LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN LA SOLUCIÓN DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN DE TIPO PARABÓLICO

Jonathan Alexander Diaz
Jhon Freddy Ruano Ibarra

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO
2012

LA TRANSFORMADA DE FOURIER EN LA SOLUCIÓN DE ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN DE TIPO PARABÓLICO

Jonathan Alexander Diaz
Jhon Freddy Ruano Ibarra

Trabajo de grado presentado como requisito
parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Director
Miller Orlando Cerón Goméz
Magister en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
SAN JUAN DE PASTO
2012

Nota de Responsabilidad

"Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo son responsabilidad exclusiva de sus autores"
Artículo 1º de acuerdo 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño

Nota de Aceptación:

Miller Orlando Cerón Gómez

Presidente de Tesis

Saulo Mosquera López

Jurado 1

Eduardo Ibargüen Mondragón

Jurado 2

San Juan de Pasto, Noviembre de 2012

Agradecimientos

”buena es la ciencia con herencia y provechosa para los que ven el sol,
porque escudo es la ciencia, y escudo es el dinero;
más la sabiduría excede, en que da la vida a sus poseedores.”
Ec .7;11-12

Agradecerle al Señor Dios dueño de nuestras vidas y nuestro futuro, al mismo tiempo le agradecemos a nuestros padres Carlos Guillermo-Jose Ignacio Diaz y nuestras madres Luz del Carmen-Margarita Argote quienes con su abnegada labor hicieron de nosotros un instrumento positivo para la sociedad siempre con sus enseñanzas, costumbres y amor llenaron nuestras vidas, a nuestros hermanos quienes con sus voces nos alentaban para seguir adelante y al Msc Miller Cerón quien con su guía y consejo ha hecho posible la construcción de este trabajo y su comprensión paulatina. En general a todos nuestros familiares quienes día a día contribuyeron con un granito de arena para llegar hasta la consecución de este objetivo. Un ¡gracias! para todos los docentes del departamento de Matemáticas por su valiosas contribuciones al desarrollo intelectual y un gran abrazo para nuestros compañeros de carrera. Desearía que dos personas muy importantes para mí estuvieran presentes físicamente para ver parte de nuestro sueño cumplido, aunque sé que me acompañan en el corazón: Mi querida abuela Elba Vallejo de Ibarra quien hizo de mí lo que soy en estos momentos, quien con su amor, ternura y un poco de rectitud me enseño el valor de la humildad y a ser grandes soñadores, sé que desde lo alto esta presente guiando mi camino.¨Jhon Freddy Ruano¨

Resumen

El desarrollo del siguiente trabajo consiste en obtener ciertas condiciones para las funciones involucradas en la ecuación

$$u_t = u_{xx} + a(x,t)u_x$$

de modo que se encuentre la forma de la solución $u(x,t)$, para ello, un concepto teórico importante en la consecución del mismo es la Transformada de Fourier, la cual por medio de un proceso formal se obtiene su definición, se demuestran o enuncian sus propiedades, una de las cuales es la propiedad de convolución, de la que se desprende la conocida función de Green, útil para el desarrollo y posterior solución de problemas de valor inicial relacionados con la ecuación del calor; otro momento importante se presenta en la aplicación de la Transformada de Fourier en la solución de la ecuación del calor, por ultimo con las herramientas presentadas en los capítulos 1 y 2 se obtiene como resultado un teorema en el cual se presentan las condiciones que deben cumplir las funciones presentes en la ecuación anterior y del cual se realiza su demostración para así obtener la solución de la ecuación antes mencionada.

Abstract

In this work we obtain some conditions for the functions involved in the equation:

$$u_t = u_{xx} + a(x,t)u_x$$

The treatment of this equation is developed by means of the Fourier transform, a method for which we present definitions and properties with emphasis in the convolution property that is related to the Green function method. All this formalism is useful in the analysis and solution of PVI related with the heat equation. By using the mathematical techniques presented in chapters 1 and 2, we obtain a theorem that establishes the conditions that satisfy the functions involved in the equation presented before. Finally, we present the proof of this theorem and, in this way, solving the problem proposed.

Contenido

Introducción

Joseph Fourier (1768-1830)

El Análisis de Fourier, que es el estudio de las series, de las integrales y de la Transformada de Fourier; se llama así en honor a Joseph Fourier, un matemático francés que vivió durante la época napoleónica.
Aunque Fourier ha sido justamente reconocido al darle su nombre a esta importante rama del análisis, muchos de sus contemporáneos y predecesores inmediatos contribuyeron a sus logros. Es por ello que podemos encontrar a la Transformada en los primeros escritos de Cauchy y Laplace, a partir de 1782.

La introducción de las series de Fourier, de las integrales de Fourier y de las transformadas de Fourier han representado uno de los mayores avances en la historia de la aplicación de las matemáticas a la física y a la ingeniería, puesto que son, probablemente, las herramientas más importantes para la resolución de problemas con condiciones iniciales y problemas de contorno.

Por otra parte, cabe destacar la aplicabilidad de la Transformada de Fourier en la solución de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales, método bajo el cual es importante el estudio de la Transformada de Fourier, su inversa y sus diferentes propiedades.

En este sentido el trabajo se desarrollará en tres capítulos. En el primer capítulo se describen una serie de definiciones y teoremas que constituyen una base sólida para entender qué elementos definen la Transformada de Fourier, donde su base fundamental es el teorema de la Integral de Fourier. Además, se mostrará las condiciones bajo las cuales es posible su aplicación a una función dada, cómo esta determinada su inversa y cuales son sus propiedades fundamentales; además de ello, se destaca de manera especial el teorema de convolución y la función de Green pues son conceptos que están muy relacionados. Su importancia se verá en el desarrollo del capitulo 3. En el segundo capítulo se muestra, un análisis de las Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales de tipo parabólico, con el fin de estudiar su definición y sus características, luego determinar la aplicación que tiene la Transformada de Fourier en las mismas, para ello se mostrará la solución de una ecuación muy conocida dentro de la historia del análisis de Fourier como lo es la ecuación del calor; el desarrollo del los dos capítulos corresponden al cumplimiento de los objetivos específicos. Por último en el tercer capítulo se estudiará la Transformada de Fourier como herramienta en la solución de la Ecuación Diferencial Parcial Lineal de tipo parabólico de la forma:

$$u_t = ku_{xx} + a(x,t)u_x \tag{1}$$

Para llegar a esto, se consideró la solución de ecuaciones semejantes a la anterior, en un proceso de dificultad gradual y donde finalmente se analizará las condiciones que debe cumplir cada una de las funciones que conforman dicha ecuación para su solución y la intervención de manera decisiva para la consecución de este objetivo del principio de Duhamel, todo aquello presentado en un teorema que es la fase final y que corresponde al objetivo general de este trabajo. En cuanto a la realización del mismo se puede apreciar los siguientes aspectos en todo su desarrollo:

- Se hizo una delimitación propicia y adecuada de las temáticas que confluyen en la construcción y consecución de este trabajo.

- Todo su desarrollo se hizo de una manera sencilla facilitando su comprensión pues es matemáticamente coherente y asequible a todo lector que tenga una formación matemática a nivel universitario.

- A pesar de que la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales lineales esta resuelta casi en su totalidad existen ámbitos en esta donde se puede trabajar siendo esta labor significativa para la construcción y fortaleza de los conceptos en esta teoría, es así como al vincular dos grandes conceptos, como lo son las Ecuaciones Diferenciales Parciales lineales de segundo orden de tipo parabólico y la Transformada de Fourier, este ultimo propio de la teoría del análisis de Fourier, resulta un teorema relacionado con la forma que tiene la solución de la ecuación (1) el cual no aparece en los libros de texto universitario a nivel de pregrado, y que es una construcción producto de la riqueza conceptual adquirida al estudiar estas teorías.

- Uno de los aspectos mas relevantes en la presentación de este trabajo además del resultado en cuestión, se da en la forma como se construyo con un elegante y minucioso proceso formal el concepto de la Transformada de Fourier, difícil de encontrar en textos de formación universitaria, comprendiendo este desde la estructura del producto hermitiano, pasando por el concepto de serie de Fourier, el teorema de la integral que lleva el mismo nombre, la formula de inversión hasta la definición de Transformada de Fourier.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se define el espacio vectorial donde existirá la Transformada de Fourier además se hace un recorrido formal desde la representación de una función en su respectiva serie de Fourier pasando por la integral de Fourier hasta la transformada del mismo nombre y su inversa. Todo lo anterior basado en definiciones y teoremas que se muestran a continuación, siendo menester citar que los siguientes conceptos y definiciones se pueden consultar en [1], [6], [8] y [11].

Abreviaturas y Notación

- EDP: Ecuaciones diferenciales parciales
- EDO: Ecuaciones diferenciales ordinarias
- EDPL: Ecuación Diferencial Parcial Lineal
- PVI: Problema de valor inicial
- $F[f(x)]$ Transformada de Fourier de la función $f(x)$
- $F[f](x) = F(\lambda)$ Transformada de Fourier de la función $f(x)$.

1.1. Producto Hermitiano

Definición 1. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Un producto $\langle , \rangle$ ¨hermitiano¨ sobre $\mathbb{V}$ es una función*

$$\langle , \rangle : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$(u,v) \longrightarrow \langle u,v\rangle$$

que satisface las siguientes condiciones:

(H_1) $\langle u,v\rangle = \overline{\langle v,u\rangle}$ *para todo* $u, v \in \mathbb{V}$.

(H_2) *si* u, v, w *estan en* $\mathbb{V}$, $\langle u, v+w\rangle = \langle u,v\rangle + \langle u,w\rangle$.

(H_3) *si* α *esta en* $\mathbb{C}$, $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$.

(H_4) *para todo* $u \in \mathbb{V}$, $\langle u,u\rangle \geq 0$.

El producto hermitiano no garantiza que si $\langle f,f\rangle = 0$ entonces $f = 0$. Un ejemplo para ilustrar la anterior afirmación es:
Sea el espacio vectorial

$$\mathbb{D} = \{f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tal que} f(b) = t; \text{ para algún } t \in \mathbb{R}\}$$

con el producto hermitiano definido así:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(\xi)\overline{g(\xi)}d\xi$$

$$f(t) = \begin{cases} 2, & \text{si t=a ;} \\ 0, & \text{si } a < t \leq b. \end{cases}$$

entonces

$$|f(t)|^2 = \begin{cases} 4, & \text{si t=a;} \\ 0, & \text{si } a < t \leq b. \end{cases}$$

y

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b |f(t)|^2 dt = 0$$

Esta situación es la que lo distingue del producto escalar.

1.2. Norma

Definición 2. *Sea* $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial, la función que asigna a cada elemento* f *de* $\mathbb{V}$ *el número* $\|f\| \in \mathbb{R}$ *tal que:*

a) $\|f\| \geq 0$ *y* $\|f\| = 0$ *si y solo si* $f = 0$.

b) $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ *para todo* $\lambda \in \mathbb{C}$ *y todo* $f \in \mathbb{V}$

c) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ *para todo* $f, g \in \mathbb{V}$ *(desigualdad triangular)*

se llama una "norma"sobre $\mathbb{V}$.

1.3. Longitud

Definición 3. *Sea* $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial en el cual se tiene definido un producto hermitiano* $\langle,\rangle$, *si* $f \in \mathbb{V}$ *se define la longitud de* f *como:*

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$$

Teorema 1. *Sea* $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial con producto hermitiano* $\langle,\rangle$, *entonces* $\forall u, \forall v \in \mathbb{V}$

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|\,.$$

Demostración. Si v es cero la desigualdad es trivial. Supongamos entonces que $v \neq 0$.

$$0 \leq \langle u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v, u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\rangle$$

$$\leq \left\langle u, u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle - \left\langle \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v, u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle \qquad \text{por} H_2$$

$$\leq \left\langle u, u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\left\langle v, u - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle \qquad \text{por} H_3$$

$$= \langle u,u\rangle - \left\langle u, \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\left(\langle v,u\rangle - \left\langle v, \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\rangle\right) \qquad \text{por} H_2$$

$$= \langle u,u\rangle - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\|v\|^2}\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\langle v,u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\|v\|^2}\langle v,v\rangle \qquad \text{por} H_1$$

$$= \|u\|^2 - \frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\|v\|^2}\langle u,v\rangle - \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\langle v,u\rangle + \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}\frac{\overline{\langle u,v\rangle}}{\|v\|^2}\|v\|^2 \qquad \text{por definición de norma}$$

$$= \|u\|^2 - \frac{|\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2} \qquad \text{porque} \qquad \overline{\langle u,v\rangle} - \langle u,v\rangle = 0$$

$$0 \leq \frac{\|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u,v\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

$$0 \leq \|u\|^2\|v\|^2 - |\langle u,v\rangle|^2$$

esto implica que

$$|\langle u,v\rangle|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

de donde se obtiene la desigualdad deseada. La desigualdad considerada en el teorema anterior se llama DESIGUALDAD DE CAUCHY SCHWARTZ. □

Definición 4. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto Hermitiano. Dos vectores u,v de $\mathbb{V}$ se dicen ortogonales si $\langle u,u\rangle > 0$, $\langle v,v\rangle > 0$ y $\langle u,v\rangle = 0$.*

Definición 5. *Un conjunto $\mathfrak{B} \subset \mathbb{V}$ es ortogonal si sus elementos son ortogonales dos a dos, es decir todo par de elementos distintos son ortogonales.*

Un ejemplo de la anterior definición se da continuación
El conjunto $\mathfrak{B}= \{e^{2\pi n i f_0 \xi} : a \leq \xi \leq b, f_0 = \frac{1}{T_0}, n \in \mathbb{Z}\}, T_0 = b-a,$
con el producto hermitiano definido como:

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(\xi)\overline{g(\xi)}d\xi$$

es ortogonal.

