, si la visualización fuese parte de la enseñanza en nuestra educación no habría que manipular tanto la presentación de las actividades ni en los textos ni en clase, ni tampoco condicionarlas a unas figuras simples y prediseñadas sino más bien se podría presentar figuras más complejas y que permitan diferentes formas para su resolución, ya que gracias a la enseñanza de la visualización el estudiante estaría en la capacidad de desarrollar tareas de este tipo.

El fracaso de la metodología tradicional en el aprendizaje de las matemáticas, y en particular en el desarrollo del pensamiento geométrico y métrico, revela una especie de desconexión entre las demandas sociales y culturales relativas a la medida y su transposición didáctica en la enseñanza, ya que los conocimientos que se adquieren al desarrollar este tipo de pensamientos son esenciales para que los alumnos puedan comprender lo que sucede a su alrededor. En la actualidad se ven grandes esfuerzos por regresarle ese espacio de gran importancia a la geometría, y muestra de ello es la propuesta de renovación curricular dada en los lineamientos, la cual adopta a la geometría activa como alternativa para restablecer el estudio no sólo de los sistemas geométricos como herramienta de exploración y representación del espacio, sino con el propósito de recuperar el desarrollo del pensamiento espacial intuitivo en toda la matemática. Por tanto, es evidente que desde la propuesta curricular colombiana existe un interés por generar en el sistema educativo espacios académicos para el estudio de la geometría intuitiva, y qué mejor manera de introducir a los estudiantes al desarrollo del pensamiento espacial que mediante el estudio de los tratamientos figurales y de la visualización cuando se enseña el área de superficies planas, ya que aquí la visualización adquiere un espacio de aprendizaje explícito y los problemas de comprensión del concepto área en los estudiantes pueden solucionarse. En este sentido, podemos afirmar que al ser las visualizaciones caracterizadas en esta investigación de alguna manera restringidas y limitadas, ya que las figuras no jugaron un rol heurístico significativo, se pone de manifiesto que el ver sobre las figuras geométricas es un asunto complejo, de mucha relevancia, que no es una cualidad que los estudiantes desarrollen espontáneamente y que para alcanzar los logros establecidos en las políticas curriculares se deben generar espacios donde claramente este proceso cognitivo se aprenda a trabajar.

En consecuencia, las líneas de investigación abiertas que a futuro se pueden trabajar y que están relacionadas con el presente trabajo son: uno, teniendo en cuenta que la población seleccionada para esta investigación se caracterizó porque nunca recibió algún tipo de enseñanza explícita sobre tratamientos figurales, y que no dominaban el concepto sobre el cual reflexionaban las actividades, se podría replicar el estudio de caso bajo condiciones en las cuales la población seleccionada haya participado previamente en sesiones donde se dé la oportunidad a los alumnos de aprender los diferentes tratamientos que permiten el registro de las figuras geométricas, para determinar si así los enunciados de las actividades no ejercen tanto control sobre las maneras de proceder que despliegan los estudiantes durante el desarrollo de las tareas y a la vez contrastar los resultados con los de la presente investigación. Dos, extraer las actividades que reflexionan sobre la medida del área de algunos manuales escolares de la educación básica primaria, y posteriormente utilizar el instrumento de análisis que esta investigación asumió para determinar cuáles de ellas brindan mayores potencialidades heurísticas para su respectiva solución y aplicarlas. Finalmente contrastar el análisis estructural de las actividades con el análisis funcional, es decir, lo que ellas permiten realizar contrastado con los procesos que verdaderamente colocaron en juego los estudiantes durante el desarrollo de las mismas.

En conclusión, es de relevancia que se siga indagando sobre este importante proceso cognitivo, el cual permite desarrollar en el individuo habilidades visuales que van más allá del simple acto de observar. Además, si la visualización es incorporada a la enseñanza de las matemáticas se podría abordar y dar solución a muchos de los problemas asociados a la comprensión de algunos conceptos geométricos y métricos, en particular, el área de superficies planas.

