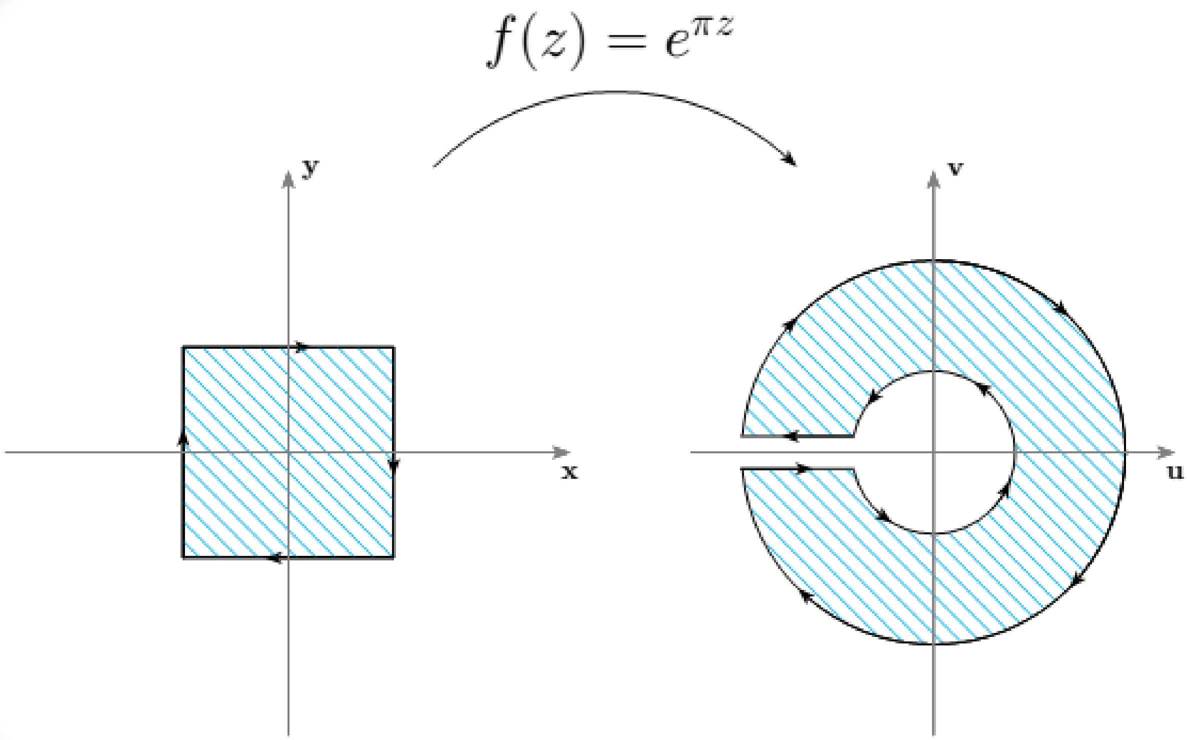
UN PRIMER CURSO SOBRE
VARIABLE COMPLEJA



Saulo Mosquera López
Oscar Fernando Soto Agreda

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
San Juan de Pasto

2016

Un primer curso sobre Variable Compleja

Saulo Mosquera López
Oscar Fernando Soto Agreda
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
2016

Presentación

Los números complejos fueron conocidos inicialmente en los trabajos de G. Cardano y Bombelli relacionados con el cálculo de las raíces de la ecuación de tercer grado hacia la mitad del siglo XVI. Un avance en la comprensión del concepto de número complejo, tanto constante como variable, se logra hacia mediados del siglo $XVIII$ y está relacionado con nombres tales como D'Alembert, J. Bernoulli, L. Euler y G. Leibnitz. Sin embargo, tales logros no fueron significativos; tanto así que en 1702 Leibnitz escribía: "Los números imaginarios son un hermoso y maravilloso refugio del espíritu divino, casi como la dualidad entre la existencia y la no existencia".

Los primeros tratados sistematicos del análisis complejo se encuentran en los trabajos de Agustín Cauchy del año 1825, esencialente en "Memorias sobre las integrales definidas tomadas entre límites imaginarios"punto de referencia para el estudio de las integrales curvilineas en el cual se introduce el concepto de "variación continua de una curva"que en la actualidad se conoce como homotopía.

Complementariamente están los trabajos de Bernard Riemann quien introduce el concepto de derivabilidad en el sentido complejo y temas tales como prolongación de funciones armónicas y de prolongación analítica y finalmente los trabajos de Karl Weierstrass, quien realizó una fundamentación rigurosa de la teoría, independiente de la intuición geométrica, utilizando el concepto básico de función analítica a través de la representación local de una función en serie de potencias.

La teoría de las funciones analíticas es una de las áreas de la matemática que posee diversas aplicaciones en diferentes disciplinas aplicadas y teóricas. Circuitos eléctricos, sistemas vibratorios, conducción de calor y mecánica de fluidos son algunos de los campos en los cuales esta teoría ayuda a su comprensión y estudio. Algunas de las técnicas utilizadas en diferentes ciencias tienen su fundamento en la teoría de funciones de variable compleja y por ello en la estructura curricular de programas tales como: Ingeniería eléctrica, Ingeniería electrónica, Física y Matemáticas, se desarrolla un curso en esta rama de las Matemáticas que permite a sus estudiantes adquirir los conocimientos básicos de la misma y las competencias necesarias para resolver problemas atinentes a ellos.

Este trabajo tiene como propósito presentar los aspectos introductorios de las funciones de variable compleja para que sirva como texto orientador de los académicos interesados en este tema y, en particular, de los cursos que sobre esta área se ofrecen en los Programas de: Licenciatura en Matemáticas, Física y, parcialmente, Ingeniería Electrónica de la Universidad de Nariño.

El desarrollo del texto se realiza en siete capítulos, cada uno de los cuales presenta la teoría necesaria para una lectura autocontenida de los mismos. A través del desarrollo de cada capítulo se presentan ejemplos ilustrativos de la teoría, así mismo, se desarrolla una sección de problemas resueltos que permiten afianzar los aspectos tratados y ejemplificar los conceptos teóricos y finaliza con un apartado de problemas propuestos, sobre la temática abordada, que se espera sean resueltos por el lector para complementar integralmente lo expuesto en el desarrollo del mismo, a la vez que fortalecer conceptualmente los tópicos presentados.

El primer capítulo presenta los conceptos básicos sobre números complejos, su operatoria, su representación geométrica e incluye una sección que muestra su relación con la proyección estereográfica.

El segundo trata brevemente el concepto de función de variable compleja, de límite y de continuidad. En general, se omiten las demostraciones de los resultados relacionados con estos temas ya que ellas son análogas a las que se encuentran en los textos de cálculo de variable real.

El tercer capítulo desarrolla el concepto básico de derivada compleja de una función de variable compleja, su relación con el concepto de función holomorfa y lo relacionado con las ecuaciones de Cauchy Riemann las cuales proporcionan condiciones necesarias y suficientes para que una función de variable compleja, expresada en términos de su parte real e imaginaria, sea diferenciable, así como una expresión para el cálculo de su derivada.

El cuarto presenta lo relacionado con las funciones elementales, uniformes y multiformes, fundamentalmente aspectos algebraicos y geométricos y llama la atención sobre las semejanzas y las diferencias de estas con su contraparte en las funciones de variable real.

El capítulo quinto trata lo atinente con la integración de funciones de variable compleja y enfatiza en el Teorema de Cauchy y sus resultados relacionados tales como, la Fórmula Integral de Cauchy y el Teorema de Cauchy para derivadas.

El sexto capítulo centra su atención en las series de potencias, su relación con el concepto de función analítica, en tratar la relación existente entre función holomorfa y función analítica y en las Series de Taylor y de Laurent. En este punto es necesaria una observación. La derivada e integración de una serie requiere del concepto de convergencia uniforme, sin embargo, limitaciones de índole académico impuestas por los autores al desarrollo del texto, no permiten presentar este concepto con la profundidad requerida, por lo cual únicamente se exponen los resultados básicos sin las correspondientes demostraciones.

El capítulo séptimo presenta los aspectos relacionados con la teoría de residuos y su aplicación al cálculo de diferentes clases de clases de integrales reales definidas que no se tratan en los cursos de cálculo integral de variable real.

Este trabajo es el fruto de la experiencia de los autores en la orientación de la asignatura, en los programas mencionados, a lo largo de varios períodos académicos y su sistematización se ha logrado con los aportes y observaciones de los estudiantes quienes con su inquietud e interés han escrito a trozos el ideal pedagógico que soñamos y que tenemos la obligación de construir.

Agradecemos a los evaluadores externos su voluntad, disposición y rigurosidad en la evaluación, sus observaciones están reflejadas en esta versión del trabajo y han permitido un mejor desarrollo del mismo.

SAULO MOSQUERA LÓPEZ
OSCAR FERNÁNDO SOTO ÁGREDA
San Juan de Pasto, Febrero de 2016.

Índice general

Capítulo 1

El plano complejo y el plano complejo ampliado

En este capítulo se presentan las propiedades algebraicas y geométricas básicas de los números complejos, se extienden algunos conceptos topológicos de análisis al plano complejo y complementariamente se analiza el concepto de punto al infinito como un punto ideal que permitirá posteriormente unificar las diferentes definiciones de límite tratadas en el cálculo diferencial de una variable real.

1.1. El plano complejo

De acuerdo al matemático Alemán Leopold Kronecker "Dios creo los números naturales $\mathbb{N}$, el resto es obra del hombre". Bajo esta concepción los números naturales negativos surgieron de la necesidad de efectuar la sustracción ya que si a y b son números naturales, únicamente cuando $b > a$ existe un número natural n tal que $a + n = b$ y se tiene así el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$. En este sistema no toda ecuación de la forma $ax + b = 0$ tiene una raíz, problema cuya solución requirió la introducción de los números racionales $\mathbb{Q}$. La inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado permitió el surgimiento de los números irracionales y los números reales $\mathbb{R}$ son la unión de los números racionales y los irracionales. Es conocido el hecho de que los números reales no son suficientes para encontrar soluciones reales a toda ecuación cuadrática con coeficientes reales. La ecuación cuadrática más simple que carece de soluciones reales, es

$$x^2 + 1 = 0$$

y se tiene así el siguiente problema:

"Ampliar el conjunto de los números reales hasta encontrar un sistema de números, en el que la ecuacion $x^2 + 1 = 0$ tenga solución".

Presentamos a continuación el esquema básico de la solución a este problema.

1.1.1. EL conjunto de los números complejos y sus operaciones básicas

Definición **1.1.** *El conjunto de los números complejos se denota con* $\mathbb{C}$ *y se define como*

$$\mathbb{C} = \{z = (a, b) : a, b \text{ en } \mathbb{R}\}$$

Esta definición permite identificar un número complejo como una pareja ordenada por lo que como conjunto no existe diferencia entre $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$, la diferencia básica se obtiene al dotar a $\mathbb{C}$ de una estructura algebraica, para lo cual es necesario definir en $\mathbb{C}$ ciertas operaciones.

Definición **1.2.** *Sean* $z = (a, b)$, $w = (c, d)$ *números complejos, se define la igualdad, adición y multiplicación de números complejos como*

1. $z = w$ *si y solo si* $a = c$ *y* $b = d$
2. $z + w = (a + c, b + d)$

3. $z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$

La demostración del siguiente resultado depende básicamente de las propiedades del sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como cuerpo

Teorema **1.1.** *El sistema* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *es un cuerpo.*

Nótese que en este sistema el neutro aditivo es el par $(0, 0)$, el neutro multiplicativo es $(1, 0)$, el inverso aditivo de $z = (a, b)$ en $\mathbb{C}$ es $-z = (-a, -b)$ y que si para $z = (a, b) \neq (0, 0)$ en $\mathbb{C}$ existe $z^{-1} = (x, y)$ en $\mathbb{C}$ talque $z \cdot z^{-1} = 1$ es por que

$$ax - by = 1$$

$$ay + bx = 0$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones se encuentra que

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \qquad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

con lo que el inverso multiplicativo de $z = (a, b) \neq (0, 0)$ es $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right)$.

Ejemplo **1.1.** Dados los números complejos $z = (-3, 2)$, $w = (5, 1)$, calcular $z + w$, $z \cdot w$, $\dfrac{1}{z}$

Solución. De acuerdo a la definición 1.2

$$z + w = (-3, 2) + (5, 1) = (2, 3)$$

$$z \cdot w = (-3, 2) \cdot (5, 1) = (-17, 7)$$

y con base a la observación que sigue al teorema 1.1

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{-3}{(-3)^2 + 2^2}, \frac{-2}{(-3)^2 + 2^2} \right) = \left(\frac{-3}{13}, \frac{-2}{13} \right)$$

La presentación usual de los números complejos se obtiene a partir de las siguientes observaciones:

1. Dado que $(a, 0) + (c, 0) = (a + c, 0)$ y $(a, 0) \cdot (c, 0) = (ac, 0)$ entonces las parejas de la forma $(a, 0)$ se comportan como los números reales, esto permite identificar la pareja $(a, 0)$ con el número real a y así "$\mathbb{C}$ es una ampliación de $\mathbb{R}$"

2. Si se denota la pareja $(0, 1)$ con i entonces $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1$ y así la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución en $\mathbb{C}$.

3. Dado que $b \cdot i = (b, 0) \cdot (0, 1) = (0, b)$ entonces

   $$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + bi$$

   por lo que también es posible definir el conjunto de los números complejos como

   $$\mathbb{C} = \left\{ z = a + bi : a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1 \right\}$$

4. La diferencia esencial entre los sistemas $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es que mientras el primero es un cuerpo ordenado, el segundo no lo es ya que si lo fuera entonces con algún orden $1 > 0$ por lo que $-1 < 0$ y para todo z en $\mathbb{C}$, $z \neq 0$ debería cumplirse que $z^2 > 0$, en particular $i^2 > 0$ es decir $-1 > 0$, lo cual es una contradicción.

Obsérvese que de acuerdo a la observación 3, las operaciones de adición y multiplicación de números complejos pueden expresarse así:

Definición **1.3.** *Sean* $z = a + bi$, $w = c + di$ *números complejos entonces*

1. $z + w = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2. $z \cdot w = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

De esta manera la adición y multiplicación de números complejos pueden realizarse considerándolos como polinomios de primer grado en la variable i, teniendo en cuenta que $i^2 = -1$.

Definición **1.4.** *Sea $z = a + bi$ un número complejo,* ***el conjugado*** *de z se denota $\overline{z}$ y se define como*

$$\overline{z} = a - bi$$

Los números reales a y b se llaman ***la parte real de de*** *z y* ***la parte imaginaria de*** *z lo cual se denota como*

$$a = Re(z), \quad b = Im(z)$$

Si $Re(z) = 0$ se dice que $z = bi$ es ***imaginario puro*** *y el complejo i se llama* ***la unidad imaginaria.***

Teorema **1.2.** *Sean z, w números complejos entonces*

a - $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$

b - $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c - $z + \overline{z} = 2Re(z)$ *y* $z - \overline{z} = 2iIm(z)$

d - $\overline{\overline{z}} = z$

e - $z \cdot \overline{z} \geq 0$

Demostración. Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces

a - $\overline{z + w} = \overline{(a + bi) + (c + di)} = \overline{(a + c) + (b + d)i} = (a + c) - (b + d)i = (a - bi) + (c - di) = \overline{z} + \overline{w}$

b - $\overline{z \cdot w} = \overline{(a + bi) \cdot (c + di)} = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = (a - bi) \cdot (c - di) = \overline{z} \cdot \overline{w}$

c - $z + \overline{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2Re(z)$; $z - \overline{z} = (a + bi) - (a - bi) = 2bi = 2iIm(z)$

e - $z \cdot \overline{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$

$\square$

Observe que la relación **e** del teorema 1.2 permite deducir que:

1. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} + \dfrac{-b}{a^2 + b^2} i = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}}$

   por lo que para hallar el inverso multiplicativo de un número complejo $z \neq 0$ es suficiente multiplicar y dividir por su conjugado $\overline{z}$.

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = z_1 \dfrac{1}{z_2} = z_1 \left(\dfrac{\overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} \right) = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}}$

   Por lo que para dividir dos números complejos es suficiente multiplicar y dividir por el conjugado del denominador

Ejemplo **1.2.** Dados los números complejos $z = 3 - 2i$, $w = 4 + i$, calcular $z \cdot w$, $\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{z}{w}$

Solución. la definición 1.5 y las observaciones al teorema 1.2, nos dicen que:

$$z \cdot w = (3 - 2i)(4 + i) = (12 + 2) + (3 - 8)i = 14 - 5i$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{3 - 2i} = \frac{3 + 2i}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13} i$$

$$\frac{z}{w} = \frac{3 - 2i}{4 + i} = \frac{(3 - 2i)(4 - i)}{(4 + i)(4 - i)} = \frac{(12 - 2) + (-3 - 8)i}{4^2 + 1^2} = \frac{10}{17} - \frac{11}{17} i$$

Definición **1.5.** *Sea $z = a + bi$ un número complejo entonces* ***el módulo de*** *z (El valor absoluto de z, la norma de z, la longitud de z) se denota $|z|$ y se define como*

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}}$$

nótese que de la parte **e** del teorema 1.2 se deduce que

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Teorema **1.3.** *Sean z y w números complejos entonces*

a - $|z| \geq 0$ *y* $|z| = 0$ *si y solo si* $z = 0$

b - $|z| = |\overline{z}|$

c - $|zw| = |z|\,|w|$

d - $|Rez| \leq |z|$ *y* $|Imz| \leq |z|$

e - $|z + w| \leq |z| + |w|$ *la Desigualdad Triangular*

Demostración.

c - $|zw|^2 = (zw)(\overline{zw}) = (zw)(\overline{z}\ \overline{w}) = (z\overline{z})(w\overline{w}) = (|z|\,|w|)^2$

d - $|Rez| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

e - Observe que

$$\overline{z\overline{w}} = \overline{z}\ \overline{\overline{w}} = \overline{z}w$$

por tanto

$$z\overline{w} + \overline{z}w = z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} = 2Re(z\overline{w}) \leq 2\,|Re(z\overline{w})| \leq 2\,|z\overline{w}| = 2\,|z|\,|\overline{w}| = 2\,|z|\,|w|$$

luego

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)\,(\overline{z + w}) = (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &\leq |z|^2 + 2\,|z|\,|w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2 \end{aligned}$$

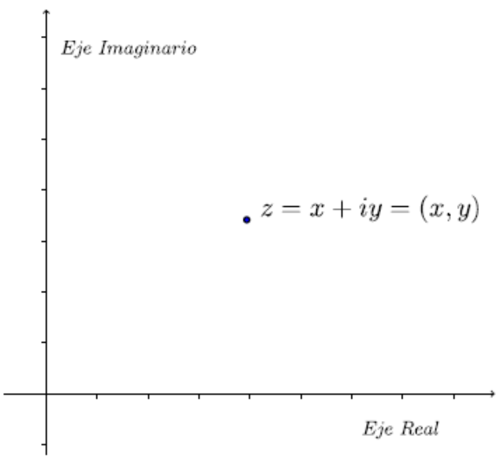
□

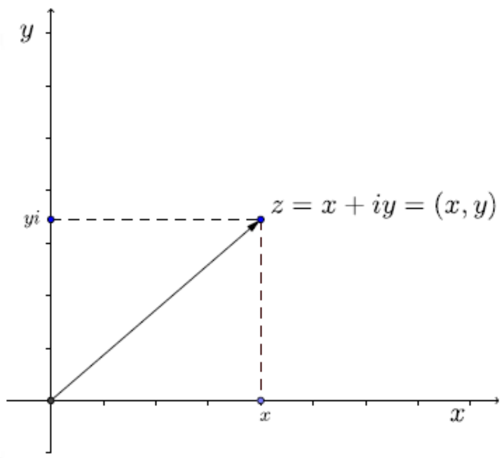
1.1.2. La forma polar de un número complejo

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares xy; puesto que

$$\mathbb{C} = \{z = (x, y) : x, y \in \mathbb{R}\} = \{z = x + iy : x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

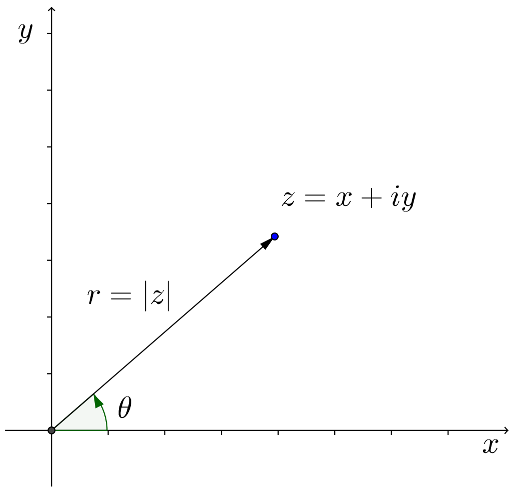
entonces existe una biyección entre los números complejos $z = x + iy$ y los puntos (x, y) del plano, por lo que es posible interpretar geométricamente un número complejo $z = x + iy$ como un punto (x, y) del plano o como un vector con origen en el origen de coordenadas y extremo el punto $z = (x, y)$





El eje de las abscisas $(x,0) = x$ se llama **eje real** y el eje de la ordenadas $(0,y) = yi$ se llama **eje imaginario**. El plano xy se denomina **el Plano Complejo** o el z-plano.

Si se considera un sistema de coordenadas polares (r,θ) con polo en el origen de coordenadas y eje polar la parte positiva del eje x entonces



el número complejo$z = x + iy$ se expresa como

$$z = r(cos\theta + isen\theta)$$

donde $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = arc\ tg\frac{y}{x}$ y se debe explicitar el cuadrante en el que está ubicado z. El número real θ se llama **un argumento de** z y se denota $\theta = Argz$, geométricamente $Argz$ denota el ángulo, medido en radianes, entre el semieje real positivo y el vector z. De esto se deduce que un número complejo $z \neq 0$ posee un número infinito de valores de $Argz$ y dos de ellos difieren en un múltiplo de 2π; el único valor de $\theta = Argz$ que está en el intervalo $(-\pi,\pi]$ se llama **argumento principal** y se denota $argz$ por lo tanto

$$Argz = argz + 2k\pi, \qquad -\pi < argz \leq \pi \ \ y \ \ k \in \mathbb{Z}$$

Definición **1.6.** *La representación de un número complejo $z = x + iy$ en la forma*

$$z = r(cos\theta + isen\theta)$$

con $r = |z|$ y $\theta = argz$, $-\pi < \theta \leq \pi$ se llama ***forma polar*** *o* ***forma trigonométrica*** *del número complejo z.*

Ejemplo **1.3.** Hallar la forma polar del número complejo $z = -1 - \sqrt{3}i$

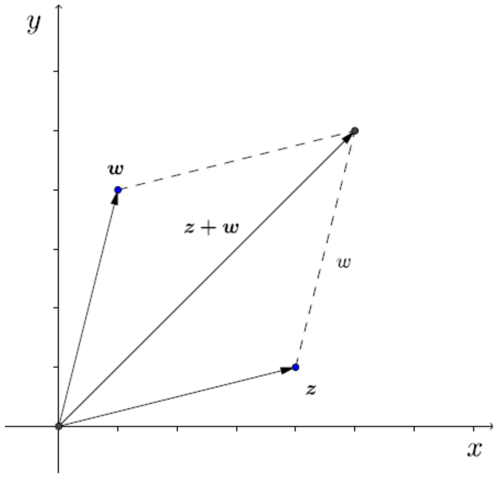
Solución. Como $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$, z está en el tercer cuadrante y
$argz = arc\,tg\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ entonces la forma polar de $z = -1 - 2\sqrt{3}i$ es $z = 2\left(cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$.

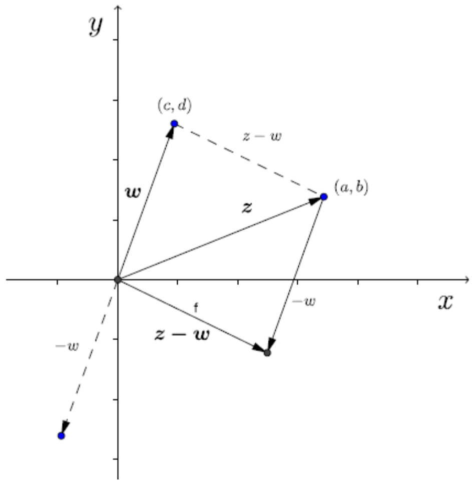
1.1.3. Interpretación geométrica de las operaciones entre números complejos

La representación de un número complejo en forma rectangular proporciona una manera adecuada de interpretar la adición y sustracción de números complejos pero no es satisfactoria para la multiplicación y la división, para este caso utilizamos la representación en forma trigonométrica.

1.1.3.1. Adición y sustracción

Sean $z = a + bi$ y $w = c + di$ entonces $z + w = (a + c) + (b + d)i = (a + c, b + d)$ y $z - w = z + (-w) = (a-c)+(b-d)i = (a-c, b-d)$ por lo que geométricamente la adición y sustracción de números complejos se corresponden con la suma y resta de vectores en el plano.





Observe que $|z - w|$ representa la distancia entre los puntos del plano correspondientes a los números complejos z y w

Ejemplo **1.4.** Dado un número complejo z_0 y un número positivo R dar una interpretación geométrica de los conjuntos

a - $|z - z_0| = R$

b - $|z - z_0| < R$

c - $|z - z_0| > R$.

Solución.

a - Sea $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ con $x,\ y,\ x_0,\ y_0$ en $\mathbb{R}$ entonces $z - z_0 = (x - x_0) + i(y - y_0)$ por lo que $|z - z_0| = R$ equivale a $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$ y elevando al cuadrado se obtiene $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ que representa una circunferencia de centro (x_0, y_0) y radio R.

b - La expresión $|z - z_0| < R$ se puede interpretar como el conjunto de puntos en el plano complejo cuya distancia al punto z_0 es menor que R, por lo tanto el conjunto dado representa el interior de la circunferencia de centro en (x_0, y_0) y radio R.

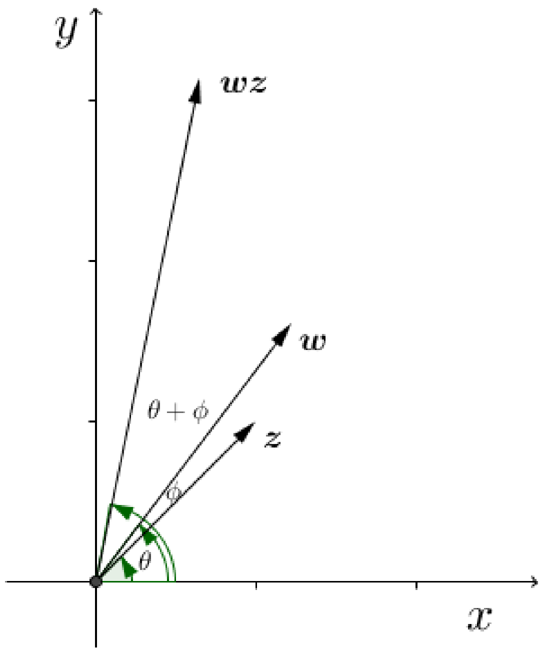
c - Análogamente el conjunto $|z - z_0| > R$ representa el exterior de la circunferencia mencionada.

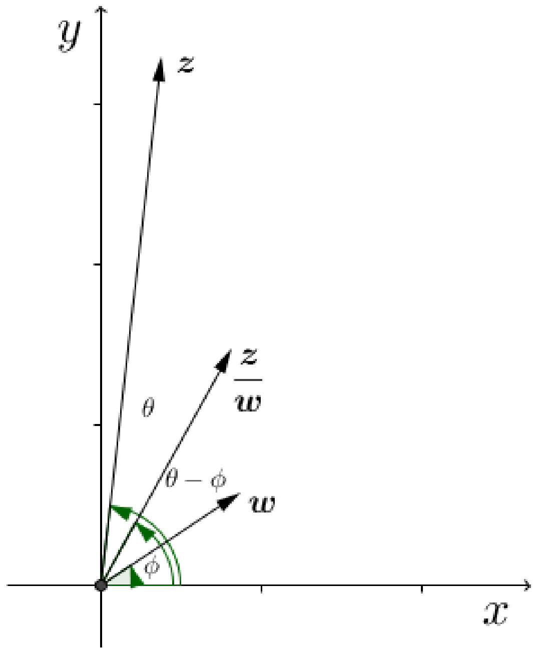
1.1.3.2. Multiplicación y división

Sean $z = r(cos\theta + isen\theta)$ y $w = \rho(cos\phi + isen\phi)$ entonces

1. $zw = r\rho[(cos\theta cos\phi - sen\theta sen\phi) + i(cos\theta sen\phi + sen\theta cos\phi)] = r\rho(cos(\theta + \phi) + isen(\theta + \phi))$
   es decir que para multiplicar números complejos en forma polar se multiplican los módulos y se suman los argumentos.

2. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{w\overline{w}} = \dfrac{r(cos\theta + isen\theta)\rho(cos(-\phi) + isen(-\phi))}{|w|^2} = \dfrac{r}{\rho}(cos(\theta - \phi) + isen(\theta - \phi)),\ w \neq 0$
   de lo que se deduce que para dividir números complejos en forma trigonométrica se dividen sus módulos y se restan sus argumentos.





Nótese que el producto zw equivale a rotar el vector z un ángulo ϕ en sentido contrario a las manecillas del reloj y luego "alargar" este vector ρ veces.

Adicionalmente el producto zw muestra que

$$Arg(zw) = Arg(z) + Arg(w)$$

pero esta relación no es válida para argumentos principales.
Interpretaciones análogas se tienen para el cociente $\frac{z}{w}$, $w \neq 0$.

Ejemplo **1.5.** Mostrar que la multiplicación de números complejos en forma polar no necesariamente produce un número complejo en forma polar.

Solución. Considere los números complejos en forma polar

$$z = 2\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \quad y \quad w = 3\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

entonces

$$zw = 6\left(cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right) = 6\left(cos\frac{7\pi}{6} + isen\frac{7\pi}{6}\right)$$

que no está en forma polar ya que su argumento $\frac{7\pi}{6}$ no es el argumento principal de zw puesto que no está en el intervalo $(-\pi, \pi]$, la forma polar de zw es

$$6\left(cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right).$$

Ejemplo **1.6.** Mostrar que la relación $Argzw = Argz + Argw$ no es válida para argumentos principales

Solución. Considere los números complejos $z = -2$, $w = i$, para ellos se tiene que $zw = -2i$ y

$$argzw = -\frac{\pi}{2} \neq argz + argw = \pi + \frac{\pi}{2}$$

1.1.4. Potenciación y radicación de un número complejo

La representación de un número complejo en forma polar brinda una manera sencilla de calcular las potencias enteras y las raíces de un número complejo.

1.1.4.1. Potenciación

Sea $z = r(cos\theta + isen\theta)$ un número complejo en forma polar y n un entero entonces

1. Si n es positivo entonces por la multiplicación de números complejos en forma polar se tiene que

$$z^2 = r^2(cos2\theta + +isen2\theta)$$

   e inductivamente resulta que

$$z^n = r^n(cosn\theta + +isenn\theta)$$

2. si n es negativo digamos $n = -p$ con $p > 0$ entonces

$$\begin{aligned} z^n &= z^{-p} = (z^{-1})^p = \left[r^{-1}\left(cos(-\theta) + sen(-\theta)\right)\right]^p = \left(r^{-1}\right)^p \left[cos\ p(-\theta) + isen\ p(-\theta)\right] \\ &= r^{-p}\left[cos(-p)\theta + isen(-p)\theta\right] = r^n\left(cosn\theta + isenn\theta\right) \end{aligned}$$

   luego para todo n en $\mathbb{Z}$ se tiene que

$$z^n = r^n\left(cosn\theta + isenn\theta\right) \quad \text{La Fórmula de De Moivre}$$

1.1.4.2. Radicación

Una aplicación básica de la fórmula de De Moivre es el cálculo de las raíces de un número complejo no nulo

Definición **1.7.** *Sea z un número complejo no nulo y n un entero positivo. Un número complejo w es* ***una raiz n-ésima*** *de z si y solo si la potencia n-ésima de w es z*

Teorema **1.4.** *Sea $z = r(cos\theta + isen\theta)$, $z \neq 0$ un número complejo en forma polar y n un número entero positivo entonces z posee exactamente n raices n-ésimas dadas por la expresión*

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left[cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + isen\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right], \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

Demostración. Dado $z = r(cos\theta + isen\theta)$ se debe hallar $w = \rho(cos\phi + isen\phi)$ en $\mathbb{C}$ tal que $w^n = z$, por la fórmula de De Moivre

$$w^n = \rho^n(cosn\phi + isenn\phi) = z = r(cos\theta + isen\theta)$$

de donde

$$\rho^n = r \quad \text{y} \quad n\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

es decir

$$\rho = \sqrt[n]{r} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Aunque en apariencia la expresión para ϕ proporciona infinitos valores, unicamente se obtienen n valores diferentes, ya que cuando $k = n$ entonces

$$\phi_n = \frac{\theta + 2n\pi}{n} = \frac{\theta}{n} + 2\pi = \frac{\theta}{n} = \phi_0 \pmod{2\pi}$$

es decir los valores de ϕ cuando $k = n$ y $k = 0$ coinciden y por tanto a partir de $k = n$ los valores de ϕ se repiten cíclicamente, así entonces las n-raices n-ésimas del número complejo z están dadas por

$$w_k = |z|^{1/n}\left(cos\frac{argz + 2k\pi}{n} + isen\frac{argz + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1).$$

□

Nótese que geométricamente las raices n-ésimas de z representan los vértices de un polígono regular de n lados.

Ejemplo **1.7.** Hallar la parte real y la parte imaginaria del número complejo $(1 + i)^{100}$

Solución. Sea $z = 1 + i$ entonces $|z| = \sqrt{2}$, $argz = arc\ tg1 = \frac{\pi}{4}$ luego

$$z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\right)$$

y al usar la formula de De Moivre se tiene que

$$(1+i)^{100} = (\sqrt{2})^{100}\,(cos25\pi + isen25\pi) = 2^{50}\,(cos\pi + isen\pi) = -2^{50}$$

con lo que

$$Re\left((1+i)^{100}\right) = -2^{50} \quad \text{y} \quad Im\left((1+i)^{100}\right) = 0$$

Ejemplo **1.8.** Calcular las raices cuartas de -1

Solución. Las raíces cuartas de -1 están dadas por la expresión

$$\begin{aligned} w_k &= |-1|^{1/4}\left(cos\frac{arg(-1)+2k\pi}{4} + isen\frac{arg(-1)+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3 \\ &= \left(cos\frac{\pi+2k\pi}{4} + isen\frac{\pi+2k\pi}{4}\right), \quad k = 0,1,2,3 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} cos\frac{\pi}{4} + isen\frac{\pi}{4}\pi &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ cos\frac{3\pi}{4} + isen\frac{3}{\pi}4\pi &= \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i) \\ cos\frac{5\pi}{4} + isen\frac{5\pi}{4}\pi &= -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\ cos\frac{7\pi}{4} + isen\frac{7\pi}{4}\pi &= \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \end{cases}$$

1.2. Conjuntos de puntos en el plano complejo

En análisis se estudian algunos conceptos topológicos tales como: Punto interior, conjunto abierto, conjunto cerrado, frontera de un conjunto, punto de acumulación, conjunto acotado y otros. Naturalmente estos conceptos tienen, en variable compleja, definiciones e interpretaciones análogas; en esta sección presentamos aquellas que son estrictamente necesarias para nuestros propósitos.

Definición **1.8.** *Sea z_0 un número complejo y $\epsilon > 0$ un número real dado. Se llama **vecindad** de centro z_0 y radio ϵ, denotada $V_\epsilon(z_0)$ al conjunto*

$$V_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}$$

geométricamente este conjunto corresponde al interior de una circunferencia de centro z_0 y radio ϵ

Definición **1.9.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$ y z_0 un punto en K. z_0 es un **punto interior** de K si existe una vecindad de centro z_0 y radio $\epsilon > 0$ totalmente contenida en K.*

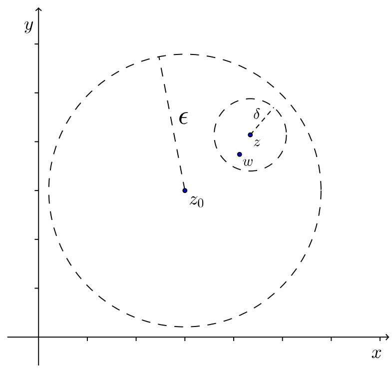
Definición **1.10.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$, K es **abierto** en $\mathbb{C}$ si y solo si todo punto de K es interior.*

Definición **1.11.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$ y z_0 un punto en $\mathbb{C}$. z_0 es un **punto frontera** de K si toda vecindad de centro en z_0 y radio $\epsilon > 0$ contiene puntos que están en K y puntos que no están en K*

Definición **1.12.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$. K es **cerrado** en $\mathbb{C}$ si K contiene a su frontera.*

Ejemplo **1.9.** Sea z_0 un punto en $\mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ dados, demuestre que toda vecindad de centro z_0 y radio ϵ es un conjunto abierto.

Sea z un punto en $V_\epsilon(z_0)$ y tomemos $\delta < \epsilon - |z - z_0|$ entonces si w es un punto en $V_\delta(z)$



se sigue que $|z - w| < \delta$ por lo que

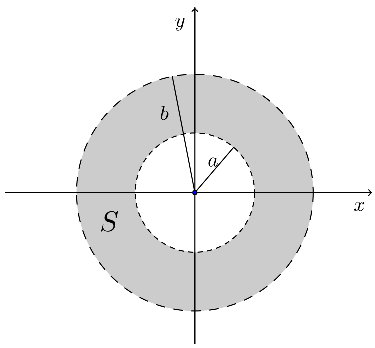
$$|w - z_0| = |w - z + z - z_0| \leq |w - z| + |z - z_0| < \delta + |z - z_0| < \epsilon - |z - z_0| + |z - z_0| = \epsilon$$

y así w está en $V_\epsilon(z_0)$ lo que nos dice que $V_\delta(z)$ está totalmente contenida en $V_\epsilon(z_0)$

Ejemplo **1.10.** Clasifique el conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b,\ a > 0,\ b > 0\}$ como abierto y/o cerrado

Solución. Geométricamente K representa un anillo de centro en el origen y radios a y b , K es un conjunto abierto , la frontera de K está formada por las circunferencias $|z| = a$ y $|z| = b$ que no están en K por lo que K no es un conjunto cerrado.

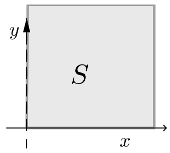
Los puntos exteriores de K son los puntos en el interior de la circunferencia $|z| = a$ y fuera de la circunferencia $|z| = b$.



Los subconjuntos de $\mathbb{C}$ no se clasifican necesariamente en abiertos o cerrados como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo **1.11.** Muestre que el conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : Rez \geq 0\ y\ Imz > 0\}$ no es ni abierto ni cerrado.

Solución. Geométricamente este conjunto corresponde al primer cuadrante del plano en el cual se incluye la parte positiva del eje real y no se incluye la parte positiva del eje imaginario.



Este conjunto no es abierto ya que los puntos de la parte positiva del eje x están en el conjunto y no son interiores, tampoco es cerrado ya que la parte positiva del eje y pertenece a la frontera del conjunto y no está en K.

Definición **1.13.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$ y z_0 un punto en $\mathbb{C}$. z_0 es un* ***punto de acumulación*** *de K si toda vecindad de centro z_0 y radio $\epsilon > 0$ contiene por lo menos un punto de K diferente de z_0*

Ejemplo **1.12.** Sea $K = \{z \in \mathbb{C} : Rez \geq 0 \text{ y } Imz > 0\}$ entonces $z = i$ es un punto de acumulación de K que no está en el conjunto y $z = 1$ es un punto de acumulación de K que está en el conjunto.

Ejemplo **1.13.** Sea $K = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\} \cup \{0\}$, geométricamente este conjunto representa un anillo de centro en el origen y radios a y b junto con el origen y obsérvese que el origen está en el conjunto pero no es un punto de acumulación de K

Los ejemplos precedentes muestran que un punto de acumulación de un conjunto puede o no estar en el conjunto y que un punto del conjunto no necesariamente es un punto de acumulación del mismo.

Definición **1.14.** *Sea K un conjunto abierto en $\mathbb{C}$. K es* ***conexo*** *si todo par de puntos de K se puede unir por una poligonal contenida en el conjunto.*

La definición anterior no es la que usualmente se encuentra en los textos sin embargo es suficiente para nuestros propósitos.

Definición **1.15.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$. K es una* ***Región(Dominio)*** *si simultáneamente K es abierto y conexo en $\mathbb{C}$.*

Definición **1.16.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$. K es* ***acotado*** *si existe un número $k > 0$ tal que para todo z en K $|z| < k$, así entonces un conjunto es acotado si existe una circunferencia en cuyo interior están los puntos del conjunto.*

Definición **1.17.** *Sea K un subconjunto de $\mathbb{C}$. K es* ***compacto*** *si K es cerrado y acotado.*

Ejemplo **1.14.** El conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b\}$ es un conjunto abierto, conexo y acotado

Ejemplo **1.15.** El conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}$ representa geométricamente el semiplano superior y es un conjunto abierto, conexo y no acotado.

Ejemplo **1.16.** El conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \ o \ |z - 3i| < 1\}$ es un conjunto abierto, no conexo y acotado.

Ejemplo **1.17.** El conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq Rez + 2\}$ representa geométricamente el interior y la frontera de la parábola $y^2 = 4x + 4$ y es un conjunto cerrado no acotado.

Ejemplo **1.18.** El conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : |z + 1| + |z + i| \leq 2\}$ representa geométricamente el interior y la frontera de la elipse $3x^2 + 3y^2 + 4x + 4y + 2xy = 0$ y es un conjunto compacto.

Ejemplo **1.19.** El conjunto $S = \{z \in \mathbb{C} : Rez \in \mathbb{R}, y_0 < Imz < y_0 + 2\pi\}$ representa geométricamente una franja de ancho 2π limitada por dos rectas paralelas al eje real y es una Región(Dominio).

1.3. El plano complejo ampliado

Así como al estudiar, en análisis, el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ es útil ampliar este conjunto con dos puntos especiales denominados mas infinito y menos infinito denotados $+\infty$ y $-\infty$, consideraremos, en esta sección, una relación análoga para los números complejos.

Definición **1.18.** *Los puntos del plano complejo $\mathbb{C}$ con la inclusión de un punto especial denominado **punto al infinito**, denotado ∞, forman **el plano complejo ampliado** que se denota con $\overline{\mathbb{C}}$.*

El punto al infinito ∞ satisface las siguientes relaciones algebraicas

1. $z + \infty = \infty + z = \infty,\ z \in \mathbb{C}$
2. $z - \infty = \infty - z = \infty,\ z \in \mathbb{C}$
3. $z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty,\ z \in \overline{\mathbb{C}}$
4. $\frac{z}{\infty} = 0,\ \frac{\infty}{z} = \infty,\ z \in \mathbb{C}$
5. $\frac{z}{0} = \infty,\ z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$

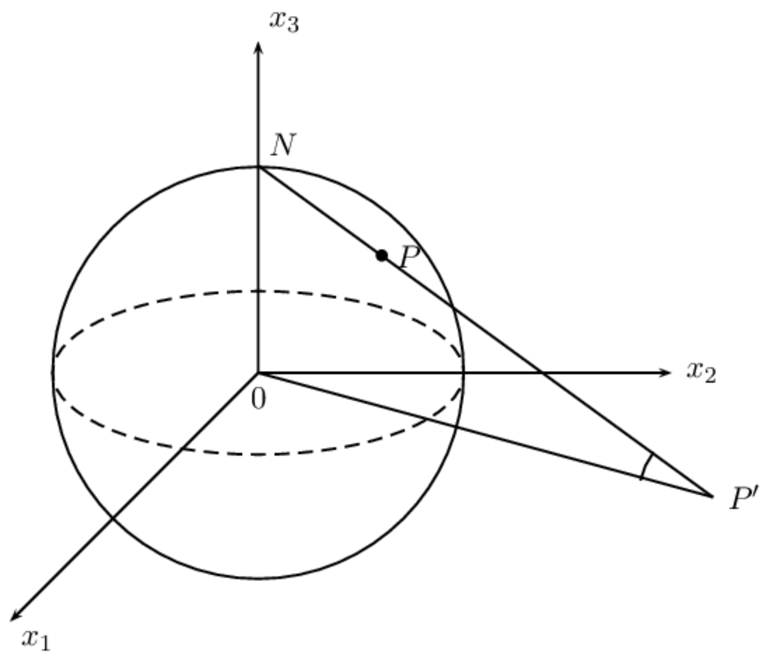
Un modelo geométrico de $\overline{\mathbb{C}}$ puede obtenerse utilizando la denominada Transformación Ptolemaíca ó Proyección Estereográfica.

1.3.1. La proyección estereográfica

Consideramos en $\mathbb{R}^3$ la esfera unitaria S de ecuación ${x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 = 1$, llamada **Esfera de Riemann** la cual asimilaremos a la tierra, el punto $N(0,0,1)$ como e**l polo norte**, el plano $x_3 = 0$ como **el plano ecuatorial**, la circunferencia intersección de la esfera de Riemann y el plano ecuatorial es el **Ecuador** cuya ecuación es ${x_1}^2 + {x_2}^2 = 1$, $x_3 = 0$.

Si P es un punto cualquiera de la esfera S, $P \neq N$, y se traza la recta que pasa por el polo norte N y el punto P, esta recta intersecta al plano ecuatorial $x_3 = 0$ en un único punto P'. Recíprocamente, si P' es un punto del plano ecuatorial entonces la recta determinada por P' y N intersecta a la esfera de Riemann en un único punto P.

Definición **1.19.** *La transformación considerada en el párrafo anterior tal que a cada punto P de la esfera de Riemann con coordenadas $P(x_1, x_2, x_3)$ le asocia un único punto P' con coordenadas $P'(x, y)$ en el plano ecuatorial, se llama **Proyección Estereográfica**.*



Nótese que bajo esta aplicación el polo norte N no posee imagen y por tanto la proyección estereográfica no es biyectiva, para que lo sea debemos definir su imagen; para ello dejamos que el punto P sobre la esfera se acerque al polo norte N entonces la recta $\overleftrightarrow{PN}$ tiende a ser tangente a la esfera en el punto N y P' no existe en el plano ecuatorial, así entonces asociamos al polo norte N de la esfera el punto al infinito ∞ del plano complejo ampliado $\overline{\mathbb{C}}$.

Obsérvese que bajo la proyección estereográfica los puntos en el hemisferio superior de la esfera $x_1{}^2 + x_2{}^2 + x_3{}^2 = 1$, $x_3 > 0$ se aplican en el exterior de la circunferencia ecuatorial $x_1{}^2 + x_2{}^2 = 1$, los puntos en el hemisferio inferior de la esfera se aplican en el interior de la circunferencia ecuatorial, en particular el polo sur $(0, 0, -1)$ se aplica en el origen de coordenadas $(0, 0)$ y los puntos de la circunferencia ecuatorial quedan fijos.

Las relaciones algebraicas entre un punto P de la esfera de Riemann y su imagen P' en el plano ecuatorial se obtienen en el siguiente resultado.

Teorema **1.5.** *Si $P(x_1, x_2, x_3)$ es un punto sobre la esfera de Riemann y $P'(x, y) = z$ es su imagen bajo la proyección estereográfica entonces*

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3}, \qquad y = \frac{x_2}{1 - x_3}$$

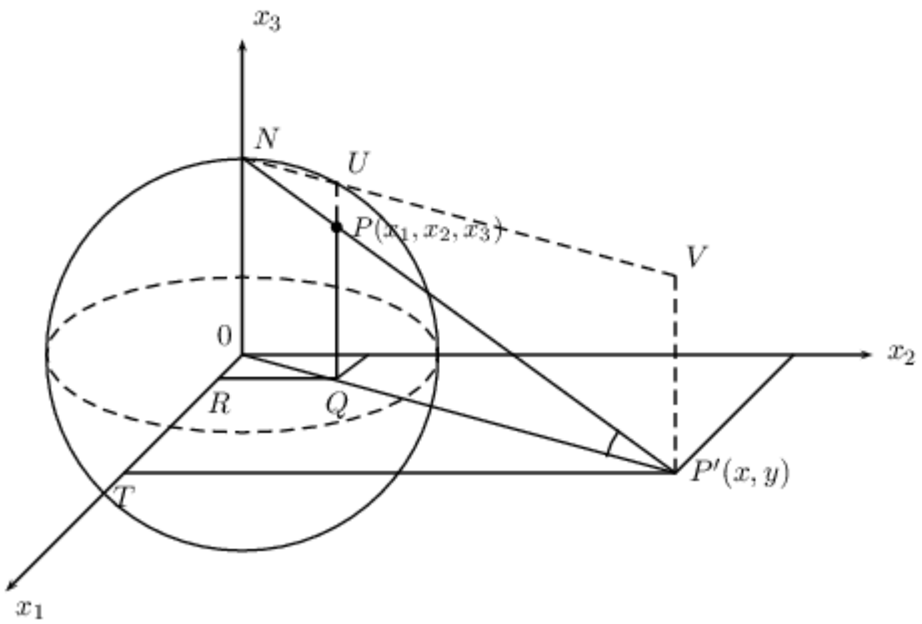
$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}, \qquad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}, \qquad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

Demostración. En el plano determinado por O, P' y N al trazar por P' una paralela a $\overleftrightarrow{ON}$, por N una paralela a $\overleftrightarrow{OP'}$ y proyectar ortogonalmente el punto P sobre el z-plano se obtienen los triángulos semejantes NVP' y NUP por lo que

$$\frac{VP'}{UP} = \frac{NP'}{NP}$$

Así mismo de la semejanza de los triángulos NOP' y PQP' se sigue que

$$\frac{NP'}{NP} = \frac{OP'}{OQ}$$



y de la semejanza de los triángulos OTP' y ORQ se tiene que

$$\frac{OP'}{OQ} = \frac{OT}{OR} = \frac{TP'}{RQ}.$$

Al aplicar la ley transitiva a las tres relaciones enteriores obtenemos que

$$\frac{VP'}{UP}=\frac{OT}{OR}=\frac{TP'}{RQ}$$

es decir

$$\frac{1}{1-x_3}=\frac{x}{x_1}=\frac{y}{x_2}$$

y por tanto

$$x=\frac{x_1}{1-x_3}\quad y=\frac{x_2}{1-x_3}.$$

Recíprocamente si $z=x+iy$ entonces $z=\dfrac{x_1+ix_2}{1-x_3}$ es decir $|z|^2=\dfrac{{x_1}^2+{x_2}^2}{(1-x_3)^2}$ y puesto que el punto $P(x_1,x_2,x_3)$ está sobre la esfera entonces ${x_1}^2+{x_2}^2=1-{x_3}^2$ por lo que

$$|z|^2=\frac{1+x_3}{1-x_3}$$

expresión en la cual despejando x_3 se obtiene

$$x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

Al remplazar el valor de x_3 en el valor de z resulta que

$$z=\frac{1}{2}\left(|z|^2+1\right)(x_1+ix_2)\quad y\quad \overline{z}=\frac{1}{2}\left(|z|^2+1\right)(x_1-ix_2)$$

y al sumar y restar estas expresiones se obtiene

$$x_1=\frac{z+\overline{z}}{|z|^2+1}\qquad x_2=-\frac{i\,(z-\overline{z})}{|z|^2+1}$$

es decir

$$x_1=\frac{2x}{|z|^2+1},\quad x_2=\frac{2y}{|z|^2+1}$$

□

Ejemplo **1.20.** Muestre que la proyección estereográfica no preserva las distancias.