Demostración. Sean $f,g \in \mathfrak{B}$ entonces,

$$f = e^{2\pi n_1 i f_0 \xi},$$

$$g = e^{2\pi n_2 i f_0 \xi},$$

Por tanto

$$\langle f,f\rangle = \int_a^b e^{2\pi i f_0 \xi (n_1-n_1)}d\xi = \int_a^b d\xi = b-a > 0,$$

y de forma similar $\langle g,g\rangle > 0$
Ahora,

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b e^{2\pi i f_0 \xi (n_1-n_2)}d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)} e^{2\pi i f_0 \xi (n_1-n_2)}\Big|_a^b$$

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)}\left(e^{2\pi i f_0 b(n_1-n_2)} - e^{2\pi i f_0 a(n_1-n_2)}\right)$$

y puesto que $f_0 = \frac{1}{b-a}$ se tiene

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)}\left(e^{2\pi i(\frac{b}{b-a})(n_1-n_2)} - e^{2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)} \left(e^{2\pi i(\frac{b}{b-a})(n_1-n_2)} - \frac{1}{e^{-2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)} \left(\frac{e^{2\pi i(\frac{b}{b-a})(n_1-n_2)} e^{-2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)} - 1}{e^{-2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)} \left(\frac{e^{2\pi i(\frac{b-a}{b-a})(n_1-n_2)} - 1}{e^{-2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)} \left(\frac{e^{2\pi i(n_1-n_2)} - 1}{e^{-2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)}} \right)$$

Por formula de Euler se tiene que, $e^{2\pi i(n_1-n_2)} = cos2\pi(n_1-n_2) + isen2\pi(n_1-n_2)$ y puesto que $\pi(n_1-n_2) \in \mathbb{Z}$ entonces $sen2\pi(n_1-n_2) = 0$ y $cos2\pi(n_1-n_2) = 1$
concluyendo así que,

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi i f_0(n_1-n_2)} \frac{1-1}{e^{-2\pi i(\frac{a}{b-a})(n_1-n_2)}} = 0$$

Por lo que el conjunto $\mathfrak{B}$ es ortogonal. $\square$

1.4. Sistemas ortogonales y ortonormales

Definición 6. *Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial con producto hermitiano. Un subconjunto $E \subset \mathbb{V}$ es un sistema ortogonal si $\langle f, g \rangle = 0$ para todo par de elementos distintos f y $g \in E$. Si además $\langle f, f \rangle = 1$ para todo $f \in E$ el sistema es ortonormal.*

Definición 7. *Un conjunto numerable $\{u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...\}$ de un espacio vectorial $\mathbb{V}$ es linealmente independiente (L.I.) si para todo m, cada vez que*

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_m u_m = 0 \ \textit{entonces} \ \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_m = 0$$

y se llama una sucesión linealmente independiente.

1.5. Base Aproximada

Se dice que una sucesión que es L.I, es una base aproximada de $\mathbb{V}$ si para cada $f \in \mathbb{V}$ y cada $\varepsilon > 0$, existe una combinación lineal

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n,$$

Tal que

$$\|f - (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + ... + \alpha_n u_n)\| < \epsilon.$$

Teorema 2. *Si $u_1, u_2, \dots$ es una base aproximada ortogonal de $\mathbb{V}$ y $f \in \mathbb{V}$, entonces la serie $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots$ donde $\alpha_k = \frac{<f, u_k>}{<u_k, u_k>}$ converge a f.*

Demostración. Si $\mathfrak{B} = \{f_{n\epsilon\mathbb{Z}^+}\}$ es una base aproximada ortogonal de $\mathbb{V}$, entonces para todo $f \in \mathbb{V}$, existe α_n único, $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que

$$f = \Sigma\alpha_n f_n. \tag{1.1}$$

En efecto sea $f_m \in \mathfrak{B}$. Luego,

$$\langle f, f_m\rangle = \langle \Sigma\alpha_n f_n, f_m\rangle$$

$$\langle f, f_m\rangle = \Sigma\alpha_n \langle f_n, f_m\rangle$$

y puesto que $f_n, f_m \in \mathfrak{B}$, entonces para evitar el caso trivial donde $\langle f_n, f_m\rangle = 0$ se tiene que

$$= \Sigma\alpha_n \langle f_m, f_m\rangle$$

$$= \langle \Sigma\alpha_n f_m, f_m\rangle$$

como $\mathfrak{B}$ es una base aproximada, $f = \Sigma\alpha_n f_m$ se puede ver como

$$\|f - (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + ... + \alpha_n f_m)\| < \epsilon$$

por lo cual se puede asegurar que $n = m$, es decir

$$= \langle \Sigma\alpha_m f_m, f_m\rangle$$

$$= \Sigma\alpha_m \langle f_m, f_m\rangle$$

de donde, $\alpha_m = \frac{\langle f, f_m\rangle}{\langle f_m, f_m\rangle}$ *para* $m \in \mathbb{Z}^+$. ◻

Los α_m son llamados coeficientes de Fourier y (1.1) es la serie de Fourier de la función f .

1.6. De la Integral a la Transformada de Fourier

El punto de partida lo constituye la representación integral de Fourier y los coeficientes integrales de Fourier que se hallan a partir del producto hermitiano antes definido. En esta sección se mostrará la importancia de definir la Integral de Fourier como base fundamental, en lo que corresponde a la definición formal de la Transformada Exponencial de Fourier de esta manera:

Sea $\mathbb{V}_{\mathbb{L}}$ el espacio vectorial,

$$\mathbb{V}_{\mathbb{L}} = \{f : [-L, L] \to \mathbb{C}/f(\xi + L) = f(\xi), \int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi < \infty, L > 0\},$$

que tiene al conjunto

$$\mathfrak{B} = \{e^{2\pi i n f_0 \xi}, n \in \mathbb{Z}\}, \qquad f_0 = \frac{1}{2L}$$

con el producto hermitiano

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(\xi)\overline{g(\xi)}d\xi,$$

como base aproximada, de ahi que:

Sea $f(\xi) \in \mathbb{V}_{\mathbb{L}}$ y $g(\xi) = e^{2\pi i n f_0 \xi}$ es decir $g \in \mathfrak{B}$.

luego por definición del producto hermitiano se tiene:

$$\langle f, g\rangle = \int_{-L}^{L} f(\xi)\overline{g(\xi)}d\xi = \int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-2\pi i n f_0 \xi}d\xi$$

ahora bien, utilizando parte de la demostración del teorema 1 se pueden calcular los coeficientes de Fourier de la siguiente manera:

$$\alpha_n = \frac{\langle f, g\rangle}{\langle g, g\rangle} = \frac{\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-2\pi i n f_0 \xi}d\xi}{\int_{-L}^{L} d\xi} = \frac{\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-2\pi i n f_0 \xi}d\xi}{\xi|_{-L}^{L}} =$$

$$= \frac{\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-2\pi i n f_0 \xi}d\xi}{2L} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)e^{-2\pi i n f_0 \xi}d\xi,$$

luego por conveniencia sea $f_0 = \frac{1}{2L}$, reemplazando en la ultima expresión se tiene:

$$= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\left(\cos(\frac{n\pi\xi}{L}) - i\,\mathrm{sen}(\frac{n\pi\xi}{L})\right)d\xi,$$

obteniendo así los coeficientes de Fourier a_n y b_n

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\left(\cos(\frac{n\pi\xi}{L})\right)d\xi \tag{1.2}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\left(\text{sen}(\frac{n\pi\xi}{L})\right)d\xi. \tag{1.3}$$

dado que el objetivo es llegar a la Transformada de Fourier, entonces es necesario tener en cuenta la convergencia de la Serie de Fourier. Por ende, se debe establecer hacia donde converge, para ello se tiene los siguientes hechos o definiciones, siendo el primero de estos

1.6.1. La convergencia de la Serie de Fourier

Definición 8. *Una función $f(x)$ definida en un intervalo I se dice suave a trozos si dicho intervalo admite una partición en un número finito de subintervalos I_j, de manera que:*

a) Tanto $f(x)$ como su derivada $f'(x)$ sean ambas funciones continuas en cada uno de estos subintervalos abiertos.

b) Las discontinuidades de $f(x)$ consisten exclusivamente en discontinuidades de salto finito necesariamente, localizadas entre los extremos de estos subintervalos.

y a continuación se presenta un teorema el cual se enuncia de acuerdo a la definición 9.

1.6.2. Teorema de Dirichlet

Teorema 3. *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función suave a trozos (I es un intervalo de cualquier tipo de extremos) entonces, la serie de Fourier de $f(x)$ converge:*

a) A $f(x)$, en los puntos en los que $f(x)$ es continua.

b) A $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ en los puntos x en los que $f(x)$ presenta una discontinuidad de salto finito. Donde $f(x+)$ y $f(x-)$ son los limites por la derecha e izquierda respectivamente de cada punto x.

*Nota:*La demostración del anterior teorema se puede consultar en [11].
Es decir, si es $f(x)$ una función suave a trozos para $-\infty < x < \infty$, para cada valor de L podemos representar $f(x)$ en el intervalo $-L < x < L$ Por su serie de Fourier.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.4}$$

donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier mostrados en (1.2) y (1.3) y donde $f(x)$ es discontinua se tiene que

$$f(x+) + f(x-) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{1.5}$$

Con base en los anteriores conceptos, se puede definir, la Transformada de Fourier, para ello se tomará en cuenta la fórmula dada en (1.4), de este modo, se comienza por definir a_0 la cual se presenta de la forma

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi \tag{1.6}$$

ahora, reemplazando las expresiones (1.2),(1.3) y (1.6) en la serie de Fourier de f dada en (1.4), se tiene

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)cos\frac{n\pi\xi}{L}cos\frac{n\pi x}{L}d\xi\right.$$

$$\left.+\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi\xi}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L}d\xi\right)$$

Agrupando términos tenemos:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)(cos\frac{n\pi\xi}{L}cos\frac{n\pi x}{L}\right.$$

$$\left.+\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi\xi}{L}\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi x}{L})\right)d\xi$$

Así por diferencias y sumas de senos y cosenos, se obtiene:

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\left[\cos(\frac{n\pi\xi}{L} - \frac{n\pi x}{L})\right]d\xi$$

$$f(x) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}(x-\xi)d\xi \tag{1.7}$$

De este modo se puede entender que la función f tiene representación mediante serie de Fourier en el intervalo $[-L, L]$, por lo tanto para una mayor aproximación a la definición de la Transformada de Fourier como tal, se toma limite a la expresión (1.7) cuando $L \to \infty$, entendiéndose que si (1.6) está acotada, entonces

$$\lim_{L\to\infty}\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(\xi)d\xi = 0,$$

Y esto es cierto si f es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|d\xi < \infty$$

Supongamos por conveniencia que esto se cumple. De esta manera (1.7) se transforma como sigue.

$$f(x) = \lim_{L\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\frac{n\pi}{L}(x-\xi)d\xi,$$

Llamando a $\lambda_n = \frac{n\pi}{L}$, luego $\Delta\lambda = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{L}$ y sea

$$I(\lambda; L) = \int_{-L}^{L} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi,$$

Así $(1,7)$ puede escribirse como:

$$f(x) = \lim_{L\to\infty}\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} I(\lambda; L)\Delta\lambda$$

Ahora $\Delta\lambda \to 0$ cuando $L \to \infty$ y la sumatoria de esta última ecuación se asemeja a la sumatoria que aparece en la definición de integral. Sin embargo, al llegar a esta conclusión se asumió que $\Delta\lambda \to 0$ independientemente de L, lo cual no es así, además se ignora el efecto de que esa integral sobre un intervalo está definida como valor principal y no directamente como el limite de una suma, por lo tanto se requiere tener en cuenta estos hechos y para ello la función en cuestión debe sujeta a ciertas condiciones. Todas las anteriores consideraciones se presentan en el siguiente teorema el cual es fundamental para la comprensión de la Transformada de Fourier, siendo necesario para la prueba de este ultimo un procedimiento propio de la variable compleja, posteriormente se definirá la Transformada de Fourier y su inversa y finalmente se presentan la prueba de un lema Riemman extendido y un corolario los cuales permiten la prueba del teorema en cuestión. Puesto que es importante la prueba del lema de Riemman extendido la cual se presentará más adelante, esta utilizará la aplicación de la formula integral de Cauchy presente de la siguiente manera:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{senx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$$

Demostración. Primero se va a reemplazar $senz$ por $\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ y tomar la parte imaginaria de la integral que resulta. Sin embargo, $\frac{e^{ix}}{x}$ es singular en $z = 0$. Pero $\frac{e^{ix}}{x}$ también es analítica para $z = 0$, y se puede utilizar este hecho como se sigue: Se toma el contorno que está formado por el semicírculo superior de radio R y el semicírculo pequeño de radio ϵ cerca del origen como se puede apreciar en la siguiente gráfica

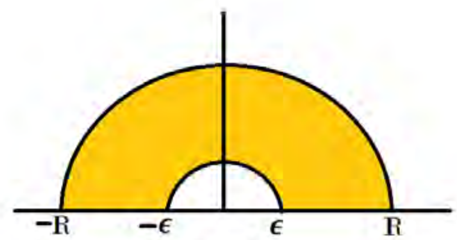

figura 1

Fuente: De esta investigación.