## BIBLIOGRAFÍA

ACEVEDO, Jenny Patricia y CAMARGO, Leonor. Modificabilidad estructural cognitiva versus visualización. Un ejemplo de análisis del desempeño en tareas relacionadas con el aprendizaje de la rotación. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (11: 7-9, octubre: Colegio Champagnat de Bogotá.). Memorias. Bogotá D.C. 2010. p. 13-21.

ÁLVAREZ, Carmen, y SAN FABIÁN, José. La elección del estudio de caso en investigación educativa. En: Gazeta de antropología. 2012. Vol. 28, No 1, artículo 14, p. 1-12.

ARCAVI, Abraham. The role of visual representation in the learning of mathematics. En: Educational studies in mathematics. 2003. Vol. 52, p. 215-241.

BARAJAS, Fredy y RAMÍREZ, Edwin. Estrategia metodológica para la conceptualización del perímetro de la circunferencia y área del círculo en quinto grado de educación básica. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas, 2006.

BELMONTE, Juan Miguel. La importancia de la medición. Aspectos teóricos. En: El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. 3 ed. Madrid, Editorial síntesis, 2000. p.125-149.

CADAVID, Gloria Susana, *et al.* Nivel de razonamiento en el que se encuentran algunos estudiantes frente al concepto de área: un análisis desde el modelo de van hiele. Trabajo de grado licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Medellín: Universidad de Antioquia. Facultad de educación, 2008.

CHAMORRO, Carmen. y BELMONTE, Juan. El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. 3 ed. Madrid, Editorial síntesis, 2000. 152 p.

CHAMORRO, María del Carmen. Tratamiento didáctico: el problema de la medida. En: El problema de la medida. Didáctica de las magnitudes lineales. 3 ed. Madrid, Editorial síntesis, 2000. p.39-76

CHAMORRO, María del Carmen. El tratamiento escolar de las magnitudes y su medida. En: Didáctica de las matemáticas. Madrid, Editorial Pearson prentice hall, 2003. p. 221-243.

CHAMORRO, María del Carmen. Las magnitudes multilineales: la superficie y el volumen. En: Didáctica de las matemáticas. Madrid, Editorial Pearson prentice hall, 2003. p. 245-272.

COLOMBIA. MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. Matemáticas lineamientos curriculares. Santa fe de Bogotá D.C: MEN, 1998. 131 p.

CORAL, Luz Adriana. Introducción al registro semiótico de las figuras geométricas en los textos escolares del primer ciclo de la educación básica primaria. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2008.

CÓRDOBA, Álvaro Raúl. Análisis semiótico de la función lineal en el álgebra de Baldor. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas. San Juan de Pasto: Universidad de Nariño. Facultad de ciencias exactas y naturales. Departamento de matemáticas y estadística, 2008.

DUQUE, Jhonatan y MACA, Oscar. Análisis histórico-epistemológico de la noción de cuadratura en los libros I y II de los elementos de Euclides y su incidencia en el concepto de área en la educación básica. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2011.

DUVAL, Raymond. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. Traducción realizada por Humberto de Quesada. En: La gaceta de la RSME. 2006. Vol. 9, no 1, p. 143-168.

DUVAL, Raymond. La geometría desde un punto de vista cognitivo. 1998. Traducción realizada por Víctor Hernández y Martha Villalba. [En línea]. [s.l.]. PMME-UNISON. Febrero 2001. [Consultado el 8 de agosto de 2012]. Disponible en internet: <http://fractus.uson.mx/Papers/ICMI/LaGeometria.htm>

DUVAL, Raymond. Semiosis y Pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Santiago de Cali.: Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo, Artes Gráficas Univalle, 1999. 314 p.

DUVAL, Raymond. Voir en mathématiques. En: Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual. E. Filloy. (Ed.), Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. México 2003. p. 41-76.

