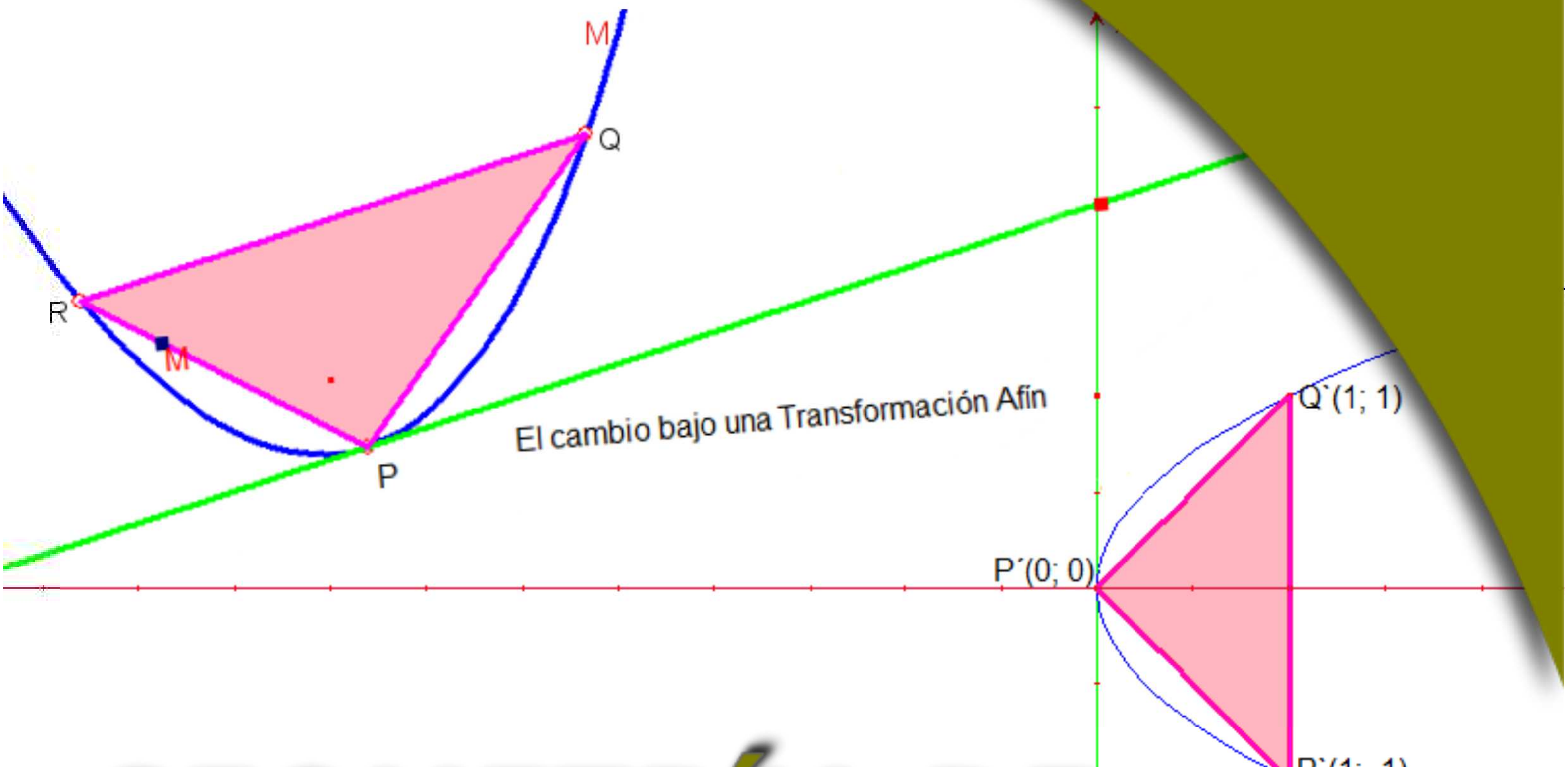
2015



GEOMETRÍA DE TRANSFORMACIONES

Saulo Mosquera López
Edwin Insuasty Portilla

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas y Estadística
San Juan de Pasto

GEOMETRÍA DE TRANSFORMACIONES

Saulo Mosquera López
Edwin Insuasty Portilla
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

2015

Contenido

Presentación

El objetivo fundamental de este trabajo es presentar un texto introductorio que trate las transformaciones geométricas básicas: Ortogonales, de semejanza, afines y la transformación por inversión.
El texto tiene origen en el programa elaborado para la asignatura **GEOMETRÍA DE TRANSFORMACIONES** que se ofrece a los estudiantes de VI semestre del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, el cual forma Educadores matemáticos para la enseñanza media de nuestro país.
El trabajo sigue la orientación propuesta por Felix Klein en el denominado "Programa Erlangen", según el cual:
"Una geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto G que permanecen invariantes cuando los elementos de G se someten a la acción de un cierto grupo de transformaciones de G."
El texto está conformado por seis capítulos cada uno de los cuales se describe brevemente enseguida:
En el capítulo 1 se presentan los conceptos básicos para el desarrollo de los capítulos posteriores. Inicia con un recorrido histórico de la geometría, desde la denominada geometría subconsciente hasta las nociones que son el fundamento del concepto de transformación, cual es la idea de movimiento de una figura geométrica de un lugar a otro y sus consecuencias en las diferentes geometrías tratadas. Aquí también se define el concepto de grupo de Transformaciones, el de orientación y la clasificación de una figura geométrica de acuerdo a la orientación que posea.
En el capítulo 2 se estudia la geometría métrica del plano, es decir, las isometrías del plano y las propiedades de una figura geométrica que permanecen invariantes cuando se les aplica una transformación ortogonal.
Los capítulos 3 y 4 tienen un enfoque análogo al esbozado en el párrafo anterior, aplicado la geometría equiforme y a la geometría afín en el plano, es decir, el estudio de los invariantes geométricos del plano bajo las transformaciones de semejanza y afines.

El capítulo 5 desarrolla una de las transformaciones más útiles para simplificar figuras planas, a saber, la transformación por inversión, sus invariantes y su relación con uno de los conceptos básicos en geometría moderna, el de razón cruzada.
Cada uno de los capítulos finaliza con un sección de aplicaciones y de problemas resueltos que ilustran los diferentes conceptos tratados y que sirven de modelo para desarrollar los problemas propuestos.
El trabajo termina con el capítulo 6, sobre problemas propuestos el cual contiene 76 ejercicios, con diferente grado de dificultad que corresponden a cada una de las temáticas tratadas y cuya resolución tiene como propósito básico afianzar la teoría desarrollada.
El texto es la sistematización de la experiencia desarrollada por los proponentes al impartir durante varios periodos académicos la asignatura ***GEOMETRÍA DE TRANSFORMACIONES*** y aunque toda la bibliografía referenciada, se utilizó de una u otra manera en el desarrollo del trabajo, es necesario reconocer la influencia en el mismo de los libros: "Geometric Transformations" de Modenov and Parkhomenko y "Estudio de las Geométrias" de Howard Heves.
Actualmente este trabajo se utiliza como texto guía en el desarrollo de la asignatura mencionada anteriormente y su sistematización se logró con base en la discusión y análisis de diferentes fuentes referenciales así como en las observaciones y sugerencias de docentes y estudiantes del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño.

Saulo Mosquera Lopéz
Edwin Insuasty Portilla
San Juan de Pasto, Junio de 2015.

Capítulo 1

Conceptos preliminares.

Este capítulo se centra en el desarrollo de los conceptos fundamentales que soportan ulteriores teorías, por ejemplo, se desarrolla el concepto de función concepto básico en todas las ramas de la matemática y particularmente en el estudio de la geometría de transformaciones. Otro concepto fundamental en este modelo geométrico es el de grupo de transformaciones que permite establecer y clasificar algunas propiedades invariantes en concordancia con la geometría que se esté estudiando.

En este capítulo suponemos que las transformaciones geométricas que se tratan preservan colinealidad, por tanto la no colinealidad, las posiciones relativas de los objetos y la orientación de un triángulo, lo cual permite clasificar las transformaciones como de primera o de segunda clase. Las transformaciones que se estudian en este texto preservan la forma y algunos de los conceptos mencionados anteriormente, excepto la transformación por inversion que se estudia en el último capítulo.

Para forjar una idea adecuada del método geométrico se realiza una revision histórica resumida que inicia con la que se denomina "Geometría subconsciente" iniciada con los egipcios, griegos y árabes; se continua con el periodo de oscurantismo y el Renacimiento hasta llegar al desarrollo de la geometría elemental moderna, las geometrías no Euclídeas desde Sacheri hasta Reimann, hasta llegar al cuerpo bien definido de la Geometría de Transformaciones.

1.1. Reseña Histórica

Las ideas geométricas iniciales de las que se tiene noticia se originan en períodos remotos de los que no se guarda memoria y se conectan con las observaciones realizadas por el hombre para reconocer la forma física de los objetos y para componer en su mente las formas y tamaños.

Las nociones de recta, perpendicularidad, distancia, rectangularidad, y otras fueron sugeridas al hombre, por ejemplo, por la noción del tiempo invertido para desplazarse de un lugar a otro, la cuerda tensa tensa de un arco, las paredes de una vivienda y la necesidad de buscar un método para delimitar terrenos, respectivamente. Consideraciones similares pueden elaborarse para la adquisición de conceptos como curva, área, volumen, para las secciones cónicas, grado de curvatura, rectas tangentes y otros conceptos. Esto indica que la Geometría se origina en las actividades prácticas del hombre, el ejercicio de diversos oficios y la resolución de problemas de la cotidianidad de esas épocas.

No existen registros que permitan estimar el tiempo que transcurrió antes de que el hombre fuera capaz de llevar a la Geometría al estado de ciencia; los escritores griegos son unánimes en opinar que en el valle del Nilo, en el Egipto Antiguo, fue el sitio en el que la llamada Geometría Subconsciente se transformó en Geometría Científica.

De acuerdo con Aristóteles, la Geometría no tuvo su origen en Egipto, por la necesidad de medir tierras, sino también, porque los sacerdotes disponían de tiempo para cultivarla, no solo por sus aplicaciones, sino como un vestigio claro de ciencia pura; consta en papiros de aquella época que para obtener el área de un círculo basta restar al diámetro un noveno de su longitud y elevar esto al cuadrado; esto equivale a tomar un valor aproximado de π como $\pi \approx 3{,}16049382716 = (2-\frac{2}{9})^2$.

Al igual que los egipcios, los babilonios también se consideran pioneros en el desarrollo de la Geometría como se puede evidenciar con los numerosos ejemplos que muestran como calculaban correctamente áreas rectangulares y áreas de triángulos rectángulos e isósceles. Los babilonios usaron la fórmula incorrecta $s = \frac{(a+c)(b+d)}{4}$ para calcular el área de un cuadrilátero de lados consecutivos a, b, c y d. Esta fórmula aparece en una inscripción en la tumba de Tolomeo XI, quien murió en el año 51 a. de C.

De acuerdo con los historiadores, la fuente de todas estas afirmaciones sobre hechos geométricos y de muchos otros son los papiros de Rhind y de Moscú en los cuales aparecen 110 problemas entre los que se destacan 25 de ellos que son de carácter geométrico. Es importante recalcar que ni los egipcios, ni los babilonios tenían a la Geometría como una ciencia teórica provista de teoremas y demostraciones; en lugar de esto existen descripciones de algún proceso llevado paso a paso aplicado a interpretaciones numéricas en particular. La Aritmética, por aquel entonces no se distinguía de la Geometría y sobre este transfondo, todo problema de tipo geométrico era también un problema de tipo aritmético.

En el siglo VII a. de C. la Geometría paso de Egipto a Grecia debido a los cambios políticos y económicos que provocaron que el poder de Egipto y Babilonia decayera. En Grecia la Geometría se desarrolló bajo la dirección de Thales, Demócrito y Solon entre otros. Los grie-

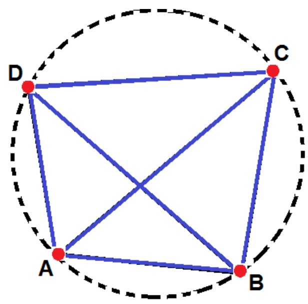
gos, entonces, transformaron la Geometría en un cuerpo diferente del conjunto de conclusiones empíricas desarrolladas hasta entonces. Esto es, los griegos no se conformaron con saber el qué, sino que trataron de establecer el por qué, por esto, la Geometría, se vio encausada hacia la recopilación de nuevos hechos y a la clasificación de las relaciones de unos con otros objetos. Esto conllevó poco a poco a trabajar en torno de las deducciones lógicas de las proposiciones geométricas a partir de algunas otras, actividad que produce dos resultados fundamentales: El concepto de teorema geométrico ligado a su demostración y la clasificación de aquellas proposiciones fundamentales a partir de las cuales se pueden deducir las restantes y es a partir de este instante que la Geometría se convierte en una teoría matemática.
Lo que se conoce de la Geometría griega es un resumen del llamado SUMARIO DE EUDEMO escrito por Proclo, el cual recibe este nombre debido a que admite que se basa en un trabajo de él. Según este tratado la Geometría griega empieza con el trabajo de Thales de Mileto (Siglo VI a. de C.). Luego aparece Pitágoras (Siglo VI a. de C.), quien fue alumno de Thales. La escuela Pitagórica estableció las propiedades de las paralelas, desarrolló la teoría de las proporciones y descubrió la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con su lado. De acuerdo a las referencias bibliográficas en el sumario de Eudemo se menciona el hecho de que, el pitagórico Hipócrates de Quios fue el primero en intentar una presentación lógica de la Geometría en la forma de cadena de proposiciones basadas en unas cuantas definiciones y suposiciones básicas. Hacia fines del siglo IV a. de C. aparece el libro que inmortalizó a Euclides (330-275? a. de C.) pues se considera que es el primer gran progreso en la historia del pensamiento y la organización matemática, ya que en él, la Geometría se presentó como un sistema tan bien constituido que sus fundamentos no sufrieron ninguna alteración fundamental durante mas de dos milenios.
El trabajo de Euclides (primer profesor de Matemáticas de la Universidad de Alejandría), es una recopilación de los trabajos de sus predecesores, pero su mérito fue el de presentar la matemática como una ciencia teórica independiente, pues escogiendo un pequeño grupo de suposiciones iniciales (23 definiciones, 5 postulados, 11 nociones comunes) dedujo todas las proposiciones en una sucesión lógica y deductiva. Los ELEMENTOS de Euclides, constan de 13 libros y contienen 465 proposiciones y que los libros VII, VIII y IX contienen 102 proposiciones, tratan de Teoría de Numeros y en ellos se encuentra la primera demostración de la infinitud de los números primos.
Luego de Euclides es pertinente citar los trabajos de Arquímedes (287-212 a. de C.), quien realizó creaciones altamente originales. Entre sus obras están: *Medidas de una Circunferencia, Cuadratura de la Parábola y Sobre Espirales.* En la primera describe el método clásico para el cálculo del número π y obtiene que está entre los racionales $\frac{223}{77}$ y $\frac{21}{7}$. En Geometría del espacio

Arquímedes escribe: *Sobre la Esfera y el Cilindro y sobre Concoides y esferoides*; en la primera propone una suposición geométrica establecida explícitamente y que puede enunciarse así: "Dados dos segmentos de recta desiguales, siempre existe un múltiplo finito del menor que es mayor que el otro". Este postulado recibe el nombre de Postulado de Arquímedes y en Análisis es fundamental para el desarrollo del concepto de continuidad.

Otro matemático importante es Apolonio de Perga (262-200 a. de C.), su trabajo fundamental fue "Secciones Cónicas" y por este trabajo recibió el titulo de "El Mayor Geómetra". Pappus desarrolló brevemente otros seis trabajos de Apolonio: Sobre Sección Proporcional, Sobre Sección Espacial, Sobre Sección Determinada, Tangencias, Tendencias y lugares Geométricos Planos.

Con la muerte de Apolonio, la geometría griega llegó prácticamente a su fin y tan solo merecen citarse como sucesores a Heron, Menelao, Claudio Tolomeo y Pappus. Heron estudió las mediciones de figuras planas y tridimensionales y destaca en su obra la fórmula $s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ para calcular el área de un triángulo de lados a, b y c donde $p = \frac{a+b+c}{2}$ es el semiperímetro del triángulo.

Menelao y Tolomeo trabajaron en trigonometría para colaborar con los astrónomos. Tolomeo es autor del "Almagesto" libro en el que aparece una tabla de senos para el ángulo de $(\frac{1}{2})^0$ hasta 180 y que se deduce a partir del teorema que lleva su nombre: En un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia, el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos.



$\overline{AC} \times \overline{DB} = \overline{AD} \times \overline{BC} + \overline{AB} \times \overline{DC}$

figura 1

Pappus vivió al final del siglo III a. de C. y su gran trabajo es la "Colección", que resulta ser el libro guía de los trabajos geométricos existentes en esa época, mejorando muchas demostraciones, añadiendo teoremas originales y una variedad de comentarios históricos valiosos.

Roma dominó el periodo final de los tiempos antiguos, en el cual Grecia, Mesopotamia y Egipto fueron conquistados por los romanos. Durante esa época, el trabajo científico original se hizo difícil y prácticamente desapareció. La escuela de Alejandría fue desapareciendo poco a poco y

se extinguió totalmente en el año 641 d. de C. cuando los árabes tomaron Alejandría.
Después de la caída del Imperio Romano (desde el siglo V, hasta el siglo XI d. de C.) los conocimientos de Matemáticas sufren un estancamiento, tanto así, que esta época se denomina la edad del oscurantismo en Europa.
En este periodo los principales cultores de las Matemáticas fueron los Hindúes y los árabes, sin producir algo de importancia ni en Geometría, ni en Matemáticas. Las Matemática hindúes son en gran parte empíricas y no tienen las características griegas que subrayan claridad y lógica.
Durante el Imperio Árabe, los califas de Bagdad se preocuparon mucho por la cultura e invitaron a escolares distinguidos a sus cortes. En esta época, muchos trabajos Hindúes y griegos en Matemáticas, medicina y astronomía fueron traducidos a la lengua arábiga, lo que ayudo a su conservación pues de no ser así habrían desaparecido. A finales del siglo XI se reanudaron las relaciones comerciales de oeste de Europa con el Levante y el mundo Árabe y en consecuencia los trabajos conservados por los musulmanes se traducen al Latin.
En el siglo XII nacieron las universidades de Oxford, Cambridge, Padua y Nápoles y en este siglo Campanus realizó una traducción de los Elementos que se convirtió en 1482 en la primera versión impresa de la obra de Euclides.
En el siglo XVI, en la época del renacimiento, aparece la primera realización matemática profunda mas allá de los griegos y los árabes; aparecieron también muchas traducciones, entre las que merecen relacionarse: *Traducción del libro I de comentarios sobre Euclides* de Proclo, *Traducción de los libros I-IV de las Cónicas de Apolonio* que fue realizada por Comandito en 1556 y en 1572 el mismo realizó una traducción de los Elementos.
El periodo que siguió al Renacimiento Europeo y que corre hasta la época actual se conoce con el nombre de la ”Era Moderna” en la cual la Geometría heredada de los griegos ha sido enriquecida con numerosas proposiciones acerca de la circunferencia y las figuras rectilineas y constituye lo que se denomina Geometría Moderna Elemental, pero en la práctica es una continuación de los Elementos de Euclides. El siglo IXX fue fructífero en Geometría, tanto así que en 1906 Maximiliano Simón trató de realizar un catálogo de aportes a la Geometría elemental del siglo IXX, en este texto aparecen mas de diez mil referencias. Entre algunos investigadores de este siglo están: Georgonne, Ángel, Feurbach, Simson, Peaucellier, Gauss y Euler.
En el siglo IXX ocurre un hecho fundamental para el desarrollo de la geometría; se inventa una geometría conceptualmente diferente de la gemotría Euclidiana. Esta geometría tiene su origen en el malestar que la teoría de las paralelas causó a los antiguos griegos y que en aquel tiempo la teoría comprendía una circularidad ilógica. Euclides salvó este inconveniente definiendo rectas paralelas como rectas coplanares que no se cortan por más que se prolonguen en uno u otro

sentido y adoptando como postulado su famoso postulado de las paralelas, que enunció así:
"Si una recta al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos."
Este postulado de Euclides, el quinto postulado, no satisfacía cabalmente los requerimientos que en ese entonces se exigían para un postulado y por tal motivo Proclo dice que fue atacado desde el principio, ya que muchos geómetras pensaron que podia deducirse a partir de los cuatro restantes o por lo menos sustituirse por un equivalente mas aceptable.
Se han dado muchos postulados equivalentes al postulado de las paralelas y entre ellos el mas popular es el formulado por el matemático y físico escocés Jhon Playfair (1748-1814).
"Por un punto exterior a una recta únicamente se puede trazar una paralela a ella."
Durante mas de dos mil años los intentos por "demostrar" el postulado de las paralelas mantuvo ocupados a los geómetras. Aparecieron muchas "demostraciones" pero tarde o temprano se demostraba que cada una de ellas se basaba en una suposición equivalente al propio postulado de las paralelas.
En 1733 se publica el primer trabajo serio acerca del análisis del postulado de las paralelas; el padre jesuita Girolano Sacheri (1667-1733) quien era profesor de Matemáticas de la universidad de Pavía, publicó su obra "Euclides liberado de toda culpa" en el cual se demostraba que el postulado de las paralelas era equivalente a "la suma de los ángulos internos de un triángulo es equivalente a dos rectos." En este texto, en realidad, se sientan las bases de la primera Geometría No Euclídea, 33 años más tarde, Hemrich Lambert (1728-1777) con ideas muy similares a las de Sacheri escribió una investigación titulada "Sobre la teoría del paralelismo", avanzando un poco más que el trabajo del jesuita pero fundamentalmente obteniendo el mismo resultado.
Fundamentalmente el trabajo de Sacheri consistió en lo siguiente: demostró que si en un cuadrilátero $ABCD$ los ángulos A y B son rectos y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales entonces los ángulos C y D son congruentes.

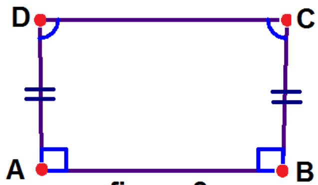


figura 2

De esta forma existen tres posibilidades: los ángulos C y D son agudos e iguales, los ángulos C y D son rectos, los ángulos C y D son obtusos e iguales. Estas posibilidades fueron llamadas, la hipótesis del ángulo agudo, la hipótesis del ángulo recto y la hipótesis del ángulo obtuso.

Suponiendo la infinitud de la recta fue eliminada la hipótesis del ángulo obtuso. La hipótesis del ángulo agudo fue eliminada de una forma confusa y no satisfactoria y por tal motivo debería verificarse la única posibilidad restante, es decir, la del ángulo recto, lo cual llevaba a una demostración del postulado de las paralelas.

Lo que sucedió en realidad fue que la buscada contradicción en el caso del ángulo agudo no existía y esto es lo que precisamente un siglo mas tarde lleva al descubrimiento de las Geometrías No Euclídeas.

Los primeros en sospechar la no existencia de contradicción en el caso del ángulo agudo fueron: Karl Friedrich Gauss (1777-1855) de Alemania, János Bolyai (1802-1860) de Hungría y Nicolai Ivanovich Lobachevsky (1783-1856) de Rusia. Ellos retomaron el postulado de las paralelas en la forma de Playfair considerando tres posibilidades: "por un punto exterior a una recta puede trazarse más de una, o únicamente una o ninguna paralela a ella", las cuales son equivalentes respectivamente a las hipótesis del ángulo agudo, recto y obtuso respectivamente. El caso del ángulo obtuso fue descartado suponiendo nuevamente la infinitud de la recta; pero imaginando una Geometría compatible con el caso del ángulo agudo desarrollaron toda una serie de proposiciones totalmente válidas. Gauss fue el primero en llegar a conclusiones avanzadas en esto pero por temor al que dirán, no publicó nada al respecto y de esta manera el honor del descubrimiento de la primera Geometría No Euclídea recae sobre Bolyai y Lobachevsky. Bolyai publicó su obra en 1832 en un apéndice de la obra de su padre, pero Lobachevsky separado del mundo científico por la distancia y el lenguaje, habría publicado sus hallazgos entre 1824-1830. Debido entonces a la prioridad de la publicación de Lobachevsky, a la geometría de la hipótesis del ángulo agudo se le ha llamado Geometría Lobachevskiana (Hiperbólica).

La independencia real del postulado de las paralelas de los demás postulados de la geometría Euclidiana no fue establecida hasta que Eugenio Belltrami, Arthur Cayley, Felix Klein, y Henri Poincaré y otros, proporcionaron las demostraciones de la compatibilidad del ángulo agudo. El método consistió en presentar un modelo dentro de la geometría Euclidiana de tal manera que al desarrollo abstracto de la hipótesis del ángulo agudo se le pudiera dar una interpretación Euclidiana en el modelo. De este modo, cualquier inconsistencia en la Geometría no Euclidiana se transformaría en una inconsistencia en la Geometría Euclidiana.

En 1854 Bertrand Riemann (1826-1866) en la conferencia de su tesis de grado demostró que si se descarta la infinitud de la recta, solamente se considera indefinida y si además se realizan pequeñas modificaciones en los postulados, se puede desarrollar una geometría compatible con la hipótesis del ángulo obtuso. Esta Geometría No Euclídea se ha llamado desde entonces Geometría de Riemann (Elíptica).

Después del descubrimiento de estas dos geometrías No Euclídeas que resultaron de las hipótesis de los ángulos agudo y obtuso se han identificado otras geometrías No Euclídeas. Por ejemplo: Si no se acepta el postulado de Arquímedes, se obtiene una Geometría No Arquimediana, la Geometría Euclidiana sin el postulado de las paralelas se llama geometría Absoluta, si no se acepta el teorema de Desargues se obtiene la Geometría No Desarguesiana, si no se acepta el teorema de Pappus- Pascal se obtiene la geometría No Pascaliana, si no se acepta aún para triángulos rectángulos infinitesimales el teorema de Pitágoras se obtiene la Geometría no Pitagórica en la cual, por ejemplo, dos triángulos rectángulos pueden tener los mismos catetos pero distinta hipotenusa.

Del enfoque Euclidiano adoptaremos varias referencias en nuestro curso; por ejemplo tomaremos la cuarta noción común; "Cosas que se pueden superponer la una a la otra hasta coincidir son iguales entre si." En esta noción, la idea de superponer, lleva implícita la noción y ejecución de un "movimiento" que lleve una figura sobre otra y precisamente la manera de llevar una cosa sobre otra para decidir acerca de su igualdad, es una de las características básicas de cada geometría.

Euclides en forma muy vaga vislumbró que en geometría para definir igualdad necesitaba la definición de movimiento (transformación) que permita llevar una figura sobre otra. Esto fue ampliamente discutido por Helmholtz y constituye la base de la Geometría según Klein.

Para observar en que consiste la Geometría según Klein examínese lo siguiente:

Los movimientos que permiten decidir si dos figuras en un plano limitado coinciden o no son las traslaciones, rotaciones y reflexiones sobre rectas. Por consiguiente, bajo este punto de vista se estudian las propiedades de las figuras de un plano que resultan invariantes bajo las llamadas isometrías del plano. Pero veremos que el producto de dos isometrías planares es otra isometría planar y que la inversa de una isometría es otra isometría y por lo tanto el conjunto de todas las isometrías constituye un grupo de Transformaciones. Por tanto, se puede afirmar que la **GEOMETRÍA MÉTRICA EUCLIDIANA** es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano limitado que permanecen invariantes bajo el grupo de las isometrías planares. Entre estos invariantes aparecen los conceptos de colinealidad, interestancia, paralelismo, perpendicularidad, concurrencia de rectas, amplitud, área, entre otros.

La Geometría Euclídea también trata sobre las figuras semejantes y en este caso, los movimientos que transforman una figura en otra semejante son las rotaciones, las traslaciones, las reflexiones en rectas y las homotecias. Estos movimientos se llaman semejanzas del plano y también constituyen un grupo de transformaciones y en consecuencia se puede considerar la **GEOMETRÍA EQUIFORME PLANA** como el estudio de las propiedades de las figuras

de un plano limitado que permanecen invariantes bajo el Grupo de Semejanzas planares. Entre estos invariantes están: la colinealidad, interestancia, paralelismo, perpendicularidad, amplitud y puntos medios, pero desaparecen por ejemplo, área, longitud y congruencia.
En la misma forma, la **GEOMETRÍA AFÍN PLANA** es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano limitado que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones afines. Entre estos invariantes están: colinealidad, paralelismo, puntos medios, concurrencia de rectas pero desaparecen por ejemplo, amplitud y perpendicularidad.
La Geometría Proyectiva es el estudio de aquellas propiedades de las figuras de un plano ilimitado que permanecen invariantes bajo el grupo de las transformaciones proyectivas: Entre estos invariantes están: colinealidad, concurrencia de rectas, razón doble pero desaparecen paralelismo y puntos medios.
Consideraciones como las anteriores llevaron a Felix Klein (1849-1925) en su discurso de aceptación de una cátedra en la Universidad de Erlangen y basado en su propio trabajo y en el de Sophus Lie (1842-1899) a dar una definición notable de "una Geometría", esta es:
"Una Geometría es el estudio de aquellas propiedades de un conjunto G que permanecen invariantes cuando los elementos de G se someten a las transformaciones de un cierto Grupo de transformaciones de G." El discurso de Klein y sus consecuencias reciben el nombre de "Programa de Erlangen de Klein".
El punto de vista de Klein es el que básicamente se desarrollará aquí y en el que aparecen: la Geometría Métrica Plana, la Geometría Equiforme Plana, la Geometría Afín y la geometría Inversiva.

1.2. El concepto de Aplicación

Se trata en un comienzo, de establecer uno de los conceptos mas familiares a todas las ramas de la Matemáticas y que permite definir correspondencia entre objetos y la posterior clasificación de las mismas de acuerdo a las propiedades que posea. Las aplicaciones o funciones aparecen por doquier; por ejemplo existe una correspondencia que asocia a cada estudiante de Geometría de transformaciones el código de su matricula y que es diferente al de cualquier compañero; el de la correspondencia que asocia a cada clase de caramelos en una tienda su precio, el valor mensual del pago de los servicios en concordancia con el estrato y el consumo. En el caso particular de la Geometría, el concepto de correspondencia es fundamental, ya que mediante este, se puede transformar una figura en otra y así estudiar más fácilmente sus propiedades.

Definición 1. *Una* **aplicación** *α de un conjunto $X \neq \varnothing$ en un conjunto $Y \neq \varnothing$ es una corres-*

pondencia bajo la cual a cada elemento x de X se le asocia un único elemento perfectamente definido y de Y.
El elemento y de Y se llama la imagen *de x bajo α y se escribe $y = \alpha(x)$. El elemento x de X es una* imagen inversa *de y bajo α.*

Definición 2. *Sea $\alpha : X \to Y$ una aplicación; entonces:*

- *El Dominio de α es el conjunto de valores x de X para los cuales está definida la aplicación; es decir: $D_\alpha = \{x \text{ en } X : \text{ existe } y \text{ en } Y \text{ tal que } y = \alpha(x)\}$.*
- *El* **Rango** *de α es el conjunto de valores que toma la aplicación, es decir:*
  $R_\alpha = \{y \text{ en } Y : \text{ existe } x \text{ en } X \text{ tal que } y = \alpha(x)\}$.

Definición 3. *Sea $\alpha : X \to Y$ una aplicación; entonces:*

- *α es* sobreyectiva *si y solo si cada elemento y de Y posee al menos una imagen inversa.*
- *α es* inyectiva *si y solo si ningún elemento y de Y posee mas de una imagen inversa.*
- *α es* bíyectiva *si y solo si cada elemento y de Y posee una única imagen inversa; es decir α es sobreyectiva e inyectiva.*

Ejemplo 1. Sea $\alpha : X \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(x) = \frac{2x}{x+1}$ donde $X = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, entonces:

- 1) α es una aplicación ya que si $x_1 = x_2$ entonces $2x_1 = 2x_2$ y $x_1 + 1 = x_2 + 1$ por tanto $\frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2}{x_2+1}$ es decir $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$.
- 2) El dominio de α es todo X ya que $\alpha(x)$ existe para todo x en X. ($\alpha(x)$ no existe únicamente para $x = -1$ y -1 no está en X).
- 3) El Rango de α es el conjunto $[0, 2)$ ya que para todo y con $0 \leq y < 2$, podemos tomar $x = \frac{y}{2-y} \geq 0$ y este elemento es tal que $\alpha(x) = y$.
- 4) $\alpha(x)$ es inyectiva ya que si x_1 y x_2 en X son tales que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ entonces $\frac{2x_1}{x_1+1} = \frac{2x_2}{x_2+1}$ o sea $2x_1(x_2 + 1) = 2x_2(x_1 + 1)$, es decir $x_1 = x_2$.
- 5) Por 3) α no es sobreyectiva.

Definición 4. *Si $\alpha : X \to \mathbb{R}$ es una aplicación biyectiva, entonces la aplicación inversa de $\alpha, (\alpha^{-1})$ es aquella bajo la cual a todo y en Y se le asocia su única imagen inversa bajo α.*

Definición 5. *Sea $\alpha : X \to Y$ una aplicación, entonces:*

1. *Si $A \subseteq X$ entonces la* ***imagen Directa de A*** *por α es el conjunto de las imágenes de los elementos de A; así $\alpha(A) = \{y \in Y : \exists x \in A$ tal que $y = \alpha(x)\}$.*

2. *Si $A \subseteq Y$ entonces la* ***imagen Inversa de A*** *por α es el conjunto de los elementos de X cuyas imágenes están en $\alpha(A)$; es decir,*

$$\alpha^{-1}(A) = \{x \in X : \alpha(x) \in A\}.$$

ejemplo 2. Sea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\alpha(x) = x^2$. Hallar las imágenes inversas de los siguientes conjuntos:
a).$(-\infty, -1]$, b).$(1, 1]$, c).$(-1, 1)$, d).$[4, 9]$.
solución a). $x \in \alpha^{-1}(-\infty, -1]$ si y solo si $\alpha(x) \in (-\infty, -1]$ si y solo si $x^2 \in (-\infty, -1]$ si y solo si $x^2 \leq -1$ si y solo si $x \in \varnothing$ luego $\alpha^{-1}(-\infty, -1] = \varnothing$.
b). $x \in \alpha^{-1}(-1, 1]$ si y solo si $\alpha(x) \in (-1, 1]$ si y solo si $x^2 \in (-1, 1]$ si y solo si $-1 < x^2 \leq 1$, es decir $x^2 \leq 1$ si y solo si $|x| \leq 1$ si y solo si $-1 \leq x \leq 1$ luego $\alpha^{-1}(-1, 1] = [-1, 1]$.
De igual modo se elaboran los demás literales.
Ejemplo 3. Sea $X \to Y$ una aplicación y A, B subconjuntos no vacíos de X, demostrar que $\alpha(A \cap B) \subseteq \alpha(A) \cap \alpha(B)$.
Sea $y \in \alpha(A \cap B)$ entonces existe $x \in A \cap B$ tal que $y = \alpha(x)$ y por ello existe x en A y x en B tal que $y = \alpha(x)$ entonces existe x en A tal que $y = \alpha(x)$ y existe x en B tal que $y = \alpha(x)$ y en consecuencia y está en $\alpha(A)$ y y está en $y = \alpha(B)$ lo que demuestra que $\alpha(A \cap B) \subset \alpha(A) \cap \alpha(B)$.

Definición 6. *a). Una aplicación biyectiva α de un conjunto $X \neq \varnothing$ en si mismo se llama* **una transformación** *de X.*
b). Si α es una transformación de X y existe a en X tal que $\alpha(a) = a$ se dice que a es un **punto fijo (invariante)** *bajo α.*
c). Una transformación en que todo x en X sea punto invariante se llama **Transformación Identidad.**

Ejemplo 4 Sea α la correspondencia bajo la cual a todo punto M del plano π se le asocia su reflexión M' sobre la recta l. ¿Es α una transformación de π ?
Bajo esta correspondencia cada punto M del plano π tiene una imagen, a saber, el punto M' situado simétricamente opuesto de M con respecto de l y cada punto P la recta, coincide con su imagen P', por tanto α es una aplicación de π.

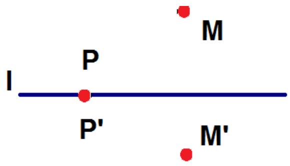


figura 4

Como cada punto M' tiene una única imagen inversa que es el punto situado simétricamente de M' respecto de l se tiene que: "una reflexión en una recta es una transformación del plano que a la vez es su propia inversa."
Nótese que una reflexión en una recta tiene como puntos fijos los puntos de la recta centro de la transformación y que, dada la recta de reflexión, la transformación queda completamente determinada.
Ejemplo 5. Sea α la correspondencia tal que a todo punto M del plano π le asocia el punto M' de π tal que el vector $\overrightarrow{MM'}$ es igual a algún vector dado $\overrightarrow{a}$. ¿Es α una transformación de π ?
Bajo esta correspondencia cada punto M del plano π tiene una imagen M' que se obtiene moviéndose una distancia dada en una dirección dada, es decir, todo punto M determina con su imagen M' un vector paralelo con $\overrightarrow{a}$ y del mismo sentido, así también, cada punto M' tiene una única imagen inversa que se obtiene moviéndose la misma distancia en la dirección opuesta.

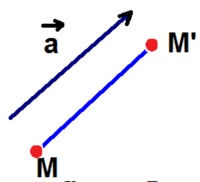


figura 5

Luego. " α es una transformación de π, que se llama *traslación.*"
Obsérvese que una traslación está determinada por un vector y que no posee puntos fijos a menos que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ y en este caso se obtiene la transformación identidad.
Ejemplo 6. Sea π un plano en el cual se ha dado un sistema de coordenadas rectangulares XOY, M un punto diferente del origen y (r, θ) sus correspondientes coordenadas polares. Sea α la correspondencia tal que a cada $M(r, \theta)$ le asocia el punto $M'(r, 2\theta)$. ¿Es α una transformación de π ?

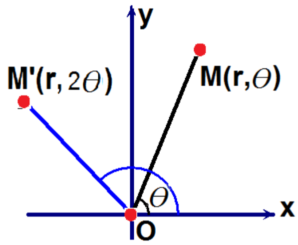


figura 6

Si se hace corresponder al origen consigo mismo se obtiene una aplicación del plano π en si mismo ya que dado cualquier ángulo θ siempre existe su ángulo doble, pero obsérvese que cada $M'(r,\theta)$ tiene dos imágenes inversas $M_1(r,\frac{\theta}{2})$ y $M_2(r,\pi+\frac{\theta}{2})$. En consecuencia α es una aplicación sobreyectiva pero no inyectiva y siendo así no estamos frente a una transformación.
Ejemplo 7. Sea α la correspondencia que a cada punto M del plano le asocia su proyección ortogonal sobre una recta dada l. ¿Es α una transformación de π?

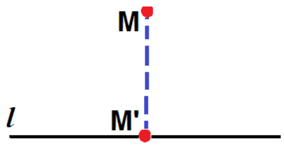


figura 7

Cada punto M del plano tiene una única imagen M' sobre la recta l, a saber el pie de la perpendicular trazada por M a l y por tanto esta correspondencia es una aplicación; pero cada punto M' sobre la recta l tiene infinitas imágenes inversas, que configuran la perpendicular por M' a l y además los puntos que no están sobre la recta l no tienen imagen inversa lo que significa que esta aplicación no es uno a uno ni sobre y en consecuencia no es una transformación.

1.3. Grupo de Transformaciones.

En diversas situaciones de Geometría es necesario aplicar no una sino varias transformaciones sucesivamente. Es importante considerar el caso de una colección de transformaciones tal que el efecto de aplicar sucesivamente cualquier número finito de ellas es el mismo que aplica tan solo una transformación de la colección y que la inversa de una transformación de la colección también esté en la colección. Una colección que satisface estas condiciones conforma un ***Grupo de Transformaciones***.

Definición 7. *Sean α y β transformaciones de un conjunto $X \neq \varnothing$, entonces:*
a). El producto *(**compuesta**) de α y β es la aplicación denotada por $\alpha \circ \beta$ y tal que*

$(\alpha \circ \beta)(x) = \alpha(\beta(x))$ *para todo* x *en* X.

b). $\alpha = \beta$ si y solo si $\alpha(x) = \beta(x)$ para todo x en X.

Ejemplo 8 Sea α la reflexión en una recta dada y β la traslación en un vector $\overrightarrow{PQ}$ perpendicular a l. ¿Es $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$?

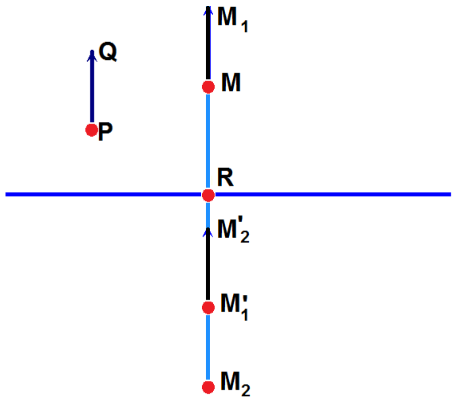


figura 8

Se observa que β lleva M en M_1 y α lleva M_1 en M_2 luego $(\alpha \circ \beta)(M) = M_2$, en la misma forma α lleva a M en M_1' y β lleva M_1' en M_2' es decir $(\beta \circ \alpha)(M) = M_2'$ pero nótese que aunque M_2, M_2' y M son colineales, se tiene que:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} - \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{PQ} - (\overrightarrow{M_1R} + \overrightarrow{RM_2}) = \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{M_1R}\\ &= \overrightarrow{PQ} - [2(\overrightarrow{M_1M} + \overrightarrow{MR})] = \overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{MR}\\ &= -\overrightarrow{PQ} - 2\overrightarrow{MR}.\end{aligned}$$

y

$$\overrightarrow{MM_2'} = \overrightarrow{MM_1'} - \overrightarrow{M_1'M_2'} = \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{RM_1'} - \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{MR} - \overrightarrow{PQ}$$

luego,

$$MM_2' = 2MR + PQ \text{ y } MM_2' = |2MR - PQ|,$$

es decir, $M_2 \neq M_2'$ y por tanto $\alpha \circ \beta \neq \beta \circ \alpha$.

Ejemplo 9. Sean α y β traslaciones definidas por los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ respectivamente. ¿Es $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$?

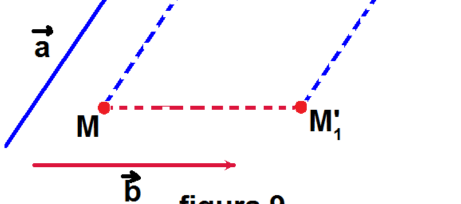


figura 9

Sea M un punto del plano entonces α lleva M en M_1 y β lleva M_1 en M_2 luego $\beta \circ \alpha$ lleva M en M_2, análogamente $\alpha \circ \beta$ lleva M en M_2' via M_1' y como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MM_2} &= \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}\\ &= \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}\\ &= \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}\\ &= \overrightarrow{MM_1'} + \overrightarrow{M_1'M_2'}\\ &= \overrightarrow{MM_2'},\end{aligned}$$

se sigue que $M_2 = M_2'$ y por tanto, $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$.

Ejemplo 10. Si α y β son transformaciones de X entonces $\beta \circ \alpha$ también lo es.

a). $\beta \circ \alpha$ es inyectiva, esto es, si $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$.

Sean x_1 y x_2 en X tales que $(\beta \circ \alpha)(x_1) = (\beta \circ \alpha)(x_2)$ entonces se encuentra que $\beta(\alpha(x_1)) = \beta(\alpha(x_2))$ y entonces $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ ya que β es inyectiva y en consecuencia $x_1 = x_2$ debido a que α también es inyectiva.

b). $\beta \circ \alpha$ es sobreyectiva. Para cada z en X, existe x en X tal que $z = (\beta \circ \alpha)(x)$. Como β es sobreyectiva, para todo z en X, existe y en X tal que $z = \beta(y)$.

Puesto que α es sobre entonces cada elemento de X posee al menos una imagen inversa en X, en particular para y en X existe x en X tal que $y = \alpha(x)$ y en consecuencia de $z = \beta(y)$ se sigue $z = \beta(\alpha(x)) = (\beta \circ \alpha)(x)$. En resumen, para todo z de X existe x en X tal que $z = (\beta \circ \alpha)(x)$ y siendo así $\beta \circ \alpha$ es sobreyectiva.

