

DISTRIBUCIÓN DE MATERIA Y DINÁMICA ESTELAR EN GALAXIAS  
ANULARES

JUAN DAVID JURADO BUCH

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2012

DISTRIBUCIÓN DE MATERIA Y DINÁMICA ESTELAR EN GALAXIAS  
ANULARES

JUAN DAVID JURADO BUCH

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE FÍSICO

DIRECTOR:  
ALEJANDRO PÉREZ RIASCOS  
MÁSTER EN CIENCIAS FÍSICAS

CODIRECTOR:  
GERMAN RAMOS ZAMBRANO  
DOCTOR EN CIENCIAS FÍSICAS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO

2012

*“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”*

*Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.*

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

Msc. Alejandro Pérez Riascos.  
Asesor.

Phd. German Ramos Zambrano  
Coasesor.

Phd. Juan Bautista Flórez Moreno  
Jurado.

Msc. James Perenguez López  
Jurado.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quiero expresar mi sincero agradecimiento al Msc. Alejandro Pérez Riascos, asesor del trabajo de grado, por su dedicación, sus generosas enseñanzas y en especial por su amistad. A mi coasesor Phd. German Ramos Zambrano por su valiosa colaboración.

A los profesores Msc. Alberto Quijano Vodniza y Phd. Juan Bautista Flórez Moreno, quienes durante el curso de mis estudios fueron un ejemplo importante en lo profesional y personal.

A Dios que me dio todas las herramientas y capacidad para la realización de este  
trabajo.

A mis padres Gloria Maria Buch Delgado y Harold Jurado Paredes, que junto a mi  
abuela, Concepción Delgado de Buch y a mi hermana, Angela Jurado Buch, siempre  
han sido un gran apoyo para culminar satisfactoriamente mis estudios de pregrado.

A Carolina Legarda Martinez por haberme acompañado incondicionalmente durante  
todo este proceso.

A mis familiares y amigos quienes siempre creyeron en mis capacidades.

**Juan David Jurado Buch**

## CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	18
1. GASES GRAVITACIONALES	21
1.1. MECÁNICA DE FLUIDOS	21
1.1.1. Ecuaciones de Euler.	21
1.1.2. Ecuación de Navier-Stokes.	24
1.2. DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS	25
2. ESTRUCTURA DE GALAXIAS ANULARES	32
2.1. ECUACIONES ESTÁTICAS	32
2.1.1. Adimensionalización.	33
2.2. PARAMETRIZACIONES DE CLEBSCH	35
2.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA	37
2.3.1. Estructura del gas gravitacional estacionario.	37
2.4. ESTRUCTURA DEL OBJETO DE HOAG	40
3. DINÁMICA ESTELAR EN GALAXIAS	42

3.1. SECCIONES DE POINCARÉ	42
3.2. ÓRBITAS ESTELARES EN POTENCIALES AXISIMÉTRICOS	44
3.3. ÓRBITAS EN POTENCIALES NO AXISIMÉTRICOS	48
3.3.1. Caso I: Órbitas Periódicas.	48
3.3.2. Caso II: Dinámica Caótica.	52
4. DINÁMICA ESTELAR EN GALAXIAS ANULARES	56
4.1. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA EN GALAXIAS ANULARES	56
4.1.1. Estructura del núcleo.	57
4.1.2. Estructura del anillo.	57
4.1.3. Sistema núcleo-anillo.	58
4.2. DINÁMICA ESTELAR	60
4.2.1. Adimensionalización de las ecuaciones dinámicas.	61
4.3. CASO SIMÉTRICO	63
4.4. CASO ASIMÉTRICO	66
4.5. EFECTO PRODUCIDO POR LA ROTACIÓN DE LA GALAXIA	70
CONCLUSIONES	73

RECOMENDACIONES	74
BIBLIOGRAFÍA	75
ANEXOS	76

## LISTA DE CUADROS

2.1. Características físicas del Objeto de Hoag . . . . .	41
---	----

## LISTA DE FIGURAS

2.1. Solución numérica a las ecuaciones estáticas de un gas gravitacional en rotación teniendo en cuenta la misma condición inicial $\rho(0.1)$ . . . . .	38
2.2. Solución numérica a las ecuaciones estáticas de un gas gravitacional en rotación teniendo en cuenta diferentes valores para la condición inicial $\rho(0.1)$ . . . . .	39
2.3. Imagen del Objeto de Hoag. . . . .	40
3.1. Gráfica de contorno para el potencial efectivo $\Phi_{eff}(r, z)$ con $q = 0.9$ y $q = 0.5$ . . . . .	46
3.2. Gráficas de las órbitas generadas por el potencial efectivo $\Phi_{eff}(r, z)$ y su respectiva sección superficial. . . . .	47
3.3. Gráfica de contorno para el potencial logarítmico $\Phi_L(x, y)$ con $q = 0.5$ y $q = 0.9$ . . . . .	49
3.4. Gráfica de las órbitas generadas por el potencial logarítmico $\Phi_L(x, y)$ con $q = 0.5$ . . . . .	50
3.5. Gráfica de la sección superficial para algunas órbitas generadas por el potencial logarítmico $\Phi_L(x, y)$ con $q = 0.5$ . . . . .	51
3.6. Gráfica de las órbitas generadas por el potencial logarítmico $\Phi_L(x, y)$ con $q = 0.6$ . . . . .	51
3.7. Gráfica de la sección superficial para algunas órbitas generadas por el potencial logarítmico $\Phi_L(x, y)$ con $q = 0.6$ . . . . .	52
3.8. Gráfica de contorno para el potencial logarítmico $\Phi_{II}(x, y)$ , con $q = 0.5$ y $q = 0.9$ . . . . .	53
3.9. Gráfica de las órbitas generadas por el potencial logarítmico $\Phi_{II}(x, y)$ con $q = 0.9$ . . . . .	54

3.10. Sección de Poincaré externa generada por las órbitas del potencial $\Phi_{II}(x, y)$ .	54
3.11. Sección de Poincaré interna generada por las órbitas del potencial $\Phi_{II}(x, y)$ .	55
4.1. Gráfica de la distribución de materia sistema núcleo-anillo. . . . .	58
4.2. Gráfica de la densidad de materia sistema núcleo-anillo. . . . .	59
4.3. Gráfica de la fuerza experimentada por una estrella debido al sistema núcleo-anillo. . . . .	61
4.4. Gráfica de las órbitas generadas por el sistema núcleo-anillo para una configuración simétrica con $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$ . . . . .	64
4.5. Gráfica de las órbitas generadas por el sistema núcleo-anillo para una configuración simétrica con $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 0.4$ . . . . .	64
4.6. Sección superficial para las órbitas presentes dentro de la estructura simétrica núcleo-anillo teniendo en cuenta $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$ y 0.4. . . . .	65
4.7. Imagen de la galaxia anular AM 0644-741. . . . .	66
4.8. Gráfica de las órbitas y el momento angular $L_z$ de una estrella que se mueve dentro de una galaxia anular asimétrica. . . . .	68
4.9. Sección superficial para un conjunto de órbitas presentes dentro de una galaxia anular asimétrica con $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$ y 0.4. . . . .	69
4.10. Sección superficial para un conjunto de órbitas dentro de una galaxia anular simétrica y asimétrica que se encuentra rotando con $\tilde{\Omega} = 0.2$ . . . . .	72
4.11. Solución numérica a las ecuaciones (4.14), teniendo en cuenta el segundo término perturbativo de la ecuación (4.24) $\beta = 0.1$ . . . . .	78

## LISTA DE ANEXOS

ANEXO A.

76

## GLOSARIO

**CENTRO GEOMÉTRICO:** El centro geométrico de un cuerpo material coincide con el centro de masa si el objeto es homogéneo (densidad uniforme) o cuando la distribución de materia en el sistema tiene ciertas propiedades, tales como simetría.

**CENTRO DE MASA:** El centro de masas de un sistema discreto o continuo es el punto geométrico que dinámicamente se comporta como si en él estuviera aplicada la resultante de las fuerzas externas al sistema.

**ECUACIONES PARAMÉTRICAS:** En matemáticas, una ecuación paramétrica permite representar una o varias curvas o superficies en el plano o en el espacio, mediante valores arbitrarios o mediante una constante, llamada parámetro.

**ESPACIO DE FASE:** En mecánica clásica es una construcción matemática que permite representar el conjunto de posiciones y momentos conjugados de un sistema de partículas. Es decir, cada punto del espacio fásico representa un estado del sistema físico.

**NO LINEALIDAD:** Un sistema físico, matemático o de otro tipo es no lineal, cuando las ecuaciones de movimiento, evolución o comportamiento que regulan su comportamiento no son lineales.

**OBJETO DE HOAG (PGC 54559):** Es una galaxia atípica del tipo conocido como galaxia anular.

**OSCILACIONES ACOPLADAS:** Son aquellas en las que dos o más osciladores armónicos simples se unen para formar un oscilador complejo.

**SIMETRÍA AXIAL:** La simetría axial (también llamada rotacional o radial o cilíndrica) es la simetría alrededor de un eje, de modo que un sistema tiene simetría axial o axisimetría cuando todos los semiplanos tomados a partir de cierto eje y conteniéndolo

presentan idénticas características.

**SISTEMA DINÁMICO:** Es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo.

**TOROIDE:** En geometría, un toro es una superficie de revolución generada por una circunferencia que gira alrededor de una recta exterior coplanaria (en su plano y que no la corta).

## RESUMEN

En este trabajo se discute la estructura global de galaxias anulares y la forma en la que una estrella se mueve en este tipo de galaxias. De esta manera, en la primera parte del trabajo, se estudian gases gravitacionales en rotación y por medio de parametrizaciones de Clebsch se obtienen soluciones estáticas que revelan una estructura con un núcleo y un anillo similar a la galaxia anular Objeto de Hoag. En la segunda parte del trabajo se propone un modelo simplificado para la distribución de materia en galaxias anulares a partir del cual se obtienen órbitas estelares por medio de integración numérica de las ecuaciones de movimiento. Los resultados encontrados para la dinámica estelar sugieren la posibilidad de una dinámica caótica en configuraciones donde el centro de masa del núcleo no coincide con el centro galáctico.

Palabras claves: Astrofísica, cosmología, galaxias.

## ABSTRACT

In this work we discuss the global structure of annular galaxies and the form that stars move in this type of structures. In this way, in the first part, we study rotating gravitational gases and by mean of Clebsch's parametrizations we obtain static solutions that reveal a structure similar to the annular galaxy known as Hoag's object. In the second part a simplified model for the matter distribution in annular galaxies is proposed. From this model we obtain stellar orbits by mean of the numerical integration of the dynamical equations. The obtained results for the stellar dynamics suggest the possibility of chaotic orbits in configurations where the center of mass of the nucleus differs with the position of the galactic center.

## INTRODUCCIÓN

En este trabajo de investigación se busca estudiar galaxias anulares y particularmente se toma la galaxia conocida como Objeto de Hoag que fue descubierta por Art Hoag en 1950. Esta galaxia tiene magnitud  $16^{th}$  y se encuentra ubicada en la constelación de la Serpiente. Es una estructura galáctica que posee un círculo perfecto de estrellas jóvenes que rodean un núcleo amarillo compuesto por estrellas que se encuentran en una etapa mas madura de su vida. El núcleo y el anillo tienen la misma luminosidad y se encuentran a 600 años luz de distancia desde la Tierra. Cabe señalar que muchos de los detalles del Objeto de Hoag son un misterio, el más importante es cómo se formó<sup>1</sup>. En la literatura se puede observar que las galaxias de tipo anular han sido objeto de estudio de muchos observatorios astronómicos<sup>2</sup>, <sup>3</sup> y <sup>4</sup>. Este tipo de estructuras galácticas no se encuentran catalogadas entre los principales tipos de galaxias a pesar de que hay muchas que poseen esta forma. Según el esquema utilizado por Edwin Hubble en su libro *El reino de las Nebulosas* se reconocen tres tipos principales de galaxias: elípticas, lenticulares y espirales, además se incluye una cuarta clase: las irregulares, para galaxias que no están en ninguna de las categorías principales, siendo este último tipo al que corresponden las galaxias anulares tomadas como objeto de estudio en esta investigación. Algunos astrónomos creen que la progresión de las galaxias a través de la secuencia de Hubble podría describir el ciclo de vida de las mismas, así como la progresión en el diagrama de Hertzsprung-Russell, muestra el ciclo de vida de una estrella. Una discusión más profunda sobre este tema se trata en <sup>5</sup>. Sobre este tipo de galaxias se han realizado muy pocos estudios de carácter teórico razón por la cual se presenta esta investigación.

---

<sup>1</sup>Freeman, T., Howard, S., Byrd, G. (2008). *Hoag's object, remnant of a vanished bar?*. Recuperado del sitio Web [http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's Object, Remnant of Vanished Bar. T.Freeman et.al.pdf](http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's%20Object,%20Remnant%20of%20Vanished%20Bar.%20T.Freeman%20et.al.pdf), pag. 35-37

<sup>2</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, pag. 454-455.

<sup>3</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 2.

<sup>4</sup>Brosch, N. (1985). The nature of Hoag's object: the perfect ringed galaxy [versión electrónica], *Journal Astronomy and Astrophysics*, 153, pag. 199-204.

<sup>5</sup>Sparke, L., Gallagher, S. (2007). *Galaxies in the Universe: An Introduction*; New York, United States of America: Cambridge University, pag. 37-42.

Así mismo se estudia la distribución de materia en galaxias anulares partiendo del trabajo desarrollado por Pronko<sup>6</sup>; para ello se utiliza la notación empleada por Lodato<sup>7</sup>. Considerando que el número total de estrellas en una galaxia típica es del orden de  $10^{13}$ - $10^{14}$ , es posible tomar esta colección de partículas como si fueran un gas gravitacional, esto permite desarrollar una descripción Lagrangiana de la mecánica de fluidos y deducir las ecuaciones de continuidad y de Navier-Stokes <sup>8</sup>, <sup>9</sup> y <sup>10</sup>. Una vez planteadas las ecuaciones que describen un gas gravitacional en rotación se encuentra una solución numérica para el caso en que la distribución de materia es un disco que rota uniformemente y se encuentra en un estado estacionario; esto significa que tanto  $\rho$  como  $\vec{v}$  no dependen de forma explícita del tiempo. Para solucionar las ecuaciones estáticas de continuidad y de Navier-Stokes se recurre al método de las parametrizaciones de Clebsch que se utiliza para el estudio de fluidos en rotación <sup>11</sup> y <sup>12</sup>. Las soluciones a este conjunto de ecuaciones hacen referencia a la distribución de materia presente en la estructura de la galaxia y determinan cómo es la velocidad radial en el caso estacionario. Los resultados sugieren que la distribución de materia presente dentro del gas gravitacional tiene la forma de una galaxia anular simétrica como la del Objeto de Hoag.

Una vez encontrada la distribución de materia en este tipo de configuraciones, se estudia la dinámica estelar dentro de las mismas; para ello se obtienen las ecuaciones de movimiento de la estrella a partir de la segunda ley de Newton y se solucionan empleando métodos numéricos. Antes de abordar el problema relacionado con galaxias anulares, se estudia el método de las Secciones de Poincaré ó Secciones superficiales, que permiten caracterizar de una forma sencilla los diferentes tipos de órbitas, muestran las intersecciones de la trayectoria de la estrella con una sección superficial del espacio de fase y además permiten clasificar visualmente si el movimiento de la estrella es regular (no

---

<sup>6</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 1-13.

<sup>7</sup>Lodato, G. (2008). *Self-gravitating accretion discs*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 1-61.

<sup>8</sup>Chorin, A.J., Marsden, J.E. (1997). *Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*; New York, United States of America: Cambridge University, pag. 1-31.

<sup>9</sup>Potter, M.C, Wiggert, D.C. (2002). *Mecánica de fluidos*; Mexico D.F., Mexico: Cengage Learning Editores, pag. 114-203.

<sup>10</sup>Cross, M., Greenside, H. (2009). *Patter Formation and Dynamics in Nonequilibrium System*; New York, United States of America: Cambridge University, pag. 1-50.

<sup>11</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 1-13.

<sup>12</sup>Yoshida, Z. (2008). *Clebsch parameterization-theory and applications*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 1-10.

caótico) o irregular (caótico) <sup>13</sup>, <sup>14</sup> y <sup>15</sup>.

Para el caso de galaxias anulares se propone un modelo de distribución de materia que reproduce algunos de los resultados obtenidos experimentalmente<sup>16</sup>, <sup>17</sup> y <sup>18</sup>. A partir de este modelo se puede establecer las ecuaciones dinámicas de la estrella dentro de la galaxia anular simétrica y por medio de la solución numérica de estas ecuaciones se obtienen las órbitas y sus respectivas secciones de Poincaré. El modelo propuesto anteriormente se puede ampliar teniendo en cuenta la dinámica estelar dentro de galaxias anulares no simétricas y el efecto producido por la rotación de la galaxia sobre la dinámica estelar dentro de estructuras anulares simétricas y no simétricas.

---

<sup>13</sup>Binney, J., Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*; New Jersey, United States of America: Princeton University, pag. 55-262.

<sup>14</sup>Padmanabhan, T. (2000). *Theoretical Astrophysics*; New York, United States of America: Cambridge University, pag. 42-77.

<sup>15</sup>Takashashi, M., Koyama, H. (2008). *Chaotic motion of Charged Particles in an Electromagnetic Field Surrounding a Rotating Black Hole*. Recuperado del sitio Web arXiv:0807-0277v1, pag. 7-15.

<sup>16</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, pag. 454-455.

<sup>17</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio web arXiv:1102.3184v1, pag. 2.

<sup>18</sup>Brosch, N. (1985). The nature of Hoag's object: the perfect ringed galaxy [versión electrónica], *Journal Astronomy and Astrophysics*, 153, pag. 199-204.

## 1 GASES GRAVITACIONALES

En este capítulo se presentan las ecuaciones básicas de la mecánica de fluidos, las cuales se derivan a partir de las leyes de conservación de la masa, el momento y la energía. Además, se realiza una descripción Lagrangiana para este tipo de ecuaciones con una notación diferente a la utilizada por Pronko <sup>1</sup>. Se deducen las ecuaciones de Navier-Stokes y de continuidad utilizando una notación como la empleada por Lodato <sup>2</sup>. El formalismo presentado permite trabajar gases gravitacionales por medio de las ecuaciones propias de la mecánica de fluidos.

### 1.1. MECÁNICA DE FLUIDOS

Para tratar un gas gravitacional como un fluido se debe tener en cuenta dos ecuaciones muy importantes de la mecánica de fluidos: La ecuación de continuidad y la ecuación de Navier-Stokes <sup>3</sup>. Estas ecuaciones se deducen de los tres principios fundamentales de la física: la conservación de la masa, la conservación del momento lineal y la conservación de la energía. Para encontrar las ecuaciones de movimiento de estas partículas se utiliza la función Lagrangiana, primero considerando que las partículas no están sujetas a fuerzas externas y luego suponiendo que estas se encuentran dentro de un campo gravitacional.

**1.1.1. Ecuaciones de Euler.** Las ecuaciones de Euler describen el movimiento de un fluido compresible no viscoso, para ello se tiene en cuenta el movimiento de una partícula sobre el mismo. Dicha partícula describe una trayectoria  $\vec{x}$  sobre el fluido en el tiempo  $t$ , cada punto sobre la trayectoria tiene coordenadas  $\vec{x} = (x, y, z)$ . Debido al movimiento de la partícula en el fluido, esta adquiere una velocidad  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  al tiempo  $t$ . Para cada tiempo  $t$  se asume que el fluido tiene una densidad de masa bien definida

---

<sup>1</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 1-13.

<sup>2</sup>Lodato, G. (2008). *Self-gravitating accretion discs*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 1-61.

<sup>3</sup>Pronko, G.P. Op. cit., p. 2-5.

$\rho(\vec{x}, t)$ . De esta manera la masa del fluido contenida en una región del espacio  $W$  al tiempo  $t$  esta dada por:

$$m(W, t) = \int_W \rho(\vec{x}, t) dV. \quad (1.1)$$

Para derivar la ecuación de Navier-Stokes se tiene en cuenta tres principios básicos: La consevación de la masa, del momento lineal y de la energía <sup>4</sup>.

1. Conservación de la masa: Si la región  $W$  sobre la cual está contenido el fluido no cambia con el tiempo, se tiene:

$$\frac{dm(W, t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} dV.$$

El principio de conservación de la masa se puede establecer como: La razón del incremento de la masa en la región  $W$  es igual a la razón en que la masa esta cruzando las fronteras de la misma región  $W$  ( $\partial W$ ) en la dirección interna. En consecuencia:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV = - \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n} dA, \quad (1.2)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector unitario normal a la frontera de la región  $W$  ( $\partial W$ ). La ecuación (1.2) es la forma integral de la ley de la conservación de la masa, al aplicar el teorema de la divergencia sobre la ecuación (1.2) se deduce la ecuación de continuidad.