Entonces $\oint e^{iz}\frac{dz}{z} = 0$, puesto que el integrando es analítico dentro y sobre el contorno. Si restringimos el integrando al contorno, se obtiene:

$$\int_{-R}^{-\epsilon} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{\pi}^{0} e^{i\epsilon e^{i\theta}} id\theta + \int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x}dx + \int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} id\theta = 0$$

La primera y la tercera de las integrales se combinan, dando

$$\int_{\epsilon}^{R} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}dx = 2i\int_{\epsilon}^{R} \frac{senx}{x}dx$$

Se puede evidenciar el resultado si se hace $\epsilon \to 0$ y $R \to 0$. Entonces

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\pi}^{0} e^{i\epsilon e^{i\theta}} id\theta = \int_{\pi}^{0} id\theta = -i\pi$$

y con esto,

$$|B| = |\int_{0}^{\pi} e^{iRe^{i\theta}} id\theta| \leq \int_{0}^{\pi} e^{-Rsen\theta} d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rsen\theta} d\theta$$

y sobre $(0, \frac{\pi}{2})$, $\frac{sen\theta}{\theta}$ decrece uniformemente, de manera que

$$\frac{sen\theta}{\theta} \geq \frac{sen\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

$$sen\theta > \frac{2\theta}{\pi} \qquad \text{sobre} \qquad \left(0, \frac{2}{\pi}\right)$$

$$e^{-Rsen\theta} \leq e^{\frac{-2R\theta}{\pi}} \qquad 0 \leq \theta \leq \frac{2}{\pi}$$

De donde,

$$|B| \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rsen\theta} d\theta \leq 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{-2\theta R}{\pi}} d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{2R}[1 - e^{-R}] \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad R \to \infty$$

Finalmente,

$$2i\int_0^{\infty} \frac{senx}{x} dx = i\pi$$

$$\int_0^{\infty} \frac{senx}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

□

A continuación se cita la Transformada de Fourier y su inversa para efectos de la prueba del teorema de la integral de Fourier y que posteriormente se definirá con mayor formalidad.

Definición 9. *Sea f una función que cumpla con:*

a) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$ *es decir que $f(\xi)$ sea absolutamente integrable en $\mathbb{R}$*

b) *$f(\xi)$ posea un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito.*

Se define la Transformada de Fourier de f por

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \tag{1.8}$$

y la Transformada inversa de Fourier dada por

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda \tag{1.9}$$

A continuación se establece básicamente un criterio para saber cuando una función es absolutamente integrable, debido al comportamiento de la función en cuestión y que se presenta de la siguiente forma

Lema 1. *Si f es absolutamente integrable entonces $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$.*

Demostración. como f es absolutamente integrable entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = A \qquad \text{para algún } A \in \mathbb{R}^{+}$$

y puesto que f es absolutamente integrable y derivando a ambos lados de la anterior desigualdad se tiene,

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \frac{d}{dx}A$$

$$\frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = 0$$

$$|f(x)|\big|_{-\infty}^{\infty} = 0$$

Por tanto $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$. □

El lema que se presenta a continuación es de de fundamental importancia puesto que por medio de este se asegura que para toda función absolutamente integrable, su transformada también tiene un comportamiento de decaimiento en el infinito presente en el lema anterior y que se da a continuación

Lema 2. ***De Riemman- Legesgue*** *Si f es absolutamente integrable entonces $F(\lambda) \to 0$ cuando $\lambda \to \infty$*

Para la prueba de este lema, es necesario utilizar el Lema anterior (lema 1) de la manera en que se muestra a continuación

Demostración. Sean f, f' absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ tal que f es de la clase C^1, f es acotada. Entonces podemos integrar por partes:

$$\int_{-R}^{R} f(x)e^{i\lambda x}dx = \int_{-R}^{R} f(x)\left(\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\right)' dx = f(x)\left(\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\right)\Bigg|_{-R}^{R} - \int_{-R}^{R} f'(x)\left(\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\right)dx$$

es decir,

$$f(R)\left(\frac{e^{i\lambda R}}{i\lambda}\right) - f(-R)\left(\frac{e^{-i\lambda R}}{i\lambda}\right) - \int_{-R}^{R} f'(x)\left(\frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\right)dx \tag{1.10}$$

Cuando $R \to +\infty$, se debe evidenciar que la primera expresión dada en (1.10) es cero puesto que $f(R) \to 0$ cuando $R \to \infty$y para la segunda expresión se observa un comportamiento exponencial el cual tiende a cero. Por lo tanto se tiene que

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = \frac{1}{-i\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x}dx$$

En consecuencia:

$$|F(\lambda)| = \left|\frac{1}{-i\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x}dx\right|$$

$$|F(\lambda)| = \left|\frac{i}{\lambda}\right|\left|\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x}dx\right| = \frac{1}{|\lambda|}\left|\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x}dx\right|$$

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda|}\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx$$

por lo que $F(\lambda) \to 0$ cuando $|\lambda| \to +\infty$ y donde era necesario que $f'(x)$ sea absolutamente integrable puesto que si no lo fuera, no tendría sentido la desigualdad presentada anteriormente es decir, $|F(\lambda)| \leq \infty$. □

Una consecuencia inmediata del anterior lema se presenta a seguidamente, pues es necesaria para la consecución de la prueba del Teorema de la integral de Fourier, debido a que es por medio del siguiente concepto en cuestión y a su uso constante que la prueba de la integral de fourier se hace mucho mas sencilla de entender.

Corolario 1. ***De Riemmman extendido***. *Si f es absolutamente integrable, entonces*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)sen\lambda x dx = 0$$

Demostración. La formula de inversion para la Transformada de Fourier afirma que es posible reconstruir la función f a partir de su transformada, siendo estas las expresiones presentadas en (1.8) y (1.9). Estas expresiones tienen sentido si f y F son absolutamente integrables. La cuestión es encontrar las hipótesis y el sentido sobre los cuales será valida dicha expresión. Debe tenerse en cuenta que la integral que aparece en la formula de inversion tiene que interpretarse siempre como un valor principal, es decir,

$$f(x_0) = \lim_{R\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(\lambda)e^{-ix_0\lambda}d\lambda \tag{1.11}$$

Llamando,

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R} F(\lambda)e^{-ix_0\lambda}d\lambda$$

a las integrales parciales que aparecen en dicha formula. Se va a probar que si f es derivable en el punto x_0 entonces la formula de inversión (1.9) es válida. Utilizando la definición de la transformada, podemos escribir

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx]e^{-ix_0\lambda}d\lambda$$

En esta integral podemos cambiar el orden de integración, hecho justificable puesto que la convergencia de la integral que define la Transformada de Fourier respecto al parámetro λ es uniforme, pues f es absolutamente integrable.

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[\int_{-R}^{R} e^{i\lambda(x-x_0)}d\lambda]dx$$

Donde la integral $\int_{-R}^{R} e^{i\lambda(x-x_0)}d\lambda$ se puede calcula así

$$\frac{e^{i\lambda(x-x_0)}}{i(x-x_0)}|_{-R}^{R} = \frac{e^{iR(x-x_0)} - e^{-iR(x-x_0)}}{i(x-x_0)}$$

$$= 2\frac{senR(x-x_0)}{x-x_0}$$

Así,

$$I(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{2\sin R(x-x_0)}{(x-x_0)}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{\sin R(x-x_0)}{(x-x_0)}dx$$

Y la función

$$D_R(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin Rx}{x}$$

que aparece en la formula se llama núcleo de Dirichelt, así el objetivo es probar que si f es derivable en x_0 entonces $I(R) \to f(x_0)$ cuando $R \to \infty$, de este modo por la aplicación de la expresión $\int_0^{\infty} \frac{senx}{x}dx = \frac{\pi}{2}$ presente en la página 23, se tiene que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{senRx}{x}dx = 1 \qquad \text{para todo } R > 0$$

Utilizando esta propiedad podemos escribir,

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\frac{senR(x-x_0)}{x-x_0}dx \tag{1.12}$$

y en consecuencia,

$$I(R) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(x_0)]\frac{senR(x-x_0)}{x-x_0}dx \tag{1.13}$$

De la prueba de la formula de inversion, el objetivo ahora es probar que la integral (1.13) tiende a 0 cuando $R \to \infty$ Para ello, haciendo el cambio de variable $h = x - x_0; dh = dx$ es posible reescribir (1.13) del siguiente modo

$$I(R) - f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x_0+h) - f(x_0)]\frac{senRh}{h}dx$$

También se puede separar la integral en los puntos que están cerca a x_0 y los que están lejos. Dado $M > 0$ de la siguiente forma

$$I(R)-f(x_0) = \frac{1}{\pi}\int_{|h|<M}[f(x_0+h)-f(x_0)]\frac{senRh}{h}dh+\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}[f(x_0+h)-f(x_0)]\frac{senRh}{h}dh$$

comenzando por la integral perteneciente al segundo término se tiene,

$$\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}[f(x_0+h)-f(x_0)]\frac{senRh}{h}dh = \frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}f(x_0+h)\frac{senRh}{h}dh - f(x_0)\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}\frac{senRh}{h}dh$$

Para la integral $\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}\frac{\sin Rh}{h}dh$ haciendo el cambio de variable $u = Rh; \frac{du}{R} = dh$ se tiene

$$\frac{1}{\pi}\int_{R|h|>RM}\frac{\sin u}{u}du = \frac{1}{\pi}\int_{|Rh|>RM}\frac{\sin u}{u}du = \frac{1}{\pi}\int_{|u|>RM}\frac{\sin u}{u}du$$

En consecuencia para esta integral, se utiliza la propiedad del núcleo de Dirichlet, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin Rx}{x}dx = \pi$$

Para concluir que,

$$\frac{1}{\pi}\int_{|u|>RM}\frac{senu}{u}du = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du - \frac{1}{\pi}\int_{-RM}^{RM}\frac{\sin u}{u}du$$

Así,

$$= 1 - \frac{1}{\pi}\int_{-RM}^{RM}\frac{\sin u}{u}du$$

Suponiendo para efecto de la prueba que $M \to \infty$ se tiene que $1 - \frac{1}{\pi}(\pi) = 0$, de manera uniforme para $R > 1$. Y para la integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}f(x_0+h)\frac{\sin Rh}{h}dh \leq \frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}|f(x_0+h)\frac{\sin Rh}{h}|dh$$

puesto que $|h| > M$, entonces,

$$\leq \frac{1}{\pi M}\int_{|h|>M}|f(x_0+h)|dh$$

y como $h = x - x_0$ se tiene que

$$= \frac{1}{\pi M}\int_{|h|>M}|f(x)|dx$$

por lo tanto f es absolutamente integrable. y puesto que se supuso anteriormente que $M \to \infty$, entonces,

$$\lim_{M\to\infty}\frac{1}{\pi M}\int_{|h|>M}|f(x)|dx = 0$$

De este modo,

$$\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}[f(x_0+h)-f(x_0)]\frac{senRh}{h}dx = 0$$

en consecuencia, dado $\epsilon > 0$ y eligiendo M suficientemente grande, se tiene

$$|\frac{1}{\pi}\int_{|h|>M}[f(x_0+h)-f(x_0)]\frac{senRh}{h}dh| < \epsilon \qquad \text{para} R > 1.$$

Una vez fijado el M, solo falta probar que

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|h|\leq M}[f(x_0+h)-f(x_0)]\frac{senRh}{h}dh\right| < \epsilon,$$

si R es suficientemente grande y para ello se utiliza el lema de Riemman- Lebesgue, es decir, afirmamos que si f es derivable en x_0, la función g definida por,

$$g(h) = \begin{cases} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, & \text{si } |h| \leq M \\ 0, & \text{si } |h| > M \end{cases}$$

es absolutamente integrable, es decir se debe probar que g es acotada.
En efecto, como f es derivable en x_0 entonces g será acotada en $|h| < \delta$ para todo δ suficientemente pequeño, notando que

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(h)|dh = \int_{\delta<|h|\leq M}|g(h)|dh + \int_{|h|<\delta}|g(h)|dh$$

Para la integral,

$$\int_{\delta<|h|\leq M}|g(h)|dh = \int_{-M}^{\delta}|g(h)|dh + \int_{\delta}^{M}|g(h)|dh$$

Y puesto que M es fijo, se tiene que $|g(h)|$ esta definida en los intervalos $[-M, -\delta]$ y $[-\delta, M]$ y como no existe ninguna indeterminación de la función f en la vecindad de x_0, entonces la integral anterior es finita.
Como se aprecia en la siguiente gráfica.