Las partes a). y b). aseguran que $\beta \circ \alpha : X \to X$ es biyectiva y por tanto una transformación de X.

Ejemplo 11. Si α, β, γ son transformaciones de X entonces $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

En efecto, al tomar cualquier x de X se ve como:

$$[(\alpha \circ \beta) \circ \gamma](x) = (\alpha \circ \beta)(\gamma(x)) = \alpha(\beta(\gamma(x))) = \alpha(\beta \circ \gamma)(x)) = [\alpha \circ (\beta \circ \gamma)](x),$$

y por lo tanto se obtiene que $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

Ejemplo 12. Existe una transformación I de X tal que $\alpha \circ I = I \circ \alpha = \alpha$ para cada transformación α de X.

Sea $I : X \to X$ tal que $I(x) = x$, para cada x en X entonces I es una transformación de X ya que la aplicación identidad es biyectiva. Además, si x está X entonces:

$$(I \circ \alpha)(x) = I(\alpha(x)) = \alpha(x) = \alpha(I(x)) = (\alpha \circ I)(x),$$

por esta razón $\alpha \circ I = I \circ \alpha = \alpha$

Ejemplo 13. Para cada transformación α de X existe una transformación α^{-1} de X tal que

$\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = I$.

Si α es una transformación de X entonces $\alpha : X \to X$ es biyectiva y por ello existe $\alpha^{-1} : X \to X$ que también es biyectiva y tal que $\alpha^{-1}(y) = x$ si y solo si $\alpha(x) = y$ y en consecuencia $(\alpha^{-1} \circ \alpha)(x) = \alpha^{-1}(\alpha(x)) = \alpha^{-1}(y) = x = I(x)$ y también se encuentra que

$$(\alpha \circ \alpha^{-1})(y) = \alpha(\alpha^{-1}(y)) = \alpha(x) = y = I(y).$$

Luego α^{-1} es una transformación de X y tal que $\alpha \circ \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \circ \alpha = I$.

De los cuatro últimos ejemplos se puede concluir que: Si T es el conjunto de todas las transformaciones de un conjunto $X \neq \varnothing$, entonces $(T, \circ)$ es un Grupo.

Definición 8. *Sea T el conjunto de todas las transformaciones de un conjunto $X \neq \varnothing$, entonces $(T, \circ)$ es un **grupo de transformaciones** si y sólo si:*

a). Si α y β están en T entonces $\beta \circ \alpha$ está en T.

b). Para cada α en T, su inversa α^{-1} también está en T.

Ejemplo 14. Sea $T = \{I, \alpha\}$ donde α es la reflexión en alguna recta dada l, I la transformación identidad, entonces $(T, \circ)$ es un grupo Abeliano de orden 2.

Efectuar $\alpha \circ \alpha$ significa reflejar un punto M sobre l para obtener M' y luego reflejar nuevamente M' sobre l, con lo que se encuentra de nuevo M, es decir $\alpha \circ \alpha = I$.

Es claro además que $I \circ \alpha = \alpha, \alpha \circ I = \alpha, I \circ I = I$ con lo cual se obtiene la siguiente tabla.

$\circ$	I	α
I	I	α
α	α	I

Ejemplo 15. Sea T el conjunto de todas las traslaciones del plano, entonces $(T, \circ)$ es un grupo.

a). Sean α y β traslaciones definidas por los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ respectivamente y M un punto del plano, entonces lleva M en M_1 y β lleva M_1 en M_2, luego

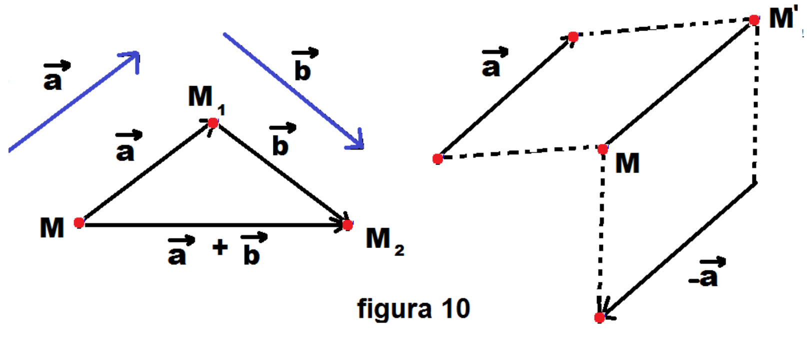


figura 10

$\beta \circ \alpha$ lleva M en M_2, donde $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{b}$. Como $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2}$ se sigue que $\beta \circ \alpha$ esta definida por el vector $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ y por tanto $\beta \circ \alpha$ es una traslación del plano.
b). Sea α una traslación del plano definida por el vector $\overrightarrow{a}$ entonces α lleva a cada punto de M del plano en el punto M' tal que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{a}$, entonces α^{-1} debe ser tal que lleve a M' en M y esto claramente lo efectúa $-\overrightarrow{a}$, luego α^{-1} está definida por el vector $-\overrightarrow{a}$ y en consecuencia α^{-1} es una traslación del plano.
En conclusión: "El conjunto de las traslaciones del plano con el producto de las transformaciones constituye un grupo abeliano de orden infinito."
Ejemplo 16. Sea $(T, \circ)$ el grupo de las traslaciones del plano, sea $T_1 \subseteq T$ el conjunto de todas las traslaciones en la dirección del eje x, en cualquiera de los dos sentidos. Es obvio que $(T_1, \circ)$ es un grupo y sea $T_2 \subseteq T_1$ el conjunto de las traslaciones en la dirección del eje x en un solo sentido. ¿ $(T_2, \circ)$ es un grupo?
a). El producto de dos traslaciones de T_2, es de nuevo, una traslación de T_2, ya que la suma de dos vectores de un mismo sentido es otro vector del mismo sentido.
b). la inversa de una traslación α de T_2, no está en T_2, (Excepto I) ya que α^{-1} está definida por el vector opuesto al que define α y por tanto no tiene el mismo sentido que el dado. En consecuencia $(T_2, \circ)$ no es grupo.
Ejemplo 17. Sea B el conjunto de todas las reflexiones en rectas de la forma $x = k$ con $k \in \mathbb{R}$, en el plano XOY, incluida I. ¿Es $(B, \circ)$ un grupo?
Nota: Una reflexión α en una recta de la forma $x = k$ con $k \in \mathbb{R}$, analíticamente está definida por la regla $\alpha(x, y) = (2k - x, y)$.
a). Sean α y β reflexiones en las rectas $x = a$ y $x = b$, $M(x, y)$ un punto cualquiera del plano, entonces α lleva $M(x, y)$ en $M'(2a - x, y)$ y β lleva M' en $M''(2b - (2a - x), y) = M''(2(b - a) + x, y)$. Luego, $(\beta \circ \alpha)$ lleva a $M(x, y)$ en $M''(2(b - a) + x, y)$ el cual no es de la forma $(2c - x, y)$ para algún $c \in \mathbb{R}$ y por tanto el producto de dos reflexiones de B no es otra reflexión de B y así $(B, \circ)$ no es un grupo.

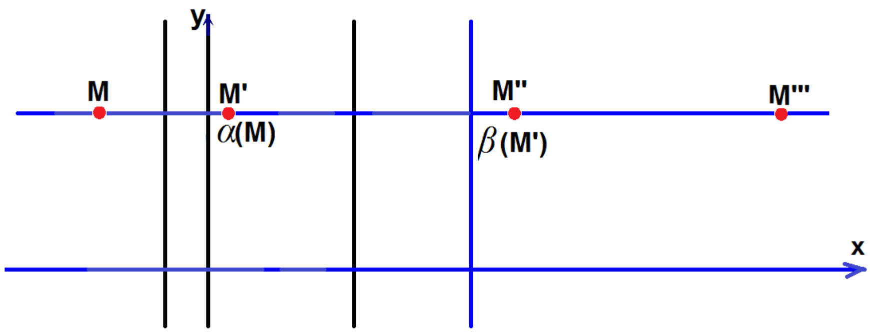


figura 11

¿Qué es $(\beta \circ \alpha)$? Observe que $\alpha(M) = M'$ y $\beta(M') = M''$ por tanto $(\beta \circ \alpha)(M) = M''$ y como $\lambda(M) = M'''$ donde λ es la reflexión respecto de la recta $x = b - a$ y se observa que $M'' \neq M'''$, entonces efectivamente $\beta \circ \alpha$ no es la reflexión en la recta $x = b - a$ como aparentemente puede pensarse; pero nótese que $\beta \circ \alpha$ traslada el punto M una distancia igual a $2(b-a)$ en la dirección del eje x y por tanto $\beta \circ \alpha$ es una traslación en la dirección del eje x, es decir $\beta \circ \alpha$, es un elemento de T_1.

Definición 9. *Sea $(T, \circ)$ un grupo de transformaciones de X y sea $\varnothing \neq T' \subseteq T$, entonces $(T', \circ)$ es un subgrupo de $(T, \circ)$ si y sólo si:*
a). Si α y β están en T', $\beta \circ \alpha$ está en T'.
b). Para α cada T'. α^{-1} está en T'.

Ejemplo 18. Sea $(T, \circ)$ el grupo de las traslaciones del plano y sea T_0 el conjunto de todas las traslaciones del plano en la dirección de una recta dada l, entonces $(T_0, \circ)$ es un subgrupo de $(T, \circ)$.
Ejemplo 19. Sea $\vec{a}$ un vector dado y A el conjunto de todas las traslaciones en vectores de la forma na, con n en $\mathbb{Z}$, entonces $(A, \circ)$ es un subgrupo de $(T, \circ)$.
Ejemplo 20. Si en el ejemplo anterior se toma $\vec{a}$ paralelo al eje x, entonces $(A, \circ)$ es un subgrupo de $(T, \circ)$.
Obsérvese además que el conjunto de todas las transformaciones del plano es en sí mismo un grupo del cual todos los grupos considerados son subgrupos.
El siguiente teorema, cuya demostración queda a cargo del lector, enuncia algunas propiedades de los grupos, que en particular son válidas para los grupos de transformaciones.

Teorema 1. . *Sea $(T, \circ)$ un grupo de transformaciones de $X \neq \varnothing$, entonces:*
a). Si $\alpha \circ \beta = \alpha \circ \varphi$ entonces $\beta = \varphi$. Cancelativa a la izquierda.
b). Si $\beta \circ \alpha = \varphi \circ \alpha$ entonces $\beta = \varphi$. Cancelativa a la derecha.

En particular, si $\alpha \circ \beta = \beta$ *entonces* $\alpha = I$ *y si* $\beta \circ \alpha = \beta$ *entonces* $\alpha = I$.

c). Dadas dos transformaciones α *y* β *entonces existe una única transformación* φ *tal que* $\alpha \circ \varphi = \beta$.

d). Dadas dos transformaciones α *y* β *entonces existe una única transformación* φ *tal que* $\varphi \circ \alpha = \beta$.

Nota: *En ocasiones utilizaremos la ley cancelativa en la siguiente forma: Supongamos que* $\beta \circ \alpha = \alpha_1 \circ \alpha_1$ *y de alguna manera podemos demostrar que* $\alpha = \alpha_1$ *(o que* $\beta = \beta_1$*) entonces debemos concluir que* $\beta = \beta_1$ *(o que* $\alpha = \alpha_1$*).*

1.4. Orientación

Para tratar más detalladamente las transformaciones (ortogonales, de semejanza, afines,...) se hace necesario introducir el concepto geométrico de orientación. Una ilustración gráfica de este concepto se puede dar por la comparación de dos figuras cuyas fronteras son recorridas en un sentido definido. La siguiente gráfica ilustra esta situación:

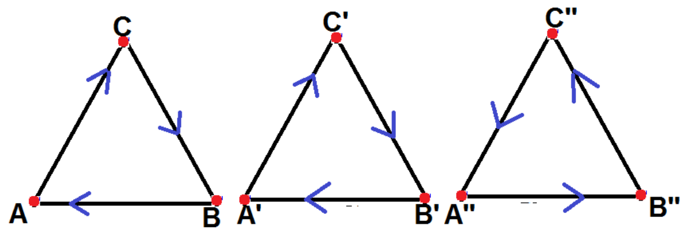


figura 12

Los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen las misma orientación ya que en ambos casos los vértices son recorridos en la misma manera, pero los triángulos ABC y $A''B''C''$ tienen orientación opuesta ya que en este caso los vértices son recorridos de diferente manera. Esta percepción del mundo real puede definirse en el mundo matemático.

Definición 10. *Un* ***Triángulo Orientado*** *es una terna ordenada* (A, B, C) *de puntos no colineales. Los puntos* A, B, C *son los vértices del triángulo y la orientación está dada por el orden en el cual aparecen los vértices.*

Definición 11. *Una* ***Cadena de Triángulos*** *que une los triángulos orientados* ABC *y* $A'B'C'$ *es una sucesión finita de triángulos orientados, el primero de cuyos triángulos es* ABC*, y el ultimo* $A'B'C'$ *y tal que cada par de triángulos adyacentes difieren solamente en el orden de los vértices o en un vértice, el cual ocupa el mismo lugar en cada uno de los triángulos.*

Teorema 2. *Cualquier par de triángulos orientados se pueden unir por medio de una cadena.*

Demostración. Es suficiente con exhibir una cadena de triángulos, tal cadena es:

$$ABC - ABP - AQP - A'QP - A'B'P - A'B'C',$$

donde P es un punto que no está en AB ni en $A'B'$ y Q es un punto que no está en AP ni en $A'P$.

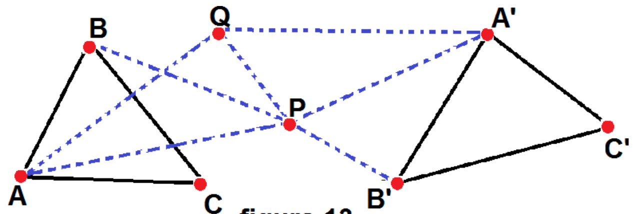


figura 13

La anterior figura ilustra la cadena descrita. □

Definición 12. *a). Dos triángulos orientados con los mismos vértices son* ***coorientados****, si los vértices del uno se pueden obtener mediante una permutación cíclica de los vértices del otro; en caso contrario diremos que los triángulos son* ***antiorientados****.*
b). Dos triángulos orientados que difieren en un vértice que ocupa el mismo lugar en ambos triángulos son ***coorientados*** *si estos vértices están del mismo lado de la recta que une los otros dos y* ***antiorientados*** *si están en lados opuestos.*

Ejemplo 21. Los triángulos ABC, CAB y BCA son orientados por pares, así mismo los triángulos BAC y CBA son coorientados, pero cada uno de ellos está orientado con cada uno de los primeros.
Ejemplo 22. Si ABC y ABD son triángulos orientados y C, D están del mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces los triángulos ABC y ABD son coorientados y si C, D están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces los triángulos ABC y ABD son antiorientados.

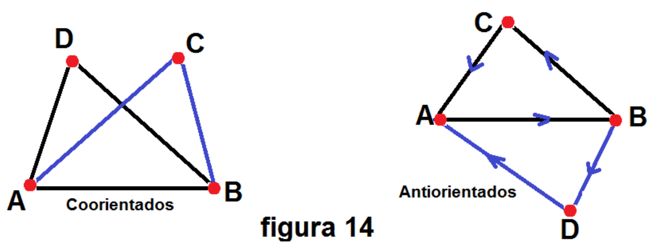


figura 14

Teorema 3. *Sean $(x_i, y_i), (x'_i, y'_i), i = 1, 2, 3...$ las coordenadas de los vértices de los triángulos orientados ABC y $A'B'C'$, y sea S una cadena que los une, entonces en S el numero de parejas* *de triángulos adyacentes antiorientados es par si y sólo si los determinantes.*

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad y \qquad \Delta' = \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix}$$

poseen el mismo signo.

Demostración. Sea S la cadena $S_1 = ABC, S_2, ..., S_n = A'B'C'$ y sean S_i, S_{i+1} una pareja de triángulos adyacentes en S, entonces puede ocurrir que:

a). S_i y S_{i+1} difieren en un vértice, sea $S_i = MNS$ y $S_{i+1} = MNT$ entonces la ecuación de la recta que pasa por M y N es $\begin{vmatrix} x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$, por tanto los triángulos MNS y MNT están coorientados si y sólo si S y T están del mismo lado de $\overleftrightarrow{MN}$ si y solo si ocurre que:

$$\Delta_S * \Delta_T = \begin{vmatrix} x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_S & y_S & 1 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_T & y_T & 1 \end{vmatrix} > 0$$

y esto es cierto si y sólo si $\begin{vmatrix} x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_S & y_S & 1 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_T & y_T & 1 \end{vmatrix}$ poseen el mismo signo.

b). S_i y S_{i+1} difieren en el orden de los vértices, sea $S_i = MNS$ entonces $\Delta_i = \Delta_S = \begin{vmatrix} x_m & y_m & 1 \\ x_n & y_n & 1 \\ x_S & y_S & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ luego: los triángulos S_i y S_{i+1} están coorientados si y sólo si los vértices de S_{i+1} se obtienen permutando ciclícamente los vértices de S_i y esto es cierto si y sólo si Δ_{i+1} se obtiene mediante un número par de permutaciones en las filas de Δ_i y esto es cierto si y sólo si Δ_i y Δ_{i+1} posee el mismo signo.

Luego de a). y b). se obtiene que los triángulos S_i y S_{i+1} son coorientados si y sólo si en los determinantes Δ_i y Δ_{i+1} no hay cambios de signo o equivalentemente, los triángulos S_i y S_{i+1} están antiorientados si y sólo si en los determinantes Δ_i y Δ_{i+1} hay cambio de signo, es decir, cada cambio de signo en la sucesión de los determinantes de los triángulos de la cadena equivale a una pareja de triángulos consecutivos antiorientados, esto significa que: El número de parejas de triángulos consecutivos antiorientados en S es igual al número de cambios de signo en la sucesión de los determinantes de los triángulos de S.

Por tanto: Δ y Δ' posee el mismo signo si y sólo si el número de cambios de signo en la sucesión de los determinantes de los triángulos de la cadena es par, si y sólo si el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados en S es par, o equivalentemente Δ y $\triangle'$ poseen signos diferentes si y sólo si el número de cambios de signo en la sucesión de los determinantes de los triángulos de la cadena es impar, si y sólo si el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados en S es impar. $\square$

Teorema 4. *Si en una cadena que une los triángulos orientados ABC y $A'B'C'$ el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados es par (impar) en cualquier otra cadena que los una, el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados es par (impar).*

Demostración. Sea S una cadena que une $\triangle ABC$ con $\triangle A'B'C'$, y suponga que el numero de parejas de triángulos adyacentes antiorientados en S es par (impar), entonces los determinantes $\Delta = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$ y $\Delta' = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix}$ poseen el mismo (diferente) signo. Sea T otra cadena que una, $\triangle ABC$ con $\triangle A'B'C'$ como Δ y Δ' tienen el mismo signo por el teorema precedente el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados en T es par (impar). $\square$

Observe que el teorema anterior significa que la clase de número (par, impar) de parejas de triángulos consecutivos antiorientados en una cadena que una dos triángulos orientados es independiente de cual sea la cadena y esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 13. *Sean ABC y $A'B'C'$ triángulos orientados, entonces $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen la* misma orientación *si y sólo si el número de parejas de triángulos consecutivos antiorientados en una cadena que los una es par; en caso contrario diremos que los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen* **orientación opuesta**.

De esta definición es claro que triángulos coorientados tienen la misma orientación y triángulos antiorientados tienen orientación opuesta.

1.5. Transformaciones de Primera y Segunda clase.

Teorema 5. *Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación del plano que preserva no colinealidad, rectas y posiciones relativas de puntos respecto de rectas, entonces:*
1). Si existe un triángulo orientado ABC tal que él y su imagen bajo α tienen la misma orientación, entonces, cualquier otro triángulo orientado y su imagen bajo α poseen la misma

orientación.

2). Si un triángulo orientado ABC y su imagen bajo α tienen orientación opuesta, entonces, cualquier otro triángulo orientado y su imagen bajo α tienen orientación opuesta.

Demostración. Sea PQR un triángulo cualquiera, $P'Q'R'$ su imagen bajo α y $\triangle A'B'C'$ la imagen bajo α del triángulo ABC. Sea $S_1, S_2, ..., S_n$ una cadena que une el triángulo PQR con el triángulo ABC entonces la imagen bajo α de esta cadena es una cadena que une $\triangle P'Q'R'$ con $\triangle A'B'C'$.

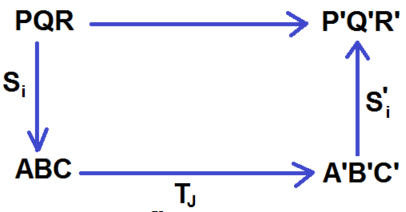


figura 15

1). Como α preserva rectas, no colinealidad y posiciones relativas de puntos respecto de rectas, entonces cada pareja de triángulos adyacentes antiorientados en la cadena $S_1, S_2, ..., S_n$ se transforma en una pareja de triángulos adyacentes antiorientados en la cadena $S'_1, S'_2, ..., S'_n$ y por tanto el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados en la cadena S_i es el mismo que en la cadena S'_i; es decir si en S_i es par (impar), entonces en S'_i también es par (impar).

Sea $T_1, T_2, ..., T_m$ una cadena que une $\triangle ABC$ con $\triangle A'B'C'$ como estos triángulos tienen la misma orientación entonces el número de parejas de triángulos adyacentes antiorientados en T_i es par, entonces

$$S_1 = PQR, S_2, ..., S_n = ABC = T_1, T_2, ..., T_m = A'B'C' = S_n, S_{n-1}, ..., S_1 = P'Q'R',$$

es una cadena que une $\triangle PQR$ con su imagen bajo α, $\triangle P'Q'R'$ y en la cual el número de parejas de triángulos antiorientados es par; luego $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ poseen la misma orientación.

2). Sea ABC un triángulo y $A'B'C'$ su imagen bajo α que poseen orientación opuesta. Sea PQR un triángulo cualquiera, $P'Q'R'$ su imagen bajo α y suponga que tienen la misma orientación entonces por la parte 1, cualquier otro triángulo y su imagen bajo α tienen la misma orientación, en particular $\triangle ABC$ y su imagen bajo α, $\triangle A'B'C'$ poseen la misma orientación (absurdo), luego $\triangle PQR$ y $\triangle P'Q'R'$ poseen orientación opuesta. □

Definición 14. *Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación que preserva rectas, no colinealidad y posiciones relativas de puntos de rectas, entonces:*

*1). α es **Directa** (Primera clase) si y sólo si, existe un triángulo ABC tal que él y su imagen*

bajo α $\triangle A'B'C'$ tienen la misma orientación.
2). α es ***Opuesta*** *(Segunda clase) si y sólo si, existe un triángulo ABC tal que él y su imagen bajo α $\triangle A'B'C'$ tienen orientación opuesta.*

Teorema 6. *Sea T_ρ el conjunto de todas las transformaciones de primera clase del plano π, entonces $(T_\rho, \circ)$ es un grupo.*

Demostración. Sea ABC un triángulo cualquiera, el $\triangle A'B'C'$ su imagen bajo α y $\triangle A''B''C''$ la imagen del $\triangle A'B'C'$ bajo β entonces $\triangle A''B''C''$ es la imagen del $\triangle ABC$ bajo $\beta \circ \alpha$. Consideremos además una cadena $S_i = ABC, S_2, ..., S_n = A'B'C'$ que une $\triangle ABC$ con $\triangle A'B'C'$ y $T1 = A'B'C', T_2, ..., T_m = A''B''C''$ una cadena que une $\triangle A'B'C'$ con $\triangle A''B''C''$, entonces:
1). Como α está en T_ρ entonces α es directa, por tanto $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ tienen la misma orientación así en la cadena S_i hay un número par de de parejas de triángulos consecutivos antiorientados y como β está en T_ρ, es decir, β es directa entonces $\triangle A'B'C'$ y $\triangle A''B''C''$ tienen la misma orientación por lo que en la cadena T_j hay un número par de parejas de triángulos consecutivos antiorientados pero

$$S_1 = ABC, S_2, ..., S_n, T_1, T_2, ..., T_m = \triangle A''B''C'',$$

es una cadena que une $\triangle ABC$ con, su imagen bajo $\beta \circ \alpha$, $\triangle A''B''C''$ en la cual hay un número par de parejas de triángulos consecutivos antiorientados así $\triangle ABC$ y su imagen bajo $\beta \circ \alpha$, $\triangle A''B''C''$ tienen la misma orientación y por tanto $\beta \circ \alpha$ es directa.
2). Sea α en T_ρ entonces existe un triángulo ABC tal que él y su imagen bajo α, $\triangle A'B'C'$ tienen la misma orientación, entonces si $S_1, S_2, ..., S_n$ es una cadena que los une, se sigue que en ella hay un número par de parejas de triángulos adyacentes antiorientados, pero $S_n = A'B'C', S_{n-1}, ..., S_1 = ABC$ es una cadena que une $\triangle A'B'C'$ con $\triangle ABC$ y en el cual hay un número par de parejas de triángulos adyacentes antiorientados por tanto $\triangle A'B'C'$ y su imagen bajo α^{-1}, $\triangle ABC$ tienen la misma orientación y así α^{-1} está en T_ρ.
De las partes 1). y 2). se concluye que $(T_\rho, \circ)$ es un grupo. □

Teorema 7. *Sean α y β transformaciones de un plano π, entonces,*
1).- Si α y β son opuestas entonces $\beta \circ \alpha$ es directa.
2).- Si α es directa y β es opuesta entonces $\beta \circ \alpha$ es opuesta.
3).- Si α es opuesta entonces α^{-1} es opuesta.

La demostración es análoga a la anterior.

Capítulo 2

Transformaciones Ortogonales.

El concepto de transformación ortogonal en Geometría se origina al considerar un desplazamiento, es decir el movimiento de cuerpos rígidos de un lugar a otro. Una propiedad de tal movimiento y la más importante desde el punto de vista Geométrico es la conservación del tamaño y de la forma del cuerpo.
A través del desplazamiento, un cuerpo en movimiento conserva su forma y sus dimensiones, de tal manera que al final del movimiento permanecerá idéntico, tal y como era al principio; de acuerdo con esto, si solo se consideran los momentos inicial y final del movimiento se puede establecer una correspondencia entre los puntos del cuerpo, entre su posición inicial y final de tal modo que al segmento $\overline{MN}$ en la posición inicial le corresponde el segmento $\overline{M'N'}$ en la posición final que tiene igual longitud que el segmento original.
En Geometría, un desplazamiento no se considera como un proceso real de movimiento de un punto a otro, sino simplemente como una correspondencia entre los puntos ocupados por la figura en su posición inicial y en su posición final; este punto de vista permite considerar los desplazamientos como aplicaciones que llevan a intervalos en intervalos iguales (preservan la distancia). Este tipo de transformaciones conservan las dimensiones y las formas de las figuras y sólo modifican su posición. A estas transformaciones se les llama APLICACIONES ORTOGONALES.

2.1. Aplicaciones Ortogonales.

Antes de definir el conjunto de aplicación ortogonal, se propone una convención para la notación que se utilizará a lo largo del texto.

- π, π', π''... denotarán planos.

- $A, B, C, ..., M, N, ...$ puntos de estos planos.
- $l, m, n, r, s, t, ...$ rectas de estos planos.
- $A - B - C$ significa que A, B y C son colineales, con B entre A y C.
- $PQ = d(P, Q)$: distancia entre los puntos P y Q.
- $\overline{PQ}$: segmento determinado por los puntos P y Q.
- $\overrightarrow{PQ}$:vector de origen en P y extremo en Q.
- $\overrightarrow{PQ}$: rayo de origen en P en la dirección de Q.
- $\overleftrightarrow{PQ}$: recta determinada por P y Q.
- Si x es un punto del plano, x' representará su imagen bajo una aplicación α.

Definición 15. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación. α es una* **aplicación ortogonal** *(isometría) si y sólo si para cada par de puntos P y Q en π, se cumple que:*

$$PQ = \alpha(P)\alpha(Q) = P'Q',$$

es decir, una aplicación ortogonal es una aplicación que preserva distancias.

Teorema 8. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación ortogonal, entonces:*
a). Si P, Q y R son puntos colineales en π con Q entre P y R entonces P', Q' y R' son puntos colineales en π' con Q' entre P' y R'.
b). α es inyectiva.
c). α preserva no colinealidad.
d). α es sobreyectiva.

Demostración. a). Sean P, Q y R puntos colineales en π tales que $P - Q - R$ y sean P', Q', R' sus respectivas imágenes bajo α, como α es aplicación ortogonal entonces:

$$PR = P'R', PQ = P'Q' \text{ y } QR = Q'R'.$$

Puesto que $P - Q - R$ entonces $PR = PQ + QR$ luego $P'R' = P'Q' + Q'R'$ y por tanto P', Q', R' son colineales con Q' entre P' y R'.
b). Sean P y Q en π tales que $P \neq Q$ y sean $P' = \alpha(P)$ y $Q' = \alpha(Q)$ en π'. Como $P \neq Q$ entonces $PQ > 0$ y como α es ortogonal $P'Q' = PQ$ en consecuencia $P'Q' > 0$ luego $P' \neq Q'$ y por esta razón α es inyectiva.

c). Sean P, Q y R puntos no colineales en π y P', Q', R' sus respectivas imágenes bajo α. Como P, Q y R son puntos no colineales, entonces $PR < PQ + QR$, pero α es una aplicación ortogonal y en consecuencia $P'R' = PR$, $P'Q' = PQ$, $R'Q' = RQ$ entonces $P'R' < P'Q' + Q'R'$ y por tanto P', Q' y R' son puntos no colineales.
d). Todo punto M' en π' posee por lo menos una imagen inversa en π.
Sean P, Q y R puntos no colineales en π, entonces sus imágenes bajo α, P', Q', R' son no colineales y por tanto M' no está en por lo menos una de las rectas determinadas por los lados del triángulo $P'Q'R'$. Sea este lado $P'R'$, y M'' su reflexión sobre la recta $\overleftrightarrow{P'R'}$ entonces $P'M' = P'M''$, $\measuredangle M'P'R' \cong \measuredangle M''P'R'$, y $P'R' = P'R'$ por tanto $\triangle P'M'R' \equiv \triangle P'M''R'$.
Sean M_1 y M_2 en π tales que los triángulos PM_1R y PM_2R sean congruentes respectivamente con los triángulos $P'M'R'$ y $P'M''R'$ entonces $PM_1 = PM_2 = P'M' = P'M''$ y además

$$M_1R = M_2R = M'R' = M''R'.$$

Sea $N_1 = \alpha(M_1)$ entonces como α es una isometría se tiene que $PM_1 = P'\alpha(M_1) = P'N_1$ y $RM_1 = R'\alpha(M_1) = R'N_1$ entonces $P'N_1 = P'M' = P'M''$ y $R'N_1 = R'M' = R'M''$, por lo tanto N_1 coincide con uno de los puntos M' o M''.

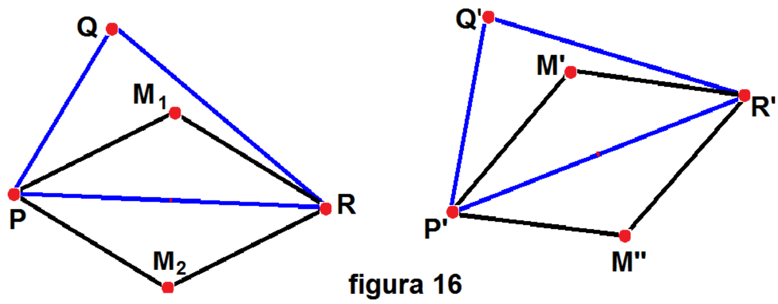


figura 16

Análogamente, si $N_2 = \alpha(M_2)$ se obtiene que N_2 coincide con uno de los puntos M' o M'', pero como α es inyectiva y $M_1 \neq M_2$ estos puntos no pueden tener la misma imagen y por lo tanto uno de ellos tiene como imagen M', es decir, $\alpha(M_1) = M'$ o $\alpha(M_2) = M'$ exclusivamente. $\square$

Teorema 9. *a). Si $\alpha : \pi \to \pi'$ es una isometría, α^{-1} también lo es.*
b). Si $\alpha : \pi \to \pi'$ y $\beta : \pi' \to \pi''$ son isometrías, $\beta \circ \alpha$ también lo es.

Demostración. a). Si $\alpha : \pi \to \pi'$ es una isometría, en particular α es biyectiva y por lo tanto existe $\alpha^{-1} : \pi' \to \pi$ que también es biyectiva.
Sean P', Q' en π' y P, Q sus respectivas imágenes bajo α^{-1}, es decir $\alpha^{-1}(P') = P$ y $\alpha^{-1}(Q') = Q$ entonces $\alpha(P) = P'$ y $\alpha(Q) = Q'$ y como α es ortogonal se cumple que $PQ = \alpha(P)\alpha(Q)$ o sea $\alpha^{-1}(P')\alpha^{-1}(Q') = P'Q'$ y en consecuencia α^{-1} es una isometría.

b). Sean P, Q en π, P', Q' sus imágenes bajo α y P'', Q'' las imágenes de P' y Q' bajo β, entonces como α y β son isometrías se tiene que $PQ = P'Q'$ y $P'Q' = P''Q''$, por tanto

$$(\beta \circ \alpha)(P)(\beta \circ \alpha)(Q) = \beta(\alpha(P))\beta(\alpha(Q)) = \beta(P')\beta(Q') = P''Q'' = P'Q' = PQ,$$

y así $\beta \circ \alpha : \pi \to \pi'$ es una isometría. □

Definición 16. *Una aplicación ortogonal $\alpha : \pi \to \pi$ se llama **Transformación Ortogonal** de π. Con $O(\pi)$ se denota al conjunto de todas las transformaciones ortogonales del plano π.*

Teorema 10. $(O(\pi), \circ)$ *es un grupo. Se denomina* **Grupo Ortogonal del Plano.**

El teorema es una consecuencia directa del teorema 9 en el cual se toma $\pi = \pi' = \pi''$.

Teorema 11. *Si $\alpha : \pi \to \pi'$ es una aplicación ortogonal entonces la imagen bajo α de una recta l en π es una recta l' en π'.*

Demostración. Sea $l = \overline{AB}$ una recta en π, $A \neq B$ y A', B' las imágenes de A y B bajo α, entonces $A' \neq B'$ ya que α es inyectiva y en consecuencia A' y B' determinan una recta l' en π', entonces:
a). C un punto en l entonces A, B y C son colineales y dado que α preserva colinealidad A', B' y $\alpha(C)$ son colineales, es decir, $\alpha(C)$ está en $A'B' = l'$, luego se tiene que $\alpha(l) \subseteq l'$.
b). Sea C' un punto en l' entonces A', B' y C' son colineales y dado que α^{-1} es ortogonal se tiene que A, B y $\alpha^{-1}(C')$ son colineales, es decir, $\alpha^{-1}(C')$ está en $AB = l$, o sea $\alpha^{-1}(l') \subseteq l$ o en forma equivalente que $l' \subseteq \alpha(l)$.
Uniendo las partes a). y b). se concluye que $\alpha(l) = l'$. □

Observe además, que cualquier punto de l es transformado por α en un único punto de l' y recíprocamente cada punto de l' tiene una única imagen inversa en l, es decir, α induce una aplicación biyectiva entre l y l'.

Teorema 12. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una isometría, entonces:*
a). Si l es paralela a m en π, entonces $\alpha(l)$ es paralela a $\alpha(m)$ en π'.
b). Si P y Q están en lados opuestos de l, entonces $\alpha(P)$ y $\alpha(Q)$ están en lados opuestos de $\alpha(l)$.
c). α preserva ángulos.

Demostración. a). Supongamos que $\alpha(l)$ no es paralela a $\alpha(m)$, en consecuencia se interceptan en un punto M', como l es paralela a m en π, se sigue que M' posee dos imágenes inversas diferentes M_1 en l y M_2 en m y esto significa que α no es inyectiva (absurdo). De aquí se deduce que $\alpha(l)$ es paralela a $\alpha(m)$ en π'.

b). Si P y Q están en lados opuestos de l, entonces $\overleftrightarrow{PQ}$ intercepta a l en un punto R, luego $P-R-Q$ y como α preserva colinealidad e interestancia se sigue que $\alpha(P)-\alpha(R)-\alpha(Q)$ donde $\alpha(R)$ es la intercepción entre $\alpha(l)$ y $\alpha(\overleftrightarrow{PQ})$ y como P y Q no están en l, se tiene que $\alpha(P)$ y $\alpha(Q)$ no están en $\alpha(l)$ y por tanto $\alpha(P)$ y $\alpha(Q)$ están en lados opuestos de $\alpha(l)$.

c). Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos rayos que se intersecan en un punto O y A, B dos puntos sobre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ respectivamente, entonces $\alpha(\overrightarrow{a})$ y $\alpha(\overrightarrow{b})$ se interceptan en $\alpha(O)$, $\alpha(A)$ está en $\alpha(\overrightarrow{a})$ y $\alpha(B)$ está en $\alpha(\overrightarrow{b})$. Como α es una isometría se tiene que $OA = \alpha(O)\alpha(A)$, $OB = \alpha(O)\alpha(B)$ y $AB = \alpha(A)\alpha(B)$ entonces por el criterio $L-L-L$ se tiene que $\triangle OAB \equiv \triangle\alpha(O)\alpha(A)\alpha(B)$ y por lo tanto se concluye que $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle\alpha(A)\alpha(O)\alpha(B)$. $\square$

Teorema 13. ***Teorema de los tres puntos.*** *Sean A, B y C tres puntos no colineales en π y sean A', B' y C' tres puntos en π' tales que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $AC = A'C'$ entonces existe una única aplicación ortogonal $\alpha : \pi \to \pi'$ tal que las imágenes de A, B y C son A', B' y C' respectivamente.*

Demostración. ***1. Existencia.***

i. Construcción. Definimos $\alpha : \pi \to \pi'$ tal que $\alpha(A) = A', \alpha(B) = B'$ y $\alpha(C) = C'$ y sea P un punto diferente de A, B y C entonces:

a). Si P está en $\overleftrightarrow{AC}$ del lado de A en que está C, definimos $\alpha(P)$ como el único punto P' en $\overleftrightarrow{A'C'}$ del lado de A' en que está C' y tal que $AP = A'P'$.

Si P está en $\overleftrightarrow{AC}$ del lado de A en que no está C, definimos $\alpha(P)$ como el único punto P' en $\overleftrightarrow{A'C'}$ del lado de A' en que no está C' y tal que $AP = A'P'$.

b). Si P está en $\overleftrightarrow{AB}$ entonces y análogamente al caso a). se hace corresponder a P, un único punto $P' = \alpha(P)$ tal que $AP = A'P'$.

c). Si P no está en $\overleftrightarrow{AB}$ ni en $\overleftrightarrow{AC}$ entonces por P trazamos paralelas l y m a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ respectivamente. Sea S el punto de corte de l con $\overleftrightarrow{AB}$ y T el punto de corte de m con $\overleftrightarrow{AC}$. Por $S' = \alpha(S)$ se traza una paralela l' a $\overleftrightarrow{A'C'}$ y por $T' = \alpha(T)$ se traza una paralela m' a $\overleftrightarrow{A'B'}$, como $\overleftrightarrow{A'B'}$ no es paralela a $\overleftrightarrow{A'C'}$ entonces, l' no paralela con m'; sea P' su punto de corte, entonces se define $\alpha(P) = P'$.

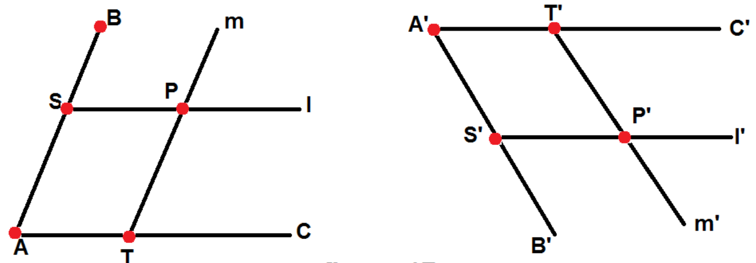


figura 17

De las partes a)., b). y c). queda definida $\alpha(X)$ para todo X en π.

ii. α ***es ortogonal***. Sean P y Q puntos cualesquiera del plano π entonces puede ocurrir que:

1). P y Q están en $\overleftrightarrow{AB}$ o en $\overleftrightarrow{AC}$ entonces se tiene que $A - P - Q$ o $P - A - Q$:

Si $A - P - Q$ entonces $AQ = AP + PQ$ y P', Q' están en $\overleftrightarrow{A'B'}$ o en $\overleftrightarrow{A'C'}$, son colineales con A y $AP = A'P'$, $AQ = A'Q'$ luego $PQ = PA + AQ = P'A' + A'Q' = P'Q'$ o sea $PQ = \alpha(P)\alpha(Q)$. análogamente se trata el caso $P - A - Q$.

2). Si P está $\overleftrightarrow{AB}$ y Q en $\overleftrightarrow{AC}$ entonces P' está en $\overleftrightarrow{A'B'}$ y Q' está en $\overleftrightarrow{A'C'}$ y son tales que $AP = A'P'$ y $AQ = A'Q'$. Como por hipótesis $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ entonces $\measuredangle BAC \cong \measuredangle B'A'C'$ o sea $\measuredangle PAQ \cong \measuredangle P'A'Q'$ y entonces por el criterio de congruencia $L - A - L$ se tiene que $\triangle PAQ \equiv \triangle P'A'Q'$ y así $PQ = P'Q' = \alpha(P)\alpha(Q)$.

3). Si P y Q están sobre una paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ o a, $\overleftrightarrow{AC}$, digamos $\overleftrightarrow{PQ}$ paralela con $\overleftrightarrow{AC}$. Sean l y m las paralelas con $\overleftrightarrow{AB}$ que pasan por P y Q respectivamente y R y S los puntos de corte de l y m con $\overleftrightarrow{AC}$ respectivamente, entonces se tiene que $PQ = RS$. (1).

Si se construyen R' y S' de acuerdo con a) obtenemos $RS = R'S'$. (2).

Si se construyen P' y Q' de acuerdo con c) se obtiene $P'Q' = R'S'$ y que P' y Q' están sobre una paralela a $\overleftrightarrow{A'C'}$ (3).

Combinando (1)., (2). y (3). se obtiene que $PQ = P'Q' = \alpha(P)\alpha(Q)$.

4). Sean P y Q puntos cualesquiera en π.

Sea l la paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ que pasa por P y m la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por Q.

Como $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela con $\overleftrightarrow{AC}$ entonces l no es paralela con m, llamemos R su punto de corte. Sea S el punto de corte de $\overleftrightarrow{AC}$ y la paralela a $\overleftrightarrow{AB}$ que pasa por P y T el punto de corte entre m y $\overleftrightarrow{AC}$ y se construyen las imágenes de P y Q, R, S y T de acuerdo con las partes a) y c).

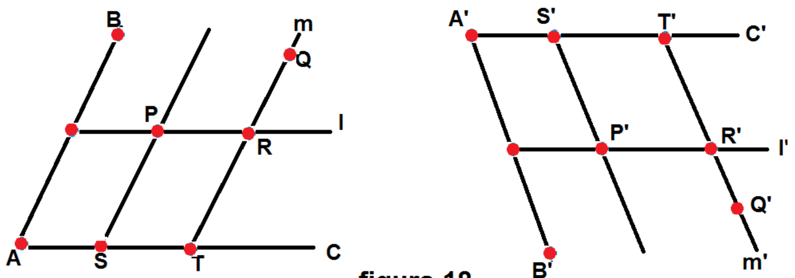


figura 18

Como los lados del $\sphericalangle BAC$ son paralelos a los lados del $\sphericalangle QRP$ se tiene que estos ángulos son congruentes o suplementarios y por la misma razón $\sphericalangle B'A'C'$ y $\sphericalangle Q'R'P'$ son congruentes o suplementarios. Cuando $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle QRP$ entonces $\sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle Q'R'P'$ y cuando $\sphericalangle BAC$ y $\sphericalangle QRP$ son suplementarios, los ángulos $\sphericalangle B'A'C'$ y $\sphericalangle Q'R'P'$ también lo son.