Solución. Consideremos los puntos de la esfera $P_1(0,0,-1)$ y $P_2\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, al aplicar las fórmulas dadas por el teorema 1.5 se obtiene que las imágenes bajo la proyección estereográfica son

$$z_1=0+0i\quad y\quad z_2=1-i$$

la distancia entre P_1 y P_2 está dada por

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(-\frac{2}{3}-0\right)^2+\left(\frac{1}{3}-(-1)\right)^2}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$$

y la distancia entre z_1 y z_2 está dada por

$$\sqrt{(1-0)^2+(-1-0)^2}=\sqrt{2}$$

y por tanto la proyección estereográfica no es una isometría.

Obsérvese que si $z_1=a_1+ia_2$ y $z_2=b_1+ib_2$ son dos puntos en el plano complejo $\mathbb{C}$ entonces la distancia entre z_1 y z_2 está dada por

$$d\,(z_1,z_2)=|z_2-z_1|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

y que si $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ son dos puntos sobre la esfera de Riemann, ó el plano complejo ampliado entonces la distancia entre P_1 y P_2 está dada por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

una manera de expresar la distancia entre dos puntos P_1 y P_2 de $\overline{\mathbb{C}}$ en términos de sus proyecciones estereográficas z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$, está dada en el siguiente resultado.

Teorema **1.6.** *Si $P_1(x_1, x_2, x_3)$ y $P_2(y_1, y_2, y_3)$ son dos puntos sobre la esfera de Riemann y z_1, z_2 son las correspondientes imágenes estereográficas en el plano ecuatorial entonces la distancia entre P_1 y P_2 está dada por*

$$d(P_1, P_2) = \frac{2|z_2 - z_1|}{\sqrt{\left(1 + |z_1|^2\right)\left(1 + |z_2|^2\right)}}$$

en particular si P_2 coincide con el polo norte N entonces

$$d(P_1, N) = \frac{2}{\sqrt{1 + |z_1|^2}}$$

Demostración. De las relaciones obtenidas en la demostración del teorema 1.5 se tiene que si $P_1(x_1, x_2, x_3)$ es un punto sobre la esfera y z_1 es la correspondiente imagen estereográfica entonces

$$z_1 = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \qquad |z_1|^2 = \frac{{x_1}^2 + {x_2}^2}{(1 - {x_3}^2)^2} \quad y \quad x_3 = \frac{|z_1|^2 - 1}{|z_1|^2 + 1}$$

por lo que $1 - x_3 = 1 + \dfrac{1 - |z_1|^2}{1 + |z_1|^2} = \dfrac{2}{|z_1|^2 + 1}$; $x_1 + ix_2 = z_1(1 - x_3) = \dfrac{2z_1}{|z_1|^2 + 1}$
y dado que $a^2 + b^2 = (a + bi)(a - bi)$ entonces la distancia entre P_1 y P_2 se puede expresar como

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2)^2 &= (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2 \\
&= [(y_1 - x_1) + i(y_2 - x_2)][(y_1 - x_1) - i(y_2 - x_2)] + (y_3 - x_3)^2 \\
&= [(y_1 + iy_2) - (x_1 + ix_2)][(y_1 - iy_2) - (x_1 - ix_2)] + [(1 - y_3) - (1 - x_3)]^2 \\
&= \left(\frac{2z_2}{|z_2|^2 + 1} - \frac{2z_1}{|z_1|^2 + 1}\right)\left(\frac{2\overline{z_2}}{|z_2|^2 + 1} - \frac{2\overline{z_1}}{|z_1|^2 + 1}\right) + \left(\frac{2}{|z_2|^2 + 1} - \frac{2}{|z_1|^2 + 1}\right)^2 \\
&= \frac{4|z_2|^2}{\left(|z_2|^2 + 1\right)^2} - \frac{4(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1})}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)} + \frac{4|z_1|^2}{\left(|z_1|^2 + 1\right)^2} + \frac{4}{\left(|z_2|^2 + 1\right)^2} \\
&- \frac{8}{\left(|z_2|^2 + 1\right)\left(|z_1|^2 + 1\right)} + \frac{4}{|z_1|^2 + 1} \\
&= 4\left[\frac{1}{|z_2|^2 + 1} - \frac{z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}}{\left(|z_2|^2 + 1\right)\left(|z_1|^2 + 1\right)} + \frac{1}{|z_1|^2 + 1} - \frac{2}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)}\right] \\
&= 4\left[\frac{|z_1|^2 + 1 - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + |z_2|^2 + 1 - 2}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)}\right] = 4\left[\frac{z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} - z_1\overline{z_2}}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)}\right] \\
&= \frac{4\left[\overline{z_2}(z_2 - z_1) - \overline{z_1}(z_2 - z_1)\right]}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)} = \frac{4(z_2 - z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_1})}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)} \\
&= \frac{4|z_2 - z_1|^2}{\left(|z_1|^2 + 1\right)\left(|z_2|^2 + 1\right)}
\end{aligned}$$

Si P_2 coincide con el polo norte $N\,(0,0,1)$ entonces

$$\begin{aligned} d\,(P_1,P_2)^2 &= {x_1}^2 + {x_2}^2 + (1-x_3)^2 \\ &= |z_1|^2\,(1-x_3)^2 + (1-x_3)^2 \\ &= \left(|z_1|^2+1\right)(1-x_3)^2 \\ &= \left(|z_1|^2+1\right)\frac{4}{\left(|z_1|^2+1\right)^2} \\ &= \frac{4}{|z_1|^2+1} \end{aligned}$$

□

En la sección 1.2, definición 1.8 de este capítulo, estudiamos que en el plano $\mathbb{C}$, una vecindad de un punto z_0 corresponde al interior de una circunferencia de centro z_0, análogamente una vecindad del polo norte corresponde a un "casquete esférico", lo cual analíticamente puede definirse de la siguiente manera.

Definición **1.20.** *Una* ***vecindad*** *de centro el polo norte N y radio $\epsilon > 0$ se denota $V_\epsilon\,(N)$ y se define como el conjunto de los puntos P en la esfera de Riemann S tales que $d\,(P,N) < \epsilon$.*

El teorema 1.6 permite expresar este conjunto en términos de la imagen estereográfica z del punto P, de la siguiente manera.

Teorema **1.7.** *Una vecindad del polo norte en la esfera de Riemann corresponde en el plano complejo al exterior de una circunferencia de centro en el origen de coordenadas.*

Demostración. Sea P un punto de la vecindad de centro en el polo norte N y radio $\epsilon > 0$ entonces

$$\begin{aligned} V_\epsilon\,(N) &= \{P \in S : d\,(P,N) < \epsilon\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} < \epsilon \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z|^2 > \frac{4}{\epsilon^2} - 1 \right\} \\ &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{\frac{4-\epsilon^2}{\epsilon^2}} \right\} \quad \textit{donde} \quad 0 < \epsilon < 2 \end{aligned}$$

□

Nótese que este resultado muestra que en el plano complejo ampliado una vecindad del punto al infinito corresponde en $\mathbb{C}$ al exterior de una circunferencia de centro en el origen.

1.4. Problemas resueltos

En esta sección se enuncian y resuelven problemas que ilustran la teoría expuesta hasta el momento, algunos de los cuales tienen el propósito de complementar la teoría expuesta.

Problema **1.1.** Hallar el conjunto de todos los números complejos cuyo cuadrado coincide con su conjugado.

Solución. sea $z = x + iy$ un número complejo tal que $z^2 = \overline{z}$ es decir $\left(x^2 - y^2\right) + 2xyi = x - iy$ que corresponde al sistema no lineal de ecuaciones

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= x \\ 2xy &= -y \end{aligned}$$

la segunda ecuación equivale a la igualdad

$$y\,(2x+1) = 0$$

y se deben considerar dos casos

a - si $y = 0$ entonces de la primera ecuación se tiene $x^2 = x$ la cual tiene como soluciones $x = 0$, $x = 1$ con lo que se obtienen los números complejos $z = 0$, $z = 1$.

b - si $y \neq 0$ entonces $x = -\frac{1}{2}$ y al reemplazar en la primera ecuación se obtiene la ecuación cuadrática $y^2 = \frac{3}{4}$ lo que produce los números complejos $z = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Así la solución al problema propuesto está conformado por los números complejos

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1, \quad z_3 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad z_4 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

Problema **1.2.** Simplificar completamente la expresión

$$\frac{(1-i)^{20}}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}} + \frac{(1+i)^{20}}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}}$$

Solución. Sean $z = 1 - i$, $w = -1 + i\sqrt{3}$ cuyas formas trigonométricas son respectivamente

$$z = \sqrt{2}\left(cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right), \quad w = 2\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

con lo que al utilizar la formula de De Moivre y la división en forma trigonométrica se obtiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{(1-i)^{20}}{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{15}} + \frac{(1+i)^{20}}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{15}} \\
&= \frac{z^{20}}{w^{15}} + \frac{\overline{z}^{20}}{\overline{w}^{15}} = \frac{2^{10}\left(cos\left(-5\pi\right) + isen\left(-5\pi\right)\right)}{2^{15}\left(cos\left(10\pi\right) + isen\left(10\pi\right)\right)} + \frac{2^{10}\left(cos\left(5\pi\right) + isen\left(5\pi\right)\right)}{2^{15}\left(cos\left(-10\pi\right) + isen\left(-10\pi\right)\right)} \\
&= 2^{-5}\left(cos\left(-15\pi\right) + isen\left(-15\pi\right)\right) + 2^{-5}\left(cos\left(15\pi\right) + isen\left(15\pi\right)\right) \\
&= 2^{-5}\left(-1\right) + 2^{-5}\left(-1\right) = -2^{-4}
\end{aligned}$$

Problema **1.3.** Sea z un número complejo tal que $|z| = 1$ y $z \neq -1$ demuestre que $\frac{z-1}{z+1}$ es imaginario puro.

Solución. Sea $z = x + iy$ con x, y en $\mathbb{R}$, puesto que $|z| = 1$ entonces $x^2 + y^2 = 1$ con lo que

$$\frac{z-1}{z+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{\left[(x-1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}{(x+1)^2 + y^2} = \frac{\left(x^2+y^2-1\right)+2yi}{x^2+2x+1+y^2} = \frac{y}{x+1}i$$

que es imaginario puro ya que $x \neq -1$

Problema **1.4.** Hallar el conjunto de todos lo números complejos que satisfacen la ecuación

$$z + a\left|z+1\right| + i = 0$$

en la cual a es un número real, $a \geq 1$.

Solución. Sea $z = x + yi$ con x, y en $\mathbb{R}$ un número complejo entonces la ecuación dada se convierte en

$$x + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} + i\left(y+1\right) = 0$$

con lo que se obtiene el sistema no lineal

$$\begin{aligned}
x + a\sqrt{(x+1)^2 + y^2} &= 0 \\
y + 1 &= 0
\end{aligned}$$

de la segunda ecuación $y = -1$ y al reemplazar en la primera se obtiene

$$a\sqrt{(x+1)^2 + 1^2} = -x$$

si en esta expresión se eleva al cuadrado y se simplifica resulta la ecuación de segundo grado

$$\left(a^2-1\right)x^2 + 2a^2x + 2a^2 = 0$$

y se tiene que

1. si $a = 1$ entonces $x = -1$ y por tanto $z = -1 - i$
2. si $a > 1$ la ecuación de segundo grado tiene como solución

$$x = \frac{a^2 \pm \sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1}$$

y la existencia de x como número real depende del discriminante $2 - a^2$ de la siguiente manera:

2.1 Si $2 - a^2 = 0$ es decir $a = \sqrt{2}$ entonces $x = 2$ y por tanto $z = 2 - i$

2.2 Si $2 - a^2 > 0$ es decir $a < \sqrt{2}$ entonces x es real y por tanto

$$z = \frac{a^2 \pm \sqrt{2 - a^2}}{a^2 - 1} - i$$

2.3 Si $2 - a^2 < 0$ es decir $a > \sqrt{2}$ entonces x es complejo y la ecuación dada no tiene solución.

En resumen las soluciones de la ecuación

$$z + a\,|z + 1| + i = 0$$

con $a \geq 1$ son

- si $a = 1$, entonces $z = -1 - i$
- si $a = \sqrt{2}$ entonces $z = 2 - i$
- si $1 < a < \sqrt{2}$ entonces $z = \frac{a^2 \pm \sqrt{2-a^2}}{a^2-1} - i$
- si $a > \sqrt{2}$ entonces la ecuación no tiene solución.

Problema **1.5.** Sean z y w números complejos tales que $|z| < 1$ y $|w| < 1$ demostrar que

$$\left| \frac{z - w}{1 - \overline{w}z} \right| < 1$$

Solución. El enunciado dado es equivalente a

$$|z - w|^2 < |1 - \overline{w}z|^2$$

y para demostrar esto obsérvese en primer lugar que si $|z| < 1$ y $|w| < 1$ entonces $1 - |z|^2 > 0$ y $1 - |w|^2 > 0$ por lo que

$$0 < \left(1 - |z|^2\right)\left(1 - |w|^2\right) = 1 - |z|^2 - |w|^2 + |z|^2|w|^2$$

es decir

$$|z|^2 + |w|^2 < 1 + |z|^2|w|^2$$

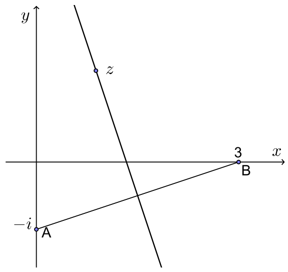
y por tanto

$$\begin{aligned}
|z - w|^2 &= (z - w)\left(\overline{z} - \overline{w}\right) \\
&= |z|^2 + |w|^2 - z\overline{w} - w\overline{z} \\
&< 1 + |z|^2|w|^2 - z\overline{w} - w\overline{z} \\
&= (1 - z\overline{w}) - w\overline{z}\,(1 - z\overline{w}) = (1 - z\overline{w})\,(1 - w\overline{z}) = |1 - \overline{w}z|^2
\end{aligned}$$

Problema **1.6.** Hallar el lugar geométrico de los puntos z en el plano complejo tales que

$$|z - 3| = |z + i|$$

Solución. El módulo $|z-3|$ es la distancia entre el punto z y el punto que representa el número 3, así mismo $|z+i|$ es la distancia entre el punto z y el punto que representa el número $-i$ y de acuerdo con el problema se deben hallar los puntos z que están a igual distancia de 3 y $-i$. De la geometría elemental se conoce que este conjunto de puntos forma una recta perpendicular en el punto medio del segmento de extremos $-i$ y 3, es decir, la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.



Algebráicamente esto corresponde a la recta de ecuación $3x+y-4=0$ que se obtiene con $z=x+iy$, con x, y en $\mathbb{R}$ y efectuar las simplificaciones correspondientes.

Problema **1.7.** Hallar el ángulo que debe rotarse el vector $8-6i$ para obtener el vector $-\sqrt{2}+7\sqrt{2}i$

Solución. De acuerdo a la interpretación geométrica de las operaciones con números complejos una rotación de un vector equivale a la multiplicación del número complejo que representa el vector por otro número complejo por tanto el problema dado se puede formular de la siguiente manera: Hallar el número complejo $z=x+iy$ con x, y en $\mathbb{R}$ tal que

$$(8-6i)\,(x+iy)=-\sqrt{2}+7\sqrt{2}i$$

es decir $x+iy=\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-1+i)$ que está en el segundo cuadrante y $arg z = arc\ tg\,(-1)=\frac{3\pi}{4}$ por lo que para obtener el vector $-\sqrt{2}+7\sqrt{2}i$ a partir del vector $8-6i$ este debe rotarse un ángulo de $\frac{3\pi}{4}$ en sentido contrario de las manecillas del reloj.

Problema **1.8.** Sea $K=\{z\in\mathbb{C}: Rez\in\mathbb{Q},\ Imz\in\mathbb{Q},\ |Imz|<1\ y\ |Rez|<1\}$. Justificar o refutar las siguientes afirmaciones:
a - K es acotado **b -** K es abierto **c -** K es cerrado **d -** K es una región(Dominio) **e -** K es compacto
f - Todo punto de K es un punto de Acumulación

Solución. Geométricamente K es el conjunto de parejas con coordenadas racionales que están dentro del cuadrado de vértices en los puntos $1+i$. $-1+i$, $-1-i$ y $1-i$, entonces

- a - K es acotado ya que por ejemplo cada punto z de K es tal que $|z|<\sqrt{2}$, es decir, los puntos de K están contenidos en la circunferencia de centro en el origen y radio $\sqrt{2}$.
- b - K no es abierto ya que ningún punto de K es interior puesto que cualquier circunferencia con centro en un punto de K contiene por lo menos una pareja con una coordenada irracional y que por tanto no está en K.
- c - K no es cerrado ya que la frontera de K es el conjunto de todos los puntos sobre los lados y dentro del cuadrado y este conjunto no está contenido en K, por ejemplo el punto $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es un punto frontera y no está en K.
- d - K no es región ya que no es abierto.
- e - K no es compacto ya que no es cerrado.
- f - Si, ya que si z_0 es un punto en K entonces cualquier circunferencia de centro z_0 contiene puntos diferentes de z_0, con coordenadas racionales.

Problema **1.9.** Hallar bajo la proyección estereográfica, las preimágenes de los conjuntos en el plano, definidos por las siguientes desigualdades.

a - $Imz > 0$ b - $Imz < 0$ c - $Rez > 0$ d - $Rez < 0$ e - $|z| < 1$ f - $|z| > 1$

Solución. Sea $z = x + iy$ un punto en el plano complejo y $P(x_1, x_2, x_3)$ con

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

su preimágen sobre la esfera, entonces.

a - Si $Imz > 0$ es decir $y > 0$ entonces x_1, x_3 son reales y $x_2 > 0$ por lo que el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a un punto que está en el hemisferio oriental de la esfera.

b - Si $Imz < 0$ es decir $y < 0$ entonces x_1, x_3 son reales y $x_2 < 0$ por lo que el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a un punto que está en el hemisferio occidental de la esfera.

c - Si $Rez > 0$ es decir $x > 0$ entonces $x_1 > 0$ y x_2, x_3 són reales por lo que el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a un punto que está en el hemisferio "anterior" de la esfera.

d - Si $Rez < 0$ es decir $x < 0$ entonces $x_1 < 0$ y x_2, x_3 son reales por lo que el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a un punto que está en el hemisferio "posterior" de la esfera.

e- Si $|z| < 1$ es decir $x^2+y^2-1 < 0$ entonces x_1, x_2 son reales y $x_3 < 0$ por lo que el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a un punto que está en el hemisferio sur de la esfera.

f- Si $|z| > 1$ es decir $x^2+y^2-1 > 0$ entonces x_1, x_2 son reales y $x_3 > 0$ por lo que el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ corresponde a un punto que está en el hemisferio norte de la esfera.

Problema **1.10.** Demostrar que bajo la proyección estereográfica las circunferencias sobre la esfera se transforman en circunferencias o en rectas en el plano. ¿Cuáles son las circunferencias sobre la esfera que se transforman en rectas?

Solución. Una circunferencia en la esfera es la intersección de esta con un plano por lo que la circunferencia está determinada por el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 &= 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 &= D \end{aligned}$$

con A, B, C, D en $\mathbb{R}$ y $0 \leq D < 1$. Al utilizar el teorema 1.5 para expresar el punto $P(x_1, x_2, x_3)$ sobre la esfera en términos de su imagen z en el plano, se tiene

$$x_1 = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_2 = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad x_3 = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}$$

que al ser reemplazados en la expresión algebraica de la circunferencia y realizar las operaciones correspondientes se obtiene

$$(C - D)\left(x^2 + y^2\right) + 2Ax + 2By = C + D$$

y se deben considerar dos casos:

1. si $C = D$ se obtiene $Ax + By = C$ que corresponde a una recta en el plano.
2. si $C \neq D$ entonces al dividir entre $C - D$ y completar cuadrados se obtiene
$$\left(x + \frac{A}{C - D}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{C - D}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - D^2}{(C - D)^2}$$
que corresponde a una circunferencia de centro $\left(\frac{A}{D-C}, \frac{B}{D-C}\right)$ y radio $\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-D^2}}{|C-D|} > 0$.

Nótese que cuando $C = D$ la circunferencia se determina como

$$\begin{aligned} {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2 &= 1 \\ Ax_1 + Bx_2 + C(x_3 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

y puesto que el punto $(0, 0, 1)$ está en la circunferencia entonces las circunferencias que se transforman en rectas son aquellas que pasan por el polo norte.

1.5. Problemas propuestos

1. Realizar las operaciones indicadas y simplificar completamente

   a. $\frac{5}{3+4i}$ *b.* $\frac{1+2i}{3-4i}+\frac{2-i}{5i}$ *c.* $\frac{5}{(1-i)(2-i)(3-i)}$ *d.* $\frac{(1+2i)^2-(1-i)^3}{(3+2i)^3-(2+i)^2}$

   e. $(1-i)^{71}$ *f.* $\left(1-\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$ *g.* $\sqrt[8]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$ $\sqrt[6]{\frac{1-i}{1+\sqrt{3}i}}$

2. Simplificar la expresión $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$ donde n es un entero positivo.

3. Hallar el conjunto de todos los números complejos cuyo cubo coincide con su conjugado. Es posible generalizar este resultado?

4. Halle el conjunto de todos los números complejos z tales que 1, z, $1+z^2$ sean colineales. Qué representa geométricamente?

5. Exprese los siguientes números complejos en forma trigonométrica

   a. -2 *b.* $2i$ *c.* $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ *d.* $cos\alpha - isen\alpha,\ \ \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

   e. $1-sen\alpha+icos\alpha,\ \ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ *f.* $\dfrac{1+cos\alpha+isen\alpha}{1+cos\alpha-isen\alpha},\ \ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

6. Simplificar $(1+z)^n$ cuando $z=cos\frac{2\pi}{3}+isen\frac{2\pi}{3}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. Sean z y w números complejos tales que $z+w$ y zw son números reales negativos, demuestre que z y w deben ser reales.

8. Resuelva en $\mathbb{C}$ la ecuación $\overline{z}=z^{n-1}$, n un número natural, $n\neq 2$.

9. Sean z y w números complejos, demuestre que

   a. $|z-w|\geq ||z|-|w||$

   b. $|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$

   c. $|1-z\overline{w}|^2-|z-w|^2=\left(1-|z|^2\right)\left(1-|w|^2\right)$

10. Sean z, w números complejos tales que $z\neq w$ y $a=\frac{(z+w)i}{z-w}$, hallar la relación que debe existir entre z y w para que a sea un número real.

11. Demuestre que ambos valores de $\sqrt{z^2-1}$ se encuentran sobre la recta que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a la bisectriz del ángulo interior del triángulo con vértices en los puntos -1, 1 y z trazada por el vértice z

12. Demostrar que todo número complejo z talque $|z|=1$ y $z\neq -1$ puede expresarse en la forma $z=\frac{1+it}{1-it}$ para algún número real t. ¿Es cierto el recíproco?

13. Sea t un número real, hallar el lugar geométrico de los complejos z tales que $z=\frac{t+i}{1+2t+i}$

14. Clasifique los siguientes conjuntos de acuerdo a los conceptos de: abierto, cerrado, acotado, conexo, compacto, etc.

    a. $\frac{1}{|z+5i|}\geq 1, z\neq -5i$ *b.* $1<|z+2i|<3\ y\ \frac{\pi}{4}<argz<\frac{\pi}{2}$ *c.* $Argz<\frac{\pi}{3}$

    d. $|z+i|-|z-i|<6$ *e.* $|z|-Rez\leq 0$ *f.* $|2z|<|1+z^2|$

15. Hallar en la esfera las preimágenes de los puntos 1, -1, i, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

16. Hallar en la esfera las preimágenes de los rayos $argz=\theta$ y las circunferencias $|z|=a$, $a>0$.

17. ¿Qué posición recíproca tienen en la esfera las preimágenes de un par de puntos simétricos con respecto de a - El punto $z = 0$ b - El eje real c - La circunferencia unidad?

18. Demuestre que z y w corresponden a puntos diametralmente opuestos sobre la esfera si y solo si $z\overline{w} = -1$.

19. Expresar en forma compleja las siguientes ecuaciones.

    $a.\ Ax+By+C = 0$ $\quad b.\ x^2+y^2+2x+2y = 0$ $\quad c.\ y = x$ $\quad d.\ x^2-y^2 = a^2$ $\quad e.\ x^2+y^2+2y = 0.$

Capítulo 2

Funciones de variable compleja. Límites y continuidad

Aunque los esbozos iniciales sobre números complejos, su representación geométrica y algunos aspectos relacionados se deben a Wessel, Argand y Gauss; los fundamentos de la teoría general de funciones de variable compleja fueron desarrollados y formalizados por Agustín Cauchy alrededor de 1825. En este capítulo se presenta, la definición de función de variable compleja, su interpretación geométrica como una transformación y se reformulan en este contexto, los conceptos de límite y continuidad.

2.1. Funciones de variable compleja.

Definición **2.1.** *Sea $K \subseteq \mathbb{C}$. Una **función de variable compleja** es una correspondencia que a cada z en K asocia uno o varios valores w en C.*
*Si f es tal que a cada z en K le asocia un único w en $\mathbb{C}$, diremos que f es un función **uniforme**.*
*Si existe z_0 en K tal que f le asocia más de un w en $\mathbb{C}$, diremos que f es una función **multiforme**.*
*Si f es uniforme, w el valor de f en z se llama la **imagen** de z bajo f, lo cual se escribe como $w = f(z)$*

Ejemplo **2.1.** La función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = z^3$ es uniforme

Ejemplo **2.2.** La función $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = Arg\ z$ es multiforme ya que $f(z) = arg\ z + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ y $-\pi < arg\ z \leq \pi$

Notése que si $z = x + iy$, $w = u + iv$ entonces

$$w = f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y así w está determinado por dos funciones reales de dos variables. Recíprocamente si $u(x, y)$, $v(x, y)$ son dos funciones reales de dos variables entonces

$$w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z)$$

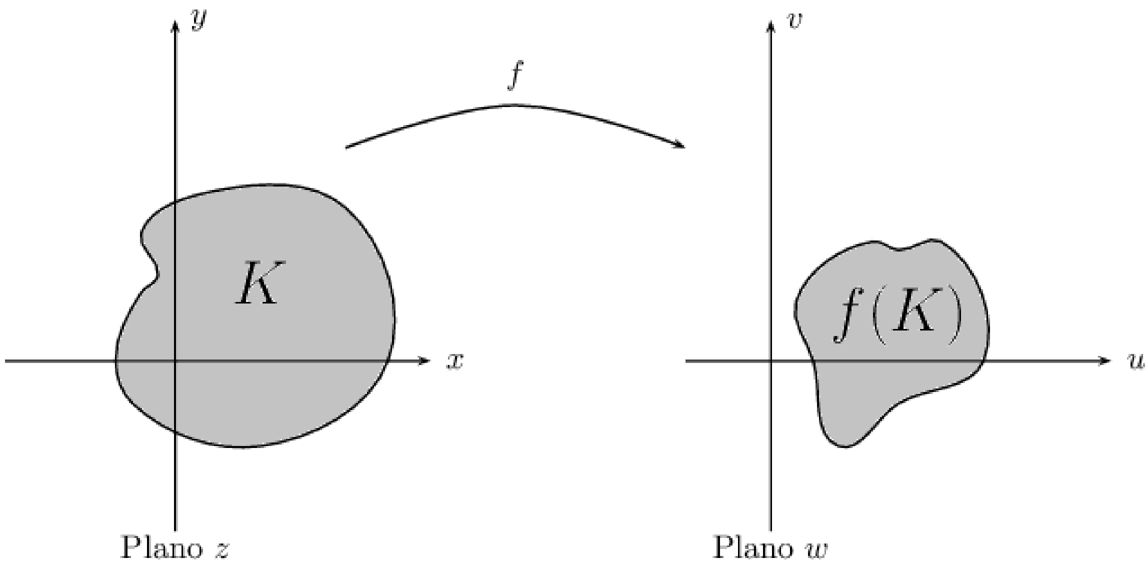
define una función de variable compleja y por tanto la teoría de las funciones de variable compleja tiene como soporte, en gran medida, la teoría de los pares de funciones de dos variables reales.

Supondremos que el término función de variable compleja se refiere a una función uniforme a menos que de manera explícita se realice otra referencia.

Si $K \subseteq \mathbb{C}$ entonces la imagen de K bajo f es el conjunto

$$f(K) = \{w \in \mathbb{C} : w = f(z),\ \text{para algún } z \text{ en } K\}$$

No es posible una representación geométrica adecuada de una función de variable compleja, sin embargo si el conjunto K se representa en un plano, el $z - plano$, y su imagen, $f(K)$ se representa en otro plano, el $w - plano$, es posible obtener información de la función utilizando esta representación. Se dice en este caso que f es una **transformación** y que f **transforma** K en $f(K)$.



Ejemplo **2.3.** Para la función $f(z) = z^3$ se tiene que

$$f(z) = (x+iy)^3 = \left(x^3 - 3y^2x\right) + \left(3x^2y - y^3\right) i$$

y por lo tanto

$$u(x,y) = x^3 - 3y^2x \;\; y \;\; v(x,y) = 3x^2y - y^3$$

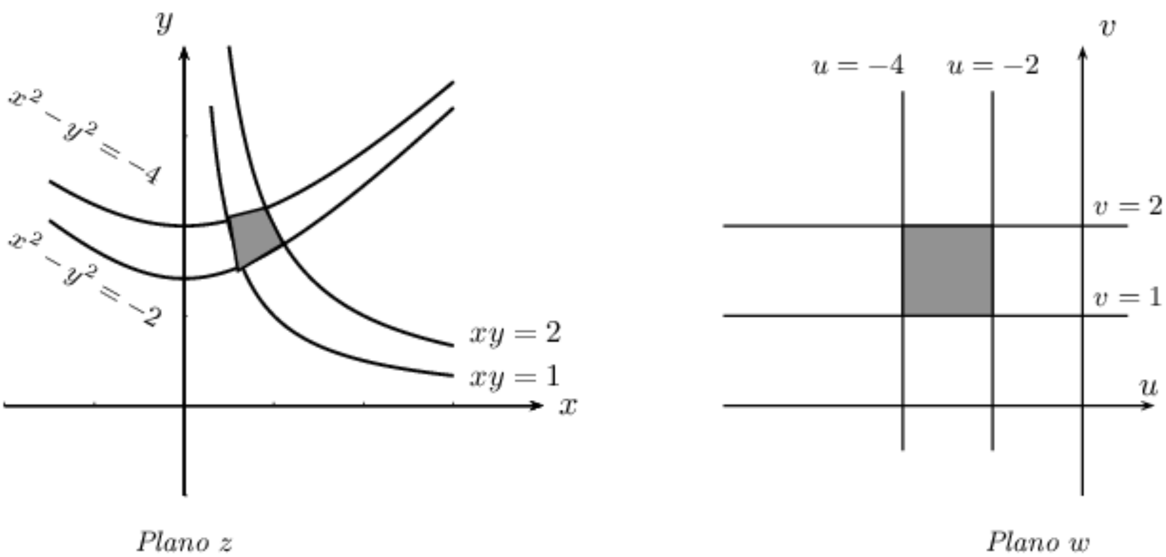
Ejemplo **2.4.** Bajo la función $f(z) = z^2$ el conjunto K definido por

$$K = \left\{z = x + iy : x^2 - y^2 = -4,\; x^2 - y^2 = -2,\; xy = 1,\; xy = 2\right\}$$

se transforma en el conjunto

$$f(K) = \{w = u + iv : u = -4,\; u = -2,\; v = 1,\; v = 2\}$$

ya que para dicha función $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ y por tanto las hiperbolas $x^2 - y^2 = -4$, $x^2 - y^2 = -2$, $xy = 1$, $xy = 2$ del z-plano se transforman respectivamente en las rectas $u = -4$, $u = -2$, $v = 1$ y $v = 2$ y así la región del z-plano limitada por las hipérbolas se transforma en la región limitada por las rectas.



2.2. Límites

En esta sección se extiende el concepto de límite de funciones de variable real al plano complejo ampliado en el cual el símbolo $\rho(z_1, z_2)$ denotará la distancia entre los puntos z_1 y z_2. Se observará que, en términos formales, las definiciones y propiedades son análogas a las tratadas para funciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

Definición **2.2.** *Sea $f : K \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una función de variable compleja definida en K excepto posiblemente en un punto de acumulación z_0 en K. Diremos que*

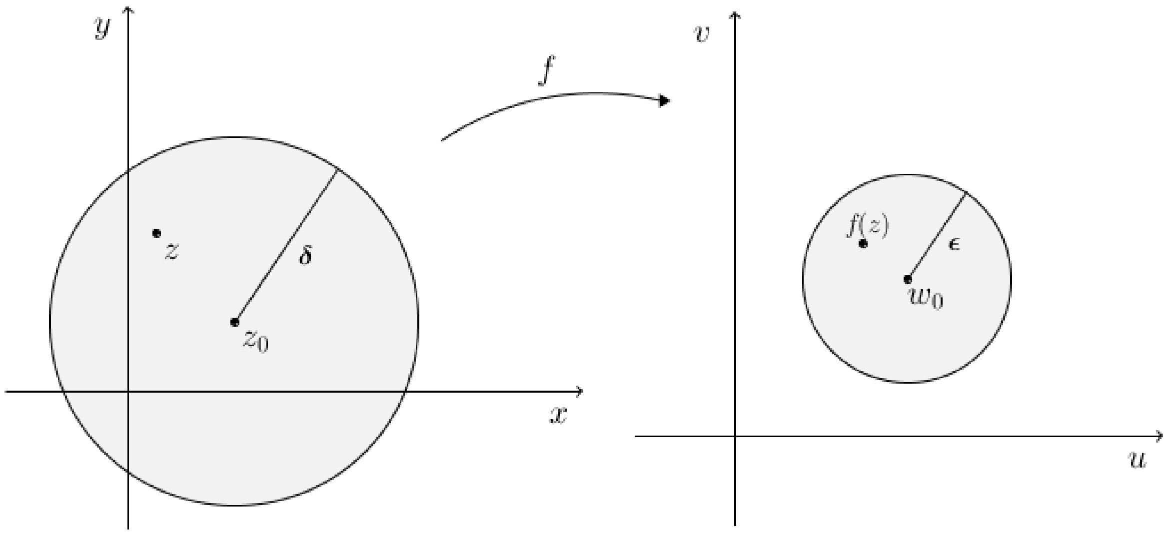
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si z está en K y $0 < \rho(z, z_0) < \delta$ entonces $\rho(f(z), w_0) < \epsilon$.

De la definición anterior se desprenden cuatro casos, dos de los cuales son los siguientes

a. z_0 y w_0 son finitos entonces $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = z_0$ si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - z_0| < \delta$ entonces $|f(z) - w_0| < \epsilon$.

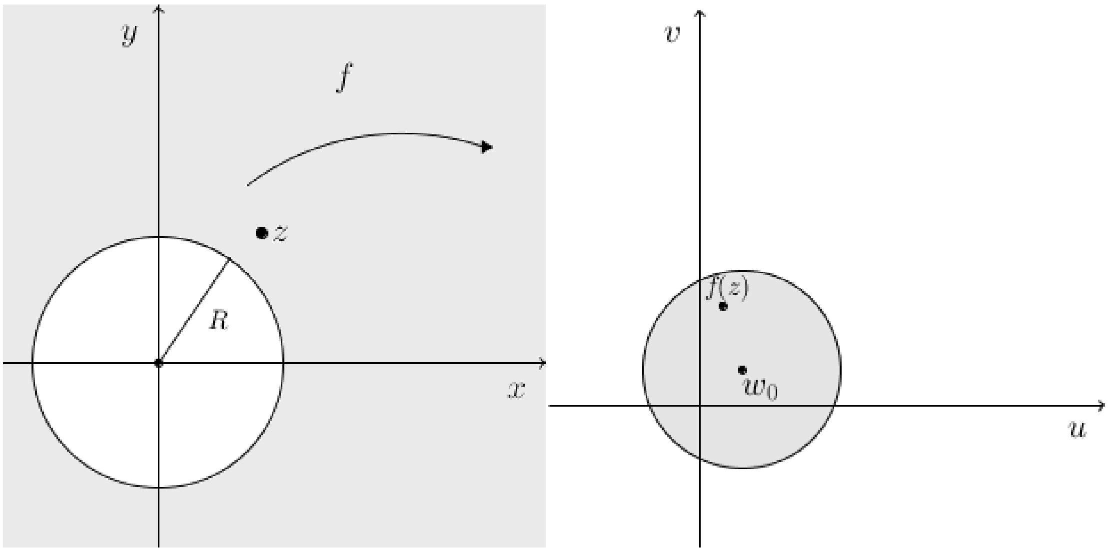
   Esto puede geométricamente interpretarse de la siguiente manera:
   Dada una vecindad de centro w_0 y radio ϵ existe una vecindad de centro z_0 y radio δ tal que si z es un punto de K que se encuentra en el interior de la vecindad de centro z_0 entonces $f(z)$ está en la vecindad de centro w_0.



b. $z_0 = \infty$ y w_0 es finito entonces $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = w_0$ si y solo si dado $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que si $|z| > R$ entonces, $|f(z) - w_0| < \epsilon$.

   Esta definición puede interpretarse geométricamente de la manera siguiente:
   Dada una circunferencia de centro w_0 y radio ϵ existe una circunferencia de centro en el origen y radio R talque si z es un elemento de K en el exterior de la circunferencia de centro en el origen y radio R entonces $f(z)$ está en el interior de la circunferencia de centro w_0 y radio ϵ.

   Una ilustración geométrica de esta definición es la siguiente.



Se deja al lector proporcionar las definiciones para los casos no considerados así como las interpretaciones geométricas correspondientes.

Ejemplo **2.5.** $\lim\limits_{z \to -i+1} (2x + y) + (3y - x)i = -1 + 4i$ ya que dado $\epsilon > 0$ si se toma $\delta < \frac{\epsilon}{7}$ entonces

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |(2x + y) + (3x - y)i - (-1 + 4i)| = |(2x + y + 1) + (3x - y - 4)i| \\ &\leq |2x + y + 1| + |3y - x - 4| = |2(x + 1) + (y - 1)| + |3(y - 1) - (x + 1)| \\ &\leq 3\,|x + 1| + 4\,|y - 1| \leq 7\sqrt{(x + 1)^2 + (y - 1)^2} < 7\delta < \epsilon \end{aligned}$$

El siguiente resultado muestra que para funciones de variable compleja se tienen propiedades análogas a aquellas para funciones de variable real, sus demostraciones son similares y por tal motivo se omiten.

Teorema **2.1.** *Sean $f,\ g : K \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones de variable compleja, z_0 un punto en K y $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_1$ entonces*

1. $\lim\limits_{z \to z_0} (f + g)(z) = w_0 + w_1$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} (\alpha f)(z) = \alpha w_0$ *para todo* α *en* $\mathbb{C}$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} (fg)(z) = w_0 w_1$
4. $\lim\limits_{z \to z_0} (\frac{f}{g})(z) = \frac{w_0}{w_1}$ *siempre que* $w_1 \neq 0$.

El teorema siguiente asegura la unicidad del límite.

Teorema **2.2.** *Sea $f : K \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja, que puede o no estar definida en un punto z_0 en K. Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe entonces su valor es único.*

Demostración. Supongamos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$, $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ con $w_0 \neq w_1$ y sea $\epsilon = \frac{1}{2}\,|w_0 - w_1| > 0$ entonces existen $\delta_0,\ \delta_1 > 0$ tales que $|f(z) - w_0| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta_0$ y $|f(z) - w_1| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta_1$

Si se escoje $\delta = Min\,\{\delta_0, \delta_1\}$ entonces

$|w_0 - w_1| = |w_0 - f(z) + f(z) - w_1| \leq |f(z) - w_0| + |f(z) - w_1| < 2\epsilon = |w_0 - w_1|$ siempre que $0 < |z - z_0| < \delta$

lo cual es una contradicción, por tanto $w_1 = w_2$ $\square$

Ejemplo **2.6.** $\lim\limits_{z\to i} \dfrac{\overline{z-i}}{z-i}$ no existe ya que si se toma
$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : Rez = 0,\ Imz \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : Rez \in \mathbb{R}, Imz = 1\}$ entonces

$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in S_1}} \frac{\overline{z-i}}{z-i} = \lim_{\substack{y\to 1\\ x=0}} \frac{x+(y-1)i}{x-(y-1)i} = \lim_{y\to 1} -\frac{(y-1)i}{(y-1)i} = \lim_{y\to 1}(-1) = -1 \text{ y}$$
$$\lim_{\substack{z\to i\\ z\in S_2}} \frac{\overline{z-i}}{z-i} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=1}} \frac{x+(y-1)i}{x-(y-1)i} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

lo cual por la unicidad del límite es una contradicción.

2.3. Continuidad

Análogamente a la sección anterior aquí se presentan los conceptos relativos a la continuidad de una función de variable compleja así como sus propiedades.

Definición **2.3.** *Sea $f : K \subseteq \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ una función de variable compleja y z_0 un punto en K. La función f es* ***continua*** *en z_0 si y solo si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.*

Como en el caso de la definición de límite se tienen cuatro casos por considerar, tres de los cuales son: z_0 finito y $f(z_0) = \infty$, $z_0 = \infty$ y $f(z_0)$ finito, $z_0 = \infty$ y $f(z_0) = \infty$. Si f es continua en alguno de estos casos, se dice que f es **continua generalizada** en z_0

Ejemplo **2.7.** La función $f(z) = \frac{1}{z}$ es continua en $\mathbb{C} - \{0\}$ y continua generalizada en $\overline{\mathbb{C}}$.

Ejemplo **2.8.** La función $f(z) = \frac{2iz-1}{z-i}$ puede redefinirse de manera que sea continua generalizada en $\overline{\mathbb{C}}$ como

$$f(z) = \begin{cases} \infty & \text{si } z = i \\ \frac{2iz-1}{z-i} & \text{si } z \neq i \text{ y } z \neq \infty \\ 2i & \text{si } z = \infty \end{cases}$$

ya que $\lim\limits_{z\to i} f(z) = \infty$ y $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 2i$

Los siguientes resultados expresan las propiedades de las funciones continuas

Teorema **2.3.** *Sean f, $g : K \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funciones continuas en un punto z_0 en K entonces $f+g$, αf, fg son continuas en z_0 para todo α en $\mathbb{C}$ y $\frac{f}{g}$ es continua en z_0 siempre que $g(z_0) \neq 0$*

Teorema **2.4.** *Sea $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ una función de variable compleja y $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto en $\mathbb{C}$ entonces $f(z)$ es continua en z_0 si y solo si las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son continuas en (x_0, y_0)*

Ejemplo **2.9.** Puesto que las funciones $f(z) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$ y $g(z) = z$ son continuas en $\mathbb{C}$ se deduce, por aplicación reiterada del resultado anterior, que todo polinomio con coeficientes complejos

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n,\ a_n \neq 0$$

es continuo en $\mathbb{C}$.

Ejemplo **2.10.** Toda función racional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ es una función continua en todo punto z en $\mathbb{C}$ para el cual $q(z) \neq 0$.

Ejemplo **2.11.** Puesto que la función $u(x,y) = cos\left(x^2+y^2\right)$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y la función
$v(x,y) = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ es continua siempre que $x^2 - y^2 \neq 0$ entonces la función $f(z) = cos\left(x^2+y^2\right) + \frac{2xy}{x^2-y^2}i$ es continua en el conjunto

$$K = \{z = x+iy : y \neq x \text{ ó } y \neq -x\}$$

2.4. Problemas resueltos

En esta sección se ilustra la teoría tratada con la resolución de algunos ejercicios atinentes a la misma

Problema **2.1.** Hallar la parte real de la función $f(z) = \frac{iz+1}{1+\overline{z}}$

Solución. Sea $z = x + iy$ con x, y en $\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{iz+1}{1+\overline{z}} = \frac{i(x+iy)+1}{1+(x-iy)} = \frac{(1-y)+ix}{(1+x)-iy} \\ &= \frac{[(1-y)+ix]\,[(1+x)+iy]}{(1+x)^2+y^2} = \frac{(1+x-y-2xy)+(y-y^2+x+x^2)i}{(1+x)^2+y^2} \end{aligned}$$

por lo que

$$Re\ f(z) = \frac{1+x-y-2xy}{(1+x)^2+y^2}$$

Problema **2.2.** Bajo la transformación $w = z^2$ hallar la imagen del conjunto

$$K = \{z = x+iy :\ x = k,\ y \in \mathbb{R}\}$$

Solución. Sea $z = x + iy$ con x, y en $\mathbb{R}$ entonces $w = z^2 = (x+iy)^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi = u + vi$ con lo que $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.
Puesto que $x = k$ entonces

$$\begin{aligned} u &= k^2 - y^2, \\ v &= 2ky \end{aligned}$$

con y en $\mathbb{R}$ que corresponden a las ecuaciones paramétricas de la curva imagen de la recta paralela al eje y determinada por la condición $x = k$.
Para eliminar el parámetro y, consideramos dos casos:

- Si $k = 0$ entonces

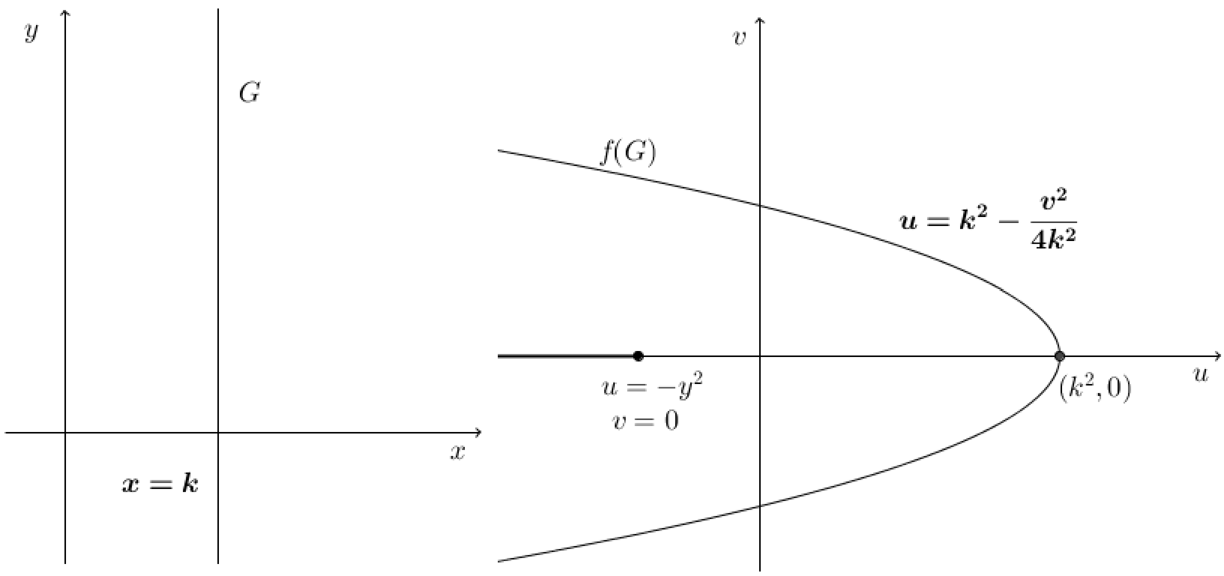
  $$\begin{aligned} &u = -y^2, \quad y \in \mathbb{R} \\ &v = 0 \end{aligned}$$

  que corresponde, en el plano w, a la parte no positiva del eje u.

- Si $k \neq 0$ entonces $y = \frac{v}{2k}$ y al reemplazar este valor en $u = k^2 - y^2$ se obtiene

  $$u = k^2 - \frac{v^2}{4k^2}$$

  que corresponde en el plano w a la parábola de vértice $(k^2, 0)$ que se abre hacia la izquierda.



Así: El eje y se transforma en la parte no positiva del eje u, y rectas paralelas al eje y, diferentes de este, se transforman en las parábolas descritas anteriormente. Nótese que si las rectas se acercan al eje y, las parábolas se contraen al eje u y su vértice se acerca al origen.

Problema **2.3.** Bajo la transformación $w = \dfrac{1}{z}$ determinar la imagen del conjunto

$$G = \left\{z = x + iy : \; y = x, \; y = -x, \; x^2 + y^2 = 2x\right\}$$

Solución. Sea $z = x + iy$ entonces de $w = \frac{1}{z}$ se sigue que $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

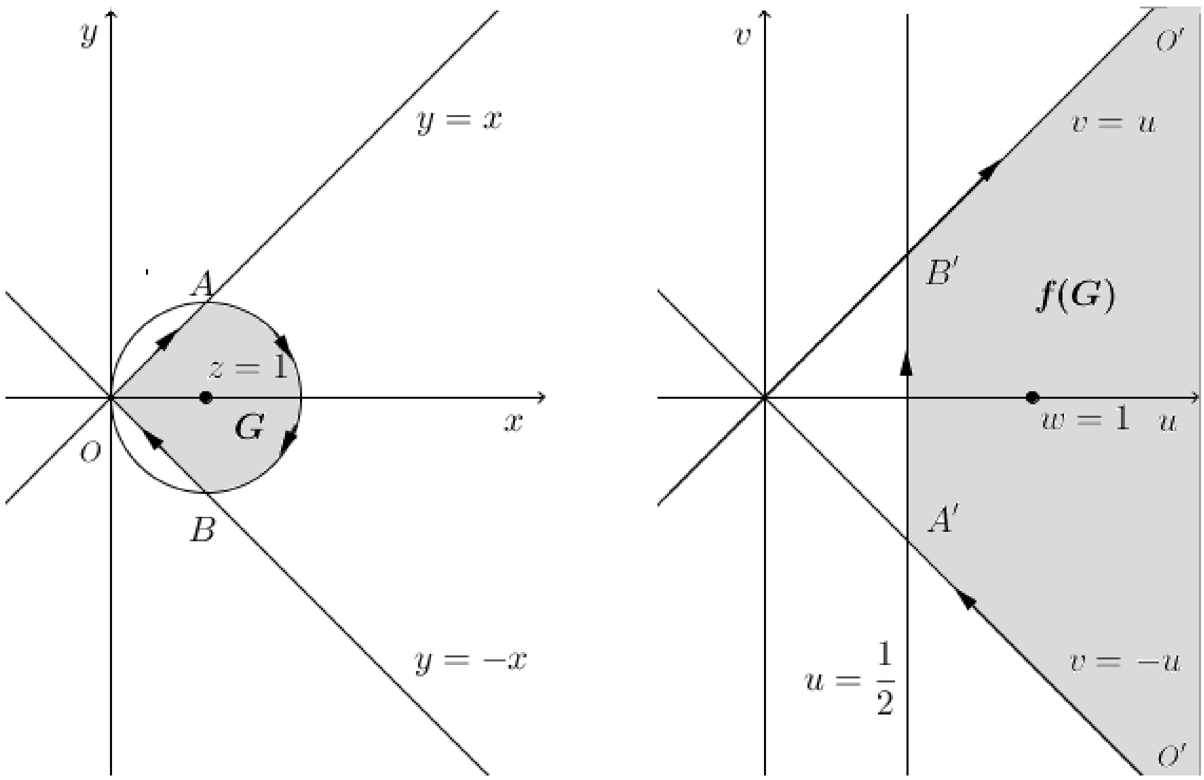
Para hallar la imagen del conjunto, determinamos en primer lugar las imágenes de las curvas frontera de la región. Así se tiene

a - Las rectas $y = x$ y $y = -x$. Como $w = \frac{1}{z}$ entonces $z = \frac{1}{w} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2}$ por tanto

$$x = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$$

con lo que $x = y$ se transforma en $v = -u$, y $y = -x$ en $v = u$.

b - La circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$. De $w = \frac{1}{z}$ se sigue que $u = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ con lo que $u = \frac{x}{2x}$ es decir $u = \frac{1}{2}$ y así la circunferencia $x^2 + y^2 = 2x$ se transforma en la recta $u = \frac{1}{2}$.



