



Diseño de tareas alrededor de las cónicas en geometría analítica desde lo puntual y lo global usando geometría dinámica

Edinsson **Fernández** Mosquera

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño
Colombia

edinsson.fernandez@gmail.com

María Fernanda **Mejía** Palomino

Escuela Normal Superior Farallones de Cali
Colombia

mafanda1216@gmail.com

Resumen

En esta experiencia (Fernández, 2011) se diseñaron y analizaron ocho tareas en un curso de Geometría Analítica con 25 futuros docentes de matemáticas, de una universidad del suroccidente colombiano. Estas tareas tuvieron la intencionalidad de construir geoméricamente las cónicas (parábola, elipse e hipérbola) vistas como lugares geométricos y mediados con el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri, desde la dialéctica puntual – global. Así mismo, se abordaron los aspectos metodológicos de la micro-ingeniería didáctica (Artigue, 1995). Para el marco teórico, se utilizó la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007) y la tipología de tareas en AGD (Laborde, 2008). Una conclusión fue que lo puntual en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una cónica, lo que conllevó a que permanecieran en un nivel perceptual, en tanto que lo global de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico.

Palabras clave: cónicas, lugar geométrico, construcciones geométricas, geometría dinámica, Cabri, puntual, global, situaciones didácticas, diseño de tareas, visualización, micro-ingeniería didáctica.

Introducción

Esta investigación se llevó a cabo con 25 futuros docentes de matemáticas de un curso de Geometría Analítica de una Institución de Educación Superior del **suroccidente Colombiano**. Se realizó en un aula de informática, dotada con acceso a la plataforma virtual de aprendizaje

Moodle. Las situaciones problemas fueron desarrolladas en parejas, usando Cabri. Los **participantes de este curso** accedieron a las indicaciones de las situaciones problemas y enviaron sus elaboraciones a la plataforma virtual del curso. El profesor actuó como investigador simultáneamente. Uno de los resultados fue el diseño de ocho situaciones desde la dialéctica puntual – global, tres de **estas estuvieron** relacionadas con parábolas, tres con elipses y dos con hipérbolas. En cada una de estas tareas se plantearon construcciones puntuales y globales, siempre iniciándose el estudio de una cónica desde las construcciones puntuales. (Ver **Apéndices A y B**).

En esta ponencia, se hará énfasis en algunas consideraciones que emergieron como resultado de los análisis preliminares y que a la postre sirvieron como fundamento al proceso del diseño del dispositivo experimental y de las tareas planteadas.

Antecedentes

Para este estudio, se identificaron siete categorías a partir de los documentos revisados, que en la Figura 1, aparece en un mapa conceptual, alrededor de la problemática. De esta elaboración del estado del arte, surgieron los objetivos, la pregunta de investigación, las hipótesis del diseño y se configuró el marco teórico.