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)] = 0. \quad (1.3)$$

2. Conservación del momento lineal: Antes de derivar la ecuación que representa la conservación del momento lineal dentro de un fluido, se identifican dos tipos de fuerzas presentes en un continuo. Se tiene en cuenta la tensión sobre el fluido, la cual actúa a través de la superficie del mismo y las fuerzas que se deben a

---

<sup>4</sup>CHORIN, A.J., MARSDEN, J.E., (1997). Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer-Verlag (Eds.). *The Equations of Motions*(pp. 1-31). New York, United States of America.

otros cuerpos tales como la gravedad. Por lo tanto la ecuación diferencial de la conservación del momento lineal<sup>5</sup>:

$$\rho(\vec{x}, t) \frac{D\vec{v}(\vec{x}, t)}{Dt} = -\nabla p + \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t). \quad (1.4)$$

Donde el operador  $\frac{D}{Dt} = \partial_t + \vec{v} \cdot \nabla$  y  $p$  representa la presión normal ejercida sobre la superficie del fluido por undiad de área en el tiempo  $t$ , esta fuerza actúa ortogonalmente a la superficie del fluido. Esta consideración impide que el fluido este rotando; mientras  $\vec{b}$  denota la fuerza que actúa sobre el cuerpo por unidad de masa. Por último el término  $-\nabla p + \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t)$ , representa la fuerza total sobre el fluido por unidad de volumen. Al aplicar el teorema de la divergencia sobre la ecuación (1.4) se obtiene la forma integral de la conservación del momento lineal, así:

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) dV = - \int_{\partial W} (p \hat{n} + \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n})) dA + \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{b} dV.$$

La cantidad  $p \hat{n} + \rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \hat{n})$  es el flujo del momentun por unidad de área que cruza por los límites de la región  $W$  ( $\partial W$ ).

3. Conservación de la energía: Para especificar completamente el movimiento del fluido se necesita una ecuación además de (1.3) y (1.4). Para suplir la falta de está ecuación se recurre al teorema de la conservación de la energía. Teniendo en cuenta que:

$$E_{Total} = E_k + E_i,$$

donde  $E_i$  es la energía interna y  $E_k$  la energía cinética de cada partícula, se puede establecer<sup>6</sup>:

$$\frac{dE_k}{dt} = \int_{Wt} \rho(\vec{x}, t) \left( \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \left( \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla \right) \vec{v}(\vec{x}, t) \right) dV.$$

---

<sup>5</sup>CHORIN, A.J., MARSDEN, J.E., (1997). Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer-Verlag (Eds.). *The Equations of Motions*(pp. 1-31). New York, United States of America.

<sup>6</sup>Ibíd., p. 1-31.

Los principios presentados en esta sección permiten obtener las ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos. Un tratamiento más específico sobre este tema puede encontrarse en <sup>7</sup>. Algunas de estas ecuaciones se desarrollan en detalle a lo largo de este capítulo.

**1.1.2. Ecuación de Navier-Stokes.** La ecuación de Navier-Stokes se puede utilizar para modelar el clima, las corrientes oceánicas y el movimiento de las estrellas dentro de galaxias <sup>8</sup>. En su forma más simplificada se puede utilizar para el estudio del flujo sanguíneo, el diseño de aviones, cohetes y el análisis de contaminación.

Una solución a la ecuación de Navier-Stokes define la velocidad del fluido en un punto dado del espacio-tiempo, esta ecuación posee las siguientes propiedades:

1. No linealidad: La ecuación de Navier-Stokes es una ecuación diferencial parcial no lineal que describe sistemas reales. Esta no linealidad hace que la mayoría de los problemas no posean soluciones analíticas y por lo tanto sea necesario recurrir a la utilización de métodos numéricos para sus soluciones. Estos sistemas al ser no lineales pueden presentar comportamientos caóticos, una consecuencia de estos comportamientos caóticos son las turbulencias.
2. Turbulencia: La turbulencia es el comportamiento caótico en el fluido debido a la difusión del momento, al alto momento convectivo, y la rápida variación de presión y velocidad en el espacio-tiempo. Se ha observado turbulencias en partes externas de las galaxias; en las zonas internas el gas se mueve de forma caótica porque hay muchas estrellas con vientos, radiación y algunas de ellas incluso explotan como supernovas. Toda esta fuerza es eyectada en forma de radiación o movimientos mecánicos haciendo que se agite el gas y evitando la formación de cuerpos masivos.

La ecuación de movimiento de un fluido desde un marco de referencia inercial es:

---

<sup>7</sup>CHORIN, A.J., MARSDEN, J.E., (1997). *Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag (Eds.). *The Equations of Motions*(pp. 1-31). New York, United States of America.

<sup>8</sup>CROSS, M., GREENSIDE, H., (2009). *Patter Formation and Dynamics in Nonequilibrium System*. Cambridge University (Eds.). *Introduction*(pp. 1-43). New York, United States of America.

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbb{T} + \vec{f}. \quad (1.5)$$

La expresión (1.5) se conoce como ecuación de Navier-Stokes la cual se deduce a partir de la segunda ley de Newton. En (1.5)  $\vec{v}$  es la velocidad del fluido,  $\rho$  su densidad,  $p$  la presión,  $\mathbb{T}$  es el tensor tensión y  $\vec{f}$  representa la fuerza (por unidad de volumen), actuando sobre el fluido. En la ecuación (1.5) es de gran importancia el término  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  ya que corresponde a la aceleración convectiva, esta aceleración es a su vez una cantidad no lineal <sup>9</sup>.

## 1.2. DESCRIPCIÓN LAGRANGIANA DE LA MECÁNICA DE FLUIDOS

Las galaxias son agrupaciones de miles de millones de estrellas. Estas mas el gas y polvo interestelar orbitan alrededor del centro de la galaxia debido a la atracción gravitatoria entre todas ellas. Las galaxias pueden modelarse como gases gravitacionales donde las partículas están interaccionando entre si debido al potencial gravitacional. Para conocer el comportamiento de los gases gravitacionales se toma como referencia los resultados presentados por Pronko<sup>10</sup>, los cuales se presentan con una notación como la empleada por Lodato<sup>11</sup> con el fin de resolver las ecuaciones numéricamente y así poder analizar las gráficas resultantes.

A continuación se describe un gas gravitacional formado por partículas con masas  $m_i$ , cada una con trayectorias  $\vec{x}(\vec{\xi}, t)$  que no se cruzan entre si. El vector  $\vec{\xi}$  con componentes  $\xi_i$  denota la posición inicial de la partícula mientras que  $\vec{x}$  con coordenadas  $x_j(\vec{\xi}, t)$ , en una forma mucho más compacta  $x_j(\xi_i, t)$ , denota las coordenadas de la trayectoria de cada partícula. Si  $\rho_0(\vec{\xi})$  es la densidad inicial en  $t = 0$  de las partículas, la densidad del gas está dada por:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int \rho_0(\xi') \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi'. \quad (1.6)$$

---

<sup>9</sup>CHORIN, A.J., MARSDEN, J.E., (1997). Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer-Verlag (Eds.). *The Equations of Motions*(pp. 1-31). New York, United States of America.

<sup>10</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 7-13.

<sup>11</sup>Lodato, G. (2008). *Self-gravitating accretion discs*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 1-61.

La densidad  $\rho(\vec{x}, t)$  es  $\rho_0(\vec{\xi}')$  cuando  $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}', t)$  y es nula para todo  $\vec{x} \neq \vec{x}(\vec{\xi}', t)$ . Teniendo en cuenta la posición de las partículas, el campo de velocidades  $\vec{v}$  como función de las coordenadas  $\vec{x}$  y  $t$ , esta dado por:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t). \quad (1.7)$$

La velocidad también puede ser escrita en términos de  $\rho_0(\vec{\xi}')$  mediante la expresión:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{\int \rho_0(\vec{\xi}') \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi'}{\int \rho_0(\vec{\xi}') \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi'}. \quad (1.8)$$

Tanto en la ecuación (1.7) como en (1.8), el vector  $\vec{x}$  denota la posición desde donde se mide la cantidad  $\rho(\vec{x}, t)$  o la cantidad  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ , se recuerda que la trayectoria seguida por cada partícula esta denotada por  $\vec{x}(\vec{\xi}', t)$ . Al utilizar (1.6) se obtiene:

$$\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t) = \int \rho_0(\vec{\xi}') \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi'. \quad (1.9)$$

Derivando temporalmente la ecuación (1.6) se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_0(\vec{\xi}') \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi' = \int \rho_0(\vec{\xi}') \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi'.$$

Al utilizar la regla de la cadena se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \int \rho_0(\vec{\xi}') (-\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)) \cdot \nabla (\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))) d^3 \xi' \\ &= -\nabla \cdot \left[ \int \rho_0(\vec{\xi}') \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi' \right]. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la ecuación (1.9) se puede establecer que:  $\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t))$ . Finalmente la ecuación de continuidad para un fluido sin viscosidad es:

$$\frac{\partial \rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = 0. \quad (1.10)$$

Si las partículas no interactúan entre si y no hay fuerzas externas actuando sobre ellas, la función Lagrangiana del sistema esta dada por <sup>12</sup>:

$$L = \int \rho_0(\vec{\xi}') \frac{|\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)|^2}{2} d^3\xi'. \quad (1.11)$$

Por medio de la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} = 0, \quad (1.12)$$

se obtienen las ecuaciones de movimiento del sistema. Teniendo en cuenta que:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t)} \right) = \rho_0(\vec{\xi}) \ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t), \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} = 0,$$

se puede establecer:

$$\ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t) = 0. \quad (1.13)$$

La ecuación (1.13) muestra que las partículas del gas no interactúan entre si. Para encontrar la ecuación de Navier-Stokes se deriva temporalmente (1.9):

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_0(\vec{\xi}') \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3\xi',$$

esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\vec{x}, t) \vec{v}(\vec{x}, t)) = & \int \rho_0(\vec{\xi}') \ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3\xi' + \\ & \int \rho_0(\vec{\xi}') \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t) \frac{\partial}{\partial t} (\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))) d^3\xi'. \end{aligned} \quad (1.14)$$

---

<sup>12</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 3.

Teniendo en cuenta que no actúan fuerzas externas sobre el gas gravitacional, la ecuación (1.14) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)) &= \int \rho_0(\vec{\xi}')\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\frac{\partial}{\partial t}(\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)))d^3\xi' \\
&= - \int \rho_0(\vec{\xi}')\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\nabla \cdot (\dot{\vec{x}}(\vec{x}, t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)))d^3\xi' \\
&= - \int \rho_0(\vec{\xi}')\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k}(v_k\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)))d^3\xi',
\end{aligned}$$

ya que  $\rho_0(\vec{\xi}')$  y  $\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)$  no dependen explícitamente de  $\vec{x}$ , se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)) &= - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \int \rho_0(\vec{\xi}')\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))d^3\xi'v_k \right], \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)) &= - \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)v_k(\vec{x}, t)]. \tag{1.15}
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)v_k(\vec{x}, t)] &= \sum_k \left[ \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho(\vec{x}, t)v_k(\vec{x}, t))\vec{v}(\vec{x}, t) + \frac{\partial\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial x_k}(\rho(\vec{x}, t)v_k(\vec{x}, t)) \right] \\
&= \vec{v}(\vec{x}, t)\nabla \cdot (\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)) + \rho(\vec{x}, t)(\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{v}(\vec{x}, t),
\end{aligned}$$

utilizando la ecuación de continuidad (1.10) se obtiene:

$$\sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)v_k(\vec{x}, t)] = -\vec{v}(\vec{x}, t)\frac{\partial\rho(\vec{x}, t)}{\partial t} + \rho(\vec{x}, t)(\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{v}(\vec{x}, t). \tag{1.16}$$

A partir de las ecuaciones (1.15) y (1.16) se deduce la ecuación de Navier-Stokes para el caso en que la presión, la tensión y el potencial gravitacional en el gas son nulos. En este caso:

$$\rho(\vec{x}, t) \left[ \frac{\partial\vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{v}(\vec{x}, t) \right] = 0. \tag{1.17}$$

Al considerar la interacción gravitacional que sufren entre si las partículas del gas se tiene en cuenta la presencia de un potencial gravitacional y la función Lagrangiana del sistema<sup>13</sup>:

$$L = \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') |\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)|^2}{2} d^3 \xi' + \frac{G}{2} \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') \rho_0(\vec{\xi}'')}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|} d^3 \xi' d^3 \xi''. \quad (1.18)$$

La función Lagrangiana (1.18) puede ser escrita en términos del potencial gravitacional  $\Phi(\vec{x}(\vec{\xi}', t), t)$ :

$$\Phi(\vec{x}(\vec{\xi}', t), t) = -G \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}'')}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|} d^3 \xi'',$$

por lo tanto (1.18) toma la forma:

$$L = \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') |\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)|^2}{2} d^3 \xi' - \frac{1}{2} \int \rho_0(\vec{\xi}') \Phi(\vec{x}(\vec{\xi}', t), t) d^3 \xi'. \quad (1.19)$$

Se procede de igual manera que en el caso de gases gravitacionales libres, sin embargo, en este caso se debe tener en cuenta la presencia de un potencial gravitacional. Al aplicar la ecuación de Euler-Lagrange (1.12) se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t)} \right) = \rho_0(\vec{\xi}) \ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t). \quad (1.20)$$

Para un gas gravitacional libre la ecuación (1.20) es igual a cero porque no hay fuerzas externas actuando sobre el sistema. Para encontrar la ecuación de movimiento del gas gravitacional sujeto a una interacción de este tipo se debe tener en cuenta que:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} = -\frac{1}{2} \int \rho_0(\vec{\xi}') \frac{\partial \Phi(\vec{x}(\vec{\xi}', t), t)}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} d^3 \xi', \quad (1.21)$$

como:

---

<sup>13</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 4.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(\vec{x}(\vec{\xi}', t), t)}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} &= \frac{\partial}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} \left[ -G \int \frac{\rho_0(\xi'')}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|} d^3 \xi'' \right] \\
&= G \int \rho_0(\vec{\xi}'') \left( \frac{\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|^3} \right) \delta(\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) d^3 \xi'' + \\
&\quad G \int \rho_0(\vec{\xi}'') \left( \frac{\vec{x}(\vec{\xi}'', t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t)}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|^3} \right) \delta(\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)) d^3 \xi'',
\end{aligned}$$

la ecuación (1.21) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} &= -\frac{G}{2} \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') \rho_0(\vec{\xi}'')}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|^3} \left[ (\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)) \delta(\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) \right] d^3 \xi' d^3 \xi'' \\
&\quad - \frac{G}{2} \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') \rho_0(\vec{\xi}'')}{|\vec{x}(\vec{\xi}', t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)|^3} \left[ (\vec{x}(\vec{\xi}'', t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t)) \delta(\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}'', t)) \right] d^3 \xi' d^3 \xi''.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que ambas integrales se realizan sobre todas las posibles trayectorias, se puede establecer:

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{x}(\vec{\xi}, t)} = -G \rho_0(\vec{\xi}) \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') (\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t))}{|\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t)|^3} d^3 \xi'. \quad (1.22)$$

De esta manera uniendo (1.20) y (1.22) se obtiene para un gas que se encuentra sujeto a un potencial gravitacional:

$$\rho_0(\vec{\xi}) \ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t) + G \rho_0(\vec{\xi}) \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}') (\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t))}{|\vec{x}(\vec{\xi}, t) - \vec{x}(\vec{\xi}', t)|^3} d^3 \xi' = 0. \quad (1.23)$$

La ecuación (1.23) también se puede expresar en términos del potencial gravitacional de la siguiente manera:

$$\ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}, t) = -\nabla \Phi(\vec{x}(\vec{\xi}, t), t). \quad (1.24)$$

Para la deducción de la ecuación de Navier-Stokes asumiendo una interacción gravitacional entre sus partículas, se sigue un procedimiento similar al realizado para obtener

la ecuación (1.17). Nuevamente se utiliza la ecuación de Euler-Lagrange (1.12). Considerando estos términos se puede establecer:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)) = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_0(\vec{\xi}')\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))d^3\xi',$$

esto es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho(\vec{x}, t)\vec{v}(\vec{x}, t)) - \int \rho_0(\vec{\xi}')\dot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\frac{\partial}{\partial t}(\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t)))d^3\xi' = \\ \int \rho_0(\vec{\xi}')\ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))d^3\xi', \end{aligned}$$

y empleando las ecuaciones (1.15) y (1.16) se encuentra:

$$\rho(\vec{x}, t) \left[ \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{v}(\vec{x}, t) \right] = \int \rho_0(\vec{\xi}')\ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))d^3\xi'.$$

Sustituyendo  $\ddot{\vec{x}}(\vec{\xi}', t)$  en términos del potencial gravitacional se llega a la siguiente relación:

$$\rho(\vec{x}, t) \left[ \frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{v}(\vec{x}, t) \right] = - \int \rho_0(\vec{\xi}')\nabla\Phi(\vec{x}(\vec{\xi}', t))\delta(\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}', t))d^3\xi',$$

por lo tanto, la ecuación de Navier-Stokes teniendo en cuenta que las partículas están sujetas a un potencial gravitacional toma la siguiente forma:

$$\frac{\partial \vec{v}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{v}(\vec{x}, t) \cdot \nabla)\vec{v}(\vec{x}, t) = -\nabla\Phi(\vec{x}, t). \quad (1.25)$$

Las ecuaciones (1.10) y (1.25) definen la evolución de una distribución de materia de un gas gravitacional. En el próximo capítulo se analiza la forma estática de las ecuaciones (1.10) y (1.25) con el fin de determinar la distribución  $\rho(\vec{x}, t)$  presente dentro de la estructura adquirida por el gas gravitacional y poder caracterizar la estructura de galaxias anulares.

## 2 ESTRUCTURA DE GALAXIAS ANULARES

En este capítulo se utilizan los conceptos previamente establecidos para gases gravitacionales con el fin de determinar características presentes en la estructura de galaxias anulares. Se estudia el gas gravitacional como si este fuera un fluido que se encuentra rotando con un determinado momento angular que se conserva. Con el fin de solucionar las ecuaciones diferenciales no lineales presentes en las ecuaciones estáticas de Navier-Stokes y de continuidad se utiliza una herramienta matemática conocida como parametrización de Clebsch. Las soluciones obtenidas determinan como esta distribuida la materia dentro de la estructura adquirida por el gas gravitacional en rotación. Los resultados encontrados están de acuerdo con los deducidos por Pronko<sup>1</sup> mediante un formalismo matemático distinto.

### 2.1. ECUACIONES ESTÁTICAS

En el capítulo uno se establecen las expresiones dinámicas de un gas gravitacional. En este capítulo se analiza la forma estática de dichas expresiones, para ello, se tiene en cuenta que la ecuación de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad no varían en el tiempo y de esta manera las ecuaciones (1.10) y (1.25) toman la forma:

$$(\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x}) = -\nabla\Phi(\vec{x}), \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot (\rho(\vec{x})\vec{v}(\vec{x})) = 0, \quad (2.2)$$

donde

$$\phi(\vec{x}) = -G \int \frac{\rho_0(\vec{\xi}')}{|\vec{x} - \vec{x}(\vec{\xi}')|} d^3\xi'.$$

---

<sup>1</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 7-13.

Tomando la divergencia a ambos lados de (2.1) y teniendo en cuenta que  $\nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\rho(\vec{x})$ , como se puede observar en<sup>2</sup>, se obtiene:

$$\nabla \cdot [(\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x})] = -4\pi G\rho(\vec{x}). \quad (2.3)$$

Por otra parte teniendo en cuenta que  $\nabla \times (\nabla\Phi) = 0$ , la ecuación (2.1) permite establecer:

$$\nabla \times [(\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x})] = 0. \quad (2.4)$$

Las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) describen el caso estático de un gas gravitacional. El término  $(\vec{v}(\vec{x}) \cdot \nabla) \vec{v}(\vec{x})$  en coordenadas cilíndricas toma la forma<sup>3</sup> :

$$\begin{aligned} [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]_r &= v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\phi^2}{r}, \\ [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]_\phi &= v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_\phi}{\partial z} + \frac{v_r v_\phi}{r}, \\ [(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]_z &= v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

El conjunto de ecuaciones (2.5) permiten escribir las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de continuidad en coordenadas cilíndricas. Este sistema de coordenadas se utiliza en el desarrollo de las ecuaciones (2.2)-(2.4) para el caso de gases gravitacionales en rotación.

**2.1.1. Adimensionalización.** Con el fin de resolver las ecuaciones estáticas resulta conveniente expresar algunas cantidades en términos de magnitudes que típicamente aparecen en problemas de gravitación. Para ello se toma como referencia el problema de una masa puntual  $M_c$  y un objeto de masa  $m$  en una órbita circular de radio  $R_c$  y con una velocidad angular  $\Omega$ . Para este caso la condición de equilibrio requiere que:

<sup>2</sup>BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *Potential Theory*(pp. 55-137). New Jersey, United States of America.

<sup>3</sup>POTTER, M.C, WIGGERT, D.C. (2002). Mecánica de fluidos. Cengage Learning Editores. *Introducción al movimiento de los fluidos*(pp. 77-103). Mexico D.F., Mexico.

$$G \frac{M_c m}{R_c^2} = m R_c \Omega^2, \quad R_c^3 = G \frac{M_c}{\Omega^2},$$

donde  $R_c$  y  $M_c$  se pueden utilizar como cantidades características del problema. Para adimensionalizar (2.2)-(2.4) se definen las siguientes cantidades:  $r = R_c \tilde{r}$ ,  $\phi = \tilde{\phi}$  y  $z = R_c \tilde{z}$ , donde  $(\tilde{r}, \tilde{\phi}, \tilde{z})$  son las coordenadas adimensionales.