DUVAL, Raymond. Geometrical Pictures: kinds of representation and specific processing. En: Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, R. Sutherland y J. Mason (Eds), Springer, Berlin, 1995. p.142-157

FERNÁNDEZ, Edinsson y MEJÍA, María. Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (11: 7-9, octubre: Bogotá D.C.). Memorias. Bogotá D.C.: Colegio Champagnat de Bogotá, 2011. p. 61-68.

FORY, Oscar Marino. Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2010.

GONZÁLEZ, María Teresa. y SIERRA, Modesto. Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. En: Enseñanza de las ciencias. 2004. Vol. 22, No. 3, p. 1-19.

GONZATO, Margherita; DÍAZ, Juan y CONTRERAS, J.M. Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. (s.d.) p. 383-392.

GONZATO, Margherita; FERNÁNDEZ, Teresa y DÍAZ, Juan. Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial. En: Números Revista de didáctica de las matemáticas. Julio, 2011. Vol. 77. p. 99-117.

GUALDRON, Élgar. Elementos de visualización en la resolución de tareas de semejanza. En: Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (11: 7-9, octubre: Colegio Champagnat de Bogotá.). Memorias. Bogotá D.C. 2010. p. 33-40.

GUZMAN, Lucy & INSUASTY, Ana. El papel del registro semiótico de las figuras en la construcción de los números fraccionarios desde la relación parte todo: análisis de textos escolares. Trabajo de grado Licenciado en Matemáticas. San Juan de Pasto. Universidad de Nariño. Departamento de matemáticas y estadística, (2008).

HIRSTEIN, J. Lamb y OSBORNE, A. Student misconceptions about area measure. *The Arithmetic Teacher*. 1978. Vol. 25(6), p.10-16

HURTADO, Andrés y ZÚÑIGA, Fanor. La función cuadrática en los textos escolares de grado noveno de la educación básica. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2011.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. Resultados de Colombia en TIMSS 2007. FERNÁNDEZ, María Isabel; CERVANTES, Víctor; LOPERA, Carolina. (Eds). Bogotá D.C., ICFES, 2010. 358 p.

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. Pruebas saber 5° y 9° 2009 resultados nacionales. LOPERA, Carolina; RONDEROS, Natalia; UZAHETA, Álvaro; CERVANTES, Víctor; QUINTERO, Luis. (Eds). Bogotá D.C., ICFES, 2010. 157 p.

KAMII, Constance y KYŪSHŪ, Judith. La dificultad de "largo x Ancho": ¿Es un cuadrado una unidad de medida?. En: Revista de Matemáticas Behavior. 2006. Vol. 25. p. 105–115

KORDAKI. y BALOMENOU. Desafiando a los estudiantes a ver el concepto de área de triángulos en un contexto amplio: explotando de las funciones de CABRI-II. En: International Journal of Computers for Mathematical Learning 2006 Traducción realizada por Jhon López, 2013.

LONDOÑO, Jerry y CUERO, Sandra. Las variaciones de la redacción: un papel importante para la comprensión de enunciados de problemas que introducen expresiones fraccionarias en grado cuarto de la básica primaria. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas y física. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2010.

LÓPEZ, Laura cristina. Y SUÁREZ, Nubia Fernanda. Trabajando la diferencia de los conceptos de área y perímetro con actividades didácticas en alumnos de cuarto grado de primaria. Trabajo de grado licenciado en matemáticas: Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas, 2010.

MACK. Building on informal knowledge through instruction in a complex content domain: Partitioning, units, and understanding of multiplication of fractions. En: Journal for Research in Mathematics Education. 2001. Vol. 32(3), p. 267-295

MAPALLO, Dora. La transposición didáctica de la noción de área a partir de los programas y propuestas curriculares colombianos: un estudio monográfico. Trabajo de grado licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía, (2011).

MARMOLEJO, Gustavo. Algunos tópicos a tener en cuenta en el aprendizaje del registro semiótico de las figuras: procesos de visualización y factores de visibilidad. Tesis de maestría. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de educación y Pedagogía, 2007.

MARMOLEJO, Gustavo. La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. En: Revista Sigma. 2010. Vol.10, No. 2, p.10-26.

MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Visualización en el área de superficies planas. Elementos para el análisis de textos escolares. En: Coloquio Regional de Matemáticas y Simposio de Estadística (11 y 1: 6-8, mayo: Nariño, Pasto). Memorias. Pasto: Universidad de Nariño, 2012.

MARMOLEJO, Gustavo y VEGA, Myriam. La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. En: Educación matemática, 2012. Vol. 24, No. 2, p. 7-32.

MARMOLEJO, Gustavo y GONZÁLEZ, María Teresa. Estructuras visuales en el área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis de textos escolares. s.p. 2011. p. 1-21.

MARTIN. y STRUTCHENS. Geometría y medición. En: Resultados de la Evaluación de Matemáticas del Séptimo Grado. 2000.

MARTÍNEZ BONAFÉ, Jaume. El estudio de casos en la investigación cualitativa, En: J. B. Martínez Rodríguez, Hacia un enfoque interpretativo de la enseñanza. (1990). Granada, Servicio de Publicaciones de la Universidad de Granada. p. 57-68.

MENDOZA, José Luis. El uso del tangram en estudiantes de quinto grado: una propuesta para introducir los conceptos de área y perímetro. Trabajo de grado Especialista en educación matemática: Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas, 2010.

MONTEERRUBIO, María Consuelo, y ORTEGA, Tomas. Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En: M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), Investigación en Educación Matemática. 2009. Vol. 13 p. 37-53.

MURCIA, Nelly Esperanza. Jugando con áreas de figuras planas elaboradas con triángulos y cuadrados. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas: Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. Facultad de ciencias. Escuela de matemáticas, (2004).

OBANDO, Franci. Análisis del tratamiento de las transformaciones geométricas en los textos escolares de grado sexto y séptimo. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas y física. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2008.

OUTHRED, Lynne. y MITCHELMORE, Michael. Estructuración de arreglos rectangulares en los estudiantes. Traducción. En: Group for the psychology of mathematics education. 2004. Vol. 3, p. 465-472.

PÉREZ SERRANO, Gloria. Investigación cualitativa. Retos, interrogantes y métodos. Madrid, España. Editorial La Muralla S.A. 1994. 232 p.

PIAGET, J., INHELDER, B. and SZEMINSKA, A. The Child's Conception of Geometry. NY: Norton & Company. 1981.

PRESMEG, Norma. Research on visualization in learning and teaching mathematics. En: Handbook on the Psychology of Mathematics education: Past, Present and Future. Gutierrez, P. Boero (Eds), Sense Publishers. 2006. p. 205-235.

QUIJANO, Saraeva. Una secuencia didáctica en torno a la noción de área con estudiantes de grado quinto de básica primaria. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2009.

QUIÑONES, Andrea. Tipos y clases de los problemas de matematización propuestos en libros de textos escolares de cuarto grado en la iniciación al registro numérico fraccionado. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2011.

RAMÍREZ, R. FLORES, P. y CASTRO, E. Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En: Investigación en Educación Matemática. M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds). 2010. Vol. 14. p. 499-510.

RICO, Johnny Alberto. Algunas diferencias entre reales y racionales: un aporte a la comprensión del concepto de número real en la escolaridad. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas y física. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2012.

STAKE, Robert. Investigación con estudio de casos. 4 ed. Madrid, España. Editorial Morata. 2005. 159 p.

SUAREZ, Carolina. Propuesta metodológica para el acercamiento a la noción de proporcionalidad. Trabajo de grado Licenciado en educación básica con énfasis en matemáticas. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2008.

TORREGROSA GIRONÉS, Germán; QUESADA VILELLA, Humberto y PENALVA MARTÍNEZ, María. Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. En: Enseñanza de las ciencias. 2010. Vol. 28, No. 3, p. 327-340.

VÉLEZ, Nelson Jesús. Análisis histórico- epistemológico del concepto de número irracional y los obstáculos presentes en su transposición textual. Trabajo de grado Licenciado en matemáticas y física. Santiago de Cali: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía, 2011.