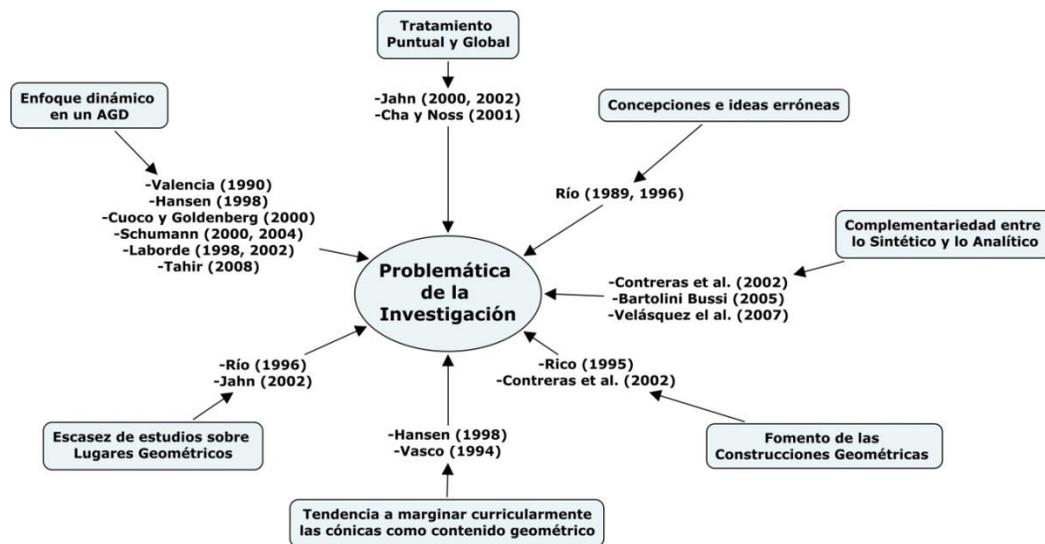


Figura 1. Organización de los antecedentes según siete categorías identificadas.

Planteamiento del problema

Se presentará algunas de las partes importantes de esta investigación tales como la pregunta de investigación: ¿Qué fenómenos didácticos genera la mediación del AGD, en la actividad matemática de los estudiantes que se inician en un curso de geometría analítica, en el marco de construcciones geométricas de las cónicas como lugares geométricos desde lo puntual y lo global?. Para dar respuesta a la cuestión principal, se presentarán los objetivos que persiguió esta investigación: 1. Diseñar desde los referentes de la Teoría de las Situaciones Didácticas y desde la micro-ingeniería didáctica una secuencia de situaciones didácticas para el estudio de las cónicas como lugares geométricos en el AGD; 2. Analizar la actividad matemática de los estudiantes de un curso universitario de geometría analítica cuando se aborda la construcción geométrica de las cónicas a partir de una caracterización puntual y global mediado por el AGD.

Fundamentación teórica

Para el marco teórico, se tuvo en cuenta tres dimensiones: la Histórica – Epistemológica, la Cognitiva y la Didáctica

Con la primera dimensión se encontró los diversos significados, naturaleza y características de las cónicas desde la perspectiva de lugar geométrico, en tres períodos de tiempo. Con la cognitiva, lo global y puntual de los objetos matemáticos. Así mismo, las concepciones, dificultades y obstáculos de los estudiantes acerca de la noción de lugar geométrico en el aprendizaje de las cónicas. También se revisó la visualización matemática en un AGD, el papel de las representaciones matemáticas ejecutables y dinámicas para la comprensión de las cónicas y las construcciones geométricas como entrada necesaria en los AGD que actuó como mediador (Moreno & Hegedus, 2009). Y con la didáctica, se tuvo en cuenta un análisis de libros de texto (Fernández & Mejía, 2010) sobre las cónicas en la Educación Superior, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2007), los AGD como medio organizador de la interacción con el saber matemático. Así mismo, se tuvo en cuenta la tipología de tareas en AGD (Laborde, 2008) para gestionar las clases de Geometría Analítica.

Diseño y metodología

En esta investigación, se abordó los aspectos metodológicos siguiendo las directrices de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). El diseño del dispositivo experimental puso en funcionamiento las relaciones entre: las hipótesis de investigación (HI, donde HI 1 fue: La transición de lo puntual a lo global y viceversa en las construcciones geométricas estáticas de las cónicas como lugares geométricos puede dar lugar a través de la mediación del AGD Cabri a la emergencia de construcciones geométricas globales dinámicas de las cónicas como lugares geométricos e HI 2 fue: El aprendizaje de las propiedades matemáticas de las cónicas puede iniciarse desde el enfoque sintético, gracias a la puesta en acto de situaciones didácticas relativas a las construcciones de lugares geométricos en AGD y a partir de éstas abordarse el análisis algebraico de sus propiedades.), los análisis preliminares (dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica) y el problema de investigación (Ver Figura 2).