Para adimensionalizar la velocidad, se la expresa en términos de  $R_c \Omega$  con sus respectivas unidades, luego  $\vec{v} = R_c \Omega \vec{v}$  y de esta manera  $\vec{v}$  es la velocidad adimensionalizada. En forma similar  $\nabla = \frac{1}{R_c} \tilde{\nabla}$  y  $\vec{v} = R_c \Omega \vec{v}$ . Así (2.3) toma la forma:

$$\left( \frac{1}{R_c} \tilde{\nabla} \right) \cdot \left[ \left( R_c \Omega \vec{v} \cdot \left( \frac{1}{R_c} \tilde{\nabla} \right) \right) R_c \Omega \vec{v} \right] = -4\pi G \rho(\vec{x}),$$

esto es:

$$\tilde{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{v} \cdot \tilde{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -4\pi \frac{G}{\Omega^2} \rho(\vec{x}). \quad (2.6)$$

Teniendo en cuenta que:

$$4\pi \frac{G}{\Omega^2} = 4\pi \frac{G M_c}{\Omega^2} \frac{1}{M_c} = \frac{4\pi R_c^3}{M_c} = \frac{3}{\rho_0},$$

donde  $\rho_0 = \frac{M_c}{\frac{4}{3}\pi R_c^3}$  define una densidad de referencia para la cual  $\rho = \rho_0 \tilde{\rho}$ , la ecuación (2.6) esta dada por:

$$\tilde{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{v} \cdot \tilde{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -3\tilde{\rho}.$$

Un procedimiento similar se aplica a las ecuaciones (2.2) y (2.4) con el fin de adimensionalizar las ecuaciones que definen el caso estático de un gas gravitacional. Se obtiene:

$$\tilde{\nabla} \cdot (\tilde{\rho} \vec{v}) = 0, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\nabla} \cdot \left[ \left( \vec{v} \cdot \tilde{\nabla} \right) \vec{v} \right] = -3\tilde{\rho}, \quad (2.8)$$

$$\tilde{\nabla} \times \left[ \left( \vec{v} \cdot \tilde{\nabla} \right) \vec{v} \right] = 0. \quad (2.9)$$

El anterior conjunto de ecuaciones esta expresado en términos de cantidades conocidas, además, se pueden solucionar utilizando las parametrizaciones de Clebsch <sup>4</sup>. En adelante por comodidad en los calculos se trabaja con las ecuaciones adimensionales (2.7)-(2.9).

## 2.2. PARAMETRIZACIONES DE CLEBSCH

Las ecuaciones (2.7)-(2.9) son ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales que definen la configuración estática de un gas gravitacional tridimensional, soluciones analíticas a este tipo de problemas siguen siendo un problema abierto en las matemáticas. Para el caso de galaxias anulares las soluciones a estas ecuaciones deben tener una configuración altamente simétrica, muy parecida a una estructura toroidal, donde la densidad se concentra en las vecindades de los ejes del toroide, y el campo de velocidades es tangencial a la superficie del toroide.

Para el caso de un toroide la velocidad y su densidad estan dadas por<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} \vec{v}(\vec{x}) &= v(r)\hat{\phi}, \\ \rho(\vec{x}) &= \rho(r). \end{aligned}$$

Donde  $(r, \phi, z)$  son las coordenadas cilíndricas bajo las cuales se puede describir el movimiento de las partículas dentro de la estructura. Para este caso se utiliza el conjunto de ecuaciones (2.5), se obtiene:

$$[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]_r = - \left( \frac{v^2(r)}{r} \right).$$

Si se aplica la divergencia a la anterior expresión se puede establecer:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r[(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}]_r) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (-v^2(r)),$$

---

<sup>4</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 12.

<sup>5</sup>Ibíd., p. 10-11.

en consecuencia la ecuación (2.3) toma la forma:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (v^2(r)) = 4\pi G \rho(r). \quad (2.10)$$

De esta manera para este caso particular el campo de velocidades se obtiene mediante:

$$v(r) - v(r_0) = \left[ 4\pi G \int_{r_0}^r r \rho(r) dr \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Con la anterior expresión se puede graficar el campo de velocidades para diferentes densidades  $\rho(r)$ . Con el fin de trabajar fluidos en rotación se introducen las parametrizaciones de Clebsch para el campo de velocidades:

$$\vec{v}(\vec{x}) = f(\vec{x}) \nabla g(\vec{x}) + \nabla h(\vec{x}). \quad (2.12)$$

Donde  $f(\vec{x})$ ,  $g(\vec{x})$  y  $h(\vec{x})$  son funciones escalares. Para estructuras toroidales, en las que tanto  $\vec{v}$  como  $\rho$  poseen simetría azimutal y su dependencia en  $z$  es despreciable debido a que el grosor de la galaxia es muy pequeño en comparación a su diámetro, se busca que el término  $\nabla h(\vec{x})$  solo dependa de  $r$  y que se encuentre en la dirección  $\hat{\phi}$ . La elección más sencilla para este caso es tomar  $h = k\phi$  con  $k$  constante. En consecuencia  $\nabla h = \frac{k}{r} \hat{\phi}$ . Este razonamiento permite establecer una parametrización de Clebsch de la forma:

$$\vec{v}(r, \phi, z) = \cos[\alpha(r)] \nabla \beta(r) + \frac{k}{r} \hat{\phi}. \quad (2.13)$$

Este tipo de velocidad incluye un término  $v_\phi$  asociado a la velocidad de rotación de la galaxia. Por otra parte la constante  $k$  esta relacionada con la componente  $z$  del momento angular total. De la expresión (2.13) se tiene:

$$\vec{L} = \int \rho(r) \vec{r} \times \vec{v} d^3r = k \int \rho(r) d^3r \hat{z} = kM \hat{z},$$

donde  $M$  es la masa total de la galaxia, finalmente  $k = \frac{L_z}{M}$ . El valor de  $L_z$  constante es una consecuencia de la simetría azimutal de la estructura toroidal; de esta manera la única variable del problema es el parámetro  $k$  asociado al momento angular  $L_z$  total

del gas gravitacional en rotación.

La parametrización de Clebsch satisface directamente (2.9) haciendo que la solución del problema se reduzca a la solución de (2.8) sujeto a la restricción impuesta por la ecuación de continuidad (2.7). Por lo tanto las soluciones a estas ecuaciones diferenciales no lineales dependen de tres parámetros  $\rho(r)$ ,  $\alpha(r)$  y  $\beta(r)$ , además de las condiciones iniciales del problema.

Para estudiar gases gravitacionales en rotación es necesario emplear la parametrización de Clebsch (2.13). Esta parametrización permite solucionar las ecuaciones estáticas de un gas gravitacional en rotación (2.7)-(2.9) dando como resultado la distribución de materia  $\rho(r)$  presente dentro de la estructura adquirida por el gas gravitacional.

### 2.3. SOLUCIÓN NUMÉRICA

En esta sección se estudia la solución numérica al conjunto de ecuaciones diferenciales adimensionales (2.7)-(2.9) para ello se emplea la parametrización de Clebsch (2.13) teniendo en cuenta  $\alpha(r) = 0$ . Esta condición permite encontrar la distribución de materia  $\rho(r)$  y el campo de velocidades  $\beta'(r)$  de las ecuaciones (2.7) y (2.8).

**2.3.1. Estructura del gas gravitacional estacionario.** Para encontrar la distribución de materia  $\rho(r)$  y el campo de velocidades  $\beta'(r)$  del gas gravitacional en rotación, se introduce una parametrización de Clebsch con  $\alpha(r) = 0$ , dando como resultado:

$$\vec{v}(r, \phi, z) = \nabla\beta(r) + \frac{k}{r}\hat{\phi}. \quad (2.14)$$

Para este caso particular de la parametrización de Clebsch las ecuaciones (2.7) y (2.8), toman la forma:

$$\rho(r)\beta''(r) + \frac{\beta'(r)(r\rho'(r) + \rho(r))}{r} = 0, \quad (2.15)$$

$$\frac{2k^2}{r^4} + \beta''(r)^2 + \beta'(r)\left(\beta'''(r) + \frac{\beta''(r)}{r}\right) = -3\rho(r), \quad (2.16)$$

donde se ha empleado el conjunto de ecuaciones (2.5) con el fin de tratar la aceleración convectiva. En (2.15) y (2.16) las primas denotan la derivación con respecto al argumento. De la ecuación (2.15) se encuentra que  $\nu_r = \beta'(r) = \frac{\lambda}{r\rho(r)}$  donde  $\lambda$  es una constante de integración asociada a las condiciones iniciales. Introduciendo  $\beta'(r)$  en (2.16) se obtiene una ecuación diferencial para  $\rho(r)$  que se resuelve numéricamente, al sustituir  $\beta$  por  $-\beta$  también se obtiene una solución válida a las ecuaciones (2.15) y (2.16).

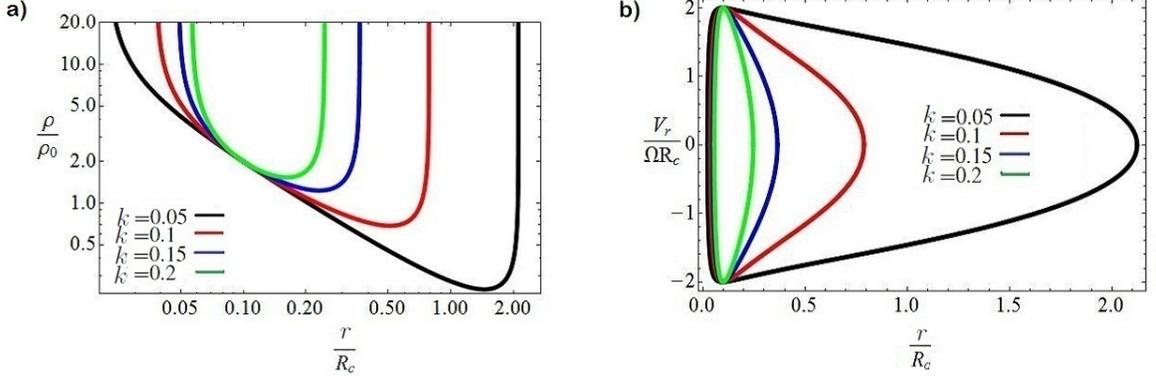


Figura 2.1: a) Gráfica de la densidad del anillo con relación al núcleo. b). Gráfica de las velocidades de la estructura anular para diferentes  $k$  asociados al momento angular de todo el sistema. Las condiciones iniciales para ambas gráficas son:  $\beta(0.1)=10$ ,  $\beta'(0.1)=2$ ,  $\beta''(0.1)=-0.1$ ,  $\rho(0.1)=2$ . Fuente de esta investigación.

Con el fin de explorar el efecto que tienen las diferentes condiciones iniciales sobre las soluciones de las ecuaciones (2.7) y (2.8) se varía el parámetro  $\rho(r)$  y se observa el efecto sobre las soluciones. Tanto en la Figura 2.1a como en la Figura 2.2a se puede observar la misma distribución de materia  $\frac{\rho(r)}{\rho_0(r)}$  para un gas gravitacional en rotación. La primera singularidad que se observa esta asociada al núcleo de la estructura mientras la segunda singularidad puede relacionarse con una configuración anular. En medio de estas dos singularidades se encuentra que la densidad de materia disminuye siguiendo una ley de potencias inversas de la forma:

$$\rho(r) \propto r^{-\gamma}. \quad (2.17)$$

En el caso de galaxias anulares se ha medido experimentalmente que la distribución de materia entre el núcleo y el anillo sigue una relación de la forma:  $\rho(r) \propto r^{-\frac{1}{4}}$ <sup>6,7</sup>. La

<sup>6</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, pag. 458-459.

<sup>7</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring*

variación del parámetro  $\rho(r)$  no afecta la distribución de materia de la estructura ya que las dos singularidades se siguen conservando al igual que la relación (2.17) sigue siendo válida para la densidad de materia presente entre el núcleo y el anillo.

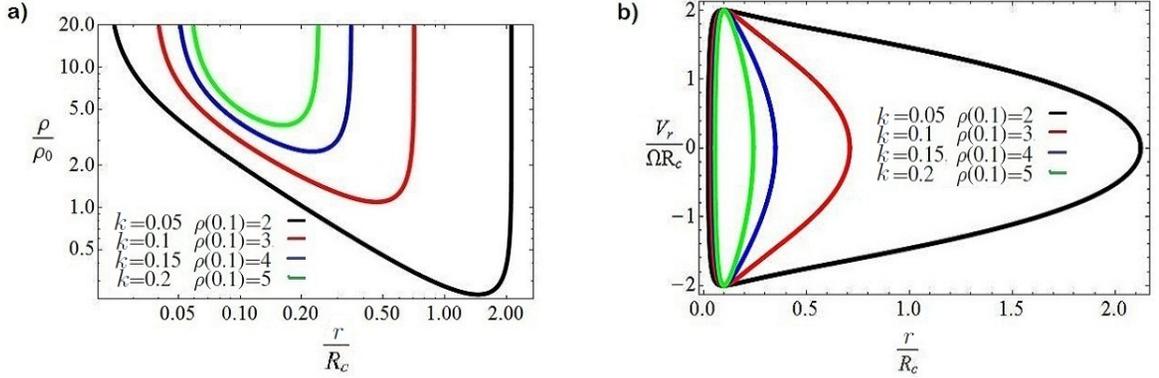


Figura 2.2: a) Gráfica de la densidad del anillo con relación al núcleo, b) Gráfica de las velocidades de la estructura anular en función del radio  $\frac{r}{R_c}$ . Las condiciones iniciales para ambas gráficas son:  $\beta(0.1)=10$ ,  $\beta'(0.1)=2$ ,  $\beta''(0.1)=-0.1$ . Fuente de esta investigación.

En las Figuras 2.1b y 2.2b se puede observar la velocidad de la distribución de materia. Esta velocidad aumenta cada vez que el anillo se acerca al núcleo y disminuye cuando se aleja permitiendo que el momento angular total del sistema se conserve. La estructura estática es la consecuencia del equilibrio entre dos flujos de materia; uno que va del anillo al núcleo y otro en dirección opuesta. Estos flujos se cancelan dando como resultado una estructura con un  $\rho$  independiente del tiempo.

De esta manera teniendo en cuenta la distribución de materia de la Figura 2.1a y los resultados presentados en <sup>8</sup>, <sup>9</sup> se puede pensar que la solución a las ecuaciones estáticas (2.7)-(2.9) que describen un gas gravitacional en rotación mediante una parametrización de Clebsch de la forma (2.14) hace referencia a una galaxia como el Objeto de Hoag. Estas galaxias no son muy comunes en el universo, sin embargo, recientemente se han estudiado algunas de este tipo como se observa en <sup>10</sup>; esto demuestra que su estudio

*galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 3-4.

<sup>8</sup>Schweizer, F., Kent, F. (1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, pag. 458-459.

<sup>9</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 3-4.

<sup>10</sup>Schweizer, F., Kent, F. Op. cit., p. 458-459.

es un campo activo de investigación. En la siguiente sección se realiza una descripción detallada sobre una galaxia de tipo anular llamada Objeto de Hoag.

## 2.4. ESTRUCTURA DEL OBJETO DE HOAG

El Objeto de Hoag fue descubierto en 1950 por Art Hoag. Esta galaxia se encuentra ubicada en la constelación de la serpiente y es considerada una galaxia atípica de magnitud  $16^{th}$ . Un anillo casi perfecto compuesto de estrellas azules rodea un núcleo compuesto por estrellas amarillas <sup>11</sup>, tal como se muestra en la Figura 2.3.

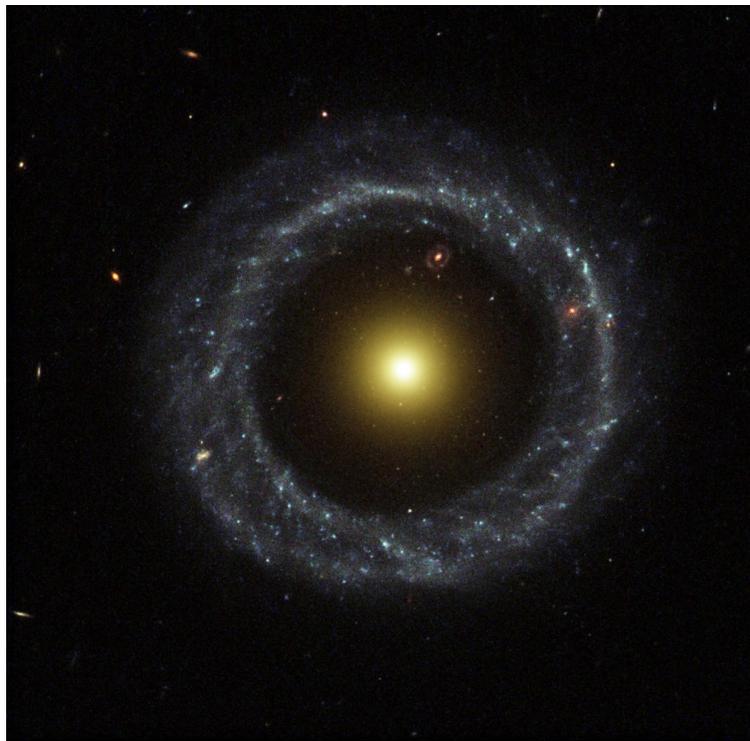


Figura 2.3: Imagen de la galaxia PGC 54559 (Objeto de Hoag) tomada por el telescopio espacial Hubble. Fuente: Del sitio Web: URL: <http://www.guildcompanion.com/scrolls/2011/aug/ssg01.html>

La estructura del gas gravitacional en rotación descrito por la solución a las ecuaciones (2.7)-(2.9) teniendo en cuenta una parametrización de Clebsch de la forma (2.14) hace referencia a una galaxia anular como la mostrada en la Figura 2.3. Existen varias teorías

<sup>11</sup>Freeman, T., Howard, S., Byrd, G. (2008). *Hoag's object, remnant of a vanished bar?*. Recuperado del sitio Web [http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's Object, Remnant of Vanished Bar. T.Freeman et.al.pdf](http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's%20Object,%20Remnant%20of%20Vanished%20Bar.%20T.Freeman%20et.al.pdf), pag. 35.

acerca de como se originó esta galaxia atípica, clásicamente las galaxias anulares se forman por la colisión de una pequeña galaxia con una galaxia espectral mucho mas grande; sin embargo no hay signos de una galaxia cercana que haya actuado como una "bala", además el núcleo del Objeto de Hoag tiene una velocidad muy baja en relación a la velocidad del anillo (velocidad relativa), haciendo que esta hipótesis sea improbable <sup>12</sup>. También se ha sugerido que el Objeto de Hoag pudo haber sido el resultado de una galaxia espiral barrada inestable, pero claramente se puede observar que el núcleo del Objeto de Hoag es un esferoide normal, mientras que el núcleo de una galaxia espiral barrada tiene forma de barra <sup>13</sup>. En la tabla 2.1 se presentan las características físicas del Objeto de Hoag.

Propiedades generales	Objeto de Hoag
Magnitud	+16
RA(J2000)	15 <sup>h</sup> 17 <sup>m</sup> 14 <sup>s</sup> ,4
Dec(J2000)	+21 <sup>h</sup> 35 <sup>m</sup> 08 <sup>s</sup>
Distancia (Mpc)	175,5
Diámetro núcleo (Kpc)	5,3 ± 0,2
Diámetro interno del anillo (Kpc)	24,8 ± 1,1
Diámetro exterior del anillo (Kpc)	39,9 ± 1,7
Corrimiento al rojo (Km/s)	12,740 ± 50
Velocidad del núcleo (Km/s)	12,735 ± 4
Velocidad del anillo (Km/s)	12,736 ± 6

Cuadro 2.1: Características físicas del Objeto de Hoag

En este capítulo se ha encontrado la distribución de materia estacionaria  $\rho(r)$  para un gas gravitacional en rotación utilizando una parametrización de Clebsch específica. La distribución de materia obtenida sugiere una estructura como la mostrada en el Objeto de Hoag.

<sup>12</sup>Freeman, T., Howard, S., Byrd, G. (2008). *Hoag's object, remnant of a vanished bar?*. Recuperado del sitio web [http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's Object, Remnant of Vanished Bar. T.Freeman et.al.pdf](http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's%20Object,%20Remnant%20of%20Vanished%20Bar.%20T.Freeman%20et.al.pdf), pag. 36-37.

<sup>13</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, pag. 460-461.

### 3 DINÁMICA ESTELAR EN GALAXIAS

En este capítulo se presentan aspectos generales de la dinámica estelar en galaxias. Los temas y métodos desarrollados siguen un esquema similar al presentado en <sup>1</sup>. En particular, se presenta el método de la sección de Poincaré con el fin de estudiar órbitas estelares para diferentes tipos de potenciales gravitacionales asociados a galaxias. El desarrollo de este capítulo permite construir las herramientas numéricas, teóricas y computacionales necesarias para el capítulo 4, donde se estudia la dinámica estelar en galaxias anulares.

#### 3.1. SECCIONES DE POINCARÉ

Para describir el comportamiento dinámico de una estrella sometida a potenciales gravitacionales es necesario solucionar las ecuaciones de movimiento de esta estrella. Por lo general estas ecuaciones no se pueden solucionar de forma analítica y se recurre a la integración numérica, esta herramienta ayuda a entender la dinámica de la estrella en el espacio de fase, partiendo de determinadas condiciones iniciales. Aunque la integración numérica se utiliza para comprender el comportamiento de un sistema dinámico específico es conveniente caracterizar las órbitas descritas por la estrella utilizando el método de secciones superficiales, también conocido como secciones de Poincaré. Este método muestra las intersecciones de la trayectoria de la estrella con una sección superficial del espacio de fase. Mediante este método, el movimiento de la estrella en el espacio de fase puede observarse a través de cientos y miles de oscilaciones periódicas. Esta herramienta sirve para clasificar visualmente si el movimiento de la estrella es regular (no caótico) o irregular (caótico) <sup>2</sup>.