Como $\triangle BAC \equiv \triangle B'A'C'$ entonces $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle QRP \cong \sphericalangle B'A'C' \cong \sphericalangle Q'R'P'$ y por 3).
$PR = P'R'$ y $QR = Q'R'$, se sigue por $L - A - L$ que $\triangle QRP \equiv \triangle Q'R'P'$ y por tanto se tiene:
$PQ = P'Q' = \alpha(P)\alpha(Q)$.
En resumen de 1)., 2)., 3)., y 4). se tiene que α es una aplicación ortogonal.
2. Unicidad. Sea $\beta : \pi \to \pi'$ otra isometría tal que $\beta(A) = A'$, $\beta(B) = B'$ y $\beta(C) = C'$ y P sea un punto en π entonces puede ocurrir que:
2.1). P está en AC entonces $AP = A'\beta(P)$ y $CP = C'\beta(P)$ ya que β es isometría y como $AP = A'\beta(P)$ y $CP = C'\beta(P)$ se sigue que $A'\beta(P) = A'\alpha(P)$ y $C'\beta(P) = C'\alpha(P)$. En consecuencia $\alpha(P) = \beta(P)$ y así $\alpha = \beta$ para todo punto P de la recta $\overleftrightarrow{AC}$.
2.2). Análogamente se demuestra que $\alpha = \beta$ para todo punto P de la recta $\overleftrightarrow{AB}$.
2.3). P no está en $\overleftrightarrow{AC}$ ni en $\overleftrightarrow{AB}$.
Sean l y m las paralelas a $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ trazadas por P, S el punto de corte de m y $\overleftrightarrow{AC}$ y T el punto de corte de l y $\overleftrightarrow{AB}$ y sean además S' y T' las imágenes de S y T bajo β.
Como β es isometría se encuentra que $\beta(l) = l'$ es paralela con $\overleftrightarrow{A'C'}$ y pasa por $\beta(T) = \alpha(T)$ debido a 2). y $\beta(m) = m'$ es paralela con $\overleftrightarrow{A'B'}$ y pasa por $\beta(S) = \alpha(S)$ debido a 1)., pero el punto de corte de l' y m' es $\beta(P)$ que por construcción también es $\alpha(P)$, luego $\alpha(P) = \beta(P)$ para todo punto P de π y siendo así $\alpha = \beta$. $\square$

Observe que el teorema de los tres puntos significa que toda aplicación ortogonal queda determinada por el efecto sobre tres puntos no colineales, es decir, para probar que dos aplicaciones ortogonales son iguales es suficiente demostrar que producen las mismas imágenes para tres puntos no colineales.
Nótese además que a través de algunos de los teoremas anteriores se ha probado que las transformaciones ortogonales preservan rectas, no colinealidad y posiciones relativas de puntos respecto de rectas, por tanto se ha adquirido el derecho a hablar de *transformaciones ortogonales* de primera y segunda clase según se preserven o inviertan la orientación de un triángulo.
Con la ayuda del concepto de orientación, se mejorará el resultado del teorema anterior demostrando que toda transformación ortogonal queda determinada por su orientación y las imágenes de dos puntos diferentes. Este resultado se usará con frecuencia a lo largo de este capítulo.

Teorema 14. Teorema de los dos puntos y la orientación. *Sean A, B dos puntos diferentes de π y sean A', B' puntos del mismo plano tales que $AB = A'B'$, entonces existe una única Transformación Ortogonal Directa y una única Transformación Ortogonal Opuesta tales que las imágenes de A, B son A', B' respectivamente.*

Demostración. Sea C un punto de π que no está en $\overleftrightarrow{AB}$ y sean C' y C'' en lados opuestos de

$A'B'$ tales que $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ y $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$ entonces por el teorema de los tres puntos existe una única transformación ortogonal α tal que $\alpha(A) = A', \alpha(B) = B'$ y $\alpha(C) = C'$ y existe una única transformación ortogonal β tal que $\beta(A) = A', \beta(B) = B'$ y $\beta(C) = C''$.
Como C' y C'' están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{A'B'}$ entonces los triángulos $A'B'C'$ y $A'B'C''$ tienen orientación opuesta, que de esto se sigue que una de las dos α o β es directa y la otra es opuesta. No hay más transformaciones porque cada transformación ortogonal que envíe A en A' y B en B', necesariamente envía C en C' o en C''. □

2.2. Transformaciones Ortogonales Fundamentales.

Aunque se ha garantizado la existencia de las transformaciones Ortogonales Directas y Opuestas, hasta en momento no se ha mostrado ningún ejemplo concreto de ellas, es más, se han tratado transformaciones ortogonales en abstracto sin proponer una ilustración de las mismas. En esta sección se consideran los tipos fundamentales de transformaciones ortogonales en términos de los cuales es posible expresar cada una de tales transformaciones y se clasifican las transformaciones ortogonales fundamentales según la clase a la que pertenecen.

2.2.1. Traslación.

Definición 17. *Sea $\overrightarrow{a}$ un vector dado del plano π, la aplicación $T_{\overrightarrow{a}} : \pi \to \pi$ tal que $T_{\overrightarrow{a}}(P) = P'$ si y sólo si $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{a}$, se llama **Traslación** del plano asociada al vector $\overrightarrow{a}$.*

Teorema 15. *Una traslación $T_{\overrightarrow{a}}$ del plano es una transformación ortogonal directa.*

Demostración. 1). $T_{\overrightarrow{a}}$ es *ortogonal.* Sea $T_{\overrightarrow{a}} : \pi \to \pi$ una traslación del plano en el vector $\overrightarrow{a}$ y sean A y B dos puntos en π entonces $T_{\overrightarrow{a}}(A) = A'$ y $T_{\overrightarrow{a}}(B) = B'$ si y sólo si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{a}$, luego $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{A'B'}$ entonces $AB = A'B'$ y en consecuencia $T_{\overrightarrow{a}}$ es ortogonal.
2). $T_{\overrightarrow{a}}$ es *Directa.* Sea A un punto de π, A' su imagen bajo $T_{\overrightarrow{a}}$, A'' la imagen de A' bajo $T_{\overrightarrow{a}}$, C un punto fuera de $\overleftrightarrow{AA'}$ y C' su imagen bajo $T_{\overrightarrow{a}}$ entonces, $T_{\overrightarrow{a}}(A) = A', T_{\overrightarrow{a}}(A') = A''$ y $T_{\overrightarrow{a}}(C) = C'$ si y sólo si $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{A'A''} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{a}$.

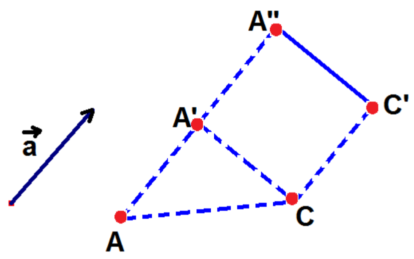


figura 19

Como $ACC'A'$ es un paralelogramo se sigue que A y C' están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{A'C}$ y por tanto $\triangle AA'C$ y $\triangle C'A'C$ son antiorientados, análogamente $C'A'C$ y $C'A'A''$ son antiorientados y como $C'A'A''$ y $A'A''C'$ son coorientados, se tiene que en la cadena

$$AA'C - C'A'C - C'A'A'' - A'A''C',$$

hay dos parejas de triángulos adyacentes antiorientados, y por tanto $\triangle AA'C$ y su imagen bajo $T_{\vec{a}}$ $\triangle A'A''C''$ tienen la misma orientación y en consecuencia $T_{\vec{a}}$ es directa. $\square$

Observe, además, que toda transformación del plano que transforma vectores en vectores iguales es una traslación.

2.2.2. Reflexión en una Recta.

Definición 18. *Sea l una recta dada del plano, la aplicación $\varphi_l : \pi \to \pi$ tal que:*
1). $\varphi_l(P) = P$ si y sólo si P está en l.
2). $\varphi_l(P) = P'$ si y sólo si l es la mediatriz de $\overline{PP'}$ y P no está en l se llama **Reflexión** *en la recta l. La recta l es el* **eje** *de la reflexión.*

Teorema 16. *Una reflexión φ_l en una recta l es una transformación ortogonal opuesta.*

Demostración. *1). φ_l* ***es ortogonal.*** Sean A y B puntos del plano π y A', B' sus respectivas imágenes bajo φ_l entonces puede ocurrir que:
a). Si A y B están en l, entonces por definición $\varphi_l(A) = A$ y $\varphi_l(B) = B$ luego se tiene $AB = \varphi_l(A)\varphi_l(B)$.
b). A está en l y B está fuera de l, entonces $\varphi_l(A) = A$ y $\varphi_l(B) = B'$ si y sólo si l es la mediatriz de $\overline{BB'}$. Si se llama P el punto de corte de l y $\overline{BB'}$ entonces $BP = B'P$, $\sphericalangle APB \cong \sphericalangle APB'$ (rectos) y $AP = AP$ por tanto por el criterio de congruencia $L-A-L$ se tiene $\triangle APB \equiv \triangle APB'$ y así $AB = AB' = \varphi_l(A)\varphi_l(B)$.
c). A y B del mismo lado de l. Se traza por B y B' paralelas a l y sean C y C' los puntos de intersección de ellas con $\overleftrightarrow{AA'}$ entonces la figura $BB'C'C$ es un rectángulo y siendo así

$$CB = C'B',\ CC' = BB' \text{ y } \sphericalangle ACB \cong \sphericalangle A'C'B' \text{ (rectos)}.$$

Como l es la mediatriz de $\overline{AA'}$ entonces $AP = A'P$ donde P es el punto medio de $\overline{AA'}$.

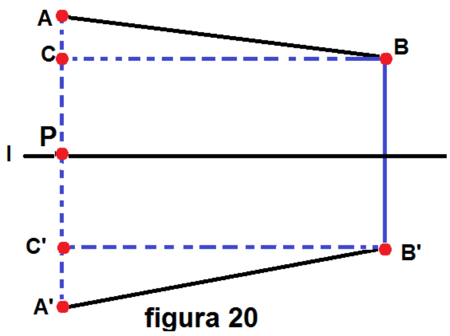


figura 20

Pero $AP = AC + CP$ y $A'P = A'C' + C'P$ y como $CP = C'P$ se sigue que $AC = A'C'$, luego por criterio de congruencia $L - A - L$ se tiene que $\triangle ACB \equiv \triangle A'C'B'$ y así,

$$AB = A'B' = \varphi_l(A)\varphi_l(B).$$

d). A y B están en lados opuestos de l. Se procede como en el caso anterior y se traza por B y B' paralelas a l y se llaman C y C' a los puntos de corte de estas paralelas con $\overleftrightarrow{AB'}$

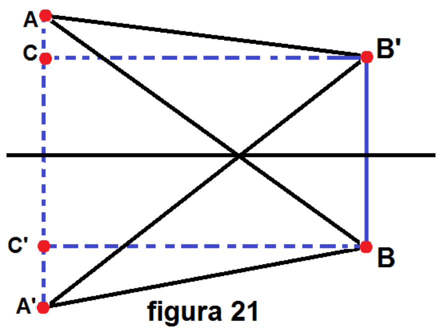


figura 21

entonces se obtiene que $\triangle ACB' \equiv \triangle A'C'B$ por tanto $AB' = A'B$ y $\sphericalangle AB'C \cong \sphericalangle A'BC'$, pero como $\sphericalangle C'BB' \cong \sphericalangle CB'B$ ya que ambos son rectos, entonces se tiene que $AB' = A'B$, $\sphericalangle AB'B \cong \sphericalangle A'BB'$ y $BB' = BB'$ luego por el criterio de congruencia $L - A - L$ se tiene que $\triangle AB'B \equiv \triangle A'BB'$ y por tanto $AB = A'B' = \varphi_l(A)\varphi_l(B)$.

2) φ_l es opuesta. Sean A y B puntos de l y C un punto fuera de ella, entonces $\varphi_l(A) = A$, $\varphi_l(B) = B$, $\varphi_l(C) = C'$ donde l es la mediatriz de $\overline{CC'}$; entonces la imagen bajo φ_l del triángulo ABC es el triángulo ABC' y como C y C' están en lados opuestos de $\overline{AB}$ entonces los triángulos ABC y ABC' son antiorientados y en consecuencia φ_l es de segunda clase. $\square$

Una transformación ortogonal que deje dos puntos fijos y que no sea la transformación identidad es la reflexión en la recta determinada por tales puntos.

2.2.3. Reflexión en un Punto.

Definición 19. *Sea O un punto del plano π, la aplicación $\varphi_O : \pi \to \pi$ tal que $\varphi_O(O) = O$ y $\varphi_O(A) = A'$ si y sólo si O es el punto medio de $\overline{AA'}$, se llama* **reflexión** *en el punto O.*

Teorema 17. *Una reflexión φ_O en el punto O es una transformación ortogonal directa.*

Demostración. ***1). φ_O es ortogonal.*** Sean A y B puntos diferentes de O y A', B' sus imágenes bajo φ_O, entonces:
a). Si A, B y O son no colineales, se tiene por definición de φ_O que $OA = OA'$ con $A - O - A'$ y $OB = OB'$ con $B - O - B'$ entonces $\sphericalangle BOA \cong \sphericalangle B'OA'$ y por el criterio $L - A - L$ se tiene que $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB'$, luego $AB = A'B' = \varphi_O(A)\varphi_O(B)$.
b). Si A, B y O son colineales, puede ocurrir que:
i) $A - O - B$ entonces $AB = AO + OB$ pero como $OA = OA'$ con $A - O - A'$ y $OB = OB'$ con $B - O - B'$ entonces $AB = AO + OB = A'O + OB' = A'B' = \varphi_O(A)\varphi_O(B)$.
ii) $O - A - B$ entonces $OB = OA + AB$ pero como $OA = OA'$ con $A - O - A'$ y $OB = OB'$ con $B - O - B'$ entonces $AB = |OB - OA| = |OB' - OA'| = A'B' = \varphi_O(A)\varphi_O(B)$.
2). φ_O es directa. Sea A un punto de π, B un punto en π que no está en $\overleftrightarrow{AO}$ y sean A' y B' las imágenes de A y B bajo φ_O entonces $\triangle A'OB'$ es la imagen bajo φ_O de $\triangle AOB$.
Como en la cadena $AOB - A'OB - A'OB'$ hay dos pares de triángulos adyacentes antiorientados se sigue que $\triangle AOB$ y su imagen bajo φ_O $\triangle A'OB'$ tienen la misma orientación y por tanto φ_O es directa. $\square$

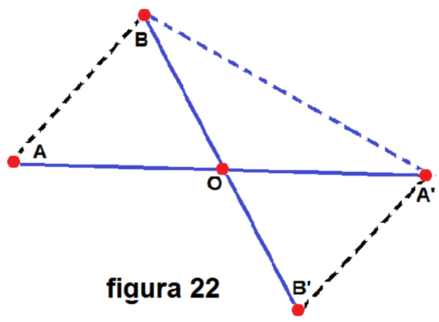


figura 22

Observe que bajo una reflexión en un punto, cada segmento se transforma en un segmento de la misma longitud pero de orientación opuesta, es decir $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$ para cada par de puntos A y B y que recíprocamente, cada transformación del plano que invierte cada vector, es una reflexión en un punto.

2.2.4. Rotación.

Aunque la idea intuitiva de rotación existe en cada persona es necesario presentar una definición rigurosa de ella para lo cual se requieren algunos conceptos tales como el de ángulo orientado y el de ángulos equivalentes, entre otros.

Definición 20. *Un ángulo MON es la unión de los rayos $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ con un origen común O.*

Nótese que si S es una circunferencia, dos puntos M y N de ella, determinan dos arcos sobre S de M a N, esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 21. *Sean M y N dos puntos sobre una circunferencia S de centro O y ABC un triángulo orientado. Si para un punto P en uno de los arcos de M hacia N se tiene que los triángulos MPN y ABC tienen la misma orientación, se dice que el arco MN está* **orientado positivamente** *y en caso contrario se dirá que el arco MN está* **orientado negativamente**.

Es claro que no existe ambigüedad en la definición anterior ya que:
1). Si P y P_1 son puntos del mismo arco de M a N los triángulos MNP y MP_1N tienen la misma orientación.
2). Si P y P_2 son dos puntos sobre arcos diferentes de M a N entonces los triángulos MNP y MP_2N tienen orientación opuesta.
De lo anterior se sigue que:
a). Si uno de los arcos de M a N está orientado positivamente, el otro está orientado negativamente.
b). Si el arco MN está orientado positivamente, el arco NM está orientado negativamente y recíprocamente. Esto se justifica en el hecho de que los triángulos MNP y NPM son anti-orientados.
c). El concepto del arco orientado positivamente (Negativamente) depende del triángulo ABC escogido, para que esta definición coincida con la usual, basta elegir adecuadamente el triángulo orientado ABC, pero una vez escogido, este queda fijo.

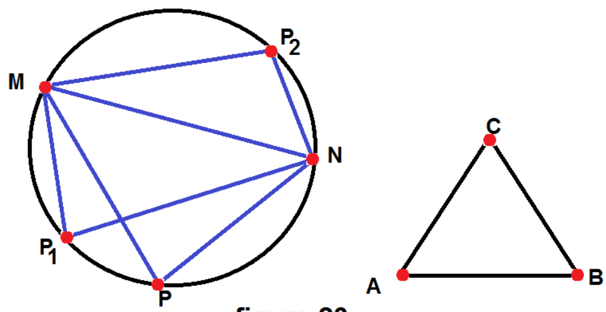


figura 23

Matemáticamente no existe ninguna diferencia si se elige una orientación o la opuesta, lo importante en un problema es elegir de manera coherente las orientaciones.

Definición 22. *Sea AOB un ángulo, S una circunferencia de centro O y M, N los puntos de intersección de S con el ángulo AOB, se dice que el ángulo MON está* **orientado positivamente** *si el arco MN lo está. En caso contrario se dice que el ángulo MON está* **orientado negativamente**.

Para indicar que el ángulo MON está orientado se escribe $M\widehat{O}N$ y para él se dirá que $\overrightarrow{OM}$ es el ***lado inicial*** y $\overrightarrow{ON}$ es el ***lado final***.
Observe que de la definición dada se deduce que si el ángulo MON está orientado positivamente entonces el ángulo NOM está orientado negativamente y recíprocamente.

Definición 23. *1). Si la circunferencia S tiene radio 1 se dice que la medida del ángulo orientado positivamente $M\widehat{O}N$ es la longitud del arco MN orientado positivamente y se escribirá $m(M\widehat{O}N) = \theta$, θ en $\mathbb{R}$ para indicar que el ángulo $M\widehat{O}N$ tiene medida θ en radianes.*
2). Si el ángulo $M\widehat{O}N$ está orientado negativamente entonces su medida es la longitud del arco MN multiplicada por -1, es decir: $m(M\widehat{O}N) = -Long(\widehat{MN}) = -m(N\widehat{O}M)$ cualquiera que sea el caso, se consideran únicamente ángulos con medidas entre 0 y 2π.

Definición 24. *Dos ángulos orientados $M\widehat{O}N$ y $M'\widehat{O'}N'$ son* equivalentes *si existe una transformación ortogonal de primera clase que lleve $\overrightarrow{OM}$ en $\overrightarrow{O'M'}$ y $\overrightarrow{ON}$ en $\overrightarrow{O'N'}$.*

De esta definición es claro que si dos ángulos orientados son equivalentes, son en particular congruentes y por tanto, tienen la misma medida.

Definición 25. *Dados dos ángulos orientados $M\widehat{O}N$ y $M'\widehat{O'}N'$ se define su SUMA, denotada por $M\widehat{O}N + M'\widehat{O'}N$ como el ángulo orientado $M\widehat{O}P$ donde $N\widehat{O}P$ es un ángulo equivalente con $M'\widehat{O'}N'$ cuyo lado inicial $\overrightarrow{ON}$ es el lado final de $M\widehat{O}N$, es decir:*

$$M\widehat{O}N + M'\widehat{O'}N' = M\widehat{O}P \text{ si y sólo si } N\widehat{O}P \cong M'\widehat{O'}N'.$$

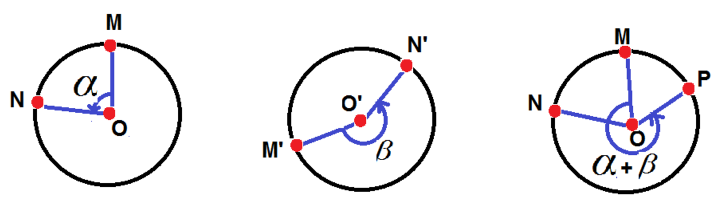


figura 24

Nótese que como la medida de cada ángulo es un número entre 0 y 2π entonces la suma de dos ángulos no tiene como medida, necesariamente la suma de sus medidas.

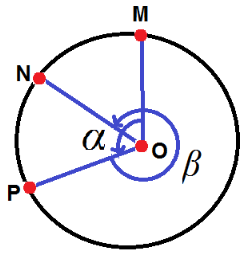


figura 25

Intuitivamente no existe ninguna diferencia ya que una rotación por $2\pi + \alpha$ produce el mismo efecto que una rotación por α. Así se puede pensar que el ángulo orientado $M\widehat{O}N$ tiene medida α cuando un punto móvil en el sentido contrario de las manecillas del reloj va desde M hasta N recorriendo una longitud de arco α.
Esto lleva a la situación de aceptar infinidad de medidas para un mismo ángulo $M\widehat{O}N$, entre estas, $\alpha, \alpha+2\pi, \alpha+4\pi, ..., \alpha-2\pi, \alpha-4\pi, ...$ para evitar esto, en lugar de realizar toda la aritmética en los números reales se realizará en los números reales "módulo 2π", es decir se realiza la suma en el grupo aditivo de los números reales módulo 2π, en este sistema se cumple la relación:

$$m\left(M\widehat{O}N + M'\widehat{O'}N'\right) = m\left(M\widehat{O}N\right) + m\left(M'\widehat{O'}N'\right)(mod 2\pi).$$

2). Dados dos ángulos orientados $M\widehat{O}N$ y $M'\widehat{O'}N'$ se define su resta como:

$$M\widehat{O}N - M'\widehat{O'}N' = M\widehat{O}N + N'\widehat{O'}M' \text{ ya que } -M'\widehat{O'}N' = N'\widehat{O'}M'.$$

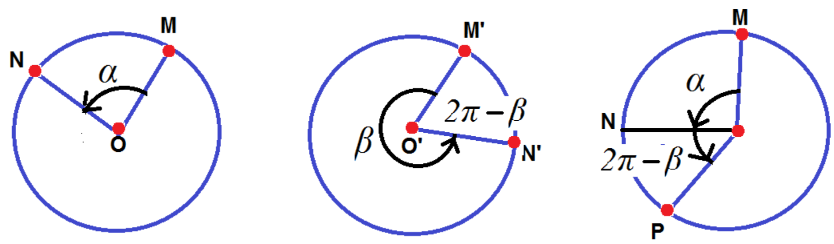


figura 26

$M\widehat{O}N - M'\widehat{O'}N' = M\widehat{O}N + N'\widehat{O'}M' = M\widehat{O}P$ si y sólo si $N\widehat{O}P = N'\widehat{O'}M'$ y además se tiene que:

$$\begin{aligned} m\left(M\widehat{O}N + M'\widehat{O'}N'\right) &= m\left(M\widehat{O}N + N'\widehat{O'}M'\right) \\ &= m(M\widehat{O}N) + m(N'\widehat{O'}M') \\ &= \alpha + (2\pi - \beta) \\ &= 2\pi + (\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Con estas definiciones preliminares definimos formalmente la transformación rotación.

Definición 26. *Sea O un punto fijo del plano y $A\widehat{O}B$ un ángulo orientado de medida θ. La aplicación $\rho_\theta : \pi \to \pi$ tal que $\rho_\theta(O) = O$ y $\rho_\theta(M) = M'$ siempre y cuando $OM = OM'$ y $m(M\widehat{O}M') = \theta$ se llama* **Rotación** *del plano alrededor de O según el ángulo $A\widehat{O}B$.*
El punto O es el **centro** *de rotación y el ángulo $A\widehat{O}B$ es el* **ángulo** *de rotación.*

Teorema 18. *Una rotación ρ_θ del plano con centro en un punto O y en un ángulo orientado de medida θ es una transformación ortogonal directa.*

Demostración. **1).ρ_θ *es ortogonal*.** Sea $\rho_\theta : \pi \to \pi$ la rotación de centro en O en el ángulo $M\widehat{O}N$ de medida θ y A, B puntos del plano diferentes de O, entonces $\rho_\theta(A) = A'$ y $\rho_\theta(B) = B'$ si y sólo si $OA = OA'$, $OB = OB'$ y $m\left(A\widehat{O}A'\right) = m\left(B\widehat{O}B'\right) = \theta$, entonces puede ocurrir que:
1.1). A, B y O son no colineales. Llamemos $\alpha = m\left(A\widehat{O}B\right)$
entonces, puesto que $A'\widehat{O}B' = A'\widehat{O}A + A\widehat{O}B + B\widehat{O}B'$ por la definición de suma de ángulos, entonces: $m\left(A'\widehat{O}B'\right) = m\left(A'\widehat{O}A\right) + m\left(A\widehat{O}B\right) + m\left(B\widehat{O}B'\right)(mod 2\pi) = -\theta + \alpha + \theta = \alpha$ y por tanto se tiene que $OA = OA'$, $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'OB'$ y $OB = OB'$. Aplicando el criterio $L - A - L$ se tiene que $\triangle AOB \equiv \triangle A'OB'$ y por tanto $AB = A'B' = \rho_\theta(A)\rho_\theta(B)$.

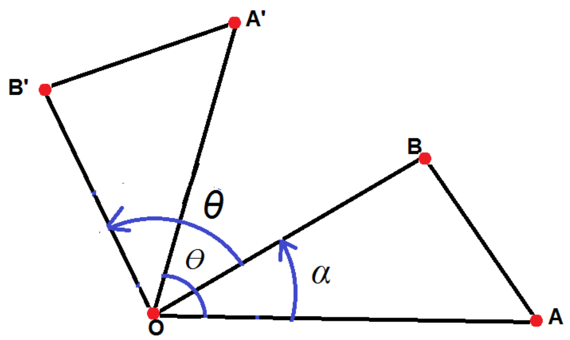


figura 27

1.2). A, B y O son colineales. En este caso puede suceder que:
1.2.1). A y B están del mismo lado de O; como por definición de ρ_θ se tiene que $A\widehat{O}A' \cong B\widehat{O}B', OA = OA'$ y $OB = OB'$ se sigue que A', B' y O son colineales con A' y B' del mismo lado de O y en consecuencia se tiene que:

$$AB = |OB - OA| = |OB' - OA'| = A'B' = \rho_\theta(A)\rho_\theta(B).$$

1.2.2). A y B están en lados opuestos de O, entonces, por definición de ρ_θ se tiene que $A\widehat{O}A' \cong B\widehat{O}B', OB = OB'$ y $OA = OA'$, luego A', B' son colineales con O y están en lados opuestos de él, por tanto:

$$AB = AO + OB = A'O + OB' = A'B' = \rho_\theta(A)\rho_\theta(B).$$

2). ρ_θ **es directa.** Sea $A \neq O$ un punto en π y A', A'' en π tales que $\rho_\theta(A) = A'$ y $\rho_\theta(A') = A''$ entonces la imagen bajo ρ_θ del triángulo OAA' es el triángulo $OA'A''$.
Como en la cadena $OAA' - OA''A' - OA'A''$ hay dos pares de triángulos antiorientados entonces el triángulo OAA' y su imagen bajo ρ_θ el triángulo $OA'A''$ tienen la misma orientación y por tanto ρ_θ es directa. $\square$

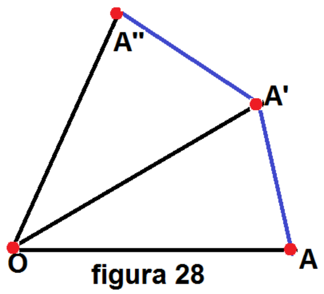


figura 28

2.2.5. Representación de una Transformación Ortogonal como producto de Transformaciones Ortogonales Fundamentales.

Hasta el momento se han estudiado cuatro transformaciones ortogonales fundamentales, a saber: reflexión en una recta, reflexión en un punto, traslación y rotación. El objetivo fundamental de esta sección es demostrar que cualquier transformación ortogonal coincide con una de ellas o se puede expresar como producto de tales transformaciones especiales.

Teorema 19. *Cualquier transformación ortogonal de primera clase es una traslación, una reflexión en un punto o una rotación.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación ortogonal de primera clase, A, B, C en π, $A \neq B$ tales que $\alpha(A) = B$ y $\alpha(B) = C$ entonces $AB = BC$ y puede ocurrir que:
1) A, B y C son colineales con B entre A y C.

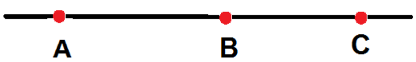


figura 29

Sea $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$ y la traslación $T_{\overrightarrow{a}}$ en el vector $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{a}$ entonces $T_{\overrightarrow{a}}(A) = B$, $T_{\overrightarrow{a}}(B) = C$ y $T_{\overrightarrow{a}}$ es directa, luego se tiene que: $T_{\overrightarrow{a}}(A) = \alpha(A)$, $T_{\overrightarrow{a}}(B) = \alpha(B)$ y como ambas son directas, por el teorema de los dos puntos y la orientación se concluye que $\alpha = T_{\overrightarrow{a}}$.
2). A, B y C son colineales pero A coincide con C.

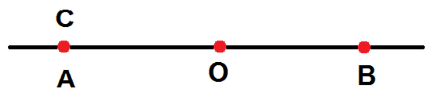


figura30

Sea O el punto medio de $\overline{AB}$ y φ_O la reflexión en O entonces $\varphi_O(A) = B$, $\varphi_O(B) = C$ y φ_O es directa; luego se tiene que: $\alpha(A) = \varphi_O(A)$, $\alpha(B) = \varphi_O(B)$ y como ambas son directas, se sigue del teorema de los dos puntos y la orientación que $\alpha = \varphi_O$.

3). A, B y C son no colineales.

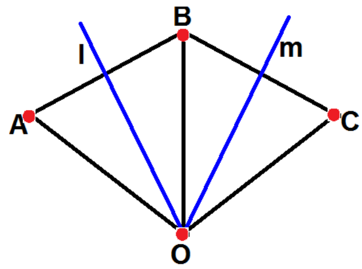


figura 31

Sean l y m las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, como $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ no son paralelas, l y m tampoco lo son, sea O su punto de corte.

Como l es la mediatriz de $\overline{AB}$ entonces A y B equidistan de O, luego, $OA = OB$ análogamente $OB = OC$ y como por hipótesis $AB = BC$ se sigue por criterio $L - L - L$ que $\triangle AOB \equiv \triangle BOC$ y así $A\widehat{O}B \cong B\widehat{O}C$.

Sea ρ_θ la rotación de centro en O según el ángulo $\theta = m(A\widehat{O}B)$, entonces $\rho_\theta(A) = B$, $\rho_\theta(B) = C$ y ρ_θ es directa, luego se tiene que:

$\alpha(A) = \rho_\theta(A)$, $\alpha(B) = \rho_\theta(B)$ y como ambas son directas se concluye al aplicar el teorema de los dos puntos y la orientación que $\alpha = \rho_\theta$. $\square$

Teorema 20. *Cualquier transformación ortogonal de segunda clase se puede representar en forma única como el producto de la reflexión φ_l una recta l y una traslación $T_{\vec{a}}$ en dirección paralela a l.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación ortogonal de segunda clase, A, B, C en π, $A \neq B$ tales que $\alpha(A) = B$ y $\alpha(B) = C$ entonces $AB = BC$, luego puede ocurrir que:

1). A, B y C colineales con B entre A y C.

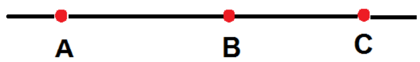


figura 32

Sea $T_{\vec{a}}$ la traslación en el vector $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, φ_l la reflexión en la recta $l = AB$ y $\beta = T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$ entonces:

$$\beta(A) = (T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(A) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(A)) = T_{\vec{a}}(A) = B = (\varphi_l \circ T_{\vec{a}})(A)$$
$$\beta(B) = (T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(B) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(B)) = T_{\vec{a}}(B) = C = (\varphi_l \circ T_{\vec{a}})(B),$$

y además β es opuesta, entonces $\beta(A) = \alpha(A)$ y $\beta(B) = \alpha(B)$ y como ambas son opuestas se concluye aplicando el teorema de dos puntos y la orientación que, $\alpha = \beta = T_{\vec{a}} \circ \varphi_l = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$.
2). A, B y C colineales pero A coincide con C.

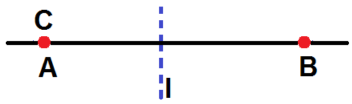


figura 33

Sea l la mediatriz de $\overline{AB}$, φ_l la reflexión en la recta l, $T_{\vec{a}}$ la traslación en el vector nulo y $\beta = T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$, entonces:

$$\beta(A) = (T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(A) = B = (\varphi_l \circ T_{\vec{a}})(A),\ \beta(B) = (T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(B) = C = (\varphi_l \circ T_{\vec{a}})(B),$$

y β es opuesta, luego se tiene que: $\alpha(A) = \beta(A)$, $\alpha(B) = \beta(B)$ y como ambas son opuestas se desprende del teorema de los dos puntos y la orientación que, $\alpha = \beta = T_{\vec{a}} \circ \varphi_l = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$.
3). A, B y C no colineales.

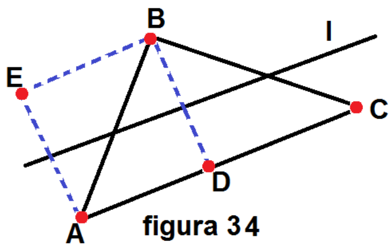


figura 34

Sea l la recta que pasa por los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, D el punto medio de $\overline{AC}$. Sea φ_l la reflexión en la recta l, $T_{\vec{a}}$ la traslación en el vector $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC}$ y $\beta = T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$ entonces:

$$\beta(A) = \left(T_{\vec{a}} \circ \varphi_l\right)(A) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(A)) = T_{\vec{a}}(E) = B$$
$$\beta(B) = \left(T_{\vec{a}} \circ \varphi_l\right)(B) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(B)) = T_{\vec{a}}(D) = C.$$

Por tanto $\alpha(A) = \beta(A)$, $\alpha(B) = \beta(B)$ y como ambas transformaciones son opuestas, se aplica el teorema de los dos puntos y la orientación para afirmar que, $\alpha = \beta = T_{\vec{a}} \circ \varphi_l = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$.
Sea $\alpha = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$ donde l es el eje de φ_l y $T_{\vec{a}}$ diferente de la transformación identidad. Sea m una recta diferente de l, entonces:
i). Si m intercepta a l en un punto P entonces su imagen m' bajo α intercepta a l en un punto

$P' \neq P$ luego $m' = \alpha(m) \neq m$.

ii). Si m es paralela a l entonces su imagen bajo α es la recta m' reflejada en l por tanto $m' = \alpha(m) \neq m$,

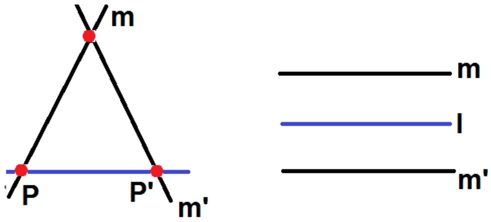


figura 35

luego l es la única recta que queda fija bajo α, por lo tanto, si ocurre que $\alpha = \varphi_m \circ T_{\vec{b}}$ donde m es el eje de φ_m y $T_{\vec{b}}$ la traslación en un vector $\vec{b}$, se deduce de la conclusión anterior que $l = m$ ya que m es invariante bajo α, es decir $\varphi_l = \varphi_m$ y por tanto, como $\varphi_m \circ T_{\vec{b}} = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$, se sigue por la ley cancelativa que $T_{\vec{b}} = T_{\vec{a}}$ por lo que $\alpha = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$ tiene una única representación cuando $T_{\vec{a}} \neq I$.

Si para toda representación se tuviera que $T_{\vec{a}} = I$ entonces α tendría como única representación $\alpha = \varphi_l \circ I$. □

Teorema 21. *Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación ortogonal directa, entonces α es de primera clase si y sólo si α se puede representar como el producto de dos reflexiones en rectas.*

Demostración. En un sentido procede como sigue: Sea α una transformación ortogonal directa, entonces puede ocurrir que:

a). α es una traslación $T_{\overrightarrow{AB}}$ en el vector $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Sea m la mediatriz de $\overline{AB}$, l la paralela a m trazada por B; M y N puntos en π tales que $ABNM$ sea un rectángulo, entonces $AM = BN$.

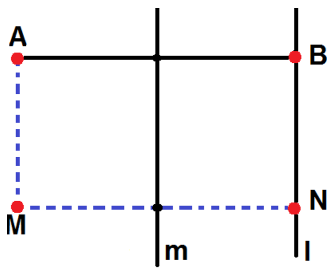


figura 36

Como $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = B = T_{\overrightarrow{AB}}(A)$, y $(\varphi_l \circ \varphi_m)(M) = N = T_{\overrightarrow{AB}}(M)$ y ambas son directas, entonces por el teorema de los dos puntos y la orientación $T_{\overrightarrow{AB}} = \varphi_l \circ \varphi_m$, es decir: "Una traslación en un vector $\vec{a}$ se puede expresar como el producto de dos reflexiones en rectas paralelas de modo que la distancia entre ellas sea la mitad de la longitud del vector."

b). α es una reflexión en un punto O, φ_O.

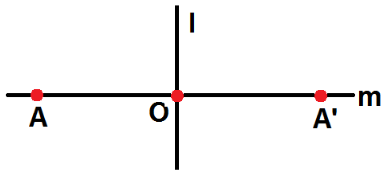


figura 37

Sean l y m rectas perpendiculares en O, A en m, $A \neq O$ y A' su imagen bajo φ_O entonces $OA = OA'$ y $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = A' = \varphi_O(A)$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(O) = O = \varphi_O(O)$ y ambas directas, por ello se sigue del teorema de los dos puntos y la orientación que $\varphi_O = \varphi_l \circ \varphi_m$, es decir: "una reflexión en un punto se puede expresar como el producto conmutativo de dos reflexiones en rectas perpendiculares en el centro de reflexión."
c). α es una rotación de centro en O en un ángulo de medida $\theta = m\big(A\widehat{O}B\big)$, ρ_θ.

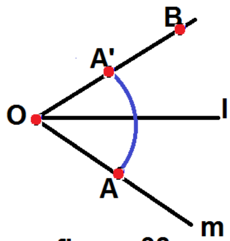


figura 38

Sean m la recta $\overleftrightarrow{OA}$, l la bisectriz del ángulo $A\widehat{O}B$ y A' la imagen de A bajo ρ_θ entonces $OA = OA'$, $A\widehat{O}A' \cong A\widehat{O}B$ y A' está en $\overrightarrow{OB}$. Como $\triangle A\widehat{O}A'$ es isósceles entonces l es la mediatriz de $\overline{AA'}$ y así $\varphi_l(A) = A'$.
Puesto que $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = A' = \rho_\theta(A)$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(O) = O = \rho_\theta(O)$ y ambas son directas, se sigue por el teorema de los dos puntos y la orientación que $\rho_\theta = \varphi_l \circ \varphi_m$, es decir "una rotación se puede expresar como el producto de dos reflexiones en rectas que pasen por el centro de rotación y de forma que el ángulo dirigido entre ellas sea la mitad del ángulo de rotación."
En el otro sentido se tiene.
Sean l y m dos rectas en π y φ_l, φ_m las reflexiones en ellas, entonces puede ocurrir que:
a). l y m son paralelas. Sean A y B en m, $A \neq B$, s y t las rectas perpendiculares a m por A y B respectivamente; M y N los puntos de intersección de s y t con l respectivamente y A' en s y B' en t tales que $AM = MA'$ y $BN = NB'$ entonces, como s es paralela a t se tiene que $AB = A'B'$ y $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = A'$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(B) = B'$ y es directa.

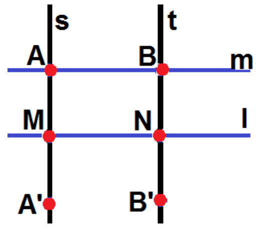


figura 39

Sea $T_{\vec{a}}$ la traslación en el vector $\vec{a} = \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}$ entonces se tiene que $T_{\vec{a}}(A) = A'$ y $T_{\vec{a}}(B) = B'$, por tanto: $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = T_{\vec{a}}(A)$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(B) = T_{\vec{a}}(B)$ y ambas son directas, entonces por el teorema de los dos puntos y la orientación se concluye que, $\varphi_l \circ \varphi_m = T_{\vec{a}}$ es decir: "el producto de dos reflexiones en rectas paralelas l y m es una traslación en un vector de longitud igual al doble de la distancia entre las rectas y dirigido en el mismo sentido que el orden del producto o sea $\varphi_l \circ \varphi_m = T_{\vec{a}}$ donde $\vec{a} = 2\overrightarrow{d(m,l)}$."

b). l y m son perpendiculares.

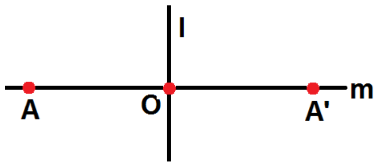


figura 40

Sea O su punto de corte, A en m, $A \neq O$, entonces:
$(\varphi_l \circ \varphi_m)(O) = O$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = \varphi_l(\varphi_m(A)) = \varphi_l(A) = A'$ donde l es la mediatriz de $\overline{AA'}$.
Sea φ_O la reflexión en el punto O, entonces: $\varphi_O(O) = O$ y $\varphi_O(A) = A'$ ya que $OA = OA'$ y O, A y A' son colineales con O entre A y A', entonces se tiene que $(\varphi_l \circ \varphi_m)(O) = \varphi_O(O)$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = \varphi_O(A)$ y como ambas son directas se sigue por el teorema de los dos puntos y la orientación que $\varphi_l \circ \varphi_m = \varphi_O$, es decir: "el producto de dos reflexiones en rectas perpendiculares es una reflexión en el punto de corte y este producto es conmutativo."

c). m y l no son paralelas ni perpendiculares.

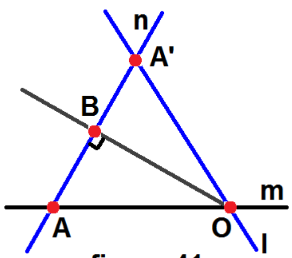


figura 41

Sea O el punto de corte de m y l, A un punto de m, $A \neq O$, entonces $(\varphi_l \circ \varphi_m)(O) = O$, $(\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = A'$ donde l es la mediatriz de $\overrightarrow{AA'}$. Sea B el punto de corte de l y $\overleftrightarrow{AA'}$ entonces

$AB = BA'$ y como $\sphericalangle ABO \cong \sphericalangle A'BO$ por ser rectos entonces $\triangle ABO \equiv \triangle A'BO$, y por tanto $OA = OA'$ y así el triángulo AOA' es isósceles y por tanto l la bisectriz de $\sphericalangle A\widehat{O}A'$, es decir, $A\widehat{O}A' = 2\sphericalangle(m,l)$.
Sea ρ_θ la rotación de centro O y $\theta = m(A\widehat{O}A') = 2\sphericalangle(m,l)$ entonces $\rho_\theta(O) = O = (\varphi_l \circ \varphi_m)(O)$ y $\rho_\theta(A) = A' = (\varphi_l \circ \varphi_m)(A) = A'$ y como ambas son directas se concluye por el teorema de los dos puntos y la orientación que $\varphi_l \circ \varphi_m = \rho_\theta$, es decir, "El producto de dos reflexiones en rectas que se cortan es una rotación de centro en el punto de corte y en un ángulo de medida el doble de la medida del ángulo orientado comprendido entre la recta m y l." □

Teorema 22. *Toda transformación ortogonal de segunda clase es una reflexión en una recta o el producto de tres reflexiones en rectas.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación ortogonal de segunda clase, entonces:
Si α es una reflexión en una recta no hay nada que probar, por tanto supongamos que α no es una reflexión en una recta, entonces, por el teorema 20 se tiene que $\alpha = \varphi_l \circ T_{\overrightarrow{a}}$ donde el vector $\overrightarrow{a}$ es paralelo a l, pero por el teorema 21 se tiene que $T_{\overrightarrow{a}} = \varphi_n \circ \varphi_m$ donde m y n son paralelas y $a = 2d(m,n)$ por tanto $\alpha = \varphi_l \circ T_{\overrightarrow{a}} = \varphi_l \circ (\varphi_n \circ \varphi_m) = \varphi_l \circ \varphi_n \circ \varphi_m$.
Es importante observar que la representación de una transformación ortogonal como producto de reflexiones en rectas no es única. Se puede demostrar que existen otras formas de representación cuando se trata de transformaciones ortogonales de primera clase, para transformaciones ortogonales de segunda clase, el problema resulta más laborioso. □

Teorema 23. *El producto de dos traslaciones es una traslación.*

Demostración. Sean $T_{\overrightarrow{a}}$ y $T_{\overrightarrow{b}}$ traslaciones del plano definidas por los vectores $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ entonces existen rectas m, l y n, t tales que $T_{\overrightarrow{a}} = \varphi_l \circ \varphi_m$, con l paralela a m y $a = 2\overrightarrow{d(l,m)}$ y $T_{\overrightarrow{b}} = \varphi_n \circ \varphi_t$, con n paralela a t y $\overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{d(n,t)}$. En consecuencia,

$$T_{\overrightarrow{a}} \circ T_{\overrightarrow{b}} = (\varphi_n \circ \varphi_t) \circ (\varphi_l \circ \varphi_m)$$

y se deben examinar dos casos:
1). l y t son paralelas.