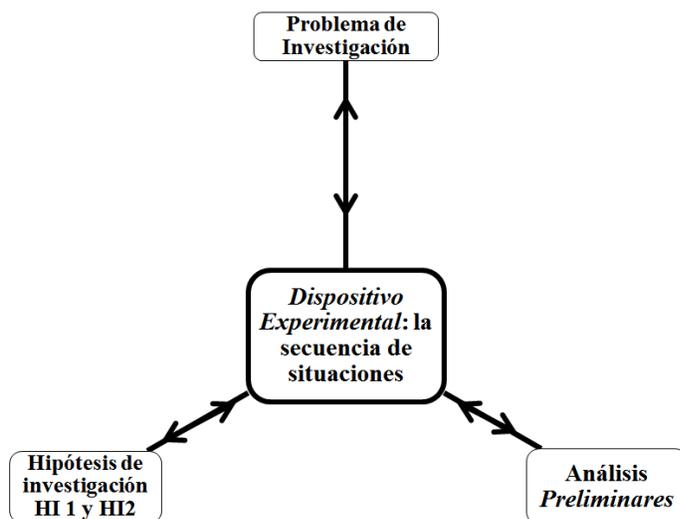


Figura 2. Factores que incidieron en el dispositivo experimental.

Resultados

A continuación se presentarán una serie de consideraciones que emergieron como resultado de los análisis preliminares. Estos elementos sirvieron de fundamento al proceso del diseño del dispositivo experimental.

Desde lo histórico – epistemológico

Puede señalarse que la tensión histórica que se manifiesta en la dialéctica puntual – global permitió que a nivel del diseño de las situaciones se reconociera la importancia de plantear problemas geométricos que requirieran transitar por ambos enfoques, a partir de situaciones problemas relativas a la construcción de las cónicas. Por esta razón, en el dispositivo experimental se alternó entre situaciones que empezaban por lo puntual y terminaban en lo global al ser representadas algebraicamente y otras situaciones en las que empezaban por lo global pero debían considerar el carácter puntual de algunas de sus propiedades intrínsecas, tal y como lo efectuó Apolonio.

Por otra parte, los problemas abiertos propuestos en estas situaciones diseñadas, cumplieron la función de ser detonadores de acciones y estrategias matemáticas para encontrar soluciones. Esta es la entrada a lo sintético para llegar a lo analítico, de tal forma que se pueda llegar a concebir las cónicas como Descartes lo hizo, como un conjunto de puntos. Con esto se busca diferentes formas de construir un punto móvil de tal forma que “el movimiento regular” de dicho punto permitiera contener a la nube de puntos (es decir, una construcción global), y que luego deban encontrar la expresión algebraica. Con esto se intentó plasmar la naturaleza compleja de las cónicas, al hacer pasar, la mirada holística, a la mirada puntual, pero substituyéndola luego por parejas ordenadas relacionadas entre sí en una ecuación y que permitiese resolver el problema.

Otra tensión de orden epistemológica fue que se reconoció la necesidad de involucrar en el diseño, un trabajo sistemático de situaciones problema relativo al lugar geométrico de las cónicas. En consonancia con esta revisión teórica, se consideró, en el diseño didáctico, problemas geométricos que permitan hacer el tránsito de la geometría al álgebra tal como lo realizó Descartes. Este criterio se corresponde con la idea de trabajar con la geometría sintética para arribar a la geometría analítica cuando se resuelven problemas de geometría. De esta manera, se puede dar el paso a la representación algebraica. Hay un cambio de lo perceptual en los problemas geométricos a lo abstracto que existe en el trasfondo de los mismos, cuando se va pasando por las diferentes las fases propuestas de las situaciones. Algunos problemas geométricos que se retomaron en la situaciones, son variaciones de problemas clásicos como el de las Tangencias de Apolonio (Rabu-Boyé, 2009).

Desde lo cognitivo

Se partió de considerar global y lo puntual en la representación gráfica del objeto matemático en cuestión y llegó a ser fundamental en el dispositivo experimental.

Dado que la prueba diagnóstica dio a conocer una serie de concepciones que tenían los estudiantes sobre las cónicas, el dispositivo intentó configurar una estrategia didáctica que permitiera superar las ideas erróneas.