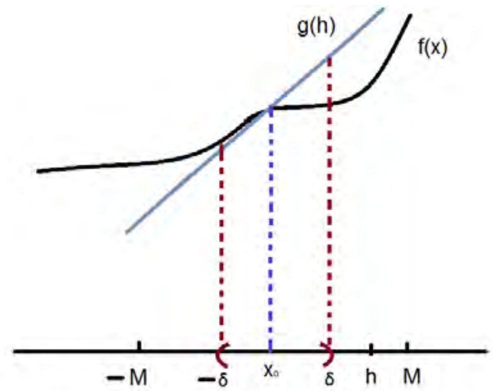

figura 2

Fuente: De esta investigación.
Luego, sean

$$\int_{\delta<|h|\leq M} |g(h)|dh < T \qquad \text{y} \int_{|h|<\delta} |g(h)|dh < S \qquad \text{para algún} T, S \in \mathbb{Z}^+,$$

por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(h)|dh < P \qquad P = T + S$$

es decir, g es absolutamente integrable; se concluye así que es posible aplicar el lema de Riemman- lebesgue a la función g , esto es,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |g(h)sen(Rh)|dx = \frac{1}{\pi}\int_{\delta<|h|\leq M} |g(h)sen(Rh)|dx + \frac{1}{\pi}\int_{|h|<\delta} |g(h)sen(Rh)|dx \leq \frac{1}{\pi}P$$

Se puede deducir que,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [f(x_0+h) - f(x_0)]\frac{senRh}{h}dx = 0$$

□

Finalmente después de toda esta linea de pensamiento formal, nos serviremos de los hechos presentados anteriormente para demostrar el teorema de la integral de Fourier.

Teorema 4. ***de la integral de Fourier***. *Si $f(x)$ esta definida para $-\infty < x < \infty$ y es suave a trozos en un intervalo finito y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, entonces,*

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi. \tag{1.14}$$

Demostración. Puesto que el objetivo es llegar a la igualdad presentada en (1.14), se considera el miembro derecho de la misma,

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi,$$

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{A} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi,$$

El intercambio de integración que se hará a continuación se sustenta en $f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)$ es absolutamente integrable y la desigualdad $|f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)| \leq |f(\xi)|$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{A} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\lambda d\xi,$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\int_0^{A}\cos\lambda(x-\xi)d\lambda d\xi,$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\frac{sen\lambda(x-\xi)}{x-\xi}]\Big|_0^A d\xi,$$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\frac{senA(x-\xi)}{x-\xi}]d\xi,$$

haciendo el cambio de variable $\xi = x+t$ obtenemos

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{senA(-t)}{-t}d\xi = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{senA(t)}{t}d\xi, \tag{1.15}$$

usando (1.12) y el hecho de que $\int_0^{\infty}\frac{senAt}{t}dt = \int_{-\infty}^{0}\frac{senAt}{t}dt = \frac{\pi}{2}$; $A > 0$ se observa que (1.14) es equivalente a

$$f(x-)+f(x+) = \lim_{A\to\infty}\frac{[f(x-)+f(x+)]}{\pi}\pi$$

$$= \lim_{A\to\infty}\frac{[f(x-)+f(x+)]}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{senAt}{t}dt$$

De esto,

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\frac{senAt}{t}dt = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x-)+f(x+)]\frac{senAt}{t}dt$$

de aquí que,

$$\lim_{A\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}[f(x+t)-f(x-)]\frac{senAt}{t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+t)-f(x+)]\frac{senAt}{t}dt\right]=0$$

Y la segunda integral dada anteriormente puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}[f(x+t)-f(x+)]\frac{senAt}{t}dt = I_1+I_2-I_3$$

Donde,

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_0^1[f(x+t)-f(x+)]\frac{senAt}{t}dt,$$

$$I_2=\frac{1}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{f(x+t)}{t}senAtdt,$$

$$I_3=\frac{f(x+)}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{senAt}{t}dt,$$

Se puede apreciar que

$$\int_0^{\infty}[f(x+t)-f(x+)]\frac{senAt}{t}dt$$

$$\int_0^{\infty} f(x+t)\frac{senAt}{t}dt-\int_0^{\infty} f(x+)\frac{senAt}{t}dt$$

$$\int_0^{\infty} f(x+t)\frac{senAt}{t}dt-\int_0^{1} f(x+)\frac{senAt}{t}dt-\int_1^{\infty} f(x+)\frac{senAt}{t}dt$$

$$\int_0^1[f(x+t)-f(x+)]\frac{senAt}{t}dt+\int_1^{\infty} f(x+t)\frac{senAt}{t}dt-\int_1^{\infty} f(x+)\frac{senAt}{t}dt$$

Si sustituimos $\tau = At$, se obtiene,

$$\int_1^{\infty}\frac{senAt}{t}dt=\int_A^{\infty}\frac{sen\tau}{\tau}d\tau,$$

y la integral de la izquierda converge a cero cuando $A\to\infty$, así $I_3\to 0$ cuando $A\to\infty$, además $g(t)=\frac{f(x+t)}{t}$ es absolutamente integrable en $1\le t<\infty$, y por el corolario de

Reimman Extendido $I_2 \to 0$ cuando $A \to \infty$, finalmente se debe mostrar que $I_1 \to 0$ cuando $A \to \infty$ que es similar a la prueba del corolario de Reimman para el abierto $(0, 1)$,

$$I_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^1 [f(x+t) - f(x+)]\frac{senAt}{t}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^1 f(x+t)\frac{senAt}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int_0^1 f(x+)\frac{senAt}{t}dt$$

Puesto que $f(x)$ es continua en [0,1] y $f'(x)$ es continua en ese mismo intervalo porque $f(x)$ es suave a trozos en intervalos finitos, entonces es inmediato que

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^1 f(x+t)\frac{senAt}{t}dt = 0 \qquad \text{y} \lim_{A\to\infty}\int_0^1 f(x)\frac{senAt}{t}dt = 0$$

En consecuencia,

$$\lim_{A\to\infty}(I_1 + I_2 - I_3) = 0.$$

Es decir,

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^\infty [f(x+t) - f(x+)\frac{senAt}{t}dt = 0$$

Finalmente solo falta probar que

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^0 [f(x+t) - f(x-)]\frac{senAt}{t}dt = 0$$

Para ello, se considera la primera integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^0 [f(x+t) - f(x+)]\frac{senAt}{t}dt = I_3 + I_2 - I_1$$

Donde,

$$I_1 = \frac{f(x-)}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{senAt}{t}dt,$$

$$I_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{-1}\frac{f(x+t)}{t}senAtdt,$$

$$I_3 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^0 [f(x+t) - f(x-)]\frac{senAt}{t}dt,$$

Si sustituimos $\tau = At$, se obtiene

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{senAt}{t}dt = \int_{-\infty}^{-A}\frac{sen\tau}{\tau}d\tau,$$

Y la integral de la derecha converge a cero cuando $A \to \infty$, de este modo $I_1 \to 0$ cuando $A \to \infty$ sin embargo, puesto que $g(t) = \frac{f(x+t)}{t}$ es absolutamente integrable en $-\infty < t \leq -1$, así por el corolario de Reimman $I_2 \to 0$ cuando $A \to \infty$, finalmente $I_1 \to 0$ cuando $A \to \infty$. Esto concluye la prueba del teorema de la integral de Fourier.

$\square$

Por otro lado, utilizando este resultado ya demostrado y de una manera algorítmica se puede llegar a la Transformada de Fourier, procedimiento el cual tiene su desarrollo como a continuación se muestra:

Cabe señalar que la Integral de Fourier converge en los puntos de discontinuidad de f al valor medio del salto, por esta razón la igualdad anterior puede ser falsa pero esto ocurre a lo más en finitos puntos ya que f es suave a trozos.

La integral de Fourier tiene el integrando en la variable λ como una función *Par*. Por las propiedades de las funciones pares se puede escribir equivalentemente

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi d\lambda$$

que es la igualdad (1.14) De ahora en adelante se escribirá $f(x)$ en lugar de $\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$ teniendo en cuenta lo anterior.

Por las propiedades de las funciones Impares es inmediato para la integral en la variable λ que,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\lambda(x-\xi)d\xi d\lambda = 0 \qquad (1.16)$$

En consecuencia multiplicando por $\frac{-i}{2\pi}$ a ambos lados de (1.16)

$$\frac{-i}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\operatorname{sen}\lambda(x-\xi)d\xi d\lambda = 0 \qquad (1.17)$$

Sumando cero a la expresión (1.14), reemplazando el cero por la fórmula $(1,17)$ y reagrupando las integrales se obtiene

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)[\cos\lambda(x-\xi) - i\operatorname{sen}\lambda(x-\xi)]d\xi d\lambda$$

Por otra parte por la identidad de Euler se sabe que:

$e^{i\lambda(x-\xi)} = \cos\lambda(x-\xi) + isen\lambda(x-\xi)$ con $\lambda(x-\xi) \in \mathbb{R}$.

Obteniendo así *la versión compleja de la La Integral De Fourier.*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda(x-\xi)}d\xi d\lambda$$

la cual se puede reescribir de la siguiente manera,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{-i\lambda x} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\lambda\xi} d\xi \right) d\lambda \tag{1.18}$$

La existencia de las integrales impropias en (1.18) permite definir la función en la variable λ es la *Transformada De Fourier*, expresión que se citó en (1.8) Nótese que introduciendo la función $F(\lambda)$ en (1.18) se *recupera* la función f pues se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$

que corresponde a la expresión (1.9) la cual es *Tranformación Inversa De Fourier*.
Si se recuerda la definición 10, la condición para que exista $F(\lambda)$ generalmente dada por:

a) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$ es decir que $f(\xi)$ sea absolutamente integrable en $\mathbb{R}$

b) $f(\xi)$ posea un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo finito.

Se puede inferir que la condición (a) es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de $F(\lambda)$. Observando esto con más detalle,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi) e^{i\lambda\xi}| d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)| d\xi < \infty$$

Lo cual implica que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi) e^{i\lambda\xi}| d\xi$$

Es absolutamente convergente, por lo tanto existe la Transformada.

Lo anterior muestra que la condición es suficiente; con el siguiente ejemplo se muestra que no es necesaria, para ilustrar este hecho se hallará la Transformada de Fourier de la función $sen\lambda_0 t$, la cual no es una función absolutamente integrable y para ello es necesario obtener las transformadas de Fourier de otras funciones, comenzando por una función destacada en el estudio de las EDO llamada delta de Dirac o función generalizada $\delta(t)$, la cual corresponde a un impulso unitario en $t = 0$, un impulso unitario en un punto arbitrario $t = t_0$ esta dado por $\delta(t - t_0)$ de los cual se deduce que

$$\int_{\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

y finalmente, mostrando que la Transformada de Fourier de la función $sen\lambda_0 t$ es la suma de dos funciones delta.

$$F(\delta(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{i\lambda t}dt = e^{i\lambda t}|_{t=0} = 1$$

y se tiene la identidad

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}d\lambda, \tag{1.19}$$

Así, aplicando la Transformada de Fourier inversa se tiene:

$$\delta(t) = F^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 1e^{-i\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}d\lambda$$

Pero como la integración ordinaria de $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}d\lambda$ no tiene significado en este caso pues necesariamente la Transformada Inversa de Fourier tiene que ser absolutamente integrable, hecho que entraría en contradicción con la integración ordinaria, por lo tanto esta es una función simbólica llamada función generalizada, de este modo se puede definir la Transformada de Fourier de una constante. Sea A una función constante, así:

$$F[A] = \int_{-\infty}^{\infty} Ae^{i\lambda t}dt = 2\pi A\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(-\lambda)t}dt$$

Ahora por la identidad (1.19) se tiene $2\pi A\delta(y)$ donde haciendo $x = t$ y $-\lambda = y$ se tiene

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}dx$$

Es decir $F[A] = 2\pi A\delta(-\lambda) = 2\pi A\delta(\lambda)$ porque $\delta(\lambda)$ es simétrica. Si $A = 1$ se tiene $F[1] = 2\pi\delta(\lambda)$

Un ejemplo relacionado a lo anterior y a una propiedad de la Transformada de Fourier es: Hallar la Transformada de Fourier de $e^{i\lambda_0 t}$.

Por la propiedad de desplazamiento en la frecuencia presente en la sección 1.7 se tiene que $F[f(t)e^{i\lambda_0 t}] = F(\lambda - \lambda_0)$ entonces,

$$F[e^{i\lambda_0 t}] = F[1e^{i\lambda_0 t}] = 2\pi\delta(\lambda - \lambda_0)$$

Finalmente el objetivo será hallar la Transformada de Fourier de la función $sen\lambda_0 t$

$$F[sen\lambda_0 t] = F[\frac{1}{2i}(e^{i\lambda_0 t} - e^{-i\lambda_0 t})] = \frac{1}{2i}[2\pi\delta(\lambda - \lambda_0) - 2\pi\delta(\lambda + \lambda_0)]$$

$$= -i\pi\delta(\lambda - \lambda_0) + i\pi\delta(\lambda + \lambda_0)$$

Para ilustrar el uso de la Transformada de Fourier en las funciones con condiciones descritas con anterioridad en los incisos (a) y (b) de la definición 10, se presenta el siguiente ejemplo.

Obtener la Transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$$

Solución:
Primero se analiza si la función $f(x)$ es absolutamente integrable y además sea suave a trozos o posea un número finito de discontinuidades. Es claro que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-a|x|}| dx < \infty$$

Ya que,

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-a|x|} \to 0$$

Y es suave a trozos en cada intervalo de la forma $[-p, p]$, con $p > 0$.
Dado que cumple con las condiciones se puede usar directamente la definición de Transformada de Fourier.