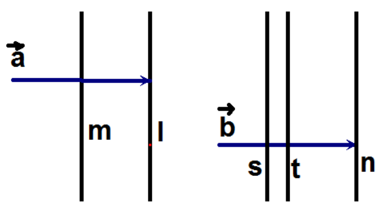


figura 42

Sea s una recta paralela a l tal que $d(t,n) = d(l,s)$ entonces $\varphi_n \circ \varphi_t = \varphi_s \circ \varphi_l = T_{\overrightarrow{b}}$, luego:

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{b}} \circ T_{\overrightarrow{a}} &= (\varphi_n \circ \varphi_t) \circ (\varphi_l \circ \varphi_m) \\ &= (\varphi_s \circ \varphi_l) \circ (\varphi_l \circ \varphi_m) \\ &= \varphi_s \circ (\varphi_l \circ \varphi_l) \circ \varphi_m \\ &= \varphi_s \circ I \circ \varphi_m \\ &= \varphi_s \circ \varphi_m \\ &= T_{\overrightarrow{c}}, \end{aligned}$$

ya que m es paralela a s y donde,

$$\overrightarrow{c} = 2\overrightarrow{d(m,s)} = 2[\overrightarrow{d(m,l)} + \overrightarrow{d(l,s)}] = 2[\frac{\overrightarrow{a}}{2} + \frac{\overrightarrow{b}}{2}] = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}.$$

Es decir, $T_{\overrightarrow{a}} \circ T_{\overrightarrow{a}} = T_{\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}}$.

2). Supongamos ahora, que l y t no son rectas paralelas. Sea A su punto de corte s la perpendicular a m trazada por A y B su punto de intersección, entonces: $\varphi_s \circ \varphi_m = \varphi_B$ (1).

Como m es paralela a l se tiene que s es perpendicular a l en A por tanto: $\varphi_l \circ \varphi_s = \varphi_A$ (2).

Sea p la perpendicular a t en el punto A entonces $\varphi_t \circ \varphi_p = \varphi_A$ (3). y como n es paralela a t se tiene que p es perpendicular a n, sea C su punto de corte, entonces $\varphi_n \circ \varphi_p = \varphi_C$ (4).

Sea r la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y sean u y v las rectas perpendiculares a r en B y C respectivamente, entonces se tiene: $\varphi_r \circ \varphi_u = \varphi_B$ (5). y $\varphi_v \circ \varphi_r = \varphi_C$ (6).

De las partes (2). y (3). se tiene: $\varphi_t \circ \varphi_l = \varphi_p \circ \varphi_s$ a).

De las partes (1). y (5). se tiene:$\varphi_s \circ \varphi_m = \varphi_r \circ \varphi_u$ b).

De las partes (4). y (6). se tiene: $\varphi_n \circ \varphi_p = \varphi_v \circ \varphi_r$ c).

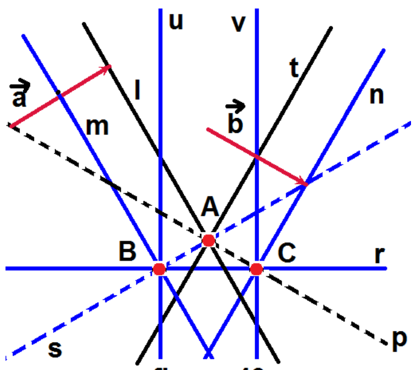


figura 43

Reemplazando estas partes literales $a)., b).$, y $(c).$ en $T_{\vec{b}} \circ T_{\vec{a}}$ se obtiene:

$$\begin{aligned} T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} &= (\varphi_n \circ \varphi_t) \circ (\varphi_l \circ \varphi_m) \\ &= \varphi_n \circ (\varphi_t \circ \varphi_l) \circ \varphi_m \\ &= \varphi_n \circ (\varphi_p \circ \varphi_s) \circ \varphi_m \\ &= (\varphi_n \circ \varphi_p) \circ (\varphi_s \circ \varphi_m) \\ &= (\varphi_v \circ \varphi_r) \circ (\varphi_r \circ \varphi_u) \\ &= \varphi_v \circ (\varphi_r \circ \varphi_r) \circ \varphi_u \\ &= \varphi_v \circ I \circ \varphi_u \\ &= \varphi_v \circ \varphi_u \\ &= T_{\vec{c}}, \end{aligned}$$

ya que u y v son paralelas y donde $\vec{c} = 2\overrightarrow{d(u,v)} = 2\overrightarrow{BC} = 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = 2\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{2}\right) = \vec{a} + \vec{b}$. Es decir $T_{\vec{a}} \circ T_{\vec{b}} = T_{\vec{a}+\vec{b}}$. □

Teorema 24. *El producto de dos rotaciones es una rotación o una traslación.*

Demostración. Sean ρ_α y ρ_β dos rotaciones, entonces existen rectas l, m, n y t tales que $\rho_\alpha = \varphi_l \circ \varphi_m$ donde m y l no son paralelas y $\rho_\beta = \varphi_n \circ \varphi_t$ con n y t no paralelas y $\alpha = 2\sphericalangle(m,l)$, $\beta = 2\sphericalangle(t,n)$, entonces puede ocurrir que:
a). ρ_α y ρ_β tienen el mismo centro de rotación O.

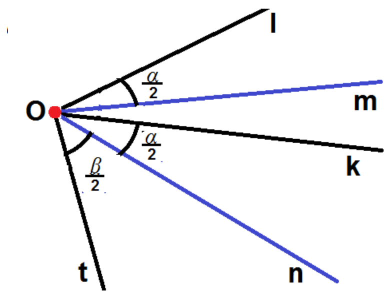


figura 44

Sea k una recta que pasa por O y tal que $\sphericalangle(m,l) = \sphericalangle(n,k)$, entonces

$$\rho_\alpha = \varphi_l \circ \phi_m = \varphi_k \circ \phi_n,$$

luego,

$$\begin{aligned}
\rho_\alpha \circ \rho_\beta &= (\varphi_l \circ \phi_m) \circ (\varphi_n \circ \phi_t) \\
&= (\varphi_k \circ \phi_n) \circ (\varphi_n \circ \phi_l) \\
&= \varphi_k \circ (\phi_n \circ \varphi_n) \circ \phi_l \\
&= \varphi_k \circ I \circ \phi_t \\
&= \varphi_k \circ \phi_t \\
&= \rho_\theta,
\end{aligned}$$

ya que k no es paralela a t y donde θ es un ángulo tal que:

$$\theta = 2\sphericalangle(t,k) = 2\big[\sphericalangle(t,n) + \sphericalangle(n,k)\big] = 2\big(\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2}\big) = \alpha + \beta (mod 2\pi).$$

Es decir, "El producto de dos rotaciones con un mismo centro de rotación, es una rotación con centro en el mismo punto y en un ángulo cuya medida es la suma de las medidas de los ángulos que las determinan."

b). ρ_α y ρ_β poseen diferentes centros de rotación; sean estos, A y B respectivamente.

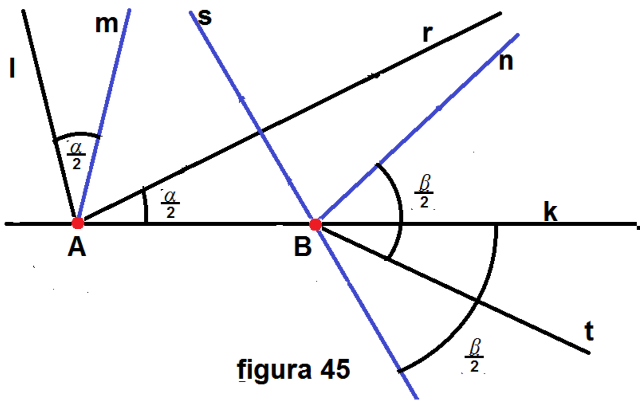


figura 45

Sea k la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y r una recta que pasa por A y tal que $\sphericalangle(m,l) = \sphericalangle(k,r)$ así

$$\rho_\alpha = \varphi_l \circ \varphi_m = \varphi_r \circ \varphi_k.$$

Sea s una recta que pasa por B y tal que $\sphericalangle(s,k) = \sphericalangle(t,n)$, entonces:

$$\rho_\beta = \varphi_n \circ \varphi_t = \varphi_k \circ \varphi_s.$$

Por lo tanto se tiene que:

$\rho_\alpha \circ \rho_\beta = (\varphi_l \circ \varphi_m) \circ (\varphi_n \circ \varphi_t) = (\varphi_r \circ \varphi_k) \circ (\varphi_k \circ \varphi_s) = \varphi_r \circ (\varphi_k \circ \varphi_k) \circ \varphi_s = \varphi_r \circ I \circ \varphi_s = \varphi_r \circ \varphi_s$

por ello:

1). Si s y r son paralelas entonces $\rho_\alpha \circ \rho_\beta = \varphi_r \circ \varphi_s$ es una traslación en el vector $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{d(s,r)}$.

2). Si s y r no son paralelas entonces $\rho_\alpha \circ \rho_\beta$ es una rotación en un ángulo de medida $\theta = 2 \sphericalangle (s, r)$ y centro de rotación en el punto de intersección entre s y r. □

Teorema 25. *El producto de dos reflexiones en puntos A y B es una traslación en el vector $2\overrightarrow{AB}$.*

Demostración. 1). Si $A = B$ entonces $\varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_A^2 = I = T_{\overrightarrow{O}}$ que es la traslación en el vector nulo.
2). Si A y B son diferentes, sea $k = \overleftrightarrow{AB}$, m la perpendicular a k en el punto A y l la perpendicular a k en el punto B, entonces $\varphi_k \circ \varphi_m$ es una reflexión en el punto A y $\varphi_l \circ \varphi_k$ es una reflexión en el punto B, en consecuencia: $\varphi_A = \varphi_k \circ \varphi_m$ y $\varphi_B = \varphi_l \circ \varphi_k$. Por tanto:

$$\varphi_B \circ \varphi_A = (\varphi_l \circ \varphi_k) \circ (\varphi_k \circ \varphi_m) = \varphi_l \circ (\varphi_k \circ \varphi_k) \circ \varphi_m = \varphi_l \circ I \circ \varphi_m = \varphi_l \circ \varphi_m,$$

y como m y l son paralelas se sigue que $\varphi_B \circ \varphi_A$ es una traslación en el vector $\overrightarrow{a} = 2\overrightarrow{d(m,l)} = 2\overrightarrow{AB}$.

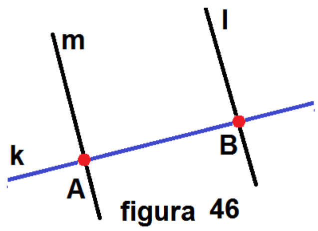


figura 46

□

2.3. Representación Analítica de una Transformación Ortogonal .

En esta sección se considera un sistema rectangular de coordenadas XOY donde e_1 y e_2 representan los puntos de coordenadas (1,0) y (0,1) respectivamente y si $M(x, y)$ es un punto cualquiera del plano, $M'(x', y')$ representa su imagen bajo una transformación ortogonal α.
El objetivo de esta sección es deducir fórmulas que expresen $M(x', y')$ en términos de $M(x, y)$.

2.3.1. Traslación.

Sea $T_{\overrightarrow{a}}$ la traslación en el vector $\overrightarrow{a}$ cuyo origen coincide con el origen del sistema de coordenadas y extremo en el punto $A(h, k)$, es decir $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}$.
Sean $M(x, y)$ y $M'(x, y)$ tales que $T_{\overrightarrow{a}}(M) = M'$ entonces $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{a}$ y como

$$\overrightarrow{MM'} = (x' - x, y' - y) \text{ y } \overrightarrow{a} = (h, k)$$

se sigue que $(x' - x, y' - y) = (h, k)$ es decir $x' = x + h$, $y' = y + k$ y por tanto:

$$T_{\overrightarrow{a}}(x,y) = (x + h, y + k).$$

2.3.2. Reflexión en una Recta.

Se presentan dos casos.

a). El eje de la reflexión, pasa por el origen del sistema de coordenadas. Sea l una recta que pasa por el origen de coordenadas y forma un ángulo orientado α con el eje x y $M'(x', y')$ y $M(x, y)$ tales que $\varphi_l(M) = M'$.

Si las coordenadas polares de $M(x, y)$ son (r, θ) entonces $\overrightarrow{OM} = r$ y $m(x\widehat{O}M) = \theta$ y como $\varphi_l(M) = M'$ se obtiene que las coordenadas polares de $M'(x', y')$ son $(r, 2\alpha - \theta)$, es decir:

$$x = rcos\theta,\ y = rsen\theta,\ x' = rcos(2\alpha - \theta) \text{ y } y' = rsen(2\alpha - \theta)$$

Por lo que

$$x' = rcos(2\alpha - \theta) = r[cos2\alpha cos\theta + sen2\alpha sen\theta] = xcos2\alpha + ysen2\alpha.$$

$$\begin{aligned} y' &= rsen(2\alpha - \theta) \\ &= r[sen(2\alpha)cos\theta - cos(2\alpha)sen\theta] \\ &= xsen(2\alpha) - ycos(2\alpha), \end{aligned}$$

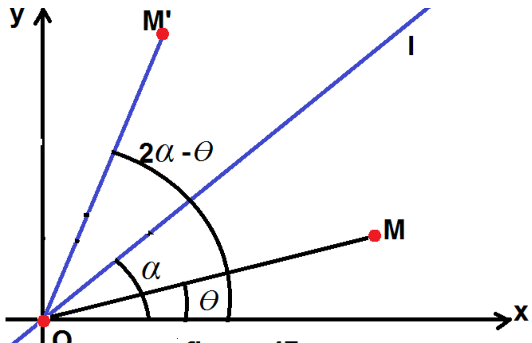


figura 47

es decir:

$$\varphi_l(x, y) = \big(xcos(2\alpha) + ysen(2\alpha), xsen(2\alpha) - ycos(2\alpha)\big).$$

b). El eje de la reflexión, no pasa por el origen de coordenadas.

Sea l una recta que pasa por el punto $A(h, k) \neq (0, 0)$, α el ángulo orientado que forma l con el eje x, $M(x, y)$ un punto cualquiera del plano y $M(x', y')$ su imagen bajo φ_l, entonces:

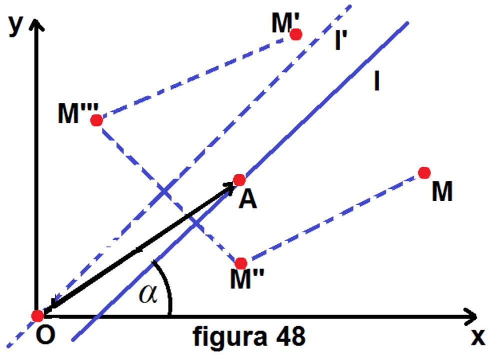


figura 48

Si se llama $T_{\overrightarrow{AO}}$ la traslación que lleva A en O y $\varphi_{l'}$ la reflexión en la recta l', donde $l' = T_{\overrightarrow{AO}}(l)$ se obtiene:

1). $T_{\overrightarrow{AO}}(x,y) = (x-h, y-k)$ y $T_{\overrightarrow{AO}}(M) = M''$

2). Como l' pasa por el origen y es paralela a l se tiene, por la parte a). que:

$\varphi_{l'}(x,y) = \big(xcos(2\alpha) + ysen(2\alpha), xsen(2\alpha) - ycos(2\alpha)\big)$ y $\varphi_{l'}(M'') = M'''$.

3). Como $\varphi_l = T^{-1}_{\overrightarrow{AO}} \circ \varphi_{l'} \circ T_{\overrightarrow{AO}}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\varphi_l(x,y) &= \big(T^{-1}_{\overrightarrow{AO}} \circ \varphi_{l'} \circ T_{\overrightarrow{AO}}\big)(x,y)\\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\big(\varphi_{l'}\big(T_{\overrightarrow{AO}}(x,y)\big)\big)\\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\big(\varphi_{l'}(x-h,y-k)\big)\\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\big((x-h)cos(2\alpha) + (y-k)sen(2\alpha), (x-h)sen(2\alpha) - (y-k)cos(2\alpha)\big)\\
&= \big((x-h)cos(2\alpha) + (y-k)sen(2\alpha) + h, (x-h)sen(2\alpha) - (y-k)cos(2\alpha) + k\big),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\varphi_l(x,y) = \big((x-h)cos(2\alpha) + (y-k)sen(2\alpha) + h, (x-h)sen(2\alpha) - (y-k)cos(2\alpha) + k\big).$$

Si en particular la recta l es paralela el y se tiene $\alpha = \frac{\pi}{2}$ y por tanto que:

$$\varphi_l(x,y) = \big((x-h).(-l) + (y-k).(0) + h, (x-h).(0) - (y-k)(-l) + k\big),$$

es decir, $\varphi_l(x,y) = \big(2h - x, y\big)$ donde $x = h$ es la ecuación de la recta l.

2.3.3. Reflexión en un punto.

Se presentan dos casos:

a). El centro de reflexión es el origen del sistema de coordenado.

Sea φ_O la reflexión en el punto $O(0,0)$, $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ tales que $\varphi_O(M) = M'$ entonces O es el punto medio de $\overline{MM'}$, esto es O, M y M' son colineales y $OM = OM'$.

Al proyectar $\overline{OM}$ y $\overline{OM'}$ sobre el eje x se encuentran los puntos P y P' de corte de estas proyecciones con el eje x respectivamente y de acuerdo con el criterio de congruencia $A-L-A$ se concluye que los triángulos OMP y $OM'P'$ son congruentes entonces: $OP = OP'$ y $PM = P'M'$ por ello $x' = -x$ y $y' = -y$ y por tanto

$$\varphi_O(x,y) = (-x,-y).$$

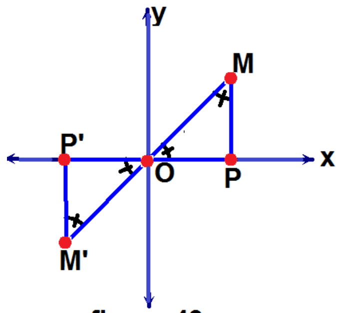


figura 49

b). El centro de reflexión no es el origen del sistema coordenado.

Sea φ_A la reflexión en el punto $A(h,k) \neq (0,0)$, $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ tales que: $\varphi_A(M) = M'$ por tanto si se considera la traslación según el vector $\overrightarrow{AO}$ y la reflexión en el origen O se tiene que:

1). $T_{\overrightarrow{AO}}(x,y) = (x-h, y-k)$ y $T_{\overrightarrow{AO}}(M) = M''$.

2). $\varphi_O(x,y) = (-x,-y)$ y $\varphi_O(M'') = M'''$.

3). Como $\varphi_A = T^{-1}_{\overrightarrow{AO}} \circ \varphi_O \circ T_{\overrightarrow{AO}}$ se sigue que:

$$\begin{aligned}
\varphi_A(x,y) &= \big(T^{-1}_{\overrightarrow{AO}} \circ \varphi_O \circ T_{\overrightarrow{AO}}\big)(x,y) \\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\big(\varphi_O\big(T_{\overrightarrow{AO}}(x,y)\big)\big) \\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\big(\varphi_O(x-h, y-k)\big) \\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\big(-(x-h), -(y-k)\big) \\
&= \big(2h-x, 2k-y\big),
\end{aligned}$$

y así

$$\varphi_A(x,y) = (2h-x, 2k-y).$$

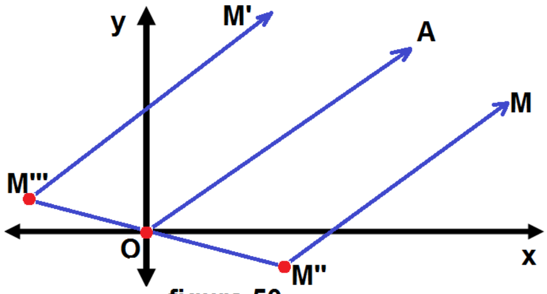


figura 50

Una manera diferente para deducir la expresión anterior es la siguiente: Se conoce que una reflexión en un punto $A(h,k)$ es el producto de dos reflexiones en rectas perpendiculares que se cortan en el punto $A(x,y)$, por eso si $x = h$ y $y = k$ son las ecuaciones de las rectas m y l perpendiculares en el punto $A(h,k)$ entonces $\varphi_m(x,y) = (2h - x, y)$ y $\varphi_l(x,y) = (x, 2k - y)$ y puesto que $\varphi_A = \varphi_l \circ \varphi_m$ se tiene que

$$\varphi_A(x,y) = (\varphi_l \circ \varphi_m)(x,y) = \varphi_l\big(\varphi_m(x,y)\big) = \varphi_l\big(2h - x, y\big) = \big(2h - x, 2k - y\big).$$

2.3.4. Rotación

Se presentan dos casos.

a). El centro de rotación es el origen del sistema coordenado.

Sea ρ_θ la rotación de centro en $O(0,0)$ en un ángulo orientado de medida θ, $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ puntos del plano tales que $\rho_\theta(M) = M'$ entonces $OM = OM'$ y $m\big(M\widehat{O}M'\big) = \theta$ por tanto se tiene que si (r,α) son las coordenadas polares de M entonces $(r,\alpha+\theta)$ son las coordenadas polares de M' y en consecuencia:

$$x = rcos\alpha \qquad y = rsen\alpha \qquad x' = rcos(\alpha+\theta) \qquad y' = rsen(\alpha+\theta)$$

luego,

$$x' = rcos(\alpha+\theta) = rcos\alpha cos\theta - rsen\alpha sen\theta = xcos\theta - ysen\theta$$
$$x' = rsen(\alpha+\theta) = rsen\alpha cos\theta + rcos\alpha sen\theta = xsen\theta + ycos\theta,$$

es decir,

$$\rho_\theta(x,y) = \big(xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta\big).$$

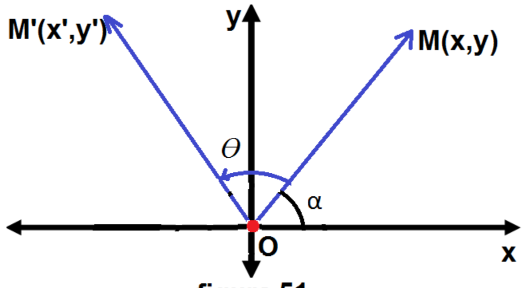


figura 51

b). El centro de rotación no es origen del sistema coordenado.

Sea ρ_θ una rotación de centro $A(h,k) \neq (0,0)$ en un ángulo orientado de medida θ, $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ puntos del plano tales que $\rho_\theta(M) = M'$, por tanto, al considerar la traslación $T_{\overrightarrow{AO}}$ según el vector $\overrightarrow{AO}$ y la rotación ρ'_θ de centro en O se obtiene:

1). $T_{\overrightarrow{AO}}(x,y) = (x-h, y-k)$ y $T_{\overrightarrow{AO}}(M) = M''$.

2). $\rho'_\theta(x,y) = \big(xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta\big)$ y $\rho'_\theta(M'') = M'''$.

3). Como $\rho_\theta = T^{-1}_{\overrightarrow{AO}} \circ \rho'_\theta \circ T_{\overrightarrow{AO}}$ se tiene que:

$$\begin{aligned}
\rho_\theta(x,y) &= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}} \circ \rho'_\theta \circ T_{\overrightarrow{AO}}(x,y) \\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\Big(\rho'_\theta\big(T_{\overrightarrow{AO}}(x,y)\big)\Big) \\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\Big(\rho'_\theta\big(x-h, y-k\big)\Big) \\
&= T^{-1}_{\overrightarrow{AO}}\Big((x-h)cos\theta - (y-k)sen\theta, (x-h)sen\theta + (y-k)cos\theta\Big) \\
&= \Big((x-h)cos\theta - (y-k)sen\theta + h, (x-h)sen\theta + (y-k)cos\theta + k\Big),
\end{aligned}$$

de manera que

$$\rho_\theta(x,y) = \Big((x-h)cos\theta - (y-k)sen\theta + h, (x-h)sen\theta + (y-k)cos\theta + k\Big).$$

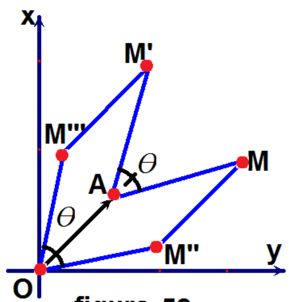


figura 52

Nótese que si $\theta = \pi$ entonces $\rho_\theta(x,y) = (2h-x, 2k-y)$ que corresponde a la expresión analítica para una reflexión en el punto $A(x,y)$ y esto significa que la reflexión en un punto es un caso particular de la rotación.

2.3.5. Caso General de una Transformación Ortogonal.

Teorema 26. *Toda transformación ortogonal del plano tiene como representación analítica las ecuaciones:*

$$
\begin{aligned}
x' &= ax - by + h \\
y' &= \pm(bx - ay) + k,
\end{aligned}
$$

con $a^2 + b^2 = 1$ y donde es signo "-" en y' corresponde al caso de una transformación ortogonal de segunda clase.

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación ortogonal del plano tal que $\alpha(0,0) = A(h,k)$ y $T_{\overrightarrow{AO}}$ la traslación en el vector $\overrightarrow{AO}$. Si se llama β la transformación $\beta = T_{\overrightarrow{AO}} \circ \alpha$, entonces $\alpha = T_{\overrightarrow{OA}} \circ \beta$ y β tiene como punto fijo el origen de coordenadas por lo que:

1). Si α es de primera clase entonces β es de primera clase, luego β es una traslación, una reflexión en un punto o una rotación, pero β no es una traslación ya que deja al origen de coordenadas fijo, así que β es una rotación (que incluye una reflexión en el origen) en un ángulo orientado de medida θ, en consecuencia, si $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ son puntos del plano tales que $\alpha(M) = M'$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\alpha\big(M(x,y)\big) &= \big(T_{\overrightarrow{OA}} \circ \beta\big)(M(x,y)) \\
&= T_{\overrightarrow{OA}}\big(\beta(M(x,y)\big) \\
&= T_{\overrightarrow{AO}}\big(xcos\theta - ysen\theta, xsen\theta + ycos\theta\big) \\
&= T_{\overrightarrow{AO}}\big(xcos\theta - ysen\theta + h, xsen\theta + ycos\theta + k\big) \\
&= M'(x',y'),
\end{aligned}
$$

y por tanto,

$$x' = xcos\theta - ysen\theta + h \qquad y' = xsen\theta + ycos\theta + k. \tag{2.1}$$

2). Si α es de segunda clase entonces β es de segunda clase y por esta razón β solo puede ser una reflexión en una recta l que forma un ángulo orientado de medida θ con el eje x, en consecuencia, si $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ son puntos del plano tales que $\alpha(M) = M'$ entonces:

$$
\begin{aligned}
\alpha\big(M(x,y)\big) &= \big(T_{\overrightarrow{OA}} \circ \beta\big)(M(x,y)) \\
&= T_{\overrightarrow{OA}}\big(\beta(M(x,y))\big) \\
&= T_{\overrightarrow{OA}}\big(xcos2\theta + ysen2\theta, xsen2\theta - ycos2\theta\big) \\
&= \big(xcos2\theta + ysen2\theta + h, xsen2\theta + ycos2\theta + k\big) \\
&= M'(x',y'),
\end{aligned}
$$

por lo que

$$x' = x cos 2\theta + y sen 2\theta + h \qquad y' = x sen 2\theta - y cos 2\theta + k, \tag{2.2}$$

Si en (2.1) se hace $a = cos\theta$ y $b = sen\theta$ se obtiene que

$$x' = ax - by + h, \qquad y' = bx + ay + k,$$

con $a^2 + b^2 = 1$. Si en (2.2) se hace $a = cos 2\theta$ y $b = sen 2\theta$ se obtiene que

$$x' = ax - by + h \qquad y' = -bx - ay + k,$$

con $a^2 + b^2 = 1$.

Al unir las dos expresiones anteriores se obtiene que la transformación ortogonal α se puede representar analíticamente por las ecuaciones

$$x' = ax - by + h, \qquad y' = \pm(bx + ay) + k,$$

con $a^2 + b^2 = 1$ y donde el signo "-" en y' corresponde al caso en que α es opuesta. $\square$

2.4. Problemas Resueltos.

Los siguientes problemas ilustran la utilización de los aspectos teóricos estudiados y son fuente de inspiración en el planteamiento y solución de otros problemas.

Problema 1. Probar que si $T_{\vec{a}}$ en una traslación en un vector dado $\vec{a}$, φ_l es la reflexión en una recta dada l, entonces $\varphi_l \circ T_{\vec{a}}$ y $T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$ son opuestas.

Solución. Sean A y B puntos diferentes en l y C un punto fuera de l, entonces:

1). $T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$ es opuesta.

$(T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(A) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(A)) = T_{\vec{a}}(A) = A'$ donde $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$.

$(T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(B) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(B)) = T_{\vec{a}}(B) = B'$ donde $\overrightarrow{BB'} = \vec{a}$.

$(T_{\vec{a}} \circ \varphi_l)(C) = T_{\vec{a}}(\varphi_l(C)) = T_{\vec{a}}(C') = C''$ donde l es la mediatriz de $\overline{CC'}$ y $\overrightarrow{CC'} = \vec{a}$, entonces la imagen del triángulo ABC bajo $T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$ es el triángulo $A'B'C''$.

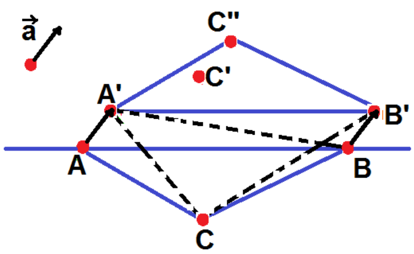


figura 53

Como en la cadena: $ABC - A'BC - A'B'C - A'B'C''$ hay una pareja de triángulos adyacentes antiorientados, se sigue que $\triangle ABC$ y su imagen bajo $T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$, $\triangle A'B'C''$ tienen orientados opuesta y en consecuencia $T_{\vec{a}} \circ \varphi_l$ es opuesta.

La demostración de que $\varphi_l \circ T_{\vec{a}}$ es opuesta es análoga a la anterior.

Problema 2. Probar que las diagonales de un paralelogramo se interceptan en su punto medio.

Solución. Sea $ABCD$ un paralelogramo y O el punto medio de la diagonal DB entonces,

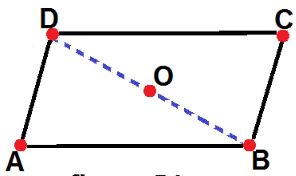


figura 54

$\overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OB}$ luego $T_{2\overrightarrow{DO}} = T_{2\overrightarrow{OB}}$ es decir $\varphi_O \circ \varphi_D = \varphi_B \circ \varphi_O$. Como $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ se tiene que $T_{2\overrightarrow{AB}} = T_{2\overrightarrow{DC}}$ o sea $\varphi_B \circ \varphi_A = \varphi_C \circ \varphi_D$, luego $\varphi_B \circ (\varphi_O \circ \varphi_O) \circ \varphi_A = \varphi_C \circ (\varphi_O \circ \varphi_O) \circ \varphi_D$ y así, $(\varphi_B \circ \varphi_O) \circ (\varphi_O \circ \varphi_A) = (\varphi_C \circ \varphi_O) \circ (\varphi_O \circ \varphi_D) = (\varphi_O \circ \varphi_D) \circ (\varphi_C \circ \varphi_O) = (\varphi_B \circ \varphi_O) \circ (\varphi_C \circ \varphi_O)$ por tanto $\varphi_O \circ \varphi_A = \varphi_C \circ \varphi_O$, o sea $T_{2\overrightarrow{AO}} = T_{2\overrightarrow{OC}}$ de donde $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ y por tanto O es el punto medio de $\overline{AC}$.

Problema 3. (***Teorema de Varignon***) Los puntos medios de los lados de un cuadrilátero forman un paralelogramo.

Solución. Sea $ABCD$ un cuadrilátero, M, N, P y Q los puntos medios de los lados AB, BC, CD y DA respectivamente. entonces

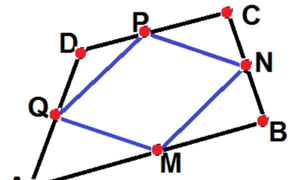


figura 55

$\varphi_P \circ \varphi_N = T_{2\overrightarrow{NP}}$ y $\varphi_M \circ \varphi_Q = T_{2\overrightarrow{QM}}$ por lo que $\varphi_P \circ \varphi_N \circ \varphi_M \circ \varphi_Q = T_{2\overrightarrow{NP}} \circ T_{2\overrightarrow{QM}}$ es una traslación y como

$$\begin{aligned}
(\varphi_P \circ \varphi_N \circ \varphi_M \circ \varphi_Q)(D) &= \varphi_P(\varphi_N(\varphi_M(\varphi_Q(D)))) \\
&= \varphi_P(\varphi_N(\varphi_M(A))) \\
&= \varphi_P(\varphi_N(B)) \\
&= \varphi_P(C) \\
&= D,
\end{aligned}$$

se sigue que la traslación $\varphi_P \circ \varphi_N \circ \varphi_M \circ \varphi_Q$ posee un punto fijo y por lo tanto es la traslación según el vector nulo, es decir $\varphi_P \circ \varphi_N \circ \varphi_M \circ \varphi_Q = I$ y por ello $\varphi_P \circ \varphi_N = \varphi_Q \circ \varphi_M$ o sea $T_{2\overrightarrow{NP}} = T_{2\overrightarrow{MQ}}$, luego $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MQ}$ y por lo tanto el cuadrilátero $MNPQ$ es un paralelogramo.

Problema 4 Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes. Este punto de concurrencia se llama ***circuncentro.***

Solución. Sea ABC un triángulo, l la mediatriz de $\overline{AB}$, m la mediatriz de $\overline{AC}$ y $k = \overleftrightarrow{AO}$ donde O es el punto de intersección de m y l.

Sea s una recta que pase por O y tal que $\sphericalangle(s,l) = \sphericalangle(m,k)$ entonces $\varphi_l \circ \varphi_s = \varphi_k \circ \varphi_m$. Por tanto $\varphi_s(C) = (\varphi_l \circ \varphi_k \circ \varphi_m)(C) = \varphi_l \circ \varphi_k(\varphi_m(C)) = \varphi_l(\varphi_k(A)) = \varphi_l(A) = B$. Así $\varphi_s(C) = B$ y por tanto s es la mediatriz de $\overline{CB}$ y de ahí que l, m y s son concurrentes.

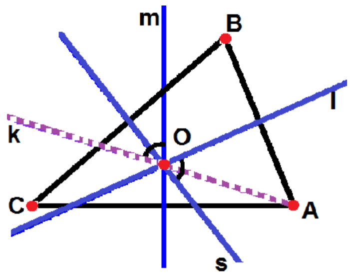


figura 56

Problema 5. Las medianas de un triángulo son concurrentes y el punto de concurrencia es un punto de trisección de cada mediana. El punto de concurrencia se llama ***baricentro.***

Solución. Sea ABC un triángulo, P, Q y R los puntos medios de los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente y G el punto de la mediana $\overline{CP}$ tal que $\overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{PG}$, entonces

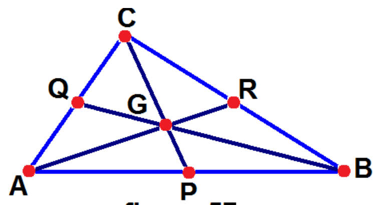


figura 57

$$\varphi_C \circ \varphi_G = T_{2\overrightarrow{GC}} = T_{4\overrightarrow{PG}} = T_{2\overrightarrow{PG}} \circ T_{2\overrightarrow{PG}} = (\varphi_G \circ \varphi_P) \circ (\varphi_G \circ \varphi_P)$$

es decir: $\varphi_C \circ \varphi_G = \varphi_G \circ \varphi_P \circ \varphi_G \circ \varphi_P$. (1)

Como $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP}$ entonces $T_{2\overrightarrow{PB}} = T_{2\overrightarrow{AP}}$ o sea $\varphi_B \circ \varphi_P = \varphi_P \circ \varphi_A$ luego $\varphi_B = \varphi_P \circ \varphi_A \circ \varphi_P$. (2)

Como $\overrightarrow{RC} = \overrightarrow{BR}$ entonces $T_{2\overrightarrow{RC}} = T_{2\overrightarrow{BR}}$ o sea $\varphi_C \circ \varphi_R = \varphi_R \circ \varphi_B$ y por ello $\varphi_R = \varphi_C \circ \varphi_R \circ \varphi_B$. (3)

Al reemplazar (2) en (3) se obtiene, $\varphi_R = \varphi_C \circ \varphi_R \circ (\varphi_P \circ \varphi_A \circ \varphi_P)$. (4)

Pero

$$\begin{aligned}
\varphi_R \circ \varphi_G \circ \varphi_R \circ \varphi_G &= \left[\varphi_C \circ \varphi_R \circ (\varphi_P \circ \varphi_A \circ \varphi_P)\right] \circ \varphi_G \circ \varphi_R \circ \varphi_G \\
&= (\varphi_C \circ \varphi_R) \circ (\varphi_P \circ \varphi_A) \circ (\varphi_P \circ \varphi_G) \circ (\varphi_R \circ \varphi_G) \\
&= (\varphi_P \circ \varphi_A) \circ (\varphi_C \circ \varphi_R) \circ (\varphi_R \circ \varphi_G) \circ (\varphi_P \circ \varphi_G) \\
&= \varphi_P \circ \varphi_A \circ \varphi_C \circ (\varphi_R \circ \varphi_R) \circ \varphi_G \circ \varphi_P \circ \varphi_G \\
&= \varphi_P \circ \varphi_A \circ (\varphi_C \circ \varphi_G) \circ \varphi_P \circ \varphi_G \\
&= \varphi_P \circ \varphi_A \circ (\varphi_G \circ \varphi_P \circ \varphi_G \circ \varphi_P) \circ \varphi_P \circ \varphi_G \\
&= \varphi_P \circ \varphi_A \circ \varphi_G \circ \varphi_P \circ (\varphi_G \circ \varphi_P \circ \varphi_P \circ \varphi_G) \\
&= \varphi_P \circ \varphi_A \circ \varphi_G \circ \varphi_P \circ (\varphi_G \circ \varphi_G) \\
&= (\varphi_P \circ \varphi_A) \circ (\varphi_G \circ \varphi_P) \\
&= \varphi_G \circ \varphi_P \circ \varphi_P \circ \varphi_A \\
&= \varphi_G \circ \varphi_A.
\end{aligned}$$

Luego $\varphi_R \circ \varphi_G \circ \varphi_R \circ \varphi_G = \varphi_G \circ \varphi_A$ o sea $T_{2\overrightarrow{GR}} \circ T_{2\overrightarrow{GR}} = T_{2\overrightarrow{AG}}$, es decir $T_{4\overrightarrow{GR}} = T_{2\overrightarrow{AG}}$ y en consecuencia $2\overrightarrow{GR} = \overrightarrow{AG}$ y por lo tanto la mediana $\overline{AR}$ pasa por G y la divide en la razón $\frac{2}{3}$.

Problema 6. Calcular el producto de tres reflexiones en puntos no colineales.

Solución. Sean A, B y C puntos no colineales, $n = \overleftrightarrow{AB}$ y m la paralela a n trazada por C. Sean además, p, q, r rectas perpendiculares a n trazadas por los puntos A, B y C respectivamente y s la recta perpendicular a m en un punto D y tal que $d(p,q) = d(s,r)$ entonces $\varphi_q \circ \varphi_p = \varphi_r \circ \varphi_s$ o sea $\varphi_s = \varphi_r \circ \varphi_q \circ \varphi_p$ y por tanto

$$\varphi_m \circ \varphi_s = \varphi_m \circ \varphi_r \circ \varphi_q \circ \varphi_p = \varphi_m \circ \varphi_r \circ \varphi_q \circ \varphi_n \circ \varphi_n \circ \varphi_p = (\varphi_m \circ \varphi_r) \circ (\varphi_q \circ \varphi_n) \circ (\varphi_n \circ \varphi_p),$$

y como m es perpendicular a s en D, p perpendicular a n en A, q perpendicular a n en B y m a r en C se sigue que:

$\varphi_m \circ \varphi_s = \varphi_D$, $\varphi_n \circ \varphi_p = \varphi_A$, $\varphi_q \circ \varphi_n = \varphi_B$, $\varphi_m \circ \varphi_r = \varphi_C$, y por ello $\varphi_D = \varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$, es decir "El producto $\varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$ de tres reflexiones en puntos no colineales es otra reflexión en un punto D tal que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$."

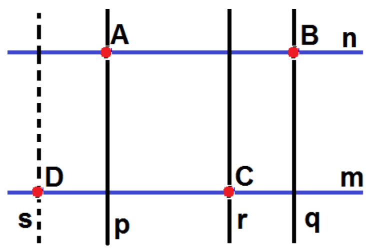


figura 58

Problema 7. Si $CABP$, $ABCM$, $BCAN$ son paralelogramos, entonces ABC es el triángulo medial de PMN.

Definición 27. *El triángulo ABC es el triángulo medial del triángulo PMN si y sólo si A, B y C son los puntos medios de los lados del triángulo PMN.*

Solución. Como $BCAN$ es un paralelogramo entonces $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{NA}$ entonces $T_{2\overrightarrow{BC}} = T_{2\overrightarrow{NA}}$ es decir, $\varphi_C \circ \varphi_B = \varphi_A \circ \varphi_N$. (1)

Como $ABCM$ es un paralelogramo entonces $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AM}$ entonces $T_{2\overrightarrow{BC}} = T_{2\overrightarrow{AM}}$ o sea $\varphi_C \circ \varphi_B = \varphi_M \circ \varphi_A$. (2)

Comparando (1) y (2) se obtiene:

$\varphi_A \circ \varphi_N = \varphi_M \circ \varphi_A$ o sea $T_{2\overrightarrow{NA}} = T_{2\overrightarrow{AM}}$ luego $\overrightarrow{NA} = \overrightarrow{AM}$ y por ello A es el punto medio de $\overline{NM}$. De igual manera se demuestra que B es el punto medio de $\overline{PN}$ y C es el punto medio de $\overline{PM}$ y por tanto $\triangle ABC$ es el triángulo medial del $\triangle MNP$.

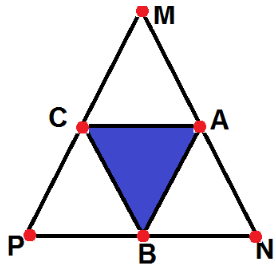


figura 59

Problema 8. Si A, B y C son puntos diferentes demostrar que $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$.

Solución 1.

$\varphi_C \circ \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = (\varphi_C \circ \varphi_A) \circ (\varphi_B \circ \varphi_C) = T_{2\overrightarrow{AC}} \circ T_{2\overrightarrow{CB}} = T_{2\overrightarrow{(AC+CB)}} = T_{2\overrightarrow{AB}} = \varphi_B \circ \varphi_A$ es decir, $\varphi_C \circ \varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_B \circ \varphi_A$.

Solución 2.

$$\begin{aligned}
(\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C)^2 &= (\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C) \circ (\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C)\\
&= (\varphi_A \circ \varphi_B) \circ (\varphi_C \circ \varphi_A) \circ (\varphi_B \circ \varphi_C)\\
&= (\varphi_A \circ \varphi_B) \circ (\varphi_B \circ \varphi_C) \circ (\varphi_C \circ \varphi_A)\\
&= \varphi_A \circ (\varphi_B \circ \varphi_B) \circ (\varphi_C \circ \varphi_C) \circ \varphi_A\\
&= \varphi_A \circ \varphi_A\\
&= I.
\end{aligned}$$

Es decir, $(\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C) \circ (\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C) = I$ y por ello $\varphi_A \circ \varphi_B \circ \varphi_C = \varphi_C \circ \varphi_B \circ \varphi_A$.