Los cambios de representación matemática propuestos fueron necesarios para la transición

de lo sintético a lo analítico y de lo puntual a lo global. Por otra parte, la visualización matemática jugó un papel fundamental en la elaboración de conjeturas solicitadas en las segundas fases de cada situación.

En el proceso de construir lugares geométricos, permitió que se abordara una dimensión instrumental para el tratamiento de las curvas algebraicas. En primera instancia, las situaciones podían ser construidas tan solo usando regla y compás; pero se quedarían en la fase de construir la nube de puntos planteada, y lo que se pretendía al usar el AGD era que se pensara en construir la forma y la posición de la curva de tal manera que ésta adquiriera el carácter ejecutable al ser arrastrados puntos de la construcción que la determinarían revelando su propiedades invariantes. Esta posibilidad es reforzada en libros de texto que reconoce la importancia de la utilización de las calculadoras y el lápiz y papel, en lo concerniente a las técnicas para elaborar gráficas de curvas.

Se tomó en cuenta que al graficar las cónicas y esbozar sus propiedades, basados construcciones geométricas sería una condición necesaria para formar y desarrollar el concepto de lugar geométrico de estas curvas.

En relación con lo anterior es claro que a través de la mediación del AGD se pueden ilustrar la generación punto por punto usando la herramienta “Traza”, el cual apoya la interpretación de la definición de la cónica como lugar geométrico. Este tipo de tareas se corresponde con la idea de las variaciones dinámicas de los valores de los parámetros (por ejemplo, para investigar varios casos y para generar familias de curvas). Lo que se requiere es que el usuario, al trabajar en el AGD, sea capaz de generarlas como objetos gráficos referenciables, es decir, la traza surge como producto de una construcción que involucra una definición de lugar geométrico.

Desde lo didáctico y desde AGD Cabri como medio.

Lo didáctico se concentró en la organización de la clase, a partir de las situaciones de acción, que luego se tornaban de formulación, validación y de institucionalización.

En el análisis realizado a los libros de texto, la definición de cónicas muestra que son tratadas como lugar geométrico y algunas otras veces como “secciones de un cono”, estas variadas acepciones también juegan un papel central en el diseño de las situaciones dado que es evidente que estas cambian en un AGD, y la manera de producir un lugar geométrico también es diferente.

Las estrategias de usar el método de los lugares geométricos al ser involucrados en la actividad intelectual de los estudiantes pueden llevar a que el saber matemático puesto en juego sea tratado desde la dialéctica herramienta – objeto (Douady, 1993).

Uno de los aspectos centrales de la mediación del AGD, es que permite que los estudiantes puedan explorar los lugares geométricos como medio de transición entre la definición de una figura, en el sentido euclidiano, operando de manera global a una noción de lugar geométrico, que utiliza un conjunto de puntos, es decir, se convierte en una definición puntual. Llegando a considerar que a partir de un solo punto y por medio de una construcción geométrica, se pueda construir un punto que produzca la traza y por ende se pueda arribar a una generalidad en la situación. Con esta estrategia, se podría dar la idea de un lugar geométrico “hecho” de puntos y no como algo compacto o global. De fondo se empieza a considerar el lugar geométrico visto como una función matemática.

En este dispositivo, se contempló la posibilidad de que los estudiantes experimentaran matemáticamente al realizar las construcciones geométricas, usando las herramientas de medida del AGD para que buscaran relaciones cuantitativas entre las distancias entre los puntos dados pero que luego debían de prescindir de lo figural para tratar de caracterizar la curva globalmente desde lo algebraico. En este caso el AGD funcionaría como puente entre el nivel espacio – gráfico y el nivel teórico cuando se estudian los lugares geométricos.

Además se tuvo en cuenta la importancia de presentar a las cónicas para estudiar el comportamiento de fenómenos de cambio continuo. En tal sentido se propusieron situaciones en el AGD relativas a lugares geométricos de las cónicas que exploraban la traza de un punto sujeto a algunas restricciones y en particular que remitían a la función de esos puntos y de manera más específica a modelos computacionales de las funciones. Igualmente algunas de las situaciones propuestas se refieren a curvas algebraicas que al ser exploradas en un AGD pueden contribuir a cerrar la brecha entre la geometría sintética y la algebraica. El sentido de estas situaciones se apoya en la idea de que en los AGD, ofrecen una variedad de problemas, de estrategias de solución y de relaciones de interés matemático que apoyan las actividades de modelación matemática.