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{i\lambda x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{-a|x|} e^{i\lambda x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-a|x|} e^{i\lambda x} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{x(a+i\lambda)} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x(a-i\lambda x)} dx$$

$$= \frac{e^{x(a+i\lambda)}}{a+i\lambda}\bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{e^{-x(a-i\lambda)}}{a-i\lambda}\bigg|_{0}^{\infty}$$

Ahora bien dado que $e^{-ax} \to 0$ si $x \to \infty$

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{i\lambda x} dx = \frac{2a}{a^2 + \lambda^2}$$

1.7. Propiedades de la Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier al igual que otro tipo de transformaciones integrales presentan una serie de particularidades en cuanto a su uso, en este caso cuando la Transformada es aplicada a ciertos tipos de funciones con características muy definidas aparecen algunas propiedades las cuales son numerosas, sin embargo se destacarán a continuación aquellas que serán de utilidad en en la comprensión paulatina de conceptos los cuales converjan en la fase final de este trabajo.

Linealidad de la Transformada de Fourier

Si $F_1(\lambda) = F[f_1(x)]$ y $F_2(\lambda) = F[f_2(x)]$ y a_1, a_2 son constantes arbitrarias, entonces

$$F[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] = a_1 F_1(\lambda) + a_2 F_2(\lambda)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} F[a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] &= \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] e^{i\lambda x} dx \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{i\lambda x} dx + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{i\lambda x} dx \\ &= a_1 F_1(\lambda) + a_2 F_2(\lambda) \end{aligned}$$

$\square$

Escalonamiento de la Transformada de Fourier

Si a es una constante real entonces:

$$F(f(ax)) = \frac{1}{|a|} F(\frac{\lambda}{a})$$

Demostración. para $a > 0$ se tiene,

$$F(f(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax) e^{i\lambda x} dx.$$

Sea $ax = t, dx = \frac{dt}{a}$, entonces,

$$F(f(ax)) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\frac{\lambda}{a}t} dt.$$

Puesto que la variable se puede representar por cualquier símbolo, se tiene que

$$F(f(ax)) = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\frac{\lambda}{a}x}dx.$$

$$= \frac{1}{|a|}F(\frac{\lambda}{a})$$

Para $a < 0$,

$$F(f(ax)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{i\lambda x}dx.$$

haciendo el mismo cambio de variable del caso anterior, se tiene,

$$F(f(ax)) = \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} f(t)e^{i\frac{\lambda}{a}t}dt.$$

Puesto que la variable se puede representar por cualquier símbolo, se concluye que

$$F(f(ax)) = -\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\frac{\lambda}{a}x}dx.$$

$$= \frac{1}{|a|}F(\frac{\lambda}{a})$$

□

En cuanto a esta propiedad de la Transformada de Fourier, es importante saber que la función $f(ax)$ representa la función $f(x)$ contraída en la escala de tiempo por un factor a. Análogamente la función $F(\frac{\lambda}{a})$ representa la función F expandida en la escala de frecuencia por el mismo factor a.

Desplazamiento en el Tiempo de la Transformada de Fourier

Sea $F(\lambda) = F[f(x)]$ y $a \in \mathbb{R}$. La función $f_a(x) = f(x-a)$ se llama *Desplazamiento de la función* $f(x)$ Se verifica que:

$$F[f(x-a)] = e^{i\lambda a}F(\lambda)$$

Demostración. Sea $f(x)$ una función absolutamente integrable y $a \in \mathbb{R}$. Luego,

$$F[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{i\lambda x}dx$$

y efectuando el cambio de variable $\xi = x - a$ se tiene

$$F[f(x-a)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda(\xi+a)}d\xi = e^{i\lambda a}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi$$

$$F[f(x-a)] = e^{i\lambda a}F(\lambda)$$

$\square$

Fórmula de Desplazamiento en la Frecuencia de la Transformada de Fourier
Sea $F[f(x)]$, $f(x)$ absolutamente integrable y $a \in \mathbb{R}$. Entonces:

$$F[e^{iax}f(x)] = F(\lambda + a)$$

Demostración.

$$F[e^{iax}f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{i\lambda x}dx = F(\lambda + a)$$

$\square$

Transformada de una Derivada
En las aplicaciones de la Transformada de Fourier a la resolución de las ecuaciones diferenciales, la propiedad fundamental es que la Transformada de la derivada de una función corresponde a la multiplicación de la transformada de la función original por el factor $i\lambda$. En efecto se tiene:

Demostración. Sea una función $f = f(x)$ derivable. Si existe la Transformada de $f'(x)$ entonces se tiene:

$$F[f'(x)] = -i\lambda F(\lambda)$$

Condiciones suficientes que aseguran la existencia de esta Transformada son; por ejemplo: f continua en $\mathbb{R}$, $f(x) \to 0$ cuando $|x| \to \infty$ y f' absolutamente integrable en $(-\infty, \infty)$. A partir de estas condiciones es fácil ver que:

$$F[f'(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{i\lambda x}dx =$$

$$f(x)e^{i\lambda x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (i\lambda)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = 0 - i\lambda F(\lambda)$$

donde se ha integrado por partes y se usa el hecho de que $f(x) \to 0$ cuando$|x| \to \infty$. $\square$

Transformada de Derivadas de Orden Superior
Dos aplicaciones sucesivas de la fórmula de la propiedad anterior dan como consecuencia que:

$$F[f^{''}(x)] = -i\lambda F[f'(x)] = (-i\lambda)^2 F[f(x)]$$

En efecto se tiene: Sea una función $f = f(x)$ que tiene derivadas suaves absolutamente integrables hasta el orden m y todas éstas, igual que la función $f(x)$ tienden a cero, cuando $|x| \to +\infty$. Se tiene:

$$F[f^k(x)] = (-i\lambda)^k F[f(x)], \qquad k = 0, 1, ..., n$$

Demostración. Utilicemos inducción matemática para la demostración de esta propiedad. Para $k = 1$ se cumple como se vió en la propiedad 6. Supongamos que se cumple para $n = k - 1$

$$\begin{aligned} F[f^k(x)] &= (-i\lambda)F[f^{k-1}(x)] = (-i\lambda)(-i\lambda)^{k-1}F[f(x)] \\ &= (-i\lambda)^k F[f(x)] \end{aligned}$$

□

Teorema de Convolución

Uno de los teoremas utilizados al momento de resolver un EDPL de segundo orden del tipo parabólico por medio de la Transformada de Fourier es el *teorema de convolución*
En muchos problemas de representación integral de la solución, esta no puede ser evaluada, pero puede transformarse en otras representaciones mas sencillas de resolver, esta situación surge cuando $U(\lambda, t)$ es producto de dos funciones de λ cada una de las cuales es la Transformada de Fourier de una función conocida. La pregunta que tiene como respuesta al Teorema de Convolución es la siguiente:
Si $f(x)$, $g(x)$ son funciones conocidas con transformadas de Fourier $F(\lambda)$,$G(\lambda)$ ¿cual es la función $h(x)$ la cual tiene transformada de Fourier $H(\lambda) = F(\lambda)G(\lambda)$?
La respuesta, se encuentra en:

Teorema 5. *Sean $f(x), g(x), h(x)$ funciones suaves a trozos y absolutamente integrables en $\mathbb{R}$ si:*

$$H(\lambda) = F(\lambda)G(\lambda)$$

entonces,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x - \xi)d\xi$$

la función $h(x)$ definida anteriormente es la convolución de $f(x)$ y $g(x)$, se escribe $h = f{*}g$

Por otro lado, si en lugar de ξ se introduce la variable de integración t en la expresión $\xi = x - t$ obtenemos:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)f(x - t)dt$$

Es decir, la *convolución* es conmutativa.

Demostración. Para ello se utilizará la Transformada Inversa de Fourier de $h(x)$ así:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)G(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

Sustituyendo $F(\lambda)$ por definición se obtiene:

$$h(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi\right)G(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

Ahora como $f(\xi)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ y $G(\lambda)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ podemos aplicar el teorema de Fubbini e intercambiar el orden de integración:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)e^{i\lambda(x-\xi)}d\lambda\right)d\xi$$

Donde,

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda.$$

$\square$

Se puede destacar que uno de los orígenes del siguiente concepto en mención se debe a la utilización constante del teorema de Convolución.

1.8. La función de Green

Dado un PVI con una EDPL genérica de variables (x,t), si la solución adquiere la expresión integral

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x-\xi,t)d\xi.$$

La función $G(x-\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4kt}}$ se llama función de Green asociada al PVI. Una característica de esta función es que $G(x-\xi,t) \in C^{\infty}$ con respecto a la variable espacial, este hecho será de mucha utilidad posteriormente. Ya que, la función de Green es una expresión constante muy utilizada en la resolución de diversos PVI asociados con la ecuación del calor no homogénea.

Además de ésta, otro concepto importante al momento de encontrar la solución de una EDP por medio de la Transformada de Fourier es la derivación bajo el signo de la integral, a continuación se presenta un teorema que explica qué condiciones deben cumplir una función y su derivada para que este hecho sea posible.

1.9. Derivación bajo el signo integral

Sea $H(y) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx$ donde,

(a) $h : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}$ es absolutamente integrable respecto de x para todo y.

(b) Existe $\frac{\partial h}{\partial y}$ en $R \times (a,b)$ y es absolutamente integrable sobre todo intervalo finito.

(c) Existe g absolutamente integrable tal que $\left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)\right| \leq |g(x)|$.

entonces,

c) H es derivable

d) $H'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)dx$

es decir

$$\frac{d}{dy}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)dx$$

Demostración. Sea $y_0 \in (a,b)$. El cociente incremental de H en y_0 se puede escribir como

$$\frac{H(y)-H(y_0)}{y-y_0} = \frac{1}{y-y_0}\int_{-\infty}^{\infty} h(x,y) - h(x,y_0)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(x,y)-h(x,y_0)}{y-y_0}dx$$

La idea es aplicar el resultado anterior. Sea $f(x,y) = \frac{h(x,y)-h(x,y_0)}{y-y_0}$.
con esto, la F de la proposición anterior resulta

$$F(y) = \frac{H(y)-H(y_0)}{y-y_0}$$

es decir, se debe probar que

$$\lim_{y\to y_0} F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)dx$$

Luego se debe mirar si f cumple las hipótesis:

- $f : \mathbb{R} \times (a,b) \to \mathbb{R}$ es integrable respecto de x para todo y porque h lo es
- $|f(x,y)| \leq |g(x)|$ para todo x, y con g absolutamente integrable, pues

  $$|f(x,y)| = \frac{1}{|y-y_0|}|h(x,y)-h(x,y_0)| = \left|\frac{h(x,y)-h(x,y_0)}{y-y_0}\right| = \left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,c_{y,x})\right| \leq |g(x)|$$

  donde $c_{y,x}$ es un número entre y_0 e y con lo cual: $(x,c_{y,x}) \in \mathbb{R}\times(a,b)$.

  $$\left|\frac{h(x,y)-h(x,y_0)}{y-y_0}\right| = \left|\frac{\partial h}{\partial y}(x,c_{y,x})\right|$$

- $$f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\frac{h(x,y)-h(x,y_0)}{y-y_0}=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)$$

para todo x. Si llamamos $\varphi(x)=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)$ resulta integrable sobre todo intervalo finito.

El resultado anterior nos garantiza entonces que,

a) $\varphi(x)=\frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)$ es absolutamente integrable.

b)
$$\frac{H(y)-H(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}F(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)dx$$

Por lo que podemos asegurar que H es derivable en y_0 y que su derivada es

$$H'(y_0)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial h}{\partial y}(x,y_0)dx$$

□

El teorema que a continuación se presenta, es fundamental en la resolución de PVI en los cuales se encuentra la EDP del calor no homogénea, en general se utilizará en la solución de las los PVI del capitulo 3.

Teorema 6. *Sean las funciones $f,a:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ donde $f(x,y)$ es una función acotada e integrable y $a(x,y)$ una función absolutamente integrable entonces $f(x,y)a(x,y)$ es absolutamente integrable.*

Demostración. Por hipótesis $f(x,y)$ es acotada, es decir $|f(x,y)|\leq A$ para algún $A\in\mathbb{R}^+$ y además $\int_{-\infty}^{\infty}|a(x,y)|dx<\infty$ Luego,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)a(x,y)|dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)||a(x,y)|dx\leq A\int_{-\infty}^{\infty}|a(x,y)|dx=A.C<\infty$$

Por lo tanto,
$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,y)a(x,y)|dx<\infty$$

□

Capítulo 2

Conceptos de Ecuaciones Diferenciales Parciales

En este capítulo se realiza una introducción a los conceptos elementales de EDP, entre los cuales están: la definición de una EDP, solución y orden de una EDP, cabe señalar, que las EDP son una extensión de las EDO, ya que en relación a las EDO se puede establecer que la variable de estado es finito-dimensional. Por ejemplo, el movimiento de una partícula en el espacio necesita de tres variables dependientes del tiempo y para describir su dinámica un sistema de tres ecuaciones diferenciales en la que la variable independiente es el tiempo. Por otra parte, si se centra en las EDP se encuentra que la variable de estado es infinito-dimensional, por ejemplo, la temperatura de un cuerpo sólido, en los que la temperatura en cada uno de los puntos de ese medio continuo constituye una variable o incognita del sistema.

Las EDP se clasifican en dos tipos principales: las lineales y no lineales, y la mayoría de problemas físicos son modelados por estas ultimas. Además su clasificación inclusive puede variar dependiendo del orden y sus variables.