Problema 9. Demostrar que si A, B, C, D son cuatro puntos de π tales que $AB = CD$ entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Definición 28. *Dos figuras son congruentes si y sólo si existe una aplicación ortogonal α tal que la imagen bajo α de una de ellas es la otra.*

Solución. Sea m la mediatriz de $\overline{AC}$ entonces $\varphi_m(A) = C$ y $\varphi_m(B) = B'$ y se tiene que:
1). Si $B' = D$ entonces $\varphi_m(\overline{AB}) = \overline{CD}$ y por tanto por definición de congruencia $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

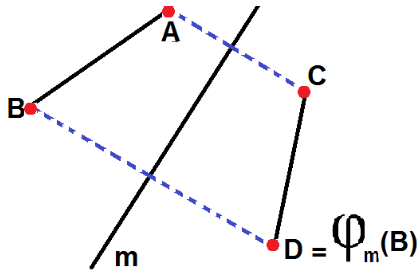


figura 60

2). Si $B' \neq D$ entonces $\varphi_m(\overline{AB}) = \overline{CB'}$ luego $AB = CB' = CD$, entonces el triángulo $B'CD$ es isósceles y en consecuencia, la mediatriz n de $\overline{B'D}$ lleva a B' en D y deja fijo C, es decir $\varphi_n(\overline{CB'}) = \overline{CD}$, luego $(\varphi_n \circ \varphi_m)(\overline{AB}) = \varphi_n(\varphi_m(\overline{AB})) = \varphi_n(\overline{CB'}) = \overline{CD}$ y por la definición de congruencia se concluye que: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

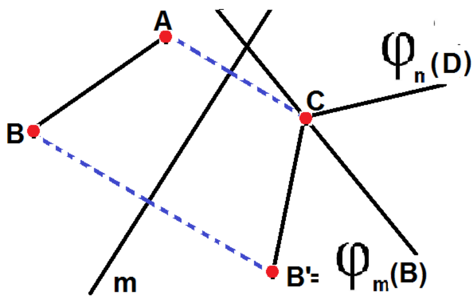


figura 61

Problema 10. Si dos rectas paralelas son cortadas por una transversal entonces los ángulos agudos alternos internos son congruentes.
Solución. Sean m y n rectas paralelas, t la transversal y A, B los puntos de intersección de t con m y n respectivamente.

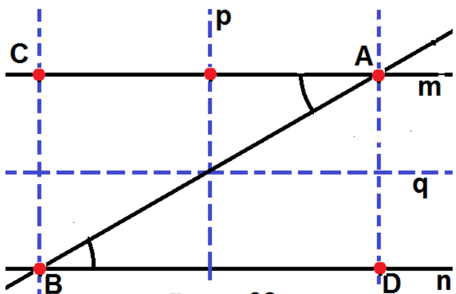


figura 62

Se construyen las perpendiculares $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ a m y n respectivamente, entonces $\overleftrightarrow{BC}$ es perpendicular a n y $\overleftrightarrow{DA}$ es perpendicular a n y por ello el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo, los ángulos CAB y DBA son agudos y alternos internos entre las paralelas m y n.
Sean p y q las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ entonces,

$$(\varphi_p \circ \varphi_q)(C) = \varphi_p(\varphi_q(C)) = \varphi_p(B) = D$$
$$(\varphi_p \circ \varphi_q)(A) = \varphi_p(\varphi_q(A)) = \varphi_p(D) = B$$
$$(\varphi_p \circ \varphi_q)(B) = \varphi_p(\varphi_q(B)) = \varphi_p(C) = A.$$

Luego $(\varphi_p \circ \varphi_q)(\sphericalangle CAB) = \sphericalangle DBA$ y por la definición de congruencia se concluye que

$$\sphericalangle CAB \cong \sphericalangle DBA.$$

Observe que como los ángulos son agudos son congruentes sus suplementos también lo son y si t es perpendicular a m y n entonces los ángulos son rectos y por tanto congruentes y así en todos los casos, los ángulos alternos internos entre paralelas son congruentes.

Capítulo 3

Transformaciones de Semejanza.

Se han estudiado las transformaciones ortogonales del plano las cuales dejan invariante la forma y el tamaño de las figuras; se consideran ahora las transformaciones del plano que dejan invariante la forma, con ello se obtiene el conjunto de las semejanzas del plano el cual mostraremos que también forma un grupo de transformaciones con el producto usual de aplicaciones. Como se verá, las semejanzas disminuyen o aumentan las longitudes de lados de lados en un mismo factor pero dejan inalterada la forma.
La Geometría Elemental estudia aquellas propiedades da las figuras que son invariantes bajo las transformaciones ortogonales y también aquellas propiedades que se conservan bajo las transformaciones de semejanza. Por ejemplo, propiedades como el área y la longitud de los lados de un triángulo son invariantes bajo las transformaciones ortogonales pero en general no lo son bajo las transformaciones de semejanza; pero propiedades como la congruencia de ángulos, la interestancia, la posición del baricentro son invariantes bajo este tipo de transformaciones.
En este capítulo se estudia el concepto de transformación de semejanza, algunas de sus propiedades, el grupo de semejanzas del plano, la forma de expresar una semejanza como producto de homotecias e isometrías y por último la representación analítica de cada una de las semejanzas.

3.1. Aplicaciones de Semejanza.

Definición 29. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación y k un número real positivo. α es una aplicación se* **semejanza** *de coeficiente k si y sólo si para cada par de puntos A, B en π se tiene que $kAB = \alpha(A)\alpha(B) = A'B'$.*
Si $k = 1$, α es una transformación ortogonal y recíprocamente toda aplicación ortogonal es una aplicación se semejanza de coeficiente 1.

A continuación se estudian algunos de los invariantes bajo una transformación de semejanza.

Teorema 27. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación se semejanza de coeficiente $k > 0$, entonces:*
1). α preserva colinealidad e interestancia.
2). α es inyectiva.
3). α preserva rectas.
4). α preserva ángulos y su medida.
5). α es sobreyectiva.

Demostración. 1). Sean A, B, C en π tales que $A - B - C$ entonces $AC = AB + BC$ y puesto que α es una aplicación de semejanza de coeficiente k, entonces

$$A'C' = kAC = k(AB + BC) = kAB + kBC = A'B' + B'C',$$

y por tanto $A' - B' - C'$.
2). Sean A, B en π, $A \neq B$ entonces $AB > 0$ y como $k > 0$ entonces $kAB > 0$, pero $kAB = A'B'$ lo que implica $A'B' > 0$ y por tanto $A' \neq B'$, es decir α es inyectiva.
3). Sean A, B en π, $A \neq B$ y $l = \overleftrightarrow{AB}$ como α es inyectiva, $\alpha(A) = A' \neq B' = \alpha(B)$, sea $l' = \overleftrightarrow{A'B'}$ entonces:
a). Sea C en l tal que $A - C - B$ entonces $A' - \alpha(C) - B'$ o sea $\alpha(C) \in l' = \overleftrightarrow{A'B'}$ y esto significa que $\alpha(l) \subseteq l'$.
b). Sea C' en l' tal que $A' - C' - B'$ y sea C en l de modo que $A - C - B$ y $AC = \frac{1}{k}A'C'$, entonces se tiene que $\alpha(A)\alpha(C) = kAC = k\left(\frac{1}{k}A'C'\right) = A'C'$ y como $\alpha(A) = A'$ se sigue que $\alpha(C) = C'$ ya que si $\alpha(C) = D' \neq C'$ se tendrían dos puntos diferentes C' y D' del mismo lado de A' y colineales con él y tales que $A'C' = A'D'$ (Absurdo), luego $C' \in \alpha(l)$ y así $l' \subseteq \alpha(l)$.
De las partes a). y b). se concluye que $\alpha(l) = l'$.
Esta parte del teorema muestra que toda aplicación se semejanza induce una aplicación biyectiva de una recta l en π sobre una recta l' en π'.
4). Sean $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ dos rayos de π que se intersecan en un punto O, A y B sobre $\overrightarrow{a}$ y $\overrightarrow{b}$ respectivamente; entonces $\alpha\left(\overrightarrow{a}\right)$ y $\alpha\left(\overrightarrow{a}\right)$ se intersecan en $\alpha\left(O\right) = O'$ y $\alpha(A)$, $\alpha(B)$ están sobre $\alpha\left(\overrightarrow{a}\right)$ y $\alpha\left(\overrightarrow{b}\right)$ respectivamente.
Como α es una semejanza de coeficientes $k > 0$ se tiene que $\alpha(A)\alpha(B) = kAB$, $\alpha(A)\alpha(O) = kAO$ y $\alpha(O)\alpha(B) = kOB$ luego por criterio de semejanza $L - L - L$ se tiene que los triángulos $\triangle AOB$ y $\triangle \alpha(A)\alpha(O)\alpha(B)$ son semejantes y por tanto $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle \alpha(A)\alpha(O)\alpha(B)$.
5). Cada M' en π' posee al menos una imagen inversa en π.
Sean A, B en π, $A \neq B$ y $l = \overleftrightarrow{AB}$ entonces $\alpha(l) = \overleftrightarrow{A'B'} = l'$ en π', entonces:

a). Si M' está en l' por 3). existe M en l tal que $\alpha(M) = M'$ y en consecuencia α es sobreyectiva.
b). Si M' no esta en l', sea entonces m' la perpendicular a l' que pasa por M' entonces m' interseca a l' en un punto Q', luego por la parte a). existe Q en l tal que $\alpha(Q) = Q'$, se traza por Q la recta m perpendicular a l.
Sean M_1 y M_2 en m tales que $M_1 - Q - M_2$ y $kM_1Q = M'Q'$, $kM_2Q = M'Q'$. Como $A \neq B$ entonces $A \neq Q$ o $B \neq Q$. Suponga que $A \neq Q$, entonces como α es una transformación de semejanza con $k > 0$ se tiene que α preserva ángulos y por ello $\sphericalangle AQM_1 \cong \sphericalangle \alpha(A)Q'\alpha(M_1)$ y $\sphericalangle AQM_2 \cong \sphericalangle \alpha(A)Q'\alpha(M_2)$.

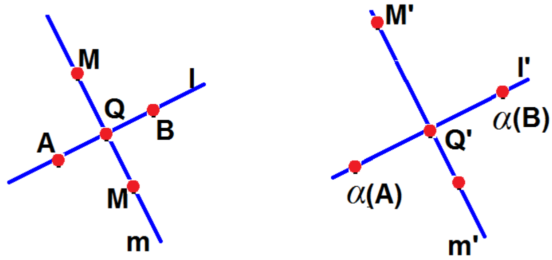


figura 63

En consecuencia, los ángulos $\sphericalangle \alpha(A)Q'\alpha(M_1)$ y $\sphericalangle \alpha(A)Q'\alpha(M_2)$ son rectos y por ello $\alpha(\overleftrightarrow{M_1M_2})$ es una recta perpendicular e l' en Q' luego $\alpha(\overleftrightarrow{M_1M_2}) = m'$ y como $M_1 - Q - M_2$ entonces $\alpha(M_1) - Q' - \alpha(M_2)$ y $kM_1Q = \alpha(M_1)Q'$, $kM_2Q = \alpha(M_2)Q'$ por lo tanto se tiene que

$$\alpha(M_1)Q' = M'Q' \text{ y } \alpha(M_2)Q' = M'Q',$$

y como M', $\alpha(M_1)$ y $\alpha(M_2)$ son colineales se concluye que $\alpha(M_1) = M'$ o $\alpha(M_2) = M'$, es decir α es sobreyectiva. $\square$

Teorema 28. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una semejanza de coeficiente $k > 0$, entonces:*
1). Bajo α las imágenes de dos rectas paralelas son dos rectas paralelas.
2). Bajo α la razón de las longitudes de cualquier par de segmentos es igual a la razón de las longitudes de sus imágenes.
3). Bajo α la imagen de una circunferencia es una circunferencia.

Demostración. 1). Sean l y m dos rectas paralelas en π entonces $\alpha(l)$ y $\alpha(m)$ son rectas en π'. Suponga que $\alpha(l)$ no es paralela con $\alpha(m)$ y sea M' su punto de intersección, entonces como α es inyectiva, M' posee una única imagen inversa M en l y m y siendo así l y m se intersecan en M (absurdo), luego $\alpha(l)$ es paralela a $\alpha(m)$.
2). Sean $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dos segmentos en π y $\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$ las respectivas imágenes bajo α en π'. (La imagen de un segmento es un segmento bajo una transformación de semejanza ya que respeta

la colinealidad y la interestancia) entonces $kAB = A'B'$ y $kCD = C'D'$ luego $\frac{A'B'}{AB} = \frac{C'D'}{CD}$, es decir, $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.
3). Sea S una circunferencia de centro en O y radio r y A un punto sobre S, si se llama O' y A' las imágenes de O y A bajo α entonces $kOA = O'A'$ y como $OA = r$ entonces $O'A' = kr$ y por lo tanto se puede construir una circunferencia S' de centro en O' y radio kr.
a). Sea X un punto cualquiera de S y X' su imagen bajo α entonces $kOX = O'X' = kr$ y por esto X' está en S', es decir, $\alpha(S) \subseteq S'$.
b). Sea Y' un punto de S' y se traza por O un diámetro de S paralelo a $\overleftrightarrow{O'Y'}$, entonces este diámetro interseca a S en dos puntos Y_1 y Y_2 y como $O'Y' = r' = kr = kOY_1 = kOY_2$ y α es inyectiva y la paralela por un punto a una recta dada es única se tiene que $\alpha(Y_1) = Y'$ o $\alpha(Y_2) = Y'$ o sea que Y' está en $\alpha(S)$ y así $S' \subseteq \alpha(S)$.
De las partes a). y b). se concluye que $\alpha(S) = S'$. □

Teorema 29. *1). Si $\alpha : \pi \to \pi'$ es una semejanza de coeficiente $k > 0$ entonces α^{-1} es una semejanza de coeficiente $\frac{1}{k}$.*
2). Si $\alpha : \pi \to \pi'$ y $\beta : \pi' \to \pi''$ son semejanzas de coeficientes k y t respectivamente, entonces $\beta \circ \alpha : \pi \to \pi''$ es una semejanza de coeficiente $k.t$

Demostración. 1). Si $\alpha : \pi \to \pi'$ es una semejanza de coeficiente $k > 0$ en particular α es biyectiva y por lo tanto existe la función inversa $\alpha^{-1} : \pi' \to \pi$ la cual es biyectiva.
Sean A', B' en π' y A, B sus respectivas imágenes bajo α^{-1} entonces $\alpha^{-1}(A') = A$ y $\alpha^{-1}(B') = B$ y por ello $\alpha(A) = A'$ y $\alpha(B) = B'$ y como α es una semejanza de coeficiente $k > 0$, se tiene $kAB = A'B'$ o sea $AB = \frac{1}{k}A'B'$, es decir $\frac{1}{k}A'B' = \alpha^{-1}(A')\alpha^{-1}(B')$ y en consecuencia α^{-1} es una semejanza de coeficiente $\frac{1}{k}$.
2). Al ser $\alpha : \pi \to \pi'$ y $\beta : \pi' \to \pi''$ semejanzas de coeficiente k y t respectivamente se tiene que si A, B están en π y A', B' son sus respectivas imágenes bajo α entonces: $kAB = A'B' = \alpha(A)\alpha(B)$ y si A'' y B'' son las imágenes bajo β de A' y B' entonces: $tA'B' = A''B'' = \beta(A')\beta(B')$ por lo que:

$$(\beta \circ \alpha)(A)(\beta \circ \alpha)(B) = \beta(\alpha(A))\beta(\alpha(B)) = \beta(A')\beta(B') = A''B'' = tA'B' = t(kAB) = (t.k)AB,$$

y así $\beta \circ \alpha$ es una semejanza de coeficiente $k.t$ □

Definición 30. *Una semejanza $\alpha : \pi \to \pi$ se llama una transformación de semejanza de π. Con $S(\pi)$ se denota el conjunto de las transformaciones de semejanza del plano π.*

Teorema 30. *$\big(S(\pi), \circ\big)$ es un grupo. Se denomina* **Grupo de Semejanzas** *del plano π.*

Demostración. Es una consecuencia directa del teorema 29 en el que $\pi = \pi' = \pi''$. □

Teorema 31. $\big(O(\pi), \circ\big)$ *es un subgrupo normal de* $\big(S(\pi), \circ\big)$.

Demostración. $\big(O(\pi), \circ\big)$ y $\big(S(\pi), \circ\big)$ son grupos y es claro que una transformación ortogonal es un caso especial de semejanza en el cual el coeficiente es $k = 1$ por lo que $O(\pi) \subseteq S(\pi)$, de modo que $\big(O(\pi), \circ\big)$ es subgrupo de $\big(S(\pi), \circ\big)$.
El subgrupo $\big(O(\pi), \circ\big)$ es normal a $\big(S(\pi), \circ\big)$ si y solo si para cada α en $S(\pi)$, y para cada $\beta \in O(\pi)$ se tiene que $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ está en $O(\pi)$.
Sean α en $S(\pi)$ y β en $O(\pi)$ entonces α es una semejanza de coeficiente k y β es una transformación ortogonal, por tanto y por el teorema 29, $\alpha \circ \beta$ es una semejanza de coeficiente k,$1 = k$ y α^{-1} es una semejanza de coeficiente $\frac{1}{k}$ y aplicando el mismo teorema se encuentra que $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ es una semejanza de coeficiente $k.\frac{1}{k} = 1$, es decir $\alpha \circ \beta \circ \alpha^{-1}$ es una transformación ortogonal. □

3.2. Transformaciones de Semejanza Fundametales.

3.2.1. Homotecia

Definición 31. *Sea O un punto fijo del plano π y $k \in \mathbb{R}^+$, la aplicación $\lambda : \pi \to \pi$ tal que $\lambda(O) = O$ y $\lambda(A) = A'$ si y sólo si $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $kOA = OA'$ se llama* ***Homotecia del Plano*** *de centro O y coeficiente k.*

Teorema 32. *Una homotecia λ del plano es una Transformación de Semejanza.*

Demostración. Sea $\lambda : \pi \to \pi$ una homotecia de centro en O y coeficiente k, $k \in \mathbb{R}^+$ y sean A, B en π y A', B' sus respectivas imágenes bajo λ entonces $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $kOA = OA'$ y $B' \in \overrightarrow{OB}$ y $kOB = OB'$, entonces:
a). Si $A - O - B$ se tiene que $A' - O' - B'$, luego

$$A'B' = A'O + OB' = kAO + kOB = k(AO + OB) = kAB.$$

b). Si $A - O - B$ se tiene que $O - A' - B'$ y así

$$A'B' = |OB' - OA'| = |kOB - kOA| = k|OB - OA| = kAB.$$

c). Si O, A y B son no colineales entonces O, A' y B' son no colineales y como $kOA = OA'$, $kOB = OB'$ y $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'OB'$ entonces por el criterio $L - A - L$ los triángulos AOB y $A'OB'$ son semejantes y por tanto $kAB = A'B'$.
De las partes a)., b). y c). se concluye que λ es una transformación de semejanza. □

Teorema 33. *Sea $H(\pi)$ el conjunto de todas las homotecias de centro O y de coeficientes en $\mathbb{R}^+$, entonces $\big(H(\pi),\circ\big)$ es un grupo de transformaciones.*

Demostración. a). Para cada α,β en $H(\pi)$, $\beta\circ\alpha$ está en $H(\pi)$.
Sean α y β homotecias de centro en O y coeficientes k y t respectivamente y sea X un punto cualquiera del plano, entonces:
$\big(\beta\circ\alpha\big)(X)=\beta\big(\alpha(X)\big)=\beta(X')=X''$ donde $X'\in\overrightarrow{OX}$, $kOX=OX'$, $X''\in\overrightarrow{OX'}$ y $tOX'=OX''$, luego $OX''=tOX'=t(kOX)=(tk)OX$, $X''\in\overrightarrow{OX}$ y $\big(\beta\circ\alpha\big)(O)=O$.
Ahora bien, si λ es una homotecia de centro en O y coeficiente kt, como $OX''=(kt)OX$ y $X''\in\overrightarrow{OX}$ se sigue que $\lambda(X)=X''$ y por tanto $\big(\beta\circ\alpha\big)(X)=\lambda(X)$ para todo X en π, luego $\beta\circ\alpha=\lambda\in H$.
b). Para cada λ en $H(\pi)$ su inversa λ^{-1} está en $H(\pi)$.
Sea λ una homotecia de centro en O y coeficiente k en $\mathbb{R}^+$, α la homotecia de centro en O y coeficiente $\frac{1}{k}$ y X un punto del plano, entonces:
$\lambda(X)=X'$ si y sólo si $X'\in\overrightarrow{OX}$ y $kOX=OX'$ y $\alpha(X')=X''$ si y sólo si $X''\in\overrightarrow{OX'}$ y $\frac{1}{k}OX'=OX''$, por tanto: $OX=\frac{1}{k}OX'=OX''$ y como O,X' y X'' son colineales, con X'' y X del mismo lado O, entonces $X=X''$ es decir $\big(\alpha\circ\lambda\big)(X)=I(X)=X$, para todo X en π y en consecuencia $\lambda^{-1}=\alpha\in H$.
De las partes a). y b). se concluye que $\big(H(\pi),\circ\big)$ es un grupo. $\square$

Nótese que como la transformación identidad es una semejanza de coeficiente 1, también puede ser considerada como una homotecia de coeficiente 1 con centro en cualquier punto del plano.
A continuación se demuestra el teorema análogo para las transformaciones ortogonales que asegura que toda transformación de semejanza queda determinada por las imágenes de tres puntos no colineales cualesquiera.

Teorema 34. ***(Teorema de los tres puntos)***. *Sean A,B, y C tres puntos no colineales en π y sean A',B' y C' tres puntos en π' tales que $kAB=A'B'$, $kAC=A'C'$ y $kBC=B'C'$, $k\in\mathbb{R}^+$, entonces existe una única aplicación de semejanza de coeficiente k tal que las imágenes de A,B y C son A',B' y C' respectivamente.*

Demostración. Sean B_1',C_1' sobre los rayos $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{A'C'}$ tales que $AB=A'B_1'$ y $AC=A'C_1'$. Como $\triangle ABC\sim\triangle A'B'C'$ se sigue que $\sphericalangle BAC\cong\sphericalangle B'A'C'\cong\sphericalangle B_1A'C_1$, luego por criterio $L-A-L$ se tiene que $\triangle ABC\cong\triangle A_1'B_1'C_1'$ y de acuerdo con el teorema de los tres puntos para aplicaciones ortogonales existe una única aplicación ortogonal β tal que $\beta(A)=A'$, $\beta(B)=B_1'$ y $\beta(C)=C_1'$.
Sea $\lambda:\pi'\to\pi'$ la homotecia de centro en A' y coeficiente k entonces $\lambda(A')=A'$, $\lambda(B_1)=B'$,

$\lambda(C_1) = C'$ y considerando $\alpha = \lambda \circ \beta$ se aplica el teorema 27 de esta sección para concluir que α es una semejanza de coeficiente $1.k = k$ que lleva A en A', B en B', C en C'.
Sea $\delta : \pi \to \pi'$ otra semejanza de coeficiente k que lleva A, B, C en A', B' y C' respectivamente, entonces $\delta^{-1} \circ \alpha$ es una transformación ortogonal que deja fijos A, B y C, por lo tanto $\delta^{-1} \circ \alpha = I$, o sea $\delta = \alpha$. □

Dado que una transformación de semejanza envía rectas en rectas, puntos no colineales en puntos no colineales, preserva la orientación, la relación de "estar entre" y respeta las posiciones relativas de puntos respecto de rectas, en particular preserva la orientación de cada triángulo, es decir cada triángulo del plano tiene la misma orientación que su imagen o invierte la orientación de cada triángulo, es posible hablar, como en el caso de las transformaciones ortogonales, de transformaciones de semejanza de primera o segunda clase y en consecuencia se puede deducir el teorema análogo, al de transformaciones ortogonales, de que una transformación de semejanza queda determinada si se conoce su orientación y las imágenes de dos puntos diferentes.

Teorema 35. ***De los puntos y la orientación***. *Sean A, B, A', B' puntos de π tales que $A \neq B$ y $A' \neq B'$ entonces existe una única semejanza directa y una única semejanza opuesta tales que las imágenes de A y B son A' y B' respectivamente.*

Demostración. Como $A \neq B$ y $A' \neq B'$ entonces $AB > 0$ y $A'B' > 0$ y por esto existe $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $kAB = A'B'$. Sea C un punto fuera de $\overleftrightarrow{AB}$ y sean C' y C'' en lados opuestos de $\overleftrightarrow{A'B'}$ tales que el triángulo ABC sea semejante con los triángulos $A'B'C'$ y $A'B'C''$ entonces, por el teorema de los tres puntos para semejanzas existe una única semejanza α tal que $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$ y $\alpha(C) = C'$ y una única semejanza β tal que $\beta(A) = A'$, $\beta(B) = B'$ y $\beta(C) = C''$. Como C' y C'' están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{A'B'}$ se tiene que los triángulos $A'B'C'$ y $A'B'C''$ tiene orientación opuesta y uno de ellos tiene la misma orientación que el triángulo ABC, en consecuencia, una de las dos, α o β es directa y la otra es opuesta. □

Teorema 36. *Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una semejanza de coeficiente $k \neq 1$, entonces α es una homotecia si y sólo si la imagen bajo α de una recta es ella misma o una recta paralela a ella.*

Demostración. En un sentido consideremos la homotecia α de centro en O y coeficiente k y l una recta en π entonces:
a). Si l pasa por O, y llamamos $l = \overleftrightarrow{OA}$ con $O \neq A$ entonces $\alpha(l) = \overleftrightarrow{\alpha(O)\alpha(A)}$ y como $\alpha(O) = O$ y $\alpha(A) = A'$ si y sólo si $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $kOA = OA'$ se sigue que O y A' están en $\overleftrightarrow{OA} = l$, en consecuencia $\alpha(l) = l$.
b). Si l no pasa por O, sea $l = \overleftrightarrow{AB}$, $A \neq O$, $B \neq O$, entonces $\alpha(A) = A'$ si y sólo si $A' \in \overrightarrow{OA}$ y

$kOA = OA'$ y $\alpha(B) = B'$ si y sólo si $B' \in \overrightarrow{OB}$ y $kOB = OB'$ por tanto $\overline{AB}$ determina segmentos proporcionales sobre los lados del triángulo $OA'B'$ y por el recíproco del teorema de Thales se concluye que $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela con $\overleftrightarrow{A'B'} = \alpha(l)$.

En el otro sentido, supongamos que bajo α la imagen de cada recta es ella misma y sea X un punto de π y l,m dos rectas diferentes que pasan por X, entonces $\alpha(X)$ está en $\alpha(l)$ y $\alpha(m)$ pero $\alpha(l) = l$ y $\alpha(m) = m$ y $l \neq m$ entonces $\alpha(X) = X$ y siendo así α es la transformación identidad (absurdo) y por tanto existe una recta l en π tal que su imagen bajo α no es ella misma, entonces $\alpha(l) = l'$ es una recta paralela a l.

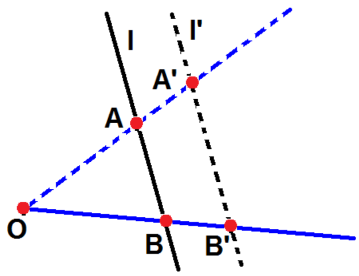


figura 64

Sean A, B en l y $A' = \alpha(A)$, $B' = \alpha(B)$ en l', como $\overleftrightarrow{AB}$ es una paralela con $\overleftrightarrow{A'B'}$ pero las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ son diferentes entonces el cuadrilátero $ABB'A'$ no es un paralelogramo y por ello las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{BB'}$ no son paralelas, sea O su punto de corte.

Puesto que $\alpha\big(\overleftrightarrow{OA}\big)$ es una recta paralela a ella que pasa por A' se sigue que $\alpha\big(\overleftrightarrow{OA}\big) = \overleftrightarrow{OA}$ y análogamente $\alpha\big(\overleftrightarrow{OB}\big) = \overleftrightarrow{OB}$ de donde O es un punto fijo de α y como por el teorema de Thales los triángulos AOB y $A'OB'$ son semejantes entonces $kOA = OA'$, $A' \in \overrightarrow{OA}$, $kOB = OB'$, $B' \in \overleftrightarrow{OB}$. Sea λ la homotecia de centro en O y coeficiente k entonces α y λ tiene el mismo efecto sobre los puntos no colineales O, A y B y por el teorema de los tres puntos para semejanzas $\alpha = \lambda$. $\square$

Observe que el teorema anterior caracteriza una homotecia por su comportamiento sobre una recta y que hasta el momento se han tratado semejanzas directas y opuestas pero no se han mostrados casos concretos de ellas, los siguientes resultados muestran la existencia de ambos tipos de transformaciones de semejanza.

Teorema 37. *1). Una homotecia del plano λ de centro O y coeficiente $k > 0$ es una semejanza directa.*

2).-Sea λ una homotecia del plano de centro en O y coeficiente $k \in \mathbb{R}^+$ y φ_l una reflexión en una recta que pasa por O, entonces $\lambda \circ \varphi_l$ y $\varphi_l \circ \lambda$ son semejanzas opuestas y además $\lambda \circ \varphi_l = \varphi_l \circ \lambda$.

Demostración. Sean A, B puntos de π no colineales con O entonces, $\lambda(A) = A'$ y $\lambda(B) = B'$ son no colineales con O y por tanto la imagen bajo λ del triángulo AOB es el triángulo $A'OB'$.

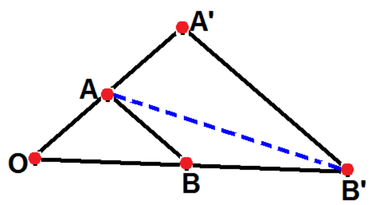


figura 65

Como en la cadena $AOB - AOB' - A'OB'$ hay cero parejas de triángulos consecutivos adyacentes antiorientados se sigue que el triángulo AOB y su imagen bajo λ, el triángulo $A'OB'$ tiene la misma orientación y por tanto λ es directa.

a). $\lambda \circ \varphi_l$ es opuesta. Sea A en l, $A \neq O$ y un punto B fuera de l, entonces:

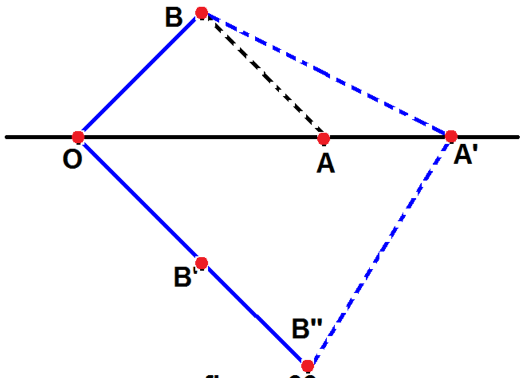


figura 66

$\varphi_l(O) = O$ y $\lambda(O) = O$, $\varphi_l(A) = A$ y $\lambda(A) = A'$ si y sólo si $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $kOA = OA'$, $\varphi_l(B) = B'$ si y sólo si l es la mediatriz de $\overline{BB'}$ y $\lambda(B') = B''$ si y sólo si $B'' \in \overrightarrow{OB'}$ y $kOB' = OB''$, luego $(\lambda \circ \varphi_l)(O) = O$, $(\lambda \circ \varphi_l)(A) = A'$ y $(\lambda \circ \varphi_l)(B) = B''$ por lo tanto, la imagen bajo $\lambda \circ \varphi_l$ del triángulo AOB es el triángulo $A'OB''$.

Como en la cadena $AOB - A'OB - A'OB''$ hay una pareja de triángulos adyacentes antiorientados, se sigue que el triángulo AOB y su imagen bajo $\lambda \circ \varphi_l$, el triángulo $A'OB''$ tienen orientación opuesta y en consecuencia la semejanza $\lambda \circ \varphi_l$, es una transformación opuesta. Análogamente $\varphi_l \circ \lambda$ es opuesto.

Mostramos ahora que $\lambda \circ \varphi_l = \varphi_l \circ \lambda$. Sea A en l, $A \neq O$, entonces, $(\lambda \circ \varphi_l)(O) = O$ y $(\varphi_l \circ \lambda)(O) = O$ ya que O está en l y O es el centro de λ, $\left(\varphi_l \circ \lambda\right)(A) = \varphi_l(\lambda(A)) = \varphi_l(A') = A'$ ya que $A' \in \overrightarrow{OA}$ y $kOA = OA'$ y por esto A' está en l y $\left(\lambda \circ \varphi_l\right)(A) = \lambda(\varphi_l(A)) = \lambda(A) = A'$ ya que A está en l. Es decir las transformaciones $\lambda \circ \varphi_l$ y $\varphi_l \circ \lambda$ tiene las mismas imágenes sobre

O y A como ambas son opuestas se sigue por el teorema los dos puntos y la orientación para semejanzas que $\lambda \circ \varphi_l = \varphi_l \circ \lambda$. □

Teorema 38. *1).-Si λ es una homotecia de centro O y coeficiente k y φ_O es la reflexión en O entonces $\lambda \circ \varphi_o$ y $\varphi_o \circ \lambda$ son directas y además $\lambda \circ \varphi_o = \varphi_o \circ \lambda$.*
2).- Si λ es una homotecia de centro O y coeficiente k y ρ_θ es la rotación de centro O en un ángulo orientado de medida θ entonces $\lambda \circ \rho_\theta$ y $\rho_\theta \circ \lambda$ son directas y $\lambda \circ \rho_\theta = \rho_\theta \circ \lambda$.

La demostración es análoga a la del teorema anterior y se propone como un ejercicio.
En la definición de homotecia se consideraron coeficientes positivos, al aceptar coeficientes negativos $(-k, k > 0)$ para las homotecias se tiene que cada punto A del plano es llevado a un punto A' de la recta $\overleftrightarrow{OA}$ del lado de O en que no está A y tal que $kOA = OA'$; utilizando la intuición podemos afirmar que una homotecia de coeficiente negativo $-k$ y de centro en O se interpreta como el producto en cualquier orden entre una homotecia de centro en O y coeficiente $|k|$ y una reflexión de centro en O. Con ello se deduce que el conjunto de todas las homotecias de centro O y coeficiente en $\mathbb{R}$ es un grupo conmutativo, del cual el de las homotecias con coeficientes positivos es un subgrupo. En lo que resta de este capítulo se referirá como homotecia tan solo a las de coeficiente positivos, excepto en la sección de problemas resueltos.

3.2.2. Representación de una Transformación de Semejanza como el Producto de una Homotecia y una Transformación Ortogonal.

Teorema 39. *Una transformación de semejanza α de coeficiente $k \neq 1$ puede expresarse como el producto de una homotecia de coeficiente k y centro en un punto dado O y una transformación ortogonal.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una transformación de semejanza de coeficiente $k \neq 1$ y $\lambda : \pi \to \pi$ una homotecia de centro O y coeficiente k, entonces $\alpha \circ \lambda^{-1}$ es una semejanza de coeficiente 1 y por ello $\alpha \circ \lambda^{-1}$ es una transformación ortogonal β. Si se llama $\beta = \alpha \circ \lambda^{-1}$ entonces $\alpha = \beta \circ \lambda$. Observe que λ y β están unívocamente determinadas por α y el centro O con la condición de que β sea una transformación ortogonal ya que si tuviera que $\alpha = \beta \circ \lambda = \beta_1 \circ \lambda_1$ donde, λ_1 es una homotecia de centro en O y β_1 una transformación ortogonal, entonces $\beta_1^{-1} \circ \beta = \lambda^{-1} \circ \lambda_1$ y como $\beta_1^{-1} \circ \beta$ es una transformación ortogonal y como semejanza tiene coeficiente 1, se sigue que $\lambda^{-1} \circ \lambda_1$ es una homotecia de centro en O y coeficiente 1, y por tanto λ_1 es una homotecia de coeficiente k, luego $\lambda = \lambda_1$ y dado que $\beta \circ \lambda = \beta_1 \circ \lambda_1$, se deduce de acuerdo con la propiedad cancelativa que $\beta = \beta_1$. □

Teorema 40. *Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una semejanza directa de coeficiente $k \neq 1$, entonces α puede expresarse de manera única como el producto de una rotación de ρ_θ con el centro en O y de una homotecia λ de coeficiente k y centro en el centro de rotación.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una semejanza directa de coeficiente $k \neq 1$, y sean A, B, C en π, $A \neq B$ tales que $\alpha(A) = B$ y $\alpha(B) = C$ entonces $kAB = BC$ y debemos considerar los siguientes casos:

a). A, B y C colineales con B entre A y C. entonces:

i). Si $k > 1$, sea $r = \frac{AB}{k-1}$ y O del lado de A en que no está B, sobre $\overleftrightarrow{AB}$ y tal que $OA = r$, entonces:

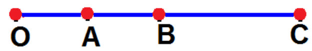


figura 67

$$OB = OA + AB = OA + (k-1)OA = kOA \quad \text{y} \quad OC = OB + BC = kOA + kAB = k(OA + AB) = kOB.$$

ii). $k < 1$, sea $r = \frac{AB}{1-k}$ y O en $\overleftrightarrow{AB}$ del lado de B en que no está A tal que $r = OA$, entonces:

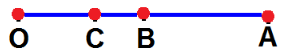


figura 68

$$OB = OA - AB = OA - (1-k)OA = kOA$$

y como

$$OB = kOA = k(OB + AB) = kOB + kAB = kOB + BC,$$

entonces $OB > BC$ y por tanto C está entre O y B, luego

$$OC = OB - BC = kOA - kAB = k(OA - AB) = kOB.$$

Sea λ la homotecia de centro en O y coeficiente k y ρ_θ la rotación de centro en O y $\theta = 0$ Rad entonces,

$$\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(A) = \lambda\big(\rho_\theta(A)\big) = \lambda\big(A\big) = B \text{ porque } B \in \overrightarrow{OA} \text{ y } kOA = OB.$$
$$\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(B) = \lambda\big(\rho_\theta(B)\big) = \lambda\big(B\big) = C \text{ porque } C \in \overrightarrow{OB} \text{ y } kOB = OC,$$

en consecuencia $\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(A) = \alpha(A)$, $\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(B) = \alpha(B)$ y como ambas son directas se sigue aplicando el teorema de los dos puntos y la orientación para semejanza $\alpha = \lambda \circ \rho_\theta$.

b). A, B y C colineales pero B no está entre A y C entonces A está entre B y C.

y se tiene:

i. Si $k > 1$, sea $r = \frac{AB}{k+1}$ y O en $\overleftrightarrow{AB}$ entre A y B tal que $OA = r$, entonces:

$OB = AB - OA = (k+1)OA - OA = kOA$ y $OC = BC - OB = kAB - kOA = k(AB - OA) = kOB$

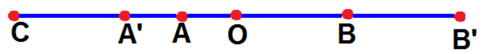


figura 69

Sea λ la homotecia de centro O y la rotación ρ_θ de centro O y $\theta = \pi$ Rad, entonces:

$$\begin{aligned}(\rho_\theta \circ \lambda)(A) &= \rho_\theta(\lambda(A)) = \rho_\theta(A') \text{ donde } A' \in \overrightarrow{OA} \text{ y } kOA = OA' \\ &= B \text{ ya que } A' \text{ y } B \text{ están en los lados opuestos de } O \text{ y además } OB = kOA = OA'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\rho_\theta \circ \lambda)(B) &= \rho_\theta(\lambda(B)) = \rho_\theta(B') \text{ donde } B' \in \overrightarrow{OB} \text{ y } kOB = OB' \\ &= C \text{ ya que } B' \text{ y } C \text{ están en los lados opuestos de } O \text{ y además } OC = kOB = OB'.\end{aligned}$$

Por lo tanto $(\rho_\theta \circ \lambda)(A) = \alpha(A)$ y $(\rho_\theta \circ \lambda)(B) = \alpha(B)$ y como ambas son directas se sigue, por la aplicación de teorema de los dos puntos y la orientación para semejanzas que $\rho_\theta \circ \lambda = \alpha$.

ii). Si $k < 1$, se considera α^{-1}, entonces α^{-1} lleva C en B y B en A y como A, B y C son colineales y B no está entre A y C y el coeficiente de α^{-1}, es $\frac{1}{k} > 1$, estamos en el caso anterior, por lo tanto $\alpha^{-1} = \lambda \circ \rho_\theta$ donde λ es una homotecia de centro O y coeficiente $\frac{1}{k} > 1$ y ρ_θ es rotación de centro O y $\theta = \pi$ Rad, luego $\alpha = (\lambda \circ \rho_\theta)^{-1} = \rho_\theta \circ \lambda^{-1}$ con λ^{-1} una homotecia de centro en O y coeficiente k y ρ_θ es una rotación de centro en O y $\theta = \pi$ Rad.

c). A, B y C son no colineales.

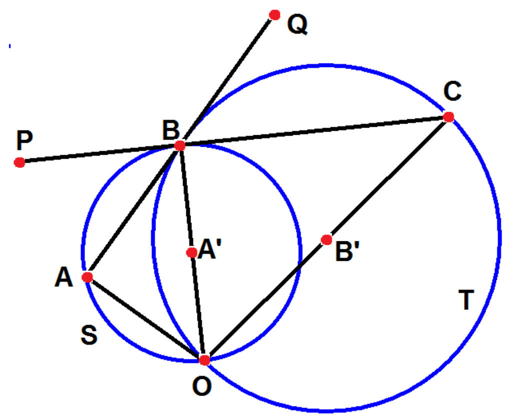


figura 70

Sea S la circunferencia que pasa por A y B tangente a $\overleftrightarrow{BC}$ en B y T la circunferencia que pasa por B y C tangente a $\overleftrightarrow{AB}$ en B, entonces S y T se intersecan en dos puntos uno de los cuales B y el otro se denota con O.

Sean P y Q dos puntos tales que $P - B - C$ y $A - B - Q$ entonces $\sphericalangle PBA \cong \sphericalangle QBC$ por opuestos por el vértice, $\sphericalangle PBA \cong \sphericalangle AOB$ y $\sphericalangle BOC \cong \sphericalangle QBC$ por subtender el mismo arco, entonces por transitividad se tiene $\sphericalangle BOC \cong \sphericalangle AOB$ y como $\sphericalangle ABO \cong \sphericalangle BCO$ por subtender el mismo arco que sigue que $\sphericalangle ABO \cong \sphericalangle BCO$ por lo tanto $\triangle ABO$ es semejante con $\triangle BCO$ con factor de semejanza k ya que $kAB = BC$ por lo tanto $kOA = OB$ y $kOB = OC$.
Sea ρ_θ la rotación de centro O en un ángulo de medida $\theta = m\big(A\widehat{O}B\big) = m\big(B\widehat{O}C\big)$ entonces $\rho_\theta(\overrightarrow{OA}) = \overrightarrow{OB}$ y $\rho_\theta(\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OC}$ luego, si se llama λ a la homotecia de centro O y coeficiente k se obtiene que:

$$\begin{aligned}\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(A) &= \lambda\big(\rho_\theta(A)\big) = \lambda(A') \text{ donde } A' \text{ está sobre } \overrightarrow{OB} \text{ y es tal que } OA = OA'.\\ &= B \text{ ya que } B \in \overrightarrow{OA'} \text{ y } kOA' = kOA = OB\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(B) &= \lambda\big(\rho_\theta(B)\big) = \lambda(B') \text{ donde } B' \text{ está sobre } \overrightarrow{OC} \text{ y es tal que } OB = OB'.\\ &= C \text{ ya que } C \in \overrightarrow{OB'} \text{ y } kOB' = kOB = OC.\end{aligned}$$

Por tanto:
$\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(A) = \alpha(A)$ y $\big(\lambda \circ \rho_\theta\big)(B) = \alpha(B)$ y como ambas son directas se sigue del teorema de los dos puntos y la orientación para semejanzas que $\lambda \circ \rho_\theta = \alpha$.
Supongamos ahora que $\alpha = \lambda \circ \rho_\theta = \lambda_1 \circ \rho_{\theta_1}$ donde λ_1 es una homotecia y ρ_{θ_1} es una rotación en un ángulo de medida θ_1 y centro en el centro de λ_1.
Como α es una semejanza de coeficiente $k \neq 1$ y tiene a O como punto fijo, se sigue que este es el único punto fijo de α, ya que si P en π fuera otro punto fijo se tendría que $\alpha(O) = O$ y $\alpha(P) = P$, luego $kOP = OP$, de donde sigue que $k = 1$ lo que es absurdo y por tanto el centro de λ_1 y ρ_{θ_1} es O.
Como $\alpha = \lambda \circ \rho_\theta = \lambda_1 \circ \rho_{\theta_1}$ entonces $\lambda_1^{-1} \circ \lambda = \rho_{\theta_1} \circ \rho_\theta^{-1}$ y puesto que ρ_{θ_1} y ρ_θ^{-1} tienen el mismo centro de rotación entonces $\rho_{\theta_1} \circ \rho_\theta^{-1}$ es una rotación con el mismo centro por tanto que $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ es una transformación ortogonal, es decir $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ es una homotecia de coeficiente 1 y por ello $\lambda_1^{-1} \circ \lambda = I$, luego $\lambda = \lambda_l$ y como $\lambda \circ \rho_\theta = \lambda_1 \circ \rho_{\theta_1}$ por la aplicación de la ley cancelativa se concluye que $\rho_\theta = \rho_{\theta_1}$. □

Teorema 41. *Cada transformación de semejanza opuesta α de coeficiente $k \neq 1$ se puede expresar de forma única como el producto de una homotecia λ de centro O y coeficiente k y una reflexión φ_l, en una recta l que pasa por el centro de λ.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una semejanza opuesta de coeficiente $k \neq 1$, A, B y C en π, $A \neq B$ tales que $\alpha(A) = B$ y $\alpha(B) = C$ entonces $kAB = BC$ y se deben considerar los siguientes casos:
a). A, B y C colineales con B entre A y C. Sea λ la homotecia del caso a). del teorema anterior

y φ_l la reflexión en la recta $l = \overleftrightarrow{AB}$, entonces $\lambda(A) = B$, $\varphi_l(B) = B$, $\varphi_l(B) = C$ y $\varphi_l(C) = C$ y por tanto $(\varphi_l \circ \lambda)(A) = \alpha(A)$, $(\varphi_l \circ \lambda)(B) = \alpha(B)$, y como ambas son opuestas se sigue del teorema de los puntos y la orientación para semejanzas que $\alpha = \varphi_l \circ \lambda$.

b). A, B y C colineales pero B no está entre A y C entonces A está entre B y C. Sea λ la homotecia del caso b). del teorema anterior y φ_l la reflexión en la recta l perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto O, entonces:

$(\varphi_l \circ \lambda)(A) = \varphi_l(\lambda(A)) = \varphi_l(A') = B$ donde $A' \in \overrightarrow{OA}$ y es tal que $kOA = OA'$ y l es la mediatriz de $\overline{A'B}$.