Puesto que el punto $z = 1$ la región K tiene como imagen $w = 1$ entonces el conjunto limitado por $y = x$, $y = -x$, $x^2 + y^2 = 2x$ se transforma en la región ilimitada determinada por $v = u$, $v = -u$, $u = \frac{1}{2}$ que se muestra sombreada en la figura.

Nótese que si la preimagen se recorre en el sentido $OABO$ la imagen se recorre en el sentido $O'A'B'O'$.

Problema **2.4.** Demostrar, utilizando la definición, que

$$\lim_{z \to i} \frac{z^3 + i}{z - i} = -3.$$

Solución. Dado $\epsilon > 0$ se debe hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - i| < \delta$ entonces $\left|\frac{z^3+i}{z-i} + 3\right| < \epsilon$.
Puesto que

$$\left|\frac{z^3 + i}{z - i} + 3\right| = \left|\frac{z^3 + 3z - 2i}{z - i}\right| = \frac{|z - i| \left|z^2 + iz + 2\right|}{|z - i|} = |(z - i)(z + 2i)|$$
$$= |(z - i) [(z - i) + 3i]| \leq |z - i|^2 + 3 |z - i| < \delta^2 + 3\delta$$

entonces si se toma $\delta < \frac{-3+\sqrt{9+4\epsilon}}{2}$ se tiene que $\left|\frac{z^3+i}{z-i} + 3\right| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - i| < \delta$

Problema **2.5.** Demostrar, utilizando la definición de límite, que

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z - 1)^3} = \infty.$$

Solución. Dado $M > 0$ se debe hallar $\delta > 0$ tal que si $0 < |z - 1| < \delta$ entonces $\left|\frac{1}{(z-1)^3}\right| > M$.
Si se toma $\delta = \frac{1}{\sqrt[3]{M}}$ entonces

$$\left|\frac{1}{(z - 1)^3}\right| = \frac{1}{|z - 1|^3} > \frac{1}{\delta^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{M}}\right)^3} = M$$

por lo que

$$\lim_{z\to 1} \frac{1}{(z - 1)^3} = \infty$$

Problema **2.6.** Sea f una función de variable compleja, demostrar que si f es continua en z_0 entonces $|f|$ es continua en z_0

Solución. Obsérvese en primer lugar que

$$|f(z)| = |f(z) - f(z_0) + f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| + |f(z_0)|$$

y por lo tanto $|f(z)| - |f(z_0)| \leq |f(z) - f(z_0)|$. Análogamente $-|f(z) - f(z_0)| \leq |f(z)| - |f(z_0)|$ y de estas desigualdades se sigue que

$$||f(z)| - |f(z_0)|| < |f(z) - f(z_0)| .$$

Sea $\epsilon > 0$ dado, puesto que f es continua en z_0 existe $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$ siempre que $0 < |z - z_0| < \epsilon$ por lo que

$$||f(z)| - |f(z_0)|| < |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ siempre que } 0 < |z - z_0| < \delta \text{ y así } |f(z)| \text{ es continua en } z_0$$

Problema **2.7.** ¿Es posible redefinir la función $f(z) = \frac{zImz}{|z|^2}$ de manera que se continua en $z = 0$?

Solución. No, puesto que si se toma $S_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ Imz = 0\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ Rez = 0\}$ entonces

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_1}} f(z) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} \frac{(x + iy)y}{x^2 + y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0 \text{ y}$$

$$\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_2}} f(z) = \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} \frac{(x + iy)y}{x^2 + y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{iy^2}{y^2} = i$$

y por lo tanto $\lim_{z\to 0} f(z)$ no existe.

Problema **2.8.** Para $z = x + iy$ se define e^z como

$$e^z = e^x(cosy + iseny)$$

con base en esta definición hallar la parte imaginaria de $f(z) = e^{e^{z^2}}$

Solución. Sea $z = x + iy$ entonces $z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi$ por lo que

$$f(z) = e^{e^{z^2}} = e^{e^{\left(x^2-y^2\right)+2xyi}} = e^{e^{x^2-y^2}(cos(2xy)+isen(2xy))}$$
$$= e^{e^{x^2-y^2}cos(2xy)}\left(cos\left(e^{x^2-y^2}sen2xy\right) + isen\left(e^{x^2-y^2}sen2xy\right)\right)$$

y así

$$Imf(z) = e^{e^{x^2-y^2}cos(2xy)}sen\left(e^{x^2-y^2}sen2xy\right)$$

Problema **2.9.** Expresar la función $f(z) = (2x^2 - y^2 + y) + (xy)i$ en términos de z y $\overline{z}$.

Solución. Sea $z = x + iy$, dado que $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$ entonces

$$f(z) = \left(2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^2 + Imz\right) + \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\cdot\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)i$$
$$= 2\left(\frac{z^2+2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4}\right) + \frac{z^2-2z\overline{z}+\overline{z}^2}{4} + Imz + \frac{z^2-\overline{z}^2}{4}$$
$$= \frac{4z^2+2\overline{z}^2+2z\overline{z}}{4} + Imz = z^2 + \left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\overline{z} + Imz = z^2 + \overline{z}Re(z) + Imz$$

Problema **2.10.** Bajo la tranformación $w = (4+3i)z - 2 + i$ hallar la imagen del conjunto

$$G = \{z \in G : |z-1| < 1\}$$

Solución. La inversa de la función $w = (4+3i)z - 2 + i$ está definida por $z = \frac{w+2-i}{4+3i}$ el cual puede ser sustituido en $|z-1| < 1$ es decir

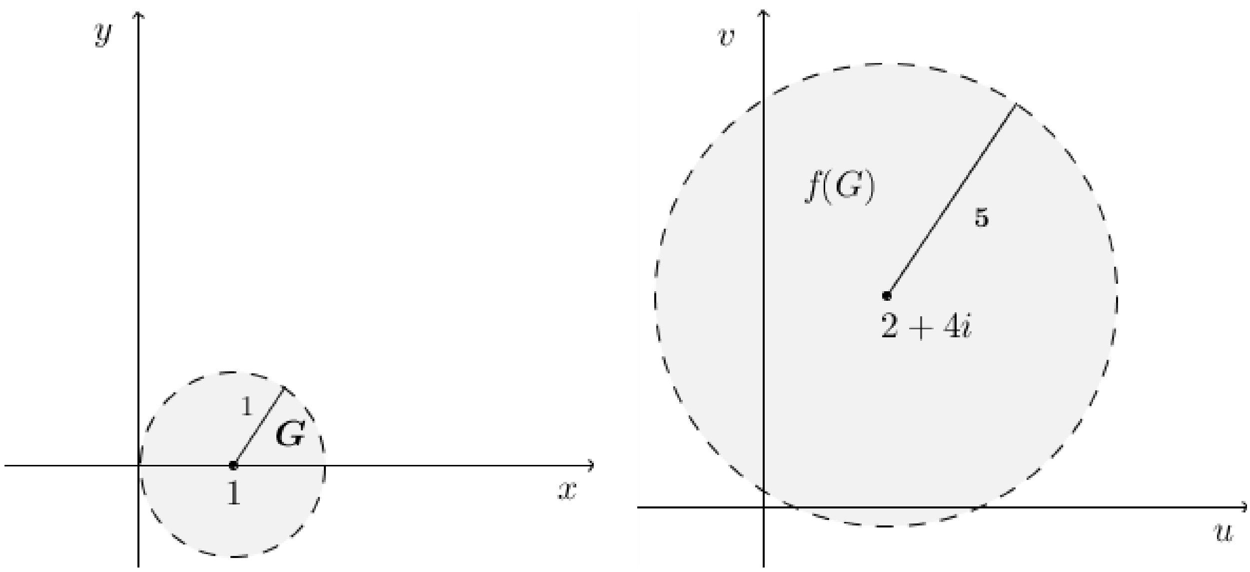
$$\left|\frac{w+2-i}{4+3i} - 1\right| < 1,$$

expresión en la cual al efectuar las operaciones se obtiene

$$|w - 2 - 4i| < 5.$$

Así la imagen del círculo $|z-1| < 1$ bajo la transformación dada es el círculo

$$|w - 2 - 4i| < 5.$$



2.5. Problemas propuestos

1. Hallar la parte real e imaginaria de las siguientes funciones

$$a.\ \ f(z) = \overline{z} - iz^2 \qquad b.\ \ f(z) = i - z^3 \qquad c.\ \ f(z) = \frac{\overline{z}}{z} \qquad d.\ \ f(z) = \frac{1+\overline{z}}{1+iz}$$

2. Bajo la transformación $w = z^2$ hallar las imágenes de

$$a.\ \ \text{la recta } y = x \qquad b.\ \ \text{la circunferencia } |z| = a,\ a > 0 \qquad c\ \ \text{El rayo } argz = \theta$$

3. Bajo la transformación $w = \frac{1}{z}$ hallar las imágenes de las curvas

$$a.\ \ x = k,\ k \in \mathbb{R} \qquad b.\ \ x^2 + y^2 = x \qquad c.\ \ x^2 + y^2 = ky,\ \ k \in \mathbb{R} \qquad d.\ \ y = x^2$$

$$e.\ \ y = x \qquad f.\ \ y = ax + b \qquad g.\ \ argz = \theta \qquad h.\ \ |z - 1| = 1$$

4. Usar la definición de límite para demostrar que

$$a.\ \ \lim_{z\to -i}(4z - 3) = 1 - 4i \qquad b.\ \ \lim_{z\to -i} z^2 + 1 = 0 \qquad c.\ \ \lim_{z\to 2i}(2x + iy^2) = 4i$$

$$d.\ \ \lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z-i} = 2i \qquad e.\ \ \lim_{z\to\infty}\frac{2z-i}{z+1} = 2$$

5. Muestre que las siguientes funciones son continuas para $z \neq 0$. ¿Puede reedefinirse la función de manera que sea continua en $z = 0$?

$$a.\ \ f(z) = \frac{zRez}{|z|^2} \qquad b.\ \ f(z) = \frac{|z|^2}{z} \qquad c.\ \ f(z) = \frac{Rez \cdot Imz}{|z|^2} \qquad d.\ \ f(z) = \frac{(Rez)^2 - (Imz)^2}{|z|^2}$$

Definición **2.4.** *Una función de variable compleja $w = f(z)$ está definida en $z = \infty$ si y solo si la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ está definida en $z = 0$.*

6. Utilizar la definición anterior para verificar, sí o no, las siguientes funciones están definidas en $z = \infty$.

$$a.\ \ f(z) = \frac{z^2+1}{2z^2 - z + i} \qquad b.\ \ f(z) = \frac{3}{z^2+i} \qquad c.\ \ f(z) = \frac{5z-i}{3-iz} \qquad d.\ \ f(z) = \frac{3z^2-i}{z^3+z-i}$$

7. Calcular el valor de los siguientes límites

$$a.\ \ \lim_{z\to -i}\frac{z^2+3iz-2}{z+i} \qquad b.\ \ \lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos2z}{chiz + ishiz} \qquad c.\ \ \lim_{z\to 0}\frac{senz}{shiz} \qquad d.\ \ \lim_{z\to -\frac{\pi i}{2}}\frac{e^{2z}+1}{e^z+i}$$

8. Considere la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{zRez}{|z|} & \text{si} \quad z \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad z = 0 \end{cases}$$

demuestre que f es continua en $\mathbb{C}$.

9. Considere la función $f(z) = ln|z| + iargz$ con $-\pi < argz < \pi$, demuestre que f no es continua en cada punto del eje real negativo.

Capítulo 3

Diferenciabilidad. Funciones holomorfas

Existen dos enfoques diferentes bajo los cuales es posible estudiar la teoría de funciones de variable compleja; uno de ellos se debe a Riemann y en este, el concepto básico es el de derivada de una función de variable compleja conectado a la noción de función holomorfa. El segundo, se debe a Weierstrass y se desarrolla a partir de la noción de serie de potencias convergente en una vecindad de un punto y el concepto fundamental es el de función analítica. Este capítulo se desarrolla desde el punto de vista de Riemann por lo cual en primer lugar se extiende el concepto de derivada de una función real a función de variable compleja y se estudian sus propiedades. A continuación y debido al hecho de que una función de variable compleja equivale a dos funciones reales de dos variables, se observará que únicamente cuando estas funciones satisfacen ciertas condiciones, las ecuaciones de Cauchy - Riemann, es posible calcular la derivada de la función.

3.1. Funciones holomorfas

Definición **3.1.** *Sea K una región (conjunto abierto y conexo) en $\mathbb{C}$, $f : K \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja y z_0 un punto en K, la* ***derivada*** *de f en z_0 se denota $f'(z_0)$ y para z en K se define como*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

si este límite existe y es finito en $\mathbb{C}$. En este caso se dice que f es ***diferenciable*** *en z_0*

Nótese que si se llama $z - z_0 = h$ entonces la definición anterior puede expresarse como

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

Ejemplo **3.1.** La función $f(z) = z^n$, n en $\mathbb{N}$ es diferenciable en todo el plano complejo con $f'(z) = nz^{n-1}$ ya que

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} h^i - z^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} h^i}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} h^{i-1} = \lim_{h \to 0} \left(nz^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} z^{n-i} h^{i-1} \right) = nz^{n-1}. \end{aligned}$$

Ejemplo **3.2.** La función $f(z) = \overline{z}$ no es diferenciable en ningún punto z_0 de $\mathbb{C}$ ya que si se toma

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + h, h \in \mathbb{R}\} \text{ y } S_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + ik, k \in \mathbb{R}\} \text{ entonces}$$

$$f'_{S_1}(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S_1}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S_1}} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{(x_0 + h + iy_0)} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1 \text{ y}$$

$$f'_{S_2}(z_0) = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S_2}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S_2}} \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \lim_{k \to 0} \frac{\overline{(x_0 + i(y_0 + k))} - \overline{(x_0 + iy_0)}}{ik} = \lim_{k \to 0} -\frac{k}{k} = -1$$

Puesto que los valores de estos límites son diferentes entonces la derivada de $f(z) = \overline{z}$ no existe.

Ejemplo **3.3.** Toda función de variable compleja diferenciable en un punto z_0 en $\mathbb{C}$ es contínua en dicho punto ya que

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} (z - z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \lim_{z \to z_0} (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0$$

Usted puede proporcionar un ejemplo para mostrar que el recíproco de este resultado no es válido.

Los siguientes resultados nos muestran que las reglas usuales para la derivación de funciones de variable real también son válidas para funciones de variable compleja.

Teorema **3.1.** *Sea K una región en $\mathbb{C}$, f, $g : K \to \mathbb{C}$ funciones de variable compleja diferenciables en K entonces $f + g$, αf, $\alpha \in \mathbb{C}$, fg, $\frac{f}{g}$ cuando $g(z) \neq 0$ para z en K son diferenciables en K y además*

a - $(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

b - $(\alpha f)'(z) = \alpha f'(z)$

c - $(fg)'(z) = f(z)g'(z) + f'(z)g(z)$

d - $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(z) = \dfrac{g(z)f'(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)}$ *siempre que* $g(z) \neq 0$

Demostración. La demostración de estos resultados es análoga a la del caso para funciones de variable real, así por ejemplo

$$\begin{aligned}
(fg)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{(fg)(z) - (fg)(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z) + f(z_0)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{g(z)\left(f(z) - f(z_0)\right)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} \frac{f(z_0)\left(g(z) - g(z_0)\right)}{z - z_0} \\
&= g(z_0)f'(z_0) + f(z_0)g'(z_0)
\end{aligned}$$

□

El siguiente resultado se conoce como la regla de la cadena y permite calcular la derivada de la función compuesta

Teorema **3.2.** *Si g es diferenciable en z_0 y f es diferenciable en $g(z_0)$ entonces $f \circ g$ es diferenciable en z_0 y $(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)).g'(z_0)$.*

Obsérvese que si K y R son dos regiones en $\mathbb{C}$ y $f : K \to R$ es una función de variable compleja biyectiva entonces existe la función inversa $g = f^{-1} : R \to K$ biyectiva tal que $f \circ g = I$ y se tiene el teorema de la función inversa.

Teorema **3.3.** *Si f es diferenciable en $z_0 \in K$ con $f'(z_0) \neq 0$ y g la función inversa de f es continua en $f(z_0)$ entonces g es diferenciable en $f(z_0)$ con*

$$\left(f^{-1}\right)'(f(z_0)) = \frac{1}{f'(z_0)}$$

Demostración. Sea $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$ entonces

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{z - z_0}{f(z) - f(z_0)} = \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}$$

y puesto que cuando w tiende a w_0 se sigue por la continuidad de g que $g(w)$ tiende a $g(w_0)$ es decir z tiende a z_0 entonces

$$\lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}} = \frac{1}{f'(z_0)}$$

el cual existe y es finito en $\mathbb{C}$, por lo que $\left(f^{-1}\right)'(f(z_0)) = \dfrac{1}{f'(z_0)}$. □

Definición **3.2.** *Sea K una región en $\mathbb{C}$, $f : K \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja y z_0 un punto en K, entonces*

a - *f es **holomorfa** en z_0 si y solo si f es diferenciable en todo punto de alguna vecindad de z_0.*

b - *f es **holomorfa** en K si y solo si f es holomorfa en cada punto z_0 de K.*

c - *f es **entera** si y solo si f es holomorfa en $\mathbb{C}$.*

Ejemplo **3.4.** La función $f(z) = z^n$, n en $\mathbb{N}$ es entera ya que $f'(z) = nz^{n-1}$ existe en toda vecindad de cada punto z en $\mathbb{C}$.

Ejemplo **3.5.** La función $f(z) = |z|^2$ es diferenciable en $z_0 = 0$ pero no es holomorfa en ningún punto z_0 en $\mathbb{C}$ ya que

a - $f'(0) = \lim\limits_{z\to 0} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim\limits_{z\to 0} \frac{|z|^2}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \overline{z} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x - yi = 0$

b - f no es diferenciable en ningún punto $z_0 \neq 0$ ya que si lo fuese entonces $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ debería existir y ser el mismo independientemente de la manera de acercarse al punto z_0 pero si se toma

$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + h,\ h \in \mathbb{R}\}$ y $S_2 = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + ik,\ k \in \mathbb{R}\}$ entonces

$$\begin{aligned} f'_{S_1}(z_0) &= \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S_1}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S_1}} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2 + {y_0}^2 - {x_0}^2 - {y_0}^2}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_{S_2}(z_0) &= \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S_2}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S_2}} \frac{|z|^2 - |z_0|^2}{z-z_0} = \lim_{k\to 0} \frac{{x_0}^2 + (y_0+k)^2 - {x_0}^2 - {y_0}^2}{ih} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{2y_0 k + k^2}{ik} = -2iy_0 \end{aligned}$$

y puesto que los dos valores son diferentes para $z_0 \neq 0$ entonces $f'(z_0)$ no existe para $z_0 \neq 0$.

Obsérvese que de los teoremas 3.1, 3.2 y 3.3 se deduce que la suma, el producto, el cociente (con denominador diferente de cero), la composición y la inversa de funciones holomorfas en una región K son también funciones holomorfas en la misma región, en particular, puesto que $f(z) = k$; k constante en $\mathbb{C}$, $g(z) = z$ y $h(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$ son enteras con $f'(z) = 0$, $g'(z) = 1$ y $h'(z) = nz^{n-1}$ se sigue del resultado anterior que todo polinomio $p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ es una función entera con $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + na_n z^{n-1}$ y que toda función racional $\frac{p(z)}{q(z)}$ es holomorfa donde $q(z) \neq 0$.

3.2. Las ecuaciones de Cauchy Riemann

Como hemos mencionado en la sección 2.1 una función de variable compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ está definida por dos funciones reales $u(x,y)$, $v(x,y)$ de dos variables reales x, y y la continuidad de f está determinada por la continuidad de u y v. ¿De la misma manera, la diferenciabilidad de u y v implican la diferenciabilidad de f? la respuesta a este interrogante es negativa ya que por ejemplo las funciones $u(x,y) = x$ y $v(x,y) = -y$ son diferenciables en todo punto de $\mathbb{R}^2$ sin embargo como muestra el ejemplo 3.2 de la sección 3.1 la función $f(z) = x - iy = \overline{z}$ no es diferenciable en ningún punto de $\mathbb{C}$.

En esta sección se presentan las condiciones sobre las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ para que la función de variable compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea diferenciable.

Teorema **3.4.** *Sea K una región en $\mathbb{C}$, $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto en K y $f : K \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.*
Si f es diferenciable en z_0 entonces $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existen en (x_0, y_0) y en dicho punto se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Demostración. Si f es diferenciable en z_0 entonces existe y es único $f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$ independientemente del camino seleccionado para acercarse h a 0, por tanto si se escoge

$$S_1 = \{h \in \mathbb{C} : h \in \mathbb{R}\} \quad \text{y } S_2 = \{h \in \mathbb{C} : h = ik,\ k \in \mathbb{R}\}$$

entonces $f'_{S_1}(z_0) = f'_{S_2}(z_0)$ y como

$$\begin{aligned}
f'_{S_1}(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in S_1}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(u(x_0+h,y_0)+iv(x_0+h,y_0)) - (u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h,y_0)-u(x_0,y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h,y_0)-v(x_0,y_0)}{h} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \\
f'_{S_2}(z_0) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in S_2}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \lim_{k\to 0} \frac{(u(x_0,y_0+k)+iv(x_0,y_0+k)) - (u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0))}{ik} \\
&= \frac{1}{i} \lim_{k\to 0} \frac{u(x_0,y_0+k)-u(x_0,y_0)}{k} + \lim_{k\to 0} \frac{v(x_0,y_0+k)-v(x_0,y_0)}{k} \\
&= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)
\end{aligned}$$

se sigue que $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$ □

Una manera equivalente y en la práctica más útil, de presentar el resultado anterior es la siguiente. Si una función de variable compleja no satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann entonces no es diferenciable. Ilustramos esto a continuación.

Ejemplo **3.6.** La función $f(z) = \overline{z}$ no es diferenciable en ningún punto en $\mathbb{C}$ ya que para ella $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$ por tanto $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$ y así no se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en ningún punto de $\mathbb{C}$.

Las condiciones del Teorema anterior no son suficientes, es decir, pueden darse ejemplos de funciones $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ que satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann pero que no son diferenciables, ver por ejemplo el problema resuelto 3.4 de la sección 3.3.

El siguiente teorema proporciona condiciones suficientes para que una función de variable compleja sea diferenciable, sin embargo antes de dar su enunciado y demostración se recuerdan algunos resultados de Cálculo de varias variables que son necesarios para este propósito.

Observación (1)**.** Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y (x_0,y_0) un punto en el dominio de g. El incremento de g en (x_0,y_0) se denota $\Delta g(x_0,y_0)$ y se define como

$$\Delta g(x_0,y_0) = g(x,y) - g(x_0,y_0)$$

Observación (2)**.** Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y (x_0,y_0) un punto en el dominio de g. g es diferenciable en (x_0,y_0) si y solo si el incremento de g en (x_0,y_0), $\Delta g(x_0,y_0)$, puede expresarse en la forma

$$\Delta g(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \epsilon(x-x_0,y-y_0)$$

donde $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{\epsilon(x-x_0,y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$

Observación (3)**.** Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función de dos variables y (x_0,y_0) un punto en el dominio de g. Si $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, existen y son continuas en (x_0,y_0) entonces g es diferenciable en (x_0,y_0).

Teorema **3.5.** *Sea K una región en $\mathbb{C}$, $f : K \to \mathbb{C}$ una función de variable compleja tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto en K.*

Si $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0) entonces f es diferenciable en z_0 y

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Demostración. Puesto que $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ existen y son continuas en (x_0, y_0) entonces por la observación **1** anterior, se tiene que

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \alpha_1(x-x_0, y-y_0)$$

donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\alpha_1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \alpha_2(x-x_0, y-y_0)$$

donde $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\alpha_2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

por lo tanto al usar las condiciones de Cauchy-Riemann observamos que

$$\begin{aligned}
&\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \frac{(u(x,y) + iv(x,y)) - (u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0))}{z - z_0} = \frac{(u(x,y) - u(x_0,y_0)) + i\,(v(x,y) - v(x_0,y_0))}{z - z_0} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \alpha_1\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \alpha_2\right)}{z - z_0} \\
&= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right) + i\left(-\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0)\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2)}{z - z_0} \\
&= \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0)\left((x-x_0) + i\,(y-y_0)\right) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\left((x-x_0) + i\,(y-y_0)\right) + (\alpha_1 + i\alpha_2)}{z - z_0} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\frac{(x-x_0) + i(y-y_0)}{z - z_0} + \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{z - z_0} \\
&= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\alpha_1 + i\alpha_2}{z - z_0}
\end{aligned}$$

y puesto que $\left|\dfrac{\alpha_1 + i\alpha_2}{z - z_0}\right| \leq \dfrac{|\alpha_1|}{|z - z_0|} + \dfrac{|\alpha_2|}{|z - z_0|}$ tiende a 0 cuando z tiende a z_0 entonces

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

y así f es diferenciable en z_0 □

Ejemplo **3.7.** La función $f(z) = e^x(cosy + iseny)$ es entera puesto que $u(x,y) = e^x cosy$, $v(x,y) = e^x seny$ por tanto $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x seny = -\frac{\partial v}{\partial x}$ y estas derivadas existen y son continuas en todo (x,y). Nótese que $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = e^x cosy + ie^x seny = f(z)$.

Teorema **3.6.** *Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función holomorfa en una región $K \subseteq \mathbb{C}$ y $u(x,y)$, $v(x,y)$ son continuas hasta orden 2 en K entonces u y v satisfacen la ecuación de Laplace, es decir*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad y \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Demostración. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es holomorfa en K entonces f es diferenciable en K y por tanto se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Al derivar, respectivamente, estas igualdades con respecto a x y a y se obtiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

y puesto que v es de clase C^2 en K entonces las derivadas mixtas son iguales, es decir $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ por lo que al sumar miembro a miembro las igualdades anteriores se obtiene que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Análogamente v satisface la ecuación de Laplace. □

Una función $u(x,y)$ que satisface las condiciones del resultado anterior se llama una **función armónica** y se dice que $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son **armónicas conjugadas**.

3.3. Problemas resueltos

En esta sección se resuelven algunos problemas que se utilizan para ilustrar o complementar la teoria tratada

Problema **3.1.** Considérese la función $f(z) = zarg(z+i)$ demostrar que $f'(0) = \frac{\pi}{2}$

Solución. Al utilizar la definición de derivada se obtiene que

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \to 0} \frac{zarg(z+i)}{z} = \lim_{z \to 0} arg(z+i) = argi = \frac{\pi}{2}$$

Problema **3.2.** Hallar los puntos donde la función $f(z) = zRez$ es diferenciable y holomorfa

Solución. Dado que $f(z) = zRez = (x+iy)x = x^2 + iyx$ entonces $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ $\frac{\partial v}{\partial x} = y$ $\frac{\partial v}{\partial y} = x$ por lo que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ si y solo si $x = y = 0$ y así $f(z) = zRez$ es diferenciable únicamente en $z = 0$. Naturalmente $f(z) = zRez$ no es holomorfa en ningún punto.

Problema **3.3.** Para la función $f(z) = \left(x^2 - y^2 + 2x\right) + i(y + 2xy)$ calcular $f'(z)$

Solución. Dado que $u = x^2 - y^2 + 2x$, $v = y + 2xy$ y $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 2 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = 1 + 2x$ entonces no se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann para ningún (x,y) por lo tanto f no es diferenciable y así $f'(z)$ no existe.

Problema **3.4.** Muestre que la función

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

satisface las condiciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ pero que no es diferenciable en dicho punto.

Solución. Obsérvese que $f(z)$ puede expresarse como

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{\left(x^3-3xy^2\right)+i\left(y^3-3x^2y\right)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

con lo que

$$u(x,0)=\begin{cases}x & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}\qquad u(0,y)=0 \text{ para todo } y \text{ en } \mathbb{R}$$

$$v(0,y)=\begin{cases}y & \text{si } y\neq 0\\ 0 & \text{si } y=0\end{cases}\qquad v(x,0)=0 \text{ para todo } x \text{ en } \mathbb{R}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(0,0)&=\lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\\ \frac{\partial v}{\partial y}(0,0)&=\lim_{y\to 0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=1\\ \frac{\partial u}{\partial y}(0,0)&=\lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y}=0\\ \frac{\partial v}{\partial x}(0,0)&=\lim_{x\to 0}\frac{v(x,0)-v(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0\end{aligned}$$

y así se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann en $(0,0)$.

Si se toma $S_1=\{z\in\mathbb{C}: Rez=0,\ Imz=y\}$ $S_2=\{z\in\mathbb{C}: Rez=x=Imz=y\}$ entonces

$$f'_{S_1}(0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_1}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_1}}\frac{\overline{z}^3}{z\left|z\right|^2}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_1}}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2=\lim_{\substack{x=0\\ y\to 0}}\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^2=\lim_{y\to 0}\left(\frac{-iy}{iy}\right)^2=1$$

$$f'_{S_2}(0)=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_2}}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_2}}\frac{\overline{z}^3}{z\left|z\right|^2}=\lim_{\substack{z\to 0\\ z\in S_2}}\left(\frac{\overline{z}}{z}\right)^2=\lim_{\substack{x=y\\ x\to 0}}\left(\frac{x-iy}{x+iy}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-ix}{x+ix}\right)^2=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2=-1$$

y puesto que estos valores son diferentes entonces f es no diferenciable en $z=0$.

Problema **3.5.** Hallar los valores de las constantes reales a,b,c tales que la función $f(z)=x+ay+i(bx+cy)$ sea entera.

Solución. Puesto que $u(x,y)=x+ay$, $v(x,y)=bx+cy$ entonces

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\ \frac{\partial u}{\partial y}=a,\ \frac{\partial v}{\partial x}=b\ \frac{\partial v}{\partial y}=c$$

y del teorema 3.5 se sigue que f es diferenciable siempre que $c=1$, $b=-a$ por lo que f puede expresarse como

$$f(z)=x+ay+i(-ax+y)=(1-ia)x+iy(1-ia)=(1-ia)(x+iy)=(1-ia)z.$$

Problema **3.6.** Sea $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ una función entera tal que $v=u^2$ demostrar que f es constante

Solución. Si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es entera entonces f es diferenciable en $\mathbb{C}$ por lo que se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann es decir $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Puesto que $v=u^2$ entonces al derivar con respecto a x y a y se obtiene que

$$\frac{\partial v}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}\ \text{ y }\ \frac{\partial v}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}$$

igualdades que al utilizar las condiciones de Cauchy-Riemann se expresan como

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2u\frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial y} = -2u\frac{\partial v}{\partial x}$$

es decir

$$\frac{\partial v}{\partial x} - 2u\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$2u\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

sistema lineal homogéneo de ecuaciones cuyo determinante $1 + 4u^2$ es diferente de cero por lo que posee solución única

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

por lo que v es constante respecto de x y y así v es constante.
Análogamente u es constante con lo que se concluye que f es constante.

Problema **3.7.** Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa en cierta región K del plano complejo talque $v(x, y) = arc\ tg\frac{y}{x}$, $x > 0$ y $f(1) = 0$. Reconstruir la función f.

Solución. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en K entonces f es diferenciable para todo z en K y por tanto se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Puesto que $v = arc\ tg\frac{y}{x}$ entonces $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$ y utilizando la primera igualdad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se sigue que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

integrando esta expresión con respecto a x se obtine que

$$u(x, y) = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2) + h(y)$$

donde $h(y)$es una función que únicamente depende de y que debe determinarse. Al derivar, esta última igualdad, con respecto a y resulta

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2} + h'(y)$$

y utilizando la segunda igualdad de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtiene que

$$\frac{y}{x^2 + y^2} + h'(y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

con lo que $h'(y) = 0$ y así $h(y) = c$, c una constante real. De esto se deduce que

$$f(z) = \frac{1}{2}ln(x^2 + y^2) + c + iarc\ tg\frac{y}{x}, \quad x > 0.$$

De la condición $f(1) = 0$ se deduce que $c = 0$ y por tanto

$$\begin{aligned} f(z) &= ln\left(x^2 + y^2\right)^{1/2} + iarc\ tg\frac{y}{x}, \quad x > 0 \\ &= ln\,|z| + iargz. \end{aligned}$$

Problema **3.8.** Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función entera tal que uv es constante demostrar que f es constante

Solución. Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es entera entonces f es diferenciable en $\mathbb{C}$ y por tanto se cumplen las ecuaciones de Cauchy-Riemann es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Si $uv = k$, k constante, consideramos dos casos $k = 0$ y $k \neq 0$

1. Si $uv = 0$ entonces $u = 0$ o $v = 0$. Supongamos $u = 0$ entonces por las ecuaciones de Cauchy-Riemann $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ por lo que $v(x, y) = c$, $c \in \mathbb{R}$ y así $f(z) = 0 + ic$, constante.

2. Si $uv = k \neq 0$ entonces $u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ y $u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Utilizando las ecuaciones de Cauchy-Riemann estas expresiones se pueden escribir como

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$-v\frac{\partial v}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

sistema lineal homogéneo de ecuaciones con determinante $u^2 + v^2 \neq 0$ por lo que posee solución única

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

por lo que la función $v(x, y)$ es constante. Análogamente $u(x, y)$ es constante y así f es constante.

Problema **3.9.** Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función holomorfa en cierta región K, demostrar que en dicha región

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Solución. Si f es una función holomorfa en K entonces f es diferenciable en K y por lo tanto se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Al multiplicar miembro a miembro estas igualdades resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$$

es decir

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

3.4. Problemas propuestos

1. Encuentre las regiones donde las siguientes funciones son diferenciables y/o holomorfas

   a. $f(z) = z^2\overline{z}$ *b.* $f(z) = |z|\overline{z}$ *c.* $f(z) = e^{z^2}$
   d. $f(z) = |x^2 - y^2| + 2i|xy|$ *e.* $f(z) = (x^2 - y^2) + i(x^2 + y^2)$

2. Demuestre que las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $z = 0$ pero que no son diferenciables en dicho punto.

   a. $f(z) = \sqrt{xy}$ *b.* $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$ *c.* $f(z) = \begin{cases} \dfrac{\overline{z}^3}{|z|^2} & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$

3. Exprese las ecuaciones de Cauchy - Riemann en forma Polar y muestre que la función $f(z) = r^5(cos5\theta + isen5\theta)$ satisface estas ecuaciones para $z \neq 0$

4. Verifique que las siguientes funciones $u(x, y)$, $(v(x, y))$ son armónicas y halle la correspondiente $v(x, y), (u(x, y))$ si la función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en cierta región K

   a. $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ *b.* $v(x, y) = ln(x^2 + y^2) + x - 2y$ *c.* $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$

   d. $v(x, y) = 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$ *e.* $u(x, y) = e^x(xcosy - yseny) + 2senxshy + x^3 - 3xy^2 + y$

5. En los siguientes ejercicios hallar todas las funciones armónicas del tipo indicado

   a. $u = f(ax + by)$ a y b constantes   *b.* $u = f(xy)$ *c.* $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$

   d. $u = f(x^2 - y^2)$ *e.* $u = f(x + \sqrt{x^2 + y^2})$ *f.* $u = f\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$

6. Demuestre que si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ es holomorfa en cierta región K y $f'(z) = 0$ para todo z en K entonces f es constante en K.

7. Demuestre que si $f(z) = u + iv$ y $\overline{f}(z) = u(x, y) - iv(x, y)$ son holomorfas en cierta región K entonces f es constante

8. Sea $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ una función entera tal que $u^2 = v^2$ demuestre que f es constante

9. Sea $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ una función entera tal que $|f|$ es constante demuestre que f es constante

10. Sea $z = x + iy$, demuestre que no existe una función entera $F(z)$ cuya derivada sea la función $f(z) = x$

11. Demuestre que el teorema de valor medio para funciones reales no es válido para funciones complejas, demostrando que para la función $f(z) = z^3$, $z_1 = 1$, $z_2 = i$ no existe un punto z_0 sobre el segmento de recta que une z_1 con z_2 tal que

$$f(z_2) - f(z_1) = f'(z_0)(z_2 - z_1)$$

12. Demuestre las siguientes proposiciones

    a) Si para la función $w = f(z)$ existe en el punto $z = z_0$ el límite $\lim\limits_{z\to z_0}\left[Re\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$ entonces las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ existen y coinciden en z_0.

    b) Si existe $\lim\limits_{z\to z_0}\left[Im\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right]$ entonces existen las derivadas parciales $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ en z_0.

    c) Si se supone que las funciones u y v son diferenciables, entonces la existencia de uno de los límites en 1 o 2 implica la existencia del otro y por tanto la diferenciabilidad de la función f.

13. Sea f una función holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f'(z) \neq 0$ para todo z, demuestre que la función $g(z) = f(\overline{z})$ no es holomorfa en ningún punto.

14. Sea f una función holomorfa no constante en una región K, demuestre que la función $g(z) = \overline{f(z)}$ no es holomorfa en K.

Capítulo 4

Las funciones elementales

El objetivo principal de este capítulo es extender algunas de las funciones elementales que se estudian en matemáticas básicas a funciones de variable compleja. En particular se tratarán funciones holomorfas de variable compleja z que se reducen a funciones reales cuando $z = x$ es real, tales como: la función exponencial, las funciones trigonométricas, la función potencial y las inversas de estas. Se observará que algunas de ellas poseen propiedades que no tienen sus equivalentes reales.

4.1. Las funciones elementales uniformes

En esta sección se estudian las funciones elementales uniformes tales como: la función potencia, la función exponencial, las funciones trigonométricas y las funciones hiperbólicas. Se tratan fundamentalmente sus propiedades algebraicas y en algunos casos sus propiedades geométricas como una transformación.

4.1.1. La función potencia

La función polinomial

$$p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \; a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \text{ en } \mathbb{C} \text{ y } n \text{ en } \mathbb{N}$$

es una función uniforme, tiene como dominio $\mathbb{C}$ y es entera con derivada $p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}$. Un caso particular es la denominada **función potencia** $f(z) = z^n$. Consideramos algunos resultados relacionados con esta función a continuación.

Teorema **4.1.** *consideremos la función $f(z) = z^n$, n en $\mathbb{N}$ entonces*

1. *f es sobreyectiva pero no inyectiva*
2. *Bajo f la imagen del conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : \; argz = \theta\}$ es el conjunto $K' = \{w \in \mathbb{C} : \; Argw = n\theta\}$*
3. *Bajo f la imagen del conjunto $K = \{z \in \mathbb{C} : \; |z| = r, \; r > 0\}$ es el conjunto $K' = \{w \in \mathbb{C} : \; |w| = r^n\}$*
4. *Bajo f la imagen de la región $K = \{z \in \mathbb{C} : \; \theta_0 < argz < \theta_1\}$ es la región $K' = \{w \in \mathbb{C} : \; n\theta_0 < Argw < n\theta_1\}$*

Demostración.

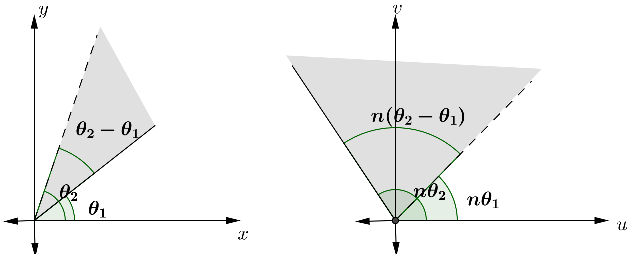
1. Dado $w \in \mathbb{C}$ se debe hallar z en $\mathbb{C}$ tal que $w = z^n$. Del resultado 1.4 del capítulo 1, se concluye que existen n valores de z dados por

$$z_k = |w|^{1/n} \left(cos \frac{argw + 2k\pi}{n} + isen \frac{argw + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

   y que estos puntos son los vértices de un polígono regular de n lados con centro en el origen de coordenadas por lo que $f(z) = z^n$ es sobre pero no uno a uno.

2,3. Sea z en $\mathbb{C}$ talque $z = r(cos\theta + isen\theta)$, $r > 0$, $-\pi < \theta \leq \pi$ entonces $w = r^n(cosn\theta + isenn\theta)$ y por lo tanto $|w| = r^n$ y $Argw = n\theta$ es decir la circunferencia $|z| = r$ se transforma en la circunferencia $|w| = r^n$ y el rayo $argz = \theta$ se transforma en en el rayo $Argw = n\theta$. Nótese que si un punto z recorre la circunferencia $|z| = r$ una vez, entonces la correspondiente imagen recorre la circunferencia $|w| = r^n$ n veces.

4 Del resultado anterior se sigue que si K es una región angular en el z-plano con vértice en el origen y ángulo $\theta = \theta_2 - \theta_1$ entonces su imagen en el $w-$plano, es una región angular de vértice en el origen y ángulo $n\theta = n(\theta_2 - \theta_1)$.



□

Nótese que si $\theta = \theta_2 - \theta_1 = \frac{2\pi}{n}$ entonces la imagen bajo f de los rayos $argz = \theta_1$ y $argz = \theta_1 + \frac{2\pi}{n}$ es el único rayo $Argw = n\theta_1$ y la imagen de la región K talque

$$K = \left\{ z \in \mathbb{C} : \theta_1 < argz < \theta_1 + \frac{2\pi}{n} \right\}$$

es el plano complejo $\mathbb{C}$ menos el rayo $Argw = n\theta_1$.

Puesto que cada w en $\mathbb{C}$ posee n-preimágenes que en el $z-$plano que representan los vértices de un polígono regular de n lados y que dos lados del polígono subtienden un ángulo $\frac{2\pi}{n}$ entonces en la región K considerada anteriormente únicamente existe una preimagen y por tanto la función $f(z) = z^n$ con dominio K y rango $\mathbb{C} - \{l\}$ donde l es el rayo $Argw = n\theta_1$ es biyectiva. La región K considerado se llama **un dominio de biunicidad** de la función $f(z) = z^n$.

4.1.2. La función exponencial

En este aparte se tratan algunas propiedades algebraicas y geométricas de la función exponencial compleja que muestran las semejanzas y diferencias entre esta y la función exponencial real.

Definición **4.1.** *Para $z = x + iy$ en $\mathbb{C}$, se define* ***la exponencial de base*** *e, e^z, como*

$$e^z = e^x(cosy + iseny)$$

Es claro que esta relación define una función que corresponde a la función exponencial $f(z) = e^z$ la cual tiene como dominio el plano complejo, es uniforme y coincide con la función exponencial real cuando $z = x$ está en $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado, presenta algunas propiedades de esta función, en particular, el inciso 5 permite concluir que esta función es periódica de período fundamental $2\pi i$ lo que muestra una diferencia fundamental con la función exponencial real

Teorema **4.2.** *La función exponencial compleja $f(z) = e^z$ es una función entera que satisface las siguientes relaciones*

1. $(e^z)' = e^z$ *para z en $\mathbb{C}$*

2. *si θ está en $\mathbb{R}$ entonces $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$*

3. *Para z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$, $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$*

4. *$e^z \neq 0$ para todo z en $\mathbb{C}$*

5. *$e^{z+2k\pi i} = e^z$ para todo z en $\mathbb{C}$ y k en $\mathbb{Z}$*

6. *Para $w \neq 0$ la relación $w = e^z$ define una función que es sobreyectiva pero no uno a uno*

Demostración.

1. Puesto que $f(z) = e^z = e^x(cosy + iseny)$ entonces $u(x,y) = e^x cosy$, $v(x,y) = e^x seny$ y como $\frac{\partial u}{\partial x} = e^x cosy = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x seny = -\frac{\partial v}{\partial x}$ y estas funciones existen y son continuas en $\mathbb{R}^2$ se concluye por el teorema 3.5 sección 3.2 que $f(z) = e^z$ es entera con derivada
$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = e^x cosy + ie^x seny = e^z$$

2. Si $Rez = 0$ entonces de la definición $e^{iy} = cosy + iseny$, y en $\mathbb{R}$.
Nótese que si $z = r(cos\theta + isen\theta)$ es un númeto complejo en forma trigonométrica entonces z puede expresarse como $z = re^{i\theta}$ que se conoce como **la forma exponencial** de z.

   La expresión $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$, θ en $\mathbb{R}$ se conoce como **La fórmula de Euler**.

3. Sean $z_1 = x_1 + iy_2$, $z_2 = x_2 + iy_2$ entonces
$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(cosy_1 + iseny_1)\, e^{x_2}(cosy_2 + iseny_2) \\ &= e^{x_1+x_2}\left[(cosy_1cosy_2 - seny_1seny_2) + i(seny_1cosy_2 + seny_2cosy_1)\right] \\ &= e^{x_1+x_2}(cos(y_1+y_2) + isen(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

4. De la propiedad anterior $e^z e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$ por lo que $e^z \neq 0$ para todo z y $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$

5. $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z(cos2k\pi + isen2k\pi) = e^z$ cuando k está en $\mathbb{Z}$.

6. Dado w en $\mathbb{C}$, $w \neq 0$ se debe hallar z en $\mathbb{C}$, $z = x + iy$ talque $w = e^z$.
Si $w = e^z = e^x(cosy + iseny)$ entonces $|w| = e^x$ y $Argw = y$ por lo que $x = ln|w|$ y $y = argw + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; así $z = ln|w| + i(argw + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto la función $f(z) = e^z$ es sobreyectiva pero no inyectiva.

□

Nótese que este resultado muestra que cada $w \neq 0$ posee infinitas preimagenes, que estas se ubican en el $z-$plano sobre la recta paralela al eje imaginario $x = ln|w|$ y que dos preimagenes contiguas están separadas una distancia 2π.

Este resultado también nos dice que si para la función $f(z) = e^z$ se toma como dominio el plano complejo $\mathbb{C}$ esta función no es biyectiva. ¿Es posible restringir el dominio de la función $f(z) = e^z$ de manera que sea biunivoca?. La respuesta es positiva y se obtiene en el siguiente resultado.

Teorema **4.3.** *Un dominio de biunicidad de la función $f(z) = e^z$ es la región*
$$G_k = \{z \in \mathbb{C} : y_0 + 2k\pi < Imz < y_0 + 2(k+1)\pi,\ Rez \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Demostración. Sean z_1 y z_2 en $\mathbb{C}$ $z_1 \neq z_2$ tales que $e^{z_1} = e^{z_2}$ entonces $e^{x_1}(cosy_1 + iseny_1) = e^{x_2}(cosy_2 + iseny_2)$ y por tanto $x_1 = x_2$ y $y_2 = y_1 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, así $z_2 = z_1 + 2k\pi i$, es decir z_1 y z_2 estan en el $z-$plano en una franja limitada por dos rectas paralelas al eje real separadas una distancia 2π. □

El siguiente teorema muestra algunos aspectos geométricos de la función exponencial, en particular, que la imagen de un dominio de biunicidad es el plano complejo excepto un rayo que parte del origen.

Teorema **4.4.** *Consideremos la función $f(z) = e^z$ entonces*

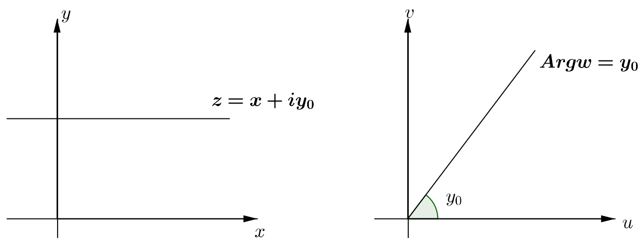
1. *La imagen de una recta paralela al eje real es un rayo que parte del origen.*
2. *La imagen de una recta paralela al eje imaginario es una circunferencia de centro en el origen.*
3. *La imagen de la región* $K = \{z \in \mathbb{C} : Rez \in \mathbb{R},\ y_0 < Imz < y_1\}$ *es la región* $K' = \{w \in \mathbb{C} : y_0 < Argw < y_1,\ |w| \in \mathbb{R}^+\}$

Demostración.

1. Una recta paralela al eje real tiene por ecuación $z = x + iy_0,\ x \in \mathbb{R}$ entonces

$$w = e^z = e^x\left(cosy_0 + iseny_0\right)$$

por lo que $u = e^x cosy_0,\ v = e^x seny_0$ y al dividir v entre u se tiene $v = (tgy_0)u$ que, cuando $cos(y_0) \neq 0$, representa en el $w-$plano un rayo que parte del origen y forma un ángulo y_0 con el eje u positivo.

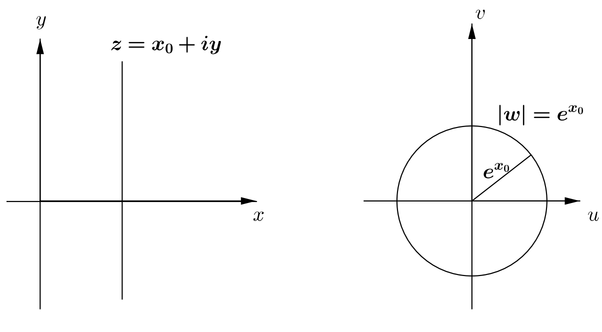


si $cosy_0 = 0$ es decri $y = n\pi$, n en $\mathbb{Z}$ entonces $u = 0$, $v = \pm e^x$ que corresponde a la parte negativa del eje v o a la parte positiva según n sea impar o par.

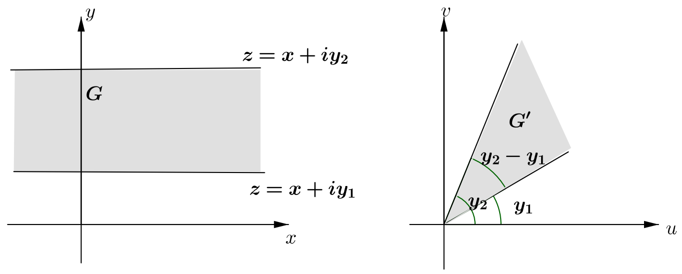
2. Una recta paralela al eje imaginario tiene por ecuación $z = x_0 + iy,\ y \in \mathbb{R}$ entonces

$$w = e^{x_0}(cosy + iseny)$$

por lo que $u = e^{x_0}cosy$, $v = e^{x_0}seny$ y elevando al cuadrado y sumando se obtiene $u^2 + v^2 = e^{2x_0}$ que representa en el $w-$plano una circunferencia de centro en el origen y radio e^{x_0}.

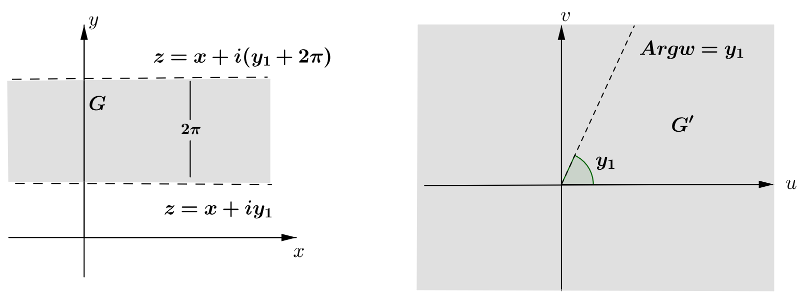


3. Del resultado del inciso 1 se sigue que si en el $z-$plano K es una franja limitada por dos rectas paralelas al eje real separadas una distancia $y_2 - y_1$ entonces la imagen de K en el $w-$plano es una región angular K' limitada por dos rayos que parten del origen con ángulo $y_2 - y_1$



$\square$

En particular, si $y_2 - y_1 = 2\pi$ entonces la imagen de las rectas $z = x + iy_1$ y $z = x + i(y_1 + 2\pi)$ son los rayos $Argw = y_1$ y $Argw = y_1 + 2\pi$ es decir del mismo rayo $Argw = y_1$ por lo que la franja tiene como imagen el plano complejo y si la franja no contiene las rectas frontera entonces su imagen no contiene el rayo $Argw = y_1$



4.1.3. Las funciones trigonométricas

Tratamos en este apartado dos funciones de variable compleja z que se reducen a las funciones reales $f(x) = cosx$, $g(x) = senx$ cuando $z = x$ es real. Las definiciones correspondientes son las siguientes.