La transición entre los diferentes tipos de tareas geométricas del AGD, permitió el uso de diferentes representaciones matemáticas ejecutables y dinámicas propias del ambiente.

En este orden de ideas, el diseño de las situaciones contempla la obtención de ecuaciones algebraicas a partir de la construcción sintética de una curva y de esta manera se promueve la el aprendizaje matemático y la argumentación para las ecuaciones algebraicas producidas por el AGD. Las situaciones dieron la posibilidad de usar la herramienta “Coordenadas o ecuación” del ambiente informático al finalizar la actividad de construcción, permitiendo extender las acciones de los estudiantes de una forma explicativa, interpretativa y verificadora de los fenómenos visuales producidos en la pantalla.

Discusión de resultados. En esta ponencia, se expondrán los análisis *a priori* y *a posteriori* del diseño y gestión de la puesta en acto de las situaciones a-didácticas que se preparó para esta investigación. Uno de los resultados es el diseño de ocho situaciones desde la caracterización puntual – global integrando Cabri en relación a la TSD y la tipología de tareas en AGD (Laborde, 2001 y 2006). Así mismo, se presentarán las ideas erróneas que tuvieron los estudiantes acerca de las cónicas como lugar geométrico así como las concepciones previas sobre qué significa para ellos un lugar geométrico. En particular, uno de los grandes resultados es que el tratamiento de los lugares geométricos en la Geometría en general, es que la comprensión global del lugar geométrico impera en los estudiantes, al ver la figura (cónica) completa en contraste a la comprensión local o puntual que no es muy bien recibida (Jahn, 2002), en la que se estudian las propiedades intrínsecas de puntos individuales del lugar geométrico.

Conclusiones

En la ponencia se presentarán algunas de las siguientes conclusiones de esta investigación, tales como:

El análisis la información recolectada evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas puntuales permitió emerger construcciones geométricas globales en el AGD, a la vez que en este ambiente se dieron retroalimentaciones que posibilitaron caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las cónicas, pero a partir de

construcciones globales los estudiantes no tuvieron en cuenta la naturaleza geométrica de las curvas como lugares geométricos: lo puntual de ellas.

Lo puntual en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una cónica, lo que conllevó a que permanecieran en un nivel perceptual, en tanto que lo global de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico, aunque lo global no fue aprovechado al máximo pues las estrategias efectuadas por los estudiantes persistieron en lo figural. Así mismo, con este diseño, se pudo descubrir que de lo global, existe la posibilidad que surja la consideración de lo puntual cuando los estudiantes han pasado por una primera caracterización.

Además, el diseño de las situaciones, produjo un ambiente educativo, a manera de puente, para pasar de lo puntual a lo global. La vuelta, de ir de lo global a lo puntual, es algo que el profesor debe procurar cuando se busca encontrar invariantes o propiedades geométricas aludiendo a puntos de la curva que son claves para determinar la naturaleza de la curva tales como el vértice o el foco.

Para comprender el significado de las cónicas por medio de la articulación entre las representaciones estáticas, las dinámicas y ejecutables y las algebraicas, la noción de lugar geométrico jugó un papel importante para el estudio de estas curvas, en un AGD como el Cabri. Sin embargo, en los estudiantes hizo falta que esta noción alcanzará el estatus de noción paramatemática, en el sentido de Chevallard (1997), puesto que se observó que el lugar geométrico fue reconocido como herramienta útil para resolver los problemas, pero no fue tratado como objeto de estudio, a pesar de que el profesor orientó aspectos como centrales de esta noción al principio del curso de geometría analítica al abordar los dos problemas fundamentales, sin embargo el estatus logrado por parte de los estudiantes fue el de noción protomatemática, dado que la movilización de esa noción en las situaciones fue de manera implícita cuando ellos la generaron usando las herramientas del AGD.