$(\varphi_l \circ \lambda)(B) = \varphi_l(\lambda(B)) = \varphi_l(B') = C$ donde $B' \in \overrightarrow{OB}$ y es tal que $kOB = OB'$ y l es la mediatriz de $\overline{B'C}$.

En consecuencia, $(\varphi_l \circ \lambda)(A) = \alpha(A)$, $(\varphi_l \circ \lambda)(B) = \alpha(B)$ y como ambas son opuestas se sigue del teorema de los dos puntos y la orientación para semejanzas que $\alpha = \varphi_l \circ \lambda$.

c). A, B y C no colineales. Sean $t = \frac{AB}{k+1}$, $r = \frac{BC}{k+1}$ y P, Q dos puntos sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente tales que $t = AP$ y $r = BQ$ entonces:

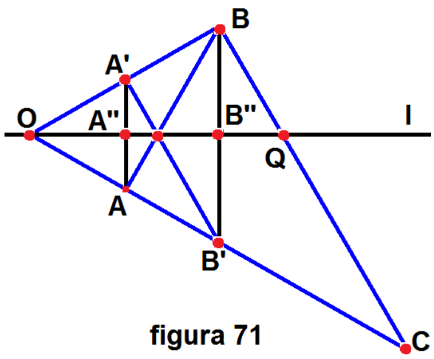


figura 71

$PB = AB - AP = (k+1)AP - AP = kAP$ y $QC = BC - BQ = (k+1)BQ - BQ = kBQ$.

Sean $l = \overleftrightarrow{PQ}$, $A' = \varphi_l(A)$ y $B' = \varphi_l(B)$, como A y C están del mismo lado de l el cual es el lado opuesto de donde está B se sigue que en un lado de l están A' y B en el otro A, B' y C.

Sean A'' y B'' los puntos medios de $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ entonces A'' y B'' están sobre l y como A, P y B son colineales, entonces sus imágenes bajo φ_l, A', P y B' son colineales y por tanto $\sphericalangle A'PA \cong \sphericalangle BPB'$ y como $kAP = PB$, $kA'P = PB'$ entonces $\triangle A'PA \cong \triangle B'PB$, luego $kAA' = BB'$ y por tanto $kA'A'' = BB''$ y como $k \neq 1$ entonces $\overleftrightarrow{AB}$ no es paralela con $\overleftrightarrow{A''B''}$, sea O su punto de corte.

Dado que $BC = (k+1)BQ$ y $BC = kAB$ se sigue que $BQ = \frac{kAB}{k+1}$ y como $AB = (k+1)AP$ y $kAP = PB$ se sigue que $PB = \frac{kAB}{k+1}$ y por tanto $PB = BQ$. Luego el triángulo PBQ es isósceles lo que implica que $\sphericalangle BPQ \cong \sphericalangle BQP$ y como $\sphericalangle BPQ \cong \sphericalangle B'QP$ se sigue que $\sphericalangle B'PQ \cong \sphericalangle BQP$ y por ello $\overleftrightarrow{B'A'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ pero $\overleftrightarrow{OB'}$ no es paralela con $\overleftrightarrow{B'A'}$, entonces $\overleftrightarrow{OB'}$ no es paralela

a $\overleftrightarrow{BC}$, sea C' su punto de corte.
Como $\overleftrightarrow{B'A'}$ es paralela con $\overleftrightarrow{BC}$ se tiene que $\frac{C'Q}{QB} = \frac{B'P}{PA'}$ pero $\frac{B'P}{PA'} = \frac{BP}{PA} = \frac{CQ}{QB}$ entonces $\frac{C'Q}{QB} = \frac{CQ}{QB}$ y por tanto $C = C'$.
Ahora bien, los triángulos $OA'B'$ y OBC tienen un ángulo común y paralelos los lados de la base, es decir, son semejantes y por tanto $\frac{OB}{OA'} = \frac{OC}{OB'} = \frac{BC}{A'B'} = \frac{BC}{AB} = k$ entonces $OB = kOA'$ y $OC = kOB'$.
Sea λ la homotecia de centro en O y coeficiente k y φ_l la reflexión en la recta $l = \overleftrightarrow{PQ}$ entonces:
$\big(\lambda \circ \varphi_l\big)(A) = \lambda(\varphi_l(A)) = \lambda(A') = B$ ya que $B \in \overleftrightarrow{OA'}$ y $kOA' = OB$,
$\big(\lambda \circ \varphi_l\big)(B) = \lambda(\varphi_l(B)) = \lambda(B') = C$ ya que $C \in \overleftrightarrow{OB'}$ y $kOB' = OC$.
Por tanto $\big(\lambda \circ \varphi_l\big)(A) = \alpha(A)$, $\big(\lambda \circ \varphi_l\big)(B) = \alpha(B)$ y como ambas son opuestas se sigue del teorema de los dos puntos y la orientación para semejanzas que $\alpha = \lambda \circ \varphi_l$.
Supongamos que $\alpha = \lambda \circ \varphi_l = \lambda_1 \circ \varphi_{l_1}$ donde λ_1 es una homotecia de centro en un punto P y φ_{l_1} es una reflexión en una recta l_1 que pasa por P, entonces O coincide con P ya que si $O \neq P$ entonces como α es una semejanza y O, P son puntos fijos de α se tendría que $\alpha(O) = O$, $\alpha(P) = P$ y por tanto $kOP = OP$, luego $k = 1$ lo que es absurdo.
Como $\alpha = \lambda \circ \varphi_l = \lambda_1 \circ \varphi_{l_1}$ entonces $\lambda_1^{-1} \circ \lambda = \varphi_{l_1} \circ \varphi_{l_1}^{-1}$ y como el producto de dos reflexiones es rectas que se intersecan es una rotación se sigue que $\lambda_1^{-1} \circ \lambda$ es una transformación ortogonal y en consecuencia, es una homotecia de coeficiente 1 o sea $\lambda_1^{-1} \circ \lambda = I$, luego $\lambda_1 = \lambda$ aplicando la ley cancelativa se obtiene que $\varphi_l = \varphi_{l_1}$. □

3.3. Representación Analítica de una Transformación de Semejanza.

En esta sección se considera un sistema rectangular coordenadas XOY, como base se toma la base canónica $\{(1,0)(0,1)\}$ y si $M(x,y)$ es un punto cualquiera del plano, entonces el punto $M'(x'y')$ representa su imagen bajo la transformación de semejanza α.
El objetivo central de esta sección es encontrar fórmulas que expresen $M'(x'y')$ en términos de $M(x,y)$.

3.3.1. Homotecia

a). El centro de la homotecia es el origen.
Sea λ una homotecia de centro en $O(0,0)$ y coeficiente k y $M(x,y)$, $M'(x',y')$ tales que $\lambda(M) = M'$, entonces M' está en $\overrightarrow{OM}$ y $kOM = OM'$.

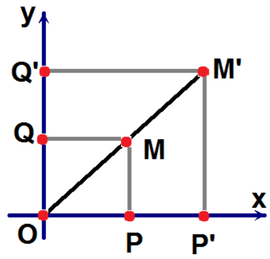


figura 72

Al proyectar los puntos M y M' sobre los ejes coordenados X y Y se obtienen los puntos P, P' y Q, Q' respectivamente tales que $OP = x$, $OP' = x'$, $OQ = y$, $OQ' = y'$.
Como $\triangle OMP \cong \triangle OM'P'$ entonces $\frac{OP'}{OP} = \frac{OM'}{OM} = k$, luego $OP' = kOP$, o sea $x' = kx$.
Como $\triangle OMQ \cong \triangle OM'Q'$ entonces $\frac{OQ'}{OQ} = \frac{OQ'}{OQ} = k$, luego $OQ' = kOQ$, o sea $y' = ky$.
Por lo tanto:

$$\lambda(x, y) = (kx, ky).$$

b). El centro de la homotecia no es el origen.

Sea λ una homotecia de centro en $A(a, b) \neq (0, 0)$ y coeficiente k y sean $M(x, y)$ y $M'(x'y')$ tales que $\lambda(M) = M'$, entonces $M' \in \overrightarrow{AM}$ y $kAM = AM'$, entonces:
1). Sea $T_{\overrightarrow{AO}}$ la traslación en el vector $\overrightarrow{AO}$, entonces $T_{\overrightarrow{AO}}(M) = M''$ donde $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{AO}$ y $T_{\overrightarrow{AO}}(x, y) = (x - a, y - b)$.
2). Sea λ' una homotecia de centro en O y coeficiente k entonces $\lambda'(M'') = M'''$ donde $M''' \in \overrightarrow{OM''}$ y $kOM'' = M'''$, $\lambda'(x, y) = (kx, ky)$.

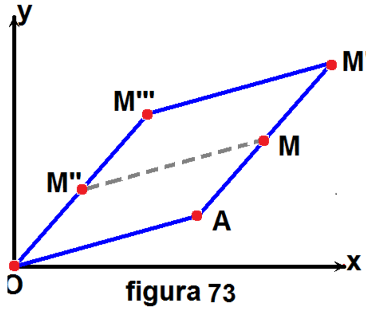


figura 73

3). Puesto que $\lambda = T_{\overrightarrow{OA}} \circ \lambda' \circ T_{\overrightarrow{AO}}$ entonces:

$$\begin{aligned}
\lambda(x, y) &= \big(T_{\overrightarrow{OA}} \circ \lambda' \circ T_{\overrightarrow{AO}}\big)(x, y) \\
&= T_{\overrightarrow{OA}}\big(\lambda'(T_{\overrightarrow{AO}}(x, y))\big) \\
&= T_{\overrightarrow{OA}}\big(\lambda'(x - a, y - b)\big) \\
&= T_{\overrightarrow{OA}}\big((k(x - a), k(y - b))\big) \\
&= \big(k(x - a) + a, k(y - b) + b\big)
\end{aligned}$$

es decir,

$$\lambda(x,y) = \big(k(x-a)+a, k(y-b)+b\big).$$

Observe que λ se puede representar en las siguientes formas:
i). $\lambda(x,y) = \big(kx + a(1-k), ky + b(1-k)\big)$ que expresa λ en la forma $\lambda = T_1 \circ \lambda_1$ donde λ_1 es una homotecia de centro en $O(0,0)$ y coeficiente k, y T_1 es una traslación en el vector $(1-k)\overrightarrow{OA}$.
ii). $\lambda(x,y) = \Bigg(k[x + a\big(\frac{1}{k}-1\big)], k[y + b\big(\frac{1}{k}-1\big)]\Bigg)$ que expresa λ en la forma $\lambda = \lambda_2 \circ T_2$ donde λ_2 es una homotecia de centro en $O(0,0)$ y coeficiente k y T_2 es una traslación en el vector $\big(\frac{1}{k}-1\big)\overrightarrow{OA}$.

3.3.2. Caso general de una transformación de semejanza.

Teorema 42. *Toda transformación de semejanza α del plano tiene como representación analítica las ecuaciones,*

$$\begin{aligned} x' &= cx - dy + a \\ y' &= \pm(dx + cy) + b, \end{aligned}$$

donde $A(a,b)$ es la imagen de $O(0,0)$ bajo α, $\sqrt{c^2+d^2} = k$ es el coeficiente de α y el signo "-" en y' corresponde cuando la transformación es opuesta.

Demostración. Sea α una semejanza del plano de coeficiente k y XOY un sistema de coordenadas rectangulares.
Como α es una transformación de semejanza, aplicando el teorema 39, α se puede representar en la forma $\alpha = \beta \circ \lambda$ donde λ es una homotecia de centro en $O(0,0)$ y coeficiente k y β es una transformación ortogonal, en consecuencia se tiene:
a). Si α es directa, β también lo es y así, por el caso general de una transformación ortogonal β se representa analíticamente en la forma:

$$\beta(x,y) = (xcos\theta - ysen\theta + a, xsen\theta + ycos\theta + b),$$

donde $A(a,b)$ es la imagen de $O(0,0)$ bajo α y θ es el ángulo en el que cada vector es rotado bajo β.
Como λ tiene centro en O se tiene que:
$\lambda(x,y) = (kx, ky)$ y por lo tanto si $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ son tales que $\alpha(M) = M'$ entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(M(x,y)) &= \big(\beta \circ \lambda\big)(x,y) = \beta\big(\alpha(x,y)\big) = \beta(kx,ky) \\ &= (kxcos\theta - kysen\theta + a, kxsen\theta + kycos\theta + b) = M'(x',y'), \end{aligned}$$

es decir,

$$x' = kxCos\theta - kySen\theta + a \qquad y' = kxSen\theta + kyCos\theta + b. \tag{3.1}$$

b). Si α es opuesta, β también lo es. Puesto que β es una transformación ortogonal entonces β se expresa como:

$\beta = \varphi_l \circ T_{\vec{a}}$ donde $T_{\vec{a}}(0,0) = (a,b)$, φ_l es una reflexión en una recta que pasa por A, B, forma un ángulo θ con el eje X y analíticamente β se expresa en la forma:

$$\beta(x,y) = (xcos2\theta - ysen2\theta + a, xsen2\theta + ycos2\theta + b).$$

Como λ tiene centro en O entonces $\lambda(x,y) = (kx, ky)$ y por lo tanto si $M(x,y)$ y $M'(x',y')$ son tales que $\alpha(M) = M'$ entonces:

$$\begin{aligned}\alpha(M(x,y)) &= (\beta \circ \lambda)(x,y) = \beta(\lambda(x,y)) = \beta(kx, ky)\\ &= (kxcos2\theta + kysen2\theta + a, kxsen2\theta - kycos2\theta + b) = M'(x',y').\end{aligned}$$

es decir,

$$x' = kxcos2\theta + kysen2\theta + a \qquad y' = kxsen2\theta - kycos2\theta + b. \tag{3.2}$$

En consecuencia:

Si en (3.1) se hace $c = kcos\theta$ y $d = ksen\theta$, se obtiene:

$$\begin{aligned}x' &= cx - dy + a\\ y' &= dx + cy + b\end{aligned}$$

con $k = \sqrt{c^2 + d^2}$. Si en (3.2) se hace $c = kcos2\theta$ y $d = ksen2\theta$, se obtiene:

$$\begin{aligned}x' &= cx - dy + a\\ y' &= dx - cy + b,\end{aligned}$$

con $k = \sqrt{c^2 + d^2}$ Al unir las dos expresiones en una sola se obtiene que α se puede representar analíticamente en la forma:

$$\begin{aligned}x' &= cx - dy + a,\\ y' &= \pm(dx - cy) + b,\end{aligned}$$

donde $A(a,b)$ es la imagen de $O(0,0)$ bajo α, $\sqrt{c^2 + d^2} = k$ y el signo "-" de y' corresponde cuando α es opuesta. $\square$

3.3.3. Problemas Resueltos.

En esta sección se resuelven algunos problemas de geometría elemental utilizando semejanzas, problemas que ilustran el uso de esta clase de transformaciones e inspiran las soluciones de problemas similares a los que aquí se presentan.

Problema 1

Sea P un punto dado de una circunferencia S, hallar el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que tienen un extremo en P.

Solución. Sean $A_1, A_2, ..., A_n...$ en S los segundos puntos que determinan las cuerdas $\overline{PA_i}$, $i = 1, 2...$ y $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ los respectivos puntos medios de las cuerdas $\overline{PA_i}$.

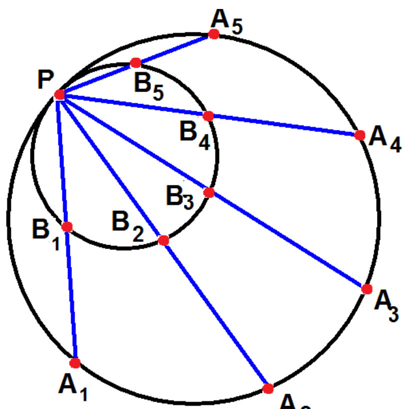


figura 74

Sea λ la homotecia de centro en P y coeficiente $k = \frac{1}{2}$, entonces $\lambda(P) = P$ y $\lambda(A_i) = B_1, i = 1, 2, ...$ Nótese que para

alguna cuerda $\overline{PA_k}$ se tiene que $B_k = O$ el centro de la circunferencia S, por tanto que $\lambda(A_k) = B_k = O$ y dado que la imagen de una circunferencia bajo una semejanza es una circunferencia, se concluye que $\lambda(S)$ es una circunferencia de radio igual a la mitad del radio de S, tal circunferencia es tangente internamente a S en P.

Problema 2

La bisectriz de un ángulo exterior de un triángulo divide al lado opuesto exteriormente en segmentos proporcionales a los otros dos lados.

Solución. Sea ABC un triángulo cualquiera y $\overleftrightarrow{BE}$ la bisectriz del ángulo exterior en B.

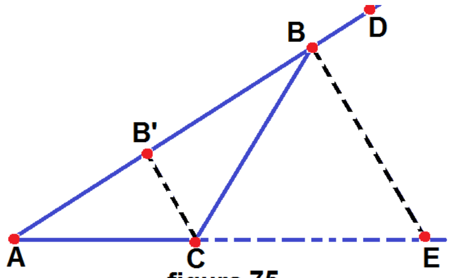


figura 75

Sea $k = \frac{AC}{AE}$ y λ la homotecia de centro en A y coeficiente k, entonces $\lambda(A) = A$, $\lambda(E) = C$ ya que $C \in \overrightarrow{AE}$ y $kAE = AC$ y $\lambda(B) = B'$ donde $B' \in \overrightarrow{AB}$ y $kAB = AB'$ se concluye que $\triangle AEB \backsim \triangle ACB'$ y $\overleftrightarrow{B'C}$ paralela a $\overleftrightarrow{BE}$ y en consecuencia $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{B'B}$. a).

Como $\sphericalangle DBE \cong \sphericalangle CBE$ por ser $\overleftrightarrow{BE}$ la bisectriz del ángulo DBC, $\sphericalangle EBC \cong \sphericalangle B'CB$ por alternos internos entre paralelas y $\sphericalangle BB'C \cong \sphericalangle DBE$ por correspondientes se sigue que $\sphericalangle BB'C \cong \sphericalangle BCB'$ y por tanto el triángulo $\triangle BB'C$ es isósceles, de este modo $BB' = BC$ y que reemplazando en a). se tiene que $\frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$.

Problema 3

Demostrar que las alturas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia recibe el nombre de **Ortocentro**, y se denota con H.

Solución. Sea ABC un triángulo cualquiera P, Q, R los puntos medios de los lados $\overline{AC}, \overline{BC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente y G el punto de corte de las medianas del triángulo ABC.

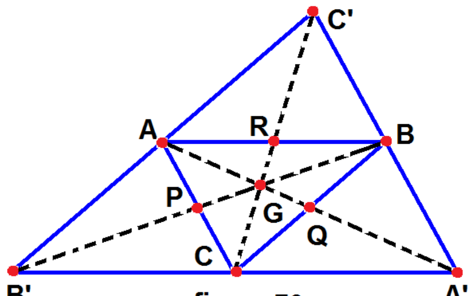


figura 76

Sea λ la homotecia de centro en G y coeficiente -2 entonces $\lambda(A) = A'$ si y sólo si $2GA = GA'$ y $A - G - A'$. $\lambda(B) = B'$ si y sólo si $2GB = GB'$ y $B - G - B.'$ $\lambda(C) = C'$ si y sólo si $2GC = GC'$ y $C - G - C'$,

Por tanto la imagen bajo λ del triángulo ABC es el triángulo $A'B'C'$ y así las rectas $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ son paralelas a las rectas $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{B'C'}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ respectivamente.

Puesto que G es el punto de trisección de cada mediana entonces $2GR = GC$ y $R - G - C$; $2GP = GB$ y $P - G - B$; $2GQ = GA$ y $Q - G - A$ por tanto la imagen bajo λ del triángulo PQR es el triángulo BAC y como P, Q, R son los puntos medios de $\overline{AC}, \overline{BC}$ y $\overline{AB}$ y una semejanza (homotecia) preserva puntos medios, sus imágenes bajo $\lambda B, A$ y C son los puntos medios de $\overline{A'C'}, \overline{B'C'}$ y $\overline{A'B'}$.

Dado que los lados del triángulo ABC son paralelos a los lados de los triángulos $A'B'C'$ entonces las alturas del triángulo ABC son perpendiculares a los lados del triángulo $A'B'C'$ en su respectivos puntos medios y por tanto coinciden con las mediatrices de los lados del triángulo $A'B'C'$ y como las mediatrices del triángulo $A'B'C'$ son concurrentes, las alturas del triángulo ABC también lo son.

Problema 4

El centroide G, el ortocentro H y el circuncentro O de un triángulo son colineales, con G entre O y H y tales que $2OG = GH$.

G: **Centroide**. Punto de concurrencia de las medianas.

H: **Ortocentro**. Punto de concurrencia de las alturas.

O: **Circuncentro**. Punto de concurrencia de las mediatrices.

Solución. Sea ABC un triángulo cualquiera, G su centroide, O su circuncentro, H su ortocentro y P, Q, R los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ABC.

Sea λ la homotecia de centro en G y coeficiente $\frac{-1}{2}$. Como $\frac{1}{2}AG = GQ$ y $A - G - Q$; $\frac{1}{2}BG = GR$ y $B - G - R$; $\frac{1}{2}CG = GP$ y $C - G - P$ se sigue que la imagen bajo λ del triángulo ABC es el triángulo QRP.

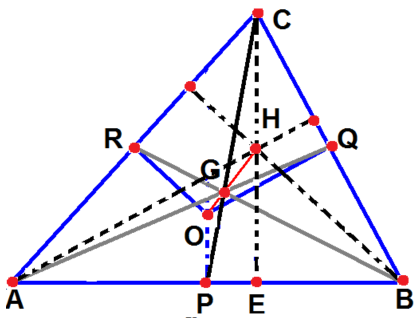


figura 77

Sea $\overline{CE}$ la altura correspondiente al lado $\overline{AB}$ bajada desde C, entonces la imagen bajo λ de la recta $\overleftrightarrow{CE}$ es una recta paralela a ella que pasa por $\lambda(C) = P$ y por tanto $\lambda(\overleftrightarrow{CE})$ es una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en P, ó sea que $\lambda(\overleftrightarrow{CE})$ es la mediatriz de $\overline{AB}$.

Análogamente, la imagen bajo λ de las otras alturas coincide con las mediatrices y como una semejanza preserva puntos de corte entonces la imagen bajo λ del punto de corte H de las alturas es el punto de corte O de las mediatrices, es decir $\lambda(H) = O$; en consecuencia se tiene que $\frac{-1}{2}GH = GO$ y por ello $2GO = GH$ y $O - G - H$.

Problema 5

Sean α y β homotecias de coeficientes k y $\frac{1}{k}$ y centros A y B, $A \neq B$ demostrar que $\alpha \circ \beta$ es una traslación. ¿Qué Traslación?

Solución. Sea X un punto cualquiera del plano, entonces $\beta(X) = X'$ si y sólo si $X' \in \overrightarrow{BX}$ y $\frac{1}{k}BX = BX'$ y $\alpha(X') = X''$ si y sólo si$X'' \in \overrightarrow{AX'}$ y $kAX' = AX''$

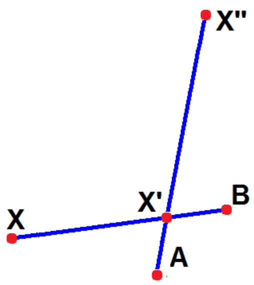


figura 78

por tanto
$(\alpha \circ \beta)(X) = X''$ y $\frac{BX}{BX'} = \frac{AX'}{AX'} = k$.
Pero

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{XX''} &= \overrightarrow{XX'} + \overrightarrow{X'X''} \\
&= \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{X'B} + \overrightarrow{AX''} - \overrightarrow{AX'} \\
&= k\overrightarrow{X'B} - \overrightarrow{X'B} + k\overrightarrow{AX'} - \overrightarrow{AX'} \\
&= (k-1)\overrightarrow{X'B} + (k-1)\overrightarrow{AX'} \\
&= (k-1)\left(\overrightarrow{AX'} + \overrightarrow{X'B}\right) \\
&= (k-1)\overrightarrow{AB}.
\end{aligned}$$

Sea T la traslación en el vector $\vec{a} = (k-1)\overrightarrow{AB}$, así $T_{\vec{a}}(X) = X'' = (\alpha \circ \beta)(X)$ para cada punto X del plano, es decir $\alpha \circ \beta = T_{\vec{a}}$ donde $\vec{a} = (k-1)\overrightarrow{AB}$.

Problema 6

Sean S y S' dos circunferencias de centro y radios diferentes, demostrar que existen dos homotecias que llevan una en otra.

Solución. Sean S y S' dos circunferencias de centro A y A', $A \neq A'$ y radios r y r', $r \neq r'$ y sea X un punto de S no colineal con A y A'.

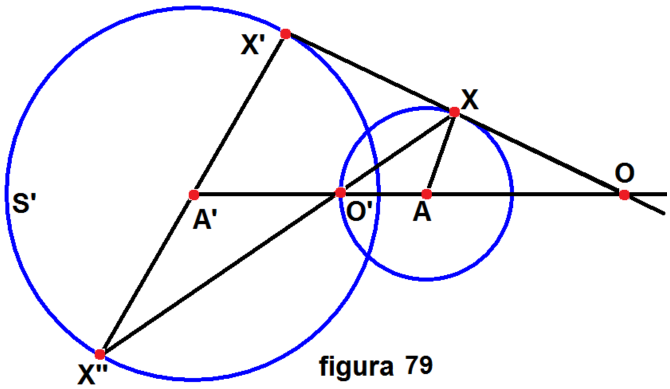


figura 79

Sea $\overline{X'X''}$ el diámetro de S' paralelo a $\overline{AX}$ con $\overrightarrow{A'X'}$ y $\overrightarrow{AX}$ en el mismo sentido.

Como $\overleftrightarrow{A'X'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{AX}$ pero $A'X' \neq AX$ ya que son radios de S' y S respectivamente, entonces $\overleftrightarrow{A'A}$ no es paralela con $\overleftrightarrow{X'X}$, sea O su punto de corte entonces X y X' están en un mismo lado de $\overleftrightarrow{AA'}$ y X'' en el lado opuesto por tanto $\overleftrightarrow{X''X}$ interseca a $\overleftrightarrow{AA'}$ en un punto O' entre A' y A y obtenemos dos situaciones:

a). Como los triángulos $A'OX'$ y AOX tienen un ángulo común en O y sus bases respectivamente paralelas, entonces $\triangle AOX \sim \triangle A'OX'$ y por tanto

$$\tfrac{A'O}{AO} = \tfrac{X'O}{XO} = \tfrac{A'X'}{AX} = \tfrac{r'}{r} = k.$$

Sea λ la homotecia de centro en O y coeficiente $k = \frac{r'}{r} > 0$, entonces $\lambda(O) = O$, $\lambda(A) = A'$ y $\lambda(X) = X'$ y por tanto $\lambda(S) = S'$ ya que si M es otro punto cualquiera de S entonces $\lambda(M) = M'$ si y sólo si $kOM = OM'$ y $M' \in \overrightarrow{OM}$ luego $OM' = kOM = kr = r'$ y por tanto M' está en S'.

b). Como $\sphericalangle A'O'X'' \cong \sphericalangle AO'X$ y $\overleftrightarrow{AX}$ es paralela a $\overleftrightarrow{A'X''}$ entonces $\triangle O'AX \sim \triangle O'A'X''$, luego

$$\frac{O'A'}{O'A} = \frac{O'X''}{O'X} = \frac{A'X''}{AX} = \frac{r'}{r} = k > O \text{ con } A' - O' - A \text{ y } X'' - O -' X.$$

Sea λ' la homotecia de centro O' y coeficiente $-k$ entonces $\lambda'(O') = O'$, $\lambda'(A) = A'$ y $\lambda'(X) = X''$ y por tanto $\lambda'(S) = S'$ ya que si M es otro punto cualquiera de S entonces $\lambda'(M) = M'$ si y sólo si M y M' están en lados opuestos de O' y $kO'M = O'M'$ o sea $O'M' = kO'M = kr = r'$ y por tanto M' está en S'.

Observe que si S y S' son concéntricas se tiene $O = O' = A = A'$ y cualquiera de las dos homotecias lleva S en S'. ¿cual es la homotecia si las dos circunferencias S y S' coinciden?

Los puntos O' y O reciben el nombre de **centros de semejanzas interior y exterior** de las circunferencias S y S'.

Problema 7

Sea $ABCD$ un trapezoide en el cual las prolongaciones de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se cortan en punto P', sea Q el punto de corte las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ demostrar que:

a). Las circunferencias S y S' circunscritas a los triángulos ABP y DCP son tangentes.

b). Las circunferencias R y R' circunscritas a los triángulos ABQ y DCQ son tangentes.

c). La razón de los radios S y S' es igual a la razón de los radios R y R'.

Solución. Sea $ABCD$ un trapezoide, P el punto de corte de las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, Q el punto de corte de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, entonces:

a). Sea λ la homotecia de centro en P y coeficiente $k = \frac{AB}{DC} > 0$ como las rectas $\overleftrightarrow{DC}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ son paralelas por ser las bases del trapezoide y el ángulo en P es común para los triángulos DPC y APB entonces $\triangle DPC \sim \triangle APB$ y por lo tanto:

$$\frac{PA}{PD} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{DC} = k,$$

luego $\lambda(D) = A$, $\lambda(C) = B$ y $\lambda(P) = P$, es decir, la imagen bajo λ del triángulo DPC es el triángulo APB y por tanto λ lleva la circunferencia S que pasa por los puntos D, P y C en la circunferencia S' que pasa por los puntos A, P y B y como S' se obtiene de S por una homotecia de centro en P sobre S' se sigue que S y S' son tangentes en P.

b). Sea λ' la homotecia de centro en Q y coeficiente $t = \frac{AB}{CD} < O$ (considerando $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ como segmentos dirigidos).

Como $\sphericalangle DQC \cong \sphericalangle AQB$ por opuestos por el vértice y $\overleftrightarrow{CD}$ es paralela con $\overleftrightarrow{AB}$ por ser las bases del trapezoide entonces $\sphericalangle CQD \cong \sphericalangle AQB$, por lo tanto:

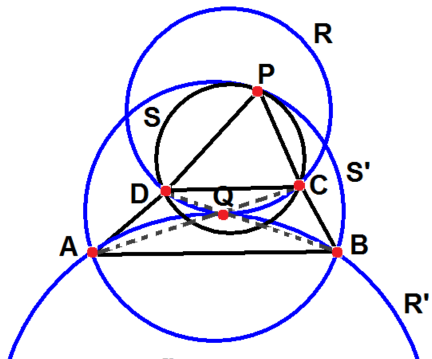


figura 80

$\frac{QA}{QC} = \frac{QB}{QD} = \frac{AB}{CD} = t$ con $A - Q - C$ y $B - Q - D$ entonces $\lambda'(C) = A$, $\lambda'(D) = B$, y $\lambda'(Q) = Q$ luego la imagen λ' del triángulo CQD es el triángulo AQB y por tanto λ' lleva la circunferencia R que pasa por los puntos C, D y Q en la circunferencia R' que pasa por los puntos A, B y Q y como R' se obtiene de R por una homotecia de centro Q sobre R', se sigue que R y R' son tangentes en Q.

c). Como S' se obtiene de S por una homotecia de coeficiente $k = \frac{AB}{DC}$ y por el problema 6 $k = \frac{R_S}{R_{S'}}$, entonces $\frac{R_S}{R_{S'}} = \frac{AB}{DC}$.

Dado que R' se obtiene de R por una homotecia de $t = \frac{AB}{CD} < 0$ y por el problema 6 se tiene

$|t| = \frac{R_R}{R_{R'}}$, entonces $\frac{R_R}{R_{R'}} = |\frac{AB}{CD}| = \frac{AB}{DC} = \frac{R_S}{R_{S'}}$.

Problema 8

a). Conectar un punto dado M con el ïnaccesible"punto de intersección de dos rectas dadas m y l.

b). Trazar por un punto M una recta paralela a un resta "inaccesible" l, dos de cuyos puntos están determinados por la intersecciones de los pares de restas a_1, a_2, y b_1, b_2.

Solución. a). Sea λ homotecia de centro M y coeficiente k

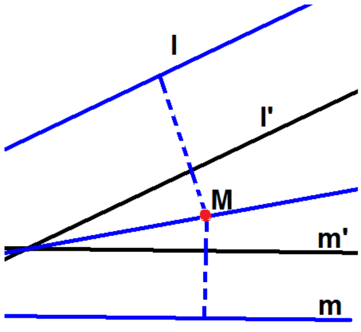


figura 81

lo suficiente pequeño para que las imágenes bajo λ de las rectas m y l se intersequen dentro de los límites de la accesible, entonces, la recta que une el punto M con el punto de intersección de las rectas $\lambda(m) = m'$ y $\lambda(l) = l'$ es la recta buscada.

b). Sea λ un homotecia de centro M y coeficiente k lo suficientemente pequeño

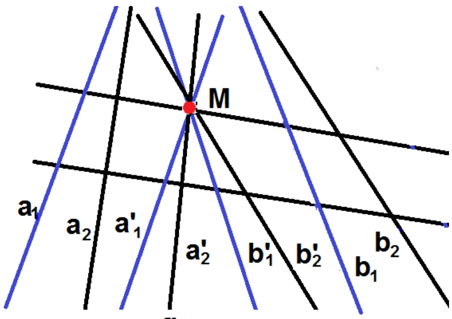


figura 82

tal que las rectas a_1, a_2, y b_1, b_2 sean llevadas en las rectas a_1', a_2', y b_1',b_2' de modo que las recta que une los puntos de intersección de a_1' y a_2', b_1' y b_2' esté dentro de los límites de la parte accesible, entonces la recta que pasa por M paralela a esta recta es la recta buscada.

Se ha probado que toda semejanza directa α de coeficiente k, se puede expresar como el producto de una homotecia λ de coeficiente k y centro O y una rotación de ρ_θ de centro O y que este producto es conmutativo, es decir $\alpha = \lambda \circ \rho_\theta = \rho_\theta \circ \lambda$. Una semejanza de esta forma se llama ***semejanza en espiral*** (Rotación dilatativa). El siguiente problema es un ejemplo de esta clase de semejanza.

Problema 9

Dado un punto P sobre el lado $\overline{AB}$ de un triángulo dado ABC, inscribir en él, un triángulo PXY semejante a un triángulo dado LMN.

Solución. Suponga que el triángulo PXY ha sido construido.

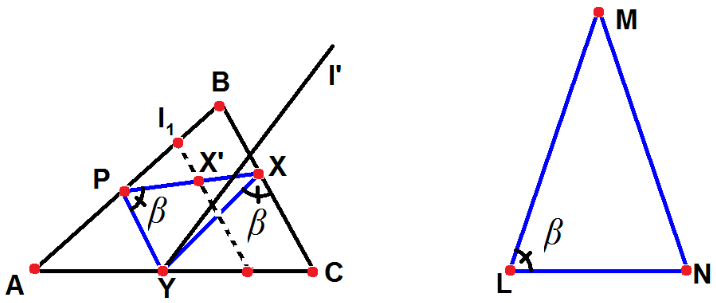


figura 83

Como $\triangle LMN \sim \triangle PXY$ entonces $\frac{LM}{PX} = \frac{LN}{PY} = \frac{MN}{XY}$ y así $\frac{LN}{LM} = \frac{PY}{PX}$. Sea λ la homotecia de centro en P y coeficiente $k = \frac{LN}{LM}$ entonces $\lambda(X) = X'$ si y sólo si $X' \in \overrightarrow{PX}$ y $kPX = PX'$.

Sea ρ_β la rotación de centro P y ángulo $\beta = m(\sphericalangle MLN)$.

Como $\sphericalangle MLN \cong \sphericalangle XPY$ y $PX' = kPX = PY$ se sigue que $\rho_\beta(X') = Y$ y por lo tanto $(\rho_\beta \circ \lambda)(X) = Y$, es decir, Y se obtiene X por una semejanza en espiral de centro en P y ángulo $\beta = m\big(\sphericalangle MLN\big)$ y como X está sobre $\overleftrightarrow{BC}$ entonces Y está sobre la recta $l' = (\rho_\beta \circ \lambda)(\overleftrightarrow{BC})$, por tanto:

1). Si l' interseca a $\overleftrightarrow{AC}$ entonces Y es este punto de intersección.

2). Si l' paralela a $\overleftrightarrow{AC}$ entonces el problema no tiene solución.

3). Si l' coincide con $\overleftrightarrow{AC}$ el problema es indeterminado.

Se ha probado que toda semejanza opuesta α de coeficiente k, es el producto de una homotecia λ de centro O y coeficiente k y una reflexión φ_l en una recta l que pasa por O y este producto es conmutativo, esto es $\alpha = \varphi_l \circ \lambda = \lambda \circ \varphi_l$. Este producto se denomina ***reflexión dilatativa***, se ilustra su uso en la solución del siguiente problema.

Problema 10

Sea l una recta, A un punto en ella y S_1, S_2 dos circunferencias dadas. Construir un triángulo ABC de modo que l sea la bisectriz del ángulo en A, los vértices B y C estén respectivamente sobre las circunferencias S_1 y S_2 y la razón de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ tenga un valor dado $\frac{n}{m}$.

Solución. Suponga que el triángulo ABC ha sido construido y sea λ la homotecia de centro en A coeficiente $k = \frac{n}{m} = \frac{AC}{AB}$, entonces $\lambda(B) = B'$ si y sólo si $B' \in \overrightarrow{AB}$ y $kAB = AB'$.

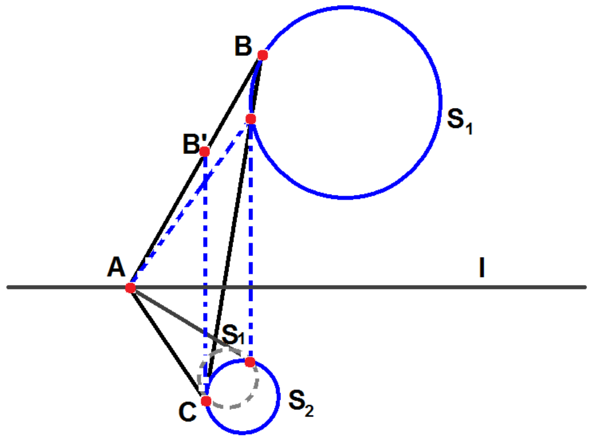


figura 84

Sea φ_l la reflexión de la recta l, puesto que l es la bisectriz del ángulo A entonces $\varphi_l(B') \in \overrightarrow{AC}$ y como $AB' = kAB = AC$ entonces $\triangle B'AC$ es isósceles y por ello l es la mediatriz del lado $\overline{B'C}$, luego $\varphi_l(B') = C$, y así $(\varphi_l \circ \lambda)(B) = C$, es decir, C se obtiene de B por medio de una reflexión dilatativa de centro A y eje l con coeficiente $\frac{n}{m}$.

Por lo tanto C está en la intersección de las circunferencias S_2 y S_1' obtenida de S_1 bajo la reflexión dilatativa. Este problema puede tener dos, una o ninguna solución. ¿en qué circunstancia ocurren?

Capítulo 4

TRANSFORMACIONES AFINES.

En los capítulos anteriores se han estudiado, en primera instancia, las transformaciones que conservan la forma y el tamaño y luego las que conservan solo la forma; este tipo de transformaciones pertenecen a un grupo más amplio, aquellas que preservan colinealidad y paralelismo pero no en general la longitudes de segmentos, congruencia de ángulos o áreas. Este tipo de transformaciones son llamadas transformaciones Afines. El estudio de estas transformaciones se realiza análogamente, es decir, basados en el concepto de aplicación afín se deduce algunas de sus propiedades hasta llegar al Grupo Afín del plano, se tratara luego la forma de expresar una transformación afín como el producto de transformaciones afines elementales, para concluir con la expresión analítica correspondiente.

4.1. aplicaciones Afines.

Definición 32. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación biyectiva.*
α es una **Aplicación Afín** *si y sólo si la imagen bajo α de tres puntos colineales en π son tres puntos colineales en π'.*

Teorema 43. *Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación afín, entonces la imagen bajo α de tres puntos no colineales de π son tres puntos no colineales de π'*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación afín y suponga que las imágenes bajo α de tres puntos no colineales A, B y C son puntos colineales A', B' y C' respectivamente.
Sea X un punto cualquiera de π y sea l una recta cualquiera diferente a $\overleftrightarrow{AX}$ entonces l interseca a dos de las rectas determinadas por los lados del triángulo ABC. Suponga que l interseca a las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ y sean P, Q los puntos de intersección; entonces A, P y B son colineales al igual que la terna A, Q y C. Como α es una aplicación afín las imágenes A', P' y B' son colineales al

igual que la terna A', Q' y C' y con esto P' está en $\overleftrightarrow{A'B'}$ y Q' está en $\overleftrightarrow{A'C'}$, pero $P' \neq Q'$ y α es inyectiva con lo cual $P' \neq Q'$. Sea $l' = \overleftrightarrow{P'Q'}$ dado que α es afín y X, P y Q colineales entonces sus imágenes X', P' y Q' son colineales, es decir X' está en $\overleftrightarrow{P'Q'} = l'$ así cualquier punto X del plano π tiene su imagen en l' y siendo así, α no es sobreyectiva (Absurdo) y por ello A', B' y C' son no colineales.

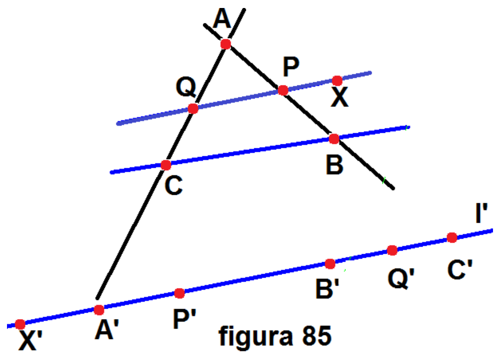


figura 85

$\square$

Teorema 44. *1). Sea $\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación afín, entonces $\alpha^{-1} : \pi' \to \pi$ es una aplicación afín.*
2). Sean $\alpha : \pi \to \pi'$ y $\beta : \pi' \to \pi''$ aplicaciones afines entonces $\beta \circ \alpha : \pi \to \pi''$ es una aplicación afín.