Definición **4.2.** *Para $z \in \mathbb{C}$ se define*

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Es claro que estas relaciones definen las funciones $\boldsymbol{f(z) = cosz}$, $\boldsymbol{g(z) = senz}$ que tienen como dominio $\mathbb{C}$ y son uniformes. El siguiente teorema muestra que estas funciones tienen propiedades análogas a las correspondientes funciones reales.

Teorema **4.5.** *Las funciones complejas $f(z) = cosz$ y $g(z) = senz$ satisfacen las siguientes relaciones*

1. *Las funciones $f(z) = cosz$ y $g(z) = senz$ son enteras con $(cosz)' = -senz$ y $(senz)' = cosz$.*
2. *La función $f(z) = cosz$ es par y la función $f(z) = senz$ es impar.*
3. *Las funciones $f(z) = cosz$ y $g(z) = senz$ son periódicas de período fundamental 2π .*
4. $cos^2 z + sen^2 z = 1$
5. $cos\,(z_1 + z_2) = cosz_1 cosz_2 - senz_1 senz_2$ *y* $sen\,(z_1 + z_2) = senz_1 cosz_2 + senz_2 cosz_1$

Demostración.

1. $(cosz)' = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)' = \dfrac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\dfrac{\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)}{2i} = -senz$

2. $sen(-z) = \dfrac{e^{i(-z)} - ie^{-i(-z)}}{2i} = -\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -senz$

3. Para k en $\mathbb{Z}$ se tiene

$$sen(z + 2k\pi) = \frac{e^{i(z+2k\pi)} - e^{-i(z+2k\pi)}}{2i} = \frac{e^{iz}e^{2k\pi i} - e^{-iz}e^{-2k\pi i}}{2i} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = senz$$

4. $cos^2 z + sen^2 z = \left(\dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = \dfrac{e^{2iz} + 2 + e^{-2iz}}{4} - \dfrac{e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}}{4} = 1$

5. Obsérvese que puesto que

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

entonces al multiplicar $senz$ por i y sumar estos resultados se obtiene

$$e^{iz} = cosz + isenz$$

que se conoce como **la fórmula de Euler**.
De la fórmula de Euler se sigue que

$$\begin{aligned} cos\,(z_1 + z_2) + isen\,(z_1 + z_2) &= e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} = (cosz_1 + isenz_1)\,(cosz_2 + isenz_2) \\ &= (cosz_1cosz_2 - senz_1senz_2) + i\,(cosz_1senz_2 + senz_1cosz_2) \qquad (a) \end{aligned}$$

Si en (a) se reemplazan z_1 y z_2 por $-z_1$ y $-z_2$ y se utilizan los resultados del inciso 2 se obtiene

$$cos\,(z_1 + z_2) - isen\,(z_1 + z_2) = (cosz_1cosz_2 - senz_1senz_2) - i\,(senz_1cosz_2 + senz_2cosz_1) \qquad (b)$$

Al sumar (a) y (b) resulta

$$cos\,(z_1 + z_2) = cosz_1cosz_2 - senz_1senz_2.$$

Al restar (a) y (b) se obtiene

$$sen\,(z_1 + z_2) = senz_1cosz_2 + senz_2cosz_1.$$

□

Notese que de estas expresiones es posible obtener las fórmulas usuales de la trigonometría, así por ejemplo si $z_1 = z_2$ entonces se obtiene

$$cos2z = cos^2 z - sen^2 z \quad \text{y} \quad sen2z = 2senzcosz$$

4.1.4. Las funciones hiperbólicas

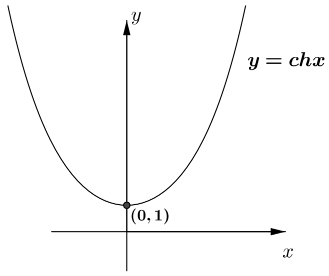
Definición **4.3.** *Para z en $\mathbb{C}$ se definen*

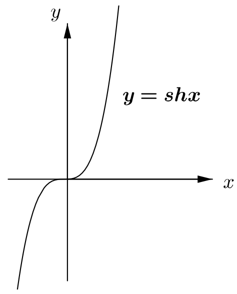
$$chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad y \quad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Obsérvese que estas relaciones definen las funciones de variable compleja $\boldsymbol{f(z) = chz}$ y $\boldsymbol{g(z) = shz}$ las cuales tienen como dominio $\mathbb{C}$, son uniformes y que para $z = x$ real se obtienen las funciones hiperbólicas reales

$$chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{y} \quad shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

cuyas gráficas se muestran a continuación.





y nótese que el rango de $y = chx$ es el intervalo $[1, +\infty)$ y el rango de $y = shx$ es $\mathbb{R}$.

El siguiente resultado ilustra algunas propiedades de estas funciones.

Teorema **4.6.** *Para z en $\mathbb{C}$ se tiene*

1. *Las funciones $f(z) = chz$ y $g(z) = shz$ son enteras con $(chz)' = shz$ y $(shz)' = chz$.*
2. $ch^2z - sh^2z = 1$.
3. $ch(z + 2k\pi i) = chz$ *y* $sh(z + 2k\pi i) = shz$ *para k en $\mathbb{Z}$.*
4. $shiz = isenz$, $chiz = cosz$, $seniz = ishz$, $cosiz = chz$.
5. $ch\,(z_1 + z_2) = chz_1chz_2 + shz_1shz_2$ *y* $sh\,(z_1 + z_2) = shz_1chz_2 + shz_2chz_1$
6. $|cosz| = \sqrt{ch^2y - sen^2x}$ *y* $|senz| = \sqrt{sen^2x + sh^2y}$

Demostración.

1. $(shz)' = \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\right)' = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = chz$

2. $ch^2z - sh^2z = \left(\dfrac{e^z + e^{-z}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^z - e^{-z}}{2}\right)^2 = \dfrac{e^{2z} + 2 + e^{-2z}}{4} - \dfrac{e^{2z} - 2 + e^{-2z}}{4} = 1$

3. $ch(z + 2k\pi i) = \dfrac{e^{z+2k\pi i} + e^{-(z+2k\pi i)}}{2} = \dfrac{e^z e^{2k\pi i} + e^{-z}e^{-2k\pi i}}{2} = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2} = chz$

   Nótese que este resultado indica que las funciones hiperbólicas complejas son periódicas de período fundamental $2\pi i$.

4. Si en las relaciones
$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
   se reemplaza z por iz se tiene
$$cosiz = \frac{e^{-z} + e^z}{2} = chz, \quad seniz = \frac{e^{-z} - e^z}{2i} = i\frac{e^z - e^{-z}}{2} = ishz$$
$$chiz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = cosz, \quad shiz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = isenz$$

5. Si en las relaciones
$$cos\,(z_1 + z_2) = cosz_1cosz_2 - senz_1senz_2 \text{ y } sen\,(z_1 + z_2) = senz_1cosz_2 + senz_2cosz_1$$
   se reemplazan z_1 y z_2 por iz_1 y iz_2 se tiene
$$cosi\,(z_1 + z_2) = cosiz_1cosiz_2 - seniz_1seniz_2 \text{ y } seni\,(z_1 + z_2) = seniz_1cosiz_2 + seniz_2cosiz_1$$
   y al utilizar las relaciones obtenidas en 4, resulta
$$ch\,(z_1 + z_2) = chz_1chz_2 + shz_1shz_2 \quad \text{y} \quad sh\,(z_1 + z_2) = shz_1chz_2 + shz_2chz_1$$

6. Sea $z = x + iy$ entonces

$$cosz = cos(x + iy) = cosxcos(iy) - senxsen(iy) = cosxchy - isenxshy \quad \text{y}$$

$$senz = sen(x + iy) = senxcos(iy) + sen(iy)cosx = senxchy + shycosx$$

por lo que

$$\begin{aligned}|cosz|^2 &= cos^2xch^2y + sen^2xsh^2y = (1 - sen^2x)ch^2y + sen^2xsh^2y \\ &= ch^2y + sen^2x(sh^2y - ch^2y) = ch^2y - sen^2x \quad \text{y} \\ |senz|^2 &= sen^2xch^2y + sh^2ycos^2x = sen^2xch^2y + (1 - sen^2x)sh^2y \\ &= sh^2y + sen^2x(ch^2y - sh^2y) = sh^2y + sen^2x.\end{aligned}$$

□

Nótese que $|cosz|$ y $|senz|$ tienden a $+\infty$ cuando y tiende a $+\infty$ por lo que las funciones $senz$, $cosz$ no son acotadas por módulo.

Algunos aspectos geométricos de las transformaciones $w = senz$ se presentan en el siguiente resultado.

Teorema **4.7.** *Para la transformación $w = senz$ se tiene,*

1. *La imagen de una recta paralela al eje de real es un elipse.*
2. *La imagen de una recta paralela al eje imaginario es la rama de una hipérbola.*

Demostración.

1. La ecuación de una recta paralela al eje real es $z = x + iy_0$, $x \in \mathbb{R}$ por tanto

$$w = senz = sen(x + iy_0) = senxcos(iy_0) + sen(iy_0)cosx = senxchy_0 + ishy_0cosx$$

con lo que

$$u = senxchy_0$$
$$v = cosxshy_0$$

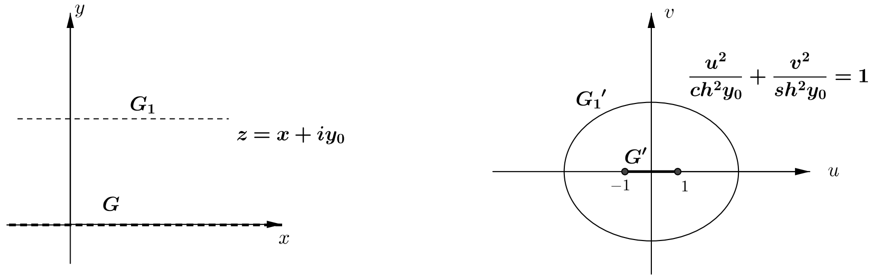
y x en $\mathbb{R}$ son las ecuaciones paramétricas de la curva imagen.
Para eliminar el parámetro x consideramos dos casos, $y_0 = 0$ y $y_0 \neq 0$ con lo cual se tiene:

a - Si $y_0 = 0$ entonces $u = senx$ con x en $\mathbb{R}$ y $v = 0$, es decir $-1 \leq u \leq 1$, $v = 0$ y por tanto la imagen del eje real en el $z-$plano es el intervalo $[-1, 1]$ del eje u en el $w-$plano.

b - Si $y_0 \neq 0$ entonces $\dfrac{u}{chy_0} = senx$ y $\dfrac{v}{shy_0} = cosx$ por lo que elevando al cuadrado esta expresión y sumando resulta

$$\frac{u^2}{ch^2y_0} + \frac{v^2}{sh^2y_0} = 1$$

y así la imagen de una recta paralela al eje real, diferente de este eje, es una elipse con centro en $w = 0$ y semiejes chy_0 y $|shy_0|$.



Obsérvese que si un punto z recorre la recta entonces, su correspondiente imagen w recorre infinitas veces la elipse y si la recta coincide con el eje x la elipse degenera en el intervalo $[-1, 1]$.

2. La ecuación de una recta paralela al eje y es $z = x_0 + iy$, y en $\mathbb{R}$ por tanto

$$w = senz = sen(x_0 + iy) = senx_0cos(iy) + sen(iy)cosx_0 = senx_0chy + ishycosx_0$$

con lo que

$$u = senx_0chy$$
$$v = cosx_0shy$$

y y en $\mathbb{R}$ son las ecuaciones paramétricas de la curva imagen. Para eliminar el parámetro y consideramos tres casos: $x_0 = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$, $x_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ y $x_0 \neq n\pi$ y $x_0 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ con lo que tenemos

a - Si $x_0 = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ entonces $u = 0$, $v = (-1)^n\, shy$, y en $\mathbb{R}$ por lo tanto las rectas paralelas al eje y por los múltiplos de π se transforman en el eje imaginario.

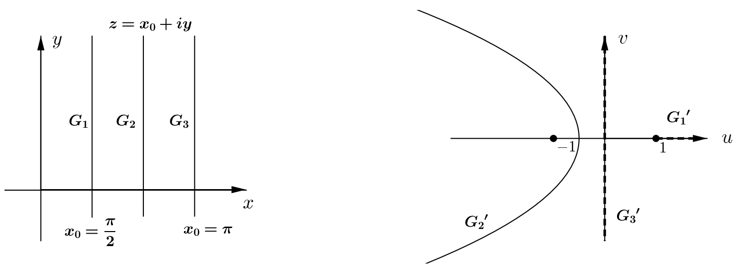
b - Si $x_0 = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ entonces $u = (-1)^n\, chy$, $v = 0$, y en $\mathbb{R}$ es decir $1 \leq u < +\infty$, $v = 0$ si n par, ó $-\infty < u \leq -1$, $v = 0$ si n es impar. Por lo que las rectas de ecuación $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$, k en $\mathbb{Z}$ se transforman en el intervalo $[1, +\infty)$ del eje u y las rectas de ecuación $x = (4k+3)\frac{\pi}{2}$, k en $\mathbb{Z}$ se transforman en el intervalo $(-\infty, -1]$ del eje u.

c - Si $x_0 \neq n\pi$ y $x_0 \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$ entonces $\dfrac{u}{senx_0} = chy$ y $\dfrac{v}{cosx_0} = shy$ con lo que elevando al cuadrado y restando se obtiene

$$\frac{u^2}{sen^2x_0} - \frac{v^2}{cos^2x_0} = 1$$

y por tanto en este caso, una recta paralela al eje imaginario se transforma en una rama de esta hipérbola de la siguiente manera.

- si $senx_0 > 0$ entonces $u = senx_0chy > 0$ y por tanto el punto (u, v) está en la rama derecha de la hipérbola.
- si $senx_0 < 0$ entonces $u = senx_0chy < 0$ y por tanto el punto (u, v) está en la rama izquierda de la hipérbola



□

4.2. Las Funciones elementales multiformes

Las funciones elementales estudiadas en la sección anterior son uniformes pero no inyectivas, por tanto al considerar las transformaciones inversas, estas resultan multiformes. Para poder aplicar a las funciones multiformes los resultados y conceptos obtenidos para funciones uniformes es necesario separar las funciones multiformes en ramas uniformes; esto se logra definiendo las funciones uniformes pero no biyectivas en un dominio de biunicidad. Realizaremos este trabajo para la función raíz $n-$ésima, para la función logaritmo y para las funciones trigonométricas e hiperbólicas inversas nos ocuparemos básicamente de aspectos algebraicos.

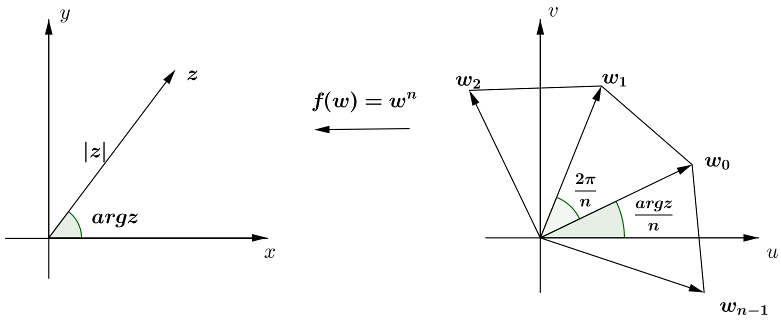
4.2.1. La función raiz n-ésima

Definición **4.4.** *Para z en $\mathbb{C}$ se define, la función* ***raiz n-ésima*** *por la relación*

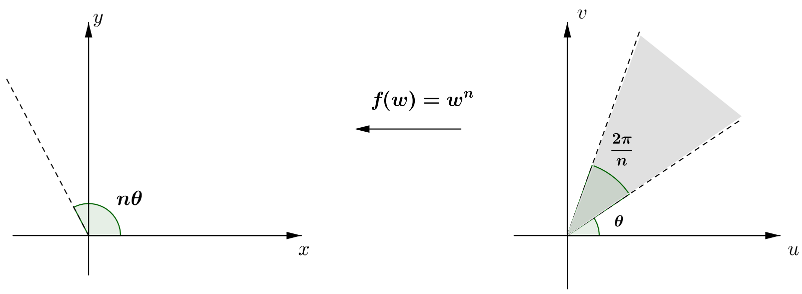
$$w = F(z) = z^{1/n} \quad \textit{si y solo si} \quad z = f(w) = w^n$$

de la sección 4.1.1 de éste capítulo la función $z = f(w) = w^n$ no es uno a uno por lo que la función inversa $w = F(z) = z^{1/n}$ es multiforme de n valores dados por la relación

$$w_k = |z|^{1/n}\left(cos\frac{argz + 2k\pi}{n} + isen\frac{argz + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$



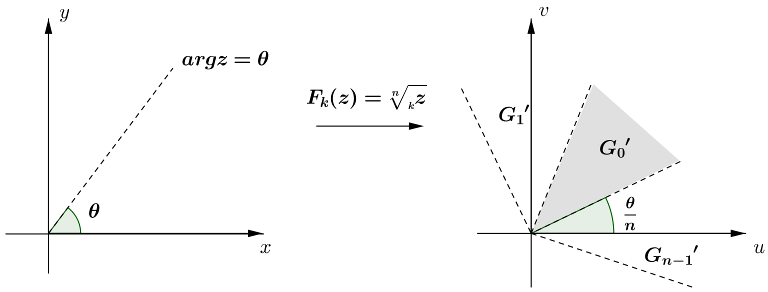
El inciso 4 del teorema 4.1 nos dice que un dominio de biunicidad de la función $f(w) = w^n$ es una región limitada por dos rayos que parten del origen y forman entre si un ángulo $\frac{2\pi}{n}$ y su imagen es el plano complejo excepto el rayo que es la imagen común de los dos rayos considerados anteriormente.



Esto significa que si para la función $F(z) = z^{1/n}$ se toma como dominio K el plano complejo excepto un rayo $argz = \theta$ entonces el rango de esta función es una región G'_k tal que

$$G'_k = \left\{w \in \mathbb{C} : \frac{\theta + 2k\pi}{n} < Argw < \frac{\theta + 2(k+1)\pi}{n}\right\} \quad k = 0, 1, \ldots, (n-1)$$

y puesto que el $z-$plano puede ser dividido en n de estas regiones entonces la función $F(z) = z^{1/n}$ puede separarse en n funciones uniformes $F_k(z) = \sqrt[n]{{}_k z}$ y para cada $z \neq 0$, $F_k(z)$ es el único valor de la raiz $n-$ésima de z que está en la región G'_k. Cada una de estas funciones se llama **Una rama uniforme de la función** $F(z) = z^{1/n}$.



Obsérvese que puesto que la función $f(w) = w^n$ es holomorfa con $f'(w) = nw^{n-1}$ entonces por el teorema de la función inversa, para $z \neq 0$ cada rama uniforme de la función inversa $F(z) = z^{1/n}$ tiene derivada

$$\left(z^{1/n}\right)' = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{nw^{n-1}} = \frac{1}{n\left(z^{1/n}\right)^{n-1}}$$

luego $F(z) = z^{1/n}$ es holomorfa en su dominio $K = \mathbb{C} - \{l\}$ donde l es el rayo tal que $argz = \theta$ pero esta función no es continua en los puntos del rayo l.

Complementariamente nótese que una rama uniforme de la función $F(z) = z^{1/n}$ queda determinada fijando un valor de k, o limitando el valor de $argz$ a un intervalo de longitud 2π, o dando el valor de la función en un punto, así por ejemplo, **la rama principal** de $F(z) = z^{1/2}$ queda definida cuando $k = 0$ o por la condición $-\pi < argz < \pi$ y que esta función no es continua en el semieje $y = 0$, $x \leq 0$. Los puntos $z = 0$ y $z = \infty$ que "unen" este semieje se llaman, **puntos de ramificación** de la función $F(z) = z^{1/n}$.

Ejemplo **4.1.** Definir las dos ramas uniformes de la función $F(z) = z^{1/2}$

Solución. Puesto que los dos valores de la función raíz cuadrada están dados por

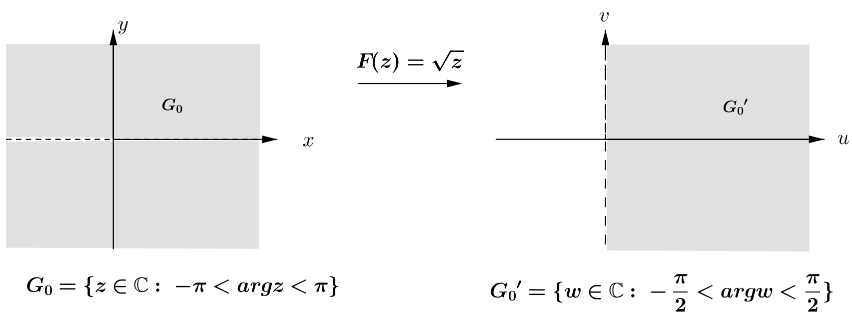
$$w_k = |z|^{1/2}\left(cos\frac{argz + 2k\pi}{2} + isen\frac{argz + 2k\pi}{2}\right), \quad k = 0, 1$$

entonces si $z = re^{i\theta}$, $r = |z|$ y $\theta = argz$ entonces la rama principal de $F(z) = z^{1/2}$ se obtiene para $k = 0$ y la segunda rama para $k = 1$, con lo que resultan las funciones

$$F_0(z) = r^{1/2}\left(cos\frac{\theta}{2} + isen\frac{\theta}{2}\right) = r^{1/2}e^{i\frac{\theta}{2}}$$

$$F_1(z) = r^{1/2}\left(cos\frac{\theta + 2\pi}{2} + isen\frac{\theta + 2\pi}{2}\right) = r^{1/2}e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)}$$

donde $r > 0$ y $-\pi < \theta < \pi$. El dominio y el rango de $F_0(z) = \sqrt{z}$ se ilustran en el siguiente gráfico



Ejemplo **4.2.** Determinar la rama uniforme de la función $F(z) = z^{1/3}$ que satisface la condición $\sqrt[3]{-i} = i$

Solución. Los tres valores de $F(z) = z^{1/3}$ están dados por

$$w_k = |z|^{1/3}\left(cos\frac{argz + 2k\pi}{3} + isen\frac{argz + 2k\pi}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2.$$

la condición $\sqrt[3]{-i} = i$ significa que

$$cos\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + isen\frac{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = i$$

y esto se cumple cuando $k = 1$, por tanto la rama uniforme pedida está definida por

$$F_1(z) = |z|^{1/3}\left(cos\frac{argz + 2\pi}{3} + isen\frac{argz + 2\pi}{3}\right).$$

4.2.2. La función logaritmo natural

Definición **4.5.** *Sea $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, el número complejo w se llama* ***logaritmo natural*** *de z si y solo si z es la exponencial de w. Así:*

$$w = F(z) = Lnz \ \text{ si y solo si } \ z = f(w) = e^w.$$

Nótese que si $z = e^w = e^u(cosv + isenv)$ entonces $|z| = e^u$ y $v = Argz$, así $u = ln|z|$, $v = argz + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ es decir $w = lnz + i(argz + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ y por tanto la relación

$$Lnz = ln|z| + iargz + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$$

define para $z \neq 0$ una función multiforme que se llama la función **logaritmo natural**.

El valor del logaritmo natural para $k = 0$ se llama **el valor principal** del logaritmo, se denota lnz así

$$lnz = ln|z| + iargz$$

y por tanto

$$\begin{aligned} Lnz &= ln|z| + iargz + 2k\pi i \\ &= lnz + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

lo que indica que todo número complejo $z \neq 0$ posee un conjunto infinito de valores de la función logaritmo los cuales están sobre la recta $x = ln|z|$ paralela al eje imaginario y dos de estos valores difieren en un múltiplo entero de $2\pi i$.

El siguiente resultado muestra que para la función multiforme $f(z) = Lnz$ son válidas algunas de las propiedades usuales de logaritmos.

Teorema **4.8.** *Sean z_1 y z_2 números complejos no nulos, entonces:*

1. $Ln(z_1 z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$.
2. $Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Lnz_1 - Lnz_2$.
3. $Ln\left(\frac{1}{z}\right) = -Lnz$.

Demostración. Consideramos la propiedad 2, las restantes se demuestran de forma análoga

2.

$$\begin{aligned} Ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) &= ln\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + iArg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \\ &= (ln|z_1| - ln|z_2|) + i(Argz_1 - Argz_2) \\ &= (ln|z_1| + iArgz_1) - (ln|z_2| + iArg|z_2|) \\ &= Lnz_1 - Lnz_2 \end{aligned}$$

$\square$

Obsérvese que estas igualdades se refieren a conjuntos infinitos de números complejos pero no, por ejemplo, a la rama definida por el valor principal del logaritmo como se ilustra enseguida.

Ejemplo **4.3.** Muestre que para la función $F(z) = lnz$ no es válida la relación $ln(z_1z_2) = lnz_1 + lnz_2$

Solución. Considere los números complejos $z_1 = -1 - \sqrt{3}i$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$ entonces $z_1z_2 = 4i$ con lo que

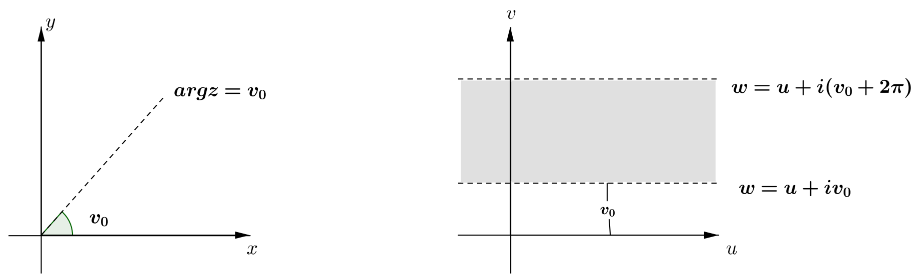
$$ln(z_1z_2) = ln(4i) = ln|4i| + iarg(4i) = ln4 + \frac{\pi}{2}i$$

De otro lado

$$\begin{aligned} lnz_1 + lnz_2 &= ln(-1 - \sqrt{3}i) + ln(-\sqrt{3} - i) \\ &= ln|-1 - \sqrt{3}i| + iarg(-1 - \sqrt{3}i) + ln|-\sqrt{3} - i| + iarg(-\sqrt{3} - i) \\ &= ln2 - \frac{2\pi}{3}i + ln2 - \frac{5\pi}{6}i = ln4 - \frac{3\pi}{2}i \end{aligned}$$

con lo que $ln(z_1z_2) \neq lnz_1 + ln(z_2)$

El teorema 4.2 de la sección 4.1.2 nos dice que un dominio de biunicidad de la función $f(z) = e^w$ es una región limitada por dos rectas paralelas al eje real separadas una distancia 2π y que su imagen es el plano complejo excepto el rayo que es la imagen común de las rectas que definen el dominio.

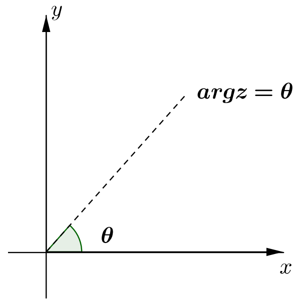


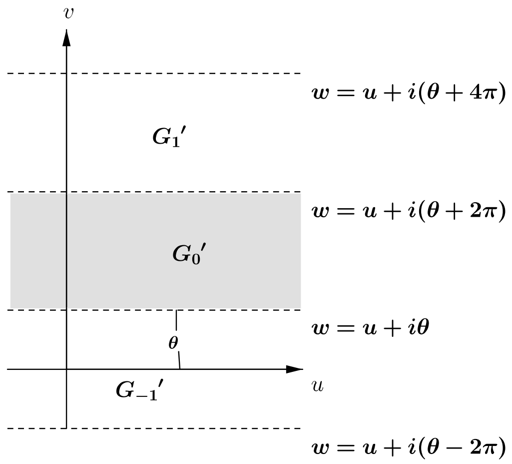
Esto significa que si para la función $F(z) = Lnz$ se toma como dominio el plano complejo excepto un rayo $argz = \theta$ entonces el rango de esta función es una región

$$G'_k = \{w \in \mathbb{C} : Rew \in \mathbb{R},\ \theta + 2k\pi < Imw < \theta + 2(k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

y puesto que el $w-$plano puede dividirse en infinitas de estas regiones entonces la función $F(z) = Lnz$ puede separarse en infinitas funciones uniformes $F_k(z) = Ln_kz$ donde para cada $z \neq 0$ $F_k(z) = Ln_kz$ es el único valor de la función logarítmica que pertenece a la franja G'_k, es decir, Imw es el único valor de Lnz que satisface la relación

$$\theta + 2k\pi < Imw < \theta + 2(k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$





Puesto que la función $f(w) = e^w$ es holomorfa con $f'(w) = e^w$ entonces por el teorema de la función inversa, para $z \neq 0$, cada rama uniforme de la función $F(z) = Lnz$ tiene derivada

$$(Lnz)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{z}$$

y por tanto cada rama de la función $F(z) = Lnz$ es holomorfa en su dominio $K = \mathbb{C} - \{l\}$ donde l es el rayo talque $argz = \theta$ pero esta función no es continua en los puntos del rayo l.

Adicionalmente una rama uniforme de la función $F(z) = Lnz$ queda determinada por una de las tres siguientes maneras

1. Fijando un valor de k
2. Dando el valor de la función en un punto.
3. Limitando el valor de $argz$ a un intervalo de longitud 2π.

Como ilustración, **la rama principal** de $F(z) = Lnz$ se determina por el valor de $k = 0$, por la condición $Ln1 = 0$, ó limitando el valor de $argz$ al intervalo $(-\pi, \pi)$ por lo que esta función no es continua en el semieje real negativo.

4.2.3. Las funciones inversas de las funciones trigonométricas e hiperbólicas.

En este apartado se tratan brevemente algunos aspectos algebraicos de las funciones trigonométricas inversas e hiperbólicas inversas, explícitamente se describe la función $F(z) = Arc\ senz$ y la función $G(z) = Arc\ chz$

4.2.3.1. La función inversa del seno

Definición **4.6.** *Para z en $\mathbb{C}$, se define la* ***función inversa del seno****, denotada $w = Arc\ senz$, por la relación*

$$w = Arc\ senz \quad \text{si y sólo si} \quad z = senw.$$

El siguiente resultado expresa la función $F(z) = Arc\ senz$ en términos de la función logarítmica y proporciona la fórmula usual para el cálculo de su derivada.

Teorema **4.9.** *Sea z un número complejo, entonces*

1. $Arc\ senz = -iLn\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$

2. $(Arc\ senz)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$

Demostración.

1. Puesto que $z = senw = \dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = \dfrac{e^{2iw}-1}{2ie^{iw}}$ se obtiene la ecuación de segundo grado

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

cuyas raíces están dadas por

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$$

por lo que

$$w = -iLn\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right).$$

Obsérvese que la relación

$$Arc\ senz = arg\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right) + 2k\pi - iln\left|iz + \sqrt{1-z^2}\right|$$

muestra que la función $F(z) = Arc\ senz$ es multiforme y que cada $z \in \mathbb{C}$ tiene dos conjuntos infinitos de valores de la función $Arc\ senz$ los cuales se ubican sobre dos rectas paralelas al eje real y simétricas con respecto a este eje.

Si se fija un valor de k en $\mathbb{Z}$ obtenemos una rama uniforme de la función $Arc\ senz$ para la cual calculamos su derivada.

2. Por el teorema de la función inversa y la relación $cos^2w + sen^2w = 1$ se tiene

$$(Arc\ senz)' = \frac{1}{(senw)'} = \frac{1}{cosw} = \frac{1}{\sqrt{1-sen^2w}} = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$$

□

Ejemplo **4.4.** Calcular los valores de $Arc\ seni$.

Solución. Sea $w = Arc\ seni$ entonces $senw = i$ es decir $\dfrac{e^{iw}-e^{-iw}}{2i} = i$, de lo que se obtiene la ecuación

$$e^{2iw} + 2e^{iw} - 1 = 0$$

es decir $e^{iw} = -1 \pm \sqrt{2}$ o sea $w = -iLn(-1 \pm \sqrt{2})$ y por tanto

$$\begin{aligned} Arc\ seni &= arg\left(-1 \pm \sqrt{2}\right) + 2k\pi - iln|-1 \pm \sqrt{2}| \\ &= \begin{cases} arg(\sqrt{2}-1) + 2k\pi - iln(\sqrt{2}-1) \\ arg(-1-\sqrt{2}) + 2k\pi - iln(1+\sqrt{2}) \end{cases} \\ &= \begin{cases} 2k\pi - iln(\sqrt{2}-1) \\ (2k+1)\pi - iln(\sqrt{2}+1), \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

4.2.3.2. La función inversa del coseno hiperbólico

Definición **4.7.** *Para z en $\mathbb{C}$ se define la* ***función inversa del coseno hiperbólico****, denotada $w = Arc\ chz$, por la relación*

$$w = Arc\ chz \quad \text{si y solo si} \quad z = chw.$$

El teorema que se enuncia y demuestra a continuación expresa la función $F(z) = Arc\ chz$ en términos de la función logarítmica y proporciona una expresión para el cálculo de su derivada

Teorema **4.10.** *Sea z un número complejo cualquiera, entonces*

1. $Arc\ chz = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right)$

2. $(Arc\ chz)' = \dfrac{1}{\sqrt{z^2-1}}$

Demostración.

1. De la relación $z = ch\ w = \dfrac{e^w + e^{-w}}{2} = \dfrac{e^{2w}+1}{2e^w}$ se sigue que $e^{2w} - 2ze^w + 1 = 0$ ecuación cuadrática cuya solución es
$$e^w = z + \sqrt{z^2-1}$$
es decir
$$Arc\ chz = Ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right).$$
Nótese que la expresión
$$Arc\ chz = ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right| + iarg\left(z + \sqrt{z^2-1}\right) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$
muestra que la función $F(z) = Arc\ chz$ es multiforme de infinitas ramas uniformes, que una rama de estas ramas se obtiene, por ejemplo, con un valor fijo de k y que cada z en $\mathbb{C}$ tiene dos conjuntos infinitos de valores que se sitúan sobre las rectas $u = ln\left|z + \sqrt{z^2-1}\right|$ y $u = ln\left|z - \sqrt{z^2-1}\right|$ las cuales son paralelas al eje imaginario y simétricas con respecto a este eje.

2. Al fijar una rama uniforme de la función $F(z) = Arc\ chz$, utilizar el teorema de la función inversa y la relación $ch^2w - sh^2w = 1$ se tiene que
$$(Arc\ chz)' = \frac{1}{(chw)'} = \frac{1}{shw} = \frac{1}{\sqrt{ch^2w-1}} = \frac{1}{\sqrt{z^2-1}}$$

□

4.2.4. La función potencia generalizada

De las propiedades de los números reales se conoce que si a es real, entonces
$$x^a = e^{alnx}$$
Una generalización de esta relación a los números complejos, permite la siguiente definición.

Definición **4.8.** *Sea a un número complejo dado, para todo número complejo z, $z \neq 0$ se define* ***la potencia generalizada*** *z^a como*
$$z^a = e^{aLnz}.$$

De la relación anterior se deduce que la función
$$F(z) = z^a = e^{aLnz} = e^{aln|z| + iaargz + 2ak\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$
es una función multiforme de infinitas ramas uniformes y que cada una de ellas se obtiene para un valor de k fijo. La rama uniforme de esta función para $k = 0$ se llama la **rama principal**.

Si la función $F(z) = z^a$ es una de estas ramas entonces por la regla de la cadena
$$(z^a)' = \left(e^{aLnz}\right)' = e^{aLnz}\frac{a}{z} = a\frac{e^{aLnz}}{e^{Lnz}} = ae^{(a-1)Lnz} = az^{a-1}$$
Obsérvese que si en la función $F(z) = z^a$ consideramos los casos particulares $a = n$ en $\mathbb{Z}$ y $a = \frac{m}{n}$ en $\mathbb{Q}$ se tiene:

1. si $a = n$ entonces
$$\begin{aligned} z^n = e^{nlnz} &= e^{nln|z| + i(nargz + 2kn\pi)} \\ &= e^{ln|z|^n + in(argz + 2k\pi)} \\ &= |z|^n e^{in(argz+2k\pi)},\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$
es decir
$$|z^n| = |z|^n \quad \text{y} \quad Argz = nArgz$$
lo cual coincide con los resultados obtenidos en el capítulo 1.

2. si $a = \frac{m}{n}$ entonces análogamente

$$\left|z^{\frac{m}{n}}\right| = |z|^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{|z|^m} \quad \text{y} \quad Argz^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}Argz$$

resultado que coincide con lo ya tratado.

4.2.5. La función exponencial generalizada.

Definición **4.9.** *Sea a un número complejo dado $a \neq 0$, para todo z en $\mathbb{C}$ se define* ***la exponencial de base*** *a por la relación*

$$a^z = e^{zLna}$$

de esta expresión se sigue que la función

$$\begin{aligned} F(z) &= a^z = e^{zLna} \\ &= e^{z(ln|a|+iarga+2k\pi i)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

es una función multiforme y que una rama uniforme de esta función se obtiene con un valor dado de Lna y que la rama principal de la función $F(z) = a^z$ ocurre cuando $k = 0$.

Al considerar una rama uniforme de esta función se deduce, de la regla de la cadena, que

$$(a^z)' = \left(e^{zLna}\right)' = e^{zLna}Lna = a^z Lna.$$

Consideremos la función $z = a^w$ y fijemos un valor para Lna, digamos, $b = ln|a|+iarga+2k_0\pi i, \quad k_0 \in \mathbb{Z}$, entonces se obtiene la rama fija de la función exponencial

$$z = a^w = e^{w(ln|a|+iarga+2k_0\pi i)} = e^{bw}.$$

La inversa de esta rama es la función

$$w = \frac{Lnz}{Lna}$$

lo cual sugiere la siguiente definición.

Definición **4.10.** *Sea a un número complejo dado, $a \neq 0$ y $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$.* ***El logaritmo en base*** *a de z se denota $Log_a z$ y se define por la relación*

$$Log_a z = \frac{Lnz}{Lna}$$

donde el valor de Lna ha sido fijado con anterioridad.

Los siguientes ejemplos ilustran las relaciones anteriores.

Ejemplo **4.5.** En $\mathbb{C}$ el valor de $1^{\sqrt{2}}$ es 1?

Solución. Dado que

$$1^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}Ln1} = e^{\sqrt{2}(ln|1|+iarg1+2k\pi i)} = e^{2\sqrt{2}k\pi i} = cos(2k\sqrt{2}\pi) + isen(2k\sqrt{2}\pi) \neq 1$$

a menos que $k = 0$, así en general $1^{\sqrt{2}} \neq 1$ en $\mathbb{C}$.

Ejemplo **4.6.** Calcular $Log_i(-i+1)$ cuando para $Ln\ i$ se toma su valor principal.

$$\begin{aligned} Log_i(-i+1) &= \frac{Ln\,(-1+i)}{Lni} = \frac{ln|-1+i| + iarg(-1+i+2k\pi i)}{ln|i| + iargi} \\ &= \frac{ln\sqrt{2} + \frac{3\pi}{4}i + 2k\pi i}{\frac{\pi}{2}i} = \frac{3}{2} + 4k - \frac{i}{\pi}ln2, \quad k \text{ en } \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

4.3. Problemas resueltos

Finalizamos este capítulo con la sección de problemas resueltos los cuales tienen el propósito de complementar e ilustrar los conceptos y resultados desarrollados.

Problema **4.1.** Resolver en $\mathbb{C}$ la ecuación $cosz = senz$

Solución. La relación $cosz = senz$ equivale a

$$i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right) = e^{iz} - e^{-iz}$$

es decir

$$(1-i)e^{iz} + (1+i)e^{-iz} = 0$$

o sea

$$e^{2iz} = -\frac{1+i}{1-i} = -i$$

y por tanto

$$2iz = Ln(-i) = ln|-i| + iarg(-i) + 2k\pi i,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

es decir

$$z = \left(k + \frac{1}{4}\right)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Problema **4.2.** Demuestre que $\overline{senz} = sen\overline{z}$

Solución. Sea $z = x + iy$ entonces

$$\begin{aligned} senz &= sen(x+iy) = senxcos(iy) + sen(iy)cosx \\ &= senxchy + ishycosx \end{aligned}$$

por tanto

$$\begin{aligned} \overline{senz} &= senxchy - ishycosx \\ &= senxcos(iy) - sen(iy)cosx \\ &= sen(x-iy) = sen\overline{z} \end{aligned}$$

Problema **4.3.** Demostrar que $Arc\ tgz = \dfrac{i}{2}Ln\dfrac{i+z}{i-z}$

Solución. Puesto que $w = Arc\ tgz$ si y solo si $z = tgw$, entonces

$$z = tgw = \frac{senw}{cosw} = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{i\left(e^{iw} + e^{-iw}\right)} = -i\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

es decir $(z+i)e^{2iw} = i - z$ y por tanto

$$w = \frac{1}{2i}Ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right) = \frac{i}{2}Ln\left(\frac{i-z}{i+z}\right)^{-1}$$

y así;

$$Arc\ tgz = \frac{i}{2}Ln\left(\frac{i+z}{i-z}\right).$$

Problema **4.4.** Hallar la parte real y la parte imaginaria de $cth(2+i)$

Solución. Dado que

$$\begin{aligned}
cth(2+i) &= \frac{ch(2+i)}{sh(2+i)} = \frac{icos(-1+2i)}{sen(-1+2i)} \\
&= \frac{i\,(cos(-1)cos(2i) - sen(-1)sen(2i))}{sen(-1)cos(2i) + sen(2i)cos(-1)} \\
&= \frac{i(cos1ch2 + isen1sh2)}{-sen1ch2 + ish2cos1} \\
&= \frac{(-sen1sh2 + icos1ch2)(-sen1ch2 - ish2cos1)}{sen^2 1ch^2 2 + sh^2 2cos^2 1} \\
&= \frac{\left(sen^2 1sh2ch2 + cos^2 1sh2ch2\right) + i\left(sh^2 2sen1cos1 - ch^2 2cos1sen1\right)}{sen^2 1ch^2 2 + sh^2 2(1 - sen^2 1)} \\
&= \frac{2sh2ch2 - 2isen1cos1}{2sen^2 1 + 2sh^2 2} = \frac{sh4 - isen2}{(1 - cos2) + (ch4 - 1)} \\
&= \frac{sh4 - isen2}{ch4 - cos2}
\end{aligned}$$

entonces la parte real y la parte imaginaria de $ch(2+i)$ son, respectivamente

$$\frac{sh4}{ch4 - cos2} \quad \frac{sen2}{cos2 - ch4}$$

Problema **4.5.** Demuestre que para z y a en $\mathbb{C}$, $z \neq 0$ todos los valores del módulo de z^a forman una progresión geométrica y todos los valores del argumento de z^a forman una progresión aritmética.

Solución. Sea $a = \alpha + i\beta$, α, β en $\mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}
z^a &= e^{(\alpha+i\beta)Lnz} = e^{(\alpha+i\beta)(ln|z|+iargz+2k\pi i)},\ k \in \mathbb{Z} \\
&= e^{(\alpha ln|z| - \beta argz - 2\beta k\pi) + i(\beta ln|z| + \alpha argz + 2k\alpha\pi)},\ k \in \mathbb{Z} \\
&= |z|^\alpha e^{-\beta argz - 2\beta k\pi} e^{i(\beta ln|z| + \alpha argz + 2k\alpha\pi)},\ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

por lo que

$$|z^a| = |z|^\alpha e^{-\beta argz - 2\beta k\pi} \quad \text{y} \quad Arg(z^a) = \beta ln|z| + \alpha argz + 2\alpha k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

y como el cociente entre dos valores consecutivos de $|z^a|$ es $e^{-2\beta\pi}$ y la diferencia entre dos valores consecutivos de $Arg(z^a)$ es $2\alpha\pi$ entonces los valores de $|z^a|$ forman una progresión geométrica de razón $e^{-2\beta\pi}$ y los valores de $Arg(z^a)$ una progresión aritmética de diferencia $2\alpha\pi$.

Problema **4.6.** Hallar la imagen de la región $K = \left\{z = x + iy : 0 < x < \frac{\pi}{2},\ y > 0\right\}$ bajo la transformación $f(z) = senz$

Solución. Geométricamente la región K representa la semifranja infinita limitada por las rectas

$$x = 0,\ x = \frac{\pi}{2},\ y = 0.$$

Puesto que para $z = x + iy$ se tiene que

$$\begin{aligned}
w = senz &= sen(x + iy) = senxcos(iy) + cosxsen(iy) \\
&= senxchy + ishycosx
\end{aligned}$$

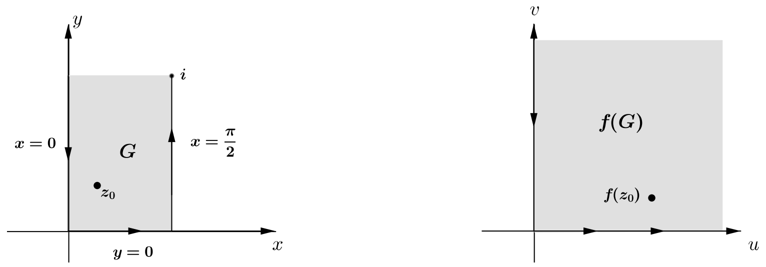
entonces $u = senxchy$ y $v = shycosx$.

Se hallan las imágenes de las rectas que son la frontera de la región.

- Para la recta $x = 0$ se tiene $u = 0$, $v = shy$ y como $y > 0$ entonces $v = shy > 0$ con lo que se obtiene el intervalo $(0, +\infty)$ del eje imaginario.
- Para la recta $x = \frac{\pi}{2}$ se tiene $u = chy$, $v = 0$ y como $y > 0$ entonces $u = chy > 1$ y por tanto se tiene el intervalo $(1, +\infty)$ del eje real.

- Para la recta $y = 0$ resulta $u = senx$, $v = 0$ y como $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entonces $0 < u = senx < 1$ que corresponde al intervalo $(0, 1)$ del eje real.

Puesto que $z = \frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}$ está en el región K y $w = f\left(\frac{\pi}{4} + i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(ch\frac{\pi}{4} + ish\frac{\pi}{4}\right) = u + iv$ punto para el cual $u > 0$ y $v > 0$ entonces la imagen de la región considerada es el primer cuadrante del $w-$plano . La gráfica ilustra esta situación.



Problema **4.7.** Bajo la transformación $f(z) = e^{\pi z}$, hallar la imagen de la región

$$K = \{z = x + iy : |x| < 1,\ |y| < 1\}$$

Solución. La región K representa geométricamente el interior del cuadrado de lado 2 y centro en el origen de coordenadas:

Puesto que para $f(z) = e^{\pi z}$ se tiene que $u = e^{\pi x}cos\pi y$, $v = e^{\pi x}sen\pi y$ entonces, en primer lugar, para hallar la imagen de la región considerado, se determinan las imágenes de los segmentos de recta, frontera de la región. En este sentido se tiene:

a - Para la recta $x = 1$, $-1 < y < 1$ se obtiene $u = e^{\pi}cos\pi y$, $v = e^{\pi}sen\pi y$ relaciones de las que resulta $u^2 + v^2 = e^{2\pi}$ que representa una circunferencia de centro en el origen y radio e^{π}. Obsérvese que cuando y recorre el intervalo $[-1, 1]$ el punto (u, v) recorre la circunferencia en sentido negativo con punto inicial y final $(-e^{\pi}, 0)$.

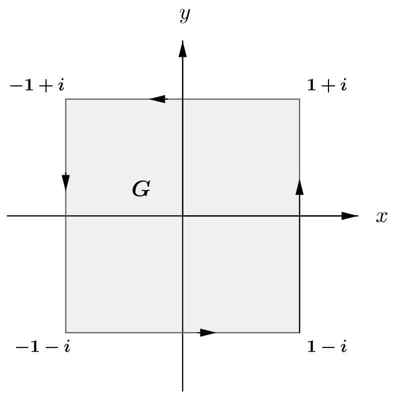
b - Para la recta $x = -1$, $-1 < y < 1$ de manera análoga se obtiene la circunferencia $u^2 + v^2 = e^{-2\pi}$ recorrida en sentido negativo con punto inicial y punto final $(-e^{-\pi}, 0)$.

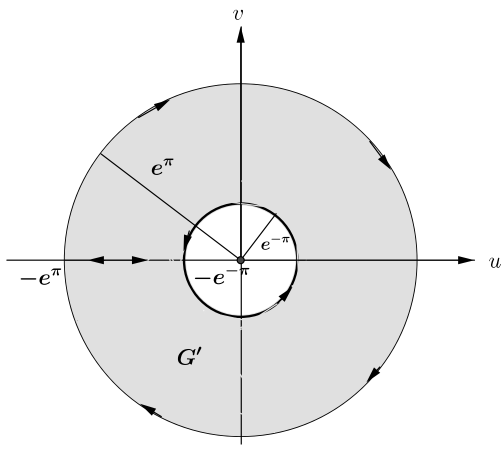
c - Para la recta $y = 1$, $-1 < y < 1$ se obtiene $u = -e^{\pi x}$, $v = 0$ y puesto que la función exponencial es creciente y $-1 < x < 1$ resulta $-e^{\pi} < u < e^{-\pi}$, $v = 0$ que corresponde al intervalo $(-e^{\pi}, e^{-\pi})$ del eje real.

d - Para la recta $y = -1$, $-1 < y < 1$ se obtiene el mismo resultado que en el inciso c.

Puesto que $z = 0$ está en K y $e^{-\pi} < f(0) = 1 < e^{\pi}$ entonces bajo la transformación $f(z) = e^{\pi z}$ el interior del cuadrado dado se transforma en el anillo de radios $e^{-\pi}$ y e^{π} al cual se le ha realizado un corte en el intervalo $(-e^{-\pi}, -e^{\pi})$ del eje real.

La región K, su imagen y el sentido de recorrido de las mismas se muestran en el siguiente gráfico.





Problema **4.8.** Hallar la transformación lineal que transforma el triángulo de vértices 0, 1, i en el triángulo de vértices $1+i$, 0, 2 y bajo la transformación determinar la imagen de la región

$$K = \{z = x + iy : |z - i| < 1,\ y > 1\}$$

Solución. la transformación buscada tiene la forma $f(z) = az + b$ con a y b en $\mathbb{C}$. Puesto que $f(1) = 0$ y $f(i) = 2$ resulta el sistema de ecuaciones

$$a + b = 0$$

$$ai + b = 2$$

del cual se obtiene $a = -(i+1)$, $b = 1 + i$ y por tanto la transformación buscada es

$$w = -(1+i)z + (1+i) = (1+i)(1-z)$$

Geométricamente la región K representa el interior de la mitad superior de la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

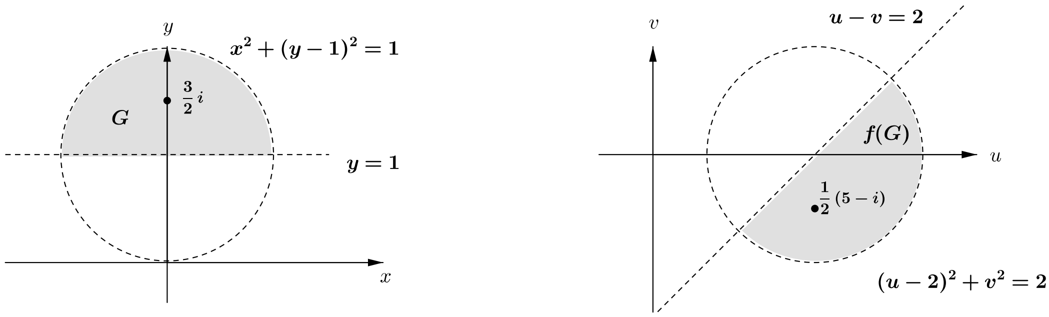
Para hallar la imagen de la región se encuentran, en primera instancia, la imagen de la recta $y = 1$ y la circunferencia $|z - i| = 1$.