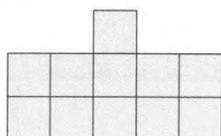
ZIMMERMANN, Walter. y CUNNIGHAM, Steve. Editor's introduction: What is mathematical Visualization? En: Visualization in teaching and learning mathematics. W, Zimmermann y S. Cunnigham (Eds), Mathematical Association of America, Washington. DC. 1991. p. 1-8.



Debes aprender...

Área

El área es la medida de la superficie de una figura. Para medir el área, se elige una unidad y se cuenta el número de veces que la figura contiene esta unidad. Por ejemplo, para la siguiente figura:



- Si se elige  como unidad de área, entonces, el área es 22 .
- Si se elige  como unidad de área, entonces, el área es 11 .



¿Cuánto has aprendido?

1. Responde las siguientes preguntas. Respuesta libre

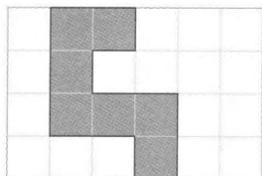
T1-T1

 Plantea y actúa

¿Qué otra unidad puedes elegir para medir el área de la figura anterior? \_\_\_\_\_

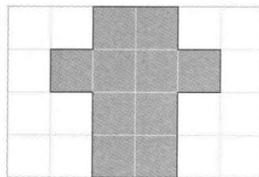
¿Cuál es la medida del área con la unidad que elegiste? \_\_\_\_\_

2. EJERCITACIÓN. Calcula el área de cada figura en  y en .



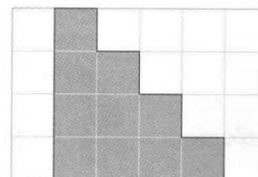
Área = T1-T2 

Área = \_\_\_\_\_ 



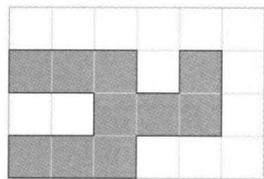
Área = T1-T3 

Área = \_\_\_\_\_ 



Área = T1-T4 

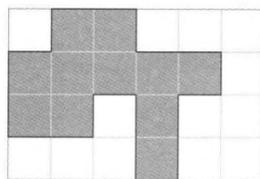
Área = \_\_\_\_\_ 



Área = \_\_\_\_\_ 

Área = \_\_\_\_\_ 

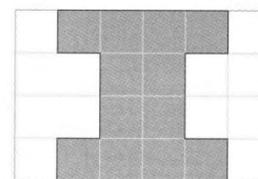
T1-T5



Área = \_\_\_\_\_ 

Área = \_\_\_\_\_ 

T1-T6



Área = \_\_\_\_\_ 

Área = \_\_\_\_\_ 

T1-T7

## ANEXO B

● Estándar: Pensamiento métrico



Debes aprender...

### Centímetro cuadrado

El centímetro cuadrado es la unidad de área del sistema métrico decimal. Un centímetro cuadrado ( $\text{cm}^2$ ) corresponde a un cuadrado de 1 cm de lado.



Área =  $2 \text{ cm}^2$



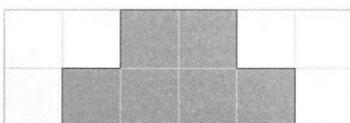
Área =  $3 \text{ cm}^2$



¿Cuánto has aprendido?

1. Cuenta los cuadrados que están sombreados y halla el área de cada figura.

✂ Interpretar



Área = \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$

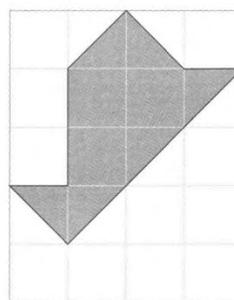
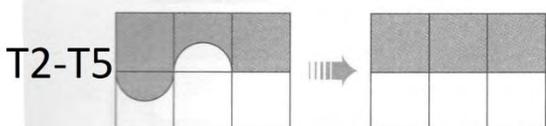
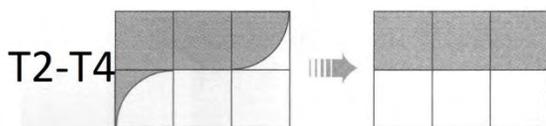
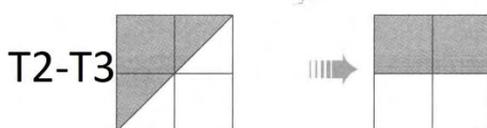
T2-T1