Demostración. 1). Como $\alpha : \pi \to \pi'$ es biyectiva existe $\alpha^{-1} : \pi' \to \pi$ que también es biyectiva. Al suponer que existen tres puntos A', B', C' en π' colineales tales que sus imágenes bajo α^{-1} , A, B y C son no colineales y aplicar sobre ellos el resultado del teorema 44, se encuentra que las imágenes bajo α de estos tres puntos A, B y C son colineales, es decir, A', B' y C' son no colineales (Absurdo). Así A, B y C son colineales y por tanto α^{-1} es una aplicación afín.
2). Puesto que $\alpha : \pi \to \pi'$ y $\beta : \pi' \to \pi''$ biyectivas entonces $\beta \circ \alpha : \pi \to \pi''$ es biyectiva. Sean A, B y C en π puntos colineales entonces y como α es afín se tiene que $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$ y $\alpha(C) = C'$ son colineales en π' y como β es afín entonces $\beta(\alpha(A)) = A''$, $\beta(\alpha(B)) = B''$ y $\beta(\alpha(C)) = C''$ son colineales o sea $(\beta \circ \alpha)(A), (\beta \circ \alpha)(B)$ y $(\beta \circ \alpha)(C)$ son colineales y con esto queda probado que $\beta \circ \alpha$ es una aplicación afín. $\square$

Definición 33. *Una aplicación afín $\alpha : \pi \to \pi$ es llamada una transformación Afín.*
Se denota con $\Lambda(\pi)$ al conjunto de todas las transformaciones afines del plano π.

Teorema 45. $\big(\Lambda(\pi), \circ\big)$ *es un grupo, llamado* **Grupo Afín del plano** π

Demostración. Es una consecuencia inmediata del teorema 44. En el cual es suficiente tomar $\pi = \pi' = \pi''$.
Observe que $(O(\pi), \circ)$ y $(S(\pi), \circ)$ son subgrupos de $(\Lambda(\pi), \circ)$. □

4.2. Transformaciones Afines Fundamentales.

En esta sección se estudian algunas transformaciones afines importantes que permitan expresar cualquier transformación afín como el producto de alguna de ellas y de una transformación ortogonal.

4.2.1. Reflexión Oblicua.

Definición 34. *La aplicación $\alpha : \pi \to \pi$ que lleva a el punto M en el punto M' se llama* ***Reflexión oblicua*** *en $\overleftrightarrow{OX}$ paralela a $\overleftrightarrow{OY}$.*

Sean $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ dos rectas cualesquiera y M un punto del plano, por M se traza una paralela a $\overleftrightarrow{OY}$ que intersecan a $\overleftrightarrow{OX}$ en un punto P y se escoge sobre esta paralela un punto M' tal que $MP = PM'$.

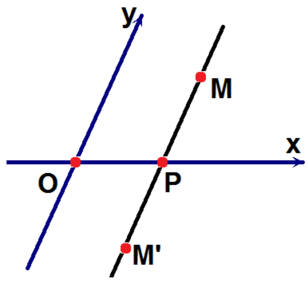


figura 86

Teorema 46. *Una transformación oblicua α del plano es una transformación afín.*

Demostración. 1). α es biyectiva. Como en los lados opuestos de la recta $\overleftrightarrow{OX}$ sobre la paralela, única por M a $\overleftrightarrow{OY}$ existen únicamente dos puntos M y M' tales que $MP = PM'$ donde P es el punto de corte de la paralela a $\overleftrightarrow{OY}$ y $\overleftrightarrow{OX}$ se sigue que cada M' en π posee una única imagen inversa M en π y por tanto α es biyectiva.
2). α preserva colinealidad. Sean A, B, y C puntos colineales en π, entonces puede suceder que:
a). A, B y C están sobre una paralela $\overleftrightarrow{OY}$ entonces por definición de reflexión oblicua A', B' y C' están sobre esta misma paralela y por tanto A', B' y C' son colineales.
b). A, B y C están sobre una recta l paralela a $\overleftrightarrow{OX}$ entonces como segmentos de paralelas

comprendidos entre paralelas se sigue que A', B' y C' están sobre una paralela l a $\overleftrightarrow{OX}$.
c). A, B y C están sobre una recta l que intercepta a $\overleftrightarrow{OX}$ en un punto P.

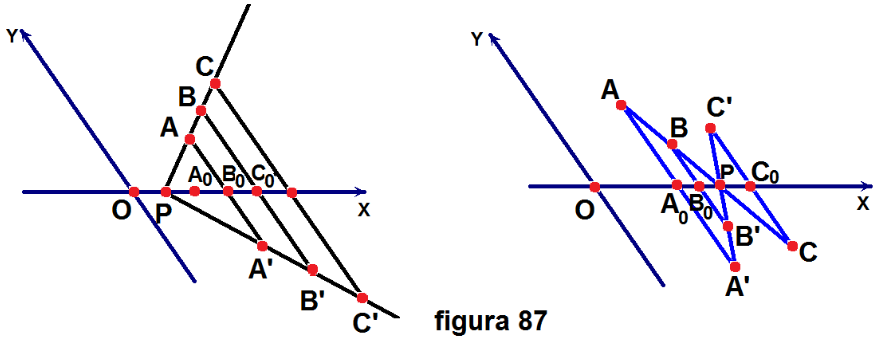


figura 87

Sea $A' = \alpha(A)$ y A_0 el punto de corte de $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{OX}$ entonces $AA_0 = A_0A'$ y $\overleftrightarrow{AA'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{OY}$. Llámese $l' = \overleftrightarrow{PA'}$ y B' y C' los puntos de corte de l' y las paralelas a $\overleftrightarrow{OY}$ trazadas por B y C respectivamente. Probaremos que $B' = \alpha(B)$ y $C' = \alpha(C)$.
Sean B_0, C_0 puntos de corte de $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ con $\overleftrightarrow{OX}$ entonces $\overleftrightarrow{AA'}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son respectivamente paralelas por lo tanto $\triangle PAA_0 \backsim \triangle PBB_0 \backsim \triangle PCC_0$ y $\triangle PA'A_0 \backsim \triangle PB'B_0 \backsim \triangle PC'C_0$, luego

$$\frac{AA_0}{BB_0} = \frac{PA_0}{PB_0}; \frac{BB_0}{CC_0} = \frac{PB_0}{PC_0} \quad \text{y} \quad \frac{A'A_0}{B'B_0} = \frac{PA_0}{PB_0}; \frac{B'B_0}{C'C_0} = \frac{PB_0}{PC_0},$$

por lo tanto
$\frac{AA_0}{BB_0} = \frac{A'A_0}{B'B_0}$ y $\frac{BB_0}{CC_0} = \frac{B'B_0}{C'C_0}$ así $\frac{BB_0}{B'B_0} = \frac{CC_0}{C'C_0} = \frac{AA_0}{A'A_0} = 1$ y como B y B'; C y C' están en lados opuestos de $\overleftrightarrow{OX}$ se sigue que $\alpha(B) = B'$ y $\alpha(C) = C'$ y por lo tanto A', B' y C' son colineales.
De las partes 1). y 2). se desprende que α es una transformación afín.
Observe que:
i). Como $\overleftrightarrow{AA'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BB'}$ entonces $\overleftrightarrow{AA'}$ determina segmentos proporcionales sobre los lados del triángulo BPB', por lo que $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AP}{A'P}$ y por ello $AB \neq A'B'$ a menos que $AP = A'P$ y esto solo se logra si $\overleftrightarrow{OY}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{OX}$ y por tanto en general α no preserva distancias y siendo así α no preserva congruencia de segmentos.
ii). Como en el caso b) del teorema la figura $AA'B'B$ es un paralelogramo y en un paralelogramo ángulos adyacentes son suplementarios entonces los ángulos en A y en A' son diferentes a menos que sean rectos y esto solo se logra si $\overleftrightarrow{OY}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{OX}$ y por tanto, en general α no preserva congruencia de ángulos.
iii). Si $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ se consideran como ejes de un sistema oblicuo de coordenadas y $M(x, y), M'(x', y')$ son tales que $\alpha(M) = M'$ entonces $MP = PM'$ con M y M' en lados opuestos de $\overleftrightarrow{OX}$ entonces $OP = x = OP' = x'$, $PM = y$ y $PM = y' = -y$ por tanto,

$$\alpha(x, y) = (x, -y).$$

Es decir, la representación analítica de una reflexión oblicua es $\alpha(x,y) = (x,-y)$. $\square$

4.2.2. Compresión.

Definición 35. *La aplicación $\alpha : \pi \to \pi$ que aplica M en el punto M' se llama* **compresión** *de eje l y coeficiente k.*

Sea k en $\mathbb{R}^+$, una recta dada del plano, M un punto cualquiera del plano π, $\overleftrightarrow{MP}$ la perpendicular a l trazada por M' en π tal que $k\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M'P}$.

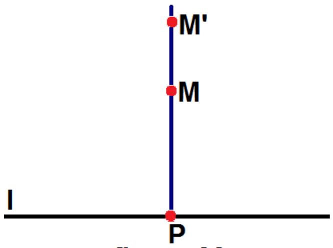


figura 88

Observe que según la definición anterior M y M' deben situarse del mismo lado de l y que en particular si M está en l entonces $\alpha(M) = (M)$.
Si $k < 1$, se tiene una ***compresión propia*** y cada punto que no está en l es llevado en un punto más cercano a l.
Si $k > 1$, se tiene una ***dilatación*** y cada punto que no está en l es llevado en un punto más alejado de l.
Si $k = 1$, todo punto queda fijo y por tanto α es la trasformación identidad.

Teorema 47. *Toda compresión α con eje l y coeficiente k en $\mathbb{R}^+$ es una trasformación afín.*

Demostración. 1). α es biyectiva. Como para cada M en π existe por M una única perpendicular a l y sobre esta para cada M' del mismo lado de l existe un único M tal que $kMP = M'P$ se sigue que cada M' de π posee una única imagen inversa M en π y por tanto α es biyectiva.
2). α preserva colinealidad. Sean A, B y C colineales en π y $n = \overleftrightarrow{AB}$ entonces:
a). Si n es perpendicular a l entonces por definición de compresión A', B' y C' están sobre n o sea $\alpha(n) = n$.
b). Si n es paralela a l, se llaman A', B' y C' las imágenes de A, B y C bajo α y A_0, B_0 y C_0 los pies de las perpendiculares trazadas por A, B y C a l entonces $k\overline{AA_0} = \overline{A'A_0}$, $k\overline{BB_0} = \overline{B'B_0}$, $k\overline{CC_0} = \overline{C'C_0}$ y como n es la paralela $AA_0 = BB_0 = CC_0$ o sea $kAA_0 = kBB_0 = kCC_0$ y por tanto $A'A_0 = B'B_0 = C'C_0$ y así A', B' y C' son colineales sobre una paralela a l.
c). Si n interseca a l en un punto P.

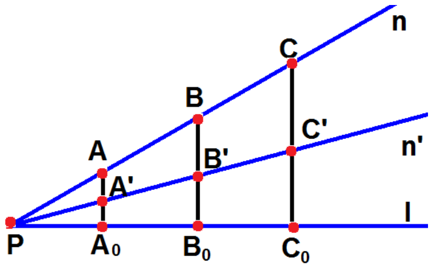


figura 89

Sean A_0, B_0 y C_0 los pies de las perpendiculares a l trazadas por A, B y C y sean A', B' y C' sobre $\overline{AA_0}$, $\overline{BB_0}$, $\overline{CC_0}$ respectivamente tales que

$$\frac{A'A_0}{AA_0} = \frac{B'B_0}{BB_0} = \frac{C'C_0}{CC_0} = k.$$

Como la recta $n = \overleftrightarrow{AB}$ tiene pendiente m_n tal que $m_n = \frac{AA_0}{PA_0} = \frac{BB_0}{PB_0} = \frac{CC_0}{PC_0}$ y las rectas $\overleftrightarrow{PA'}, \overleftrightarrow{PB'}, \overleftrightarrow{PC'}$ tiene pendientes

$$m_{A'} = \frac{A'A_0}{PA_0}; \quad m_{B'} = \frac{B'B_0}{PB_0}; \quad m_{C'} = \frac{C'C_0}{PC_0}$$

respectivamente, se sigue que $m_{A'} = m_{B'} = m_{C'} = km_n$ y por tanto A', B' y C' están sobre una recta n' que pasa por el punto P de intersección de n y l y de pendiente k veces la de la recta n y así, de 1). y 2). se concluye que α es una transformación afín. $\square$

Observe lo siguiente:

1). Si α es una compresión con eje l y coeficiente k y β es una compresión con eje l y coeficiente $\frac{1}{k}$ y X es un punto cualquiera del plano, entonces:
$(\beta \circ \alpha)(X) = \beta(\alpha(X)) = \beta(X') = X''$ donde $k\overline{XP} = \overline{X'P}$ y P es el pie de la pie de la perpendicular por X a l y $\frac{1}{k}\overline{X'P} = \overline{X''P}$.
Es decir, $k\overline{XP} = k\overline{X''P}$ y por tanto $X = X''$ luego $\alpha^{-1} = \beta$ y esto significa que α^{-1} es una compresión con eje l y coeficiente $\frac{1}{k}$.
2). Si α es una compresión con eje l y coeficiente k, β es una compresión con eje l y coeficiente t y X es un punto cualquiera del plano, entonces:
$(\beta \circ \alpha)(X) = \beta(\alpha(X)) = \beta(X') = X''$ donde $k\overline{XP} = \overline{X'P}$ y P es el pie de la perpendicular por X a l y $t\overline{X'P} = \overline{X''P}$.
Por lo tanto $(\beta \circ \alpha)(X) = X''$ donde $\overline{X''P} = t\overline{X'P} = t\big(k\overline{XP}\big) = (tk)\overline{XP}$, es decir, $\beta \circ \alpha$ es una compresión con eje l y coeficiente tk.
En consecuencia, si se llama Γ al conjunto de todas las compresiones con eje l y coeficientes en $\mathbb{R}^+$ se concluye de las dos observaciones anteriores que $(\Gamma, \circ)$ es un grupo.

3). Análogamente al caso de las homotecias se puede considerar para las compresiones coeficientes negativos y en este caso, cada compresión con eje l y coeficiente $k < 0$ se interpreta como el producto en cualquier orden de un compresión con eje l y coeficiente $-k > 0$ y una reflexión ordinaria en l.

4). Si se considera l como eje X y cualquier perpendicular a l en un punto O como eje Y, entonces se tiene que si $M(x, y)$ y $M'(x', y')$ son puntos del plano tales que $\alpha(M) = M'$ entonces $k\overline{MP} = \overline{M'P}$ y se tiene que: $OP = x = x'$, $PM = y$ y $PM' = y'$ por tanto $x' = x$ y $y' = ky$, luego la representación analítica para una compresión de eje X y coeficiente k.

$$\alpha(x, y) = (x, ky).$$

4.2.3. Compresión Oblicua.

Definición 36. *La aplicación $\alpha : \pi \to \pi$ que aplica el punto M del plano en el punto M' se llama* **compresión oblicua** *con eje $\overleftrightarrow{OX}$ en la dirección de $\overleftrightarrow{OY}$ y coeficiente k.*

Sean $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ dos rectas, no necesariamente perpendiculares y k en $\mathbb{R}^+$, para cada punto M del plano se traza una paralela a $\overleftrightarrow{OY}$, la cual interseca a $\overleftrightarrow{OX}$ en un punto P y sea el punto M' sobre esta paralela tal que $k\overleftrightarrow{MP} = k\overleftrightarrow{M'P}$.

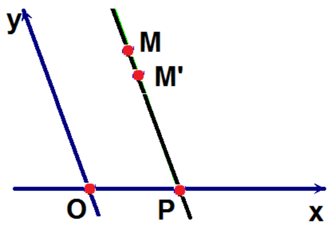


figura 90

Observe que según la definición M y M' deben situarse del mismo lado de $\overleftrightarrow{OX}$ y que en particular si M está sobre $\overleftrightarrow{OX}$ entonces $M' = M$.

Teorema 48. *Pruebe que una compresión oblicua α y coeficiente k es una transformación afín.*

La demostración es análoga a las presentadas anteriormente.

Observe lo siguiente:

1). Al aceptar coeficientes negativos en la definición de compresión oblicua se puede interpretar una compresión oblicua con eje $\overline{OX}$ en la dirección de $\overline{OY}$ y coeficiente $k < 0$ como el producto en cualquier orden de una compresión oblicua de coeficiente $-k > 0$ y una reflexión oblicua con eje $\overline{OX}$ en la dirección de $\overline{OY}$.

2). Dados $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ si $k = 1$ entonces α es la trasformación identidad y si $k = -1$ entonces α es una reflexión oblicua con eje $\overline{OX}$ en dirección de $\overline{OY}$.

3). Análogamente a lo realizado para las compresiones se puede probar que el conjunto de todas las compresiones oblicuas con $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ dados y coeficientes en $\mathbb{R}^+$ es un grupo abeliano.

4). Si $\overline{OX}$ y $\overline{OY}$ se consideran como ejes oblicuos de un sistema de coordenadas y $M(x,y), M'(x',y)$ son puntos del plano tales que $\alpha(M) = M'$ entonces una compresión oblicua α con eje $\overline{OX}$ en la dirección de $\overline{OY}$ y coeficiente k, tiene como representación analítica la expresión

$$\alpha(x,y) = (x, ky).$$

4.2.4. Rotación Hiperbólica.

Definición 37. *Sean $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ rectas diferentes, k en $\mathbb{R}^+$ αla compresión oblicua con eje $\overleftrightarrow{OX}$ paralela a $\overleftrightarrow{OY}$ y coeficiente k y β la compresión oblicua con eje $\overleftrightarrow{OY}$ paralela a $\overleftrightarrow{OX}$ y coeficiente $\frac{1}{k}$, entonces el producto $\rho_k = \beta \circ \alpha$ se llama* **Rotación Hiperbólica**.

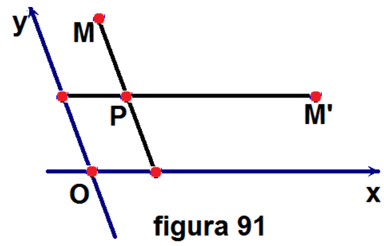


figura 91

Observe que:

1). Una rotación hiperbólica es una transformación afín ya que es el producto de transformaciones afines y cada punto M del plano en un punto M' a través de P.

2). Si $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ se consideran como ejes de un sistema de coordenadas y $M(x,y), M(x',y')$ son tales que $\rho_k(M) = M'$ entonces:

$$\rho_k(M(x,y)) = (\beta \circ \alpha)(x,y) = \beta(\alpha(x,y)) = \beta(x,ky) = \left(\frac{x}{k}, ky\right) = M'(x'y').$$

Es decir, una rotación hiperbólica ρ_k de coeficiente k tiene como expresión analítica:

$$\rho_k(x,y) = \left(\tfrac{x}{k}, ky\right).$$

3). La razón del nombre de esta transformación es: "Si un punto $P(r,s)$ está sobre la hipérbola $xy = C$ entonces su imagen bajo ρ_k, $P'(r',s')$ está sobre la misma hipérbola," ya que si $P(r,s)$ está sobre la hipérbola, entonces $rs = C$ entonces $r's' = \frac{r}{k}$, $ks = rs = C$ y así $P'(r',s')$ está sobre la hipérbola $xy = C$.

4). Bajo una rotación hiperbólica puntos sobre $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ van en puntos sobre las mismas rectas

y el punto O es invariante.
5). Bajo una rotación hiperbólica las áreas de figuras se preservan ya que bajo la compresión sobre el eje $\overleftrightarrow{OX}$ y coeficiente k todas las áreas son multiplicadas por k pero la compresión con eje $\overleftrightarrow{OY}$ y coeficiente $\frac{1}{k}$ todas las áreas se multiplican por $\frac{1}{k}$.

4.2.5. Rotación Elíptica.

Definición 38. *Sea l una recta dada, k un real positivo, α la comprensión con eje l y coeficiente k y ρ_θ la rotación con centro en un punto O de l y ángulo de medida θ, entonces la transformación tal que $\rho_l = \alpha \circ \rho_\theta \circ \alpha^{-1}$ se llama* **Rotación Elíptica**.

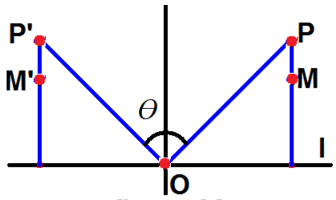


figura 92

Observe que:
1). Una rotación elíptica es una transformación afín por ser el producto de transformaciones afines y que ella lleva a cada punto M del plano en un punto M' a través de P y P'.
2). Sea l la recta l se toma como eje X y una recta perpendicular a l en un punto O de ella como eje Y definiene un sisitema rectangular de coordenadas y

$$M(x,y) \text{ y } M'(x',y'),$$

son puntos del plano tales que $\rho_l(M) = M'$, entonces:

$$\begin{aligned}
\rho_l(M(x,y)) &= \big(\alpha \circ \rho_\theta \circ \alpha^{-1}\big)(x,y) \\
&= \alpha\Bigg(\rho_\theta\big(\alpha^{-1}(x,y)\big)\Bigg) \\
&= \alpha\big(\rho_\theta(x, \frac{y}{k})\big) \\
&= \alpha\big(xcos\theta - \frac{y}{k}sen\theta, xsen\theta + \frac{y}{k}cos\theta\big) \\
&= \big(xcos\theta - \frac{y}{k}sen\theta, kxsen\theta + ycos\theta\big) \\
&= M'(x'y').
\end{aligned}$$

Es decir, ρ_l tiene como representación analítica la expresión:

$$\rho_l(x,y) = \big(xcos\theta - \tfrac{y}{k}sen\theta, kxsen\theta + ycos\theta\big).$$

3). La razón para el nombre de rotación elíptica es que ella deja invariantes las elipses con centro en O, eje mayor sobre l y cuya elipticidad k esté dada por la razón ente los semiejes de la elipse (menor-mayor). Para probar esta afirmación obsérvese que si $P(x,y)$ es un punto del plano que está sobre una elipse dada de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

con $a>b$ entonces su imagen $P'(x',y')$ bajo ρ_l está sobre la misma elipse, ya que

$$\begin{aligned}
\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2} &= \frac{(xcos\theta-\frac{y}{k}sen\theta)^2}{a^2}+\frac{\big(kxsen\theta+ycos\theta\big)^2}{b^2}\\
&= \frac{x^2cos^2\theta-\frac{2xy}{k}cos\theta sen\theta+\frac{y^2}{k^2}sen^2\theta}{a^2}+\frac{k^2x^2sen^2\theta+2kxycos\theta+sen\theta+y^2cos^2\theta}{b^2}\\
&= \frac{k^2x^2cos^2\theta-2kxycos\theta sen\theta+y^2sen^2\theta}{k^2a^2}+\frac{k^2x^2sen^2\theta+2kxycos\theta+sen\theta+y^2cos^2\theta}{b^2}\\
&= \frac{k^2x^2cos^2\theta-2kxycos\theta sen\theta+y^2sen^2\theta}{b^2}+\frac{k^2x^2sen^2\theta+2kxycos\theta+sen\theta+y^2cos^2\theta}{b^2}\\
&= \frac{k^2x^2(cos^2\theta+sen^2\theta)+y^2(cos^2\theta+sen^2\theta)+2kxycos\theta sen\theta-2kxycos\theta sen\theta}{b^2}\\
&= \frac{k^2x^2\big(cos^2\theta+sen^2\theta\big)+y^2\big(cos^2\theta+sen^2\theta\big)}{b^2}\\
&= \frac{k^2x^2+y^2}{b^2}\\
&= \frac{x^2}{\frac{b^2}{k^2}}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}\\
&= \frac{y^2}{b^2}\\
&= 1,
\end{aligned}$$

donde $k=\frac{b}{a}$, así $P'(x,'y')$ satisface la ecuación de la elipse dada y por tanto $P'(x,'y')$ está sobre ella.

4.2.6. Cizallamiento.

Definición 39. *Sean $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ los ejes de un sistema de coordenadas cartesianas, no necesariamente perpendiculares en el plano, entonces la aplicación $\alpha:\pi\to\pi$ que lleva cada punto $M(x,y)$ en el punto $M'(x',y')$ donde:*

$$x'=x+ky$$
$$y'=y \qquad k\in\mathbb{R},$$

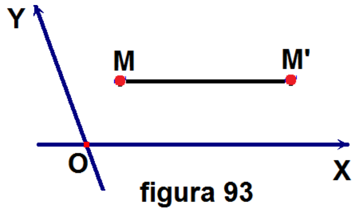


figura 93

se llama **cizallamiento** *del plano.*

El significado geométrico de esta aplicación es el siguiente:
Cada punto M del plano va en un punto M' sobre una recta paralela $\overleftrightarrow{OX}$ por M y como $\overrightarrow{MM'} = (x'-x, y'-y) = (ky, 0)$ entonces $|\overrightarrow{MM'}| = |k||y|$ y por tanto cada punto M es desplazado horizontalmente una distancia proporcional a su distancia al eje X.
Si $ky > 0$ la dirección de $\overrightarrow{MM'}$ apunta en la dirección positiva del eje X y si $ky < 0$ la dirección de $\overrightarrow{MM'}$ coincide con la dirección negativa del eje X. De lo anterior se deduce que si $k > 0$, puntos por encima del eje X se mueve hacia la derecha y puntos por debajo del eje X se mueve hacia la izquierda y viceversa para el caso en que $k < 0$. Cualquiera que sea el caso, los puntos del eje $\overleftrightarrow{OX}$ quedan fijos y esto significa que los semiplanos de frontera $\overleftrightarrow{OX}$ se mueve en sentido opuesto como las cuchillas de una cizalla. [1]
Un cizallamiento está determinado por el eje X y un par de puntos correspondientes, M y M' que no estén sobre $\overleftrightarrow{OX}$ con esta información la imagen de un punto N se puede obtener como se ilustra en la siguiente figura.

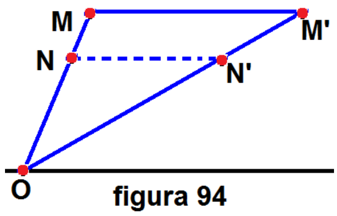


figura 94

Teorema 49. *En un sistema dado de coordenadas, un cizallamiento α del plano de coeficiente k es una transformación afín.*

Demostración. Sea $\alpha : \pi \to \pi$ un cizallamiento y k un real positivo entonces:
1).α es biyectiva.
a).α es función. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en π tales que $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ entonces $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, y por ello $x_1 = x_2$, y $ky_1 = ky_2$, luego $x_1+ky_1 = x_2+ky_2$ y $y_1 = y_2$ entonces $(x_1+ky_1, y_1) = (x_2+ky_2, y_2)$ o sea que $\alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$.

[1] Cizalla es una herramienta compuesta por dos hojas con bisel, para cortar planchas delgadas de diversos materiales. Un cizalla se asemeja a unas tijeras grandes y cortan en frío planchas de metal.

b). α es inyectiva. Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ en π tales que $\alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$ entonces $(x_1 + ky_1, y_1) = (x_2 + ky_2, y_2)$, luego $x_1 + ky_1 = x_2 + ky_2$ y $y_1 = y_2$ o sea $(x_1 - x_2) + k(y_1 - y_2) = 0$ y como $y_1 = y_2$ se sigue que $x_1 = x_2$ y por tanto $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.
c). α es sobreyectiva. Sea Y en π y tal que $Y = (x, y)$, es suficiente tomar $X = (x - ky, y)$, ya que

$$\alpha(X) = \alpha(x - ky, y) = (x - ky + ky, y) = (x, y) = Y.$$

2). α preserva colinealidad.
Sean $A(x_a, y_a), B(x_b, y_b)$ y $C(x_c, y_c)$ puntos colineales π entonces

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y por tanto si $A'(x_a, y_a), B'(x_b, y_b)$ y $C'(x_c, y_c)$ son las imágenes de A, B y C bajo α, entonces:

$$\begin{vmatrix} x'_a & y'_a & 1 \\ x'_b & y'_b & 1 \\ x'_c & y'_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a + ky_a & y_a & 1 \\ x_b + ky_b & y_b & 1 \\ x_c + ky_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y así A', B' y C' son colineales. □

Observe además que:
1). Si α es un cizallamiento de coeficiente k y β es un cizallamiento de coeficiente t entonces:

$$(\alpha \circ \beta)(x, y) = \alpha(\beta(x, y)) = \alpha(x + ty, y) = ((x + ty) + ky, y) = ((x + ty) + ky, y) = (x(k + t)y, y),$$

y por tanto $\alpha \circ \beta$ es cizallamiento de coeficiente $k + t$.
2). Si α es un cizallamiento de coeficiente k y β es un cizallamiento de coeficiente $-k$ entonces:

$$(\beta \circ \alpha)(x, y) = \beta(\alpha(x, y)) = \beta(x + ky, y) = ((x + ky, y) - ky, y) = (x, y) = I(x, y),$$

y por tanto $\beta = \alpha^{-1}$ y esto significa que α^{-1} es un cizallamiento de coeficiente $-k$.
Si se llama Ξ al conjunto de todos los cizallamientos de coeficientes en $\mathbb{R}$ se concluye de las partes anteriores que en un sistema de coordenadas dados $(\Xi, \circ)$ es un grupo abeliano.

4.3. Propiedades de las Aplicaciones Afines.

Teorema 50. *$\alpha : \pi \to \pi'$ una aplicación afín, entonces:*
a). Si l es una recta en π entonces $\alpha(l)$ es una recta en π'.

b). Si l es paralela a m entonces $\alpha(l)$ es paralela a $\alpha(m)$.

c). Si l interseca a m en P entonces $\alpha(l)$ interseca a $\alpha(m)$ en $\alpha(P)$.

Demostración. a). Sea $l = \overleftrightarrow{AB}$ una recta en π con $A \neq B$ entonces α es inyectiva y por esta razón $A' \neq B'$, sea $l' = \overleftrightarrow{A'B'}$:

i). Al tomar C en l se tiene que A, B y C son colineales y siendo α una aplicación afín preserva la colinealidad, por ello A', B' y $\alpha(C)$ son colineales, en consecuencia $\alpha(C)$ está en $\overleftrightarrow{A'B'} = l'$ y esto significa que $\alpha(l) \subseteq l'$.

ii). Al tomar C' en l' se encuentra que A', B' y C' son colineales y como α^{-1} es aplicación afín, sus imágenes inversas A, B y $\alpha^{-1}(C')$ son colineales y así $\alpha^{-1}(C')$ está en $\overleftrightarrow{AB} = l$ y por ello $l' \subseteq \alpha(l)$.

De las partes i). y ii). se concluye que $\alpha(l) = l'$.

b). Supongamos que $\alpha(l)$ no es paralela con $\alpha(m)$ entonces $\alpha(l)$ y $\alpha(m)$ se intersecan en un punto P', como α es inyectiva, la única imagen inversa P de P' está en l y m, es decir, l interseca a m en P (absurdo) por tanto $\alpha(l)$ y $\alpha(m)$ son paralelas.

c). Sea P el punto de intersección de l y m entonces $\alpha(P)$ está en $\alpha(l)$ y $\alpha(m)$ y esto significa que $\alpha(l)$ interseca a $\alpha(m)$ en $\alpha(P)$. $\square$

Cuando se desarrolló la teoría de las transformaciones Ortogonales y de Semejanza se probaron teoremas análogos al teorema 50 y se probó que la imagen de un segmento de recta es otro segmento de recta y que la razón en que un punto divide a un segmento de recta es invariante. Estas propiedades también son ciertas para las transformaciones afines, sin embargo su demostración es complicada. Por mucho tiempo se creyó que estas propiedades no se deducían desde la definición de aplicación afín y que únicamente se podrían tener si se adicionaban exigencias a la definición; por ejemplo, la exigencia de que una aplicación afín sea continua o la exigencia de que preserve el orden entre tres puntos colineales. Esta fue la primera aproximación hecha por los fundadores de la teoría de las Transformaciones afines y proyectivas entre los que cuentan Poncelet, Möbius y Chasles. Fue hasta 1880 que el geómetra francés Darboux's estableció que estas condiciones adicionales no son necesarias, y que estas condiciones, como las siguientes dos propiedades que a continuación se probarán, pueden ser deducidas de las propiedades ya mencionadas y establecidas para una transformación afín.

En su artículo "*El teorema fundamental de la Geometría Proyectiva* " (Math, Ann. 17, 55-61, 1880) Darboux's prueba que la razón cruzada es preservada por una transformación proyectiva y el método de prueba se reduce esencialmente a la prueba de preservación de la razón ordinaria sobre una recta bajo una proyección afín.

Antes de considerar las propiedades mencionadas anteriormente, se probará un teorema elemental que se deduce de la definición de una aplicación afín.

Teorema 51. *Sea $\alpha : \pi \to \pi$ una aplicación afín. Si C es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ entonces $\alpha(C) = C'$ es el punto medio del segmento determinado por $A' = \alpha(A)$ y $B' = \alpha(B)$.*

Demostración. Sea C el punto medio de $\overline{AB}$ y l_1, l_2 rectas diferentes de $\overleftrightarrow{AB}$ que pasan por A y m_1, m_2 rectas que pasan por B y respectivamente paralelas a l_1 y l_2 entonces l_1 y m_2 y l_2 y m_1 se intersecan en los puntos E y D respectivamente y con esto, la figura $ADBE$ es un paralelogramo y de hecho, sus diagonales se cortan en su punto medio, es decir, $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en su punto medio C.

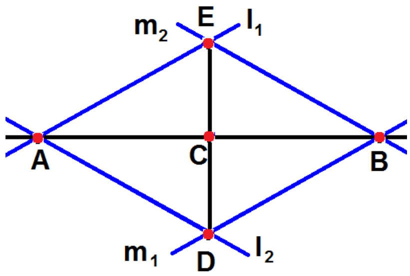


figura 95

Por el teorema 50, una aplicación afín preserva paralelismo y puntos de corte con lo que se encuentra que: $\alpha(m_1)$ y $\alpha(l_1)$, son paralelas a $\alpha(m_2)$ $\alpha(l_2)$, $\alpha(A) = A'$ es el punto de corte de $\alpha(l_1) \frown \alpha(l_2)$, $\alpha(D) = D'$ es el unto de corte de $\alpha(l_1) \frown \alpha(m_2)$ y $\alpha(m_1) \frown \alpha(m_2)$ es $\alpha(B) = B'$, por tanto la figura $A'D'B'E'$ es un paralelogramo y como tal sus diagonales se cortan en el punto medio.
De este modo, $\overline{A'B'}$ interseca a $\overline{E'D'}$ en $\alpha(C) = C'$ y así C' es el punto medio de $\overline{A'B'}$. ◻

Corolario 1. *Si $C_1, C_2, ..., C_n$ son puntos que dividen al segmento $\overline{AB}$ en n partes iguales entonces sus imágenes bajo una aplicación afín $C_1', C_2', ..., C_n'$ dividen al segmento determinado por $A' = \alpha(A)$ y $B' = \alpha(B)$ en n partes iguales.*

Demostración. Si $C_1', C_2', ..., C_n'$ dividen al segmento $\overline{AB}$ en n partes iguales entonces se tiene que $AC_1' = C_1'C_2' = ... = C_{n-1}'B$ y por ello C_1' es el punto medio de $\overline{AC_2}$ lo que indica como C_1', es el punto medio de $\overline{A'C_2'}$ y así sucesivamente se razona para los demás puntos. ◻

Suponga ahora que A y B son dos puntos fijos sobre una recta l y A', B' son sus imágenes sobre una recta l' bajo una aplicación afín. Al tomar A como origen y B como el punto de coordenada 1 sobre l, de manera natural se puede tomar A' como origen sobre l' y $\overline{A'B'}$ como segmento unidad y aplicando el corolario anterior se tiene como consecuencia inmediata que

todo punto del segmento $\overline{AB}$ que tiene coordenada racional r va en un punto de $\overline{A'B'}$ con la misma coordenada r y que puntos sobre l, no necesariamente dentro de $\overline{AB}$, con coordenada racional tienen como imagen puntos sobre l' con la misma coordenada racional.
Observe además que puntos con coordenadas irracionales se aplican, a través de una transformación afín, en puntos con coordenadas irracionales, ya que si esto no sucediera, la aplicación inversa que también es afín, llevaría puntos con coordenada racional en puntos de coordenada irracional lo que es contradictorio con lo ya establecido. A continuación se demuestra que el orden de puntos colineales es preservado, lo mismo que la razón de segmentos y la continuidad.

Lema 1. De Darboux's. *Bajo una aplicación afín $\alpha : \pi \to \pi'$ la imagen de un punto X en el anterior de $\overline{AB}$ es un punto X' en el interior de $\overline{A'B'}$, donde $A' = \alpha(A)$ y $B' = \alpha(B)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que un punto C en el exterior de $\overline{AB}$ colineal con A y B tiene una imagen bajo α en $\overleftrightarrow{A'B'}$ en el exterior de $\overline{A'B'}$ ya que si un punto X en el interior de $\overline{AB}$ fuera llevado por α en un punto X' de $\overleftrightarrow{A'B'}$ en el exterior de $\overline{A'B'}$ entonces la aplicación afín α^{-1} llevaría el punto X' del exterior de $\overline{A'B'}$ en el punto X del interior $\overline{AB}$, lo que es contradictorio con lo que se demostrará a continuación:
Sean A y B puntos diferentes en π y C un punto de la recta AB fuera de $\overline{AB}$. Como $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{CB}$ tiene sentido opuesto su razón es negativa y se puede escribir como $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -k^2$ para algún real positivo k.
Sean $t = \frac{AB}{k+1}$, $r = \frac{AB}{k-1}$ y P, Q puntos de $\overleftrightarrow{AB}$ con P en el interior de $\overline{AB}$ y Q en el exterior de $\overline{AB}$ tales que $PB = t$ y $BQ = r$ entonces

$$AP = AB - PB = (k+1)PB = kPB \text{ y } AQ = AB + BQ = (k-1)BQ + BQ = kBO$$

y por tanto $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB}$ y $\overrightarrow{AQ} = -k\overrightarrow{QB}$.
Al introducir un sistema de coordenadas en $\overleftrightarrow{AB}$ con A como origen y $\overline{AB}$ como segmento unidad se tiene que:

$$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{PB} = \frac{k}{k+1}\overrightarrow{AB} \text{ y } \overrightarrow{AQ} = -k\overrightarrow{CB} = \frac{k}{k-1}\overrightarrow{AD}$$

y por lo tanto $x_P = \frac{k}{k+1}$ y $x_Q = \frac{k}{k-1}$.
Como $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = -k^2$ se obtiene que $\frac{X_C}{1-X_C} = -k^2$ es decir,

$$X_C = \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{k+1} + \frac{k}{k-1}\right) = \frac{1}{2}(x_P + x_Q)$$

y por tanto C es el punto medio de $\overline{PQ}$.
Al trazar por A y B rectas paralelas l y m diferentes de $\overleftrightarrow{AB}$ y escoger sobre l dos puntos M y

N de manera que A sea el punto medio de $\overline{MN}$ se encuentra que $\overleftrightarrow{MQ}$ y $\overleftrightarrow{ML}$ intersecan a m en dos puntos, sean tales puntos K y L respectivamente.

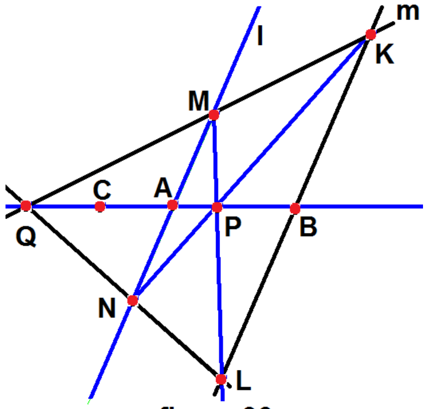


figura 96

Como l es paralela a m entonces $\triangle AMQ \sim \triangle BKQ$ y $\triangle ANQ \sim \triangle BLQ$ por lo tanto: $\sphericalangle MAQ \cong \sphericalangle KBQ$; $\frac{AM}{BK} = \frac{AQ}{BQ} = k$ y $\frac{AN}{BL} = \frac{AQ}{BQ} = k$ es decir, $\frac{AM}{BK} = \frac{AN}{BL} = k$ luego $BK = BL$ y por consiguiente se tiene que $\frac{AM}{BL} = k = \frac{AP}{PB}$ y como $\sphericalangle MAP \cong \sphericalangle PBL$ se sigue que $\triangle AMP \sim \triangle BLP$ por tanto $\sphericalangle APM \cong \sphericalangle BPL$ y así $\overleftrightarrow{ML}$ pasa por P. En forma la recta NK análoga pasa P con lo que se concluye que $\overleftrightarrow{ML}$ y $\overleftrightarrow{NK}$ se intersecan en P.

Como una aplicación afín preserva colinealidad, paralelismo, punto medios y puntos de corte, entonces la imagen de la figura bajo α es una figura de las mismas características y siendo así, uno de los puntos $P' = \alpha(P)$ o $Q' = \alpha(Q)$ está en el interior de $\overline{A'B'}$ y el otro en el exterior.

Al suponer que Q' está en el interior de $\overline{A'B'}$ se tiene que P' está en el exterior y por ello $\overrightarrow{A'Q'} = j\overrightarrow{Q'B'}$ y $\overrightarrow{A'P'} = -j\overrightarrow{P'B'}$ para algún número real positivo en j.

Como $C' = \alpha(C)$ es el punto medio de $\overrightarrow{P'Q'}$ entonces en un sistema de coordenadas en $\overrightarrow{A'B'}$ con A' como origen y $\overline{A'B'}$ como segmento unidad, se tiene:

$$x_{C'} = (\frac{1}{2}x_{P'} + x_{Q'}) = \frac{1}{2}(\frac{j}{j-1} + \frac{j}{j+1}) = \frac{j^2}{j^2-1}$$

y por tanto $\frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}} = \frac{X_{C'} - X_{A'}}{X_{B'} - X_{C'}} = -j^2$ y en consecuencia C' divide a $\overline{A'B'}$ exteriormente en la razón j^2 y así C' está en $\overleftrightarrow{A'B'}$ fuera de $\overline{A'B'}$. □

Corolario 2. *Bajo una aplicación afín α la imagen de un segmento de recta es un segundo de recta.*

Demostración. Según el lema de Darboux's, la imagen bajo la aplicación afín α de un punto del segmento $\overline{AB}$ es un punto del segmento $\overline{A'B'}$, es decir $\alpha(\overline{AB}) \subseteq \overline{A'B'}$.

Pero α^{-1} también es una aplicación afín y por ello todo punto de $\overline{A'B'}$ tiene su imagen a través de α^{-1} en el segmento $\overline{AB}$ o sea $\alpha^{-1}(\overline{A'B'}) \subseteq \overline{AB}$ y en definitiva se tiene que $\alpha(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$ □

Corolario 3. *Bajo una aplicación afín los puntos interiores de un triángulo (paralelogramo) tienen su imagen en el interior de un triángulo (paralelogramo).*

Demostración. a). Sea ABC un triángulo dado, esto indica que los puntos A, B y C son no colineales y sus imágenes $\alpha(A) = A'$, $\alpha(B) = B'$, $\alpha(C) = C'$ son no colineales por tanto la figura $A'B'C'$ es un triángulo.
Sea X un punto en el interior del triángulo ABC entonces $\overleftrightarrow{AX}$ interseca a $\overleftrightarrow{BC}$ en un punto D en el interior de $\overline{BC}$ y X está en el interior de $\overline{AD}$, por tanto, aplicando el lema de Darboux's D' es un punto de $\overline{B'C'}$ y X' un punto de $\overline{A'D'}$ y así X' está en interior del triángulo $A'B'C'$.
b). Sea $ABCD$ un paralelogramo, como una aplicación afín preserva paralelismo y puntos de corte se sigue que su imagen bajo α, $A'B'C'D'$ es también un paralelogramo.
Sea X un punto del interior del paralelogramo dado entonces X es el centro del paralelogramo o es un punto del interior de alguno de los cuatro triángulos que se obtienen tomando dos lados adyacentes del paralelogramo y una diagonal. Si X es el centro del paralelogramo entonces X es el punto de intersección de sus diagonales y puesto que una aplicación afín preserva puntos medios y puntos de corte se tiene que X' es el punto de corte de las imágenes de las diagonales del paralelogramo $ABCD$ y por tanto X' es el centro del paralelogramo imagen $A'B'C'D'$.
Si X está en el interior de uno de los cuatro triángulos descritos anteriormente se encuentra, por la parte a). que X' está en el interior del correspondiente triángulo imagen y en consecuencia X' esta en el interior del paralelogramo imagen. □

De este corolario se desprende que la imagen de un conjunto acotado bajo una aplicación afín es un conjunto acotado ya que todo conjunto acotado puede encerrarse con un triángulo, es decir, puede hacerse consistir enteramente en puntos del interior de un triángulo y por tanto su imagen puede hacerse consistir en puntos del interior del triángulo imagen y por consiguiente esta imagen también es acotada.