Primero se considera una partícula en el plano  $xy$  que se mueve bajo la acción de un potencial  $\Phi(x, y)$ . El espacio de fase de este sistema es de cuatro dimensiones pero

---

<sup>1</sup>Binney, J., Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*; New Jersey, United States of America: Princeton University, 857.p.

<sup>2</sup>Takashashi, M., Koyama, H. (2008). *Chaotic motion of Charged Particles in an Electromagnetic Field Surrounding a Rotating Black Hole*. Recuperado del sitio Web arXiv:0807-0277v1, pag. 7-15.

la conservación de la energía restringe el movimiento a una región tridimensional en el espacio de fase. En consecuencia, la trayectoria del sistema  $C(t)$  sobre esta región tridimensional corta el plano  $y = 0$  en una superficie bidimensional que puede ser caracterizada por las coordenadas  $(x, p_x)$ . Se puede obtener información valiosa sobre la naturaleza del movimiento en la intersección de la curva  $C(t)$  con la superficie  $y = 0$ . En general, el movimiento se realiza sobre una región limitada del plano  $x, p_x$ .

En este trabajo se considera un sistema bidimensional, por lo tanto, el espacio de fase tiene cuatro dimensiones con las coordenadas  $x, y, p_x$  y  $p_y$ . La conservación de la energía por unidad de masa restringe el movimiento a una superficie tridimensional definida por:

$$\frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \Phi(x, y) = E = \text{constante}. \quad (3.1)$$

Dado  $(x, p_x)$  y la condición  $y = 0$ , se puede determinar  $p_y$  con:

$$p_y = [2(E - \Phi(x, 0)) - p_x^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.2)$$

Conociendo la energía por unidad de masa  $E$  y las condiciones iniciales adecuadas, la ecuación de movimiento puede ser integrada para obtener la órbita de la partícula. Estas órbitas cortan repetidamente la sección superficial en diferentes valores de  $(x, p_x)$ . Si no hay otras integrales de movimiento se espera que los puntos esten distribuidos en una región bidimensional limitada por la curva

$$\frac{1}{2} p_x^2 + \Phi(x, 0) \leq E. \quad (3.3)$$

Existen diferentes secciones superficiales generadas cada una por diferentes funciones Hamiltonianas. Incluso para una función Hamiltoniana determinada, la naturaleza de los puntos (inducidos por el movimiento) sobre la sección superficial pueden diferir ampliamente para diversas condiciones iniciales. Los puntos en la sección superficial son generados cuando las ecuaciones de movimiento son integradas para una partícula. Los ceros de la solución a las ecuaciones de movimiento se conocen como puntos estables<sup>3</sup>.

El método de la sección superficial presentado aquí permite estudiar las órbitas estelares. En lo que sigue, se estudia la dinámica estelar bajo la influencia de potenciales gravitacionales que modelan algunos de los fenómenos que aparecen en las galaxias más comunes.

---

<sup>3</sup>PADMANABHAN, T. (2000). Theoretical Astrophysics. Cambridge University. *Dynamics*(pp. 42-77). New York, United States of America.

### 3.2. ÓRBITAS ESTELARES EN POTENCIALES AXISIMÉTRICOS

En esta sección se considera un sistema modelado por un potencial con simetría axial. Más adelante, se consideran los fenómenos que ocurren cuando se rompe esta simetría. Por razones previas, en este capítulo se utiliza un sistema de coordenadas cilíndrico  $(r, \phi, z)$  con origen en el centro galáctico.

La función Lagrangiana por unidad de masa para una estrella que se mueve en un potencial gravitacional de la forma  $\Phi(r, \phi, z)$  esta dado por:

$$L = \frac{1}{2} \left[ \dot{r}^2 + (r\dot{\phi})^2 + \dot{z}^2 \right] - \Phi(r, \phi, z). \quad (3.4)$$

Para deducir las ecuaciones de movimiento de una partícula sometida a este tipo de potenciales, primero se encuentran los momentos generalizados asociados a las coordenadas  $(r, \phi, z)$  mediante la expresión  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ , donde tanto los  $p_i$  como los  $q_i$  representan los momentos y coordenadas generalizadas del sistema. En este caso las ecuaciones de movimiento se deducen a partir de las siguientes expresiones:

$$p_r = \dot{r}, \quad p_\phi = r^2 \dot{\phi}, \quad p_z = \dot{z}. \quad (3.5)$$

Mediante una transformación de Legendre, la función Hamiltoniana es:

$$H = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \left[ \frac{p_\phi}{r} \right]^2 + p_z^2 \right) + \Phi(r, \phi, z), \quad (3.6)$$

a partir de la ecuación (3.6), la dinámica del sistema esta dada por las ecuaciones de Hamilton:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (3.7)$$

Por medio de las expresiones (3.5)-(3.7), se obtienen las ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{r} = \frac{p_\phi^2}{r^3} - \frac{\partial \Phi(r, \phi, z)}{\partial r}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = -\frac{\partial \Phi(r, \phi, z)}{\partial \phi}, \quad (3.9)$$

$$\ddot{z} = -\frac{\partial \Phi(r, \phi, z)}{\partial z}. \quad (3.10)$$

Al solucionar el conjunto de ecuaciones diferenciales (3.8)-(3.10), se obtienen las ecuaciones de movimiento de una estrella sujeta a un potencial gravitacional de la forma

$\Phi(r, \phi, z)$ . Si se recurre a la conservación del momento angular en la dirección  $z$ , se reduce el problema a uno de carácter bidimensional. Para este sistema axisimétrico se considera el potencial gravitacional con una dependencia de la forma  $\Phi(r, z)$ , lo cual implica una simetría en el ángulo azimutal  $\phi$ . Al aplicar las relaciones (3.8)-(3.10) a este potencial, se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento en coordenadas cilíndricas:

$$\dot{p}_r = \ddot{r} = \frac{p_\phi^2}{r^3} - \frac{\partial\Phi(r, z)}{\partial r}, \quad (3.11)$$

$$\dot{p}_\phi = \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\phi}) = 0, \quad (3.12)$$

$$\dot{p}_z = \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi(r, z)}{\partial z}. \quad (3.13)$$

La ecuación (3.12) expresa la conservación de la componente del momento angular alrededor del eje  $z$ ,  $p_\phi = L_z = \text{constante}$ , mientras las otras dos ecuaciones describen oscilaciones acopladas en las direcciones  $r$  y  $z$ . Se puede reducir las ecuaciones de movimiento (3.11) y (3.13) a:

$$\ddot{r} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial r}, \quad \ddot{z} = -\frac{\partial\Phi_{eff}}{\partial z}, \quad (3.14)$$

donde

$$\Phi_{eff}(r, z) = \Phi(r, z) + \frac{L_z^2}{2r^2}. \quad (3.15)$$

$\Phi_{eff}$  se conoce como potencial efectivo. El término  $\frac{L_z^2}{2r^2}$  sirve como una barrera centrífuga, la cual permite únicamente órbitas con  $L_z = 0$  cercanas al eje de simetría. Esto reduce el movimiento tridimensional a uno bidimensional en el plano meridional  $(r, z)$  que no rota uniformemente alrededor del eje de simetría de acuerdo a  $\Phi(r, z) = \frac{L_z^2}{r^2}$ . Lo anterior permite expresar el sistema físico mediante el Hamiltoniano efectivo por unidad de masa:

$$H_{eff} = \frac{1}{2} (p_r^2 + p_z^2) + \Phi_{eff}(r, z). \quad (3.16)$$

El valor numérico de  $H_{eff}$  es simplemente la energía por unidad de masa total  $E$  de la órbita. Ya que la energía cinética de movimiento en el plano  $(r, z)$  no puede ser negativa, las órbitas están restringidas al área en el plano meridional que satisface la desigualdad  $E \geq \Phi_{eff}$ . La curva que limita esta área es llamada la curva de velocidad cero (ya que en este punto  $\vec{v} = 0$ ).

Ahora se utiliza un potencial efectivo de la forma:

$$\Phi_{eff} = \frac{1}{2} v_0^2 \ln \left( r^2 + \frac{z^2}{q^2} \right) + \frac{L_z^2}{2r^2}, \quad (3.17)$$

este potencial efectivo se asemeja al experimentado por una estrella en una galaxia esferoide obalada que tiene una velocidad circular constante.

En la Figura 3.1 se presentan las graficas de  $\Phi_{eff}(r, z)$  para diferentes valores del parámetro  $q$  correspondiente a la razón entre el semi-eje mayor y menor de la galaxia esferoide.

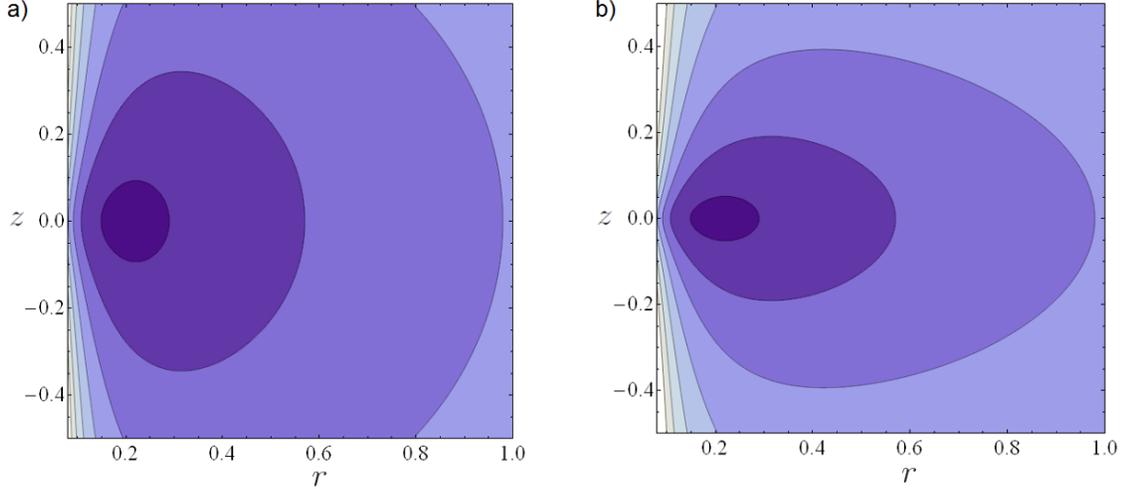


Figura 3.1: Gráfica que corresponde a  $\Phi_{eff}(r, z)$  de la ecuación (3.17) con las siguientes condiciones iniciales: a)  $v_0 = 1$ ,  $L_z = 0.2$  y  $q = 0.9$ , b)  $v_0 = 1$ ,  $L_z = 0.2$  y  $q = 0.5$ . Los contornos se hacen para  $\Phi_{eff} = -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 5$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 160.

A menos que el potencial gravitacional  $\Phi(r, z)$  sea de una forma especial, las ecuaciones (3.14), no se pueden solucionar analíticamente. Sin embargo, se puede seguir la evolución de  $r(t)$  y  $z(t)$  integrando las ecuaciones de movimiento numéricamente partiendo de una variedad de condiciones iniciales. En la Figura 3.2 se muestra el resultado de la integración numérica de las ecuaciones (3.14) con  $q = 0.9$ .

Para simplificar el problema e investigar las propiedades de las órbitas también se puede utilizar las secciones superficiales. El espacio de fase asociado con el movimiento posee cuatro dimensiones  $r, z, p_r$  y  $p_z$ , en consecuencia, el movimiento de una estrella en el espacio de fase es muy difícil de visualizar. Ya que la función Hamiltoniana  $H_{eff}(r, z, p_r, p_z)$  es constante, se puede graficar el movimiento de un punto representativo en un espacio de fase reducido a tres dimensiones,  $(r, z, p_r)$ , y entonces  $p_z$  está de-

terminado por el valor conocido de  $E$  y  $H_{eff}$ . Sin embargo, incluso en un espacio tridimensional es difícil de dibujar, así que solamente se muestran los puntos donde la estrella se cruza con algún plano en el espacio reducido ( $z = 0$ ); aquellos puntos se llaman consecuentes. Para remover la ambigüedad en el signo de  $p_z$ , solamente se grafican las coordenadas  $(r, p_r)$  unicamente cuando  $p_z > 0$ . Estas graficas se conocen como secciones superficiales.

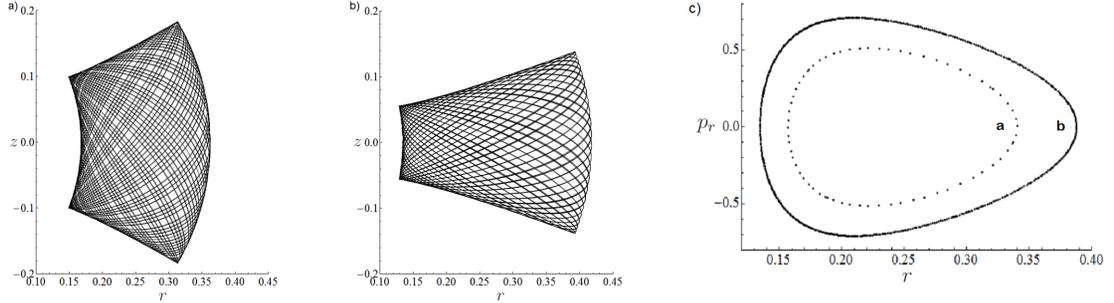


Figura 3.2: Órbitas trazadas por la estrella bajo el potencial  $\Phi_{eff}$  de la ecuación (3.17) con las siguientes condiciones iniciales: a)  $v_0 = 1$ ,  $L_z = 0.2$  y  $q = 0.9$ , b)  $v_0 = 1$ ,  $L_z = 0.2$  y  $q = 0.9$ , c) Sección superficial  $(r, p_r)$  para las órbitas presentadas en a), b). Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 161.

En las Figuras 3.2a y b, se puede observar las órbitas en forma de curvas paramétricas  $(r(t), z(t))$ . La Figura 3.2c presenta las secciones de Poincaré para estas soluciones.

Las Figuras 3.2a y b muestra que una estrella sujeta al potencial de la forma (3.17) se mueve en órbitas que tienen un comportamiento periódico y regular. Esto se hace evidente en la sección de Poincaré mostrada en la Figura 3.2c, donde, tal como se mencionó en la sección 3.1, solo se toman puntos de la trayectoria de la partícula para los cuales  $z = 0$  y  $\dot{z} > 0$ ,<sup>4</sup>.

Los métodos empleados en esta sección para el estudio de potenciales axisimétricos se utilizan en la siguiente para analizar la dinámica estelar dentro de potenciales no axisimétricos. Dentro de este tipo de potenciales se puede identificar dos dinámicas estelares diferentes una de carácter regular (no caótica) y otra de carácter irregular (caótica).

<sup>4</sup>BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Star*(pp. 142-268). New Jersey, United States of America.

### 3.3. ÓRBITAS EN POTENCIALES NO AXISIMÉTRICOS

En esta sección se trabajan potenciales que no tienen simetría axial con el objetivo de estudiar potenciales mas acordes con la realidad, donde la simetría axial no se cumple y la dinámica estelar en ocasiones ya no se representa a través de órbitas periódicas y regulares.

**3.3.1. Caso I: Órbitas Periódicas.** Debido a que muchas galaxias tienen estructuras no axisimétricas, es de gran ayuda estudiar el comportamiento de estrellas sometidas a este tipo de potenciales, esto se nota bastante en el centro de muchas galaxias en forma de disco. Se considera un potencial de la forma:

$$\Phi_L(x, y) = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left( R_c^2 + x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right), \quad (3.18)$$

para  $0 < q \leq 1$  y donde  $R_c$  es un parámetro. El potencial  $\Phi_L(x, y)$  tiene las siguientes propiedades:

- Las superficies equipotenciales tienen una relación axial constante  $q$  así que la asimetría es similar en todo el radio. Ya que  $q \leq 1$ , el eje  $y$  es el menor.
- Para  $r = \sqrt{x^2 + y^2} \ll R_c$ , se puede expandir  $\Phi_L$  en potencias de  $\frac{r}{R_c}$  y encontrar:

$$\Phi_L(x, y) \approx \frac{v_0^2}{2R_c^2} \left( x^2 + \frac{y^2}{q^2} \right) + Constante \quad (r \ll R_c). \quad (3.19)$$

Este potencial es el mismo que el de un oscilador armónico bidimensional. Así para  $r < R_c$ ,  $\Phi_L(x, y)$  es aproximadamente el potencial de una distribución de densidad de materia homogénea.

- Para  $r \gg R_c$  y  $q = 1$ ,  $\Phi_L \approx v_0^2 \ln r$ , valor que corresponde a la velocidad circular  $v_c \approx v_0$  que es muy cercana a una constante. Así la componente radial de la fuerza generada por  $\Phi_L$  con  $q \approx 1$  es consistente con la curva de velocidad plana de muchos discos de galaxia.

En la Figura 3.3 se presenta el potencial descrito por la ecuación (3.18) para los valores de relación axial  $q = 0.5$  y  $0.9$ .

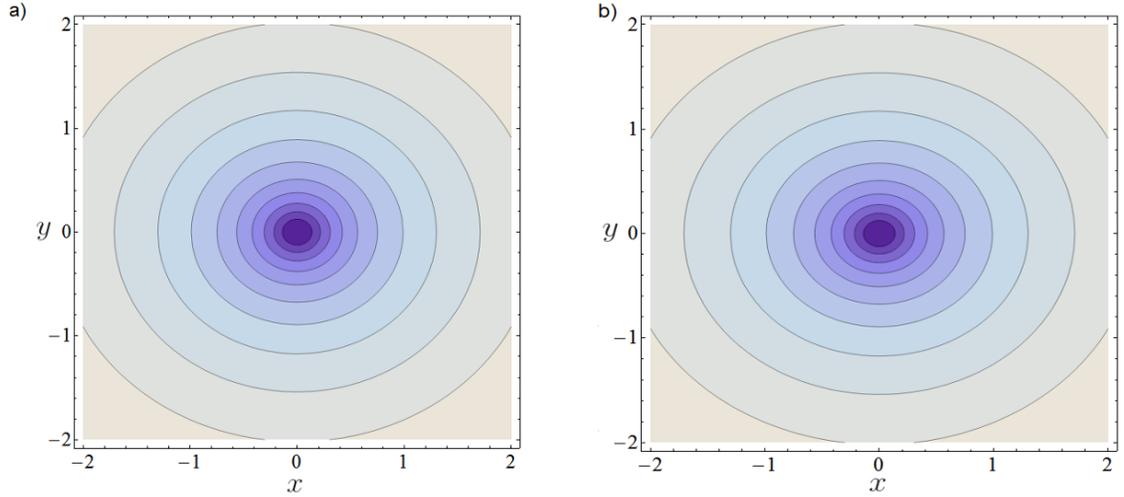


Figura 3.3: Gráfica que corresponde a  $\Phi_L(x, y)$  de la ecuación (3.18) con las siguientes condiciones iniciales: a)  $v_0 = 1$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $x = 5R_c$  y  $q = 0.5$ , b)  $v_0 = 1$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $x = 5R_c$  y  $q = 0.9$ . Fuente de esta investigación.

Las órbitas más simples para  $\Phi_L$  son aquellas que están confinadas a  $r \ll R_c$ . Para un  $\Phi_L$  como el de la ecuación (3.19) la órbita será el resultado de la suma de dos movimientos armónicos independientes paralelos a los ejes  $x$  y  $y$ . Las frecuencias de aquellos movimientos son  $w_x = \frac{v_0}{R_c}$  y  $w_y = \frac{v_0}{qR_c}$ , a menos que aquellas frecuencias sean comparables ( $\frac{w_x}{w_y} = \frac{n}{m}$  para algunos enteros  $m$  y  $n$ ), la estrella pasa eventualmente cerca a cada punto dentro de una caja rectangular. Aquellas órbitas se conocen como órbitas de caja y representan dos integrales de movimiento que se tomarán como la función Hamiltoniana de dos oscilaciones independientes paralelas a los ejes coordenados  $x$  y  $y$ , de esta manera:

$$H_x = \frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}v_0^2 \frac{x^2}{R_c^2}; \quad H_y = \frac{1}{2}v_y^2 + \frac{1}{2}v_0^2 \frac{y^2}{q^2 R_c^2}. \quad (3.20)$$

Las órbitas obtenidas para este caso son similares a las figuras de Lissajous con frecuencias  $w_x$ ,  $w_y$ .