El problema objeto de las EDP es el *estudio de soluciones* y por *solución* de una EDP se entiende una función u teniendo todas las derivadas parciales que ocurren en la EDP y que cuando se sustituye en la ecuación la reducen a una identidad en todas las variables. Las soluciones se pueden clasificar como en el tratamiento de las EDO en soluciones generales y soluciones particulares. Para la determinación de soluciones particulares se requiere de condiciones auxiliares las cuales constituyen las llamadas las condiciones iniciales y las condiciones de frontera en esta forma el problema de las EDP consiste en hallar las soluciones bajo las condiciones iniciales y de frontera, obteniendo así los problemas de frontera o problemas de valores iniciales que se restringen a tres situaciones: la existencia de soluciones, la unicidad de soluciones y la estabilidad de la solución. Para la determinación de una solución particular se usan las condiciones iniciales o de frontera que se pueden ser: las condiciones de Cauchy, de Dirichlet, de Neumman y de Robin; en cuanto a la primera se desean soluciones donde las funciones desconocidas y posiblemente sus derivadas u_t, donde $0 \leq t < \infty$ son predeterminadas en la frontera cuando $t = 0$. Este tipo de soluciones son catalogadas como condiciones iniciales. Para un mayor acercamiento al desarrollo trabajo este tendrá como consideraciones el estudio de las condiciones iniciales o de Cauchy para intervalos infinitos, además de la existencia y unicidad de la solución $u(x, t)$. Estos conceptos pueden consultarse en los textos referenciados por [4], [6], [7], [11] y [8].

2.1. Ecuaciones Diferenciales Parciales

Definición 10. *Una ecuación diferencial parcial de una función* $u(x_1, x_2, ...)$ *es una igualdad de la forma:*

$$F(x_1, x_2, ...u, u_{x_1}, u_{x_2}, ...u_{x_1 x_1}, u_{x_1 x_2}, ...) = 0 \tag{2.1}$$

donde u_{x_i} *representa la derivada parcial de* u *con respecto a la variable independiente* x_i*, así* F *es una función que depende de las variables independientes* $x_1, x_2, ...$ *y de una función(o variable dependiente) desconocida* u*, junto con un número finito de sus derivadas parciales.*

Una función $u(x_1, x_2, ...)$ es solución de (2,1), si en alguna región del espacio de sus variables independientes, la función y sus derivadas satisfacen la ecuación idénticamente en $x_1, x_2, ...$ Una EDP es de orden n, si las derivadas de mayor orden que ocurren en F son de orden n. Decimos que una EDP es lineal, si es lineal en la función desconocida y en cada una de sus derivadas. Una ecuación que no satisface esta condición se llama no lineal.

2.1.1. Ecuación Diferencial Parcial Lineal de segundo orden

Una EDPL de segundo orden es un operador lineal dado que tiene la siguiente forma:

$$Au = f$$

Donde A es el operador lineal, u y f son funciones que dependen de dos variables. Si $f = 0$ es una ecuación lineal homogénea de lo contrario se dice no homogénea, se puede evidenciar de este hecho se da de la siguiente manera

La expresión general de una EDPL de segundo orden en dos variables independientes sobre un conjunto Ω del plano es una igualdad que puede ser expresada de la siguiente forma

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + hu_x + ku_y + eu + f = 0 \tag{2.2}$$

Donde los coeficientes a, b, c, h, k, e, f: son funciones de dos variables x y y donde $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ sobre Ω.
De este modo, dados los operadores de derivación parcial $\frac{\partial}{\partial x}$,$\frac{\partial}{\partial y}$,..., estos sean reemplazados por D_1,D_2,... D_i donde $i = 1, 2, 3...$ es un operador lineal entonces la EDPL de segundo orden se puede escribir como:

$$A = aD_1^2 + bD_1D_2 + cD_2^2 + hD_1 + kD_2 + e$$

luego por un teorema básico de la teoría del Análisis Funcional se tiene que la suma de operadores lineales es lineal, entonces A es lineal.

Una propiedad importante al momento de resolver una EDPL se da a continuación

2.1.2. Principio de Superposición de Soluciones

Sean las funciones $f_1, f_2, ..., f_n$ y $c_1, c_2, ..., c_n$ constantes. Si A es un operador lineal, y si $u_1, u_2, ..., u_n$ son respectivamente soluciones de las ecuaciones $Au_1 = f_1, Au_2 = f_2, ..., Au_n = f_n$, entonces $u = c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n$ es una solución de la ecuación $Au = c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_nf_n$ así

$$\begin{aligned} Au = A(c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n) &= c_1Au_1 + c_2Au_2 + ... + c_nAu_n \\ &= c_1f_1 + c_2f_2 + ... + c_nf_n \end{aligned}$$

y se presentan de acuerdo a este principio dos particularidades:

- Si $u_1, u_2, ..., u_n$ son soluciones de una EDPL homogénea $Au = 0$, y si $c_1, c_2, ..., c_n$ son constantes, entonces $c_1u_1 + c_2u_2 + ... + c_nu_n$ es también una solución de la ecuación.

- Si u es una solución de $Av = f$ y v es una solución de $Av = 0$, entonces $w = u + v$ es una solución de $Aw = f$

2.1.3. EDPL de Segundo Orden de Tipo Parabólico

Una EDPL de segundo orden en dos variables independientes sobre un punto (x_i, y_i) de un conjunto Ω tiene la forma.

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + fu = G$$

donde $a, b, ..., G$ pueden depender de x y y pero no de u. Por tal razón de la naturaleza de las soluciones de la anterior ecuación, las EDP se clasifican frecuentemente como elíptica, parabólica e hiperbólica, según el valor del discriminante $b^2 - 4ac$, es decir:

- $b^2 - 4ac < 0$ EDP del tipo elíptica
- $b^2 - 4ac = 0$ EDP del tipo parabólica
- $b^2 - 4ac > 0$ EDP del tipo hiperbólica.

y es parabólica en dicho punto si cumple con la segunda condición y es parabólica en Ω si para todo punto del dominio se cumple esta condición.
Las EDP del tipo parabólico se obtienen al investigar fenómenos tales como la conductividad térmica, difusión de partículas, propagación del campo electromagnético en medios conductores, entre otros.
Una de las situaciones clásicas en las que intervienen EDP parabólicas, es en la teoría de la conducción del calor que habla sobre la temperatura en cada uno de los puntos de un medio continuo lo que constituye una variable o incognita del sistema el cual lo representa la EDP con condiciones iniciales. Por otra parte es homogénea cuando $G(x, y) = 0$, en el caso de que $G(x, y) \neq 0$ se dice no homogénea.
El trabajo se centrará en el estudio de las siguientes EDPL de segundo orden de tipo Parabólico del siguiente tipo:

$$u_t = ku_{xx} + a(x, t)u_x$$

$$u_t = ku_{xx} + q(x, t)$$

El problema típico es encontrar una solución de la ecuación diferencial, la cual satisfaga ciertas condiciones auxiliares, estas serán condiciones lineales, es decir, de la forma:

$$Bu = g$$

Donde B es un operador lineal y g es una función dada. Las condiciones auxiliares lineales pueden ser también homogéneas ($g = 0$) o no homogéneas ($g \neq 0$). Como ejemplo consideremos el siguiente PVI.

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & \text{si } |x| < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \text{si } |x| < \infty,\ t = 0 \end{cases}$$

La primera es la EDP y la segunda es la condición auxiliar o también llamada condición inicial. Generalmente, estos problemas unidimensionales en donde el dominio del espacio es no acotado, se llaman *problemas en dominios infinitos*; el PVI anterior describe la conducción de calor en una varilla infinita,el método de solución adecuado para este tipo de casos es la Transformada de Fourier.

2.2. La Transformada de Fourier y su aplicación a la Ecuación del Calor

La Transformada de Fourier es un medio muy importante para la solución de una EDP, y en el que se aplican sus diferentes propiedades para poder dar solución. Especialmente abarca una EDP de gran estudio dentro de la historia del análisis de Fourier como lo es: la Ecuación del Calor.

Por otra parte, hay que tener en cuenta en que consiste la ecuación del calor. Cuando se estudia el flujo de calor en cuerpos térmicamente conductores, se encuentra un tipo de problema completamente diferente, que conduce también a una ecuación en derivadas parciales. En el interior de un cuerpo en el que está fluyendo calor de una zona a otra, la temperatura varía en general de un punto a otro en todo instante, y también varía con el tiempo en cada punto. Así pues, la temperatura u es una función de las coordenadas espaciales x, y, z y del tiempo t, digamos $u = u(x, y, z, t)$. La forma precisa de esta función depende, claro está, de la forma del cuerpo, de las características térmicas del material, de la distribución inicial de temperatura y de las condiciones mantenidas sobre la superficie del cuerpo. Fourier analizó este problema en su clásico tratado de 1822, *Théorie Analytique* *de la Chaleur*. Utilizó principios físicos para probar que la temperatura u debe satisfacer *la ecuación del calor*

$$k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = u_t,$$

La cual se conoce con el nombre de ecuación del calor tridimensional. De acuerdo a lo anterior encontramos a la Transformada de Fourier frente al problema de valor inicial asociado a la ecuación del calor unidimensional dado por:

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx}, & \text{si } |x| < \infty,\ t > 0 \\ u \to 0, & \text{si } |x| \to \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \text{si } |x| < \infty,\ t = 0 \end{cases}$$

Donde $|x| < \infty$ denota el eje real. La constante $k > 0$ representa un coeficiente de difusión, $u(x,t)$ (la incógnita) es la concentración de una especie química y $f(x)$ (dato inicial) es la concentración de la sustancia presente inicialmente. La condición límite en el infinito ($u \to 0$ cuando $|x| \to +\infty$) se interpreta como una condición de decaimiento en el infinito, matemáticamente expuesto en el capitulo (1) bajo el nombre de lema.

Tenemos, por tanto, un proceso de difusión en un dominio infinito. La técnica adecuada para su tratamiento es la técnica de la Transformada de Fourier.

2.2.1. Solución al problema de la ecuación del calor

Considere el PVI presentado en la sección anterior Se requiere que $f(x)$ sea suave a trozos en un intervalo finito y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$. Ahora se supone que este problema tiene una solución $u(x,t)$ y que además es absolutamente integrable,

Entonces para cada $t > 0$, $u(x,t)$ es una función suave de x, y utilizando la Transformada de Fourier se tiene:

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda,t)e^{-i\lambda x}d\lambda,$$

$$U(\lambda,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{i\lambda x}dx$$

Derivando con respecto a t, asumiendo que la derivación se la realiza bajo el signo de la integral y aplicando la propiedad de linealidad, presente en la sección 1.7, se obtiene:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int_{-\infty}^{\infty} u_t(x,t)e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} ku_{xx}(x,t)e^{i\lambda x}dx$$

aplicando la propiedad para derivadas de orden superior de la Transformada de Fourier, expuesta en la sección 1.7, se tiene la siguiente EDO

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\lambda^2 kU \qquad t > 0 \tag{2.3}$$

y como $t \to 0$ en la EDO anterior tenemos por la condición inicial:

$$U(\lambda, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x}dx = F(\lambda)$$

resolviendo la EDO (2.3) se tiene:

$$U(\lambda, t) = Ce^{-\lambda^2 kt} \qquad t > 0, \tag{2.4}$$

donde C puede ser $C = F(\lambda)$,es decir:

$$U(\lambda, t) = F(\lambda)e^{-\lambda^2 kt} \tag{2.5}$$

y así la solución del PVI es:

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(\lambda, t)e^{i\lambda x}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda^2 kt}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$$

es posible ahora aplicar el teorema de convolución presente también en la sección 1.7, si encontramos una función $w(x, t)$ la cual tiene como Transformada de Fourier con respecto a x a:

$$W(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 kt}.$$

entonces podemos escribir la igualdad (2.5) como:

$$U(\lambda, t) = F(\lambda)W(\lambda, t),$$

y concluyendo por el teorema de convolución que:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)w(x - \xi, t)d\xi$$

donde,

$$w(x, t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W(\lambda, t)e^{-i\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}e^{-i\lambda x}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}(cos\lambda x + isen\lambda x)d\lambda$$

Separando la parte real de la imaginaria se observa que $e^{-\lambda^2 kt}$ es una función par con respecto a λ y $sen\lambda x$ es una función impar, tenemos que $e^{-\lambda^2 kt}sen\lambda x$ es un función impar de λ.