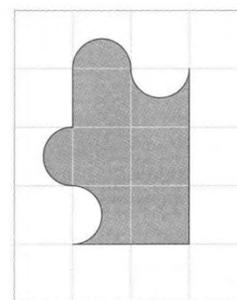
Área = \_\_\_\_\_  $\text{cm}^2$  T2-T2

2. RAZONAMIENTO. Halla el área de las figuras en  $\text{cm}^2$ .

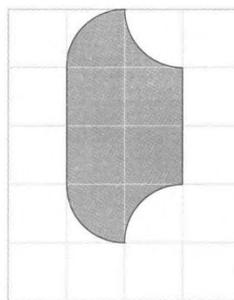
Completa cuadrados como se indica.



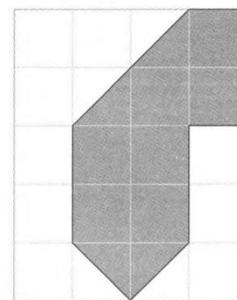
Área = T2-T6  $\text{cm}^2$



Área = T2-T7  $\text{cm}^2$



Área = T2-T8  $\text{cm}^2$



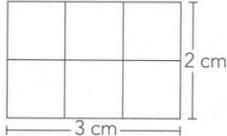
Área = T2-T9  $\text{cm}^2$

© SANTILLANA

## ANEXO C

**3. RAZONAMIENTO.** Observa cómo se calcula el área del rectángulo.

El área de un **rectángulo** se halla multiplicando la medida del largo por la medida del ancho.



Área del rectángulo = largo × ancho

= 3 cm × 2 cm

= 6 cm<sup>2</sup>

Toma las medidas de cada rectángulo, con la regla. Luego, calcula el área de cada uno.



Área = **T3-T1**



Área = **T3-T2**



Área = **T3-T3**

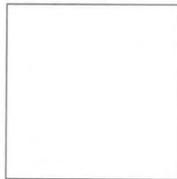
**4. COMUNICACIÓN.** Halla el área de cada cuadrado. Luego, escribe el procedimiento que usaste para calcularla.

Plantea y actúa

**T3-T4**



Área = \_\_\_\_\_



Área = **T3-T5**

Procedimiento:

---



---

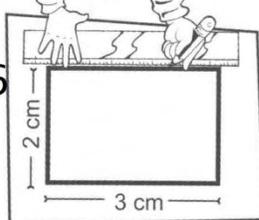


---

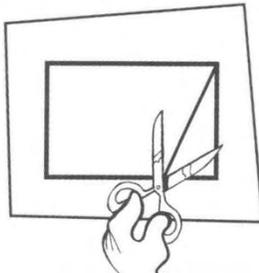
**5. RAZONAMIENTO.** Si dibujas un rectángulo y haces un corte como se indica en el ejemplo, obtienes un romboide.

**T3-T6**

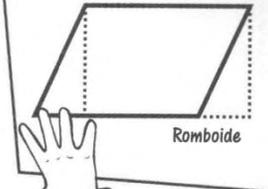
**1** Dibuja un rectángulo como se muestra.