Para investigar las órbitas formadas cuando  $r \geq R_c$ , se debe utilizar integración numérica. Dos ejemplos de aquel tipo de órbitas se presentan en la Figura 3.4, donde son graficadas las curvas paramétricas  $(x(t), y(t))$  obtenidas mediante la solución de las

ecuaciones de movimiento:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\partial\Phi_L(x, y)}{\partial x}, \quad \ddot{y}(t) = -\frac{\partial\Phi_L(x, y)}{\partial y}, \quad (3.21)$$

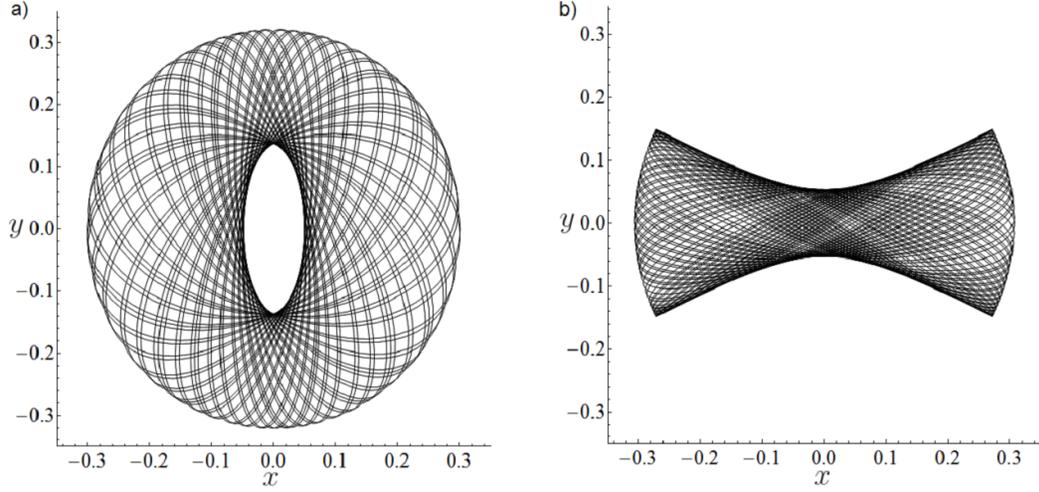


Figura 3.4: Solución numérica de (3.21). Donde,  $\Phi_L(x, y)$  se define con los parámetros:  $v_0 = 1$ ,  $L_z = 0.2$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $q = 0.5$  y  $E = -0.337$ . a) Esta gráfica se obtiene con las siguientes condiciones iniciales:  $x(0) = -0.1$ ,  $y(0) = -0.3$ ,  $v_x = -0.2$  y  $v_y = 0.2$ . b) Órbita correspondiente a las siguientes condiciones:  $x(0) = 0.2$ ,  $y(0) = 0.1$ ,  $v_x = 0.6$  y  $v_y = 0.4$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). *Galactic Dynamics*. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 172.

En ningún momento las órbitas caen en la curva elíptica de velocidad cero  $\Phi_L = E$ , de esta manera, las dos órbitas representan una segunda integral en adición a la energía. Este tipo de órbitas se pueden investigar generando una sección superficial como la que se muestra en la Figura 3.5. Esta es la sección superficial correspondiente a  $y = 0$ ,  $\dot{y} > 0$  generada por las órbitas  $\Phi_L$ . Utilizando las mismas energías que se emplearon en la Figura 3.4 se puede encontrar la curva límite que surge de la siguiente condición:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \Phi_L(x, 0) \leq \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \Phi_L(x, 0) = H_{y=0}. \quad (3.22)$$

Cada curva cerrada en la Figura 3.5 corresponde a diferentes órbitas. Todas estas órbitas están confinadas a una curva de energía  $E$ . En la Figura 3.5 se presenta la sección de Poincaré para algunas órbitas obtenidas mediante la solución numérica de las ecuaciones (3.21). En particular, las curvas marcadas con a y b, son las secciones superficiales

asociadas a las órbitas presentadas en la Figura 3.4. En este caso, la sección superficial es obtenida teniendo en cuenta los puntos de la órbita donde  $y = 0$ ,  $\dot{y} > 0$ .

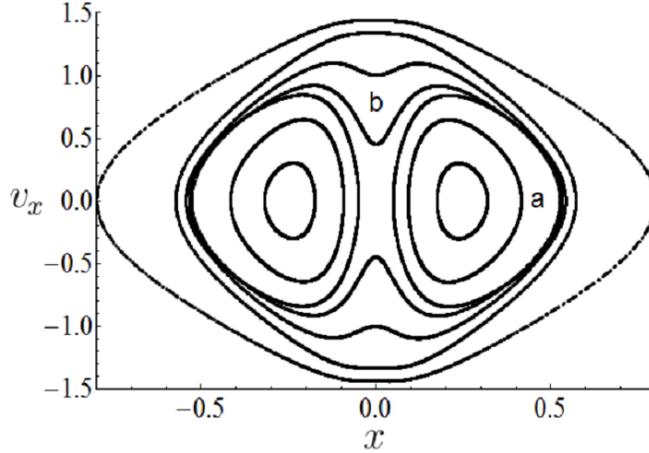


Figura 3.5: La superficie de sección generada por las órbitas del potencial  $\Phi_L(x, y)$  descritas en las Figuras 3.4a y b, teniendo en cuenta las ecuaciones de movimiento (3.21) con  $q = 0.5$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 173.

Las órbitas obtenidas a partir de la solución de las ecuaciones dinámicas (3.21) dependen significativamente del parámetro  $q$  en el potencial  $\Phi_L$ . Con el fin de ilustrar este fenómeno, se obtienen órbitas para el caso  $q = 0.6$ .

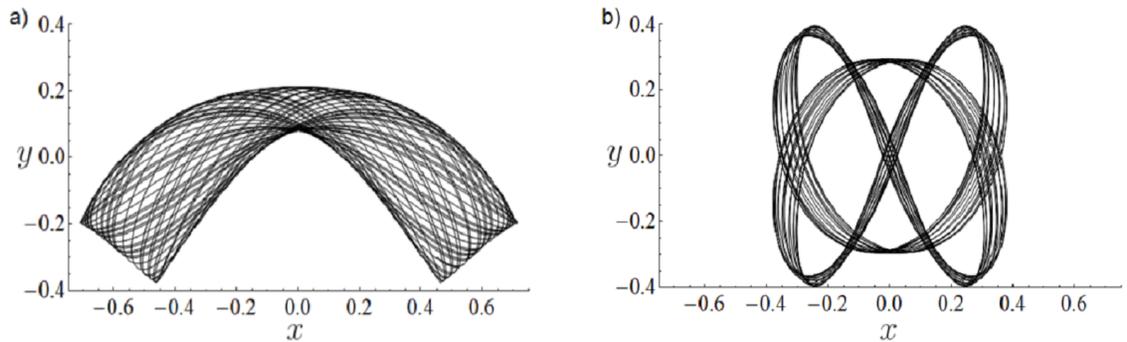


Figura 3.6: Órbitas estelares que corresponden a  $\Phi_L(x, y)$  de la ecuación (3.18) con las siguientes valores constantes:  $v_0 = 1$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $q = 0.6$ . Estas graficas se obtiene con las siguientes condiciones iniciales: a)  $x(0) = 0.45$ ,  $y(0) = -0.3$ ,  $v_x(0) = 0.45$  y  $v_y(0) = -0.3$ , b)  $x(0) = -0.15$ ,  $y(0) = 0.2$ ,  $v_x(0) = -0.8$  y  $v_y(0) = -0.8$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 253.

En la Figura 3.6 se presentan órbitas que muestran características que no aparecen en el caso  $q=0.5$ . La estructura del diagrama de Poincaré también cambia, la Figura 3.7 presenta esta sección obtenida a partir de diferentes condiciones iniciales, al observar los resultados se encuentran nuevamente órbitas periódicas, aunque con más estructura con respecto al caso presentado en la Figura 3.5 para el cual  $q=0.5$ .

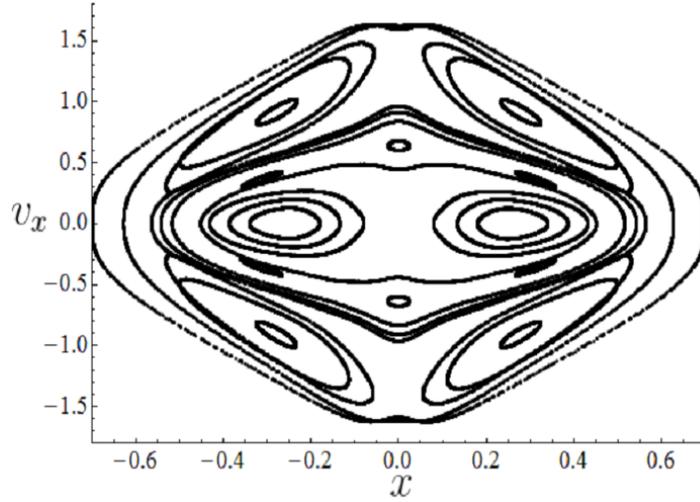


Figura 3.7: La superficie de sección generada por las órbitas del potencial  $\Phi_L$  descritas en la Figuras 3.6a y b. teniendo en cuenta las ecuaciones de movimiento (3.21) con  $q=0.6$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 252.

En la Figura 3.7 se puede observar un comportamiento de las órbitas completamente periódico y regular, pero con mayor estructura que el presentado en la Figura 3.5 debido a la variación del parámetro  $q$ . En esta sección se observa que la dinámica estelar dentro de potenciales no simétricos también puede ser de tipo regular y periódico como se observó para el caso de potenciales simétricos. En la proxima sección se analiza otro tipo de dinámica estelar una de carácter irregular y no periódico.

**3.3.2. Caso II: Dinámica Caótica.** Los resultados presentados en el caso I muestran órbitas estelares periódicas debido a la forma del potencial  $\Phi_L$ . Sin embargo, existen otros potenciales que dan como resultado una dinámica caótica, esto es, órbitas no periódicas producto de una dinámica no lineal en una región finita y con alta susceptibilidad a las condiciones iniciales.

El potencial en este caso es una modificación del potencial  $\Phi_L$  correspondiente a la

ecuación (3.18) escrita en coordenadas polares:

$$\Phi_L(r, \phi) = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left[ R_c^2 + \frac{1}{2}r^2 (q^{-2} + 1) - \frac{1}{2}r^2 (q^{-2} - 1) \cos 2\phi \right]. \quad (3.23)$$

Ahora se utiliza la variante:

$$\Phi_{II}(r, \phi) = \frac{1}{2}v_0^2 \ln \left[ R_c^2 + \frac{1}{2}r^2 (q^{-2} + 1) - \frac{1}{2}r^2 (q^{-2} - 1) \cos 2\phi - \frac{r^3}{R_e} \cos 2\phi \right], \quad (3.24)$$

donde  $R_e$  es constante. El potencial de la ecuación (3.24) difiere del potencial de la ecuación (3.23) por el término adicional  $\frac{r^3}{R_e} \cos 2\phi$  que esta dentro del argumento del logaritmo natural. Se escoge el conjunto de soluciones con las siguientes condiciones:  $R_e = 3$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $q = 0.9$  y  $q = 0.5$  para graficar el contorno del potencial  $\Phi_{II}$ , como se muestra a continuación:

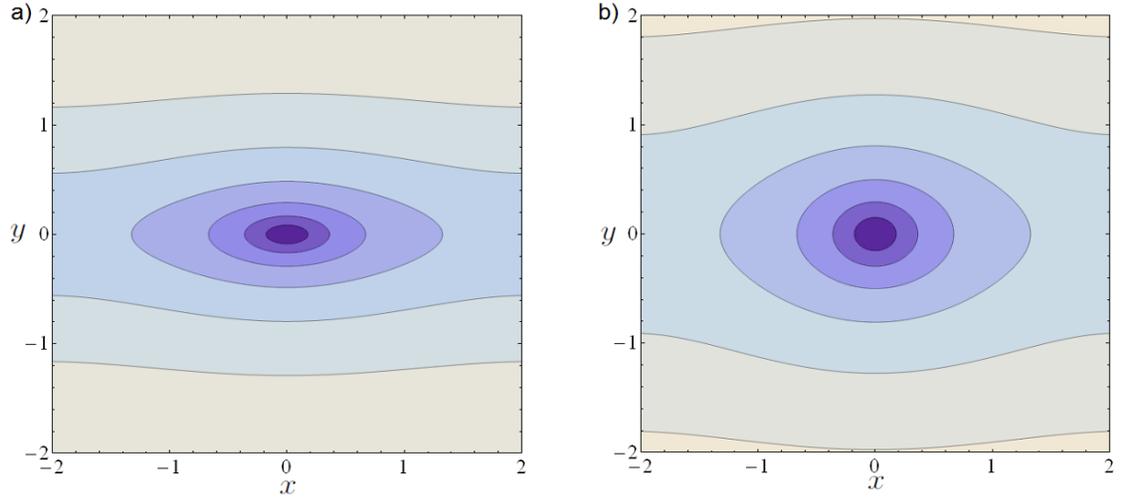


Figura 3.8: Gráficas corresponden a  $\Phi_{II}(x, y)$  de la ecuación (3.24) con las siguientes valores constantes:  $v_0 = 1$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $R_e = 3$  y  $L_z = 0.2$ . Estas graficas se obtienen con a)  $q = 0.5$  y b)  $q = 0.9$ . Fuente de esta investigación.

Ahora se estudia la sección superficial generada por las órbitas en  $\Phi_{II}$ , a partir de las ecuaciones de movimiento correspondientes:

$$\ddot{x}(t) = -\frac{\partial \Phi_{II}(x, y)}{\partial x}, \quad \ddot{y}(t) = -\frac{\partial \Phi_{II}(x, y)}{\partial y}. \quad (3.25)$$

La Figura 3.9 hace referencia a las órbitas generadas al solucionar las ecuaciones dinámicas (3.25).

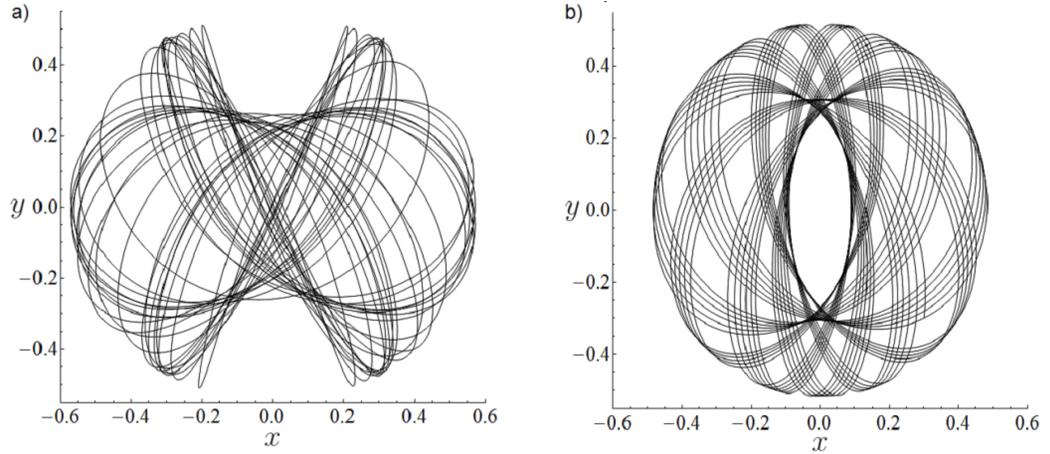


Figura 3.9: Solución numérica de la ecuación (3.25) con las constantes:  $v_0 = 1$ ,  $R_c = 0.14$ ,  $R_e = 3$ ,  $q = 0.9$  y  $L_z = 0.2$ . Para estas graficas se emplean las siguientes condiciones iniciales: a)  $x(0) = 0.3$ ,  $y(0) = 0.3$ ,  $v_x(0) = 0.8$  y  $v_y(0) = 0.1$ , b)  $x(0) = 0.3$ ,  $y(0) = -0.3$ ,  $v_x(0) = 0.1$  y  $v_y(0) = 0.8$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 257.

A diferencia de la Figura 3.7, donde se encuentra un comportamiento de las órbitas regular y completamente periódico, las órbitas mostradas en la Figura 3.6, resultado de la solución a las ecuaciones (3.25), muestran lo contrario como se puede observar en la Figura 3.11, donde se observa un comportamiento caótico.

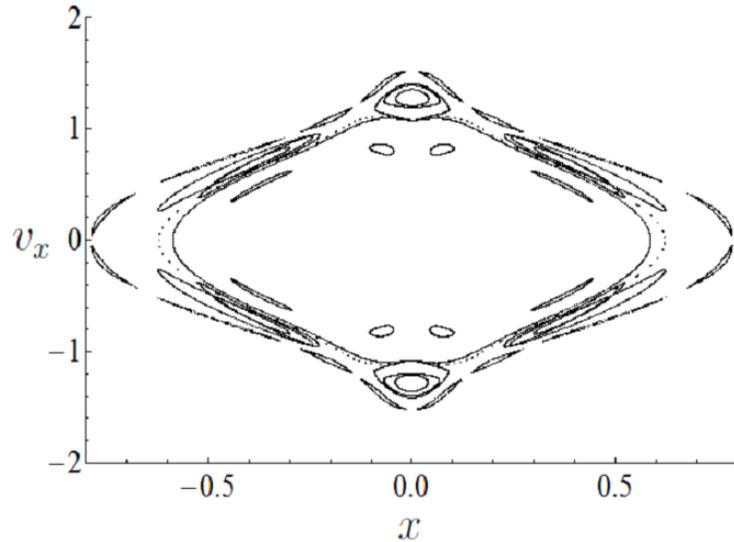


Figura 3.10: Sección de Poincaré externa generada por las órbitas del potencial  $\Phi_{II}(x, y)$  de la ecuación (3.24) con  $R_e = 3$ ,  $R_c = 0.14$  y  $q = 0.9$ . Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 255.

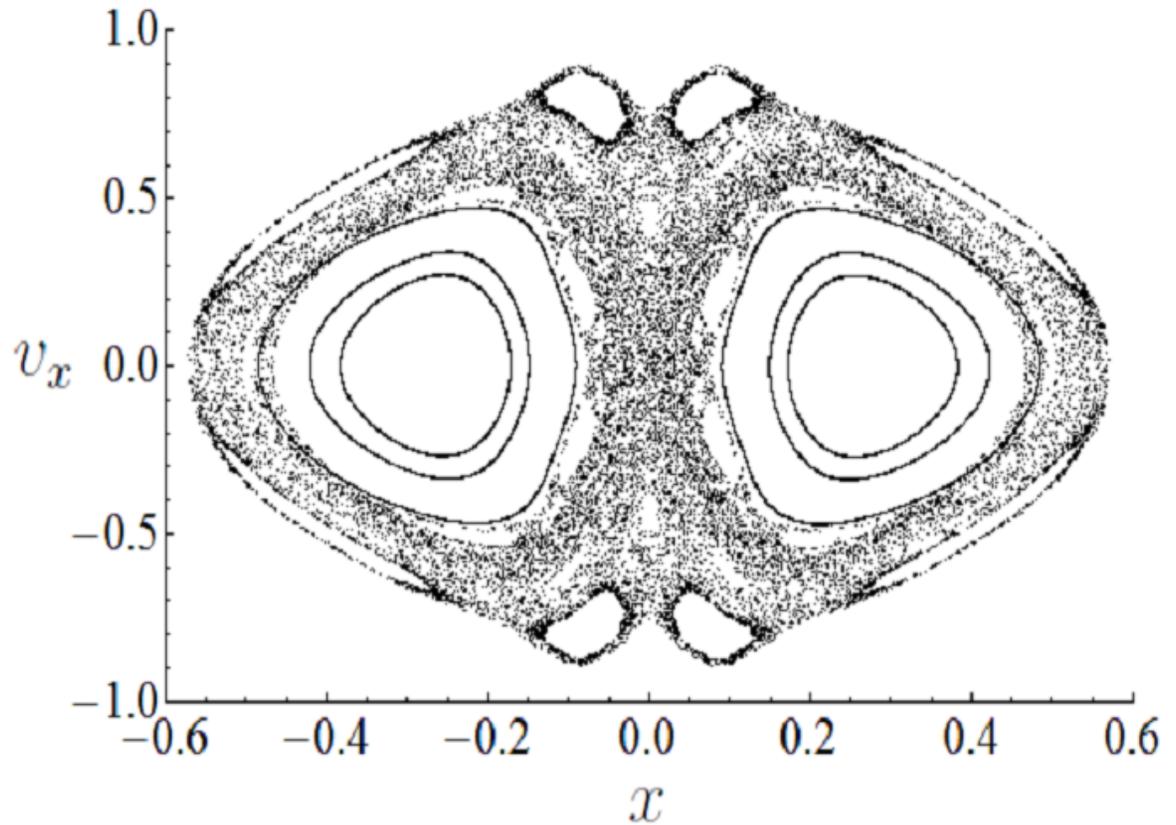


Figura 3.11: Sección de Poincaré interna generada por las órbitas del potencial  $\Phi_{II}(x, y)$  de la ecuación (3.24) con  $R_e = 3$ ,  $R_c = 0.14$  y  $q = 0.9$ . Estas órbitas se muestran en Figura 3.9. Fuente: BINNEY, J., TREMAINE, S. (2008). Galactic Dynamics. Princeton University. *The Orbits of Stars*, pag. 256.

En este capítulo se han desarrollado los conceptos y las técnicas básicas para el estudio y la clasificación de los diferentes tipos de órbitas presentes en la dinámica estelar, ahora con la ayuda de los diagramas de Poincaré y la propuesta de una distribución de materia se pretende estudiar la dinámica estelar dentro de galaxias anulares simétricas y asimétricas además del efecto producido por la rotación de la galaxia sobre la dinámica estelar.