Por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} sen\lambda x d\lambda = 0$$

teniendo en cuenta que $e^{-\lambda^2 kt}cos\lambda x$ es una función par de λ

$$w(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}cos\lambda x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt}cos\lambda x d\lambda$$

y sea la variable $\lambda = \frac{z}{\sqrt{kt}} \leftrightarrow d\lambda = \frac{dz}{\sqrt{kt}}$ y se obtiene:

$$w(x,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{kt}}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}cos\frac{xz}{\sqrt{kt}}dz = \frac{1}{\pi\sqrt{kt}}I(\mu)$$

donde $\mu = \frac{x}{\sqrt{kt}}$ y

$$I(\mu) = \int_{0}^{\infty} e^{-z^2}cos\mu z dz$$

de esto,

$$\frac{dI}{d\mu} = \frac{d}{d\mu}\int_{0}^{\infty} e^{-z^2}cos\mu z dz = \int_{0}^{\infty} -ze^{-z^2}sen\mu z dz$$

e integrando por partes la integral de esta ultima expresión se tiene

$$= -\left[-\frac{e^{-z^2}}{2}sen\mu z\right]_{0}^{\infty} + \int_{0}^{\infty}\frac{e^{-z^2}}{2}\mu cos\mu z dz = \frac{-\mu}{2}I(\mu)$$

es decir,

$$\frac{dI}{d\mu} = \frac{-\mu}{2}I(\mu)$$

luego resolviendo este EDO se obtiene:

$$I(\mu) = Ce^{\frac{-\mu^2}{4}}$$

evaluando C cuando $\mu = 0$ y usando el valor conocido

$$I(0) = \int_{0}^{\infty} e^{z^2}dz = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{ entonces } c = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

así,

$$I(\mu) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{\frac{-\mu^2}{4}}$$

y

$$w(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{\frac{-z^2}{4kt}}$$

Para cada t fijo, esta función es suave y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, en consecuencia si se asume que $f(x)$ es suave a trozos y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$ entonces puede aplicarse el teorema de convolución para obtener

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4kt}} d\xi.$$

De este modo se se encuentra la función u. Es oportuno destacar que esta función es la solución clásica de este PVI con condición inicial de tipo Cauchy.

Hasta ahora se ha evidenciado el proceso a seguir para la ecuación del calor homogénea, con condición inicial no homogénea. Pero ¿que tratamiento tendrá el PVI que se compone de la ecuación del calor no homogénea con condición inicial homogénea ?. La respuesta al anterior planteamiento se encuentra en siguiente concepto.

2.3. El Principio de Duhamel

Es menester citar el siguiente lema para la demostración del teorema relacionado con el principio de Duhamel.

Lema 3. *Dada una función $g(t,s)$ tal que $g(t,s)$ y $g_t(t,s)$ son continuas, se cumple que*

$$\frac{d}{dt}(\int_0^t g(t;\tau)d\tau) = g(t,t) + \int_0^t g_t(t;\tau)d\tau$$

Demostración. Se define $G(r,y) = \int_0^y g(r,\tau)d\tau$ y se nota que,

$$\int_0^t g(t;\tau)d\tau = G(t,t).$$

Además,

$$G_r(r,y) = \int_0^y g_r(r;\tau)d\tau \qquad \text{y} \qquad G_y(r,y) = g(r,y)$$

Ahora como,

$$\frac{d}{dt}G(t,t) = G_r(t,t) + G_y(t,t) = G_r(t,y)|_{r=t;y=t} + G_y(t,y)|_{r=t;y=t} = \int_0^t g_t(t;\tau)d\tau + g(t,t).$$

□

EL principio que a continuación se presenta es un método general para la obtención de soluciones a las ecuaciones de EDPL no homogéneas relacionadas con la ecuación del calor, la esencia de este radica en la posibilidad de pasar de las soluciones de un PVI a las soluciones del problema no homogéneo.

Teorema 7. *Principio de Duhamel Sea $h(x,t)$ una función C^2 y para cada $\tau > 0$ consideremos el siguiente problema*

$$\begin{cases} w_t(x,t;\tau) = w_{xx}(x,t;\tau), & si\ |x| < \infty,\ t > \tau \\ u(x,t;\tau) = h(x,\tau), & si\ |x| < \infty \end{cases}$$

entonces la única solución de

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = h(x,t), & si\ |x| < \infty,\ 0 < t < T \\ u(x,0) = 0, & si\ |x| < \infty \end{cases}$$

está dada por la fórmula

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau$$

Demostración. como $u(x,0) = \int_0^0 w(0,0;0)d\tau = 0$. Donde,

$$u_t = \frac{\partial}{\partial t}(\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau)$$

$$= w(x,t;t) + \int_0^t w_t(x,t;\tau)d\tau \qquad \text{esto, por el lema anterior}$$

$$= h(x,t) + \int_0^t kw_{xx}(x,t;\tau)d\tau \qquad \text{por definición de} \qquad w(x,t;\tau)$$

$$= h(x,t) + k\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\int_0^t w(x,t;\tau)d\tau) \qquad \text{por derivación bajo el signo de la integral}$$

$$= h(x,t) + ku_{xx}(x,t).$$

Es decir,

$$u_t(x,t) - ku_{xx}(x,t) = h(x,t).$$

□

Su aplicación en la ecuación del calor no homogénea se da de la siguiente manera, por ejemplo hallar la solución de

$$\begin{cases} u_t - ku_{xx} = h(x,t), & \text{si } |x| < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = 0, & \text{si } |x| < \infty,\ t = 0 \end{cases}$$

Según este principio, la solución viene dada por

$$u(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau$$

donde $w(x,t;\tau)$ es la solución de

$$\begin{cases} w_t(x,t;\tau) = kw_{xx}(x,t;\tau), & \text{si } |x| < \infty,\ t > \tau \\ u(x,\tau;\tau) = h(x,\tau), & \text{si } |x| < \infty,\ t = \tau \end{cases} \tag{2.6}$$

Y siguiendo un proceso similar, a la presentación de la solución de la ecuación del calor homogénea citada en la anterior sección, se aplica el Teorema de convolución, obteniendo así

$$w(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y,\tau)\Phi(x-y,t-\tau)dy, \qquad |x| < \infty, t > \tau$$

Y donde la función Φ es la función de Green asociada al PVI presentado en (2.6),
Así las cosas, se tiene que,

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} h(y,\tau)\Phi(x-y,t-\tau)dyd\tau. \qquad |x| < \infty, t > 0$$

Capítulo 3

Solución de las EDPL de segundo orden de tipo parabólico.

En este capitulo se mostrará la importancia de las propiedades de la Transformada de Fourier en la solución de las EDPL de Segundo orden de Tipo Parabólico, cuyo fundamento es convertir una EDP en una EDO. Además, es necesario mostrar las condiciones que deben cumplir las funciones que conforman la EDPL, del tal forma que tenga sentido la aplicación de la Transformada de Fourier; es necesario resaltar que este capítulo se compone de tres secciones y en cada una de las cuales se presentan las ecuaciones del calor no homogéneas y también las formas de solución de las mismas, siendo estas soluciones diversas, es decir, en las ecuaciones presentadas en las secciones (3.1) (3.2) y (3.3) utilizan una forma distinta de solución en cada caso, siendo importante en la sección (3.3) la aplicación del Principio de Duhamel. A su vez la solución del PVI de la sección (3.3) pertenece a la fase final del trabajo y como resultado se presentan las condiciones que cumplen ciertas funciones presentes en este PVI, todas ellas consignadas en un teorema que permite con mayor claridad la manera de solución del mismo.

Para un mayor acercamiento al desarrollo del trabajo, este tendrá como consideraciones que la solución $u(x,t)$ es clásica y las condiciones presentes en los PVI de cada sección pertenecen a las condiciones iniciales o de Cauchy, además de que se asegura la existencia y unicidad de la solución $u(x,t)$ los cuales son factores determinantes al momento de tener una aproximación a la forma de la función $u(x,t)$.

3.1. Ecuación del calor no homogénea con termino $q(x,t)$

Considere el siguiente PVI con condición inicial de tipo Cauchy, donde es necesario que la función $q(x,t)$ sea absolutamente integrable y $f(x)$ sea suave a trozos y absolutamente integrable para efectos de su solución, entonces para

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + q(x,t), & \text{si } |x| < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & \text{si } |x| < \infty,\ t = 0 \end{cases}$$

Se aplica la Transformada de Fourier a ambos lados de la EDPL y se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{i\lambda x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} ku_{xx} e^{i\lambda x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x,t) e^{i\lambda x} dx$$

Luego por la propiedad de la derivada presente en la sección 1.7 se obtiene:

$$\frac{dU}{dt} = (-i\lambda)^2 kU + Q(\lambda, t)$$

Donde $Q(\lambda,t)$ es la Transformada de Fourier de la función $q(x,t)$. La expresión anterior representa una EDO lineal no homogénea

$$\frac{dU}{dt} + \lambda^2 kU = Q(\lambda, t) \tag{3.1}$$

cuya solución general se compone de la suma de las soluciones homogénea y no homogénea respectivamente.

Para la homogénea se tiene la solución,

$$U(\lambda,t) = ce^{-\int \lambda^2 k dt} = ce^{-\lambda^2 kt}, c \in \mathbb{R}$$

Para la ecuación no homogénea se aplica el método de la variación de las constantes:

$$U(\lambda,t) = c(t)e^{-\lambda^2 kt} \tag{3.2}$$

Ahora derivamos U con respecto a t

$$\frac{dU}{dt} = c'(t)e^{-\lambda^2 kt} - \lambda^2 kc(t)e^{-\lambda^2 kt} \tag{3.3}$$

Reemplazando (3.3) en (3.1), se obtiene,

$$c'(t)e^{-\lambda^2 kt} - \lambda^2 kc(t)e^{-\lambda^2 kt} + \lambda^2 kc(t)e^{-\lambda^2 kt} = Q(\lambda, t)$$

de donde,

$$c'(t) = Q(\lambda, t)e^{\lambda^2 kt}$$

Ahora se puede integrar a ambos lados de la igualdad como se sigue

$$\int_0^t c'(\tau)d\tau = \int_0^t Q(\lambda, t)e^{\lambda^2 kt}d\tau$$

así

$$c(\tau) - c(0) = \int_0^t Q(\lambda, t)e^{\lambda^2 kt}d\tau$$

$$c(\tau) = \int_0^t Q(\lambda, t)e^{\lambda^2 kt}d\tau + c(0)$$

Luego para determinar $c(0)$ necesitamos de la condición inicial

$$u(x, 0) = f(x)$$

igualdad la cual también esta presente con sus respectivas Transformadas de Fourier, de este modo

$$U(\lambda, 0) = F(\lambda)$$

Así tomando $t = 0$

$$U(\lambda, 0) = c(0) = F(\lambda)$$

Por lo tanto,

$$U(\lambda, t) = e^{-\lambda^2 kt}\int_0^t Q(\lambda, \tau)e^{\lambda^2 k\tau}d\tau + F(\lambda)e^{-\lambda^2 kt}$$

Agrupando términos

$$U(\lambda, t) = \int_0^t Q(\lambda, \tau)e^{-\lambda^2 k(t-\tau)}d\tau + F(\lambda)e^{-\lambda^2 kt}$$

A partir de la convolución que se encuentre en la sección 1.7 obtenemos la solución general $u(x, t)$ de la siguiente forma: Para el primer término del anterior expresión, se sabe que la función $Q(\lambda, t)$ es la Transformada de Fourier de $q(x, t)$ y que la función $e^{-\lambda^2 kt}$ tiene como Transformada de Fourier a la función $\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4kt}}$,proceso que tiene su fundamentación teórica en sección 2.2.1, por lo tanto la función $e^{-\lambda^2 k(t-\tau)}$ tiene como Transformada de

Fourier a $\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}}$; para el segundo término la única salvedad que se hace es que $F(\lambda)$ es la Transformada de Fourier de $f(x)$. Así las cosas aplicando convolución se tiene

$$u(x,t) = \int_0^t \left[\int_{-\infty}^{\infty} q(\xi,t)\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}}d\xi\right]d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4kt}}d\xi$$

3.2. Ecuación del calor no homogénea con termino au_x

Considérese el siguiente PVI de condición inicial de tipo Cauchy, donde a es una constante y u absolutamente integrable y $f(x)$ es suave a trozos y absolutamente integrable, entonces para

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + au_x, & \text{si } |x| < \infty,\ t > 0, a \in \mathbb{R} \\ u(x,0) = f(x), & \text{si } |x| < \infty,\ t = 0 \end{cases}$$

Se aplica la Transformada de Fourier a ambos lados de la EDPL y se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_t e^{i\lambda x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} ku_{xx}e^{i\lambda x}dx + \int_{-\infty}^{\infty} au_x e^{i\lambda x}dx$$

Luego por la propiedad de la derivada presente en la sección 1.7 se obtiene:

$$\frac{dU}{dt} = (-i\lambda)^2 kU + a(-i\lambda)U$$

La cual representa una EDP lineal homogénea

$$\frac{dU}{dt} + U(k\lambda^2 + ai\lambda) = 0$$

Cuya solución viene dada por

$$U(\lambda,t) = ae^{-\int(k\lambda^2+ai\lambda)dt}$$

Por otro lado por la condición inicial se tiene $a = F(\lambda)$, de esta manera

$$U(\lambda,t) = F(\lambda)e^{-(k\lambda^2+ai\lambda)t}$$

Seguidamente el objetivo es encontrar la Transformada Inversa de Fourier de las siguientes funciones, puesto que de este modo es factible aplicar el teorema de convolución que se encuentra en la sección 1.7

$$H(\lambda) = e^{i\lambda(-at)}F(\lambda) \text{ y } G(\lambda) = e^{-k\lambda^2 t}$$

Se puede observar que la función $G(\lambda)$ tiene su Transformada de Fourier, la cual ya es conocida; en cambio para la función $H(\lambda)$ su Transformada de Fourier no lo es, sin embargo es posible encontrarla al aplicar la propiedad de desplazamiento en la frecuencia o de traslación, presente en la sección 1.7, obteniendo,

$$F^{-1}[H(\lambda)] = F^{-1}[e^{i\lambda(-at)}F(\lambda)] = f(x+at)$$

Por otro lado

$$F^{-1}[G(\lambda)] = F^{-1}[e^{-k\lambda^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} e^{\frac{-x^2}{4kt}}$$

Por último aplicando convolución, la solución se da de la siguiente manera

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{\frac{-(x+at-\xi)^2}{4kt}} d\xi.$$

En las anteriores secciones se ha evidenciado la necesidad de establecer algunas particularidades a las funciones que conformaban los PVI anteriores, siguiendo con el mismo procedimiento para el PVI citado en la siguiente sección se induce a formular un resultado el cual es un Teorema que se presenta a continuación.