Para ello obsérvese en primer lugar que de la relación $w = (1+i)(1-z)$ al despejar z se obtiene $z = \dfrac{(1+i) - w}{1+i}$ y al reemplazar $w = u + iv$, $z = x + iy$ en $w = (1+i)(1-z)$ y separar la parte real y la parte imaginaria resulta $x = \dfrac{2-u-v}{2}$ y $y = \dfrac{u-v}{2}$ por lo tanto se tiene:

a - Al reemplazar $z = \dfrac{(1+i) - w}{1+i}$ en $|z - i| = 1$ resulta $\left|\dfrac{(1+i) - w}{1+i} - i\right| = 1$ la cual se convierte en $|2 - w| = \sqrt{2}$ y por tanto la circunferencia $x^2 + (y-1)^2 = 1$ se transforma en la circunferencia $(u-2)^2 + v^2 = 2$.

b - Al reemplazar $y = 1$ en $y = \dfrac{u-v}{2}$ se obtiene que la recta $y = 1$ se transforma en la recta $u - v = 2$.

Puesto que el punto $z = \frac{3}{2}i$ está en la región K y $f\left(\frac{3}{2}i\right) = \frac{1}{5}(5 - i)$ entonces bajo la transformación $w = (1+i)(1-z)$ la región dada se transforma en la región cuya gráfica se ilustra enseguida.



Problema **4.9.** Bajo la transformación $f(z) = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ hallar la imagen de la región

$$K = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ Imz > 0\}$$

Solución. La región K representa el interior de la semicircunferencia superior de $x^2 + y^2 = 1$. De la relación $w = \dfrac{2z-i}{2+iz}$ al despejar z resulta $z = \dfrac{2w+i}{2-iw}$ y al reemplazar en esta expresión, $z = x + iy$, $w = u + iv$ y realizar las operaciones indicadas se tiene

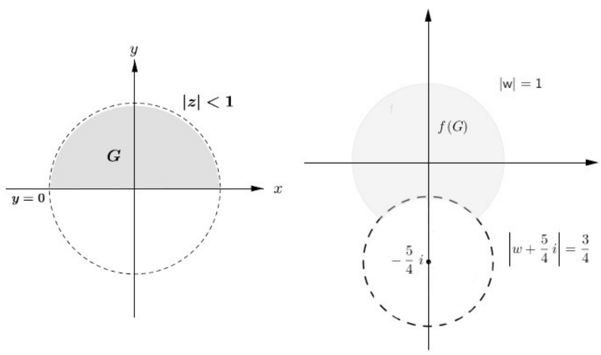
$$x = \frac{u}{(2+v)^2 + u^2}, \quad y = \frac{2u^2 + 2v^2 + 5v + 2}{(2+v)^2 + u^2}$$

en estas circunstancias se tiene:

a - Al reemplazar en $|z| < 1$ el valor $z = \dfrac{2w+i}{2-iw}$ resulta $\left|\dfrac{2w+i}{2-iw}\right| < 1$ es decir $|2w+i| < |2-iw|$ y al poner $w = u+iv$ se obtiene $4u^2 + (2v+1)^2 < (2+v)^2 + u^2$ es decir $u^2 + v^2 < 1$ y por tanto el interior de la circunferencia $|z| < 1$ se transforma en el interior de la circunferencia $|w| < 1$.

b - Al reemplazar la condición $y > 0$ en la relación $y = \dfrac{2u^2 + 2v^2 + 5v + 2}{(2+v)^2 + u^2}$ resulta $2u^2+2v^2+5v+2 > 0$ es decir $u^2 + \left(v + \frac{5}{4}\right)^2 > \frac{9}{16}$, así el semiplano $y > 0$ se transforma en la región $\left|w + \frac{5}{4}i\right| > \frac{3}{4}$

Así la región determinada por las condiciones $|z| < 1$, $y > 0$ se transforma en la región determinada por las condiciones $|w| < 1$ y $\left|w + \frac{5}{4}i\right| > \frac{3}{4}$, lo que se ilustra en la siguiente gráfica.



Problema **4.10.** Demuestre que la rama principal de la función raíz cuadrada $F(z) = z^{1/2}$ es continua en la región

$$K = \{z \in \mathbb{C} :\ -\pi < argz < \pi\}$$

pero no es continua en la parte negativa del eje x

Solución. La rama principal de la función $F(z) = z^{1/2}$está definida como

$$F_1(z) = |z|^{1/2}\left(cos\left(\frac{argz}{2}\right) + isen\left(\frac{argz}{2}\right)\right), \quad -\pi < argz < \pi.$$

Si se llama $r = |z|$ y $\theta = argz$ entonces en forma exponencial esta función puede expresarse como

$$F_1(z) = r^{1/2}e^{i\frac{\theta}{2}}, \quad r > 0, \quad -\pi < argz < \pi$$

y puesto que las función $f_1(r,\theta) = r^{1/2}$, $f_2(r,\theta) = e^{i\frac{\theta}{2}}$ son continuas para $r > 0$ y $-\pi < argz < \pi$ entonces la función $F_1(z) = r^{1/2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ es continua en la región considerada.

Para demostrar que F_1 no es continua en la parte negativa del eje x se consideran los conjuntos

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}, \quad S_2 = \{z \in \mathbb{C} : Imz < 0\}$$

y $z_0 = r_0e^{\pm i\pi}$, $r_0 > 0$ un número cualquiera en el eje real negativo.
Como

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S_1}} F_1(z) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ Imz>0}} F_1(z) = \lim_{(r,\theta)\to(r_0,\pi)} r^{1/2}e^{i\frac{\theta}{2}} = ir_0^{1/2}$$

y

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in S_2}} F_1(z) = \lim_{\substack{z\to z_0\\ Imz<0}} F_1(z) = \lim_{(r,\theta)\to(r_0,-\pi)} r^{1/2}e^{i\frac{\theta}{2}} = -ir_0^{1/2}$$

y estos límites son diferentes, entonces $\lim_{z\to z_0} F_1(z)$ no existe y por tanto la rama principal de la función raíz cuadrada no es continua en puntos del eje real negativo.

4.4. Problemas propuestos

1. Represente en forma exponencial los números complejos i, $-i+1$, $\sqrt{3}-i$, $-1-i$, $-1+\sqrt{3}i$
2. Halle los argumentos principales y los módulos de los números complejos e^{-1+i}, e^{2+3i}, e^{-2+5i}, e^{5-4i}
3. Halle las partes reales e imaginarias de los siguientes números

$$cos(2+i), \quad sen(2i), \quad tg(2-i), \quad ctg\left(\frac{\pi}{4} - iln2\right), \quad th(2+i), \quad cth\left(ln3 + \frac{\pi}{4}i\right).$$

4. Para cada una de las funciones e^z, $cosz$, $senz$, tgz, chz, $cthz$ halle el conjunto de puntos z en $\mathbb{C}$ donde ellas toman
   a. Valores reales
   b. Valores imaginarios puros.
5. Halle todos los valores de z en $\mathbb{C}$ para los cuales:
   a. $|tgz| = 1$
   b. $|thz| = 1$
   c. $senz + cosz = 2$
   d. $senz - cosz = 3$
   e. $2chz + shz = 1$
6. Calcular

$$a.\ (-2)^{\sqrt{2}} \qquad b.\ 2^i \qquad c.\ 1^{-i} \qquad d.\ (3-4i)^{i+1} \qquad e.\ \left(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$$

7. El valor inicial de $Im\, f(z)$ para $z = 2$ se ha tomado igual a cero. El punto z realiza una vuelta completa en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, manteniéndose en la circunferencia de centro en $z = 0$ y volviendo al punto $z = 2$. Si se acepta que $f(z)$ varía de forma contínua durante el movimiento del punto z, señale el valor de $Im\, f(z)$ después de dicha vuelta cuando:

$$a.\ f(z) = 2Lnz \quad b.\ f(z) = Ln\tfrac{1}{z} \quad c.\ f(z) = Lnz - Ln(z+1) \quad d.\ f(z) = Lnz + Ln(z+1)$$

8. Demuestre las siguientes igualdades

   a. $Arc\ tgz = \frac{i}{2}Ln\frac{i+z}{i-z} = \frac{1}{2i}Ln\frac{1+iz}{1-iz}$
   b. $Arc\ chz = Ln(z + \sqrt{z^2-1})$
   c. $Arc\ thz = \frac{1}{2}Ln\frac{1+z}{1-z}$

9. Halle todos los siguientes valores

$$a.\ \ Arc\ sen\frac{1}{2} \qquad b.\ \ Arc\ cos2 \qquad c.\ \ Arc\ tg(1+2i) \qquad d.\ \ Arc\ th(1-i)$$

10. ¿Cuál es el error en el siguiente argumento

$$i = (-1)^{\frac{1}{2}} = \left[(-1)^3\right]^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{3}{2}} = i^3 = -i\ ?$$

11. Halle los valores de las sumas

   a. $1 + cosx + cos2x + \cdots + cosnx$
   b. $cosx + cos3x + cos5x + \cdots + cos(2n-1)x$
   c. $senx + sen2x + sen3x + \cdots + sennx$
   d. $senx + sen3x + sen5x + \cdots + sen(2n-1)x$

12. Hallar la imagen del conjunto $K = \{z = x+iy:\ 0 < x < 1,\ 0 \le y < 1\}$ bajo las transformaciones $f(z) = e^{\pi z}$, $f(z) = e^{\frac{\pi}{2}z}$.

13. Hallar la imagen de la región $K = \left\{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1,\ 0 < argz < \frac{\pi}{2}\right\}$ bajo la función $f(z) = z^2 + 1$

14. Hallar la imagen de la región $K = \{z \in \mathbb{C}:\ 1 < |z| < e,\ 0 < argz < e\}$ bajo la función $f(z) = lnz + 1$

15. Bajo la función $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ hallar la imagen de la región $K = \{z = x+iy:\ x > 0,\ y > 0\}$

16. Bajo la transformación $f(z) = \frac{3+i\,z}{3\,z-i}$ hallar la imagen de la región $K = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1,\ Imz > 0\}$

17. Hallar la imagen de la región $K = \left\{z \in \mathbb{C}:\ 0 < argz < \frac{\pi}{4}\right\}$ bajo la función $f(z) = \frac{z}{z-1}$

18. Bajo la función $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ hallar la imagen de la región $K = \{z \in \mathbb{C}:\ |z| < 1, Imz > 0\}$

19. Bajo la función $f(z) = cosz$ hallar la imagen de las regiones

   a. la red rectangular $x = c$, $y = c$
   b. la semifranja $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$
   c. la semifranja $0 < x < \pi$, $y < 0$
   d. la semifranja $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, $y > 0$

20. Hallar la imagen de las siguientes regiones bajo la función $f(z) = chz$

   a. la red rectangular $x = c$, $y = c$
   b. la franja $0 < y < \pi$
   c. la semifranja $x > 0$, $0 < y < \pi$

21. Cuál es el efecto geométrico de las siguientes transformaciones. ¿Tienen puntos fijos?

$$1.\ \ w = z + B,\ \ B \in \mathbb{C} \qquad 2.\ \ w = Az,\ \ A \in \mathbb{C} \qquad 3.\ \ w = Az + B,\ \ A,\ B \text{ en } \mathbb{C}$$

22. a. Hallar la imagen de la región $y > 1$ bajo la transformación $w = (1-i)z$
    b. Hallar la imagen de la región $x > 0$, $0 < y < 2$ bajo la transformación $w = iz + 1$

Capítulo 5

Integración compleja

El propósito de este capítulo es estudiar el teorema integral de Cauchy y algunas de sus consecuencias, para ello es necesario el concepto de integral de línea. Iniciamos definiendo la integral definida de una función de variable real y de valor complejo y estudiando sus propiedades, a continuación se definen los objetos sobre los cuales se calcula la integral de línea, la definición de esta para luego estudiar el "análogo" del teorema fundamental del cálculo y finalizar con el objetivo básico.

5.1. La integral definida de una función de variable real y valor complejo

Definición **5.1.** *Sea $f(t) = u(t) + i\,v(t)$ una función de variable real t y de valor complejo, continua en el intervalo $[a, b]$, es decir, u y v son funciones reales continuas con t en $[a, b]$.* ***La integral definida de f sobre el intervalo*** $[a, b]$ *se denota como* $\int_a^b f(t)\,d\,t$ *y se define como*

$$\int_a^b f(t)\,d\,t = \int_a^b u(t)\,d\,t + \int_a^b v(t)\,d\,t.$$

Obsérvese que para $a \le t \le b$ por el teorema fundamental del cálculo, para funciones reales de variable real, la función definida por

$$F(t) = \int_a^t f(s)\,d\,s = \int_a^t u(s)\,d\,s + \int_a^t v(s)\,d\,s = U(t) + V(t)$$

es una primitiva de $f(t)$ y por tanto

$$\int_a^b f(t)\,d\,t = U(b) - U(a) + i\,(V(b) - V(a))$$

Ejemplo **5.1.**

$$\int_0^1 (t + 2\,i)^3\,d\,t = \int_0^1 (t^3 - 2t)\,d\,t + i\int_0^1 (6t^2 - 8)\,d\,t = \left(\frac{t^4}{4} - t^2\right)\Big|_0^1 + i\left(2t^3 - 8t\right)\Big|_0^1 = -\frac{3}{4} - 6\,i$$

El siguiente resultado pone de manifiesto que esta integral tiene propiedades semejantes a aquellas de las integrales reales.

Teorema **5.1.** *Sean $f(t) = u_1(t) + v_1(t)$, $g(t) = u_2(t) + v_2(t)$ funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$ y $k = k_1 + i\,k_2$ un número complejo, entonces:*

1. $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

2. $\displaystyle\int_a^b k\,f(t)\,dt = k\int_a^b f(t)\,dt$

3. $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$

Demostración. 1. Como $f(t) = u_1(t) + v_1(t)$ y $g(t) = u_2(t) + v_2(t)$ entonces

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt &= \int_a^b [(u_1(t)+u_2(t)) + i(v_1(t)+v_2(t))]\,dt \\
&= \int_a^b (u_1(t)+u_2(t))\,dt + i\int_a^b (v_1(t)+v_2(t))\,dt \\
&= \int_a^b u_1(t)\,dt + \int_a^b u_2(t)\,dt + i\int_a^b v_1(t)\,dt + i\int_a^b v_2(t)\,dt \\
&= \int_a^b (u_1(t)+i\,v_1(t))\,dt + \int_a^b (u_2(t)+i\,v_2(t))]\,dt \\
&= \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt
\end{aligned}$$

Obsérvese que en las líneas anteriores se ha utilizado la definición de integral definida de una función de variable real y valor complejo así como la aditividad de la integral de funciones reales.

2. La demostración es análoga a la anterior.

3. Supongamos en primer lugar que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \neq 0$ y consideremos el número complejo de módulo 1

$$k = \frac{\left|\int_a^b f(t)\,dt\right|}{\int_a^b f(t)\,dt}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| &= k\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b k\,f(t)\,dt = \int_a^b k\,u_1(t)\,dt + i\int_a^b k\,v_1(t)\,dt \\
&= \int_a^b k\,u_1(t)\,dt \leq \int_a^b |k\,u_1(t)|\,dt = \int_a^b |\,u_1(t)|\,dt \leq \int_a^b |\,f(t)|\,dt
\end{aligned}$$

ya que $\displaystyle\int_a^b k\,v_1(t)\,dt = 0$ y $|u_1(t)| = |Rez(f(t))| \leq |f(t)|$.

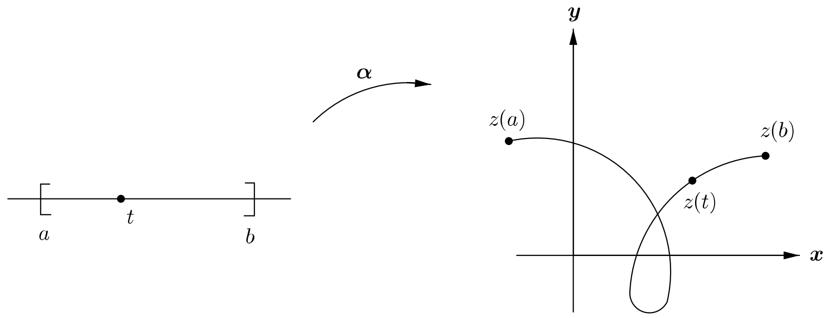
Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = 0$ la propiedad es clara.

□

5.2. Integrales de línea

Definición **5.2.** *Una* ***curva*** *en el plano complejo es la imagen bajo una función continua*

$$\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$$



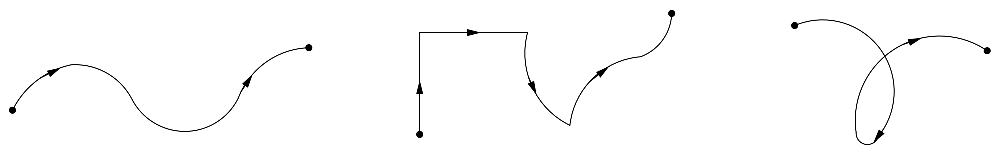
Nótese que esto significa que la curva α puede describirse por una función compleja de variable real de la forma

$$\alpha : z(t) = x(t) + iy(t), \quad a \leq t \leq b$$

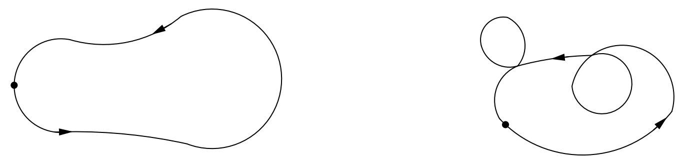
se dice que $z(t)$ es una **parametrización** de la curva α, $z(a)$ es su punto inicial y $z(b)$ su punto final.

- Una curva α es **suave** si la derivada de la parametrización $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ es continua y diferente de cero en el intervalo $[a, b]$
- Una curva α es **suave por partes** (spp) si α consiste de un número finito de curvas suaves unidas por sus extremos.
- Una curva α es **simple** si la función que la define es inyectiva, es decir, si no se autointersecta.
- Una curva α es **cerrada** si su punto inicial y final coinciden.
- Una curva α es de **Jordan** si es cerrada y simple excepto en sus extremos.

La siguiente gráfica ilustra de forma intuitiva estos conceptos.

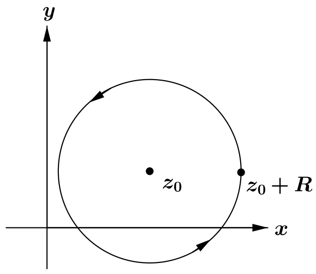


Curva simple y suave *Curva suave por partes* *Curva no simple*



Curva de Jordan *Curva cerrada no simple*

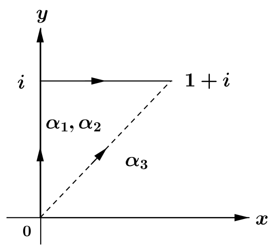
Ejemplo **5.2.** La parametrización $z(t) = z_0 + Re^{it}$ $\;0 \leq t \leq 2\pi$ con $z_0 = x_0 + iy_0$ y $R > 0$ representa la circunferencia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ recorrida en sentido (positivo) contrario a las manecillas del reloj. La curva es suave ya que $z'(t) = iRe^{it} \neq 0$ para $0 \leq t \leq 2\pi$ con el mismo punto inicial y final ya que $z(0) = z(2\pi) = z_0 + R = (x_0 + R) + iy_0$



Ejemplo **5.3.** Las parametrizaciones

$$\alpha_1 : z_1(t) = \begin{cases} it & 0 \leq t \leq 1 \\ (t-1) + i & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \quad \alpha_2 : z_2(t) = \begin{cases} ilnt & 1 \leq t \leq e \\ \left(\frac{t}{e} - 1\right) + i & e \leq t \leq 2e \end{cases} \quad \alpha_3 : z_3(t) = t+it,\ 0 \leq t \leq 1$$

representan las curvas que se muestran en la siguiente figura las cuales tienen el mismo punto inicial 0 y final $1 + i$



Las dos primeras son diferentes parametrizaciones de la misma curva formada por los segmentos de recta que unen 0 con i y luego i con $1 + i$ y la tercera corresponde al segmento de recta que une directamente 0 con $1 + i$.

Nótese que α_1 y α_2 son curvas suaves por partes con

$$z_1'(t) = \begin{cases} i & 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases} \qquad z_2'(t) = \begin{cases} \dfrac{i}{t} & 1 \leq t \leq e \\ \dfrac{1}{e} & e \leq t \leq 2e \end{cases}$$

y α_3 es suave con $z_3'(t) = 1 + i$, $0 \leq t \leq 1$.

Definición **5.3.** *Sean α una curva suave con parametrización $z(t)$, $a \leq z \leq b$ y f una función de variable compleja continua sobre α,* ***la integral de línea de*** f ***a lo largo de*** α *se denota* $\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz$ *y se define como*

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = \int\limits_{a}^{b} f(z(t))z'(t)\,dt$$

Nótese que puesto que la función $f(z(t))z'(t)$ es continua en el intervalo $[a, b]$ la integral de Riemann del lado derecho de la definición anterior siempre existe.

Si α es una curva suave por partes α_1, α_2,..., α_r entonces la integral de línea de f sobre α se obtiene al aplicar la definición anterior a cada una de las curvas α_1, α_2,..., α_r y sumar los resultados, es decir

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{r} \int_{\alpha_k} f(z)\, dz$$

Ejemplo **5.4.** Sea $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$ y α la curva definida como en el ejemplo 5.1 $z(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ entonces

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = \int_{\alpha} \frac{dz}{z - z_0} = \int_{0}^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}} iRe^{it}\, dt = i \int_{0}^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Ejemplo **5.5.** Sea $f(z) = z$ y considere las curvas α_1, α_2, y α_3 definidas como en el ejemplo 5.2, entonces

a -

$$\int_{\alpha_1} f(z)\, dz = \int_{\alpha_1} z\, dz = \int_{0}^{1} iti\, dt + \int_{1}^{2} ((t-1) + i)\, dt = -\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 + \left(\frac{t^2}{2} - t + i\right)\bigg|_1^2 = i$$

b -

$$\int_{\alpha_2} f(z)\, dz = \int_{\alpha_2} z\, dz = \int_{1}^{e} ilnt\frac{i}{t}\, dt + \int_{e}^{2e} \left(\left(\frac{t}{e} - 1\right) + i\right) \frac{1}{e}\, dt = -\frac{1}{2} ln^2 t\bigg|_1^e + \left(\frac{1}{2e^2} t^2 - \frac{1}{e} t + \frac{i}{e} t\right)\bigg|_{2e}^{e} = i$$

c -

$$\int_{\alpha_3} f(z)\, dz = \int_{\alpha_3} z\, dz = \int_{0}^{1} (t + it)(1 + i)\, dt = \int_{0}^{1} (1 + i)^2\, t\, dt = \int_{0}^{1} 2it\, dt = it^2\big|_0^1 = i$$

Obsérvese que los resultados de las partes a y b del ejemplo anterior nos muestran que la integral de línea es independiente de la parametrización de la curva y conjuntamente los resultados de a, b y c nos dicen que el valor de la integral de línea depende únicamente de los extremos de la curva y no de la curva misma. Estudiar bajo que condiciones sucede esto es uno de los objetivos de este capítulo.

El siguiente resultado expresa algunas propiedades de la integral de línea.

Teorema **5.2.** *Sean f y g funciones de variable compleja continuas sobre una curva suave α entonces*

1. *Para todo número complejo c y k se tiene que*

$$\int_{\alpha} (cf(z) + kg(z))\, dz = c \int_{\alpha} f(z)\, dz + k \int_{\alpha} g(z)\, dz.$$

2. $\int_{-\alpha} f(z)\, dz = -\int_{\alpha} f(z)\, dz$ *donde $-\alpha$ denota la curva α recorrida en sentido contrario al recorrido de α.*

3. *Si $f(z)$ es acotada, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$ para todo z sobre α entonces*

$$\left| \int_{\alpha} f(z)\, dz \right| \leq ML$$

donde L es la longitud de α.

Demostración.

2. Una parametrización de $-\alpha$ es $\beta(t) = z(a+b-t)$, $a \leq t \leq b$ entonces

$$\int_{-\alpha} f(z)\,dz = \int_a^b f(z(a+b-t))z'(a+b-t)(-dt)$$

si se llama $u = a+b-t$ entonces $du = -dt$, y si $t = a$, $t = b$ entonces $u = b$ y $u = a$, por tanto

$$\int_{-\alpha} f(z)\,dz = \int_b^a f(z(u))z'(u)\,du = -\int_a^b f(z(u))z'(u)\,du = -\int_{\alpha} f(z)\,dz$$

3. Sea $z(t)$, $a \leq t \leq b$ una parametrización de α y escribamos $\int_{\alpha} f(z)\,dz$ en forma polar, es decir $\int_{\alpha} f(z)\,dz = e^{i\theta}\left|\int_{\alpha} f(z)\,dz\right|$ para algún θ en $\mathbb{R}$, entonces

$$\left|\int_{\alpha} f(z)\,dz\right| = e^{-i\theta}\int_{\alpha} f(z)\,dz = \int_a^b e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\,dt = Re\left(\int_a^b e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\,dt\right)$$

$$= \int_a^b Re\left(e^{-i\theta} f(z(t))z'(t)\,dt\right) \leq \int_a^b |f(z(t))|\,|z'(t)|\,dt = \int_{\alpha} |f(z)|\,|dz| \leq ML$$

ya que $|f(z)| \leq M$ para todo z en α y $\int_{\alpha} |dz| = \int_a^b |z'(t)|\,dt = L$

La parte 1. se deduce de la definición de integral de línea y de las propiedades de la integral de Riemann para variable real. □

Ejemplo **5.6.** Una estimación para el valor de

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\right|$$

se obtiene de la siguiente manera.

Por la desigualdad del triángulo $\left|z^2+1\right| \geq \left||z|^2 - 1\right| \geq 3$ para todo z sobre $|z| = 2$ se tiene que

$$\left|\int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}\right| \leq \int_{|z|=2} \frac{1}{|z^2+1|}\,|dz| \leq \frac{1}{3}\int_{|z|=2} |dz| = \frac{4\pi}{3}$$

5.3. El teorema fundamental de las integrales de línea

El teorema fundamental del cálculo para una función real continua sobre un intervalo establece que dicha función posee una primitiva y proporciona una ”fórmula” para calcular la integral definida de esta función sobre dicho intervalo. En esta sección se desea probar un resultado análogo para la integral de línea de una función de variable compleja que satisface determinadas condiciones.

Definición **5.4.** *Sea $f(z)$ una función de variable compleja continua en una región $K \subseteq \mathbb{C}$. Una función $F(z)$ holomorfa en K es una* ***primitiva*** *de $f(z)$ si $F'(z) = f(z)$ para todo z en K.*

Teorema **5.3.** *Sea f una función continua en una región K y F una primitiva holomorfa de f en K. Si α es una curva suave por partes contenida en K con parametrización $z(t)$, $a \leq t \leq b$ entonces*

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = F(z(b)) - F(z(a))$$

en particular si α es cerrada entonces $\int_{\alpha} f(z)\,dz = 0$.

Demostración. Consideremos en primer lugar que α es una curva suave entonces escribiendo $F = U + iV$ y aplicando la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo para variable real, se tiene

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_\alpha F'(z)\,dz = \int_a^b F'(z(t))\,z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(F(z(t))\right)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U(z(t)) + iV(z(t))\right)\,dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}\left(U(z(t))\right)\,dt + i\int_a^b \frac{d}{dt}\left(V(z(t))\right)\,dt = U(z(t))\big|_a^b + i\,U(z(t))\big|_a^b \\ &= [U(z(b)) + iV(z(b))] - [U(z(a)) + iV(z(a))] = F(z(b)) - F(z(a)).\end{aligned}$$

Si α es una curva suave por partes α_1, α_1,..., α_s con puntos iniciales z_1, z_2,..., z_s respectivamente y z_{s+1} es el punto final de α_s entonces aplicando lo que se acaba de demostrar se tiene que

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{s}\int_{\alpha_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{s}\left(F(z_{k+1}) - F(z_k)\right) = F(z_{s+1}) - F(z_1)$$

Nótese que si α es cerrada entonces $F(z(b)) = F(z(a))$ y por tanto $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$. □

El resultado anterior establece que bajo las hipótesis consideradas el valor de la integral de línea es independiente la trayectoria y que su valor depende únicamente de su punto inicial y final.

Ejemplo **5.7.** Una primitiva holomorfa de la función $f(z) = ch\,az$, $a \neq 0$ es la función $f(z) = \frac{1}{a}sh\,az$ por tanto el valor de $\int_\alpha ch\,az\,dz$ a lo largo de cualquier trayectoria que une $-i$ con i es

$$\left.\frac{1}{a}sh\,az\right|_{-i}^{i} = \frac{2}{a}sh\,ai = \frac{2i}{a}sh\,a$$

Ejemplo **5.8.** Si se aplica el teorema fundamental para calcular $\int_\alpha e^z\,dz$ donde α es el arco de la curva $y = sen x$, $0 \leq x \leq \pi$ se tiene que una primitiva holomorfa de $f(z) = e^z$ es $F(z) = e^z$ por tanto

$$\int_\alpha e^z\,dz = e^z\big|_{(0,0)}^{(\pi,0)} = e^\pi - 1$$

si α es $|z| = 1$ orientada positivamente $\int_\alpha e^z\,dz = 0$ ya que α es cerrada.

5.4. El teorema de Cauchy y resultados relacionados

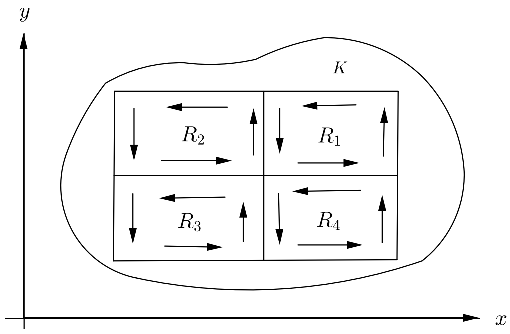
El teorema fundamental proporciona condiciones condiciones para garantizar que $\int_\alpha f(z)\,dz = 0$ cuando α es una curva cerrada suave por partes, para ello se requiere que f sea α la derivada continua de una función holomorfa F en una región K. En esta sección se muestra que este resultado se mantiene cuando f es holomorfa y α es una curva cerrada cualquiera en una región K simplemente conexa. El siguiente resultado es necesario para la demostración del teorema integral de Cauchy.

5.4.1. El teorema de Cauchy-Goursat.

Teorema **5.4.** *Sea f una función holomorfa en una región K y R un rectángulo contenido en K cuyos lados son paralelos a los ejes coordenados. Si α es la frontera de R entonces*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = 0$$

Demostración. Se divide el rectángulo R en cuatro subrectángulos congruentes R_i con frontera α_i, $i = 1, 2, 3, 4$ de manera que tanto R como R_i estén orientados positivamente.



Puesto que $\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = \sum\limits_{s=1}^{4} \int\limits_{\alpha_s} f(z)\,dz$ entonces por la desigualdad triangular

$$\left|\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz\right| \leq \sum_{s=1}^{4} \left|\int\limits_{\alpha_s} f(z)\,dz\right| \leq 4\left|\int\limits_{\alpha_R} f(z)\,dz\right|$$

para algún rectángulo R_k con frontera α_R.
Si se denota R_k con $R^{(1)}$, α_R con $\alpha^{(1)}$, $J_1 = \left|\int\limits_{\alpha^{(1)}} f(z)\,dz\right|$ y $J = \left|\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz\right|$ entonces $J \leq 4J_1$ continuando indefinidamente este proceso se obtiene una sucesión anidada de subrectángulos

$$R \supset R^{(1)} \supset \ldots \supset R^{n} \supset R^{n+1} \supset \ldots$$

tales que $J_n \leq 4J_{n+1}$ en donde $J_n = \left|\int\limits_{\alpha^{(n)}} f(z)\,dz\right|$ y $\alpha^{(n)}$ es la frontera del rectángulo $R^{(n)}$ por tanto

$$J \leq 4^n J_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Si se denota con L el perímetro de R y con L_n el perímetro de $R^{(n)}$ entonces puesto que $L_1 = \frac{1}{2}L$, $L_2 = \frac{1}{2}L_1$, se sigue inductivamente que $L_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n L$, $n = 1, 2, \ldots$
Por una extensión del teorema de Cantor existe $z_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} R^{(n)}$ luego $z_0 \in R$ y así f es holomorfa en z_0, por tanto $f(z)$ puede expresarse como

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + h(z)(z - z_0) \text{ donde } \lim_{|z-z_0|\to 0} h(z) = 0$$

luego

$$\int\limits_{\alpha^{(n)}} f(z)\,dz = f(z_0)\int\limits_{\alpha^{(n)}} dz + f'(z_0)\int\limits_{\alpha^{(n)}} (z - z_0)\,dz + \int\limits_{\alpha^{(n)}} h(z)(z - z_0)\,dz.$$

Por el teorema fundamental $\int\limits_{\alpha^{(n)}} dz = 0$ y $\int\limits_{\alpha^{(n)}} (z - z_0)\,dz = 0$ de manera que

$$J_n = \left|\int\limits_{\alpha^{(n)}} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{\alpha^{(n)}} h(z)(z - z_0)\,dz\right| \leq \max_{z\in\alpha^{(n)}} |h(z)(z - z_0)|\, L_n \leq h_n \max_{z\in\alpha^{(n)}} |z - z_0|\, L_n$$

donde $h_n = \max\limits_{z\in\alpha^{(n)}} |h(z)|$.
Como z, z_0 están en $R^{(n)}$ entonces $|z - z_0| \leq \frac{L_n}{2}$ de manera que $J_n \leq \frac{{L_n}^2}{2}h_n$ y así

$$J \leq 4^n J_n \leq \frac{h_n}{2} 4^n {L_n}^2 \leq \frac{h_n}{2} L^2$$

y puesto que cuando n tiende a ∞ se tiene que $|z - z_0|$ tiende a 0 entonces $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$, por tanto dado $\epsilon > 0$ se puede tomar n suficientemente grande tal que

$$\left|\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz\right| \leq \frac{h_n}{2}L^2 < \epsilon$$

y así $\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = 0$ □

5.4.2. El teorema integral de Cauchy

Definición **5.5.** *Sea K una región en el plano complejo. K es* ***simplemente conexa*** *si toda curva de Jordan suave por partes contenida en K tiene en su interior únicamente puntos de K.*

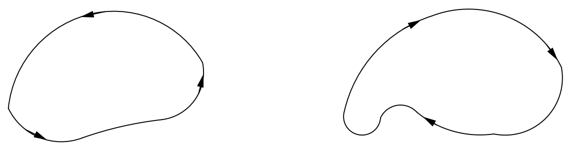
Ejemplo **5.9.** Las regiones $K = \mathbb{C} - \{0\}$ y $K = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < b,\ a, b > 0\}$ no son simplemente conexas. La región $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R,\ R > 0,\ z_0 \in \mathbb{C}\}$ es simplemente conexa.

Obsérvese que la definición 5.5 intuitivamente nos dice que una región es simplemente conexa si no posee huecos. Una región simplemente conexa se dice que es 0-conexa, una región con un hueco es 1-conexa, con dos huecos es 2-conexa y en general con varios huecos es multiplemente conexa.

Una propiedad de las curvas de Jordan intuitivamente obvia pero difícil de demostrar se conoce como "El teorema de la curva de Jordan" y es la siguiente.

Teorema **5.5.** *Una curva de Jordan divide el plano complejo ampliado en dos regiones simplemente conexas que tienen a la curva como su frontera*

La región que contiene el punto al infinito se llama el **exterior** de la curva, la otra región es el **interior**. Una curva de Jordan está **parametrizada en sentido positivo** si al recorrer la curva su interior siempre se mantiene a la izquierda.



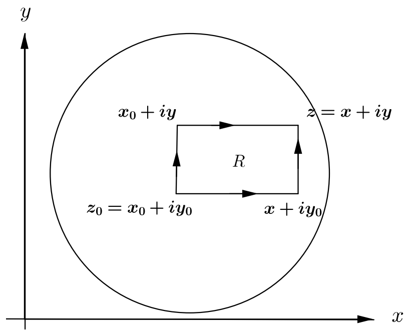
Orientación positiva *Orientación negativa*

Teorema **5.6.** *Sea f una función holomorfa en una región simplemente conexa K entonces para toda curva de Jordan α suave por partes contenida en K se tiene que*

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = 0$$

Demostración. Sea $K = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ y definamos $F(z) = \int\limits_{\alpha_z} f(z)\,dz$ donde α_z es la curva que une z_0 con z a través de un segmento horizontal y uno vertical. Si α'_z es la curva que une z_0 con z a lo largo de un segmento vertical y un segmento horizontal entonces $\alpha_z - \alpha'_z$ es la frontera de un rectángulo R contenido en K luego por el teorema de Cauchy-Goursat

$$\int\limits_{\alpha_z - \alpha'_z} f(z)\,dz = 0 \qquad \text{y así} \qquad \int\limits_{\alpha_z} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha'_z} f(z)\,dz.$$



Puesto que

$$F(z) = \int_{\alpha_2} f(z)\,dz = \int_{x_0}^{x} f(t+iy_0)\,dt + i\int_{y_0}^{y} f(x+it)\,dt$$

$$F(z) = \int_{\alpha_2'} f(z)\,dz = i\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)\,dt + \int_{x_0}^{x} f(t+iy)\,dt$$

se sigue que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} f(x+it)\,dt = if(x+iy) = if(z) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} f(t+iy)\,dt = f(x+iy) = f(z)$$

así $\frac{\partial F}{\partial x} = f(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}$ es decir F satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann y puesto que f es continua en K entonces $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ son continuas en K luego por el teorema 3.2.2 F es diferenciable en K con $F'(z) = f(z)$ en K así que por el teorema fundamental

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = 0.$$

□

Nótese que esta demostración es válida cuando la región K es un círculo, una formulación más general y la correspondiente demostración del teorema integral de Cauchy, basada en el concepto de homotopía se puede encontrar en [1].

Ejemplo **5.10.** Calcular $\int_{\alpha} f$ donde $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^2-6z}$ donde α está dada por la parametrización

$$z(t) = 2 + e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

α corresponde a la circunferencia de centro $(2,0)$ y radio 1 recorrida en sentido positivo, f es holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en $z=0$ y $z=6$ que no están en el interior de α ni sobre su frontera, así por el teorema integral de Cauchy se concluye que $\int_{\alpha} f = 0$.

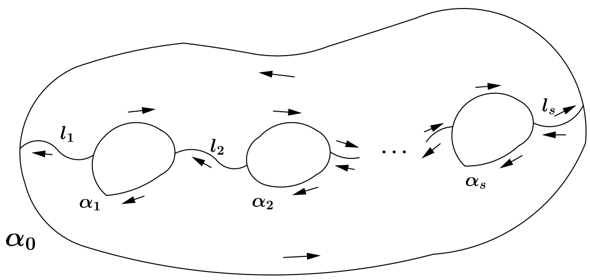
5.4.3. El teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas.

En algunas ocasiones es necesario considerar regiones que no son simplemente conexas, por ejemplo para calcular integrales en las cuales el integrando no es analítico en más de un punto en el interior de la curva. En estos casos es útil el siguiente resultado que se conoce como el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas.

Teorema **5.7.** *Sea α_0 una curva de Jordan suave por partes tal que en su interior contiene las curvas de Jordan suaves por partes α_1, α_2,...,α_s disjuntas dos a dos, ninguna de las cuales está contenida en el interior de la otra.*
Si f es una función holomorfa en la región K formada por los puntos en el interior de α_0 pero no en los interiores de α_1, α_2,...,α_s entonces

$$\int_{\alpha_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{s} \int_{\alpha_k} f(z)\,dz.$$

Demostración. Sean $l_1, l_2, \ldots, l_s$ arcos que unan respectivamente, α_0 con α_1, α_1 con α_2, y por último α_s con α_0 y tales que formen dos curvas de Jordan suaves por partes y que determinen



dos subregiones de K simplemente conexas entonces por el teorema de Cauchy la integral de f sobre estas curvas; cada una de ellas recorrida en sentido positivo tiene como valor 0. Pero el recorrido sobre estas dos curvas equivale al recorrido de α_0 en sentido positivo, al recorrido de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ es sentido negativo y al recorrido de $l_1, l_2, \ldots, l_s$ en direcciones opuestas por lo que las integrales sobre los arcos de $l_1, l_2, \ldots, l_s$ se cancelan, así que que

$$\int_{\alpha_0 - \sum_{k=1}^{s} \alpha_k} f(z)\,dz = 0 \quad \text{es decir} \quad \int_{\alpha_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{s} \int_{\alpha_k} f(z)\,dz.$$

□

El razonamiento anterior es tomado de [3], pag 79, y en el debe observarse que se tienen afirmaciones que aunque intuitivamente son claras, formalmente requieren una demostración la cual para nuestros propositos no es necesaria.

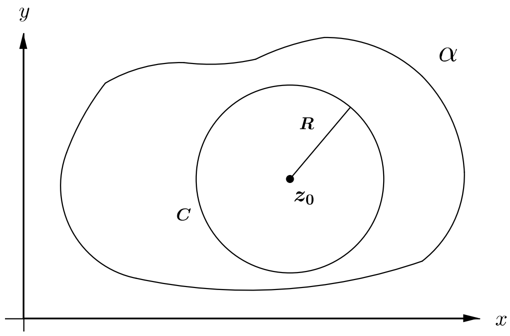
5.4.4. La formula integral de Cauchy

El resultado del siguiente teorema expresa el hecho de que los valores de una función holomorfa en el interior de una curva de Jordan están determinados por los valores de la función sobre la curva. En la práctica este resultado se utiliza para calcular una integral de línea por medio de la evaluación de una función.

Teorema **5.8.** *Sea f una función holomorfa en una región simplemente conexa K y α una curva de Jordan suave por partes contenida en K entonces para todo punto z_0 en el interior de α se tiene que*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz.$$

Demostración. Sea $R > 0$ tal que el círculo definido por $|z - z_0| < R$ esté contenido en el interior de α



y consideremos la función
$$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}$$
entonces g es holomorfa en la región interior a α pero exterior a la circunferencia C de ecuación $|z-z_0|=R$ entonces por el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas
$$\int_\alpha g(z)\,dz=\int_C g(z)\,dz.$$
Puesto que f es diferenciable en z_0 entonces f puede representarse como
$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+h(z)(z-z_0)\ \text{ donde }\ \lim_{z\to z_0}h(z)=0,$$
es decir
$$g(z)=\frac{f(z)}{z-z_0}=\frac{f(z_0)}{z-z_0}+f'(z_0)+h(z)\ \text{ donde }\ \lim_{z\to z_0}h(z)=0,$$
por tanto
$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=f(z_0)\int_C\frac{dz}{z-z_0}+f'(z_0)\int_C dz+\int_C h(z)\,dz,$$
pero $\int\limits_C\dfrac{dz}{z-z_0}=2\pi i$ y $\int\limits_C dz=0$ por lo que
$$\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-2\pi if(z_0)=\int_C h(z)\,dz,$$
por tanto
$$\left|\int_C\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz-2\pi if(z_0)\right|\leq\int_C|h(z)||dz|\leq\max_{|z-z_0|=R}|h(z)|2\pi R.$$
Puesto que $\lim\limits_{z\to z_0}h(z)=0$ entonces existe $\delta>0$ tal que $\max\limits_{|z-z_0|=R<\delta}|h(z)|\leq 1$ por tanto dado $\epsilon>0$ si se toma $R<\text{mín}\left(\delta,\frac{\epsilon}{2\pi}\right)$ entonces $\left|\int\limits_C\frac{f(z)}{z-z_0}-2\pi if(z_0)\right|<\epsilon$ y por tanto
$$\int_\alpha\frac{f(z)}{z-z_0}\,dz=2\pi if(z_0).$$
$\square$

Ejemplo **5.11.** Calcular $\int\limits_\alpha\frac{senz}{z^2-z}\,dz$ donde α está dada por $z(t)=1+\frac{1}{2}e^{it}$, $0\leq t\leq 2\pi$.

Como α representa la circunferencia de centro en el punto $(1,0)$ y radio $\frac{1}{2}$ y la función $f(z) = \frac{senz}{z}$ es holomorfa sobre y en el interior de α entonces

$$\int_{\alpha} \frac{senz}{z^2 - z}\, dz = \int_{\alpha} \frac{\frac{senz}{z}}{z-1}\, dz = 2\pi i \left.\frac{senz}{z}\right|_{z=1} = 2\pi i sen1$$

5.4.5. La fórmula de Cauchy para derivadas

Si consideramos la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

y derivamos formalmente con respecto a z_0 dentro de la integral para calcular $f'(z_0)$, $f''(z_0)$ y $f'''(z_0)$ se obtiene

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\, dz$$

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\, dz$$

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^4}\, dz$$

lo que sugiere el siguiente resultado cuya demostración omitimos pero puede consultarse por ejemplo en [3] pag 97.

Teorema **5.9.** *Sea f una función holomorfa en un región simplemente conexa K y α una curva de Jordan suave por partes contenida en K entonces para todo punto z_0 en el interior de α se tiene que*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Ejemplo **5.12.** Calcular $\int_{\alpha} \frac{sen\pi z}{(z^1-1)^2}\, dz$ donde α es la circunferencia $|z - 1| = 1$.

La función $g(z) = \dfrac{sen\pi z}{(z^2 - 1)^2}$ no es holomorfa en los puntos $z = 1$, $z = -1$ de los cuales únicamente el punto $z = 1$ está en el interior de α. El denominador $(z^2 - 1)^2$ sugiere utilizar la fórmula de Cauchy para derivadas para lo cual reescribimos la función g en la forma $g(z) = \frac{f(z)}{(z-1)^2}$ donde $f(z) = \frac{sen\pi z}{(z+1)^2}$ la cual es holomorfa sobre y en el interior de α por tanto al aplicar el teorema de Cauchy para derivadas se obtiene

$$\int_{\alpha} \frac{sen\pi z}{(z^2 - 1)^2}\, dz = \int_{\alpha} \frac{f(z)}{(z - 1)^2}\, dz = 2\pi i f'(1).$$

Como $f'(z) = \dfrac{\pi (z+1) cos\pi z - 2 sen\pi z}{(z+1)^3}$ entonces $f'(1) = -\dfrac{\pi}{4}$ y así

$$\int_{\alpha} \frac{sen\pi z}{(z^2 - 1)^2}\, dz = -\frac{\pi^2 i}{4}.$$

Nótese que el teorema de Cauchy para derivadas nos dice que que una función holomorfa posee derivadas de todos los ordenes y que por tanto la derivada de una función holomorfa es también una función holomorfa. Esta observación se utiliza para demostrar el recíproco del Teorema de Cauchy que se conoce como el Teorema de Morera cuya demostración puede consultarse en [3], pag 83, y que explícitamente se enuncia a continuación.

Teorema **5.10.** *Si f es una función continua en una región simplemente conexa K y para toda curva de Jordan suave por partes contenida en K se satisface que*

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = 0$$

entonces f es holomorfa en K.

5.5. Problemas resueltos

Como es usual finalizamos este capítulo con una sección en la cual se resuelven algunos problemas que sirven para ilustrar, en mayor medida, la teoría tratada y para mostrar algunas de las técnicas que se pueden utilizar en la resolución de los mismos.

Problema **5.1.** Calcular $\int_{\alpha} \overline{z}\,dz$ a lo largo de las siguientes curvas definidas en el intervalo $0 \leq t \leq 1$.

a - Qué representa α en cada caso?

b - $\alpha(t) = i + it$

c - $\alpha(t) = e^{-\pi i t}$

d - $\alpha(t) = e^{\pi i t}$

e - $\alpha(t) = 1 + it + t^2$

Solución. Nótese que el único medio para calcular estas integrales es utilizar la definición de integral de línea por tanto en cada caso se tiene:

b - α representa el segmento de recta que une los puntos 1 y $1 + i$ y obtenemos

$$\int_{\alpha} \overline{z}\,dz = \int_0^1 (1 - it)i\,dt = \int_0^1 (i + t)\,dt = \left(it + \frac{1}{2}t^2\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} + i.$$

c - α representa la semicircunferencia inferior de $|z| = 1$ que une 1 con -1 y obtenemos

$$\int_{\alpha} \overline{z}\,dz = \int_0^1 e^{\pi i t}\left(-\pi i e^{-\pi i t}\right)\,dt = -\pi i \int_0^1 dt = -\pi i$$

d - α representa la semicircunferencia superior de $|z| = 1$ que une 1 con -1 y se tiene

$$\int_{\alpha} \overline{z}\,dz = \int_0^1 e^{-\pi i t}\left(\pi i e^{\pi i t}\right)\,dt = \pi i \int_0^1 dt = \pi i$$

e - α representa el arco de parábola $x = 1 + y^2$ que une $(1, 0)$ con $(2, 1)$ y se tiene

$$\int_{\alpha} \overline{z}\,dz = \int_0^1 (1 + t^2 - it)(i + 2t)\,dt = \int_0^1 (i + 3t - it^2 + 2t^3)\,dt = \left(it + \frac{3}{2}t^2 - \frac{i}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^4\right)\Big|_0^1 = 2 + \frac{2}{3}i$$

Problema **5.2.** Evaluar $\int_{\alpha} y\,dz$ en los siguientes casos

a - α es el segmento de recta que une 1 con i

b - α es el arco de la circunferencia $|z| = 1$ en el primer cuadrante que une 1 con i

c - α está formado por los segmentos de recta sobre los ejes coordenados que unen 1 con i

d - ¿Por qué estos resultados no contradicen el Teorema Fundamental?

Solución.

a - Una parametrización de α es $z(t) = (1-t) + it$, $0 \leq t \leq 1$ por tanto al aplicar la definición de integral de línea se tiene

$$\int_\alpha y\,dz = \int_0^1 t(-1+i)\,dt = (-1+i)\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(-1+i)$$

b - Una parametrización de α es $z(t) = e^{it} = cost + isent$, $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ por tanto

$$\int_\alpha y\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sent\left(ie^{it}\right)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-sen^2 t + isentcost\right)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{cos2t-1}{2} + \frac{i}{2}sen2t\right)\,dt$$

$$= \left(\frac{1}{4}sen2t - \frac{1}{2}t - \frac{i}{4}cos2t\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{\pi}{4} + \frac{i}{2}$$

c - Una parametrización de α es

$$z(t) = \begin{cases} -t & -1 \leq t \leq 0 \\ it & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

por lo tanto

$$\int_\alpha y\,dz = \int_0^1 t(idt) = \frac{i}{2}\bigg|_0^1 = \frac{i}{2}$$

d - Nótese que las curvas consideradas en los incisos anteriores poseen los mismos puntos iniciales y finales y los resultados son diferentes, esto no contradice el teorema fundamental ya que la función $f(z) = y$ no es la derivada de una función holomorfa en $\mathbb{C}$.