**2** Corta por la línea.



**3** Desliza el triángulo hacia el otro extremo del rectángulo y pega.



- ¿Cuánto mide el área del rectángulo? \_\_\_\_\_
- ¿Cuánto mide el área del romboide? \_\_\_\_\_
- ¿Cómo son las áreas del rectángulo y el romboide? \_\_\_\_\_

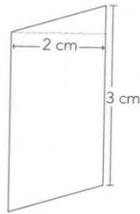
## ANEXO D

● **Estándar:** Pensamiento métrico

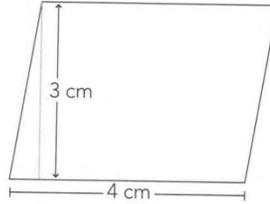
» Centímetro cuadrado

**6. EJERCITACIÓN.** Calcula el área de cada romboide.

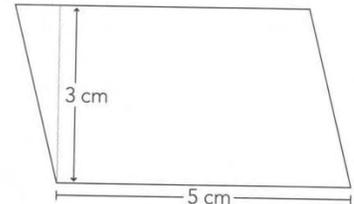
**T3-T7**



Área = \_\_\_\_\_



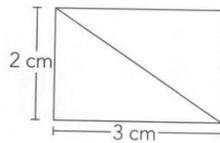
Área = **T3-T8** \_\_\_\_\_



Área = **T3-T9** \_\_\_\_\_

**7. RAZONAMIENTO.** Observa cómo se halla el área de un triángulo a partir del área de un rectángulo.

La diagonal divide el rectángulo en dos triángulos iguales.



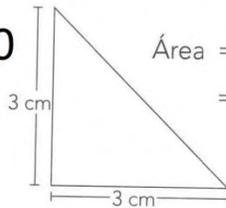
$$\text{Área del rectángulo} = 3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área del triángulo} = \text{Área del rectángulo} \div 2$$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{3 \text{ cm} \times 2 \text{ cm}}{2} = \frac{6 \text{ cm}^2}{2} = 3 \text{ cm}^2$$

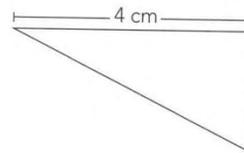
• Calcula el área de cada triángulo.

**T3-10**



Área = \_\_\_\_\_  
= \_\_\_\_\_

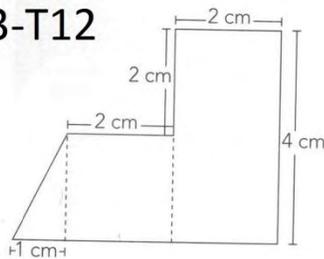
**T3-T11**



Área = \_\_\_\_\_  
= \_\_\_\_\_

**8. RAZONAMIENTO.** Calcula el área total de la figura. Para ello, halla el área de cada polígono que la forma; luego, suma todas las áreas.

**T3-T12**



• Área del rectángulo = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

• Área del cuadrado = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

• Área del triángulo = \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

Área total = área del rectángulo + área del cuadrado +  
área del triángulo

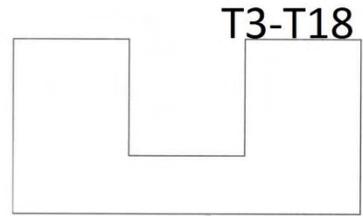
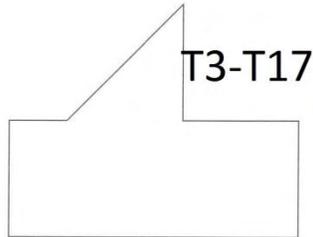
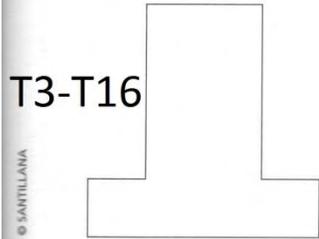
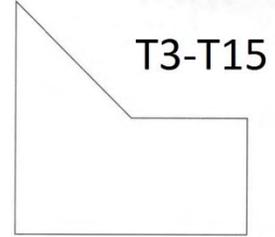
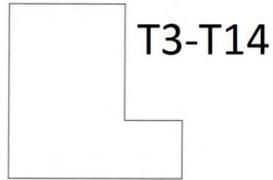
= \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_ + \_\_\_\_\_

Área total = \_\_\_\_\_

## ANEXO E

Área

5. Calcula el área de cada figura. Toma las medidas con una regla.



© SANTILLANA