3.3. Ecuación del calor no homogénea con termino $a(x,t)u_x$

Teorema 8. *Sean las funciones $u, u_x, a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que u, u_x son absolutamente integrables, $u \in C^\infty$ y a, a_ξ acotadas e integrables. Si $f(x)$ es suave a trozos y absolutamente integrable, entonces el PVI*

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + a(x,t)u_x, & si\ |x| < \infty,\ t = 0,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & si\ |x| < \infty,\ t = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

tiene como solución a la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x-\xi,t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)u + a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)u]d\xi$$

Demostración. Puesto que $a(x,t)$ es una función acotada e integrable y como $u_x(x,t)$ es una función absolutamente integrable, entonces por teorema 6, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(x,t)u_x|\, dx < \infty,$$

y $a(x,t)u_x$ es una función suave a trozos porque $u \in C^{\infty}$ Ahora tenemos que resolver dos problemas los cuales se derivan de nuestro PVI (3.4), estos se presentan a continuación:

$$\begin{cases} v_t - kv_{xx} = 0, & |x| < \infty,\, t > 0 \\ v(x,0) = f(x), & |x| < \infty,\, t = 0 \end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases} w_t - kw_{xx} = a(x,t)w_x, & |x| < \infty,\, t > 0 \\ w(x,0) = 0, & |x| < \infty,\, t = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

La solución de ambos problemas determina la solución de (3.4); claramente basados en el principio de superposición,así $u = v + w$. El problema (3.5) tiene como solución a la solución de la ecuación del calor homogénea, pero para resolver el problema (3.6), se hace uso del principio de Duhamel y considerando el problema,

$$\begin{cases} w_t(x,t;\tau) = kw_{xx}(x,t;\tau), \\ w(x,t;\tau) = a(x,t)u_x, \{t = \tau\}, \end{cases} \tag{3.7}$$

y por la hipótesis del principio de Duhamel, para que este problema (3.7) tenga sentido necesariamente $a(x,t)u_x$ tiene que ser suave a trozos en un intervalo finito y absolutamente integrable en $\mathbb{R}$, es decir, que $a(x,t)u_x \in C^2$
Así la única solución de (3.7) esta dada por la expresión:

$$w(x,t;\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi,t)u_{\xi}(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi \tag{3.8}$$

Integrando (3.8) con respecto a τ, se encuentra que la solución del problema (3.6) es

$$w(x,t) = \int_0^t w(x,t;\tau)d\tau$$

de manera que la solución al problema (3.4) es:

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x-\xi,t)d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi,t)u_{\xi}(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi d\tau \tag{3.9}$$

En cuanto al primer integrando correspondiente a la segunda integral de (3.9), se puede evidenciar que la derivada está presente en la función u, sin embargo esta no es la forma adecuada de presentación, pues el objetivo es que la derivada pase bien sea a la función $a(\xi,t)$ o a la función $G(x-\xi,t-\tau)$ que acompañan a la función u_ξ y es por tal razón que se considera la integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi,t)u_\xi(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi$$

Donde es necesario integrar por partes, siendo $w=a(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau),\ dv=u_\xi$, entonces

$$dw=a_\xi G+aG_\xi, v=u$$

$=a(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)u|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}[a(\xi,t)_\xi G(x-\xi,t-\tau)u+a(\xi,t)G\xi u]d\xi$
De este modo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi,t)u_\xi(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi = a(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)u(\xi,\tau)|_{-\infty}^{\infty}$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)d\xi$$
$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)d\xi$$

y puesto que, lo que se desea saber es si la integral del lado izquierdo de la igualdad es finita, para ello se toma el primer termino del lado derecho de la anterior igualdad, de donde se puede apreciar que

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} G(x-\xi,t-\tau)=\lim_{\xi\to\pm\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}}=0$$

Además, $a(\xi)u(\xi,\tau)$ es absolutamente integrable, por el teorema 5, entonces cuando $\xi\to\pm\infty$ se tiene que $a(\xi)u(\xi,\tau)\to 0$, de esta forma $a(\xi)u(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)\Big|_{-\infty}^{\infty}=0$ cuando $\xi\to\pm\infty$.
Entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(\xi,t)u_\xi(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi = -\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)d\xi$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)d\xi$$

y para la primera integral,

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)d\xi \tag{3.10}$$

el objetivo es el mismo: probar que (3.10) es finita de la siguiente manera.
Se sabe que $G(x-\xi,t-\tau)$ es integrable, y puesto que $a_\xi(\xi)$ es acotada y por tanto no tendrá comportamiento exponencial en $\mathbb{R}$ así que se puede garantizar que,

$$\lim_{\xi\to\pm\infty} a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)=0,$$

en consecuencia,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,\tau)a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)|d\xi = A<\infty \qquad \text{para algún } A\in\mathbb{R}^+$$

y para

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi,\tau)a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)d\xi \tag{3.11}$$

lo primero que se debe tener en cuenta es que $a(\xi,t)u(\xi,\tau)$ es absolutamente integrable por teorema 5, pero

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_\xi(x-\xi,t-\tau)|d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\xi-x}{2k(t-\tau)\sqrt{4\pi k(t-\tau)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}}\right|d\xi$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2k\sqrt{\pi}(t-\tau)}\left|\frac{\xi-x}{\sqrt{4k(t-\tau)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}}\right|d\xi$$

realizando el cambio de variable $\eta=\frac{\xi-x}{\sqrt{4k(t-\tau)}}$; $d\eta=\frac{1}{\sqrt{4k(t-\tau)}}d\xi$ se tiene,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\eta e^{-\eta^2}|d\eta = 2\int_{-\infty}^{\infty} \eta e^{-\eta^2}d\eta = -e^{-\eta^2}\ |_0^\infty = 1$$

así,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |G_\xi(x-\xi,t-\tau)|d\xi = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{\pi}k(t-\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}|\eta e^{-\eta^2}|d\eta = \frac{1}{2\sqrt{\pi}k(t-\tau)}$$

es decir, $G_\xi(x-\xi,t-\tau)$ es absolutamente integrable con respecto a la variable espacial, por tanto no se puede garantizar que la integral (3.11) sea finita puesto que no se puede aplicar el teorema 5 a las funciones $u(\xi,\tau)a(\xi,t)$ y $G_\xi(x-\xi,t-\tau)$ porque ambas son absolutamente integrables. Por otro lado utilizando el hecho presentado anteriormente, como $G_\xi(x-\xi,t-\tau)$ es absolutamente integrable con respecto a la variable x entonces la función es también acotada con respecto a la misma variable, es decir, $|G_\xi(x-\xi,t-\tau)| < M$ para todo $x \in \mathbb{R}$; $M \in \mathbb{R}^+$ Empleando ese hecho se obtiene la siguiente desigualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,\tau)a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)|d\xi \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,\tau)a(\xi,t)|d\xi$$

finalmente, se conoce que $u(\xi,\tau)$ es absolutamente integrable por hipótesis y que $a(\xi,t)$ es acotada, entonces aplicando el teorema 5 para el producto de estas dos funciones, se tiene que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,\tau)a(\xi,t)|d\xi = E < \infty \qquad \text{para algún } E \in \mathbb{R}^+$$

o sea,

$$M \int_{-\infty}^{\infty} |u(\xi,\tau)a(\xi,t)|d\xi < ME.$$

por tanto, usando los hechos presentados con anterioridad se puede establecer que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(\xi,t)u_\xi(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)|d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)u + a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)u|d\xi$$

luego,

$$\begin{aligned} &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)u|d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} |a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)u|d\xi \\ &< A + ME \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a(\xi,t)u_\xi(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)|d\xi < A + ME$$

por lo tanto es absolutamente integrable y en consecuencia integrable, finalmente, la integral

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi,t)u_\xi(\xi,\tau)G(x-\xi,t-\tau)d\xi,$$

existe y es finita porque τ está variando en el intervalo $[0,t]$, así las cosas $u(x,t)$ se puede escribir correctamente en la forma que se presenta a continuación

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)G(x-\xi,t) - \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} [a_\xi(\xi,t)G(x-\xi,t-\tau)u + a(\xi,t)G_\xi(x-\xi,t-\tau)u]d\xi$$

$\square$

Conclusiones

- Si bien es cierto que este trabajo es de tipo monográfico, cabe señalar que el tratamiento y valor que se le dio a cada uno de los conceptos pertinentes en su consecución los cuales convergen en un resultado final de tipo teórico el cual es producto de la riqueza conceptual adquirida por parte de sus autores y que permite al lector comprender de una mejor manera la metodología y aplicabilidad de la Transformada de Fourier sobre Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales de tipo parabólico, ya que se ha profundizado en ella, se dieron a conocer las pruebas de una manera minuciosa para finalmente entender el tratamiento que se ha hecho sobre la ecuación de estudio.

- Una de las limitaciones dentro de la consecución del trabajo fue la resolución de la EDPL con termino $a(x,t)u_x(x,t)$, puesto que al resolver los dos problemas de valor inicial como lo fueron las ecuaciones del calor no homogéneas con término $q(x,t)$ y $au_x(x,t)$, con a constante, respectivamente tuvieron tratamiento analítico únicamente con la Transformada de Fourier y sus propiedades, las cuales fueron accesibles, en cambio la primera ecuación no tuvo el mismo tratamiento ya que no era suficiente la aplicación de la Transformada, sino que se recorrió a un concepto mucho mas fuerte, el cual nos permitió encontrar la forma de la solución de la función $u(x,t)$ que es el principio de Duhamel.

De los aportes que se consiguió con la realización del este trabajo fueron:

- La recopilación y organización conceptual de varios elementos teóricos los cuales fueron propicios para el desarrollo del trabajo permitiendo su comprensión paulatina de una manera sencilla de entender.

- A partir de nuestras fuentes bibliográficas se pudo establecer y consolidar el teorema 8 el cual fue el objetivo del trabajo.

Quedan aún como cuestiones inquietantes para la ampliación del mismo:

- El no considerar la integrabilidad absoluta de las funciones presentes en el teorema 8 que requieran esta condición para que la Transformada de Fourier exista y si es posible la aplicación de esta transformada integral ¿que condiciones deberían cumplir las funciones involucradas en este teorema para que se pueda hallar la forma de la solución $u(x,t)$ en tal caso?

- Otro aspecto y creemos es el más enriquecedor desde el punto de vista académico es el plantear la posibilidad de añadir una función no lineal al PVI presente en la sección (3.3) lo cual implicaría un estudio concienzudo de la teoría de Ecuaciones Diferenciales Parciales no Lineales y profundizar aun más en la teoría del análisis de Fourier.

- Es claro que se trabajó con Ecuaciones Diferenciales Parciales Lineales de segundo orden de tipo parabólico y la Transformada de Fourier de manera unidimensional, es menester que se indague en la posibilidad de extrapolar estos hechos en $\mathbb{R}^n$. Y en ese caso ¿como seria la forma de solución, qué condiciones cambiarían y cuales se conservarían con respecto al trabajo ya realizado en el capitulo 3, sobretodo cuando nos referimos al teorema 8?

Bibliografía

[1] Greenspan, Donald. *Introduction to Partial Differential Equations*. Dover Edition. Mineola, New york: Dover Publications, Inc. (2000), 195.p

[2] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society. Rhode Island: (1998), 362.p

[3] Avner, Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, N.J: (1964),

[4] Bers L., F. John, y M. Schechter. *Partial Differential Equations*. New York: Interscience Publishers. (1964),

[5] Garabedian. P. *Partial Differential Equations*. New York: Interscience Publishers. (1964),

[6] O.A.,Lady Zenskaja; V.A. Solonikov; N.N. Ural´ceva. *Linear and Quasilinear Equations of parabolic Type*. American Math. Society, (1968)

[7] Protter, Murray y Weinberger, Hans. *Maximun Principles in Differential Equations*. New York: Springer-Verlag. (1984), 261.p

[8] Cerón, Miller. O. *El Principio del Máximo*. Revita Sigma, Departamento de Matemáticas. Univeridad de Nariño. Vol VII (2008), pp. 28-34

[9] Klingenberg, Christian, Lu, Yunguang y Rendón Leonardo. *On Global Lipschitz-continuous Solutions of Isentropic Gas Dynamics*. Taylor & Francis Group. Vol 82 (2003), 35-43.p

[10] Cerón, Miller. O. *Soluciones Viscosas para un Sistema de Leyes de Conservación*. Tesis de Maestría para la obtención del titulo de Académico de Magister en Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional, Bogotá, Colombia.(2007).

[11] Aronson D. G y Serrin James. *A Maximum Principle for Nonlinear Parabolic Equations*, University of Minnesota. Tomo 21, N°2 (1967), pp. 291-305

[12] R. Dautray, J.L. Lions. *Analyse Mathematique et Calcul Numerique pour les Sciences et les Techniques*, Masson, (1985).

[13] I. Peral Alonso *Primer Curso de Ecuaciones en Derivadas Parciales*, Addison Wesley. Universidad Autónoma de Madrid, (1995).

Índice Alfabético