## 4 DINÁMICA ESTELAR EN GALAXIAS ANULARES

En este capítulo se analiza la órbita descrita por una estrella en una galaxia anular. Así, es necesario introducir un modelo que describa la distribución de materia en este tipo de galaxias. Por medio de curvas Gaussianas asociadas a la distribución de materia del núcleo y del anillo se puede reproducir algunas de las características presentes en la distribución de materia medida para el Objeto de Hoag <sup>1</sup>. La distribución obtenida posee simetría axial y es esencialmente bidimensional. También se explora el efecto sobre la órbita de la estrella producido por un pequeño desplazamiento del centro de masa dentro del núcleo así como el efecto de la rotación de la galaxia. Los métodos utilizados en este capítulo son similares a los presentados en el capítulo 3.

### 4.1. DISTRIBUCIÓN DE MATERIA EN GALAXIAS ANULARES

Con el fin de analizar la dinámica estelar en galaxias anulares es necesario conocer la distribución de materia  $\rho$  de la galaxia. Sin embargo, el estudio de galaxias anulares es reciente y en la literatura no se encuentra un potencial gravitacional que modele este tipo de estructuras. En esta sección se propone un modelo que reproduce algunas características de la distribución de materia del Objeto de Hoag. Se trabaja en coordenadas cilíndricas de tal manera que  $\rho = \rho(r, z, \phi)$ . Asumiendo la simetría axial  $\rho(r, z, \phi) = \rho(r)f(z)$ , para algunos tipos de galaxias,  $f(z)$  puede ser  $e^{-\frac{|z|}{\sigma_z}}$  o  $\sinh(\frac{z}{\sigma_z})$  donde  $\sigma_z$  es una longitud característica del grosor de la galaxia. En lo que sigue se modela la galaxia como una estructura de grosor despreciable, de esta forma, los efectos en  $z$  son promediados. Un método similar se utiliza en <sup>2</sup> para el estudio de discos de acreción. Para que la estructura tenga simetría anular debe cumplirse que tanto el centro de masa como el centro geométrico coincidan en un mismo punto sobre el cual se encuentra ubicado el núcleo de la galaxia como se puede apreciar en el Objeto de Hoag.

---

<sup>1</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 3-4.

<sup>2</sup>Lodato, G. (2008). *Self-gravitating accretion discs*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 3-7.

**4.1.1. Estructura del núcleo.** Para describir el núcleo de la galaxia se considera una distribución de materia de la forma:

$$\rho_n(r) = \rho_0^{(n)} e^{-\frac{r^2}{\sigma_n^2}}, \quad (4.1)$$

donde  $\sigma_n$  es una longitud característica del tamaño del núcleo. Ahora se expresa la constante  $\rho_0^{(n)}$  en función de cantidades conocidas, para ello se piensa la galaxia como un cilindro de altura  $\sigma_z$ . Integrando en todo el espacio la función  $\rho_n(r)$  debe cumplir con:

$$m_n = 2\pi\sigma_z\rho_0^{(n)} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{\sigma_n^2}} r dr,$$

donde  $m_n$  es la masa total del núcleo, por lo tanto la constante  $\rho_0^{(n)}$  es:

$$\rho_0^{(n)} = \frac{m_n}{\pi\sigma_n^2\sigma_z}.$$

De esta manera, la ecuación (4.1) describe mediante una Gaussiana un núcleo de masa  $m_n$ . En el caso límite  $\sigma_n \rightarrow 0$  se obtiene la distribución de materia para una masa puntual en  $r = 0$ .

**4.1.2. Estructura del anillo.** Para describir el anillo de la galaxia se supone una distribución de la forma:

$$\rho_a(r) = \rho_0^{(a)} e^{-\frac{(r-R_a)^2}{\sigma_a^2}}, \quad (4.2)$$

donde  $R_a$  es el radio del eje central del anillo, y  $\sigma_a$  es una longitud característica del grosor del anillo. Como en el caso del núcleo, se debe expresar la constante  $\rho_0^{(a)}$  en función de cantidades conocidas. Utilizando un esquema similar al utilizado para la deducción de  $\rho_0^{(n)}$ , se obtiene:

$$\rho_0^{(a)} = \frac{m_a}{\pi\sigma_a^2\sigma_z} \left( \frac{1}{e^{-\left(\frac{R_a}{\sigma_a}\right)^2} + \sqrt{\pi} \frac{R_a}{\sigma_a} \left(1 + h\left(\frac{R_a}{\sigma_a}\right)\right)} \right)$$

donde  $m_a$  es la masa total del anillo y  $h(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$ .

Esta distribución de materia, al igual que en el caso del núcleo, tiene la forma de una Gaussiana y se encuentra centrada en el radio del anillo  $R_a$ . En el caso límite  $\sigma_a \rightarrow 0$  se obtiene una densidad de masa proporcional a  $\delta(r - R_a)$ .

**4.1.3. Sistema núcleo-anillo.** A partir de las ecuaciones (4.1) y (4.2), se puede obtener la distribución de materia para el sistema núcleo-anillo definida por  $\rho(r) \equiv \rho_n(r) + \rho_a(r)$ . En forma explícita:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0^{(n)}} = e^{-\frac{r^2}{\sigma_n^2}} + \frac{m_a}{m_n} \left( \frac{\sigma_n}{\sigma_a} \right)^2 \frac{e^{-\frac{(r-R_a)^2}{\sigma_a^2}}}{e^{-\left(\frac{R_a}{\sigma_a}\right)^2} + \sqrt{\pi} \frac{R_a}{\sigma_a} (1 + h(\frac{R_a}{\sigma_a}))}. \quad (4.3)$$

La distribución de materia dada por la ecuación (4.3) reproduce la densidad de masa promedio del Objeto de Hoag medida experimentalmente en <sup>3</sup> mediante el uso de los parámetros  $R_a = 18''$ ,  $\sigma_a = 10''$ ,  $\sigma_n = 6''$  y  $\frac{m_a}{m_n} = 7$ . En la Figura 4.1a se presenta la gráfica de esta distribución de materia. La ecuación (4.3) también reproduce el hecho que  $\rho(r) \propto r^{-\frac{1}{4}}$  en la región ubicada entre el anillo y el núcleo, esto se ilustra en la Figura 4.1b y es un hecho experimental bien medido en el Objeto de Hoag <sup>4</sup>.

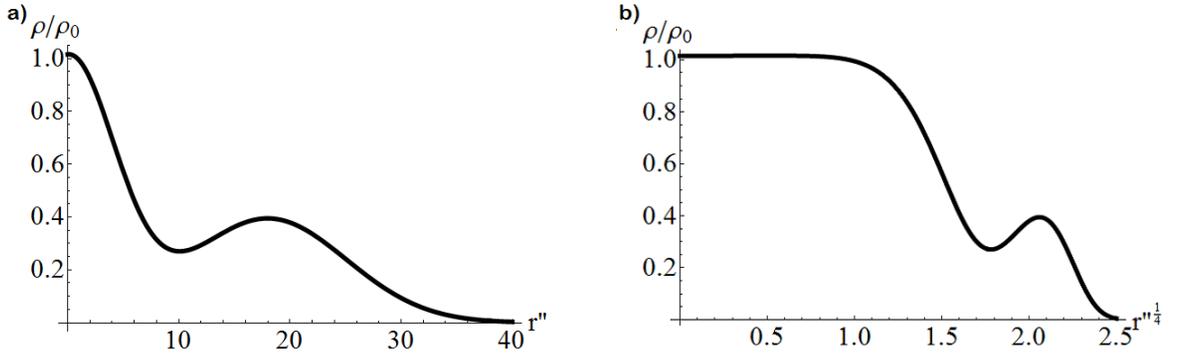


Figura 4.1: a) Distribución de materia del sistema núcleo-anillo correspondiente a la ecuación (4.3) donde la densidad esta dada en función del radio del anillo teniendo en cuenta los parámetros  $R_a = 18''$ ,  $\sigma_a = 10''$ ,  $\sigma_n = 6''$  y  $\frac{m_a}{m_n} = 7$ , b) Gráfica de  $\rho(r)$  vs.  $r^{\frac{1}{4}}$  para los mismos parámetros. Fuente de esta investigación.

En la Figura 4.2 se observa la forma de la galaxia descrita por el sistema núcleo-anillo correspondiente a la ecuación (4.3). El anillo posee simetría azimutal mientras el núcleo

<sup>3</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, pag. 458-459.

<sup>4</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 3-4.

posee una simetría esférica; esto se ha observado en <sup>5</sup>. En dicha estructura el núcleo se encuentra ubicado tanto en el centro geométrico como en el centro de masa de la galaxia.

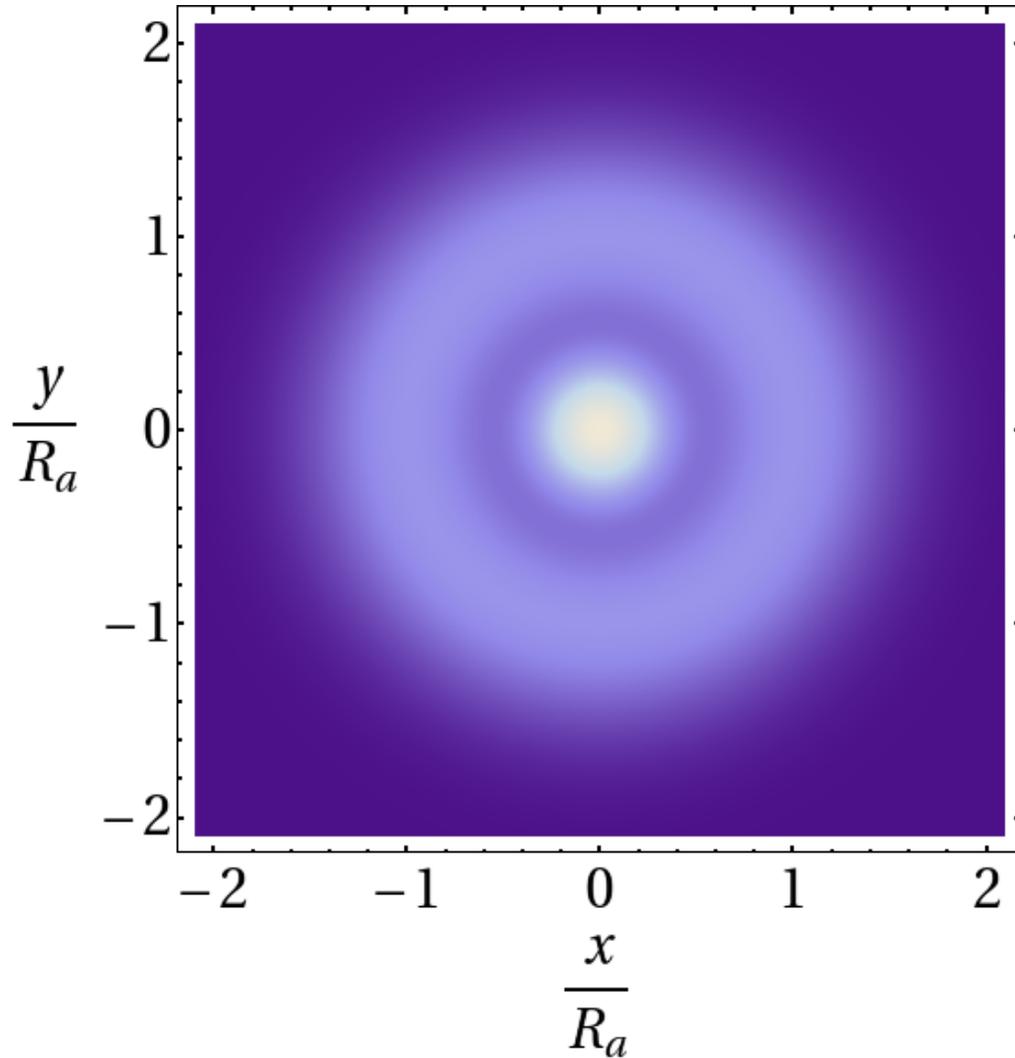


Figura 4.2: Gráfica que muestra como se encuentra distribuida la densidad de materia correspondiente a la ecuación (4.3) teniendo en cuenta los parámetros  $R_a = 18''$ ,  $\sigma_a = 10''$ ,  $\sigma_n = 6''$  y  $\frac{m_a}{m_n} = 7$ . Fuente de esta investigación.

En esta sección se ha introducido un modelo para la distribución de materia en galaxias

<sup>5</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, 458-460.

anulares que coincide con la forma del Objeto de Hoag. Además, mediante la variación de los parámetros tales como  $R_a$ ,  $\sigma_a$ ,  $\sigma_n$  y  $\frac{m_a}{m_n}$ , se podrían modelar otro tipo de galaxias anulares <sup>6</sup>.

## 4.2. DINÁMICA ESTELAR

Con el fin de establecer las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa  $m$  dentro una galaxia anular es necesario conocer la fuerza que actúa sobre aquella partícula debido al sistema núcleo-anillo de la galaxia. Para ello se parte de la ley de Gauss para gravitación:

$$\nabla \cdot \vec{F} = -4\pi Gm\rho(r). \quad (4.4)$$

Teniendo en cuenta que el problema tiene simetría cilíndrica y que se lo puede trabajar en dos dimensiones, se obtiene:  $\vec{F} = F_r(r)\hat{r}$ . Para encontrar  $F_r$  en función de  $r$  se integra la ecuación (4.4) obteniendo:

$$rF_r(r) = -4\pi Gm \int_0^r r' \rho(r') dr',$$

por lo tanto  $F_r(r)$  toma la forma:

$$\frac{F_r(r)}{4\pi Gm\rho_0^{(n)}} = -\frac{1}{r} \int_0^r r' \frac{\rho(r')}{\rho_0^{(n)}} dr'. \quad (4.5)$$

La expresión (4.3) da la forma explícita de  $\frac{\rho(r')}{\rho_0^{(n)}}$  introducida para galaxias anulares. A partir de esta relación la ecuación (4.5) se puede escribir como:

$$\frac{F_r(r)}{4\pi Gm\rho_0^{(n)}} = -\frac{\sigma_n^2}{2r} \left( \frac{c \left( \sqrt{\pi} R_a \left( h \left( \frac{r-R_a}{\sigma_a} \right) + h \left( \frac{R_a}{\sigma_a} \right) \right) + \sigma_a \left( e^{-\frac{R_a^2}{\sigma_a^2}} - e^{-\frac{(r-R_a)^2}{\sigma_a^2}} \right) \right)}{\sigma_a \left( \frac{\sqrt{\pi} R_a \left( h \left( \frac{R_a}{\sigma_a} \right) + 1 \right)}{\sigma_a} + e^{-\frac{R_a^2}{\sigma_a^2}} \right)} - e^{-\frac{r^2}{\sigma_n^2}} + 1 \right). \quad (4.6)$$

---

<sup>6</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 7-8.

En la Figura 4.3a se presenta la fuerza descrita por la ecuación (4.5) en función de la coordenada radial.

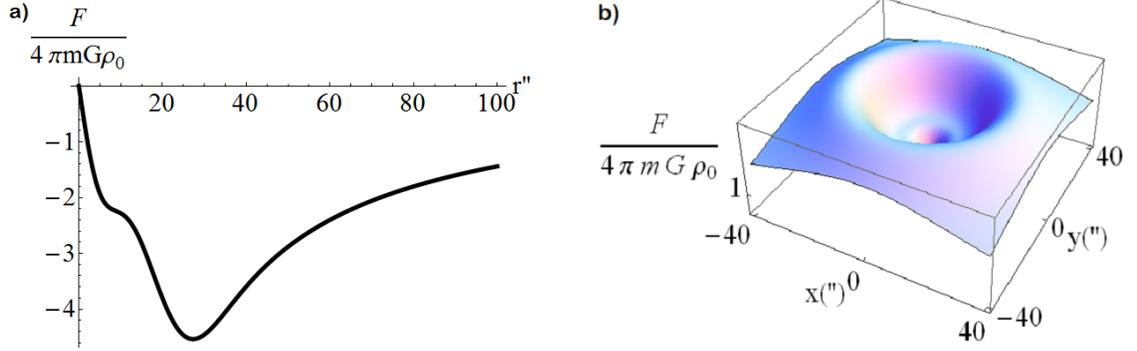


Figura 4.3: a) Gráfica de la fuerza en función del radio debido a la ecuación (4.5) teniendo en cuenta los parámetros  $R_a = 18''$ ,  $\sigma_a = 10''$ ,  $\sigma_n = 6''$  y  $\frac{m_a}{m_n} = 7$ , b) Gráfica en tres dimensiones de la ecuación (4.6). Fuente de esta investigación.

La Figura 4.3b muestra en tres dimensiones el comportamiento de la Figura 4.3a permitiéndole observar la fuerza que experimenta la estrella debido al sistema núcleo-anillo. Dependiendo de la posición inicial de la estrella ésta describirá distintos tipos de órbitas.

**4.2.1. Adimensionalización de las ecuaciones dinámicas.** Una vez obtenida la forma explícita de  $F_r(r)$  en la ecuación (4.6) para la distribución de materia  $\rho(r)$  descrita en la ecuación (4.3) del sistema núcleo-anillo, se busca resolver las ecuaciones dinámicas:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_r(r), \quad (4.7)$$

donde  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y$  y la fuerza  $\vec{F}_r(r)$  en coordenadas cartesianas es:  $\vec{F}_r(r) = F_r(r)\frac{x}{r}\hat{e}_x + F_r(r)\frac{y}{r}\hat{e}_y$  con  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Para resolver numéricamente la ecuación (4.7) es necesario expresar en forma adimensional las cantidades  $\vec{r}$ ,  $\vec{F}$  y  $t$ . Resulta conveniente normalizar todas las cantidades con respecto al valor que toman en el centro del anillo; esto es, cuando  $|\vec{r}| = R_a$ . Por lo

tanto la órbita que se toma como referencia, esta ubicada en el centro del anillo de la estructura.

Si  $F_a = \vec{F}_r(\vec{R}_a)$  hace referencia a la magnitud de la fuerza que experimenta la estrella en el centro del anillo,  $\Omega_a$  es la velocidad angular de la estrella, en  $R_a$ . Teniendo en cuenta que la estrella se mueve en el centro del anillo de la galaxia, se tiene:

$$F_a = mR_a\Omega_a^2,$$

donde  $\Omega_a$  sirve como cantidad para expresar el tiempo. En consecuencia se define  $\varphi = \Omega_a t$  como la cantidad adimensional asociada al tiempo. La discusión anterior permite definir las cantidades adimensionales:

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}}{R_a}, \quad \varphi = \Omega_a t. \quad (4.8)$$

Introduciendo estas relaciones en la ecuación (4.7), se obtiene:

$$\frac{d^2\vec{r}}{d\varphi^2} = \frac{\vec{F}}{F_a} = \vec{F}, \quad (4.9)$$

donde:

$$\vec{F} = \frac{\vec{F}(\vec{r})}{F_a} = -\frac{1}{\vec{r}} \frac{\int_0^{\vec{r}} \vec{r}' \rho(R_a \vec{r}') d\vec{r}'}{\int_0^1 \vec{r}' \rho(R_a \vec{r}') d\vec{r}'}, \quad (4.10)$$

y de la expresión (4.6),  $F_a$  esta dada por:

$$\frac{F_a}{4\pi Gm\rho_0^{(n)}} = \frac{c \left( e^{\frac{R_a^2}{\sigma_a^2}} \left( \sqrt{\pi} R_a h \left( \frac{R_a}{\sigma_a} \right) - \sigma_a \right) + \sigma_a \right)}{\sqrt{\pi} R_a e^{\frac{R_a^2}{\sigma_a^2}} \left( h \left( \frac{R_a}{\sigma_a} \right) + 1 \right) + \sigma_a} - e^{-\frac{R_a^2}{\sigma_a^2}} + 1. \quad (4.11)$$

De esta manera (4.9) establece las ecuaciones dinámicas en forma adimensional. Siguiendo un enfoque similar al del capítulo 3, en lo que sigue, se resuelve numéricamente (4.8)-(4.11) para diferentes condiciones iniciales y se construyen las secciones de Poincaré para las órbitas obtenidas. Posteriormente se analiza el tipo de órbita descrito por la estrella dentro de la galaxia anular.

### 4.3. CASO SIMÉTRICO

En esta sección se solucionan las ecuaciones dinámicas de una estrella que se mueve dentro de una estructura como la encontrada en el capítulo 2. Galaxias tipo Objeto de Hoag tienen una alta simetría azimutal; para una estrella de masa  $m$  que se encuentra dentro de este tipo de estructuras la fuerza que experimenta es de tipo radial debido a la simetría azimutal de la estructura y a que la altura de la galaxia es despreciable en comparación a su radio. Ya que la fuerza es de la forma (4.10) su movimiento queda restringido al plano ecuatorial de la estructura anular, por lo tanto, la posición de la estrella esta determinada por sus coordenadas polares donde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Para encontrar como evoluciona  $x(t)$  y  $y(t)$  a través del tiempo se expresa la fuerza en coordenadas cartesianas:

$$\tilde{F}_x(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{F_r(\tilde{r})}{F_a} \frac{\tilde{x}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}}, \quad \tilde{F}_y(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{F_r(\tilde{r})}{F_a} \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}}. \quad (4.12)$$

Para obtener la órbita de la estrella  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  se integra numéricamente (4.9) teniendo en cuenta las expresiones (4.12). Para un caso específico se consideran los siguientes valores:  $R_a = 18''$ ,  $\sigma_a = 10''$ ,  $\sigma_n = 6''$  y  $\frac{m_a}{m_n} = 7$ .

Las soluciones a las ecuaciones (4.12) dan como resultado diferentes tipos de órbitas que dependen de ciertas condiciones iniciales.