Problema **5.3.** Calcular $\int_\alpha \frac{dz}{\sqrt{z}}\,dz$ donde

a - α es $|z| = 1$, $y \geq 0$ y $\sqrt{1} = -1$

b - α es $|z| = 1$ y $\sqrt{-1} = i$

Solución.

a - La función $f(z) = \sqrt{z}$ es multiforme con dos ramas uniformes dadas por

$$\sqrt{z} = \begin{cases} |z|^{\frac{1}{2}}\left(cos\frac{argz}{2} + isen\frac{argz}{2}\right) & k=0 \\ |z|^{\frac{1}{2}}\left(cos\left(\frac{argz}{2}+\pi\right) + isen\left(\frac{argz}{2}+\pi\right)\right) & k=1 \end{cases}$$

La condición $\sqrt{1} = -1$ se satisface cuando $k = 1$ por lo tanto la rama considerada es

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}}\left(cos\left(\frac{argz}{2}+\pi\right) + isen\left(\frac{argz}{2}+\pi\right)\right)$$

Por el teorema fundamental

$$\int_\alpha \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_1^{-1} = 2(\sqrt{-1} - \sqrt{1})$$

y como $\sqrt{-1} = cos\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}+\pi\right) = -i$ entonces

$$\int_\alpha \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(-i+1) = 2(1-i).$$

Alternativamente: Una parametrización de α es $z = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$, $\sqrt{z} = e^{-\left(\frac{t}{2}+\pi\right)}$, $dz = ie^{it}\,dt$ entonces

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_{0}^{\pi} e^{-\left(\frac{t}{2}+\pi\right)i} ie^{it}\,dt = ie^{-\pi i}\int_{0}^{\pi} e^{\frac{it}{2}}\,dt = -2e^{\frac{it}{2}}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= -2\left(\left(cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = 2(1-i).$$

b - La rama uniforme de la función $f(z) = \sqrt{z}$ que cumple la condición $\sqrt{-1} = i$ se obtiene cuando $k = 0$ por tanto

$$\sqrt{z} = |z|^{\frac{1}{2}}\left(cos\frac{argz}{2} + isen\frac{argz}{2}\right)$$

Por el teorema fundamental

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z}\Big|_{z=-1\ (inicial)}^{z=-1\ (final)}$$

Para $z = -1$ inicial, $\sqrt{-1} = i$ y para $z = -1$ final, su argumento; al recorrer $|z| = 1$ completamente, ha variado en 2π por tanto

$$\sqrt{-1} = cos\left(\frac{arg(-1)}{2} + \pi\right) + isen\left(\frac{arg(-1)}{2} + \pi\right)$$

$$= cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2} = -i$$

Por tanto

$$\int_{\alpha} \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2(-i-i) = -4i$$

Problema **5.4.** Demostrar que

$$\int_{0}^{T} e^{at}cosbt\,dt = \frac{e^{aT}\left(acosbT + bsenbT\right) - a}{a^2+b^2}$$

integrando la función $f(z) = e^z$ a lo largo del segmento de recta que une 0 con $(a+ib)T$.

Solución. La función $f(z) = e^z$ es continua en $\mathbb{C}$ y en dicha región es la derivada de la función holomorfa $F(z) = e^z$. Si α es el segmento de recta que une 0 con $(a+ib)T$ entonces por el Teorema Fundamental

$$\int_{\alpha} e^z\,dz = e^z\Big|_{0}^{(a+ib)T} = e^{(a+ib)T} - 1 = \left(e^{aT}cosbT - 1\right) + ie^{aT}senbT \tag{1}$$

Una parametrización de α es $z(t) = at + ibt$, $0 \leq t \leq T$ por tanto

$$\int_{\alpha} e^z\,dz = \int_{0}^{T} e^{at+bit}(a+ib)\,dt = (a+ib)\int_{0}^{T} e^{at}(cosbt + isenbt)\,dt \tag{2}$$

Igualando (1) y (2) se tiene

$$\int_{0}^{T} e^{at}(cosbt + isenbt)\,dt = \frac{1}{a+ib}\left(\left(e^{at}cosbT - 1\right) + ie^{aT}senbT\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\left(e^{at}cosbT - 1\right) + ie^{aT}senbT\right)(a-ib)$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left[\left(\left(e^{aT}cosbT - 1\right)a + be^{aT}senbT\right) + i\left(ae^{aT}senbT - b\left(e^{aT}cosbT - 1\right)\right)\right]$$

y al igualar las partes reales de estos números complejos se obtiene que

$$\int_0^T e^{at} cosbt\, dt = \frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{aT}\left(acosbT + bsenbT\right) - a\right]$$

Nótese que al igualar las partes imaginarias incidentalmente se obtiene que

$$\int_0^T e^{at} senbt\, dt = \frac{1}{a^2+b^2}\left[e^{aT}\left(asenbT - bcosbT\right) + b\right]$$

Problema **5.5.** Calcular $\int_\alpha cos(senz)\, dz$ y $\int_\alpha e^{z^2}\, dz$ donde α es $|z| = 1$ orientada positivamente

Solución. Observese que las funciones $f(z) = cos(senz)$ y $g(z) = e^{z^2}$ son continuas sobre y en el interior de α sin embargo no es posible aplicar el teorema fundamental puesto que estas funciones no son la derivada de ninguna función holomorfa sin embargo puesto que f y g son holomorfas en $\mathbb{C}$ y α es cerrada entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_\alpha cos(senz)\, dz = 0 \quad \text{y} \quad \int_\alpha e^{z^2}\, dz = 0$$

Problema **5.6.** Calcular $\int_\alpha \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$ donde α es una curva de Jordan suave por partes y para la ubicación de a y b se tiene lo siguiente

a - a y b están en el exterior de α

b - a está en el interior de α y b en el exterior

c - a está en el exterior de α y b en el interior

d - a y b están en el interior de α

Solución. La función $f(z) = \dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ excepto en los puntos $z = a$ y $z = b$ y al descomponer f en fracciones parciales se obtiene

$$f(z) = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)$$

por tanto

a - Puesto que a y b están fuera de α entonces f es holomorfa sobre y en el interior de α entonces por el teorema de Cauchy

$$\int_\alpha \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = 0$$

b - Utilizando la descomposición en fracciones parciales se tiene que

$$\int_\alpha \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\int_\alpha \frac{dz}{z-a} - \int_\alpha \frac{dz}{a-b}\right]$$

puesto que $z = b$ está en el exterior de α por el teorema de Cauchy $\int_\alpha \frac{dz}{z-b} = 0$ y como $z = a$ está en el interior de α, $\int_\alpha \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$ aplicando la fórmula integral de Cauchy, así

$$\int_\alpha \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b}$$

c - Análogamente al caso anterior se observa que $\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z-a} = 0$ y $\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z-b} = 2\pi i$ por lo que

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{b-a}$$

d - por combinación de los casos b y c se obtiene que

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = 0$$

Problema **5.7.** Evaluar $\int\limits_{\alpha} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz$ donde α es $|z| = 2$.

Solución. En la región $|z| < 2$ la función $f(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}$ no es holomorfa en $z = 0$ y $z = i$ por lo que no es posible aplicar la fórmula integral de Cauchy (o el teorema de Cauchy para derivadas) directamente, sin embargo, es posible resolver esta dificultad con el siguiente razonamiento.

Sean α_1 y α_2 las circunferencias $|z| = \frac{1}{3}$ y $|z - i| = \frac{1}{2}$ entonces por el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas se tiene que

$$\int\limits_{\alpha} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz = \int\limits_{\alpha_1} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz + \int\limits_{\alpha_2} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz$$

La primera integral del lado derecho de la igualdad anterior se puede reescribir como $\int\limits_{\alpha_1} \frac{f_1(z)}{z^3}$ con $f_1(z) = \frac{e^{z^2}}{z-i}$ y puesto que $f_1(z) = \frac{e^{z^2}}{z-i}$ es holomorfa sobre y en el interior de α_1, $|z| = \frac{1}{3}$ entonces por la fórmula de Cauchy para derivadas con $n = 2$ se tiene que

$$\int\limits_{\alpha_1} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz = \pi i f_1''(z)\big|_{z=0}$$

Como $f_1''(z) = e^{z^2} \left[\frac{-4z}{(z-i)^2} + \frac{2+4z^2}{z-i} + \frac{2}{(z-i)^3} \right]$ entonces $f_1''(z)\big|_{z=0} = 0$ por lo que

$$\int\limits_{\alpha_1} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz = 0$$

La segunda integral se puede reescribir como $\int\limits_{\alpha_2} \frac{f_2(z)}{z-i}$ con $f_2(z) = \frac{e^{z^2}}{z^3}$ y puesto que esta función es holomorfa sobre y en el interior de α_2, $|z - i| = \frac{1}{2}$ entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$\int\limits_{\alpha_2} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz = 2\pi i f_2(z)\big|_{z=i} = -\frac{2\pi}{e}$$

con lo que se obtiene que

$$\int\limits_{\alpha} \frac{e^{z^2}}{z^3(z-i)}\, dz = -\frac{2\pi}{e}.$$

Problema **5.8.** Si f es una función holomorfa en una región simplemente conexa K y z_0 en K, demuestre que para $r > 0$ suficientemente pequeño se tiene que

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)\, dt$$

Solución. Sea $r > 0$ tal que la circunferencia α definida por la ecuación $|z - z_0| = r$ esté contenida en K, entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Una parametrización de α es $z(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ por lo que aplicando la definición de integral de línea se tiene que

$$\int_\alpha \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{f\left(z_0 + re^{it}\right)}{re^{it}} \cdot ire^{it}\, dt = i \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)\, dt$$

así que

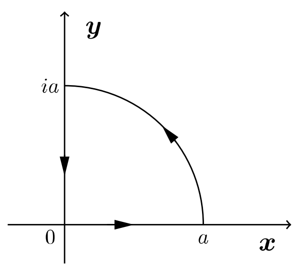
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\left(z_0 + re^{it}\right)\, dt$$

Problema **5.9.** Integrando la función $f(t) = e^z$ a lo largo de la curva de Jordan en el primer cuadrante formada por el segmento de recta que 0 con a, el cuarto de la circunferencia $|z| = a$ y el segmento de recta que une ia con 0 demostrar que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost} cos(t + asent)\, dt = \frac{sena}{a} \qquad a > 0$$

Solución. La función $f(z) = e^z$ es holomorfa sobre y en interior de la curva α, por el teorema de Cauchy

$$\int_\alpha e^z\, dz = 0 \qquad (a)$$



Una parametrización de α es

$$z(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq a \\ ae^{it} & 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ (a - t)i & 0 \leq t \leq a \end{cases}$$

por tanto

$$\int_\alpha e^z\, dz = \int_0^a e^t\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ae^{it}} aie^{it}\, dt + \int_0^a e^{(a-t)i}(-i)\, dt$$

así

$$\int_\alpha e^z\, dz = e^t\Big|_0^a + ai \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ae^{it}} e^{it}\, dt + e^{(a-t)i}\Big|_0^a = e^a - 1 + ai \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ae^{it}} e^{it}\, dt + 1 - e^{ia} \qquad (b)$$

Igualando (a) y (b) se obtiene

$$ai\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ae^{it}}e^{it}\,dt = e^{ai} - e^{a}$$

es decir

$$ai\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{a(cost+isent)}(cost+isent)\,dt = e^{ai} - e^{a}$$

o sea

$$ai\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost}\left(cos(asent)+isen(asent)\right)(cost+isent)\,dt = cosa - e^{a} + isena$$

así

$$ai\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost}\left[(cos(asent)cost - sen(asent)sent) + i\left(cos(asent)sent + sen(asent)cost\right)\right]\,dt = cosa - e^{a} + isena$$

luego

$$ai\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost}cos(asent+t) + isen(asent+t)\,dt = cosa - e^{a} + isena$$

es decir

$$i\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost}cos(asent+t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost}sen(asent+t)\,dt = \frac{cosa - e^{a}}{a} + i\frac{sena}{a}$$

e igualando las partes imaginarias se obtiene que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{acost}cos(asent+t)\,dt = \frac{sena}{a}, \quad a > 0$$

5.6. Problemas propuestos

1. Calcular las siguientes integrales a lo largo de los contornos indicados
   a. $\int_\alpha (1+i-2\overline{z})\,dz$ donde α es la curva que une los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = 1+i$ por medio de
      i. El segmento de recta que une los puntos
      ii. El segemento de la parábola $y = x^2$
      iii. La quebrada $z_1z_3z_2$ donde $z_3 = 1$
   b. $\int_\alpha e^{\overline{z}}\,dz$ donde α es el segmento de la recta $y = -x$ que une los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = \pi - i\pi$
   c. $\int_\alpha e^{|z|^2}Rez\,dz$ donde α es el segmento de recta que une los puntos $z_1 = 0$, $z_2 = i+1$
   d. $\int_\alpha zsenz\,dz$ donde α es el segmento de recta que une $z_1 = 1$ con $z_2 = i$
2. Calcular $\int_\alpha Lnz\,dz$ a lo largo de los siguientes contornos
   a. α es $|z| = 1$, $Ln(-1) = \pi i$ y el recorrido es negativo
   b. α es $|z| = 1$, $Lni = \frac{\pi i}{2}$ y el recorrido es positivo
   c. α es $|z| = R$, $LnR = lnR + 2\pi i$ y el recorrido es positivo
3. Calcular $\int_\alpha \frac{dz}{\sqrt{z}}$ a lo largo de los siguientes contornos

a. α es $|z| = 1$, $\sqrt{-1} = i$ y el recorrido es positivo
b. α es $|z| = 1$, $y \geq 0$ y $\sqrt{1} = -1$
c. α es $|z| = 1$, $x \geq 0$ y $\sqrt{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

4. Calcular $\int\limits_{\alpha} \frac{ln(z+1)}{z+1}\, dz$ donde α es $|z| = 1$ con $Rez \geq 0$, $Imz \geq 0$

5. Calcular $\int\limits_{\alpha} \frac{coszdz}{\sqrt{senz}}$ donde α es el segmento de recta que une -1 con i y $\sqrt{sen(-1)} = i\sqrt{sen1}$

6. Sea f una función holomorfa en una región K y α una curva de Jordan suave por partes que contiene al origen, demuestre que cualquiera que sea la rama de Lnz se cumple que

$$\int\limits_{\alpha} f'(z)Lnz\, dz = 2\pi i(f(z_0) - f(0))$$

donde z_0 es el punto inicial de integración.

7. Calcular $\int\limits_{\alpha} z^2 Ln\frac{z+1}{z-1}\, dz$ si $Lna = lna$, $a > 0$ y la curva α es

a. La circunferencia $|z| = 2$
b. La circunferencia $|z-1| = 1$ y el punto inicial de integración $z_1 = 1 + i$

8. Integrar la función $f(z) = e^z$ a lo largo del segmento de recta que une 0 con $(a+ib)R$ para demostrar que

a. $\int\limits_0^R e^{at} cosbt\, dt = \frac{e^{aR}(acosbR + bsenbR) - a}{a^2+b^2}$
b. $\int\limits_0^R e^{at} senbt\, dt = \frac{e^{aR}(asenbR - bcosbR) + b}{a^2+b^2}$

9. Calcular las siguientes integrales

$a.\ \int\limits_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$ $\quad b.\ \int\limits_{|z|=3} \frac{cos(z+\pi i)}{z(e^z+2)}\, dz$ $\quad c.\ \int\limits_{|z-3|=6} \frac{zdz}{(z-2)^2(z+4)}$

$d.\ \int\limits_{|z-2|=3} \frac{che^{\pi i z}}{z^3-4z^2}\, dz$ $\quad e.\ \int\limits_{|z|=2} \frac{senzsen(z-1)}{z^2-z}\, dz$ $\quad f.\ \int\limits_{|z|=3} \frac{e^z}{(z^2+4)^2}$

$g.\ \int\limits_{|z-1|=2} \frac{e^{1/z}}{(z^2+4)^2}$

10. Integrar la función $f(z) = \frac{e^{az^n}}{z}$ sobre $|z| = 1$ y n en $\mathbb{Z}^+$ para demostrar que

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{acosn\theta} cos(asen\theta)\, d\theta = 2\pi$$

11. Usando la definición demuestre la fórmula de Cauchy para derivadas cuando $n = 1$

12. Sean f y g dos funciones holomorfas en $z = z_0$ con $f(z_0) = g(z_0) = 0$ y $g'(z_0) \neq 0$. Demuestre que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

13. Integrar la función $f(z) = \frac{\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}}{z}$ sobre $|z| = 1$ para demostrar que

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{(2n!)}{(2^n n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

14. Integrar la función $f(z) = \frac{z+R}{z(R-z)}$ sobre $|z| = a$ con $0 < a < R$ para demostrar que

$$\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{R^2 - 2a\,R\,\cos\theta + a^2} = \frac{2\pi}{R^2 - a^2}$$

Capítulo 6

Series. Funciones analíticas.

El objetivo central de este capítulo es estudiar las series de potencias, en particular, las denominadas series de Taylor y series de Laurent para lo cual se requieren algunos conceptos básicos de sucesiones y series de números complejos. En las dos primeras secciones se tratan los conceptos básicos relacionados con estos temas, el resto del capítulo se dedica a las series de potencias, su relación con el concepto de función analítica y función holomorfa y sus temas relacionados.

6.1. Sucesiones de números complejos.

Definición **6.1.** *Una* ***sucesión*** *en* $\mathbb{C}$ *es una función* f *entre* $\mathbb{N}$ *y* $\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & n \longrightarrow f(n) = z_n = x_n + iy_n \end{aligned}$$

como es usual la sucesión se denota por $\{z_n\}$ *y* z_n *se llama el* ***término n-ésimo*** *de la sucesión.*

Definición **6.2.** *Sea* $\{z_n\}$ *una sucesión en* $\mathbb{C}$ *y* z_0 *un número complejo, diremos que* $\{z_n\}$ ***converge*** *a* z_0 *si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe* N *en* $\mathbb{N}$ *tal que* $|z_n - z_0| < \epsilon$ *para todo* $n > N$.

El número complejo z_0 se llama el ***límite*** de la sucesión y se escribe

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} z_n = z_0$$

Obsérvese que geométricamente esto significa que para toda vecindad de centro z_0 un número finito de términos de la sucesión están por fuera de ella.

Ejemplo **6.1.** La sucesión $\{z_n\} = \left\{-2 + \frac{(-1)^n}{n+1} i\right\}$ converge a $z_0 = -2$ ya que dado $\epsilon > 0$ si se toma $\mathbb{N}$ como el menor natural tal que $N > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$ entonces para todo natural n tal que $n > N$ se tiene que $n + 1 > N + 1 > \frac{1}{\epsilon}$ y por tanto

$$|z - z_0| = \left|\frac{(-1)^n i}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < \epsilon.$$

El siguiente resultado proporciona un criterio para la convergencia de una sucesión en $\mathbb{C}$ en términos de la convergencia de las sucesiones correspondientes a su parte real e imaginaria.

Teorema **6.1.** *Sea* $\{z_n\} = \{x_n + iy_n\}$ *una sucesión en* $\mathbb{C}$ *y* $z_0 = x_0 + iy_0$ *un número complejo entonces* $\{z_n\}$ *converge a* z_0 *si y solo si* $\{x_n\}$ *converge a* x_0 *y* $\{y_n\}$ *converge a* y_0

Demostración. En un sentido la demostración procede como sigue. Sea $\epsilon > 0$ dado, entonces puesto que $\{z_n\}$ converge a z_0 entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $|z - z_0| < \epsilon$ para todo $n > N$.
Dado que $x_n - x_0 = Re(z - z_0)$ y $y_n - y_0 = Im|z - z_0|$ entonces

$$|x_n - x_0| = |Re(z_n - z_0)| \leq |z - z_0| < \epsilon \text{ y } |y_n - y_0| = |Im(z - z_0)| \leq |z - z_0| < \epsilon \text{ Para todo } n > N$$

por lo que $\{x_n\}$ converge a x_0 y $\{y_n\}$ converge a y_0.

En el otro sentido sea $\epsilon > 0$ entonces puesto que $\{x_n\}$ converge a x_0 y $\{y_n\}$ converge a y_0 entonces existen N_1 y N_2 en $\mathbb{N}$ tales que $|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ para todo $n > N_1$ y $|y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$ para todo $n > N_2$.

Sea $N = Max\{N_1, N_2\}$ entonces

$$|z_n - z_0|^2 = (x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 < \epsilon^2 \text{ para todo } n > N$$

y por tanto $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} z_n = z_0$. □

Ejemplo **6.2.** La sucesión $\left\{\frac{2n+i}{3-in}\right\}$ converge a $2i$ ya que su parte real $\left\{\frac{5n}{n^2+9}\right\}$ converge a 0 y su parte imaginaria $\left\{\frac{2n^2+3}{n^2+9}\right\}$ converge a 2.

Ejemplo **6.3.** La sucesión $\left\{\frac{3n^2+(2n^3+n)i}{2n^2+1}\right\}$ diverge ya que aunque su parte real $\left\{\frac{3n^2}{2n^2+1}\right\}$ converge a $\frac{3}{2}$ su parte imaginaria $\{n\}$ no converge.

Definición **6.3.** *Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$, entonces la sucesión $\{z_n\}$ es **acotada** si y solo si existe $M > 0$ tal que $|z_n| < M$ para todo n en $\mathbb{N}$.*

Obsérvese que geométricamente esto significa que existe un círculo de centro en el origen tal que todo término de la sucesión queda en el interior del mismo.

Ejemplo **6.4.** La sucesión $\{z_n\} = \left\{-2 + \frac{(-1)^n}{n+1}i\right\}$ es acotada ya que por la desigualdad triangular $|z_n| < 3$ para todo n en $\mathbb{N}$.

Teorema **6.2.** *Toda sucesión $\{z_n\}$ convergente en $\mathbb{C}$ es acotada.*

Demostración. Sea z_0 en $\mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} z_n = z_0$ entonces para $\epsilon = 1$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que

$$|z_n| = |z_n - z_0 + z_0| \leq |z_n - z_0| + |z_0| < 1 + |z_0| \text{ para todo } n > N.$$

Sea $M = \max\{|z_1|,\ |z_2|, \ldots, |z_N|,\ 1 + |z_0|\}$ entonces para todo n en $\mathbb{N}$, $|z_n| < M$ y por tanto $\{z_n\}$ es acotada. □

Obsérvese que el reciproco del resultado anterior no es cierto ya que por ejemplo la sucesión $\{z_n\} = \{(-1)^n + i\}$ es acotada pero no es convergente.

Definición **6.4.** *Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y z_0 un punto en $\mathbb{C}$: z_0 es un **punto de acumulación** de $\{z_n\}$ si toda vecindad de z_0 contiene un número infinito de términos de la sucesión.*

Ejemplo **6.5.** La sucesión $\{z_n\} = \{i^n\}$ tiene a i, 1, $-i$, 1 como puntos de acumulación.

El siguiente resultado, que presentamos sin demostración, se conoce como el Teorema de Bolzano-Weirtrass.

Teorema **6.3.** *Toda sucesión $\{z_n\}$ en $\mathbb{C}$ acotada tiene por lo menos un punto de acumulación.*

Presentamos a continuación una prueba para la convergencia de una sucesión que no requiere conocer el límite de la misma. El resultado se conoce con el nombre de el criterio de Cauchy.

Definición **6.5.** *Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$. **La sucesión** $\{z_n\}$ **es de Cauchy** si y solo si para todo $\epsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_m| < \epsilon$ para todo n, $m > M$.*

Ejemplo **6.6.** La sucesión $\{z_n\}$ definida por $z_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es de Cauchy ya que si para $\epsilon > 0$ se toma N como el primer natural tal que $N > \frac{1}{\epsilon}$ entonces para todo $m > n \geq N$ se tiene que

$$|z_m - z_n| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \cdots + \cdots \pm \frac{1}{m}\right| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Teorema **6.4.** *Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ entonces $\{z_n\}$ es convergente si y solo si $\{z_n\}$ es de Cauchy.*

Demostración. Sea z_0 en $\mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = z_0$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_0| < \frac{\epsilon}{2}$ y $|z_m - z_0| < \frac{\epsilon}{2}$ para todo n, $m > N$, luego

$$|z_n - z_m| = |z_n - z_0 + z_0 - z_m| \leq |z_n - z_0| + |z_m - z_0| < \epsilon \text{ para todo } n,\, m > N$$

y así $\{z_n\}$ es de Cauchy.

Reciprocamente, si la sucesión $\{z_n\}$ es de Cauchy entonces para $\epsilon = 1$ existe N en $\mathbb{N}$ tal que $|z_n - z_N| < 1$ para todo $n \geq N$. Sea $M = \text{máx}\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_N|\}$ entonces para todo $n \geq 1$

$$|z_n| \leq |z_n - z_N| + |z_N| \leq 1 + M$$

por lo tanto la sucesión $\{z_n\}$ posee un punto de acumulación z_0 por el teorema de Bolzano-Weirstrass. Sea $\epsilon > 0$, puesto que z_0 es un punto de acumulación de $\{z_n\}$ podemos escoger $m > N$ tal que

$$|z_m - z_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

luego para todo $n > N$ se tiene que

$$|z_n - z_0| = |z_n - z_m + z_m - z_0| \leq |z_n - z_m| + |z_m - z_0| < \epsilon$$

y así la sucesión $\{z_n\}$ converge a z_0. □

6.2. Series de números complejos

Sea $\{z_n\}$ una sucesión en $\mathbb{C}$ y construyamos una nueva sucesión $\{S_n\}$ de la siguiente manera.

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 \\
S_2 &= z_1 + z_2 \\
&\vdots \\
S_n &= z_1 + z_2 + \cdots + z_n \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definición **6.6.** *La sucesión $\{S_n\}$ construida anteriormente se llama* ***serie*** *y se escribe*

$$z_1 + z_2 + \cdots + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + iy_n.$$

El término n-ésimo de la sucesión, $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$, se llama **$n$-ésima suma parcial** de la serie.

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge a un número complejo, S se escribe

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

y se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es **convergente** y S se llama **suma de la serie**. Si la sucesión de sumas parciales diverge se dice que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es **divergente**.

Es claro que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si y solo si las series reales $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ convergen.

Ejemplo **6.7.** Sea z_0 un número complejo y considere la serie

$$1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z_0^n$$

entonces la serie converge si $|z_0| < 1$ y diverge si $|z_0| > 1$.

En efecto, la n-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n = 1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^{n-1}$$

la cual se puede expresar como

$$S_n = \frac{1 - z_0^n}{1 - z_0} = \frac{1}{1 - z_0} - \frac{z_0^n}{1 - z_0}$$

Puesto que $|z_0^n| = |z_0|^n$ y si $|z_0| < 1$ se tiene que $|z_0| > |z_0|^2 > |z_0|^3 > \cdots > |z_0|^n > \cdots$ entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} |z_0^n| = 0$ y por tanto $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_0^n = 0$ cuando $|z_0| < 1$.

Si $|z_0| > 1$ entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_0^n = \infty$ y por tanto $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = \frac{1}{1-z_0}$ cuando $|z_0| < 1$ por lo que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_0^n = \frac{1}{1-z_0}$ cuando $|z_0| < 1$ y la serie diverge cuando $|z_0| > 1$.

La serie $1 + z_0 + z_0^2 + \cdots + z_0^n + \cdots$ se llama **serie geométrica**, el valor z_0 se llama **razón** de la serie y $\frac{1}{1-z_0}$ es la **suma** de la serie.

El siguiente resultado expresa el criterio de Cauchy para convergencia de series.

Teorema **6.5.** *Una serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge si y solo si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un entero no negativo* N *talque* $|S_n - S_m| = |z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_n| < \epsilon$ *para todo* $n > m > N$

El teorema que se presenta a continuación proporciona una condición necesaria para la convergencia de una serie.

Teorema **6.6.** *Si* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge entonces* $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = 0$

Demostración. Sea S la suma de la serie es decir si $\{S_n\}$ es la sucesión de sumas parciales de las serie entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n = S$.

Puesto que $z_n = S_n - S_{n-1}$ entonces $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_n - \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} S_{n+1} = S - S = 0$. □

Ejemplo **6.8.** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3n^2 i}{1+n^2}$ es divergente puesto que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{2n+3n^2 i}{1+n^2} = 3i \neq 0$.

La condición del teorema anterior es necesaria pero no suficiente como lo muestra el ejemplo típico siguiente.

Ejemplo **6.9.** La serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ satisface que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} z_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n} = 0$ sin embargo la serie es divergente ya que $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $S_{2n} = S_n + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$ luego

$$|S_{2n} - S_n| = \left|\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| > \left|\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}\right| = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad \text{cuando } n > 1$$

por tanto no se satisface el criterio de Cauchy para $\epsilon = \frac{1}{2}$ y así $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Definición **6.7.** *Sea* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *una serie en* $\mathbb{C}$. *La serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *es* ***absolutamente convergente*** *si la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ *converge.*

Ejemplo **6.10.** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n^2}$ converge absolutamente, ya que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente por ser una p-serie con $p = 2$ o por aplicación del criterio de la integral.

Teorema **6.7.** *Si la serie compleja* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ *converge absolutamente entonces converge y* $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n\right| \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$

Demostración. Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge y por tanto satisface el criterio de Cauchy para series es decir si S'_n y S'_m son sumas parciales de esta serie entonces dado $\epsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ talque

$$|S'_n - S'_m| = ||z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_n|| = |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_n| < \epsilon \text{ para todo } n > m > N$$

por tanto si S_n y S_m son sumas parciales de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ entonces para el N seleccionado anteriormente se tiene que

$$|S_n - S_m| = |z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_n| \leq |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_n| < \epsilon \text{ para todo } n > m > N$$

y así por el criterio de Cauchy la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge. □

Obsérvese que el recíproco del resultado anterior no es válido como lo ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo **6.11.** La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{i}{n}$ converge a $-iln2$ pero la serie de los módulos de sus términos corresponde a la serie armónica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ la cual diverge.

A continuación demostramos el siguiente test de comparación el cual será utilizado más adelante, en particular, para demostrar el denominado criterio D'Alembert.

Teorema **6.8.** *Sea $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ una serie compleja tal que $|z_n| \leq a_n$ para todo n en $\mathbb{N}$ entonces si la serie de términos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente*

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ dado, puesto que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge entonces por el criterio de Cauchy existe N en $\mathbb{N}$ talque $|a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n| = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \epsilon$ para todo $n > m > N$.
Puesto que para la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ se tiene que

$$\begin{aligned}|S_n - S_m| &= ||z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_n|| \\ &= |z_{m+1}| + |z_{m+2}| + \cdots + |z_n| = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n < \epsilon \text{ Para todo } n > m > N\end{aligned}$$

entonces por el criterio de Cauchy la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |z_n|$ converge y por tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente. □

Para finalizar esta sección demostramos un resultado sobre convergencia de series reales de términos positivos conocido como el criterio D'Alembert el cual será utilizado en el estudio del criterio de la razón para series de potencias en $\mathbb{C}$.

Teorema **6.9.** *(El criterio de D'Alembert) Consideremos la serie de números reales $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ con $a_n > 0$ para todo n y tal que*

$$r = \lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existe, entonces

1. *si $r < 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.*

2. *si $r > 1$ entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge.*

Demostración.

Si $r < 1$ entonces el número $k = r + \dfrac{1-r}{2}$ es positivo y menor que 1 y puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ entonces para todo m suficientemente grande se tiene que $\dfrac{a_{m+1}}{a_m} \leq k$ o equivalentemente existe N en $\mathbb{N}$ talque $a_{m+1} \leq k\, a_m$ para todo $m \geq N$.

La desigualdad anterior implica que

$$\begin{aligned}
&a_{m+1} \leq k\, a_m \\
&a_{m+2} \leq k\, a_{m+1} \leq k^2\, a_m \\
&a_{m+3} \leq k\, a_{m+2} \leq k^3\, a_m \\
&\quad \cdots\cdots \\
&a_{m+s} \leq k^s\, a_m \quad \text{para todo} \quad s \geq 1
\end{aligned}$$

y puesto que la serie $\sum\limits_{s=1}^{\infty} k^s$ es una serie geométrica de razón $k < 1$ y

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{M+k} \leq a_M \sum_{s=1}^{\infty} k^s$$

entonces por el test de comparación la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Si $r > 1$ un razonamiento semejante muestra que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge. $\square$

6.3. Series de potencias

Definición **6.8.** *Se llama **serie de potencias** de centro z_0 y coeficientes complejos a_0, a_1,... a una serie de la forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Una pregunta que surge inmediatamente es la siguiente: ¿Para qué valores de z en $\mathbb{C}$ la serie de potencias converge y para cuales diverge?

Como una ilustración inicial consideremos la serie geométrica

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots$$

tratada en el ejemplo 7 de la sección 6.2. De los resultados obtenidos podemos afirmar que

a - La serie geométrica converge para todo z en el interior del círculo $|z| < 1$.

b - Si z está en este círculo es posible calcular su suma, esta es

$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots = \frac{1}{1-z}$$

c - La serie diverge para todo z talque $|z| \geq 1$.

El objetivo central de esta sección es obtener resultados análogos para una serie de potencias definida como en 6.8. El siguiente resultado es útil en este propósito

Teorema **6.10.** *Si la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge en el punto z_1 entonces converge absolutamente para todo punto z talque $|z-z_0| < |z_1-z_0|$*

Demostración. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge entonces por el teorema 6.6 sección 6.2 se deduce que $\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n(z_1-z_0)^n = 0$ por tanto la sucesión $(a_n(z_1-z_0)^n)$ es convergente, luego por el teorema 6.2 de la sección 6.1 la sucesión $(a_n(z_1-z_0)^n)$ es acotada es decir existe $M>0$ talque $|a_n(z_1-z_0)^n| < M$ para todo n en $\mathbb{N}$.
Obsérvese que

$$|a_n(z-z_0)^n| = \left|a_n(z-z_0)^n\left(\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right)^n\right| < M\left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right| = Mr^n \text{ donde } r = \left|\frac{z-z_0}{z_1-z_0}\right|.$$

Si z en $\mathbb{C}$ es talque $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ entonces $r<1$, la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} Mr^n$ converge y por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ converge y así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente. □

Nótese que el resultado anterior implica que si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ diverge en un punto z_1 entonces diverge en todo punto z talque $|z-z_0| > |z_1-z_0|$ ya que de no ser así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sería convergente en z_1.

Del teorema anterior se deduce que toda serie de potencias posee una región de convergencia, que puede ser todo el plano o únicamente el punto z_0, el siguiente caracteriza la región de convergencia de una serie.

Teorema **6.11.** *Si la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge para algún valor de* z *en* $\mathbb{C}$ *entonces existe un número real* $R>0$ *talque*

1. *La serie converge absolutamente para todo* z *talque* $|z-z_0| < R$
2. *La serie diverge para todo* z *talque* $|z-z_0| > R$

Demostración. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para algún valor z_1 en $\mathbb{C}$ entonces por el teorema 6.10 la serie converge en el interior de un círculo de radio $|z_1-z_0|$. Si se considera el conjunto formado por la unión de todos los círculos con centro z_0, sin incluir la frontera, en los cuales la serie converge entonces este conjunto es un círculo con centro en z_0 que no incluye su frontera y que por tanto posee un radio $R>0$. Por la construcción es claro que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para todo z talque $|z-z_0| < R$.
Si consideramos ahora z en $\mathbb{C}$ talque $|z-z_0| = R_1 > R$ entonces la serie debe diverger en z o por el teorema 6.10 converger en lq región $|z-z_0| < R_1$ la cual es estrictamente más grande que la región $|z-z_0| < R$. Esto contradice la construcción de la región $|z-z_0| < R$. □

Obsérvese que el resultado anterior no se refiere al comportamiento de la serie en la frontera de la región $|z-z_0| < R$. En un punto de la circunferencia $|z-z_0| = R$ la serie puede o no ser convergente, sin embargo esto no es simple de tratar y en este texto no nos ocuparemos de ello.

Complementariamente es importante mencionar el hecho de que si $R=0$ la serie converge únicamente en el punto z_0 y si $R=\infty$, la serie converge en todo el plano complejo.

Definición **6.9.** *Sea* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *una serie de potencias. El número* R *del teorema anterior se llama* ***radio de convergencia*** *y la región* $|z-z_0| < R$ *en la cual la serie converge se llama* ***círculo de convergencia.***

El teorema 6.10 asegura la existencia del radio de convergencia de una serie, sin embargo, la demostración no proporciona un método efectivo para su cálculo. Mostramos a continuación dos criterios para el cálculo del radio de convergencia de una serie en términos de los coeficientes de la misma. Requerimos en primera instancia el siguiente concepto

Definición **6.10.** *Sea $\{x_n\}$ una sucesión no negativa de números reales. Un número real ρ es el* ***límite superior*** *de la sucesión $\{x_n\}$ denotado*

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$$

si se satisface que

1. *ρ es un punto de acumulación de $\{x_n\}$*
2. *Si ρ' es otro punto de acumulación de la sucesión $\{x_n\}$ entonces $\rho' \leq \rho$.*

Nótese que esta definición nos dice que el límite superior de una sucesión es el extremo superior del conjunto formado por los puntos de acumulación de la sucesión.

Ejemplo **6.12.** La sucesión $\{x_n\}$ con $x_n = cos\frac{n\pi}{2}$ tiene como puntos de acumulación 0, -1 y 1 por tanto $\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 1$

Teorema **6.12** (Cauchy-Hadamand)**.** *Para la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ sea $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ entonces el radio de convergencia es $R = \frac{1}{\rho}$.*

Demostración. Se debe probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para todo punto z talque $|z-z_0| < R$ y diverge para todo z talque $|z-z_0| > R$.
Sea r en $\mathbb{R}$ talque $|z-z_0| < r < R$. Puesto que ρ es el mayor punto de acumulación de la sucesión $(\sqrt[n]{|a_n|})$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe N en $\mathbb{N}$ talque $\sqrt[n]{|a_n|} < \rho + \epsilon$ para todo $n \geq N$, en particular, para $\epsilon = \frac{1}{r} - \frac{1}{R} > 0$ se tiene que $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{r}$ para todo $n \geq N$ es decir $|a_n| < \frac{1}{r^n}$ para todo $n \geq N$.

Puesto que

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n||z-z_0|^n < \sum_{n=N}^{\infty} \left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n = \frac{\left|\frac{z-z_0}{r}\right|^N}{1-\left|\frac{z-z_0}{r}\right|}$$

entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge absolutamente en $|z-z_0| < r$ para todo $r < R$ y por tanto en $|z-z_0| < R$.

Para la segunda parte consideramos ahora r en $\mathbb{R}$ talque $|z-z_0| > r > R$. Puesto que ρ es el mayor punto de acumulación de $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un entero no negativo N talque $\sqrt[n]{|a_n|} > \rho - \epsilon$ para todo $n \geq N$, en particular para $\epsilon = \frac{1}{R} - \frac{1}{r} > 0$ se tiene que $\sqrt[n]{|a_n|} > \frac{1}{r}$ para todo $n \geq N$, es decir $|a_n| > \frac{1}{r^n}$ por tanto $|a_n(z-z_0)^n| > \left|\frac{z-z_0}{r}\right|^n > 1$ para todo $n \geq N$ luego $\lim_{n\to\infty} |a_n(z-z_0)^n| \neq 0$ y así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ es divergente. ☐

El siguiente resultado conocido como criterio de la razón, proporciona una forma alternativa para calcular el radio de convergencia de una serie de potencias.

Teorema **6.13.** *(El criterio de la razón) Para la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ con $a_n \neq 0$ para todo n, sea*

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

entonces el radio de convergencia de la serie es $R = \dfrac{1}{\rho}$.

Demostración. Se debe probar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge para todo z talque $|z-z_0| < R$ y diverge para todo z talque $|z-z_0| > R$. Para ello consideremos la serie real de términos positivos $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$

donde $C_n = |a_n|\,|z-z_0|^n$ entonces $\dfrac{C_{n+1}}{C_n} = \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z-z_0|$ y por el criterio de D'Alembert se tiene que

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{C_{n+1}}{C_n} = \rho|z-z_0|$$

y la serie converge si $r > 1$ y diverge si $r < 1$, es decir , la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ converge si $|z-z_0| < \dfrac{1}{\rho} = R$ y diverge si $|z-z_0| > \dfrac{1}{\rho} = R$ de lo cual se deduce la convergencia de la serie considerada. □

Una observación importante es que a diferencia del criterio de la raiz, el criterio de la razón no siempre se puede aplicar ya que el límite considerado en él, no siempre existe como se observa por ejemplo al considerar la serie

$$1 + 3z + z^2 + 3z^3 + \cdots + z^{2n} + 3z^{2n+1} + \cdots$$

para la cual los cocientes $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ toman alternadamente los valores 3 y $\dfrac{1}{3}$.

Ejemplo **6.13.** Determinar el radio de convergencia de las siguientes series

$$a - \sum_{n=0}^{\infty}(1+i)^n z^n \qquad\qquad b - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} \qquad\qquad c - \sum_{n=0}^{\infty} n!(z-i)^n$$

a - Puesto que $|a_n| = |(1+i)^n| = (\sqrt{2})^n$ entonces $\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^{\frac{n}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}}$, así $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y la serie converge en la región $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

b - Utilizando el criterio de razón se tiene que

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$$

por tanto $R = \infty$ y la serie converge en todo el plano complejo.

c - En este caso $a_n = n!$ por tanto

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty$$

por tanto $R = 0$ y la serie converge únicamente cuando $z = i$

6.4. Derivación e integración de una serie de potencias. Funciones analíticas

En la sección anterior se mostró que una serie de potencias

$$\sum a_n(z-z_0)^n$$

converge para todo z en el interior del círculo $|z-z_0| < R$ y se presentaron fórmulas explícitas para el cálculo de R. Esto significa que en dicha región la serie define una función

$$f(z) = \sum a_n(z-z_0)^n$$

¿Qué propiedades posee esta función en la región? ¿ Es continua, holomorfa, integrable?. Un estudio detallado de estos temas requiere del concepto de convergencia uniforme de una sucesión (serie) de funciones. Las respuestas a las preguntas anteriores, en el caso general, no es obvia y en ocasiones negativa como se ilustra en el caso de la continuidad, con el siguiente ejemplo tomado de [7], pag.84.

Considere la sucesión de funciones continuas $\{f_n(z)\}$ definidas por

$$f_n(z) = z^n - z^{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

y la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = (z-1) + (z^2 - z) + (z^3 - z^2) + \cdots + (z^n - z^{n-1}) + \cdots$$

Es claro que la n-ésima suma parcial de la serie es

$$S_n(z) = -1 + z^n$$

La serie converge a 0 en $z = 1$, para todo z tal que $|z| < 1$ y puesto que en este caso $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = -1$ entonces la suma de la serie es la función

$$f(z) = \begin{cases} -1 & \text{si } |z| < 1 \\ 0 & \text{si } |z| = 1 \end{cases}$$

la cual claramente no es continua en $z = 1$ y por tanto: la función suma de una serie de funciones continuas no necesariamente es continua.

¿Cúal es la dificultad? Precisamente el inconveniente radica en el hecho de que la serie

$$(z-1) + \left(z^2 - z\right) + \cdots + \left(z^n - z^{n-1}\right) + \cdots$$

no es uniformemente convergente como se muestra en el texto mencionado.

Desafortunadamente, los límites académicos de este trabajo no nos posibilitan el estudio de la çonvergencia uniforme de series y sus consecuencias"de manera que nos limitaremos a enunciar, sin demostración, los resultados para las series de potencias en cuyo caso, afortunadamente, son positivos precisamente por que toda serie de potencias es uniformemente convergente en su región de convergencia.

Recordemos que en la introducción del capítulo 3 hemos comentado que existen dos maneras básicas para para tratar la teoría de las funciones de variable compleja:

- A la manera de Riemann, definiendo función holomorfa en un punto como una función que tiene derivada compleja en una vecindad del punto.
- A la manera de Weierstrass, definiendo función analítica en un punto en términos de una serie de potencias convergente en una vecindad del punto.

Formalizamos a continuación la segunda idea y relacionamos los conceptos de función holomorfa y función analítica, mostrando en esta y en la siguiente sección que son equivalentes.

Definición **6.11.** *Sea $f(z)$ una función de variable compleja definida sobre una región K y z_0 un punto en K, entonces:*

1. *f es **analítica** en z_0 si existe una serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ talque $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ para todo z en K y algún $r > 0$ tal que $|z - z_0| < r$.*
2. *f es **analítica** en K si f es analítica en cada punto z_0 de K.*

Ejemplo **6.14.** La función $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ es analítica para $z \neq 1$ ya que f es analítica en $z = 0$ puesto que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{siempre que} \quad |z| < 1$$

y para $z_0 \neq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z_0) - (z-z_0)} &= \frac{1}{(1-z_0)\left[1 - \dfrac{z-z_0}{1-z_0}\right]} \\
&= \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{1-z_0}\right)^n \quad \text{siempre que} \quad \left|\frac{z-z_0}{1-z_0}\right| < 1 \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1-z_0)^{n+1}} (z-z_0)^n \quad \text{siempre que} \quad |z-z_0| < |1-z_0|.
\end{aligned}$$

Lema **6.1.** *Las series de potencias* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *y* $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-z_0)^{n-1}$ *tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración. Es claro que $g(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-z_0)^{n-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+1)\,a_{n+1}\,(z-z_0)^n$ y llamemos R_f y R_g los radios de convergencia de las series definidas por las funciones f y g. Entonces

$$\frac{1}{R_g} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{(n+1)\,|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}\;\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n+1]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R_f}.$$

□

Teorema **6.14.** *La función analítica definida por* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$ *en* $|z-z_0| < R_f$ *es holomorfa y*

$$f'(z) = g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n\,(z-z_0)^{n-1}, \quad |z-z_0| < R_f.$$

Demostración. Se debe demostrar que para z talque $|z-z_0| < R_f$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h} = g(z)$$

para ello suponemos que $|h| \leq r - |z-z_0|$ para algún r talque $0 \leq r < R_f$ y consideramos la expresión

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{h}\left[(z+h-z_0)^n - (z-z_0)^n - n\,h(z-z_0)^{(n-1)}\right]$$

en la cual al simplificar y factorizar h se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z) &= \sum_{n=2}^{\infty}[a_n(z+h-z_0)^{(n-1)} + (z-z_0)(z+h-z_0)^{n-2} + \cdots + (z-z_0)^{n-1} - n(z-z_0)^{n-1}] \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} g_n(z,h)\end{aligned}$$

donde $g_n(z,h)$ es el polinomio de grado $(n-1)$ en la variable h definido por la expresión

$$g_n(z,h) = a_n\left[(z+h-z_0)^{n-1} + (z-z_0)(z+h-z_0)^{n-2} + \cdots + (z-z_0)^{n-1} - n(z-z_0)^{n-1}\right]$$

para el cual $g_n(z,0) = 0$ cuando $n \geq 2$.

Puesto que $|z-z_0| \leq r$, $|z+h-z_0| \leq |h| + |z-z_0| \leq r$ rntonces $|g_n(z,h)| \leq 2n|a_n|\,r^{n-1}$ y dado que R_f es el radio de convergencia de la serie de potencias definida por la función $g(z)$ entonces para todo $\epsilon > 0$existe N en $\mathbb{N}$ talque

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(z,h)\right| \leq 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} n\,|a_n|\,r^{n-1} < \frac{\epsilon}{2}.$$

Así mismo puesto que $\sum\limits_{n=2}^{\infty} g_n(z,h)$ es un polinomio que toma el valor 0 cuando $h = 0$ entonces para todo $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ talque

$$\left|\sum_{n=2}^{\infty}\right| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{para} \quad |h| < \delta$$

por lo que siempre que $|h| \leq r - |z-z_0|$ y $h < \delta$ se tieme que

$$\left|\frac{f(z+h)-f(z)}{h} - g(z)\right| \leq \left|\sum_{n=2}^{N} g_n(z,h)\right| + \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} g_n(z,h)\right| < \epsilon$$

y así $f(z)$ es holomorfa para todo z talque $|z-z_0| < R_f = R$ con

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z-z_0)^{n-1}$$

. $\square$

Del lema 6.1 y del teorema 6.14 se deduce que las series $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n\, (z-z_0)^{n-1}$ y $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n\, (z-z_0)^{n-2}$ tienen el mismo radio de convergencia y procediendo inductivamente se concluye que la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, (z-z_0)^{n-k}$$

tiene el mismo radio de convergencia R y representa una función analítica en $|z-z_0| < R$ y por tanto se tiene el siguiente resultado.

Teorema **6.15.** *Toda serie de Potencias* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, (z-z_0)^n$ *representa en el interior de su círculo de convergencia una función indefinidamente diferenciable cuya k-ésima derivada está dada por*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n\, (z-z_0)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nótese que para $z = z_0$ se tiene que $f^{(k)}(z_0) = k! a_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ por lo que los coeficientes de una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z-z_0)^n$$

están completamente determinados por los valores de su función suma en una vecindad de z_0 y se tiene el siguiente resultado conocido como el teorema de unicidad de las series de potencias.

Teorema **6.16.** *Sean* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, (z-z_0)^n$ *y* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n\, (z-z_0)^n$ *dos series de potencias que tienen la misma función suma en una vecindad de* z_0 *entonces* $a_n = b_n$ *para* $n = 0, 1, 2, \ldots$

Ejemplo **6.15.** La serie de potencias $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n\, (z-i)^n$ tiene a $R = 1$ como radio de convergencia por tanto en la región $|z-i| < 1$ representa una función $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n\, (z-i)^n$ indefinidamente diferenciable con $f^{(k)}(i) = k! i^k$. ¿Cúal es la función f?

Puesto que $\frac{i}{z} = \frac{i}{i+(z-i)} = \frac{1}{1-i(z-i)} = 1 + i(z-i) + (i(z-i))^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n (z-i)^n$, si $|z-i| < 1$ entonces por la unicidad de las series de potencias $f(z) = \frac{i}{z}$.

El siguiente resultado cuya demostración omitimos muestra que la función analítica definida por una serie de potencias es continua e integrable.

Teorema **6.17.** *Sea* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, (z-z_0)^n$ *una serie de potencias convergente en la región* $|z-z_0| < R$ *y* $f(z)$ *su función suma es decir*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, (z-z_0)^n \quad \text{en} \quad |z-z_0| < R$$

entonces

1. *f(z) es continua en* $|z-z_0| < R$

2. $f(z)$ es integrable en $|z - z_0| < R$, y

$$\int_\alpha f(z)\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \quad en \;\; |z - z_0| < R$$

para toda curva α suave por partes contenida en la región, y la serie tiene el mismo radio de convergencia R

Una observación final para terminar esta sección. Hemos llamado la atención sobre la importancia del concepto de convergencia uniforme de una serie de funciones, sin definir de manera explícita, lo que esto significa; continuando con esta idea presentamos dos afirmaciones que serán utilizadas en la próxima sección.

1. Si cada término de la sucesión de funciones que define una serie de funciones es acotada en todo punto de su dominio y la serie definida por las cotas es convergente entonces la serie de funciones converge uniformemente.

2. Si una serie de funciones continuas converge uniformemente entonces la serie puede ser integrada término a término

6.5. Series de Taylor

En la sección anterior se demostró que la función analítica definida por una serie de potencias representa en el interior de su círculo de convergencia una función holomorfa. En este apartado se demuestra el recíproco del resultado anterior y que por tanto: "Una función f es holomorfa en una región si y sólo sí la función f es analítica en tal región".