Desde la organización curricular no se siguió con un programa de geometría analítica al estilo tradicional, pues se le dio un giro a éste con una mirada renovada a las cónicas desde lo sintético, y que si bien los contenidos permanecieron no se dio el tratamiento convencional de las cónicas, basado en representaciones algebraicas que desligan lo geométrico. Lo que se rescató fue el dinamismo que se le imprimió a los problemas de cónicas como lugares geométricos al usar el Cabri, resaltando las definiciones dinámicas, apropiadas, que aluden al movimiento, cristalizándose en la pantalla del AGD, así como los fenómenos de visualización que aportan para el surgimiento de estrategias de solución.

Con esta conjugación del ambiente informático a través de construcciones geométricas, así como la complementariedad de lo sintético y lo analítico, se pudo ampliar el horizonte de intervención didáctica en el curso universitario de geometría analítica, en la medida que permitió la integración tanto de nuevas temáticas como de estrategias metodológicas, y tuvo en cuenta la complejidad conceptual que encierran las cónicas así como su naturaleza geométrica. Sin embargo, se notó que los estudiantes no estuvieron acostumbrados hacer conversiones entre representaciones. A lo sumo, conocen los procedimientos de pasar de las representaciones simbólicas a las gráficas, pero no están familiarizados con procedimientos en la vía contraria.

Existe un problema representacional en los libros de texto universitarios de geometría analítica. Es la manera en que aluden a los dibujos de las cónicas, sin tener en cuenta la diferencia conceptual con lo de figura. Una manera de concientizar a los estudiantes de este

problema es que el dibujo es una representación visual, frente al objeto matemático que es no es simplemente lo representado.

El tratamiento en la caracterización puntual y global enmarcado en una construcción geométrica fue pieza clave para que los estudiantes despertaran sus ideas, percepciones, imágenes mentales, y fortalecieran el proceso de visualizar matemáticamente al tratar de resolver el problema; pero al mismo tiempo se les ayudó a involucrarse en un proceso de actividad matemática gracias a las acciones y retroacciones que el medio ejecutable les proporcionó y así pudiesen tener presente la riqueza de ideas geométricas interconectadas.

El AGD Cabri jugó el papel de instrumento mediador en todo el proceso: cuando los estudiantes trataron de encontrar un punto móvil que fuese recorriendo un camino (un conjunto de puntos estáticos y colocados de manera discreta) en el plano sin ejes de coordenadas, por medio de una construcción geométrica, que les permitió un acercamiento visual mostrándoles la dinámica que subyace a las situaciones, y gracias a este instrumento se gestaron estrategias para encontrar una construcción geométrica dinámica.

Desde la perspectiva didáctica de la dialéctica herramienta – objeto de Douady (1993), el uso de la noción de lugar geométrico en el estudio de las cónicas es un ejemplo de este punto de vista, debido a que la secuencia estuvo organizada alrededor de problemas geométricos cargados de una intencionalidad didáctica que les permitió a los estudiantes darle un sentido y significado a las cónicas implicadas. Desde esta dialéctica, se pudo observar que el lugar geométrico jugó el papel de herramienta. Sin embargo, el paso a estudiar las cónicas en tanto objeto matemático fue sutil que el profesor en la fase de institucionalización lo presentó de manera ostensible.

En efecto, en el análisis de la secuencia, se observó que el profesor permitió a los estudiantes apropiarse del conocimiento matemático en cuestión, gracias a que se pudo usar el método de los lugares geométricos –estrategia ganadora–, y cuando se efectuó la devolución del problema, ellos entraron en interacción directa con cada uno de los problemas de la secuencia. No obstante, se pudo apreciar que algunos estudiantes aprendieron la estrategia ganadora, al utilizar el lugar geométrico en el estatus de herramienta y así encontrar el foco de la parábola (el punto clave, según Fernández, 2011) para resolver el problema.