Para una estrella sujeta a una fuerza de tipo radial como la mostrada en (4.12) el momento angular total  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a}$  debe conservarse.

En la Figura 4.4 se observa la solución gráfica a las ecuaciones (4.12) teniendo en cuenta diferentes condiciones iniciales con  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$ . En la Figura 4.4a se muestra la órbita resultante de una estrella que inicia su movimiento en una zona entre el anillo y el núcleo, esta órbita es de carácter regular y periódico además se encuentra en el anillo de la galaxia. La órbita resultante de una estrella que inicia su movimiento en el anillo de la galaxia se muestra en la Figura 4.4b, esta órbita es de carácter periódico y regular con una trayectoria que ésta confinada al anillo de la estructura.

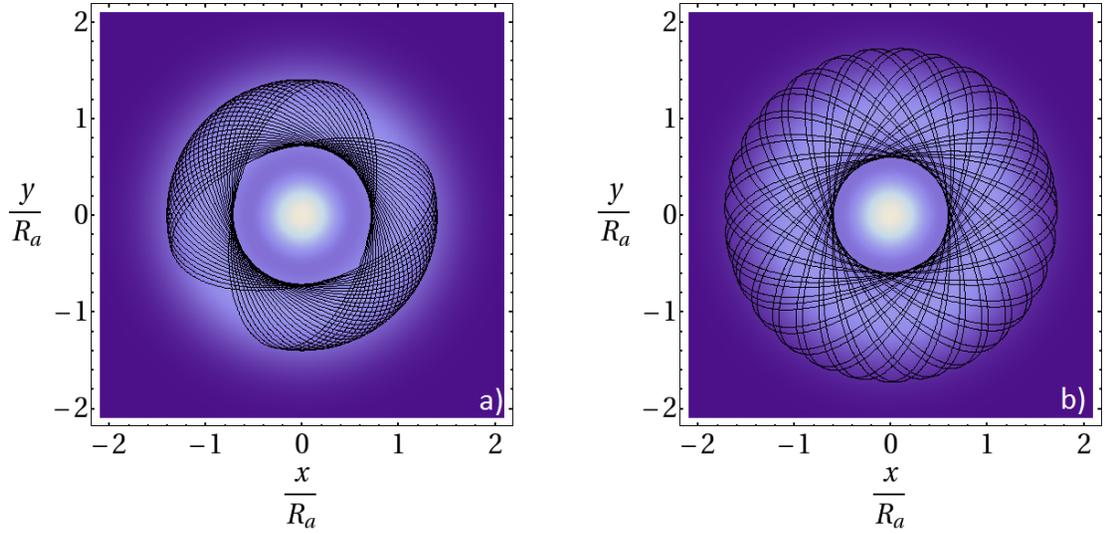


Figura 4.4: Solución numérica a las ecuaciones (4.12) para una velocidad inicial  $\tilde{v}_{x0} = 0.2$  y una  $\tilde{v}_{y0}$  dada por  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$ . a) La estrella inicia su movimiento en:  $\tilde{x}_0 = 0.75$ ,  $\tilde{y}_0 = 0.1$  b) La estrella parte de  $\tilde{x}_0 = 1.7$ ,  $\tilde{y}_0 = 0.1$ . Fuente de esta investigación.

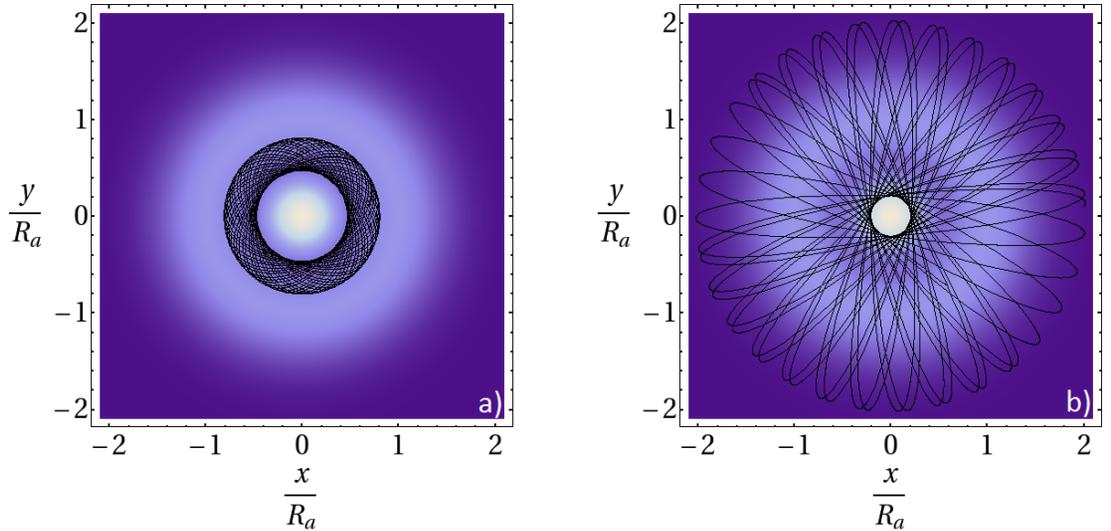


Figura 4.5: Solución numérica a las ecuaciones (4.12) para una velocidad inicial  $\tilde{v}_{x0} = 0.2$  y una  $\tilde{v}_{y0}$  dada por  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 0.4$ . Las órbitas a) y b) poseen las mismas condiciones iniciales  $\tilde{x}_0$  y  $\tilde{y}_0$  que se emplearon para graficar la Figura 4.4. Fuente de esta investigación.

Las órbitas de las Figuras 4.5 se obtienen considerando que  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 0.4$ . En la Figura 4.5 se puede observar que las órbitas han cambiado debido a la variación de  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a}$ . En la Figura 4.5a la estrella se mueve en medio del núcleo y el anillo describiendo órbitas regulares, para el caso de la Figura 4.5b la estrella se mueve a través del anillo y pasa

muy cerca al núcleo describiendo órbitas de carácter periódico y regular.

Para observar de forma más directa el comportamiento y el tipo de movimiento que gobierna a la estrella de masa  $m$ , se grafican las secciones de Poincaré para un conjunto de órbitas que poseen las mismas condiciones iniciales  $\tilde{x}_0, \tilde{y}_0$  y  $\tilde{v}_{x0}$ , sin embargo, difieren en el valor de  $\tilde{v}_{y0}$  ya que  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a}$  es distinto. Para ver como se alteran las secciones de Poincaré se varía el momento angular total  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a}$  de la estrella.

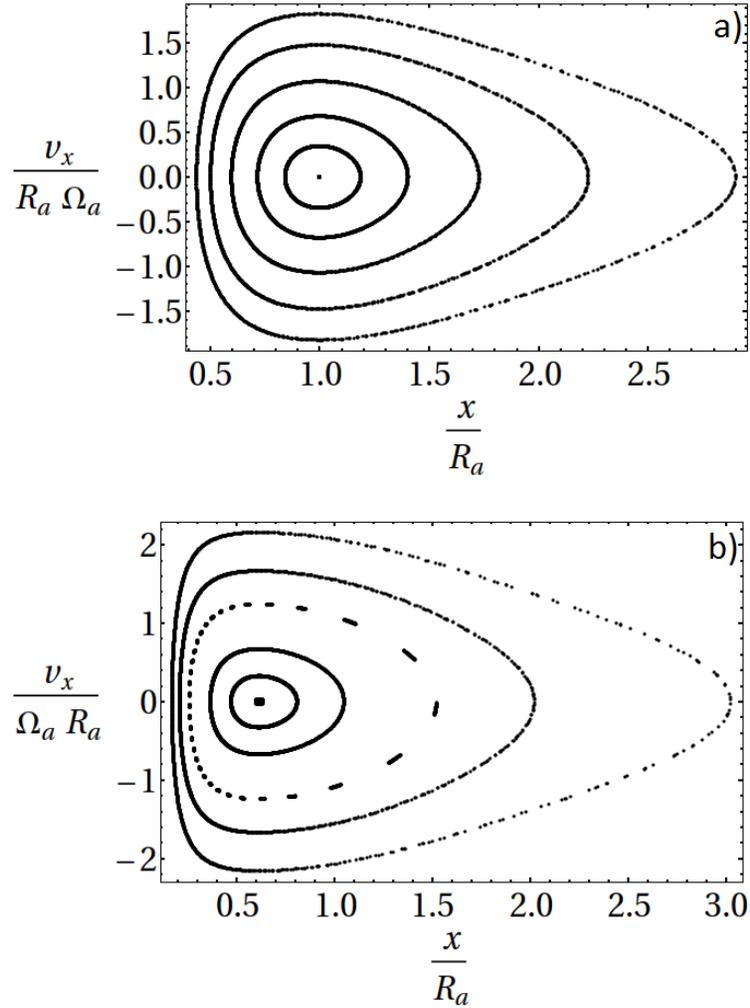


Figura 4.6: Secciones de Poincaré para las órbitas trazadas por la estrella en una estructura como la mostrada en la Figura 4.1. a) Teniendo en cuenta que  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$  y b)  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 0.4$ . Fuente de esta investigación.

Como se puede observar en las secciones de Poincaré de las Figura 4.6, todas las órbitas descritas por la estrella sujeta a las componentes cartesianas de la fuerza adimensionalizada (4.12) son de carácter periódico y regular, esto significa que son órbitas cerradas que después de determinado período se repiten y pasan por los mismos puntos en la sección de Poincaré <sup>7</sup>. En la siguiente sección se introduce una pequeña asimetría en el núcleo con el fin de observar cual es el comportamiento de la estrella dentro de este tipo de estructuras asimétricas.

#### 4.4. CASO ASIMÉTRICO

En esta sección se introduce una pequeña fuerza adicional en la ecuación (4.12), dicha fuerza adicional hace referencia a un pequeño desplazamiento del centro de masa en la dirección  $x$  positiva dentro del núcleo de la galaxia, causando un rompimiento en la simetría anular. Este rompimiento en la simetría hace que la fuerza ejercida sobre la estrella ya no sea de tipo radial y en consecuencia que la componente  $L_z$  del momento angular total de la estrella no se conserve.

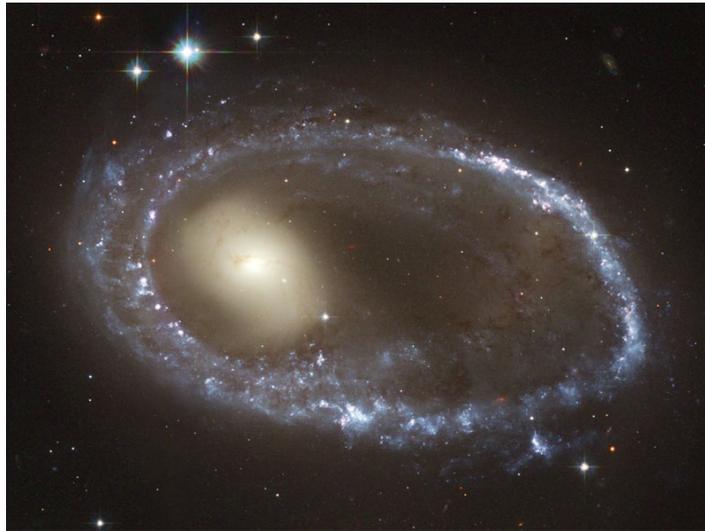


Figura 4.7: Imagen de la galaxia anular AM 0644-741 tomada por el telescopio espacial Hubble. Fuente: Del sitio Web: URL: <http://observatorio.info/2005/10/la-galaxia-del-anillo-am-0644-741-vista-por-el-hubble/>

Una gráfica de esta distribución de materia se presenta en la Figura 4.7 donde se observa

---

<sup>7</sup>Sellwood, J., Wilkinson, A. (2008). *Dynamics of barred galaxies*. Recuperado del sitio Web arXiv:astro-ph/0608665v1, pag. 29.

una asimetría en el anillo de la estructura al igual que en el núcleo. Estas galaxias también son consideradas tipo Objeto de Hoag debido a su sistema núcleo-anillo, pero a diferencia del Objeto de Hoag, tanto su centro de masa como su centro geométrico, no coinciden con la posición del núcleo de la galaxia.

En esta sección se determinan y solucionan las ecuaciones dinámicas de una estrella de masa  $m$ , dentro de una estructura como la presentada en la Figura 4.7. Para ello, se modela esta asimetría teniendo en cuenta una fuerza adicional mediante términos dipolares  $-\nabla \frac{x}{r^2}$ ,  $-\nabla \frac{y}{r^2}$  que resultan de una aproximación a primer orden en serie de Taylor (ver apéndice A).

Para el caso más sencillo se tiene:

$$\vec{F}_{des} = -\kappa \tilde{\nabla} \left( \frac{\tilde{x}}{\tilde{r}^2} \right), \quad (4.13)$$

donde  $\kappa \ll 1$  con el fin de modelar solo pequeños cambios en la posición del centro de masa. Para observar como evoluciona  $x(t)$  y  $y(t)$  a través del tiempo, se expresa la fuerza en coordenadas cartesianas:

$$\tilde{F}_{px} = \frac{F_r(\tilde{r})\tilde{x}}{F_a\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} + \kappa \left( -\frac{2\tilde{x}^2}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} + \frac{1}{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2} \right), \quad (4.14)$$

$$\tilde{F}_{py} = \frac{F_r(\tilde{r})\tilde{y}}{F_a\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}} - \kappa \left( \frac{2\tilde{x}\tilde{y}}{(\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2)^2} \right). \quad (4.15)$$

Las expresiones (4.14) y (4.15) hacen referencia a las componentes cartesianas de la fuerza adimensionalizada que experimenta una estrella dentro de una galaxia asimétrica como la mostrada en la Figura 4.7. Para obtener la órbita  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$ , se integra numéricamente la ecuación (4.9) teniendo en cuenta las ecuaciones (4.14) y (4.15); con las condiciones iniciales adecuadas se puede graficar la trayectoria de la estrella dentro de configuraciones como la mostrada en la Figura 4.7. Para observar la deformación de las órbitas se toma las condiciones iniciales de las Figuras 4.4a y 4.5a, considerando un factor perturbativo  $\kappa = 0.1$ , dando como resultado las órbitas mostradas en la Figura 4.8a y c.

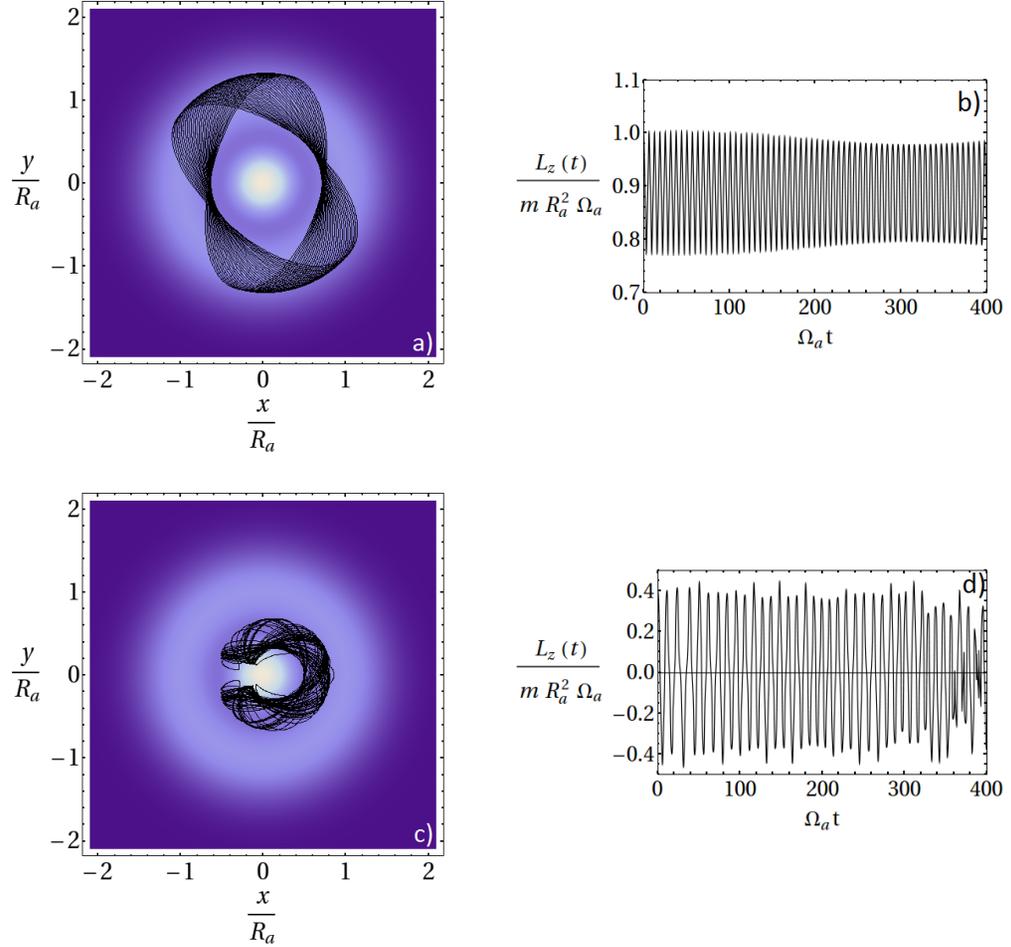


Figura 4.8: Solución numérica a las ecuaciones (4.14) y (4.15) teniendo en cuenta un factor perturbativo de  $\kappa = 0.1$ . a) Órbita de la estrella cuyo movimiento coincide con las condiciones iniciales de la Figura 4.4a. b) Gráfica de  $\frac{L_z(t)}{m R_a^2 \Omega_a}$  Vs  $t$ , para la órbita mostrada en a). c) El movimiento de la estrella está sujeto a las condiciones iniciales de la Figura 4.5a. d)  $\frac{L_z(t)}{m R_a^2 \Omega_a}$  vs.  $t$  para la órbita mostrada en c). Fuente de esta investigación.

En la Figura 4.8a se puede observar una órbita de carácter regular y periódico como las encontradas en el caso simétrico, mientras que en la Figura 4.8c se observa un nuevo tipo de órbita que ya no es ni regular ni periódica y que se produce por el rompimiento de la simetría. En el caso de la Figura 4.8b, se observa el comportamiento del momento angular total de la estrella; este ya no es constante como en el caso simétrico debido a que la fuerza que actúa sobre la estrella ya no es de tipo radial, sin embargo, cabe señalar que el momento angular es periódico. En la Figura 4.8d se observa que el momento angular de la estrella es irregular y no periódico. Para observar mejor el comportamiento de la

estrella en presencia de esta asimetría, se grafican las secciones de Poincaré para un conjunto de órbitas como las mostradas en las Figura 4.8a y c.

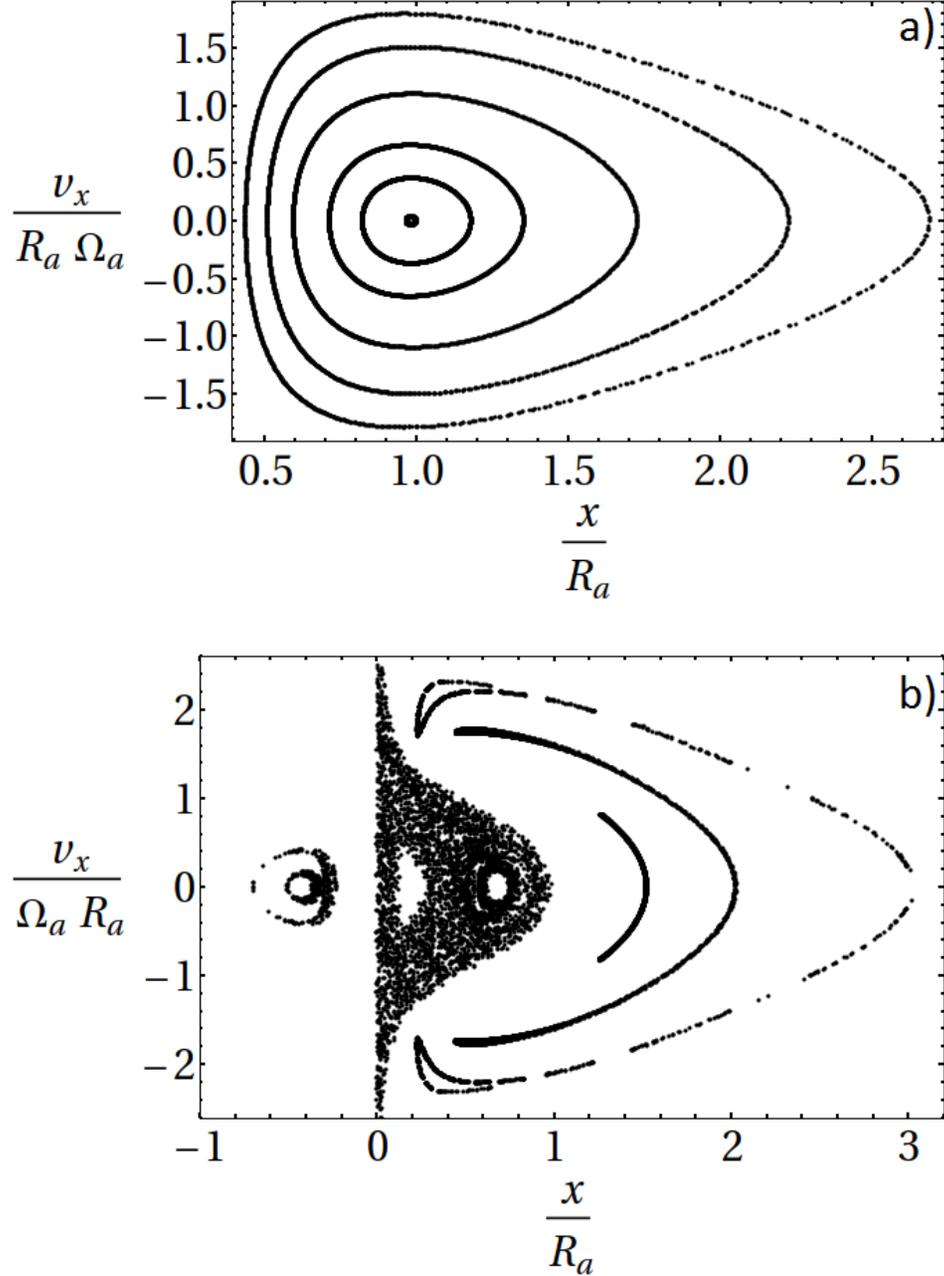


Figura 4.9: Secciones de Poincaré para un conjunto de órbitas sujetas a una fuerza de la forma (4.14) con un factor perturbativo de  $\kappa = 0.1$  y con condiciones iniciales para las cuales. a) Para  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 1$ . b)  $\frac{L_z}{mR_a^2\Omega_a} = 0.4$ . Fuente de esta investigación.