Teorema **6.18** (Teorema de Taylor)**.** *Sea f una función holomorfa en una región K y z_0 un punto en K entonces en todo círculo $|z - z_0| < r$ contenido completamente en K, f es una función analítica en K, es decir, f puede representarse por una serie de potencias de radio de convergencia $R \geq r > 0$*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

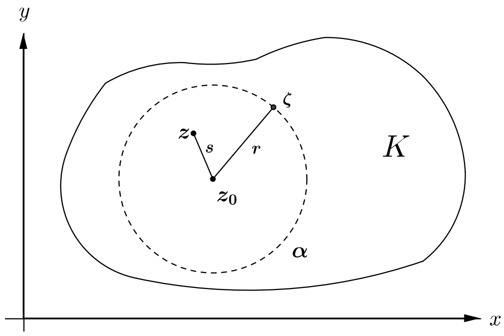
Demostración. Sea α la frontera del círculo $|\zeta - z_0| < r$ entonces para todo z en el interior de α se tiene que $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| < 1$, así la serie geométrica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n$ tiene como suma $\dfrac{1}{1 - \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)}$ y por tanto

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_0}{\zeta-z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n$$

Por la fórmula integral de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\, (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\alpha \sum_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta)\, d\zeta$$

Si z en el interior de α se considera fijo y se llama $s = |z - z_0|$



entonces $\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \frac{s}{r} < 1$ por tanto

$$|g_n(\zeta)| = \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| = \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|}\left(\frac{s}{r}\right)^n < \frac{Ms^n}{r^{n+1}} \quad \text{donde} \quad M = \max_{\zeta\in\alpha}|f(\zeta)|$$

y puesto que la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{Ms^n}{r^{n+1}}$ converge entonces por la observación 1 anterior la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(\zeta)$ converge uniformemente para todo ζ en α luego por la observación 2 esta serie se puede integrar término a término, es decir

$$\int_\alpha \sum_{z=0}^{\infty} g_n(\zeta)\, d\zeta = \sum_{z=0}^{\infty}\int_\alpha g_n(\zeta)\, d\zeta$$

y por tanto

$$f(z) = \sum_{z=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta\right](z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\alpha \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

con α definida como $|\zeta - z_0| = r$, con $r \le R$, R el radio de convergencia de la serie. □

Definición **6.12.** *Para una función analítica la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

se llama desarrollo en ***serie de Taylor*** *de la función f alrededor del punto z_0.*

Ejemplo **6.16.** Desarrollar en serie de Taylor alrededor del origen las funciones

$$a- \ f(z) = senz \qquad\qquad b- \ f(z) = cosz$$

- a - Para $f(z) = senz$ se tiene que

$$f^{(n)}(z) = \begin{cases} senz & \text{si } n = 4k \\ cosz & \text{si } n = 4k+1 \\ -senz & \text{si } n = 4k+2 \\ -cosz & \text{si } n = 4k+3 \end{cases} \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots$$

por tanto

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 2k \\ 1 & \text{si } n = 4k+1 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ -1 & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

y así

$$senz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

y esta serie es válida en $\mathbb{C}$

b - Por el teorema 6.14 la serie $senz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ puede derivarse término a término, por tanto

$$cosz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

y esta serie es válida en $\mathbb{C}$

Obsérvese que el problema de expresar una función analítica en serie de Taylor está resuelto por el cálculo de los coeficientes a_n aplicando la fórmula

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad n = 1, 2, \ldots$$

sin embargo la realización directa de estos cálculos suele resultar en ocasiones laborioso, por tal motivo se suelen utilizar métodos indirectos que se basan en desarrollos conocidos y en algo de ingenio. La parte b del ejemplo 6.14 es una ilustración de ello, aquí está otra.

Ejemplo **6.17.** Desarrollar en serie de Taylor las ramas dadas de las siguientes funciones multiformes alrededor del punto z_0 dado.

a. $f(z) = Lnz, \quad Ln1 = 0, \quad z_0 = 1$ *b.* $f(z) = ln(z+1), \quad Ln1 = 0, \quad z_0 = 0$

a. Puesto que $g(\zeta) = \frac{1}{\zeta} = \frac{1}{1-(1-\zeta)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (1-\zeta)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\zeta - 1)^n$, si $|\zeta - 1| < 1$ y dado que una primitiva analítica de $g(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ en la región $|\zeta - 1| < 1$ es la rama principal de la función $f(z) = Lnz$ que además satisface la condición $ln1 = 0$ entonces por el teorema 6.17 se tiene que

$$lnz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_1^z (-1)^n (\zeta - 1)\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} (z-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n, \quad \text{si } |z-1| < 1$$

b. Si en la serie $lnz = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ cuando $|z-1| < 1$ se sustituye z por $z+1$ y se obtiene

$$ln(z+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad \text{siempre que} \quad |z| < 1.$$

Nótese que $f(z) = ln(z+1)$ es la rama uniforme de la función $F(z) = Ln(z+1)$ que satisface la condición $ln1 = 0$ en la región K cuya frontera es el rayo $x \leq -1$, $y = 0$.

6.6. Series de Laurent

Las series de Taylor incluyen únicamente potencias positivas, en esta parte del texto estamos interesados en determinar, si existe, la región de convergencia de una serie que incluya únicamente potencias negativas o que simultáneamente incluya ambos tipos de potencias. Consideramos en primera instancia las que incluyen potencias negativas.

Teorema **6.19.** *Consideremos una serie de la forma*

$$b_0 + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots \qquad (1)$$

y sea $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt{b_n}$ *entonces*

1. *Si* $r = 0$ *entonces la serie* (1) *converge para todo* z *en* $\mathbb{C}$*, excepto en* $z = z_0$
2. *Si* $r = \infty$ *entonces la serie* (1) *converge únicamente en* $z = \infty$
3. *Si* $0 < r < +\infty$ *la serie* (1) *converge en* $|z - z_0| > r$ *y diverge en* $|z - z_0| < r$.

Demostración. Si en la serie (1) se realiza el cambio de variable

$$\zeta = \frac{1}{z - z_0}$$

la serie se convierte en

$$b_0 + b_1\zeta + b_2\zeta^2 + \cdots + b_n\zeta^n + \cdots \qquad (2)$$

Por el teorema de Cauchy-Hadamard la serie (2) converge para todo ζ talque $|\zeta| < R = \frac{1}{r}$ y diverge para todo ζ talque $|\zeta| > R = \frac{1}{r}$. Cuando $R = 0$ la serie (2) converge solamente en $\zeta = 0$ y cuando $R = \infty$ la serie (2) converge para todo ζ en $\mathbb{C}$.
Al trasladar estas conclusiones a la serie (1) con $\zeta = \frac{1}{z-z_0}$ se tiene:

1. Si $r = 0$ ($R = \infty$) la serie (1) converge para todo z en $\mathbb{C}$ excepto $z = z_0$.
2. Si $r = \infty$ ($R = 0$) la serie (1) converge únicamente en $z = \infty$.
3. Si $0 < r < +\infty$ la serie (1) converge para todo z talque $|z - z_0| > r$ y diverge para todo z talque $|z - z_0| < r$

□

Por el teorema 6.14 esta serie representa una función analítica $f(z)$ en su región de convergencia.
Consideramos a continuación la serie obtenida al combinar una serie de potencias positivas y una serie de potencias negativas.

Definición **6.13.** *Una serie de potencias de la forma*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

se llama ***serie de Laurent*** *alrededor del punto* $z = z_0$.

La serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ se interpreta como la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ que se llama **la parte principal** de la serie, la cual converge en la región $|z - z_0| > r$ con r dado por $r = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ que se llama **la parte regular** de la serie, la que converge en la región $|z - z_0| > R$ con R dado por

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

La serie de Laurent se considera convergente si y sólo si la parte regular y la parte principal son convergentes. Se sigue entonces que si $R > r$ entonces la parte principal y la parte regular convergen simultáneamente en el anillo $r < |z - z_0| < R$ y por tanto la serie de Laurent converge en la misma región y representa una función analítica en el anillo de convergencia.

Las observaciones anteriores se resumen en el siguiente resultado

Teorema **6.20.** *Una serie de Laurent* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *representa una función analítica* $f(z)$ *en el anillo* $r < |z-z_0| < R$.

El recíproco del resultado anterior es válido y se conoce como el Teorema de Laurent.

Teorema **6.21** (Teorema de Laurent)**.** *si* f *es una función holomorfa en el anillo* $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq r < |z-z_0| < R \leq +\infty\}$ *entonces* f *es una función analítica en* K*, es decir,* f *puede representarse en dicho anillo por una serie de Laurent convergente*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

donde

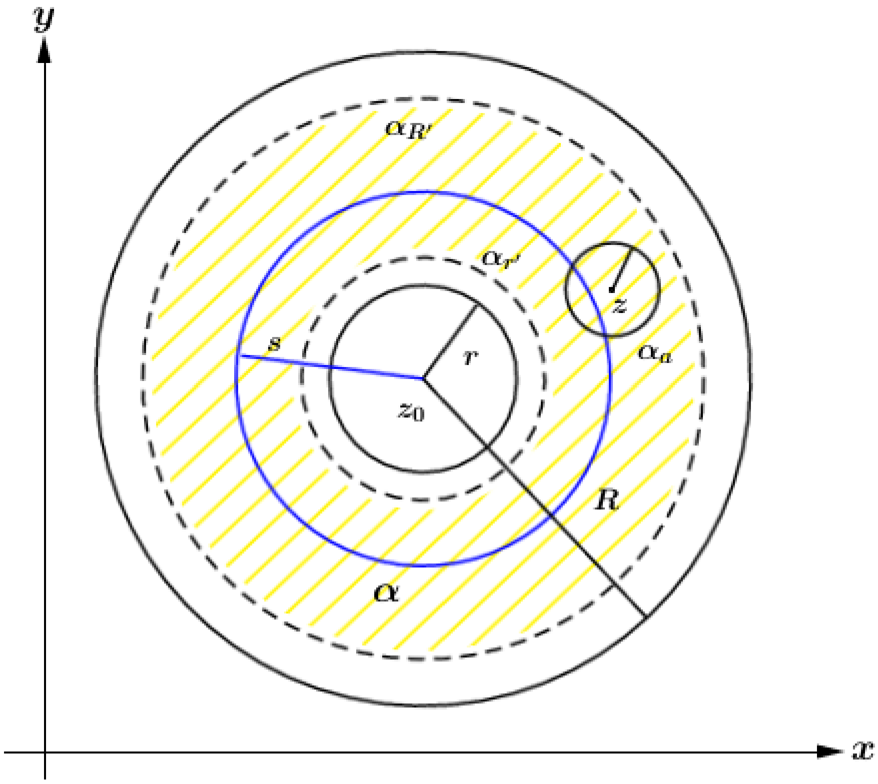
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-z_0|=s} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\, d\zeta \quad \textit{para} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \textit{y} \quad r < s < R$$

Demostración. Sea z un punto fijo en el anillo K y r', R' tales que el anillo $K' = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R'\}$ esté totalmente contenido en K y $a > 0$ tal que la circunferencia $|\zeta - z| = a$ esté en el interior de K'. Puesto que la función

$$g(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$$

es holomorfa en K excepto en el punto $\zeta = z$ entonces por el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta$$



Por la fórmula integral de Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_a} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta = f(z)$$

entonces

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta$$

Para la primera integral se procede como en el teorema de Taylor, Teorema 6.18 para obtener

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para la segunda integral se procede como sigue:

$$\frac{-1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z - z_0) - (\zeta - z_0)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^n \quad \text{ya que} \quad \left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$$

para ζ sobre $\alpha_{r'}$ lo que nos permite expresar la segunda integral como

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n}} (z - z_0)^{-(n+1)}\, d\zeta$$

Puesto que $f(\zeta)$ es acotada sobre $\alpha_{r'}$ y la serie dentro de la integral es uniformemente convergente entonces la última serie se puede integrar término a término, por tanto

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)}\, d\zeta &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{-n}}\, d\zeta \right] (z - z_0)^{-(n+1)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta \right] (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}
\end{aligned}$$

donde

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

En resumen:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

donde

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{R'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ y } \alpha_{R'} \text{ es la circunferencia } |\zeta - z_0| = R' \\
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha_{r'}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}\, d\zeta \text{ con } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ y } \alpha_{r'} \text{ es la circunferencia } |\zeta - z_0| = r'
\end{aligned}$$

Finalmente si s es un número real tal que $r < s < R$ y α es la circunferencia $|\zeta - z_0| = s$ entonces puesto que $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$ y $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{-n+1}}$ son holomorfas en el interior de $\alpha_{R'} - \alpha$ y $\alpha - \alpha_{r'}$ el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexss implica que las circunferencias $\alpha_{R'}$ y $\alpha_{r'}$ se pueden reemplazar por la circunferencia α por lo tanto

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{donde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \quad \text{con} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y α la circunferencia $|\zeta - z_0| = s$ con $r < s < R$. $\square$

En los problemas resueltos se ilustrará el cálculo de los coeficientes utilizando la integral, el siguiente ejemplo obtiene la serie de Laurent de una función de forma indirecta.

Ejemplo **6.18.** Desarrollar en serie de Laurent $f(z) = \frac{1}{z(z+i)}$ en el anillo $0 < |z| < 1$
Al expresar $f(z)$ en fracciones parciales se obtiene $f(z) = \frac{-i}{z} + \frac{i}{z+i}$ por tanto

$$f(z) = -\frac{i}{z} + \frac{i}{z+i} = -\frac{-i}{z} + \frac{i}{i(1-iz)} = -\frac{i}{z} + \sum_{n=0}^{\infty}(iz)^n = -\frac{i}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} i^n z^n, \quad \text{siempre que} \quad 0 < |z| < 1$$

6.7. Problemas resueltos

En esta parte del capítulo se presenta la acostumbrada sección de problemas resueltos que ilustran la teoría tratada así como algunas técnicas para desarrollar en serie de Taylor o de Laurent, cierta clase de funciones.

Problema **6.1.** Estudiar la convergencia de las series

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + in} \qquad\qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$$

Solución.

a - Puesto que $\frac{1}{\sqrt{n}+in} = \frac{\sqrt{n}-in}{n+n^2} = \frac{\sqrt{n}}{n+n^2} - \frac{n}{n+n^2}i$ entonces la parte imaginaria de la serie dada es la serie $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+n^2}$ que corresponde a la serie armónica la cual es divergente por tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+in}$ diverge.

b - Para $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ la serie de sus módulos es $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!}$ la cual por el criterio de la razón

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{2})^{n+1} n!}{(\sqrt{2})^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0 < 1$$

es convergente por tanto la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!}$ es absolutamente convergente y por tanto convergente.

Problema **6.2.** Calcular la suma de la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{sen\, n}{2^n}$

Solución. Consideremos de manera auxiliar la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{cos\, n}{2^n}$ y la serie compleja $z_n = x_n + iy_n$ donde $x_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{cos\, n}{2^n}$ y $y_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{sen\, n}{2^n}$.
Puesto que

$$z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos\, n}{2^n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\, n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{cos\, n + isen\, n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^i}{2}\right)^n$$

se tiene una serie geométrica de razón $\frac{e^i}{2}$ y como $\left|\frac{e^i}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ entonces esta serie converge a

$$\frac{1}{1-\frac{e^i}{2}} = \frac{2}{(2-cos1) - isen1} = \frac{2((2-cos1) + isen1)}{(2-cos1)^2 + sen^2 1} = \frac{4-2cos1}{5-4cos1} + \frac{2sen1}{5-4cos1}i$$

así

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen\, n}{2^n} = \frac{2sen1}{5-4cos1}$$

Problema **6.3.** Calcular la suma de la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, z^n$ si $|z| < 1$

Solución. La serie dada se puede expresar como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n = z + 2\,z^2 + 3\,z^3 + \cdots + m\,z^m \cdots$$
$$= z\,(1 + 2\,z + 3\,z^2 + \cdots + m\,z^{m-1} + \cdots)$$

y puesto que la serie entre paréntesis, es decir,

$$1 + 2\,z + 3\,z^2 + \cdots + m\,z^{m-1} + \cdots$$

es la derivada de la serie

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + \cdots$$

entonces la serie considerada se escribe como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n = z\,(1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + \cdots)'$$

y como la serie

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^m + \cdots$$

es una serie geométrica que converge a $\frac{1}{1-z}$ siempre que $|z| < 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,z^n$ se puede expresar como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n = z\left(\frac{1}{1-z}\right)' \text{ siempre que } |z| < 1$$

y así

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^n = \frac{z}{(1-z)^2} \text{ sí } |z| < 1.$$

Problema **6.4.** Hallar la región de convergencia de las series

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n]^n\,(z - i)^n$ *c.* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + i)^{n^2}\, z^{1+2+\cdots+n}$

Solución.

a - Puesto que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{n^n(n+1)n!}{(n+1)(n+1)^n n!} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

entonces $\rho = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}$ y la serie converge para todo z tal que $|z| < e$

b - En este caso $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{[3 + (-1)^n]^n} = 3 + (-1)^n$ y puesto que la sucesión $\{3 + (-1)^n\}$ posee dos puntos de acumulación 2 y 4 entonces $\rho = 4$ y la serie converge para todo z talque $|z - i| < \frac{1}{4}$

c - La serie dada puede expresarse como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 + i)^{n^2}\, z^{\frac{n\,(n+1)}{2}}$ por lo que

$$a_n = \begin{cases} (1 + i)^{k^2} & si \quad n = \frac{1}{2}\,k(k+1) \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{N} \\ 0 & si \quad n \neq \frac{1}{2}\,k(k+1) \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

entonces

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left|(1 + i)^{k^2}\right|^{\frac{2}{k\,(k+1)}} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{2k}{k+1}} = 2,$$

así $R = \dfrac{1}{2}$ y la serie converge para todo z tal que $|z| < \dfrac{1}{2}$.

Problema **6.5.** Hallar la serie de Taylor alrededor de $z_0 = \frac{\pi}{4}$ para la función $f(z) = cosz$

Solución. Como

$$cos\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{y} \quad sen\, z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad \text{si} \quad |z| < +\infty$$

entonces si se llama $w = z - \frac{\pi}{4}$ se tiene que

$$\begin{aligned} cos\, z = cos\left(w + \frac{\pi}{4}\right) &= cos\frac{\pi}{4} cos\, w - sen\frac{\pi}{4} sen\, w = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} w^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} sen\frac{n\pi}{2} \right) \frac{w^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}\right) \frac{\left(z - \frac{\pi}{4}\right)^n}{n!} \quad \text{siempre que} \quad |z| < +\infty \end{aligned}$$

Problema **6.6.** Hallar la serie de Taylor de la función

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

alrededor del origen

Solución. Puesto que $\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$ y $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, si $|z| < 1$ entonces derivamos término a término la serie de $\frac{1}{1-z}$ y se tiene que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \qquad \text{siempre que} \qquad |z| < 1$$

Tambien se puede proceder de la siguiente manera:
Dado que para $f(z) = (1-z)^{-2}$ se tiene que $f'(z) = -2(1-z)^{-3}$, $f''(z) = 6(1-z)^{-4}$ e inductivamente

$$f^{(n)}(z) = (n+1)!(1-z)^{-(n+2)}$$

entonces $f^{(n)}(0) = (n+1)!$ y por tanto

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = n+1, \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

y nuevamente

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \qquad \text{siempre que} \quad |z| < 1$$

Problema **6.7.** Hallar una función analítica $f(z)$ que satisfaga la ecuación diferencial

$$f''(z) - f(z) = 0$$

y las condiciones iniciales $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$

Solución. Supongamos que la función f tiene la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

y determinemos los valores de los coeficientes a_n.
Puesto que

$$f''(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n$$

entonces al reemplazar en la ecuación diferencial $f''(z) - f(z) = 0$ se tiene que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_n\right] z^n = 0$$

y por tanto los coeficientes a_n de la serie satisfacen la ecuación de recurrencia

$$a_{n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

de la cual inductivamente es posible mostrar que $a_{2n} = \frac{a_0}{(2n)!}$ y $a_{2n+1} = \frac{a_1}{(2n+1)!}$
Dado que las condiciones $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$ implican que $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$ entonces

$$a_{2n} = 0 \qquad \text{y} \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} z^{2n+1} \\ &= sh\, z \qquad \text{siempre que} \qquad |z| < +\infty \end{aligned}$$

Observación: Mostramos que $a_{2n+1} = \frac{a_1}{(2n+1)!}$
De la relación

$$a_{2n+2} = \frac{a_n}{(n+2)(n+1)} \quad \text{se tiene que}$$

1. Para $n = 1$, $a_3 = \frac{a_1}{3*2} = \frac{a_1}{3!}$
2. Supongamos que para $n = 2k-1$ se tiene que $a_{2k-1} = \frac{a_1}{(2k-1)!}$ entonces

$$a_{2k+1} = a_{(2k-1)+2} = \frac{a_{2k-1}}{(2k+1)(2k)} = \frac{1}{(2k+1)(2k)} \cdot \frac{a_1}{(2k-1)!} = \frac{a_1}{(2k+1)!}$$

Problema **6.8.** Desarrollar en serie de Laurent alrededor de $z_0 = -1$ la función

$$f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$$

Solución. La serie buscada tiene la forma

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z+1)^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(z)}{(z+1)^{n+1}}\, dz = \int\limits_{\alpha} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^{n+3}}\, dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y α es por ejemplo la circunferencia $|z+1| = 1$ y se tiene

1. Para $n \leq -3$ la función $g(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^{n+3}}$ es holomorfa (analítica) sobre y en el interior de α por tanto aplicando el teorema de Cauchy

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^{n+3}}\, dz = 0 \qquad \text{para} \ \ n \leq -3$$

2. Para $n > -3$, por la fórmula de Cauchy para derivadas

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{1}{(z-1)^2(z+1)^{n+3}}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{\frac{1}{(z-1)2}}{(z+1)^{n+3}}\, dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{2\pi i}{(n+2)!} \left(\frac{1}{(z-1)^2} \right)^{(n+2)} \Bigg|_{z=-1} \end{aligned}$$

puesto que $\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)^{(n+2)} = \frac{(-1)^n(n+2)!}{(z-1)^{n+3}}$ entonces $\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)^{(n+2)}\Big|_{z=-1} = \frac{(-1)^n(n+2)!}{(-2)^{n+3}} = -\frac{(n+2)!}{2^{n+3}}$ entonces $a_n = -\frac{1}{(n+2)!}\frac{(n+2)!}{2^{n+3}} = -\frac{1}{2^{n+3}}$, $n > -3$ y por tanto

$$\frac{1}{(z^2-1)^2} = -\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+3}}(z+1)^n \quad \text{siempre que} \quad |z+1|<1$$

Problema **6.9.** Desarrollar la función $f(z) = \frac{z+7}{z^2+2z-3}$ en serie de Laurent en las regiones

a. $1<|z|<3$ *b.* $0<|z-1|<4$ *c.* $|z+3|>4$ *d.* $|z|<1$

Solución. Al descomponer la función $f(z) = \frac{z+7}{z^2+2z-3}$ en fracciones parciales se tiene

$$f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z+3}$$

por tanto:

a -

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z+3} &= \frac{2}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{1}{z\left(1+\frac{z}{3}\right)} \\ &= \frac{2}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{3}\right)^n, \quad \text{si} \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1 \text{ y } \left|\frac{z}{3}\right|<1 \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}z^n, \quad \text{si} \quad 1<|z|<3 \end{aligned}$$

b -

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{4+(z-1)} &= \frac{2}{z-1} - \frac{1}{4\left(1+\frac{z-1}{4}\right)} \\ &= \frac{2}{z-1} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{4}\right)^n, \quad \text{si} \quad z\neq 1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{z-1}{4}\right|<1 \\ &= \frac{2}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^{n+1}}(z-1)^n, \quad \text{si} \quad 0<|z-1|<4 \end{aligned}$$

c -

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z+3} = \frac{2}{(z+3)-4} - \frac{1}{z+3} &= \frac{2}{(z+3)\left(1-\frac{4}{z+3}\right)} - \frac{1}{z+3} \\ &= \frac{2}{z+3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z+3}\right)^n - \frac{1}{z+3}, \quad \text{si} \quad |z+3|\neq 0 \quad \text{y} \quad \left|\frac{4}{z+3}\right|<1 \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{(z+3)^{n+1}} - \frac{1}{z+3} \quad \text{si} \quad |z+3|>4 \end{aligned}$$

d -

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z+3} = -\frac{2}{1-z} - \frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)} &= -2\sum_{n=0}^{\infty}z^n - \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n, \quad \text{si} \quad |z|<1 \quad \text{y} \quad \left|\frac{z}{3}\right|<1 \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)z^n, \quad \text{si} \quad |z|<1 \end{aligned}$$

Problema **6.10.** Desarrollar en serie de Laurent alrededor de $z_0 = 1$ la función

$$f(z) = z^2 sen\frac{1}{z-1}$$

Solución. Puesto que $sen\, z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ si $|z| < +\infty$ entonces

$$sen\frac{1}{z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \quad \text{si} \quad 0 < |z-1| < +\infty$$

y como $z^2 = (z^2-1)+1 = (z-1)(z+1)+1 = (z-1)((z-1)+2)+1 = (z-1)^2 + 2(z-1)+1$ entonces

$$\begin{aligned}
f(z) = z^2 sen\frac{1}{1-z} &= \left(1 + 2(z-1) + (z-1)^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n+1}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} \\
&= (z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} \\
&= (z-1) + 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{(2n-1)!} - \frac{1}{(2n+1)!}\right]}{(z-1)^{2n-1}} + \frac{2(-1)^n}{(2n+1)!(z-1)^{2n}} \right] \quad \text{si} \quad 0 < |z-1| < +\infty.
\end{aligned}$$

Problema **6.11.** Usar los coeficientes de la serie de Laurent de la función $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ en $|z| > 0$ para demostrar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta} cos(sen\theta - n\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución. Puesto que $e^z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ para $|z| < \infty$ entonces para $e^{\frac{1}{z}}$ la serie de Laurent es

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} \quad \text{para} \quad |z| > 0$$

y por tanto $a_n = \frac{1}{n!}$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$
De otro lado el desarrollo en serie de Laurent de $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ para $|z| > 0$ tiene la forma

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

donde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{y} \quad \alpha \text{ es, por ejemplo,} \quad |z| = 1$$

Una parametrización de $|z| = 1$ con punto inicial en $z = -1$ es $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ por tanto

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z^{n+1}}\, dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{\frac{1}{e^{i\theta}}} i e^{i\theta}}{(e^{i\theta})^{n+1}}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{e^{-i\theta}} e^{-n\theta i}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta - isen\theta} (cos\, n\theta - isen\, n\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta} (cos(sen\theta) - isen(sen\theta))(cos\, n\theta - isen\, n\theta)\, d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta} (cos(sen\theta - n\theta) + isen(sen\theta + n\theta))\, d\theta
\end{aligned}$$

y puesto que los coeficientes del desarrollo en serie de Laurent de una función son únicos entonces

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta} (cos(sen\theta - n\theta) + isen(sen\theta + n\theta))\, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

de donde se deduce que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta} cos(sen\theta - n\theta)\, d\theta = \frac{2\pi}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Nótese que además

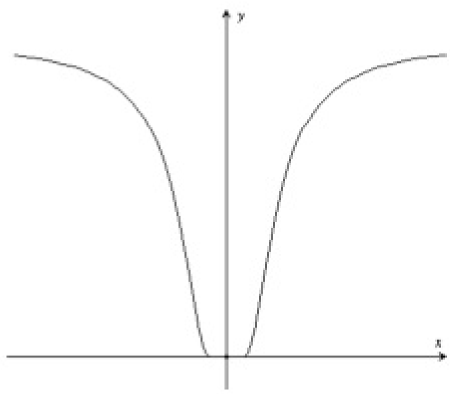
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{cos\theta} sen(sen\theta + n\theta)\, d\theta = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Problema **6.12.** El teorema de Taylor establece que una función de variable compleja holomorfa en una región es analítica en tal región, muestre que este resultado no necesariamente es cierto para funciones de variable real y de valor real.

Solución. Consideremos la función de variable real x

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

cuya gráfica se presenta a continuación.



Obsérvese que esta función es par, no negativa, definida y continua en $\mathbb{R}$ y unicamente se anula en $x = 0$. Veamos que esta función tiene derivadas de todos los órdenes pero que su serie de Taylor no converge a la función alrededor de $x = 0$.
Nótese que:

1. Si $x \neq 0$ entonces:
   - $f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\, 2x^{-3} = e^{-\frac{1}{x^2}}\, P_3\left(\frac{1}{x}\right)$ donde $P_3\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio de grado 3 en $\frac{1}{x}$.
   - $f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\, \left(4x^{-6} - 6x^{-4}\right) = e^{-\frac{1}{x^2}}\, P_6\left(\frac{1}{x}\right)$ donde $P_6\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio de grado 6 en $\frac{1}{x}$.
   - Supongamos que $f^{(n)}(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}\, P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ donde $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ es un polinomio de grado $3\,n$ en $\frac{1}{x}$, entonces inductivamente vemos que

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\, P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = e^{-\frac{1}{x^2}}\left(-\frac{1}{x^2} P'_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^{-3}\, P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}}\left(P_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2}\, P'_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)\right) \\ &= e^{-\frac{1}{x^2}}\, Q_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right), \quad \text{donde} \quad Q_{3(n+1)}\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{es un polinomio de grado} \end{aligned}$$

$3(n+1) \quad$ en $\quad \dfrac{1}{x}$

2. Si $x = 0$ entonces

- $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-1/x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{x}}{e^{1/x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-x^{-2}}{e^{1/x^2}\,(-2x^{-3})} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{2\,e^{1/x^2}} = 0$
- $f''(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^{-1/x^2}}{x^4} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{x^4\,e^{1/x^2}} = 0.$
- Supongamos que $f^{(n)}(0) = 0$ entonces inductivamente vemos que

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}\, P_{3n}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{P_{3(n+1)}\left(\dfrac{1}{x}\right)}{e^{1/x^2}} = 0$$

de 1 y 2 se sigue que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}\, P_{3\,n}\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

donde $P_{3\,n}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ es un polinomio de grado $3\,n$ en la variable $\frac{1}{x}$, así entonces la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

es diferenciable en $\mathbb{R}$.
Puesto que $f^{(n)}(0) = 0$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ la serie de Taylor alrededor de $x = 0$ es

$$f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{2!} + \cdots = 0$$

la cual converge para todo x en $\mathbb{R}$, su suma es siempre cero pero converge a $f(x)$ únicamente cuando $x = 0$.

6.8. Problemas propuestos

1. Estudiar la convergencia de las siguientes series

$$a.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{n} \qquad b.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cosin}{2^n} \qquad c.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nsenin}{3^n} \qquad d.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{shi\sqrt{n}}{senin}$$

2. Sí $|z| < 1$, hallar la suma de las series

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n} \qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad c.\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$$

3. Determinar la región de convergencia de las siguientes series

$$a.\ \sum_{n=0}^{\infty} cosin(z-i)^n \qquad b.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-i)^n} \qquad c.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n \qquad d.\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[i + (-1)^n\right]^n (z+1)^n$$

$$e.\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$$

4. Desarrollar las siguientes funciones en serie de Taylor alrededor del punto indicado y hallar el radio de convergencia

$a.\ sen(2z+1), \quad z_0 = -1$	$b.\ ch^2 z, \quad z_0 = 0$	$c.\ \frac{z}{z^2-4z+3}, \quad z_0 = 0$
$d.\ \frac{z^2}{(z+1)^2} \quad z_0 = 0$	$e.\ e^z, \quad z_0 = \frac{1}{2}$	$f.\ \frac{1}{3z+i}, \quad z_0 = -2$
$g.\ ln(2-z), \quad z_0 = 0$	$h.\ ln(2+z-z^2), \quad z_0 = 0$	$i.\ \frac{z}{z+2}, \quad z_0 = 1$

5. Determinar la región de convergencia de las siguientes series

   $a.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{(z-2-i)^n}$ $\quad b.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+1}{(z+2i)^n}$ $\quad c.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^n + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{4}\right)^n$ $\quad d.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 z^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n2^n}$

   $e.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n-1}{(z+1)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(i+n)^n}$ $\quad f.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(z+1-i)^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} n(z+1-i)^n$ $\quad g.\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{z^n} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{b^n},\ b \neq 0$

6. Analizar si las siguientes funciones admiten desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto indicado

   $a.\ cos\frac{1}{z},\quad z=0$ $\quad b.\ cos\frac{1}{z},\quad z=\infty$ $\quad c.\ ctgz,\quad z=\infty$ $\quad d.\ \frac{z^2}{sen\frac{1}{z}},\quad z=0$ $\quad e.\ ln\frac{1}{z-1},\quad z=\infty$

7. Desarrollar en serie de Laurent en la región dada. Si éste no se da, hallar la región de convergencia.

   $a.\ \frac{sen^2 z}{z},\quad z=0$ $\qquad b.\ z^3 e^{\frac{1}{z}},\quad z=0$ $\qquad c.\ \frac{1+cosz}{z^4},\quad z=0$

   $d.\ \frac{z}{(z+1)^2}\quad z=-1$ $\qquad e.\ \frac{senz}{z-2},\quad z=2$ $\qquad f.\ \frac{1}{ze^{z+i}},\quad z=-i$

   $g.\ \frac{1}{z^2-5z+6},\quad 2<|z|<3$ $\qquad h.\ \frac{1}{z^2-5z+6},\quad |z|>3$ $\qquad i.\ \frac{2z+3}{z^2+3z+2},\quad 1<|z|<2$

   $j.\ \frac{1}{z^2+2z-8},\quad 1<|z+2|<4$ $\qquad k.\ \frac{1}{z^2+1},\quad 0<|z-i|<2$ $\qquad l.\ \frac{1}{z^2+1},\quad z=\infty$

   $m.\ \frac{1}{(z^2+1)^2},\quad z=i$ $\qquad n.\ \frac{1}{(z^2+1)^2},\quad z=\infty$ $\qquad o.\ \frac{z^2-2z+5}{(z-2)(z^2+1)},\quad z=2$ y $1<|z|<2$

8. Demuestre que los coeficientes a_n del desarrollo en serie de Taylor de la función

   $$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$$

   satisface la relación $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, para $n \geq 2$. Hallar los coeficientes a_n y el radio de convergencia de la serie.

9. El teorema 6.15 establece que una función de variable compleja analítica (y por tanto holomorfa) es indefinidamente diferenciable. Muestre que este resultado no es necesariamente cierto para funciones de variable real.

10.
    a) Considere la función de variable real

    $$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

    Desarrolle esta función en serie de potencias alrededor del origen y halle su intervalo de convergencia ¿Puede explicar porque esta función aunque es indefinidamente diferenciable en $\mathbb{R}$ su intervalo de convergencia es "pequeño"?

    b) Considere la función de variable compleja

    $$f(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

    Desarrolle esta función en series de potencias alrededor del origen y halle su círculo de convergencia. Es esta función indefinidamente diferenciable en $\mathbb{C}$? Concuerda este hecho con su círculo de convergencia?

Capítulo 7

El Cálculo de residuos

Si f es una función analítica en el interior de una curva cerrada y simple α entonces, por el Teorema de Cauchy, el valor de la integral de f sobre α es cero. Si la función no es analítica en un número finito de puntos en el interior de α la afirmación anterior no es necesariamente cierta y en este caso para cada uno de los puntos existe un número denominado residuo que determina el valor de la integral. En este capítulo se desarrolla la teoría de residuos y se utiliza para el cálculo de integrales definidas reales.

7.1. Ceros y puntos singulares aislados de una función

Definición **7.1.** *Sea $w = f(z)$ una función de variable compleja en una región K y z_0 en K El punto $z = z_0$ es un* ***cero de orden*** *k de la función f si y solo si $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) = 0,\ldots,$ $f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Un cero de orden 1 es un* ***cero simple*** *de f.*

Ejemplo **7.1.** Los ceros de la función $f(z) = chz + 1$ son los z en $\mathbb{C}$ tales que $chz = -1$ es decir $cosiz = -1$ y por tanto $z = (2k+1)\pi i,\ k$ en z. Como

$$f'((2k+1)\pi i) = sh((2k+1)\pi i) = sen(2k+1)\pi = 0 \text{ y } f''((2k+1)\pi i) = ch((2k+1)\pi i) = cos(2k+1)\pi \neq 0$$

entonces los ceros de la función ocurren en los puntos $z = (2k+1)\pi i$ y tienen orden 2.

El siguiente resultado es una consecuencia de la definición anterior y del hecho de que una función holomorfa es desarrollable en serie de Taylor.

Teorema **7.1.** *Sea f una función analítica en un punto z_0. El punto $z = z_0$ es un cero de orden k de f si y solo si*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z)$$

donde $g(z_0) \neq 0$ y $g(z)$ es una función analítica en alguna vecindad de z_0.

Demostración. Si f es analítica en z_0 entonces f admite desarrollo en serie de Taylor en alguna vecindad de z_0 es decir

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \text{en} \quad |z - z_0| < R,\ R > 0 \quad \text{y} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Puesto que $z = z_0$ es un cero de orden k de f entonces $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ y $f^{(k)}(z_0) \neq 0$ es decir, $a_0 = a_1 = \cdots = a_{k-1} = 0$ y $a_k \neq 0$ por lo que la serie para f puede expresarse como

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k g(z)$$

donde $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z - z_0)^n$ es analítica en z_0 y $g(z_0) = a_k \neq 0$.

Recíprocamente si $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ con $g(z_0) \neq 0$ y g analítica en z_0 entonces por la Regla de Leibnitz

$$f^{(s)}(z) = \sum_{j=0}^{s} \binom{s}{j} g^{(s-j)}(z) k(k-1)\cdots(k-j+2)(z - z_0)^{k-j},\ s = 0, 1, 2, \ldots, k.$$

por lo que $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{k-1}(z_0) = 0$, $f^{(k)}(z_0) = g(z_0) \neq 0$ y por tanto $z = z_0$ es un cero de orden k de f. $\square$

Ejemplo **7.2.** La función

$$f(z) = \frac{z^7}{1 - cosz}$$

tiene en $z = 0$ un cero de orden 5 puesto que al utilizar el desarrollo en serie de Taylor de la función $h(z) = cosz$ se tiene

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{z^7}{1 - cosz} &= \frac{z^7}{1 - \left(1 - \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{4!}z^4 - \frac{1}{6!}z^6 + \cdots\right)} \\ &= z^5 \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}z^2 + \frac{1}{6!}z^4 + \cdots} \end{aligned}$$

donde $g(z) = \frac{1}{\frac{1}{2!} - \frac{1}{4!}z^2 + \frac{1}{6!}z^4 + \cdots}$ es analítica en $z = 0$ y $g(0) = 2 \neq 0$.

Definición **7.2.** *Sea $w = f(z)$ una función de variable compleja y z_0 un punto en $\mathbb{C}$. z_0 es* ***Un punto singular aislado*** *de f si y solo si f es analítica en la región $0 < |z - z_0| < R$ para algún $R > 0$, es decir f es analítica en alguna vecindad de z_0 con excepción de $z = z_0$.*

Ejemplo **7.3.** La función $f(z) = \frac{z^2}{cosz - 1}$ tiene puntos singulares aislados en los puntos $z = 2k\pi$, k en $\mathbb{Z}$.

Los puntos singulares de una función se clasifican en tres clases, a saber.

Definición **7.3.** *Sea $z = z_0$ un punto singular aislado de una función de variable compleja f, entonces*

1. *$z = z_0$ es una* ***singularidad removible*** *de f si y solo si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe y es finito.*
2. *$z = z_0$ es un* ***polo de orden*** *k de f si y solo si la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un cero de orden k en $z = z_0$.*
3. *$z = z_0$ es una* ***singularidad esencial*** *de f si y solo si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ no existe*

Ejemplo **7.4.**

1. La función $f(z) = \frac{1 - cosz}{z}$ tiene en $z = 0$ una singularidad removible ya que

$$\lim_{z \to 0} \frac{1 - cosz}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{sen^2 z}{z(1 + cosz)} = 0$$

2. La función $f(z) = \frac{shz}{z - shz}$ tiene en $z = 0$ un polo de orden 2 ya que si se considera la función $g(z) = \frac{z - shz}{shz}$ entonces el punto $z = 0$ es un cero de orden 3 de la función $g_1(z) = z - shz$ ya que

$$g_1(0) = 0,\ g_1'(0) = (1 - ch(0)) = 0,\ g_2''(0) = -sh(0) = 0,\ g_1'''(0) = -ch(0) = -1 \neq 0.$$

   El punto $z = 0$ es un cero de primer orden de la función $g_2(z) = shz$ por lo que $z = 0$ es un cero de orden 2 de la función $g(z) = \frac{z - shz}{shz}$ y así $z = 0$ es un polo de segundo orden de $f(z) = \frac{shz}{z - shz}$.

3. El punto $z = 0$ es una singularidad esencial de la función $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ ya que si se toma $S_1 = \{x + iy : x = 0\}$ y $S_2 = \{x + iy : y = 0\}$ entonces

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in S_1}} e^{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{y \to 0} e^{-\frac{1}{y^2}} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in S_2}} e^{-\frac{1}{z^2}} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

   por tanto $\lim\limits_{z \to 0} e^{-\frac{1}{z^2}}$ no existe y así $z = 0$ es una singularidad esencial.

El resultado que se presenta a continuación permite caracterizar la clase de singularidad aislada de una función de variable compleja en términos del desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto considerado.

Teorema **7.2.** *Sea $z = z_0$ una singularidad aislada de una función de variable compleja f, entonces*

1. *$z = z_0$ es una singularidad removible de f si y solo si el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de z_0 no tiene parte prinicipal.*

2. *$z = z_0$ es un polo de f si y solo si la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de z_0 tiene un número finito de términos.*

3. *$z = z_0$ es una singularidad aislada de f si y solo si la parte principal del desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de $z = z_0$ tiene un número infinito de términos.*

Demostración. 1. Si f tiene una singularidad removible en $z = 0$ entonces f es analítica en alguna vecindad $0 < |z - z_0| < R$ y $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0 \neq \infty$ por lo tanto la función definida como

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq z_0 \\ w_0 & \text{si } z = z_0 \end{cases}$$

es analítica en $|z - z_0| < R$ y así admite desarrollo en serie de Taylor en $|z - z_0| < R$ es decir $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ en $0 < |z - z_0| < R$.
Pero $f(z) = g(z)$ para $z \neq z_0$ entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

en la serie de Laurent de f en $0 < |z - z_0| < R$ y por tanto la serie de Laurent de f alrededor de $z = z_0$ no tiene parte principal.

Recíprocamente si el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de $z = z_0$ no tiene parte principal entonces f puede expresarse como

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{en} \quad 0 < |z - z_0| < R$$

luego $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n = a_0 \neq \infty$ y así f tiene una singularidad removible en z_0.

2. Supongamos que f tiene un polo de orden k en $z = z_0$ entonces la función $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ tiene un cero de orden k en $z = z_0$ es decir $g(z) = (z - z_0)^k g_1(z)$ con $g_1(z_0) \neq 0$ y $g_1(z)$ es analítica en una vecindad de z_0 por tanto

$$f(z) = (z - z_0)^{-k} \frac{1}{g_1(z)}$$

Puesto que $\frac{1}{g_1(z)}$ es analítica en z_0 y $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{1}{g_1(z)} = \frac{1}{g_1(z_0)} \neq 0$ entonces el desarrollo en serie de Laurent de $\frac{1}{g_1(z)}$ alrededor de $z = z_0$ no tiene parte principal, es decir

$$\frac{1}{g_1(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad \text{con} \quad a_0 = \frac{1}{g_1(z_0)} \neq 0$$

por tanto

$$\begin{aligned} f(z) = (z - z_0)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^{n-k} \\ &= \sum_{m=-k}^{\infty} b_m(z - z_0)^m \end{aligned}$$

donde $b_{-k} = a_0 \neq 0$ y así el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z = z_0$ posee un número finito de términos.

Recíprocamente, si el desarrollo en serie de Laurent de f tiene, digamos, k-términos, $k \geq 1$ entonces

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{con} \quad a_{-k} \neq 0 \quad \text{en} \quad 0 < |z-z_0| < R$$

por tanto

$$(z-z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n-k}(z-z_0)^n$$

y como $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} \neq 0$ entonces la función $g(z) = (z-z_0)^k f(z)$ tiene en $z = z_0$ una singularidad removible con $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$.
Puesto que para la función $\frac{1}{f(z)}$ se tiene que

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z-z_0)^k}{g(z)} = (z-z_0)^k h(z)$$

con $\frac{1}{f(z_0)} = 0$, $h(z)$ analítica en $z = z_0$ y $h(z_0) \neq 0$ entonces la función $\frac{1}{f(z)}$ es analítica en $z = z_0$ y tiene, por el teorema 7.1 un cero de orden k en $z = z_0$, así por aplicación de la definición 7.3, $f(z)$ tiene en $z = z_0$ un polo de orden k.

La parte 3 del teorema se deja como un ejercicio.

□

Ejemplo **7.5.** Para las siguientes funciones clasificar los puntos singulares indicados

a. $f(z) = \dfrac{1+cosz}{z-\pi},\ z = \pi$ *b.* $f(z) = z^{-7}(z - senz),\ z = 0$ *c.* $f(z) = (z+2)e^{\frac{1}{z+2}},\ z = -2$

a. Puesto que $cosz = cos(\pi + (z-\pi)) = -cos(z-\pi)$ entonces la serie de $cosz$ alrededor de $z = \pi$ es

$$cosz = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-\pi)^{2n}}{(2n)!}$$

por tanto

$$f(z) = \frac{1+cosz}{z-\pi} = \frac{1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}}{z-\pi} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n}}{(2n)!}}{z-\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(z-\pi)^{2n-1}}{(2n)!}$$

y este desarrollo no tiene parte principal entonces en $z = \pi$ la función tiene una singularidad evitable.

b. Utilizando la serie de la función *senz* la función dada se puede expresar como

$$\begin{aligned} f(z) =& z^{-7}(z - senz) = \frac{1}{z^7}\left(z - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right) \\ =& \frac{1}{z^7} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^{2n-6}}{(2n+1)!} \\ =& \frac{1}{3!z^4} - \frac{1}{5!z^2} + \frac{1}{7!} - \frac{z^2}{9!} + \cdots \end{aligned}$$

Por tanto el desarrolo de Laurent de f alrededor de $z = 0$ tiene un número finito de términos en su parte principal y así $z = 0$ es un polo de función dada y puesto que la menor potencia negativa es -4 el polo $z = 0$ tiene orden 4.

c. Puesto que $e^w = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}$ entonces al poner en esta serie $w = \frac{1}{z+2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(z) &= (z+2)e^{\frac{1}{z+2}} = (z+2)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z+2)^{n-1}} \\ &= (z+2) + 1 + \frac{1}{2!(z+1)} + \frac{1}{3!(z+2)^2} + \cdots \end{aligned}$$

y por tanto el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z = -2$ tiene un número infinito de términos en su parte principal y así $z = -2$ es una singularidad esencial de la función.

Definición **7.4.** *Sea f una función analítica en una vecindad de infinito, excepto posiblemente en dicho punto, entonces*

1. *la función f tiene una **singularidad aislada en** $z = \infty$ si y solo si la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene una singularidad aislada en $z = 0$.*

2. *La singularidad aislada de f en $z = \infty$ es una **singularidad removible**, un **polo** ó una **singularidad esencial** si y solo si la singularidad de $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ en $z = 0$ es removible, un polo ó esencial.*

Ejemplo **7.6.** Clasificar la singularidad en $z = \infty$ de las siguientes funciones

$$a.\ f(z) = \frac{z+1}{z^4} \qquad b.\ f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}} \qquad c.\ f(z) = \frac{e^z}{z^2}$$

a. Puesto que la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = z^4 + z$ tiene una singularidad removible en $z = 0$ entonces la función $f(z) = \frac{z+1}{z^4}$ tiene una singularidad removible en $z = \infty$.

b. Dado que la función $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z^3}e^z = \frac{1}{z^3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-3}}{n!}$ tiene un polo de orden 3 en $z = 0$ entonces la función $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ tiene un polo de orden 3 en $z = \infty$.

c. La función

$$\begin{aligned} g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) &= z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^{n-2}} \\ &= z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3! z} + \frac{1}{4! z^2} + \cdots \end{aligned}$$

tiene una singularidad esencial en $z = 0$ por tanto la función $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ tiene un punto singular esencial en $z = \infty$.

7.2. El teorema del residuo

El teorema de Cauchy y los resultados que son consecuencia de este, a saber, la fórmula integral de Cauchy, la fórmula de Cauchy para derivadas y el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas, proporcionan métodos para calcular integrales de funciones uniformes sobre curvas cerradas cuando el integrando deja de ser analítico en un número finito de puntos que están en el interior de la curva. Los resultados de esta sección permiten realizar este cálculo cuando en el interior de la región la función tiene un número finito de singularidades aisladas. El concepto central en este objetivo es el de residuo el cual fue introducido por A. Cauchy, alrededor del 1826, al intentar encontrar la diferencia entre los valores de dos integrales sobre dos curvas, con el mismo punto inicial y final, que encerraban polos de la función.

Definición **7.5.** *Sea f una función analítica en la región $0 < |z - z_0| < R$ y z_0 un punto singular aislado de f. El **residuo de f en el punto** z_0, denotado $Res_{z_0} f(z)$, es el coeficiente a_{-1} en el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de z_0*

Observe que de la definición anterior se deduce que

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha} f(z)\, dz$$

donde α, por ejemplo, es la circunferencia $|z - z_0| = s$ con $0 < s < R$.

Ejemplo **7.7.** Puesto que el desarrollo en serie de Laurent de la función $f(z) = z^2 sen\frac{1}{z}$ alrededor de su punto singular $z = 0$ es

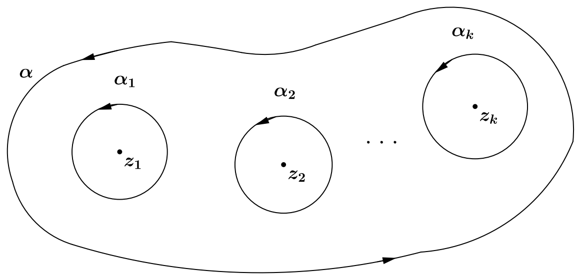
$$f(z) = z^2 sen\frac{1}{z} = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}}$$

y el coeficiente a_{-1} se obtiene para $n = 1$ entonces $Res_0 f(z) = -\frac{1}{6}$.

Teorema **7.3.** *Sea f una función de variable compleja analítica en una región K excepto en un número finito de singularidades aisladas z_0, z_1,..., z_k que están en el interior de una curva de Jordan α suave por partes completamente contenida en K, entonces*

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{s=1}^{k} Res_{z_s} f(z)$$

Demostración.