Desde este punto de vista dialéctico, se pudo conjugar con la caracterización puntual y global en la secuencia diseñada. Y en consecuencia el encuadre didáctico fue funcional pero al mismo tiempo llegó a convertirse en un fenómeno didáctico denominado uso abusivo de la analogía (Brousseau, 2007), al mostrar el profesor de manera ostensiva dicho método.

Por lo tanto, el método de los lugares geométricos se reveló como una estrategia ganadora y se vio ampliada al usar el AGD Cabri, el cual pudo haberse integrado a las técnicas habituales de los estudiantes si se hubiese dado una complementariedad entre ambientes como el del lápiz y el papel. No obstante, según Schumann y Green (1997), la selección del ambiente para generar lugares geométricos depende de los objetivos didácticos que persiga el profesor. El problema fue que se diseñó para que surgiera una estrategia ganadora (cualquier solución que empleará la noción de lugar geométrico) que solucionara el problema usando conocimientos geométricos (es decir, con una construcción geométrica robusta) y que fuesen la más eficiente entre las estrategias perceptivas y empíricas (una construcción blanda que se aproximaba). Como algunos estudiantes encontraron la estrategia, entonces se manifestó como una herramienta para resolverlo y no como una forma de cumplir con las expectativas del profesor de que lo entendieran como objeto y no sólo como herramienta.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Bartolini Bussi, M. G. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En C. Hoyles, J. Kilpatrick & O. Skovsmose (Eds.), *The meaning of Mathematics Education* (Vol. 37, pp. 39 – 60). Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (1era Ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- Douady, R. (1993). Juego de Marcos y la Dialéctica Herramienta-Objeto. En A. Ernesto Sánchez S. & Gonzalo Zubieta B (Eds.). *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 68-87). México: CINVESTAV.
- Fernández, E. y Mejía, M. F. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En: Memorias del 11mo. *Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). (pp. 61-68). Bogotá, Colombia. Consultado el 1 enero de 2011. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1162/1/61_Analisis_de_textos_escolares_para_el_diseño_de_situaciones_de_Asocolme2010.pdf
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II plus*. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.
- Jahn, A. P. (2002): "Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 78 – 84.
- Laborde, C. (2001). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*. 44, 151 – 161.
- Laborde, C. (2006). La dialéctica entre cambio e invarianza en la enseñanza y el aprendizaje con Cabri. Ejemplos en geometría 2D y 3D. En *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri IberoCabri 2006*. Bogotá: Universidad de la Sabana. Recuperado de: http://www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS_2006/memorias.htm
- Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. En *Memorias XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Viera de Leiria, Portugal.
- Moreno, L. y Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies*, 41 (4), 505-519.
- Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética*. (M. Acosta Trad.). Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1998).
- Río-Sánchez, J. del. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Síntesis.
- Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and using Loci with Dynamic Geometry Software. En J.

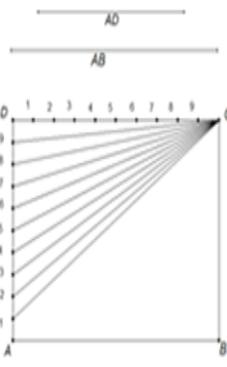
King & D. Schattschneider. (Eds.). *Geometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 79-87). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.

Apéndice A Situación Didáctica No. 1

Cónicas desde una construcción Punto por Punto
Lugares Geométricos en un AGD

Fase 1 de la Situación Problema No. 1a: Construya Geométricamente.

Abra tanto el archivo **rectangulo.fig** como el conjunto de herramientas denominado **Herramientas para esta Situación Problema 1a.men** en el programa **Cabri Géomètre**. Observe que dos de los lados están divididos en 10 partes, cada uno de los puntos ha sido nombrado con un número. Desde el punto C se han trazado segmentos hasta cada uno de los puntos divisorios de la altura del rectángulo. Ver Figura 1.¹

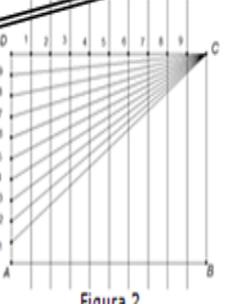


Ahora, por cada uno de los puntos de la base superior, nombrados de izquierda a derecha en orden numérico, trace rectas perpendiculares a dicha base. Ver Figura 2.