En la Figura 4.9a como en el caso simétrico se observa un comportamiento regular y periódico donde la estrella después de determinado período vuelve a repetir la misma trayectoria, mientras que en la Figura 4.9b se observa tanto órbitas regular y periódicas como órbitas de tipo irregulares (caóticas) que se encuentran en zonas donde la dinámica estelar es muy susceptible a las condiciones iniciales <sup>8</sup>. De esta forma se puede sugerir que el comportamiento caótico de la estrella se debe a la asimetría presente en el núcleo de la estructura, este comportamiento también se lo puede evidenciar en el momento angular total de la estrella.

#### 4.5. EFECTO PRODUCIDO POR LA ROTACIÓN DE LA GALAXIA

En la naturaleza no es posible encontrar estructuras galácticas estáticas ya que en su proceso de formación estas estructuras adquieren una determinada velocidad angular. Para hacer un modelo más acorde con la realidad, hay que tener en cuenta la velocidad angular de la galaxia junto con la velocidad angular de la estrella; consideración que no se tuvo en cuenta para el desarrollo de los casos anteriores. En esta sección se estudia el efecto de la rotación de la galaxia sobre las órbitas trazadas por la estrella de masa  $m$ . Si la galaxia se encuentra rotando sobre la estrella actúan dos nuevas fuerzas, las cuales solamente aparecen cuando se considera sistemas en rotación, estas dos nuevas fuerzas son medidas por un observador que se encuentra en reposo respecto a la rotación de la galaxia. La fuerza medida sobre la estrella de masa  $m$  por un observador estático respecto a la galaxia esta dada por la siguiente expresión:

$$\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - 2\vec{\omega} \times \vec{v}' - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'), \quad (4.16)$$

donde el término  $-2\vec{\omega} \times \vec{v}'$  se conoce como aceleración de Coriolis y el término  $-\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$  es debido a la aceleración centrífuga. Si se considera que la galaxia rota con velocidad angular  $\vec{\omega} = \Omega\hat{e}_z$  y se utilizan las expresiones de  $F_a$ ,  $\Omega_a$  y  $\varphi$ , se puede adimensionalizar la ecuación (4.16), dando como resultado:

$$\frac{d^2\vec{r}'}{d\varphi^2} = \frac{\vec{F}_p}{F_a} - 2\frac{\Omega}{\Omega_a}\hat{e}_z \times \frac{d\vec{r}'}{d\varphi} + \left(\frac{\Omega}{\Omega_a}\right)^2 \vec{r}', \quad (4.17)$$

---

<sup>8</sup>Binney, J., Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*; New Jersey, United States of America: Princeton University, pag. 256-258.

donde  $\vec{r}'$  es la posición de la estrella medida por el observador que no rota con la galaxia y  $\frac{\vec{F}_p}{F_a} = \vec{F}_p$  es la fuerza asociada con una distribución de materia como la del Objeto de Hoag. Por lo tanto las componentes cartesianas de la fuerza adimensionalizada experimentada por la estrella son:

$$\tilde{F}_x = \tilde{F}_{px} + 2\tilde{\Omega}\tilde{v}_y + \tilde{\Omega}^2\tilde{x}', \quad \tilde{F}_y = \tilde{F}_{py} - 2\tilde{\Omega}\tilde{v}_x + \tilde{\Omega}^2\tilde{y}'. \quad (4.18)$$

Como se puede observar, las componentes cartesianas de la fuerza adimensionalizada (4.18) dependen tanto del parámetro  $\kappa$  asociado a una fuerza perturbativa como del parámetro  $\tilde{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega_a}$  correspondiente a la velocidad angular adimensionalizada de la galaxia. Para encontrar como evoluciona  $x(t)$  y  $y(t)$  a través del tiempo se debe integrar numéricamente la ecuación de movimiento (4.9) teniendo en cuenta las ecuaciones (4.18).

Al solucionar las ecuaciones (4.18) utilizando integración numérica se obtiene la órbita  $(\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$  descrita por una estrella de masa  $m$  que se mueve dentro de una galaxia en rotación. Para clasificar los diferentes tipos de órbitas presentes en la solución de (4.18) se trazan las secciones de Poincaré para sistemas simétricos como el Objeto de Hoag y sistemas asimétricos como AM 0644-741, que se encuentran rotando con un  $\tilde{\Omega}$  determinado, esto con el fin de obtener un modelo matemático más acorde con la realidad.

En las secciones de Poincaré de la Figura 4.10, se puede observar la dinámica de una estrella sujeta a las componentes cartesianas de una fuerza adimensionalizada como las descritas por las ecuaciones (4.18) donde  $\tilde{\Omega} = 0.2$ . Para una estructura simétrica las órbitas son regulares y periódicas; mientras que para una estructura asimétrica la estrella traza tanto órbitas regulares y periódicas, como órbitas caóticas e irregulares. Por lo tanto el efecto de la rotación de la galaxia sobre las órbitas se hace evidente en la deformación de las mismas, ya que el tipo de órbita se conserva tanto para la estructura simétrica como para la estructura asimétrica.

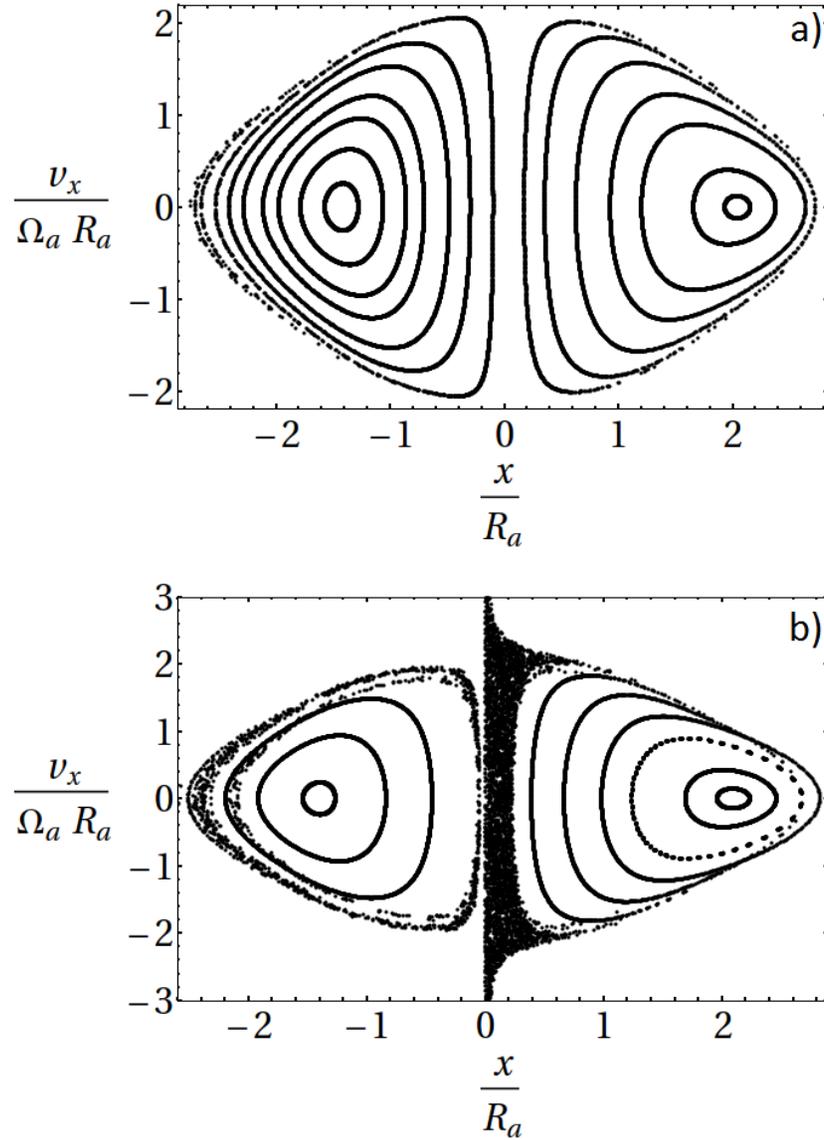


Figura 4.10: Diagrama de Poincaré trazado por una estrella que esta sometida a las componentes cartesianas de la fuerza adimensionalizada (4.18) con una velocidad angular  $\tilde{\Omega} = 0.2$ . a)  $\kappa = 0$ . b)  $\kappa = 0.1$ . Fuente de esta investigación.

## CONCLUSIONES

Continuando con el trabajo desarrollado por Pronko en <sup>9</sup>, se puede establecer que la solución a las ecuaciones estáticas de continuidad y de Navier-Stokes, sugieren una distribución de materia como la presentada en el Objeto de Hoag. Este modelo de distribución de materia se caracteriza por tener dos singularidades que se pueden relacionar con el núcleo y el anillo de la estructura. En medio de estas dos singularidades la densidad de materia disminuye siguiendo una ley de potencias inversas; característica que se ha medido experimentalmente para este tipo de galaxias anulares <sup>10</sup> y <sup>11</sup>. El campo de velocidades radiales sugiere una estructura estática presente en la galaxia debido a la aparición de dos flujos de materia que se mueven en direcciones opuestas del núcleo-anillo y del anillo-núcleo a la misma velocidad dando como resultado un flujo de materia nulo.

Mediante el modelo propuesto para la distribución de materia se reproducen algunas de las características medidas para el Objeto de Hoag <sup>12</sup>. Los resultados obtenidos en cuanto a la dinámica estelar dentro de galaxias anulares simétricas sugieren órbitas periódicas y para el caso no simétrico se obtienen órbitas que pueden ser periódicas o caóticas dependiendo de las condiciones iniciales del movimiento. Al considerar la rotación de la galaxia las órbitas sufren deformaciones, sin embargo, se siguen conservando las zonas donde la dinámica estelar es regular o irregular.

---

<sup>9</sup>Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 1-16

<sup>10</sup>Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, 458-459.

<sup>11</sup>Brosch, N. (1985). The nature of Hoag's object: the perfect ringed galaxy [versión electrónica], *Journal Astronomy and Astrophysics*, 153, 200-202.

<sup>12</sup>Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 3-4.

## RECOMENDACIONES

El tipo de galaxias estudiadas en este trabajo representan un campo activo de investigación debido a las observaciones recientes y al debate existente sobre su origen y como continuación de esta investigación se recomienda:

- Continuar con el modelo de mecánica de fluidos para gases gravitacionales en rotación, analizando parametrizaciones de Clebsch más generales, con el fin de encontrar la causa física del surgimiento de las singularidades reportadas en este trabajo.
- Estudiar galaxias gravitacionales incluyendo modelos de materia oscura. Esto respaldado con observaciones experimentales sobre la rotación de galaxias anulares mejoraría los modelos introducidos en este trabajo.
- Para el caso de galaxias donde el núcleo no coincide con el centro de masa, se sugiere continuar con un formalismo más general que el de método de perturbaciones utilizado en esta investigación. Esto permitiría indagar a profundidad sobre la dinámica estelar caótica que predice este trabajo.
- Utilizar otras herramientas de la mecánica clásica, como las variables ángulo acción y el exponente de Lyapunov, con el fin de caracterizar la dinámica estelar en galaxias anulares.
- Sobre la dinámica estelar se sugiere continuar estudiando la distribución de materia propuesta en el formalismo de la relatividad general.

## BIBLIOGRAFÍA

Binney, J., Tremaine, S. (2008). *Galactic Dynamics*; New Jersey, United States of America: Princeton University, 857.p.

Brosch, N. (1985). The nature of Hoag's object: the perfect ringed galaxy [versión electrónica], *Journal Astronomy and Astrophysics*, 153, pag. 199-206.

Chorin, A.J., Marsden, J.E. (1997). *Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*; New York, United States of America: Cambridge University, 175.p.

Cross, M., Greenside, H. (2009). *Patter Formation and Dynamics in Nonequilibrium System*; New York, United States of America: Cambridge University, 531.p.

Finkelman, I., Brosch, N. (2011). *UGC 4599: a photometric study of the nearest Hoag-type ring galaxy*. Recuperado del sitio Web arXiv:1102.3184v1, pag. 1-11.

Freemen, T., Howard, S., Byrd, G. (2008). *Hoag's object, remnant of a vanished bar?*. Recuperado del sitio Web [http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's Object, Remnant of Vanished Bar. T.Freeman et.al.pdf](http://www.washacadsci.org/Journal/Journalarticles/V.94-2-Hoag's%20Object,%20Remnant%20of%20Vanished%20Bar.%20T.Freeman%20et.al.pdf), pag. 35-41.

Lodato, G. (2008). *Self-gravitating accretion discs*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 1-61.

Padmanabhan, T. (2000). *Theoretical Astrophysics*; New York, United States of America: Cambridge University, 593.p.

Potter, M.C, Wiggert, D.C. (2002). *Mecánica de fluidos*; Mexico D.F., Mexico: Cengage

Learning Editores, 659.p.

Pronko, G.P. (2005). *Soliton in Gravitating Gas. Hoag's Object*. Recuperado del sitio Web arXiv:hep-th/0503167v1, pag. 1-16.

Schweizer, F., Kent, F.(1987). The structure and evolution of Hoag's object [versión electrónica], *The Astrophysical Journal*, 320, pag. 454-463.

Sellwood, J.A., Wilkinson, A. (2006). *Dynamics of Barred Galaxies*. Recuperado del sitio Web arXiv:astro-ph/0608665v1, pag. 1-72.

Sparke, L., Gallagher, S. (2007). *Galaxies in the Universe: An Introduction*; New York, United States of America: Cambridge University, 421.p.

Takahashi, M., Koyama, H. (2008). *Chaotic motion of Charged Particles in an Electromagnetic Field Surrounding a Rotating Black Hole*. Recuperado del sitio Web arXiv:0807-0277v1, pag. 1-20.

Vozikis, Ch.L., Caranicolas, N.D. (1992). Stochastic Stellar Orbits in a Pair of Interacting Galaxies [versión electrónica], *Journal Astronomy and Astrophys*, 13, pag. 319-236.

Yoshida, Z. (2008). *Clebsch parameterization-theory and applications*. Recuperado del sitio Web arXiv:0801.3848v1, pag. 1-10.

## ANEXO A.

La fuerza responsable de la asimetría en el núcleo descrita por la ecuación (4.13) tiene sus orígenes en la fuerza gravitacional experimentada por la estrella dentro de una configuración como la mostrada en la Figura 4.7. Puesto que la fuerza gravitacional puede ser expandida en términos multipolares cada uno responsable de una perturbación diferente dentro de las ecuaciones dinámicas de la estrella. Esto tiene sentido si se considera la fuerza gravitacional como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -4\pi G \frac{m}{L} \nabla \left[ \int \sigma(\vec{r}') \ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) d^2 r' \right], \quad (4.19)$$

donde el factor  $\frac{m}{L}$ , hace referencia a una galaxia bidimensional donde no se considera la altura del cilindro por razones que ya se han discutido previamente. De esta manera solamente se considera la proyección del cilindro sobre el plano y se trabaja en coordenadas polares. Ahora se trabaja con el término  $\ln(|\vec{r} - \vec{r}'|)$  responsable de los factores perturbativos dentro de la fuerza gravitacional el cual se lo puede escribir como:

$$\ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) = \ln(r) + \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2 - \frac{2r'}{r} \cos \varphi \right). \quad (4.20)$$

Ahora si se considera que  $\frac{r'}{r} \ll 1$  y se utiliza una expansión en serie de Taylor para  $\ln(x)$  se tiene:

$$\ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) \cong \ln(r) - \frac{r'}{r} \cos \varphi, \quad (4.21)$$

donde  $\varphi$  hace referencia al ángulo comprendido entre los dos vectores  $\vec{r}$  y  $\vec{r}'$ . Utilizando un sistema de coordenadas cartesiano, la expresión (4.21) tiene la forma:

$$\ln(|\vec{r} - \vec{r}'|) \cong \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{(x'x + y'y)}{x^2 + y^2}, \quad (4.22)$$

donde se ha utilizado la relación  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Finalmente si se utilizan las siguientes expresiones:

$$M = \int \sigma(\vec{x}') d^2 x', \quad X_{cm} = \frac{1}{M} \int \sigma(\vec{x}') x' d^2 x', \quad Y_{cm} = \frac{1}{M} \int \sigma(\vec{x}') y' d^2 x', \quad (4.23)$$

donde las ecuaciones (4.23) hacen referencia al centro de masa de la estructura. Introduciendo (4.23) dentro de la expresión (4.22) se obtiene:

$$\vec{F}(\vec{x}) = -4\pi G \frac{mM}{L} \left[ \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^2} - X_{cm} \nabla \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) - Y_{cm} \nabla \left( \frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right], \quad (4.24)$$

para el desarrollo del capítulo 4 se ha empleado términos perturbativos de la forma  $-\kappa \nabla \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$  presentes en la ecuación (4.24), ahora se utilizan para las órbitas de la Figura 4.11 se van a emplear términos perturbativos de la forma  $-\beta \nabla \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$ , los cuales se introducen en la ecuación de movimiento (4.14), para luego ser solucionada numéricamente y de esta forma obtener las órbitas mostradas en la Figura 4.11.

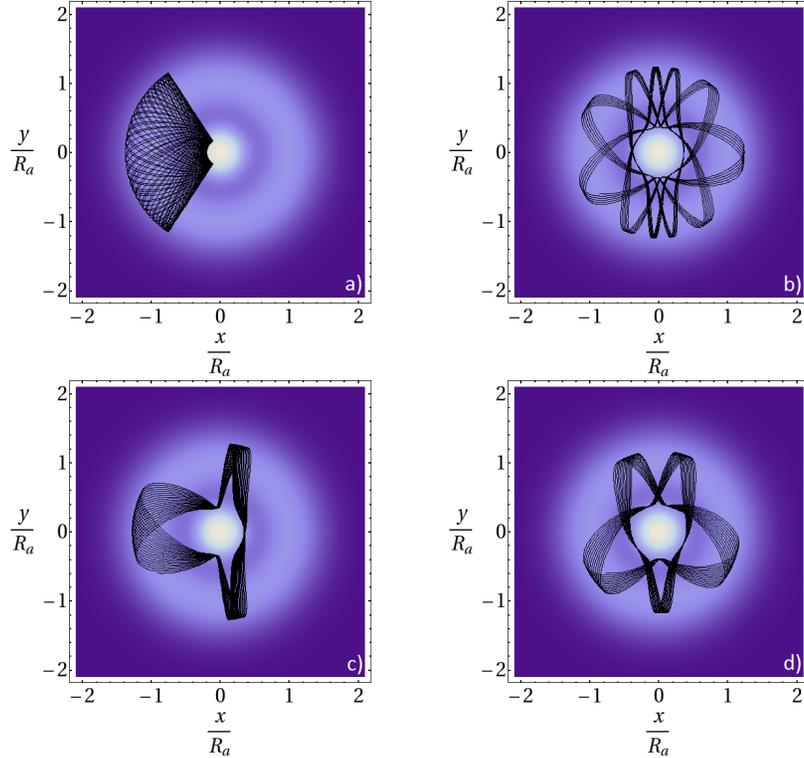


Figura 4.11: Solución numérica a las ecuaciones (4.14), teniendo en cuenta el segundo término perturbativo de la ecuación (4.24)  $\beta = 0.1$ .

En la Figura 4.11, se puede observar un conjunto de orbitas regulares y periódicas como las tratadas en el capítulo 3 y 4.

El término perturbativo  $-\beta \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right)$  ha sido empleado por que es solución a la ecuación de Laplace, de esta forma se puede escribir la fuerza gravitacional como:

$$F = F_r(x, y) - \beta \nabla \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad (4.25)$$

Al aplicar la divergencia a la ecuación (4.25), se obtiene nuevamente la ley de Gauss  $\nabla \cdot \vec{F} = -4\pi Gm\rho$ . Existen otros términos perturbativos que en coordenadas polares son de la forma:  $r^n \sin(n\phi)$ ,  $r^{-n} \sin(n\phi)$ ,  $r^{-n} \cos(n\phi)$  y  $r^n \cos(n\phi)$ , cada una ellos es solución a la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \varphi = 0$ .