Puesto que z_1, z_2,..., z_k son singularidades aisladas de f entonces se pueden construir circunferencias α_k, $|z - z_k| = R_k$ de radio lo suficientemente pequeño de tal manera que estén completamente en el interior de α y que no se intersecten entre si. Por el teorema de Cauchy para regiones múltiplemente conexos

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = \sum_{s=1}^{k} \int_{\alpha_s} f(z)\, dz$$

Para calcular $\int_{\alpha} f(z)\, dz$ donde α_s es la circunferencia $|z - z_s| = R_s$ consideramos el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de z_s, es decir

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_s)^n \quad \text{en} \quad 0 < |z - z_s| < R_s$$

y puesto que esta serie converge uniformemente en esta región, entonces

$$\int_{\alpha_s} f(z)\, dz = \int_{\alpha_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(s)} (z - z_s)^n\, dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^{(s)} \int_{\alpha_s} (z - z_s)^n\, dz$$

y como $\int_{\alpha_s} (z - z_s)^n\, dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1 \end{cases}$ entonces $\int_{\alpha_s} f(z)\, dz = a_{-1}^{(s)} 2\pi i$ y por tanto

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{s=1}^{k} a_{-1}^{(s)} = 2\pi i \sum_{s=1}^{k} Res_{z_s} f(z).$$

□

Ejemplo **7.8.** Calcular $\int_{\alpha} f(z)\, dz$ donde $f(z) = z^k e^{\frac{2}{z}}$ con k entero positivo y α es $|z| = 1$

La función $f(z) = z^k e^{\frac{2}{z}}$ tiene una singularidad aislada en $z = 0$ que está en el interior de α por tanto

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = 2\pi i Res_0 f(z)$$

Se calcula $Res_0 f(z)$ desarrollando f en serie de Laurent alrededor de $z=0$.
Como $f(z)=z^k e^{\frac{2}{z}}=z^k\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!z^n}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!z^{n-k}}$ entonces para obtener el coeficiente a_{-1} debe ocurrir que $n-k=1$ es decir $n=k+1$ por tanto

$$a_{-1}=\frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$$

así

$$\int\limits_{|z|=1} z^k e^{\frac{2}{z}}\,dz=\frac{2^{k+2}\pi i}{(k+1)!}.$$

La aplicación del teorema del residuo, como es natural, requiere el cálculo de los mismos, por tanto, en la práctica, el resultado es útil si se dispone de algoritmos sencillos que permitan determinar los residuos. En este sentido las siguientes observaciones pueden ser utiles

1. Si la singularidad es removible, el desarrollo en serie de Laurent no contiene parte principal y por tanto el residuo es cero.
2. Si la singularidad es esencial, necesariamente se debe obtener el desarrollo en serie de Laurent.
3. Si la singularidad es un polo el siguiente resultado proporciona una manera explícita de calcular el residuo

Teorema **7.4.** *Sea f una función analítica en la región $0<|z-z_0|<R$ y $z=z_0$ un polo de orden k de f entonces*

$$Res_{z_0}f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left((z-z_0)^k f(z)\right)$$

Demostración. Si $z=z_0$ es un punto de orden k de f entonces su desarrollo en serie de Laurent de f es

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\cdots+\frac{a_{-1}}{(z-z_0)}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^{n+k}$$

La convergencia uniforme de la serie nos permite derivar $(k-1)$ veces término a término con lo cual se obtiene:

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]=(k-1)!a_{-1}+k(k-2)\cdots 2a_0(z-z_0)+(k+1)k(k-1)\cdots 3a_0(z-z_0)^2+\cdots$$

y así

$$\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[(z-z_0)^k f(z)\right]=(k-1)!Res_{z_0}f(z).$$

□

Este resultado permite considerar los siguientes casos particulares.

1. Si $z=z_0$ es un polo simple entonces $Res_{z_0}f(z)=\lim\limits_{z\to z_0}f(z)(z-z_0)$
2. Si $f(z)=\frac{g(z)}{h(z)}$ y $h(z)$ tiene un polo simple en $z=z_0$ entonces
$$Res_{z_0}f(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)(z-z_0)}{h(z)}=\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}}=\frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$$
3. Si $f(z)=g(z)h(z)$, $g(z)$ tiene un polo simple en $z=z_0$ y $h(z)$ es analítica en $z=z_0$ entonces
$$Res_{z_0}f(z)=Res_{z_0}g(z)h(z)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)h(z)=h(z_0)\lim_{z\to z_0}(z-z_0)g(z)=h(z_0)Res_{z_0}g(z).$$

Ejemplo **7.9.** Calcular el residuo de la función $f(z)=\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ en sus puntos singulares.

Los puntos singulares de f son $z=1$, polo simple, y $z=2$ polo de orden 2, por tanto

$$Res_1 f(z)=\lim_{z\to 1}\left(f(z)(z-1)\right)=\lim_{z\to 1}\tfrac{z}{(z-2)^2}=1 \quad \text{y}$$
$$Res_2 f(z)=\lim_{z\to 2}\tfrac{d}{dz}\left(f(z)(z-2)^2\right)=\lim_{z\to 2}\tfrac{d}{dz}\left(\tfrac{z}{z-1}\right)=\lim_{z\to 2}\tfrac{-1}{(z-1)^2}=-1$$

Definición **7.6.** *Sea f una función analítica en una vecindad del punto al infinito, digamos el exterior de la circunferencia α, $|z| = R$, R suficientemente grande.* ***El residuo de f en el punto al infinito*** *se define como*

$$Res_\infty f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\alpha f(z)\, dz$$

De esta definición se deduce que $Res_\infty f(z) = -a_{-1}$ donde a_{-1} es el coeficiente de z^{-1} en el desarrollo de Laurent de f alrededor de $z = \infty$.

El siguiente resultado, cuya demostración se presenta en el problema resuelto 7.3, relaciona los residuos de una función en el plano complejo y en el plano complejo ampliado y en ocasiones simplifica el cálculo de ciertas integrales.

Teorema **7.5.** *Sea f una función de variable compleja analítica en el plano complejo ampliado excepto en un número finito de singularidades aisladas z_1, z_2,..., z_k entonces*

$$\sum_{s=1}^{k} Res_{z_s} f(z) + Res_\infty f(z) = 0$$

Una aplicación de este teorema se presenta a continuación.

Ejemplo **7.10.** Calcular

$$\int_\alpha \frac{dz}{z^k(z^2+1)} \quad \text{donde } \alpha \text{ es } |z-i| = \frac{3}{2} \quad \text{y } k \text{ es entero positivo.}$$

La función $f(z) = \frac{1}{z^k(z^2+1)}$ tiene un polo de orden k en $z = 0$ y polos simples en $z = \pm i$ y una singularidad aislada en $z = \infty$. En el interior de α están $z = 0$ y $z = i$ y en el exterior $z = -i$ y $z = \infty$.
Por aplicación del teorema del residuo

$$\int_\alpha \frac{dz}{z^k(z^2+1)} = 2\pi i(Res_0 f(z) + Res_i f(z))$$

y puesto que por el teorema 7.5

$$Res_0 f(z) + Res_i f(z) = -\left(Res_{-i} f(z) + Res_\infty f(z)\right)$$

entonces

$$\int_\alpha \frac{dz}{z^k(z^2+1)} = -2\pi i\left(Res_{-i} f(z) + Res_\infty f(z)\right)$$

Dado que $z = -i$ es un polo simple de la función entonces

$$Res_{-i} f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{z+i}{z^k(z^2+1)} = \lim_{z\to -i} \frac{1}{z^k(z-i)} = \frac{1}{2} i^{k+1}$$

Para calcular el residuo en $z = \infty$, consideramos el desarrollo de Laurent de la función en dicho punto. Así se tiene:

$$f(z) = \frac{1}{z^k(z^2+1)} = \frac{1}{z^{k+2}\left(1+\frac{1}{z^2}\right)} = \frac{1}{z^{k+2}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{2n+k+2}}$$

que no contiene potencias z^{-1} por lo que $Res_\infty f(z) = 0$.
Por tanto

$$\int_\alpha \frac{dz}{z^k(z^2+1)} = -2\pi i Res_{-i} f(z) = -2\pi i \frac{1}{2} i^{k+1} = \pi i^k$$

Observe que utilizar directamente el teorema del residuo requiere calcular la derivada $(k-1)$ de la función $g(z) = \frac{1}{z^2+1}$, cálculo que usted puede realizar como ejercicio.

7.3. El cálculo de integrales reales definidas

Una de las aplicaciones más sorprendentes de la teoría de funciones de variable compleja es el cálculo de ciertas clases de integrales definidas reales que son difíciles, o en ocasiones imposible de calcular, con los métodos usuales del cálculo integral real. La herramienta fundamental en este propósito es el teorema del residuo, la selección de una función apropiada y de una trayectoria cerrada adecuada. Trataremos en esta sección el problema de proporcionar algoritmos para el cálculo de cuatro tipos de estas integrales

7.3.1. Resultados básicos preliminares

Antes de considerar el cálculo de estas integrales se enuncian y demuestran algunos resultados que son útiles en este objetivo.

Lema **7.1.** *Sea f una función analítica en $\mathbb{C}$ excepto por un número finito de polos ninguno de ellos sobre el eje real. Si existe $K > 0$ tal que $|f(z)| < \frac{K}{R^m}$, $m > 1$, entonces*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{s_R} f(z)\,dz = 0$$

donde S_R es la semicircunferencia de centro en el origen y radio R orientada positivamente.

Demostración. Puesto que $\left|\int_{s_k} f(z)\,dz\right| \leq \int_{s_k} |f(z)|\,|dz| \leq \frac{K}{R^m} \int_{s_k} |dz| = \frac{K}{R^m}\pi R = \frac{\pi K}{R^{m-1}}$ y $m-1 > 0$ entonces $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{s_k} f(z)\,dz\right| = 0$ y así $\lim_{R\to\infty} \int_{s_k} f(z)\,dz = 0$. □

Definición **7.7.** *sea S_R la circunferencia del lema anterior y f una función de variable compleja. La función f* ***tiende uniformemente a cero*** *sobre S_R cuando R tiende a ∞ si y solo si existe una constante $M_R > 0$, que depende únicamente de R, talque $|f(z)| < M_R$ para todo z en S_R y $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$.*

Lema **7.2** (Lema de Jordan)**.** *Sea f una función de varible compleja analítica en el semiplano superior excepto en un número finito de polos simples y tal que f tiende uniformemente a cero respecto a $arg z$ cuando $|z|$ tiende a infinito entonces*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{s_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0$$

donde $a > 0$ y S_R es la semicircunferencia considerada anteriormente.

Demostración. Sea $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ entonces

$$\left|\int_{s_R} e^{iaz} f(z)\,dz\right| \leq \int_{s_R} \left|e^{iaz} f(z)\,dz\right| = \int_0^\pi \left|e^{iaRe^{i\theta}} f(Re^{i\theta})\right| d\theta = \int_0^\pi e^{-aRsen\theta} R\left|f(Re^{i\theta})\right| d\theta$$

$$\leq M_R R \int_0^\pi e^{-aRsen\theta} d\theta = 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aRsen\theta} d\theta$$

y puesto que cuando $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ se tiene que $sen\theta \geq \frac{2\theta}{\pi}$ entonces

$$\left|\int_{s_R} e^{iz} f(z)\,dz\right| \leq 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-aRsen\theta} d\theta \leq 2M_R R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}} d\theta = -\frac{\pi M_R}{a} e^{-\frac{2aR\theta}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi M_R}{a}(1 - e^{-aR})$$

entonces $\lim_{R\to\infty} \left|\int_{s_R} e^{iz} f(z)\,dz\right| = 0$ y por tanto $\lim_{R\to\infty} \int_{s_R} e^{iz} f(z)\,dz = 0$ □

Lema **7.3.** *Sea f una función de variable compleja analítica en $\mathbb{C}$ excepto en un número finito de polos simples con por lo menos uno de ellos sobre el eje real. Si z_0 es uno de estos, entonces*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{s_\epsilon} f(z)\,dz = \pi i Res_{z_0} f(z)$$

donde s_ϵ es la semicircunferencia de centro z_0 orientada positivamente.

Demostración. Si f tiene un polo simple en z_0 entonces el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de z_0 tiene la forma $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ en $0 < |z-z_0| < \epsilon$, es decir $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica en la región $0 < |z-z_0| < \epsilon$ y por tanto acotada en dicha región, así existe $K > 0$ talque $|g(z)| < K$ en $|z-z_0| < \epsilon$ y puesto que $\int\limits_{s_\epsilon} \frac{a_{-1}}{z-z_0} = \pi i Res_{z_0} f(z)$ entonces

$$\left|\int_{s_\epsilon} f(z)\,dz - \pi i Res_{z_0} f(z)\right| \le \int_{s_\epsilon} |g(z)|\,|dz| \le K\pi\epsilon \quad \text{por lo que}$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left|\int_{s_\epsilon} f(z)\,dz - \pi i Res_{z_0} f(z)\right| = 0 \;\text{ es decir }\; \lim_{\epsilon\to 0}\int_{s_\epsilon} f(z)\,dz = \pi i Res_{z_0} f(z).$$

□

7.3.2. Integrales trigonométricas

El propósito de ese apartado es proporcionar un algoritmo para calcular integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} F(cos\theta, sen\theta)\,d\theta$$

donde F es una función de $cos\theta$ y $sen\theta$ que satisface ciertas condiciones. En este sentido se tiene

Teorema **7.6.** *Si $F(cos\theta, sen\theta)$ es una función de dos variables continua sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ entonces*

$$\int_0^{2\pi} F(cos\theta, sen\theta)\,d\theta = \int_{|z|=1} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

Demostración. Sea $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ entonces $cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$, $sen\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right) = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$, $dz = izd\theta$ y por tanto la integral dada se transforma en

$$\int_{|z|=1} F\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{iz}$$

y puesto que F es una función racional en $cos\theta$ y $sen\theta$ continua sobre el intervalo $[0, 2\pi]$ entonces F es una función racional de z sin polos sobre $|z| = 1$ la cual se puede evaluar por aplicación del teorema del residuo. □

Ejemplo **7.11.** Calcular $\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+cos\theta}$, $a > 1$

Sea $z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ entonces $dz = ie^{i\theta} = izd\theta$ y $cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ por tanto

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+cos\theta} = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+2az+1} = 2\pi\sum_{j=1}^{k} Res_{z_j} f(z)$$

donde z_j son los polos en el interior de $|z|=1$ y $f(z)=\frac{2}{z^2+2az+1}$

El único polo de f en el interior de $|z|=1$ es $z_1=-a+\sqrt{a^2-1}$ y puesto que

$$Res_{z_1}f(z)=\frac{1}{z_1+a}=\frac{1}{\sqrt{a^2-1}} \quad \text{entonces} \quad \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

7.3.3. Integrales impropias

Ahora se desean calcular integrales impropias con límites de integración infinitos, es decir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx$$

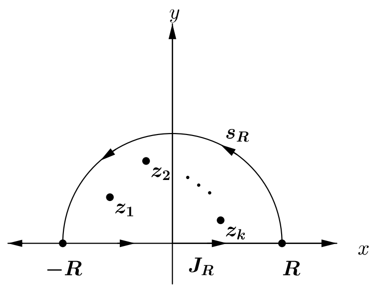
donde f es una función continua en $\mathbb{R}$. El siguiente resultado proporciona condiciones para que la integral converja. EL valor de este límite se llama **valor principal de la integral**

Teorema **7.7.** *Sea f una función analítica excepto en un número finito de polos ninguno de ellos sobre el eje real y de la cual $f(x)$ es la restricción al mismo eje.*

Si existe $K>0$ talque $|f(z)|\leq\frac{K}{|z|^m}$ siempre que $|z|$ sea lo suficientemente grande y $m\geq 2$ entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{y>0} Res\, f(z)$$

Demostración. Sea α la trayectoria cerrada orientada positivamente que consiste del segmento del eje real J_R entre $-R$ y R y la semicircunferencia S_R de centro en el origen y radio R, $R>0$ lo suficientemente grande para que los polos de f en el semiplano superior estén en el interior de α, entonces por el teorema del residuo



$$\int_\alpha f(z)\,dz=2\pi i\sum_{y>0} Res\, f(z)$$

Como $\int\limits_\alpha f(z)\,dz=\int\limits_{J_R} f(z)\,dz+\int\limits_{S_R} f(z)\,dz=\int\limits_{-R}^{R} f(x)\,dx+\int\limits_{S_R} f(z)\,dz$ y $|f(z)|\leq\frac{K}{|z|^m}=\frac{K}{R^m}$ para z sobre s_R y $m>1$ entonces por el lema 7.1 $\lim\limits_{R\longrightarrow\infty}\int\limits_{s_R} f(z)\,dz=0$ y por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=2\pi i\sum_{y>0} Res\, f(z).$$

□

Ejemplo **7.12.** Calcular $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2}$, $a > 0$.

Consideremos la función $f(z) = \frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}$ que en el semiplano superior tiene únicamente como polo doble $z = ai$ y coincide con $f(x) = \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}$ a lo largo del eje real.

Puesto que $|z^2 + a^2| = |z^2 - (-a^2)| \geq \left||z^2| - |-a^2|\right| = R^2 - a^2$ entonces

$$|f(z)| = \left|\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}\right| \leq \frac{R^2}{(R^2-a^2)^2} < \frac{4}{R^2} \quad \text{siempre que} \quad |z| > \sqrt{2}a$$

entonces aplicando el teorema 7.7 y el hecho de que $f(x)$ es par, se concluye que

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\, dx = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\, dx = \pi i\, Res_{ai} f(z)$$

como

$$Res_{ai} f(z) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}\left((z-ai)^2 \frac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2}\right) = \lim_{z \to ai} \frac{d}{dz}\left(\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right) = \lim_{z \to ai} \frac{2aiz}{(z+ai)^3} = \frac{1}{4ai}$$

entonces

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{4a}$$

7.3.4. Transformada de Fourier

Se conoce con este nombre una integral de la forma $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx$ donde $f(x)$ es una función continua sobre el eje real y $a > 0$. El cálculo de estas integrales lo proporciona el siguiente resultado.

Teorema **7.8.** *Sea $f(z)$ una función analítica excepto en un número finito de polos ninguno de ellos sobre el eje real. Si $f(z)$ tiende uniformemente a cero respecto de $\arg z$ cuando $|z|$ tiende a ∞ entonces*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z), \quad a > 0.$$

Demostración. Sea α la trayectoria considerada en el teorema 7.7 entonces por el teorema del residuo

$$\int\limits_{\alpha} e^{iaz} f(z)\, dz = \int\limits_{J_R} e^{iaz} f(z)\, dz + \int\limits_{S_R} e^{iaz} f(z)\, dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\, dx + \int\limits_{S_R} e^{iaz} f(z)\, dz$$

entonces

$$\int\limits_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\, dx + \int\limits_{S_R} e^{iaz} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z)$$

y puesto que por el lema 7.2, Lema de Jordan

$$\lim_{R \to \infty} \int\limits_{S_R} e^{iaz} f(z)\, dz = 0$$

entonces al tomar límite cuando R tiende a ∞ resulta

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z), \quad a > 0$$

□

Ejemplo **7.13.** Demostrar que $\int_0^{\infty} \frac{x sen ax}{x^2+b^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$, $a > 0$, $b > 0$.

Obsérvese en primer lugar que la función $g(x) = \frac{x sen ax}{x^2+b^2}$ es par y que $g(x) = Im\left(\frac{e^{iax}}{x^2+b^2}\right)$ por tanto

$$\int_0^{\infty} \frac{x sen ax}{x^2+b^2}\, dx = \frac{1}{2} Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+b^2}\, dx$$

Si se considera la función $f(z) = \frac{z}{z^2+b^2}$ entonces en el semiplano superior f tiene únicamente el polo $z = ib$ y puesto que, análogamente al ejemplo 7.12, se tiene que

$$|f(z)| = \frac{|z|}{|z^2+b^2|} \leq \frac{R}{R^2-b^2} = M_R \;\text{ y }\; \lim_{R\to\infty} M_R = 0$$

entonces por la definición 1 de esta sección, la función $f(z) = \frac{z}{z^2+b^2}$ tiende uniformemente a cero respecto de $arg z$ cuando $|z|$ tiende a ∞. Por el teorema 7.8

$$\int_0^{\infty} \frac{x sen ax}{x^2+b^2}\, dx = \frac{1}{2} Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{iax}}{x^2+b^2}\, dx = \frac{1}{2} Im\left(2\pi i\, Res_{ib} \frac{z e^{iaz}}{z^2+b^2}\right) = \frac{1}{2} Im\left(2\pi i \frac{ib e^{-ab}}{2ib}\right) = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$$

7.3.5. Integrales con polos sobre el eje real

Definición **7.8.** *Si $f(x)$ es una función real que se hace infinita para $x = c$, $a < c < b$* ***el valor principal de Cauchy*** *de la integral $\int_a^b f(x)\, dx$ se define como*

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{c-\epsilon} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)\, dx\right)$$

Las técnicas utilizadas en algunos de los casos anteriores pueden modificarse adecuadamente para calcular integrales de la forma

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)\, dx, \quad a > 0$$

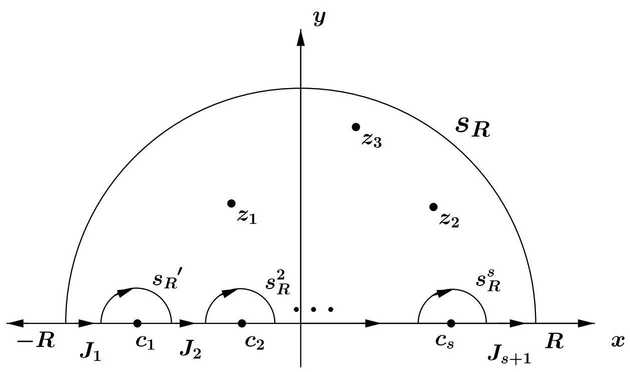
donde $f(x)$ es una función real con por lo menos un punto $x = c$ en el cual la función se hace infinita. En este caso se entenderá que el valor principal de Cauchy de la integral está dado por

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx = \lim_{R\to\infty} \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_{-R}^{c-\epsilon} e^{iax} f(x)\, dx + \int_{c+\epsilon}^{R} e^{iax} f(x)\, dx\right]$$

Teorema **7.9.** *Sea $f(x)$ una función analítica con un número finito de puntos singulares en el semiplano superior $z_1, z_2, \ldots, z_k$, un número finito de polos simples $c_1, c_2, \ldots, c_k$ sobre el eje real y de la cual $f(x)$ es la restricción al eje real. Si $f(z)$ tiende uniformemente a cero respecto de $arg z$ cuando $|z|$ tiende a infinito entonces*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\, dx = 2\pi i\left[\sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z) + \frac{1}{2}\sum_{y=0} Res\, e^{iaz}\, dz\right], \quad a > 0$$

Demostración. Se considera la integral $\int_{\alpha} e^{iaz} f(z)\, dz$ donde α es la trayectoria cerrada de la siguiente figura



Por el teorema del residuo

$$\int_{\alpha} e^{iaz} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z)$$

como

$$\int_{\alpha} e^{iaz}\,dz = \sum_{k=1}^{s+1} \int_{J_k} e^{iaz} f(z)\,dz - \sum_{k=1}^{s} \int_{s_\epsilon^k} e^{iaz} f(z)\,dz + \int_{S_R} e^{iaz} f(z)\,dz$$

$$\int_{J_k} e^{iaz} f(z)\,dz = \int_{c_{k-1}+\epsilon}^{c_k-\epsilon} e^{iax} f(x)\,dx, \quad k = 2, 3, \ldots, s; \quad \int_{J_1} e^{iaz} f(z)\,dz = \int_{-R}^{c-\epsilon} e^{iax} f(x)\,dx;$$

$$\int_{J_{s+1}} e^{iaz} f(z)\,dz = \int_{c_s+\epsilon}^{R} e^{iax} f(x)\,dx$$

se sigue que

$$\int_{-R}^{c_1-\epsilon} e^{iax} f(x)\,dx + \sum_{k=2}^{s} \int_{c_{k-1}+\epsilon}^{c_k+\epsilon} e^{iax} f(x) dx + \int_{c_s+\epsilon}^{R} e^{iax} f(x)\,dx$$

$$= 2\pi i \sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z) + \sum_{k=1}^{s} \int_{s_\epsilon^k} e^{iaz} f(z)\,dz - \int_{S_R} e^{iaz} f(z)\,dz$$

pero por el lema 7.3

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{s_\epsilon^k} e^{iaz} f(z)\,dz = \pi i Res_{c_k} e^{iaz} f(z)$$

entonces al tomar límite cuando ϵ tiende a cero se tiene

$$\int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z) + \pi i \sum_{y=0} Res\, e^{iaz} f(z) - \int_{S_R} e^{iaz} f(z)\,dz$$

y puesto que por el lema de Jordan $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{S_R} e^{iaz} f(z)\,dz = 0$ entonces al tomar límite cuando R tiende a infinito resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x)\,dx = 2\pi i \left[\sum_{y>0} Res\, e^{iaz} f(z) + \frac{1}{2} \sum_{y=0} Res\, e^{iaz} f(z) \right]$$

$\square$

Ejemplo **7.14.** Calcular $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\pi x}{4x^2-1}\,dx$

Puesto que $cos\pi x = Re\left(e^{i\pi x}\right)$ entonces $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\pi x}{4x^2-1}\,dx = Re\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi ix}}{4x^2-1}\,dx\right)$ consideramos ahora la función $f(z) = \frac{1}{4z^2-1}$ la cual tiene polos simples sobre el eje real en $z = \pm\frac{1}{2}$.

Como $|f(z)| = \frac{1}{|4z^2-1|} = \frac{1}{|4R^2-1|} = \frac{1}{4R^2-1} = M_R$, si $R > \frac{1}{2}$ y $\lim\limits_{R\to\infty} M_R = 0$ entonces la función $f(z) = \frac{1}{4z^2-1}$ tiende uniformemente a cero respecto de $argz$ cuando $|z|$ tiende a ∞.

Por el teorema 7.9

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{cos\pi x}{4x^2-1}\,dx = Re\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi ix}}{4x^2-1}\,dx\right) = Re\left[\pi i\left(Res_{-\frac{1}{2}}e^{i\pi z}f(z) + Res_{\frac{1}{2}}e^{i\pi z}f(z)\right)\right]$$

y puesto que $Res_{-\frac{1}{2}}e^{\pi iz}f(z) = e^{-\frac{i\pi}{2}} \cdot \frac{-1}{4} = \frac{i}{4}$ y $Res_{\frac{1}{2}}e^{\pi iz}f(z) = e^{\frac{\pi i}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{i}{4}$ entonces

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pi ix}}{4x^2-1}\,dx = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y así} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos\pi x}{4x^2-1}\,dx = -\frac{\pi}{2}$$

Observación: En este texto no consideramos la integración de funciones multiformes, sin embargo, en este caso, las técnicas utilizadas en los casos anteriores pueden aplicarse sin modificaciones esenciales. Es decir, se deben considerar trayectorias cerradas que no pasen por singularidades aisladas, se deben evitar los puntos de ramificación de las funciones y debido a que el teorema del residuo es válido únicamente para funciones uniformes, se debe seleccionar apropiadamente una rama uniforme o tener en cuenta que al llegar nuevamente a un corte de ramificación se está en la "siguiente" rama de la función. los resultados fundamentales para tratar esta clase de integrales pueden consultarse por ejemplo en [3], y para una ilustración sobre la técnicas utilizadas se puede revisar el problema resuelto 10.

7.4. Problemas resueltos

Conservando la filosofa de nuestro trabajo finalizamos la penúltima sección de este capítulo corresponde a la acostumbrada sección de problemas resueltos, los cuales posibilitan la ilustración de los teoremas y técnicas tratadas.

Problema **7.1.** Calcular $\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz$ donde $f(z) = \frac{ctg\pi z}{z^2}$, α es $|z| = \frac{1}{2}$

Solución. Puesto que $f(z) = \frac{ctg\pi z}{z^2} = \frac{cos\pi z}{z^2 sen\pi z}$ y la función $g(z) = z^2 sen\pi z$ tiene un cero de orden 3 en $z = 0$ y ceros simples en los puntos $z = n$, n en $\mathbb{Z}$ entonces la función $f(z) = \frac{ctg\pi z}{z^2}$ tiene en $z = 0$ un polo de orden 3 en el interior de α y polos simples en los puntos $z = n$, n en $\mathbb{Z}$ en el exterior de α.
Por el teorema del residuo

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ctg\pi z}{z^2} = 2\pi i Res_0 f(z)$$

y puesto que por el teorema 7.4

$$Res_0 f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3\frac{ctg\pi z}{z^2}\right) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(z\,ctg\pi z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}(ctg\pi z - \pi z\,csc^2\pi z)$$
$$= \pi\lim_{z\to 0} csc^2\pi z\,(\pi z\,ctg\pi z - 1) = \pi\lim_{z\to 0}\frac{\pi z\,cos\pi z - senz}{sen^3\pi z}$$

y dado que este límite corresponde a una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$, lo evaluamos aplicando la regla de L'hopital, así se tiene

$$Res_0 f(z) = \pi\lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2 sen\pi z}{3\pi sen^2\pi z\,cos\pi z} = -\frac{\pi}{z}\lim_{z\to 0}\frac{\pi z}{sen\pi z}\cdot\frac{1}{cos\pi z} = -\frac{\pi}{3}$$

por tanto

$$\int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{ctg\pi z}{z^2} = -\frac{2\pi^2 i}{3}$$

Problema **7.2.** Calcular $\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z^4+4}$ donde α es $|z-1|=2$

Solución. La función $f(z) = \frac{1}{z^4+4}$ tiene polos simples cuando $z^4 = -4$ es decir en los puntos $z_0 = 1+i$, $z_1 = -1+i$, $z_2 = -1-i$ y $z_3 = 1-i$ de los cuales solamente z_0 y z_3 están en el interior de α.
Por el teorema del residuo

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z^4+4} = 2\pi i(Res_{z_0} f(z) + Res_{z_3} f(z))$$

Para calcular el residuo en z_0 y z_3 utilizamos la observación 2 del teorema 7.4, por tanto

$$Res_{z_0} f(z) = \frac{1}{4z_0^3} = \frac{z_0}{4z_0^4} = \frac{1+i}{-16} \quad \text{y} \quad Res_{z_3} f(z) = \frac{1}{4z_3^3} = \frac{z_3}{4z_3^4} = \frac{1-i}{-16}$$

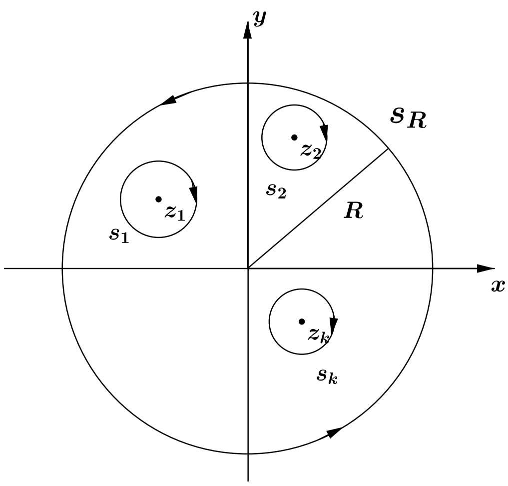
y así

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{z^4+4} = 2\pi i\left(\frac{1+i}{-16} + \frac{1-i}{-16}\right) = -\frac{\pi}{4} i$$

Problema **7.3.** Demostrar el teorema 7.5, es decir, si f es una función analítica en el plano complejo ampliado excepto en un número finito de singularidades aisladas z_1, z_2,..., z_k entonces

$$\sum_{s=1}^{k} Res_{z_s} f(z) + Res_{\infty} f(z) = 0$$

Solución. Sean s_1, s_2,..., s_k las circunferencias $|z-z_s| = \epsilon_s$, $s = 1, 2, \ldots, k$ de radio ϵ_s lo suficientemente pequeño para que no se intersecten dos a dos orientadas positivamente y S_R la circunferencia $|z| = R$ orientada postitivamente de radio lo suficientemente grande talque en su interior estén las circunferencias s_1, s_2,..., s_k.



La región interior a S_R y exterior a s_1, s_2,..., s_k es multiplemente conexo y la función f es analítica en dicha región, por el teorema de Cauchy para regiones multiplemente conexas

$$-\sum_{s=1}^{k} \int\limits_{s_s} f(z)\,dz + \int\limits_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

y multiplicando por $-\frac{1}{2\pi i}$ se obtiene

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{s=1}^{k}\int_{-s_s} f(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{S_R} f(z)\,dz = 0$$

es decir

$$\sum_{s=1}^{k} Res_{z_s} f(z) + Res_{\infty} f(z) = 0$$

Problema **7.4.** Calcular $\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$ donde α es $|z| = 2$

Solución. La función $f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$ tiene polos simples en $z = 3$, en el exterior de α, y en los cinco puntos que corresponden a las raices quintas de 1, en el interior de α.
Por el teorema del residuo

$$\int\limits_{\alpha} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = 2\pi i \sum_{k=1}^{5} Res_{z_k} f(z)$$

donde z_k, $k = 1, \ldots, 5$ representan las raices de 1.
El cálculo de las raices quintas de 1 y de los residuos del integrando en estos valores es dispendioso por lo cual al recurrir al teorema 7.5 se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{5} Res_{z_k} f(z) = -\left(Res_3 f(z) + Res_{\infty} f(z)\right)$$

como

$$Res_3 f(z) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{z^5-1} = \frac{1}{242}$$

y $Res_{\infty} f(z)$ puede calcularse al desarrollar en serie de Laurent alrededor de dicho punto, y

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-3)(z^5-1)} = \frac{1}{z^6\left(1-\frac{3}{z}\right)\left(1-\frac{1}{z^5}\right)} = \frac{1}{z^6}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^k}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{5k}} \\ &= \frac{1}{z^6}\left(1+\frac{3}{z}+\frac{3^2}{z^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{z^5}+\frac{1}{z^10}+\cdots\right) \end{aligned}$$

se observa que este desarrollo en serie no contiene términos en $\frac{1}{z}$ por lo que $Res_{\infty} f(z) = 0$.
Por tanto

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)} = -\frac{\pi i}{121}$$

Problema **7.5.** Sea f una función analítica en una región simplemente conexa K y α una curva de Jordan orientada positivamente contenida totalmente en K. Si $z = z_0$ es el único cero de f en la región K y z_0 está en el interior de α demostrar que

$$\int\limits_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i k$$

donde k es el orden de cero en z_0.

Solución. Si f posee un cero en z_0 de orden k en z_0 entonces por el Teorema 7.1 $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$ donde g es analítica en una vecindad de z_0 y $g(z_0) \neq 0$.
Como $f'(z) = (z-z_0)^{k-1}(kg(z) + (z-z_0)g'(z))$ entonces

$$\int\limits_{\alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int\limits_{\alpha} \frac{kg(z)+(z-z_0)g'(z)}{(z-z_0)g(z)}\,dz$$

Puesto que la función

$$h(z) = \frac{kg(z)+(z-z_0)g'(z)}{(z-z_0)g(z)}$$

es analítica sobre, en el interior de α y posee únicamente un polo simple en dicho interior entonces por el teorema del residuo

$$\int\limits_{\alpha} h(z)\,dz = 2\pi i\ Res_{z_0}h(z)$$

y como $Res_{z_0}h(z) = \lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)h(z) = \lim\limits_{z\to z_0}\frac{kg(z)+(z-z_0)g'(z)}{g(z)} = k$ se sigue que $\int\limits_{\alpha}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2k\pi i$

Problema **7.6.** Demostrar que

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2acos\theta+a^2} = \begin{cases}\frac{2\pi}{1-a^2} & \text{si } |a|<1\\ \frac{2\pi}{a^2-1} & \text{si } |a|>1\end{cases} \qquad a\neq 0$$

Solución. Sea $z=e^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ entonces $cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$ por tanto

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2acos\theta+a^2} = \frac{1}{i}\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z\left(1-a\left(z+\frac{1}{z}\right)+a^2\right)} = i\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(a^2+1)+a}$$

y puesto que $f(z) = \frac{1}{az^2-(a^2+1)z+a} = \frac{1}{a(z-a)\left(z-\frac{1}{a}\right)}$ tiene polos simples en $z_1=a$, $z_2=\frac{1}{a}$, $a\neq 0$ entonces

1. Si $|a|<1$ entonces $z_1=a$ está en el interior de $|z|=1$ por tanto

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2acos\theta+a^2} = i\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(a^2+1)+a} = -2\pi Res_a f(z) = -2\pi\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

$$-2\pi\lim_{z\to a}\frac{1}{a\left(z-\frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi}{1-a^2}$$

2. Si $|a|>1$ entonces $z_1=\frac{1}{a}$ está en el interior de $|z|=1$ por tanto

$$\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2acos\theta+a^2} = i\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{az^2-(a^2+1)+a} = -2\pi Res_{\frac{1}{a}}f(z) = -2\pi\lim_{z\to\frac{1}{a}}\left(z-\frac{1}{a}\right)f(z)$$

$$-2\pi\lim_{z\to\frac{1}{a}}\frac{1}{a\left(z-\frac{1}{a}\right)} = \frac{2\pi}{a^2-1}$$

Problema **7.7.** Calcular $\int\limits_0^{2\pi} cos^{2n}\theta\,d\theta$, n entero positivo

Solución. Sea $z=e^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$ entonces $cosz = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ y $d\theta=\frac{dz}{iz}$ por tanto

$$\int\limits_0^{2\pi} cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{1}{2^{2n}i}\int\limits_{|z|=1}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{z}$$

Puesto que la función $f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$ tiene en el interior de $|z|=1$, un polo en $z=0$ de orden $(2n+1)$ entonces por el teorema del residuo

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}dz = 2\pi i Res_0 f(z) \quad \text{así} \quad \int\limits_0^{2\pi}cos^{2n}\theta\,d\theta = \frac{\pi}{2^{n-1}}Res_0 f(z)$$

Calculamos el coeficiente de $\frac{1}{z}$ en el desarrollo en serie de Laurent de f alrededor de $z=0$.
Por el teorema del binomio el coeficiente del término del lugar $(k+1)$ en $\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$ está dado por

$$\binom{2n}{k}z^{2n-2k}$$

y el término que no contiene z ocurre cuando $k=n$ por tanto en el desarrollo de $f(z)=\frac{1}{z}\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}$ el coeficiente de $\frac{1}{z}$ es $\binom{2n}{n}$ y así

$$\int_0^{2\pi} cos^{2n}\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}$$

Problema **7.8.** Calcular $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\quad a>0,\ b>0$

Solución. Se considera la función $f(z)=\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ que en el semiplano superior tiene polos simples en $z=ai$ y $z=bi$.
Puesto que $|f(z)|=\frac{1}{|z^2+a^2||z^2+b^2|}\le\frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)}\le\frac{2}{R^4}$ para R suficientemente grande entonces por el teorema 7.7

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = 2\pi i\left(Res_{ai}f(z)+Res_{bi}f(z)\right)$$

y como

$$Res_{ai}f(z)=\lim_{z\to ai}(z-ai)f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=\frac{1}{2ai(b^2-a^2)}\quad \text{y}\quad Res_{bi}f(z)=\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}=2\pi i\left(\frac{1}{2bi(a^2-b^2)}-\frac{1}{2ai(a^2-b^2)}\right)=\frac{\pi}{ab(a+b)}$$

Problema **7.9.** Demostrar que $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx=\frac{\pi(1+ab)e^{-ab}}{2b^3}$, $a\ge 0$, $b>0$

Solución. Al considerar la función $f(z)=\frac{1}{(z^2+b^2)^2}$ se concluye que en el semiplano superior tiene un polo de orden 2 en $z=ib$, como

$$|f(z)|=\frac{1}{|(z^2+b^2)^2|}\le\frac{1}{\left(|z|^2-b^2\right)^2}\le\frac{1}{\left(R^2-b^2\right)^2}=M_R$$

y $\lim\limits_{R\to\infty}M_R=0$ entonces por la definición 1 de la sección 7.3.4, $f(z)$ tiende uniformemente a cero respecto de $argz$ cuando $|z|$ tiende a infinito.
Por el teorema 7.8

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx=Re\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{(x^2+b^2)^2}\,dx\right)=Re(2\pi i Res_{ib}f(z))$$

y como

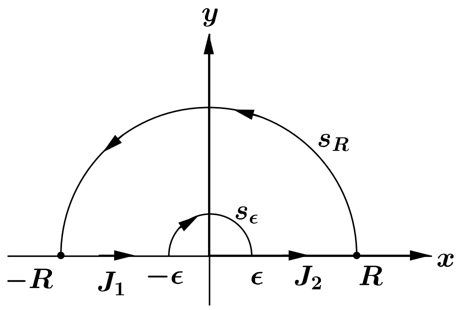
$$Res_{ib}f(z)=\lim_{z\to ib}\frac{d}{dz}\left((z-ib)^2 f(z)\right)=\lim_{z\to ib}\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iaz}}{(z+ib)^2}\right)=\lim_{z\to ib}\frac{e^{iaz}(ia(z+ib)-2)}{(z+ib)^3}=\frac{e^{-ab}(1+ab)}{4ib^3}$$

entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{cos\,ax}{(x^2+b^2)^2}\,dx=\frac{\pi e^{-ab}(1+ab)}{2b^3}.$$

Problema **7.10.** Demostrar que $\int\limits_0^{+\infty}\frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx=\frac{\pi}{4a^3}(lna-1)$, $a>0$

Solución. Sea α la trayectoria cerrada de la siguiente figura, $f(z)$ la función definida por



$$f(z)=\frac{Lnz}{(z^2+a^2)^2}$$

y seleccionamos la rama principal de la función logaritmo, es decir

$$Lnz = ln|z| + iargz, \quad -\pi < argz < \pi.$$

Puesto que $f(z)=\frac{Lnz}{(z^2+a^2)^2}$ tiene un polo de orden 2 en $z=ai$ y es analítica en el interior de α excepto en dicho punto entonces por el teorema del residuo

$$\int_\alpha \frac{lnz}{(z^2+a^2)^2}\,dz = 2\pi i Res_{ai} f(z)$$

y como

$$Res_{ai}f(z)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left((z+ai)^2f(z)\right)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left(\frac{lnz}{(z+ai)^2}\right)=\lim_{z\to ai}\left(\frac{z+ai-2zlnz}{z(z+ai)^2}\right)=\frac{\pi+2i(1-lna)}{8a^3}$$

entonces

$$\int_{J_1} f(z)\,dz+\int_{s_\epsilon} f(z)\,dz+\int_{J_2} f(z)\,dz+\int_{S_R} f(z)\,dz=\frac{2\pi(lna-1)+\pi^2 i}{4a^3}$$

Obsérvese que:

1. Sea $z=Re^{i\theta}$, $0\le\theta\le\pi$ entonces

$$|lnz| = |ln|z|+iargz| = \sqrt{ln^2R+R^2}\le\sqrt{ln^2R+\pi}\le 2lnR \text{ por tanto}$$

$$\left|\int_{S_R} f(z)\,dz\right|\le\int_{S_R}|f(z)|\,|dz|=\int_{S_R}\left|\frac{lnz}{(z^2+a^2)^2}\right||dz|\le\frac{2\pi RlnR}{(R^2-a^2)^2}$$

y como, por la regla de L'hopital

$$\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi RlnR}{(R^2-a^2)^2}=\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi(1+lnR)}{4R(R^2-a^2)}=\lim_{R\to\infty}\frac{2\pi}{4R^3(3R^2-a^2)}=0$$

entonces $\lim_{R\to\infty}\int_{S_R} f(z)\,dz=0$

2. Sea $z=\epsilon e^{(\pi-\theta)i}$, $0\le\theta\le\pi$ entonces procediendo análogamente al caso anterior se encuentra que

$$|lnz|<\frac{2}{\epsilon},\quad \left|\int_{s_\epsilon} f(z)\,dz\right|\le\frac{2\pi\epsilon ln\frac{1}{\epsilon}}{(a^2-\epsilon^2)^2},\quad \lim_{\epsilon\to 0}\frac{2\pi\epsilon ln\frac{1}{\epsilon}}{(a^2-\epsilon^2)^2}=0$$

por lo que $\lim\limits_{\epsilon\to 0}\int\limits_{s_\epsilon} f(z)\,dz = 0$

por tanto

$$\lim_{R\to\infty}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\limits_{J_1} f(z)\,dz + \int\limits_{s_\epsilon} f(z)\,dz + \int\limits_{J_2} f(z)\,dz + \int\limits_{S_R} f(z)\,dz\right) = \frac{2\pi(lna-1)+\pi^2 i}{4a^3}$$

es decir

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{2\pi(lna-1)+\pi^2 i}{4a^3}$$

Puesto que para x en $(0,+\infty)$ se tiene que

$$ln(-x) = ln|-x| + iarg(-x) = lnx + \pi i$$

entonces

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \pi i\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$$

por tanto

$$2\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx + \pi i\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{2\pi(lna-1)}{4a^3} + \frac{\pi^2}{4a^3}i$$

de lo que se concluye que

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{lnx}{(x^2+a^2)^2}\,dx = \frac{\pi}{4a^3}(lna-1)$$

7.5. Problemas propuestos

1. Hallar el orden de todos los ceros, incluyendo al punto al infinito, de las siguientes funciones

$$a.\ \ zsenz \qquad b.\ \ \tfrac{z^2+9}{z^4} \qquad c.\ \ \tfrac{(z^2-\pi^2)senz}{z} \qquad d.\ \ e^{tgz} \qquad e.\ \ \tfrac{sen^3 z}{z}$$

2. El punto z_0 es un cero de orden k para $f(z)$ y un cero de orden s para $g(z)$. Hallar el orden del cero, en el punto z_0, para las funciones

$$a.\ \ f(z)g(z) \qquad b.\ \ f(z)+g(z) \qquad c.\ \ \tfrac{f(z)}{g(z)}$$

3. Hallar los puntos singulares de las funciones dadas, analizar su naturaleza y discutir el comportamiento de las funciones en el punto al infinito

$$a.\ \ \frac{1}{z-z^3} \qquad b.\ \ \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z} \qquad c.\ \ \frac{z^2+1}{e^z} \qquad d.\ \ e^{z-\frac{1}{z}} \qquad e.\ \ \frac{1}{z^3(1-cosz)}$$

$$f.\ \ \frac{e^{\overline{z-1}}}{e^z-1} \qquad g.\ \ \frac{cosz}{z^2}$$

4. Discutir el comportamiento en los puntos indicados de cada una de las ramas uniformes de la función dada. Si el punto es singular determinar el carácter de la singularidad

$$a.\ \ \tfrac{z}{1+\sqrt{z-3}},\ \ z=4 \qquad b.\ \ \tfrac{1}{(2+\sqrt{z})cos(2\sqrt{z})},\ \ z=4 \qquad c.\ \ \tfrac{2z+3}{1+z-2\sqrt{3}},\ \ z=1$$

5. Hallar los residuos de las siguientes funciones respecto a sus puntos singulares incluyendo el punto al infinito

$a.\ \dfrac{1}{z^3 - z^5}$ $\quad b.\ \dfrac{z^2}{(z^2+1)^2} - \dfrac{1}{z}$ $\quad c.\ \dfrac{sen2z}{(z+1)^3}$ $\quad d.\ z^3 cos\frac{1}{z-2}$ $\quad e.\ senzsen\frac{1}{z}$

$f.\ \dfrac{z^2+z-1}{z^2(z-1)}$ $\quad g.\ e^{z+\frac{1}{z}}$ $\quad h.\ z^3 e^{\frac{1}{z}}$

6. Calcular las siguientes integrales

$a.\ \int\limits_{|z|=1} ztg\pi z\, dz$ $\quad b.\ \int\limits_{|z-i|=3} \frac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}\, dz$ $\quad c.\ \int\limits_{|z|=\frac{1}{2}} z^2 sen\frac{1}{z}\, dz$ $\quad d.\ \int\limits_{|z|=1} \frac{z^2}{sen^3 zcosz}\, dz$

$e.\ \int\limits_{|z|=1} z^3 sen\frac{1}{z}\, dz$ $\quad f.\ \int\limits_{|z-i|=1} \frac{e^z}{z^4+2z^2+1}\, dz$ $\quad g.\ \int\limits_{|z+1|=4} \frac{z}{e^z+3}\, dz$

7. Clasificar la singularidad del punto al infinito para las siguientes funciones

$a.\ f(z) = \frac{z^3-z^2+z+6}{z^2}$ $\quad b.\ f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ $\quad c.\ f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$ $\quad d.\ f(z) = cos\frac{1}{z}$

8. Sea f una función que se puede expresar en la forma $f(z) = g(\frac{1}{z})$ donde la función $g(w)$ es analítica en $w = 0$. Demostrar que $Res_{z=\infty} f(z) = -g'(0)$

9. Utilizando el residuo respecto al punto al infinito calcular las siguientes integrales

$a.\ \int\limits_{|z|=1} \frac{z^2+1}{z^3}\, dz$ $\quad b.\ \int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^{12}}$ $\quad c.\ \int\limits_{|z|=1} z^2 sen\frac{1}{z}\, dz$ $\quad d.\ \int\limits_{|z|=3} \frac{z^9}{z^{10}-1}\, dz$

10. Calcular las siguientes integrales de funciones trigonométricas

$a.\ \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+bcos\theta)^2},\ \ a > b > 0$ $\quad b.\ \int\limits_0^{2\pi} \frac{cos\theta}{1-2asen\theta+a^2}\, d\theta,\ \ 0 < a < 1$ $\quad c.\ \int\limits_0^{2\pi} \frac{sen^2\theta}{a+bcos\theta}\, d\theta,\ \ a > b > 0$

$d.\ \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{a+sen^2\theta}\ \ \ a > 0$ $\quad e.\ \int\limits_0^{2\pi} e^{cos\theta} cos(n\theta - sen\theta)\, d\theta$

11. Calcular las siguientes integrales con límites infinitos

$a.\ \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\, dx$ $\quad b.\ \int\limits_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\, dx$ $\quad c.\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$ $\quad d.\ \int\limits_0^{\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}\, dx$

12. Demostrar que

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}} = \frac{(2n)!\pi}{2^{2n}(n!)^2},\ \ n \in \mathbb{N}.$$

13. Demostrar que

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\frac{\pi}{n}}{sen\frac{\pi}{n}},\ \ n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$$

Sugerencia: Considere la trayectoria de 0 a R, luego de R a $Re^{\frac{2\pi i}{n}}$ y regrese a 0.

14. Calcular las siguientes integrales

$a.\ \int\limits_0^{\infty} \frac{cosax}{x^4+1}\, dx,\ \ a > 0$ $\quad b.\ \int\limits_0^{\infty} \frac{cosx}{x^2+a^2}\, dx,\ \ a > 0$ $\quad c.\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 senax}{(x^2+b^2)^2}\, dx,\ \ a > 0,\ b > 0$

$d.\ \int\limits_0^{\infty} \frac{xsenax}{x^4+b^4}\, dx,\ \ a \geq 0,\ b > 0$

15. Calcular las siguientes integrales con polos sobre el eje real

a. $\int\limits_0^\infty \frac{senax}{x(x^2+b^2)}\,dx,\quad a>0,\ b>0$ b. $\int\limits_0^\infty \frac{senx}{x}\,dx$ c. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{senx}{(x^2+4)(x-1)}\,dx$

d. $\int\limits_0^\infty \frac{cosax-cosbx}{x^2}\,dx,\quad a>0,\ b>0$ e. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{(x^2+a^2)senx}{x(x^2+b^2)}\,dx,\quad a>0,\ b>0$

16. Calcular las siguientes integrales sobre funciones multiformes aplicando el método utilizado en el problema resuelto 10

a. $\int\limits_0^\infty \frac{lnx}{x(x^2+a^2)}\,dx,\quad a>0$ b. $\int\limits_0^\infty \frac{x^a}{(x+b)^2}\,dx,\quad -1<a<1,\ b>0$

c. $\int\limits_0^\infty \frac{x^a}{x^2+b^2}\,dx,\quad -1<a<1,\ b>0$ d. $\int\limits_0^\infty \frac{lnx}{\sqrt{x}(x+1)^2}\,dx$

Bibliografía

[1] -Ahlfors, L. Complex Analysis. McGraw-Hill, New York. 1979.

[2] -Churchil, R y Brown, T. Variable compleja y aplicaciones. McGraw-Hill, España, 1990.

[3] -Derrick, W. Variable compleja con aplicaciones. Grupo Editorial Iberoamérica, Mexico. 1987.

[4] -Kreysig, E. Matemáticas avanzadas para Ingenieria. Vol.2. Limusa-Wiley, México 1987.

[5] -Lang, S. Complex Analysis. Second Edition, Springer-Verlag, New york, 1985.

[6] -Nieto, J. Funciones de variable compleja. Serie de Matemática, monografía, O. E. A., 1980.

[7] -Silverman, R. Complex Analysis with Aplications. Dover Publications, New York, 1974.

[8] -Volkovski, L. Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja. Editorial Mir, Moscú. 1977.