Fase 2 de la Situación Problema No. 1a: Reflexione, Escriba y Valide en el AGD.

a) **Escriba** a mano, en las hojas de papel, una conjetura acerca de cuál cree Ud. qué es el **Lugar Geométrico** que se forma cuando se unen esos puntos de intersección de las rectas correspondientes a los puntos igualmente numerados. Es decir, la intersección del segmento que pasa por 1 con la recta que pasa por 1, la intersección del segmento que pasa por 2 con la recta que pasa por 2, y así sucesivamente.

b) Luego **valide** su conjetura usando el AGD con alguna construcción geométrica dinámica de tal manera que al arrastrar un punto de su construcción, vaya recorriendo dichos puntos de intersección.



Fase 3 de la Situación Problema No. 1a: Represente Algebraicamente.

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Preparado por: Edisson Fernández M.²
Prof. Área Educación Matemática
Dpto. de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

Título desde el enfoque

Un tipo de tarea en AGD, construya una cónica pero usando ciertas herramientas del Cabri.

Aquí construye la nube de puntos.

Fase de acción.

Aquí debe dar una conjetura
Fase de Formulación.

Aquí se le pide una Construcción Robusta
Fase de Validación.

Esta SP ataca el Segundo Problema Fund. de la Geometría Analítica Dada una fig., o la condic. que debe cumplir los puntos de la misma determine su ecuación

Fase de validación

Situación problema No. 1a

Nomenclatura para el investigador.

Apéndice B
Análisis de las respuestas a la Situación Didáctica No. 1.

Apellidos de los Estudiantes	DESCRIPCIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES	FIGURA
<i>CONSTRUCCIONES CUYA CONJETURA DIJERON QUE UNA ELIPSE</i>		
Ramírez y Restrepo	Hallan los puntos de la nube de puntos solicitadas y luego trazan circunferencias concéntricas al punto A cuyo radio va hasta cada uno de los puntos de la nube. Luego hallan otros puntos a partir de la intersección de estas circunferencias y rectas perpendiculares al lado AB . Con simetría axial encuentran los puntos del lado derecho de la supuesta elipse. En la construcción se observan algunas distancias. En sus intentos por mostrar que es una elipse realizan la construcción, tratando de ubicar los puntos de la nube de puntos sobre el lugar geométrico.	<p align="center"><i>Figura 1: Construcción blanda de Ramírez y Restrepo.</i></p>
Saavedra y Machado	Luego de hallar la nube de puntos, efectúan diferentes construcciones como rectas y circunferencias. La intencionalidad de las primeras construcciones no es definible, al parecer intentan mostrar que los puntos pertenecen a un arco de circunferencia. Posteriormente, determinan como foco de una parábola el punto B y junto con la directriz, la construyen. Sin embargo, con el arrastre descubren que los puntos no pasan por la parábola. Borran la construcción y realizan la construcción de una parábola, por fuera de estos puntos para recordar el procedimiento y aplicarlo.	<p align="center"><i>Figura 2: Construcción blanda de Saavedra y Machado.</i></p>
Fajardo	Halla la nube de puntos y los une con segmentos. Luego supone que B es el foco de una parábola, traza dos segmentos uno perpendicular a la directriz desde el punto de la nube y otro desde ese punto al foco, pero los resultados no son equidistantes. Ahora toma como foco, un punto sobre segmento BC y toma nuevamente la distancia de un punto de la nube a la directriz y al foco, en este caso los resultados se aproximan. Mueve el foco, fijándose que las dos distancias sean iguales. Como los resultados no concuerdan, le agrega más cifras decimales a las distancias.	<p align="center"><i>Figura 3: Construcción blanda de Fajardo.</i></p>