Teorema 52. *Bajo una aplicación afín α la imagen de un punto C que divide al segmento $\overline{AB}$ interna o externamente en la razón k es un punto C' que divide al segmento $\overline{A'B'}$ en la misma razón.*

Demostración. consideramos diferentes casos de acuerdo con el hecho de que k sea racional o irracional y la posición de C con respecto de A y B.
a). C entre A y B.
i). *k racional.* Sea $l = \overleftrightarrow{AB}$, como $\frac{AC}{CB} = k$ entonces $AB = (k+1)CB$ y por tanto $\overline{AB}$ queda dividido por los puntos $C_1, C_2, ..., C_k = C$ en $(k+1)$ partes iguales a $\overline{CB}$, por el corolario al teorema del punto medio $\overline{A'B'}$ queda dividido por los puntos $C_1', C_2', ..., C_k' = C'$ en $(k+1)$ partes iguales a

$\overline{C'B'}$, es decir $A'B' = (k+1)C'B'$ y como $A' - C' - B'$ entonces $A'C' = A'B' - C'B' = kC'B'$.
ii). *k irracional.* Suponga $\frac{A'C'}{C'B'} > \frac{AC}{CB} = k$, sea $l = \overleftrightarrow{AB}$ y establezca en l un sistema de coordenadas con A como origen y $\overline{AB}$ como segmento unidad, entonces se puede establecer en l' un sistema de coordenadas con A' como origen y B' como el punto de coordenada 1.

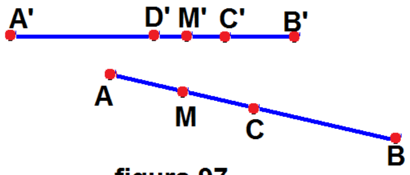


figura 97

Sea D' entre A' y B' tal que $\frac{AC}{CB} = \frac{A'D'}{D'B'} = k$ entonces $C' \neq D'$, luego se puede escoger M' entre D' y C' tal que la coordenada M' sea racional.
Como $\frac{A'D'}{D'B'} = \frac{AC}{CB} < \frac{A'C'}{C'B'}$ entonces C' está situado entre D' y B' y por tanto C' se encuentra entre M' y B' lo que significa que $\frac{A'D'}{D'B'} < \frac{A'M'}{M'B'}$ y C está situado entre $\alpha^{-1}(M') = M$ y B y por ello:

$$k = \frac{AC}{CB} = \frac{A'D'}{D'B'} < \frac{A'M'}{M'B'} = \frac{AM}{MB}$$

y así, $AM > kMB$ (absurdo) ya que para que esto fuera posible se debería tener M entre C y B.
De la misma manera se muestra que $\frac{A'C'}{C'B'} < \frac{AC}{CB}$ lleva una contradicción y por tanto que se debe tener que $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} = k$.
b). C en $\overleftrightarrow{AB}$ por fuera de $\overline{AB}$.
k racional o irracional. Si C en $\overleftrightarrow{AB}$ fuera de $\overline{AB}$ se tiene que B está entre A y C o A está entre B y C. Suponga que B está entre A y C entonces B' está entre A' y C' y por la parte a). se tiene que $\frac{AB}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$ entonces $\frac{AB}{BC} + 1 = \frac{A'B'}{B'C'} + 1$ y por tanto $\frac{AC}{BC} = \frac{A'C'}{B'C'}$ y como C y C' están fuera de $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$ respectivamente entonces $\frac{A'C'}{C'B'} = \frac{AC}{CB} = k$. □

Teorema 53. Teorema de los tres puntos. *Sean A, B y C puntos no colineales en π y A', B' y C' puntos no colineales en π' entonces existe una única aplicación afín $\alpha : \pi \to \pi'$ tal que las imágenes de A, B y C son A', B' y C' respectivamente.*

Demostración. 1.Existencia. Se introduce en π un sistema afín de coordenadas con C como origen $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ como ejes coordenados y A y B como los puntos unidad sobre los respectivos ejes.
Análogamente se introduce un sistema afín de coordenadas en π'; esto significa que las coordenadas de los puntos mencionados son las siguientes:

$$C(0,0), A(1,0), B(0,1) \text{ y } C'(0,0), A'(1,0), B'(0,1).$$

Se construye una aplicación afín α de π en π' de la siguiente manera: sea M un punto de π de coordenadas (x, y) y sea M' el punto de π' que tiene las mismas coordenadas (x, y) que M en el sistema de coordenadas para π', definimos $\alpha : \pi \to \pi'$ tal que $\alpha(M(x, y)) = M'(x, y)$.
a). *α es biyectiva.* ya que es posible definir la aplicación inversa de la misma manera que α con los papeles de π y π' intercambiados.
b). *α preserva colinealidad.* Se demuestra a continuación que la imagen de una recta l en π es una recta l' en π'.
Sea l una recta en π entonces l tiene una ecuación de la forma $Px + Qy + R = 0$ donde P, Q y R son números reales y P, Q no son simultáneamente nulos. Sea $M(x, y)$ un punto en π entonces $M(x, y)$ está sobre l sí y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación de l. Sea l' la recta de π' que tiene la misma ecuación de l, entonces M' está sobre l' si y sólo si M está sobre l porque las coordenadas de M y M' son las mismas y las ecuaciones de l y l' son las mismas. Por tanto la imagen de una recta en l en π es una recta l' en π' y así α es una aplicación afín.
2. Unicidad. Sea $\beta : \pi \to \pi'$ otra aplicación afín tal que $\beta(A) = A'$, $\beta(B) = B'$ y $\beta(C) = C'$. Sea $M(x, y)$ un punto cualquiera de π y se traza por M paralelas a $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ entonces estas rectas intersecan a $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{CB}$ en dos puntos, sean estos P y Q entonces $\overrightarrow{CP} = x\overleftrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CQ} = y\overleftrightarrow{CB}$.
Sean P', Q' las imágenes de P y Q bajo β entonces como una aplicación afín preserva la razón se tiene que

$$\frac{\overrightarrow{C'P'}}{\overrightarrow{C'A'}} = x = \frac{\overrightarrow{CP}}{\overrightarrow{CA}}$$

$$\frac{\overrightarrow{C'Q'}}{\overrightarrow{C'B'}} = y = \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{CB}}.$$

Como adicionalmente una aplicación afín preserva paralelismo y puntos de corte entonces las rectas $\overleftrightarrow{M'P'}$ y $\overleftrightarrow{M'Q'}$ son paralelas a $\overleftrightarrow{C'B'}$ y $\overleftrightarrow{C'A'}$ respectivamente y por tanto las coordenadas de M' son (x, y) es decir, $\beta(M(x, y)) = M'(x, y) = \alpha(M(x, y))$ y en consecuencia $\alpha = \beta$. $\square$

Observe que el teorema anterior es análogo a los teoremas denominados de los tres puntos para aplicaciones ortogonales y aplicaciones de semejanza y en consecuencia, este teorema asegura que toda aplicación afín queda determinada al conocer las imágenes de tres puntos no colineales.

4.4. Representación de una Transformación Afín como el Producto de Transformaciones Afines Fundamentales.

En el contexto de esta sección se llaman transformaciones afines fundamentales a las estudiadas en la sección 4.2 del presente capítulo, como también a una transformación ortogonal o a una Afinidad que se corresponde con la siguiente definición.

Definición 40. *Una transformación afín del plano se llama una* **Afinidad** *de π si deja fijo cada punto de alguna recta l. La recta l se llama* **eje de la afinidad.**

De acuerdo con la definición, una compresión oblicua y un cizallamiento son ejemplos de afinidades.

Lema 2. *Toda transformación afín α del plano π se puede expresar como el producto de una afinidad ρ de π y una transformación de semejanza β.*

Demostración. Sean A, B y C puntos no colineales de π y A', B', C' sus respectivas imágenes bajo la transformación afín α. Sea C'' fuera de $\overline{AB}$ tal que $\triangle ABC''$ y $\triangle A'B'C'$ sean semejantes entonces por el teorema de los tres puntos para semejanzas existe una única semejanza β tal que $\beta(A) = A', \beta(B) = B'$ y $\beta(C'') = C'$. Sea ρ la afinidad de eje $\overleftrightarrow{AB}$ y tal que $\rho(C) = C''$, entonces: $(\beta \circ \rho)(A) = A' = \alpha(A)$, $(\beta \circ \rho)(B) = B' = \alpha(B)$ y $(\beta \circ \rho)(C) = C' = \alpha(C)$ luego por el teorema de los tres puntos para transformaciones afines $\beta \circ \rho = \alpha$. □

Existen dos posibles lugares para escoger C'' en el lado de $\overleftrightarrow{AB}$ donde está C y en el lado opuesto y por tanto de acuerdo con el siguiente resultado se puede limitar la afinidad a un cizallamiento o a una compresión oblicua con coeficiente positivo o negativo según el caso, además la semejanza puede ser directa u opuesta y por consiguiente no hay unicidad en la representación de la transformación afín.

Lema 3. *Sea ρ una afinidad de π que lleva A en A', con A fuera del eje l de la afinidad, entonces:*
a). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ es paralela a l entonces es un cizallamiento.
b). En cualquier otro caso ρ es una compresión oblicua sobre l en la dirección de $\overleftrightarrow{AA'}$.

La demostración se deja como ejercicio para el lector.

Lema 4. *Sea ρ una afinidad de π con eje l y A un punto de π, entonces existen dos rectas perpendiculares que pasan por A tales que sus imágenes bajo ρ también son perpendiculares.*

Demostración. Sea l el eje de ρ y A, A', en π tales que $\rho(A) = A'$, entonces:

a). Si $\rho(A) = A' = A$ entonces ρ es la transformación identidad y en este caso se pueden tomar cualquier par de rectas perpendiculares en A ya que sus imágenes bajo ρ serían las mismas y por tanto perpendiculares.

b). Si $\rho(A) = A' \neq A$, entonces:

1). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ es perpendicular a l, sean las rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ y m la paralela a l que pasa por A, entonces m es perpendicular a $\overleftrightarrow{AA'}$. Sea P la intersección de $\overleftrightarrow{AA'}$ y l, como $\rho(P) = P \in \overleftrightarrow{AA'}$ y $\rho(A) = A' \in \overleftrightarrow{AA'}$ se sigue que $\rho\left(\overleftrightarrow{AA'}\right) = \overleftrightarrow{AA'}$. Como m es paralela a l y toda transformación afín preserva paralelismo entonces $\rho(m)$ es paralela con $\rho(l) = l$ y por tanto $\rho(m)$ es perpendicular a $\rho\left(\overleftrightarrow{AA'}\right) = \overleftrightarrow{AA'}$ y así m y $\overleftrightarrow{AA'}$ son las rectas buscadas.

2). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ no es perpendicular a l, sea O el punto de corte de la mediatriz de $\overline{AA'}$ y l y S la circunferencia de centro en O y radio OA, entonces S pasa por A' y corta a l en P y Q, luego P y Q quedan fijos bajo ρ y como $\overline{PQ}$ es un diámetro de S entonces las rectas $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ subtienden un ángulo de π radianes y por esta razón son perpendiculares.

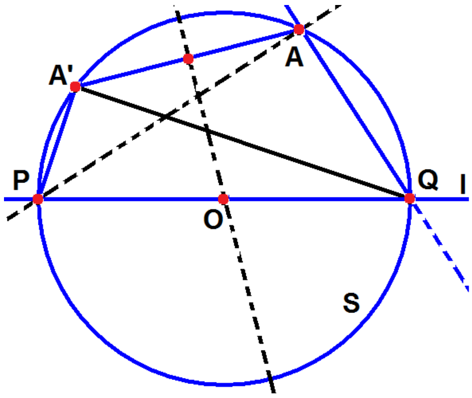


figura 98

Por la misma razón, las rectas $\overleftrightarrow{A'P}$ y $\overleftrightarrow{A'Q}$ son perpendiculares y $\rho\left(\overleftrightarrow{AP}\right) = \overleftrightarrow{A'P}$, $\rho\left(\overleftrightarrow{AQ}\right) = \overleftrightarrow{A'Q}$ se sigue que $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{AQ}$ son las rectas buscadas. □

Teorema 54. *Toda transformación afín del plano se puede representar como el producto de una transformación ortogonal y dos compresiones con ejes perpendiculares.*

Demostración. Sea α una transformación afín del plano, por el lema 2 de esta sección se tiene que $\alpha = \beta \circ \rho$ donde β es una semejanza y ρ es una afinidad. De acuerdo al lema 3, por un punto O del plano π existen dos rectas perpendiculares cuyas imágenes bajo ρ son perpendiculares en $\rho(O)$, dado que β preserva ángulos las imágenes, bajo β, de este último para de rectas también son perpendiculares en $\beta(\rho(O)) = O'$, es decir bajo α existe un par de rectas $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ tales que sus imágenes $\overleftrightarrow{O'X'}$ y $\overleftrightarrow{O'Y'}$ son perpendiculares.

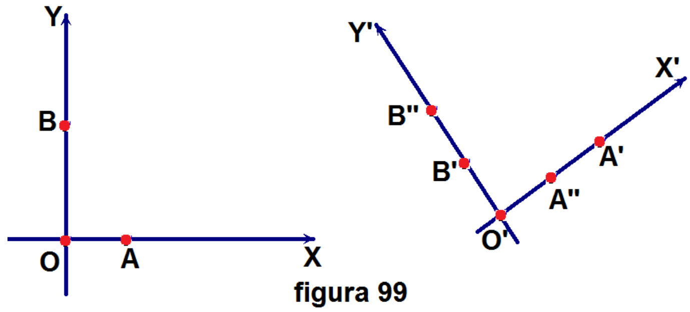


figura 99

Sean A y B puntos sobre $\overleftrightarrow{OX}$ y $\overleftrightarrow{OY}$ respectivamente y diferentes de O y sean A' y B' sus imágenes bajo α, es decir $\alpha(O) = O'$, $\alpha(A) = A'$ y $\alpha(B) = B'$.
Sea A'' Y B'' en los rayos $O'A'$ y $O'B'$ respectivamente tales que $OA = O'A''$ y $OB = O'B''$, por el teorema de los tres puntos para transformaciones ortogonales existe un única transformación ortogonal ρ tal que $\rho(O) = O'$ $\rho(A) = A''$ y $\rho(B) = B''$.
Sea λ_1 la compresión con eje $\overleftrightarrow{O'X'}$ que lleva B'' en B' y λ_2 la compresión con eje $\overleftrightarrow{O'Y'}$ que lleva A'' en A', entonces

$$(\lambda_2 \circ \lambda_1 \circ \sigma)(O) = O' = \alpha(O), \quad (\lambda_2 \circ \lambda_1 \circ \sigma)(A) = A' = \alpha(A) \quad \text{y} \quad (\lambda_2 \circ \lambda_1 \circ \sigma)(B) = B' = \alpha(B).$$

Por aplicación del teorema de los tres puntos para transformaciones afines se concluye que $\lambda_2 \circ \lambda_1 \circ \sigma = \alpha$. □

Observe que el coeficiente de λ_1 es $k_1 = \frac{O'B'}{O'B''}$ y el coeficiente de λ_2, es $k_2 = \frac{O'A'}{O'A''}$

Teorema 55. *Toda transformación afín α se puede representar como el producto de una semejanza y una compresión.*

Demostración. Por el teorema 54, $\alpha = \lambda_2 \circ \lambda_1 \circ \sigma$ donde σ es una transformación ortogonal y λ_1 es una compresión con eje $\overleftrightarrow{O'X'}$ coeficiente $k_1 = \frac{O'B'}{O'B''}$ y es λ_2 es una compresión con ejes $\overleftrightarrow{O'Y'}$ y coeficiente $k_2 = \frac{O'A'}{O'A''}$.
Sea λ la homotecia de centro en O' y coeficiente k_1 entonces $\lambda(O') = O'$, $\lambda(B'') = B'$ y $\lambda(A'') = A'''$, donde A''' está en $\overrightarrow{O'A'}$ y $k_1 O'A'' = O'A'''$.
Sea δ la compresión con eje $\overleftrightarrow{O'Y'}$ y coeficiente $\frac{k_2}{k_1}$ entonces $\delta(O') = O'$, $\delta(B') = B'$ y como $\frac{k_2}{k_1}(O'A''') = \frac{k_2}{k_1}(k_1 O'A'') = k_2 O'A'' = O'A'$ entonces $\delta(A''') = A'$, por tanto:

$$(\delta\circ\lambda)(O') = O' = (\lambda_2\circ\lambda_1)(O'), \quad (\delta\circ\lambda)(A'') = A' = (\lambda_2\circ\lambda_1)(A''), \quad (\delta\circ\lambda)(B'') = B' = (\lambda_2\circ\lambda_1)(B'').$$

Por el teorema de los tres puntos para aplicaciones afines $\delta \circ \lambda = \lambda_2 \circ \lambda_1$ y por tanto α se expresa como:

$$\alpha = \lambda_2 \circ \lambda_1 \circ \sigma = (\lambda_2 \circ \lambda_1)\sigma = (\delta \circ \lambda)\sigma = \delta(\lambda \circ \sigma) = \delta \circ \beta$$

donde $\beta = \lambda \circ \sigma$ es una semejanza de coeficiente k, y δ es una compresión con eje $\overleftrightarrow{O'Y''}$ y coeficiente $\frac{k_2}{k_1}$. $\square$

Teorema 56. *Toda aplicación afín $\alpha : \pi \to \pi'$ puede expresarse como el producto de una aplicación ortogonal de π en π' y dos compresiones de ejes perpendiculares en π'.*

La demostración de este resultado se deja como ejercicio.

4.5. Representación Analítica de una Transformación Afín.

En esta sección consideramos un sistema afín de coordenadas XOY con origen O y E_1, E_2 puntos sobre el rayo OX y OY respectivamente los cuales representan los puntos unidad sobre los ejes OX y OY. Ex presiones que relacionen El objetivo central de esta sección es encontrar expresiones que expresen un punto $M(x, y)$ con su imagen $M'(x', y')$ bajo un transformación afín α.

Teorema 57. *La aplicación $\alpha : \pi \to \pi'$ tal que a cada $M(x, y)$ lo transforma en el punto $M'(x', y')$ donde*

$$x' = a_1x + b_1y + c_1$$

$$y' = a_2x + b_2y + c_2, \text{(a)}$$

con

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad \textit{representa una transformación afín.}$$

Demostración. a). *α es inyectiva*: Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ puntos de π tales que
$\alpha(x_1, y_1) = \alpha(x_2, y_2)$ entonces: $(a_1x_1 + b_1y_1 + c_1, a_2x_1 + b_2y_1 + c_2) = (a_1x_2 + b_1y_2 + c_1, a_2x_2 + b_2y_2 + c_2)$ luego $a_1(x_1 - x_2) + b_1(y_1 - y_2) = 0$ y $a_2(x_1 - x_2) + b_2(y_1 - y_2) = 0$ y como $\Delta \neq 0$ entonces $x_1 = x_2$ y $y_1 = y_2$.
b). *α es sobre* ya que dado $Y' = (x_1, x_2)$ la condición $\Delta \neq 0$ garantiza que el sistema (a) tiene una única solución $X = (x, y)$ con: $X = \frac{b_2x' - b_1y' + b_1c_2 - b_2c_1}{\Delta}$ y $y = \frac{a_1y' - a_2x' + a_2c_1 - a_1c_2}{\Delta}$.
c). *α preserva colinealidad:* Para examinar esto es suficiente mostrar que la imagen de una recta es una recta.
Sea l' una recta dada en π' que tiene como ecuación $A'X' + B'Y' + C' = 0$ con A', B', C' reales y A', B' ambos no nulos entonces la imagen inversa de l' bajo α, tiene como ecuación:

$$A'(a_1x + b_1y + c_1) + B'(a_2x + b_2y + c_2) + C' = 0$$

o sea $(A'a_1+B'a_2)X+(A'b_1+B'b_2)Y+A'c_1+B'c_2+c'=0$ que es de la forma $AX+BY+C=0$ con $A=A'a_1+B'a_2$, $B=A'b_1+B'b_2$ y $C=A'c_1+B'c_2+C'$ y en la cual A y B no son simultáneamente nulos ya que si lo fueran entonces se tendría que $A'a_1+B'a_2=0$ y $A'b_1+B'b_2=0$ y como $\Delta\neq 0$ se seguirá qué A' y B' son simultáneamente nulos(absurdo) luego la expresión $AX+BY+C=0$ representa una recta l y de aquí es claro que $\alpha(l)=l'$. $\square$

Hemos demostrado que las expresiones (a) representa una transformación afín, probaremos a continuación que toda transformación afín tiene una representación analítica de la forma (a), con la cual la representación en coordenadas de una transformación afín quedará unívocamente determinada.

Teorema 58. *Sea $\alpha:\pi\to\pi'$ una transformación afín que lleva el punto $M(x,y)$ en el punto $M'(x',y')$ entonces existen números reales a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 tales que:*

$$x'=a_1x+b_1y+c_1$$
$$y'=a_2x+b_2y+c_2$$

con

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$$

Demostración. Sean $O'(c_1,c_2),E_1'(p_1,p_2),E_2'(q_1,q_2)$ las imágenes bajo α de los puntos $O(0,0),E_1(1,0),E_2(0,1)$ y llámese $a_1=p_1-c_1$, $a_2=p_2-c_2$, $b_1=q_1-c_1$, $b_2=q_2-c_2$ entonces, O',E_1' y E' son no colineales se tiene que:

$$0\neq\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ c_1 & p_1 & q_1\\ c_2 & p_2 & q_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0\\ c_1 & p_1-c_1 & q_1-c_1\\ c_2 & p_2-c_2 & q_2-c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} p_1-c_1 & q_1-c_1\\ p_2-c_2 & q_2-c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$$

Sea β la transformación afín dada por

$$x'=a_1x+b_1y+c_1$$
$$y'=a_2x+b_2y+c_2$$

con a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2, dados anteriormente, entonces:

$$\beta(0,0)=(c_1,c_2)=\alpha(0,0),$$
$$\beta(0,1)=(a_1+c_1a_2+c_2)=(p_1,p_2)=\alpha(1,0)$$
$$\beta(0,1)=(b_1+c_1,b_2+c_2)=(q_1,q_2)=\alpha(0,1).$$

Por el teorema de los tres puntos para aplicaciones afines se deduce que $\alpha=\beta$. $\square$

Observe además lo siguiente:
1). Bajo una transformación afín α todas las áreas cambian en la misma razón, esta es $k_1 * k_2$ donde k_1 y k_2 son los coeficientes de la compresiones determinadas por α y puesto que el área del triángulo OE_1E_2 es $\frac{1}{2}$ y el área del triángulo imagen bajo α, $O'E_1'E_2'$ es $\frac{1}{2}.|\triangle|$ se concluye que $k_1k_2 = |\triangle|$.
2). Los coeficientes que aparecen en el teorema 57 dependen del particular sistema de coordenadas escogido ya que en un sistema de coordenadas diferente las ecuaciones cambian, pero el determinante asociado al sistema tiene el mismo valor absoluto, es decir $|\triangle|$ es un invariante de α.
3). Una transformación afín α preserva o invierte la orientación de todo triángulo ya que como α se puede expresar en la forma $\alpha = \delta \circ \beta$ donde β es una semejanza y δ una compresión, se sigue de esto que para probar la afirmación hecha es suficiente mostrar que una compresión preserva la orientación de cada triángulo como se prueba a continuación.
Sea δ una compresión con eje l y coeficiente $k > 0$. Sean A y B puntos sobre l y C un punto fuera de l, como $\delta(A) = A$, $\delta(B) = B$, $\delta(C) = C'$ sólo si $k\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{C'P}$ donde P es el pie de la perpendicular trazada por C a l se sigue de esto que C y C' están del mismo lado de l y por tanto el $\triangle ABC$ y su imagen bajo α, $\triangle ABC'$ son coorientados y por tanto δ preserva la orientación de cada triángulo.
4). De lo anterior se deduce qué es lícito hablar de transformaciones afines de primera y segunda clase según que la semejanza lo sea. No es difícil probar que una transformación afín dada por el teorema 57 es de *primera clase* si Δ es positivo y de *segunda clase* si Δ es negativo, por tanto no únicamente $|\triangle|$ es un invariante de α sino también $\triangle$ es decir, este valor es intrínseco de α y en consecuencia no depende del particular sistema de coordenadas seleccionado.

4.6. Problemas Resueltos.

En esta sección se resuelven algunos problemas que ilustran la teoría y que pueden ser utilizados como modelo y orientación para la resolución de los ejercicios propuestos.
Problema 1. Demuestre que toda compresión queda determinada por su eje, un punto y su imagen.
solución: Sea δ una compresión de eje l coeficiente $k > 0$ y M, M' dos puntos del plano tales que $\delta(M) = M'$ entonces $k\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{M'P}$ donde P es el pie de la perpendicular a l trazada por M.

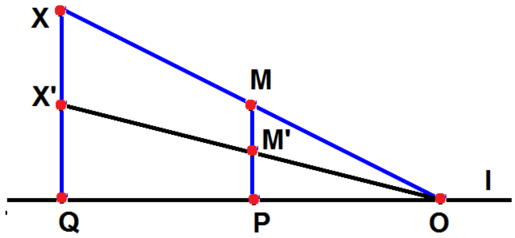


figura 100

Si X es un punto cualquiera del plano entonces la recta $\overleftrightarrow{XM}$ corta a l en un punto O y si se traza la perpendicular a l por X entonces la recta $\overleftrightarrow{OM'}$ interseca a la recta $\overleftrightarrow{XQ}$ en un punto X' tal que $\delta(X) = X'$ puesto que las rectas, $\overleftrightarrow{MP}$ y $\overleftrightarrow{XQ}$ son paralelas por tanto los triángulos OXQ y OMP y los triángulos $OX'Q$ y $OM'P$ son semejantes por lo que

$$\frac{MP}{XQ} = \frac{PO}{QO}$$

$$\frac{M'P}{X'P} = \frac{PO}{QO}$$

es decir, $\frac{M'P}{MP} = \frac{X'Q}{XQ} = k$ y puesto que X y X' están en el mismo lado de l se concluye que X' es la imagen de X bajo la compresión δ.
Si la recta $\overleftrightarrow{XM}$ es paralela a l entonces por M' se traza la paralela a l, la cual corta a $\overleftrightarrow{XQ}$ en un punto X' tal que $\delta(X) = X'$ ya que en este caso se obtienen los rectángulos $MXQP$ y $M'X'QP$.

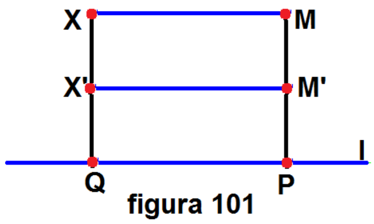


figura 101

Problema 2. Pruebe que la imagen de una circunferencia bajo una compresión cuyo eje es el diámetro de la circunferencia es una elipse.
solución: Sin perdida de generalidad podemos considerar que la circunferencia tiene centro en el origen de coordenadas y que el eje de la compresión es el eje X entonces la circunferencia tiene por ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ y si $M(x, y)$ es un punto sobre la circunferencia entonces su imagen bajo la compresión de coeficiente $k > 0$ es tal que

$$x' = x$$
$$y' = ky,$$

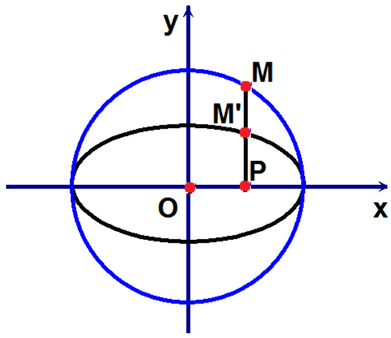


figura 102

por lo tanto la expresión $x^2+y^2=r^2$ se convierte en $\frac{x'^2}{r^2}+\frac{y'^2}{k^2r^2}=1$ que corresponde a la ecuación de una elipse.

Problema 3. Sea ρ una afinidad del plano con eje l, A un punto fuera de l y A' su imagen bajo ρ, demuestre que

a). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ es paralela a l entonces ρ es un cizallamiento.

b). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ no es paralela a l entonces ρ es una compresión oblicua sobre l en dirección de $\overleftrightarrow{AA'}$.

solución: a). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ es paralela a l, sea y la distancia dirigida del segmento $\overline{AA'}$ a l entonces existe un número k en $\mathbb{R}$ tal que $Ak'=ky$.

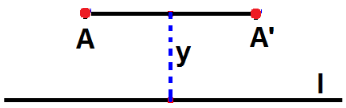


figura 103

Consideremos un sistema de coordenadas rectangulares con l como eje x y una perpendicular a l como eje y, si las coordenadas de A son (x,y) entonces las coordenadas de A' son $(x+ky,y)$ y por tanto A' es la imagen de A bajo un cizallamiento.

b). Si $\overleftrightarrow{AA'}$ no es paralela a l, llamemos P el punto de corte de $\overleftrightarrow{AA'}$ con l y $k\in\mathbb{R}$ definido como $k=\frac{A'P}{AP}$ entonces $k\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AP'}$ y por tanto A' es la imagen de A bajo la compresión oblicua con el eje l en la dirección de $\overleftrightarrow{AA'}$. Por el problema 1 la compresión está completamente determinada.

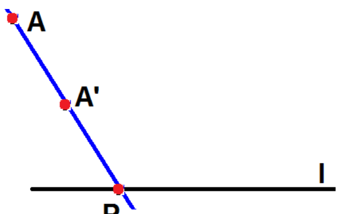


figura 104

Definición 41. *El segmento de recta determinado por los puntos medios de un sistema de cuerdas paralelas de una elipse se llama* **diámetro** *de la elipse.*

Un diámetro D_1 es **conjugado** *a un diámetro D_2, si D_1 pasa por los puntos medios de todas las cuerdas de la elipse paralelas a D_2.*

Problema 4. Sea S una elipse y r_1, r_2 radios conjugados de S, demuestre que el área del paralelogramo con radios r_1 y r_2 es igual al área del rectángulo que tiene como lados los semiejes de la elipse.

solución: Sea S la elipse de ecuación $b^2x^2 + a^2x^2 = a^2b^2$ entonces S puede obtenerse mediante la aplicación con eje $\overleftrightarrow{ox}$ en la dirección de $\overleftrightarrow{oy}$ y coeficiente $k = \frac{a}{b}$ mediante la aplicación de una compresión a la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$.

Sean OP' y OQ' dos radios conjugados de la elipse con $P'(x_1, y_1)$ y $Q'(x_2, y_2)$ entonces el área del paralelogramo de lados $\overline{OP'}$ y $\overline{OQ'}$

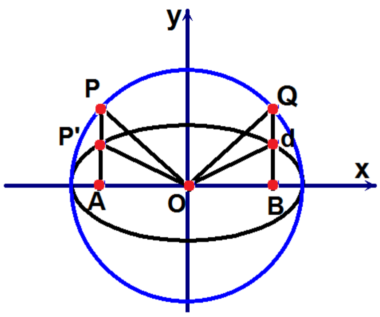


figura 105

está dado por el valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ c_1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

y como

$y_2 = BQ' = kBQ = kasen\theta = bsen\theta$

$x_2 = OB = acos\theta$

$x_1 = OA = acos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -asen\theta$

$y_1 = AP' = kAP = kasen(\theta + \frac{\pi}{2}) = bcos\theta$

se sigue que el área del paralelogramo es:

$$A = |x_1y_2 - x_2y_1| = |-absen^2\theta - abcos^2\theta| = ab.$$

Problema 5. Demuestre que la suma de los cuadrados de las longitudes de dos radios conjugados de un elipse es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los semiejes.

solución: De acuerdo al problema 4 se tiene que

$BQ' = bsen\theta$, $OB = acos\theta$, $OA = |-asen\theta| = asen\theta$ y $AP' = Bcos\theta$ entonces

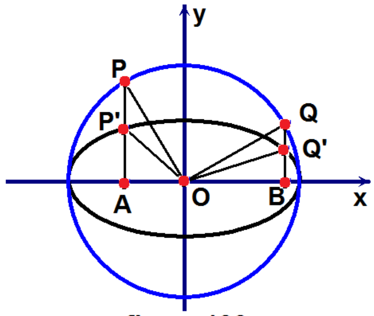


figura 106

$$\begin{aligned} OP'^2 + OQ'^2 &= OA^2 + AP'^2 + OB^2 + BQ'^2 \\ &= (acos\theta)^2 + (bcos\theta)^2 + (acos\theta)^2 + (bsen\theta)^2 \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

Problema 6. Hallar la transformación afín α que convierte el triángulo de vértices $A(1,2), B(3,4), C(0,3)$ en el triángulo de vértices $A'(0,0), B'(1,1)$ y $C'(1,-1)$.

solución: La representación analítica de una trasformación afín tal que $\alpha(x,y) = (x',y')$ está dada por:

$$\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2 \end{aligned}$$

con $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

Puesto que $\alpha(1,2) = (0,0)$, $\alpha(3,4) = (1,1)$, $\alpha(0,3) = (1,-1)$ entonces al reemplazar estas condiciones en las expresiones anteriores se obtienen los sistemas de ecuaciones

$$\begin{aligned} a_1 + 2b_1 + c_1 &= 0 \qquad & a_2 + 2b_2y + c_2 &= 0 \\ 3a_1 + 4b_1 + c_1 &= 1 \qquad & 3a_2 + 4b_2 + c_2 &= 1 \\ 3b_1 + c_1 &= 1 \qquad & 3b_1 + c_1 &= -1 \end{aligned}$$

que tienen como solución, respectivamente, $a_1 = -\frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{4}, c_1 = -\frac{5}{4}$ y $a_2 = \frac{3}{4}, b_2 = -\frac{1}{4}, c_2 = -\frac{1}{4}$ y por tanto la ecuación de la transformación afín deseada es:

$$\alpha(x,y) = \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}y - \frac{5}{4}, -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{4}\right).$$

Capítulo 5

Transformación por Inversión.

En este capítulo se estudiará una transformación especial que recibe el nombre de ***Inversión*** y que de acuerdo al criterio de diversos autores, es la más útil que se tiene para simplificar figuras planas. A diferencia de las transformaciones anteriores, se observará que el conjunto de las inversiones (con el mismo centro y potencias diferentes) no constituye un grupo dado que la aplicación inversa de inversión es una inversión pero la compuesta de dos inversiones es una homotecia que no es una inversión. Sin embargo esta transformación es importante por las variadas aplicaciones que tiene, por ejemplo, la inversión es el fundamento del primer aparato mecánico construido para trazar líneas rectas sin necesidad de reglas.
La historia del estudio de esta transformación no es muy clara, pero se conoce que en el siglo XVI Francisco Vieta conocía los puntos inversamente relacionados; en 1749, Robert Simson en la restauración de la obra perdida de Apolonio *Lugares Geométricos Planos* incluyó uno de los teoremas fundamentales de la teoría de la inversión (El inverso de una recta o una circunferencia es una recta o una circunferencia). Esta inclusión fue hecha tomando como base algunos comentarios hechos por Pappus. Sin embargo, el uso de la inversión como transformación simplificadora para el estudio de figuras inicia en el siglo XIX y entre los precursores de este tipo de trabajo aparecen Jacobo Steiner en 1824, Adolphe Quetelet en 1825, L.J. Magnus en 1831 y J. Bellavitis en 1836. Lo interesante, es que cada uno de los mencionados estudió la transformación de inversión de manera independiente.

5.1. Definiciones Generales.

Definición 42. *Sea S una circunferencia de centro en O y radio r y M un punto del plano π, $M \neq O$, el inverso de M con respecto a la circunferencia $O(r)$ es el punto M' en $\overrightarrow{OM}$ tal que*

$OMxOM' = r^2$.
La circunferencia $O(r)$*se llama* **circunferencia de inversión***, el punto* O **el centro de inversión***, el radio* r **radio de inversión** *y* r^2 **la Potencia de Inversión.**

De la definición anterior se deduce que todo punto del plano π a excepción del centro de inversión O, posee un único punto inverso y por tanto, para que la definición dada conduzca efectivamente a una transformación se debe definir la imagen de O. Para efectuar esto, a todos los puntos del plano π se le aumenta un punto ideal Z en el infinito y que se considera como un punto que está en toda recta del plano, este punto ideal Z se convierte en la imagen de O, y recíprocamente la imagen del punto ideal Z será el centro de inversión O. El plano π aumentado en esta forma se llamará ***plano inversivo*** y se denotará como π^*. Es claro que con esta convención se tiene una transformación del plano π^*.

Definición 43. *Sea* $O(r)$ *una circunferencia de centro en* O *y radio* r*, la aplicación* $I : \pi^* \to \pi^*$ *tal que a cada punto* $M \neq O$ *en* π *le hace corresponder su inverso* M'*, a* O *le aplica* Z *y a* Z *le aplica* O *se llama* **Inversión** *de centro en* O *y potencia* r^2 *y se denotara como* $I(O, r^2)$*.*

Teorema 59. *Sea* $I : \pi^* \to \pi^*$ *una inversión de centro* O *y potencia* r^2*, entonces:*
1).La imagen bajo I *de todo punto en el exterior de la circunferencia de inversión es un punto en el interior de ella.*
2).La imagen de todo punto sobre la circunferencia de inversión es él mismo.
3).La inversión es una transformación involutiva, es decir, $I^2(O, r^2)$ *es la aplicación identidad.*

Demostración. Sea $O(r)$ la circunferencia de inversión, $M \neq Z$ un punto en el exterior de $O(r)$ y $\overleftrightarrow{MA}$, $\overleftrightarrow{MB}$ las tangentes a $O(r)$ trazadas desde M.

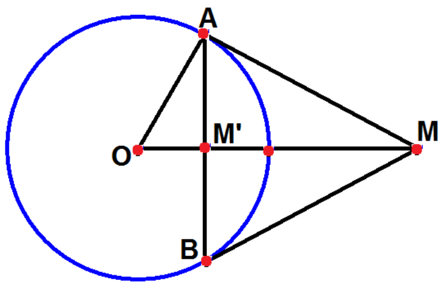


figura 107

Como los triángulos rectángulos OAM y OBM tienen un cateto y la hipotenusa respectivamente iguales se sigue que son congruentes y por tanto $\triangle AMB$ es isósceles, entonces $\overleftrightarrow{OM}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$. Sea M' el punto de intersección, entonces se tiene que: $\measuredangle OAM \cong \measuredangle OM'A$ por ser rectos y $\sphericalangle AOM \cong \sphericalangle AOM'$ por lo tanto $\triangle OAM \sim \triangle OM'A$, entonces:

$\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OM'}$ o sea $OMxOM' = (OA)^2$ y como M' está en $\overrightarrow{OM}$ se sigue que $I(M) = M'$ y como por definición de inversión $I(Z) = 0$ se deduce que todo punto por fuera de $O(r)$ tiene su imagen bajo I en el interior de $0(r)$.
2). Si M es un punto que está sobre $0(r)$ entonces $OM = r$ luego, $OMxOM = r^2$ y como la imagen bajo una inversión es única se tiene que $I(M) = M$.
3). Sea M en π^* tal que $M \neq 0$, $M \neq Z$. Como $I(M) = M'$ si y sólo si $OMxOM' = r^2$ y la imagen bajo I de un punto es única entonces $I(M') = M$ luego $I^2(M) = M$ y como $I^2(O) = 0$, $I^2(Z) = Z$ entonces $I^2(X) = X$ para todo X en π^* de donde se sigue que I es involutiva. □

Observe que la demostración de la parte 1. del teorema exhibe un método para construir geométricamente el inverso de un punto $M \neq Z$ fuera de $O(r)$, si el punto está en el interior de $O(r)$ se efectúa el proceso inverso, es decir, se traza la cuerda de longitud mínima que pasa por M y por cada uno de sus dos extremos de esta cuerda se trazan las tangentes a $O(r)$; el punto de intersección de estas dos tangentes y la recta $\overleftrightarrow{OM}$ es el punto M' inverso de M. El trazo de la cuerda de longitud mínima que pasa por M se realiza conociendo que este punto es el punto medio de la cuerda buscada y por tanto esta cuerda es perpendicular a la recta $\overline{OM}$.
Observe que de la demostración del teorema 59 se obtienen implícitamente los siguientes resultados.
i). Las rectas que pasan por O se invierten en sí mismas.
ii).Una circunferencia de centro en O se invierte en una circunferencia de centro en O. y sus radios tienen razón inversa.

5.2. Propiedades de la Inversión.

Teorema 60. *Sean $I_1(O, k_1), I_2(O, k_2)$ inversiones entonces la transformación compuesta $I_2(O, k_2) \circ I_1(O, k_1) = \lambda\big(O, \frac{k_2}{k_1}\big)$, donde λ es una homotecia.*

Demostración. Sea $M \neq 0$, $M \neq Z$ un punto de π^* entonces $I_1(M) = M'$ si y sólo si $M' \in \overrightarrow{OM}$ y $OMxOM' = k_1$; $I_2(M') = M''$ si y sólo si $M'' \in OM'$ y $OM'xOM'' = k_2$ entonces $(I_2 \circ I_1)(M) = M''$ donde $M'' \in \overrightarrow{OM}$ y $\frac{OM'xOM''}{OM \times OM'} = \frac{k_2^2}{k_1^2}$ o sea $OM'' = \left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2 OM$ y $M'' \in \overrightarrow{OM}$.

Sea λ la homotecia de centro en O y coeficiente $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)^2$ entonces $\lambda(M) = M''$ y por tanto $(I_2 \circ I_1)(M) = \lambda(M)$ para todo $M \neq O$ en π^*.
Si $M = O$ entonces $I_1(O) = Z$ e $I_2(Z) = O$ y como $\lambda(O) = O$ entonces $(I_2 \circ I_1)(O) = \lambda(O)$ luego $(I_2 \circ I_1)(X) = \lambda(X)$ para todo X en π^* y así $I_2 \circ I_1 = \lambda$. □

El teorema anterior muestra que el conjunto de las inversiones con el mismo centro y diferentes potencias no es un grupo.

Definición 44. *Sea $I(O, r^2)$ una inversión y M un punto de π^*. Sí el punto M se considera móvil entonces describe una curva S y el inverso M' describe una curva S' que se llama* **inversa** *de S.*

Definición 45. *a). Una* ***recta*** *es una circunferencia de radio infinito.*
b). Se llamará **circunferencia** *a una recta o a toda circunferencia.*

Los siguientes teoremas explican la naturaleza de las inversas de rectas y circunferencias.

Teorema 61. *Sea $I(O, r^2)$ una inversión, entonces el inverso de un punto con respecto a una circunferencia de radio infinito (recta) es su reflexión ordinaria en la recta.*

Demostración. Sea S una circunferencia de centro O y radio r, M un punto del plano y M' su inverso bajo $I(O, r^2)$. Como $OM = r + DM$, $OM' = r - DM'$ entonces

$$r^2 = OM \text{ x } OM' = (r + DM)(r - DM') = r^2 + rDM - rDM' - DM \text{ x } DM'$$

luego

$$rDM - rDM' - DMxDM' = 0 \text{ y así } DM - DM' = \frac{DM \times DM'}{r}.$$

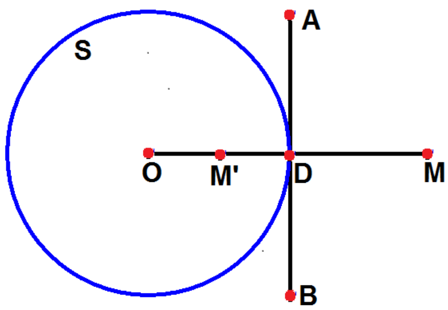


figura 108

Si se permite que O se mueva indefinidamente hacia la izquierda y se mantiene D fijo se evidencia que $r \to \infty$, por ello $S \to \overleftrightarrow{AB}$ y $\frac{DM \times DM'}{r} \to 0$ ya que DM' permanece finita y por tanto en el límite $DM = DM'$ o sea M' es la reflexión de M en la recta $\overleftrightarrow{AB}$. □

Teorema 62. *Sea $I(O, r^2)$ una inversión, la inversa de una recta l es ella misma o una circunferencia que no pasa por O y tal que el diámetro que pasa por O es perpendicular a la recta dada.*

Demostración. Sea l una recta dada en π^*; se consideran los siguientes casos:

a). l pasa por O entonces para cualquier punto M en l se tiene que $I(M) = M'$ si y sólo si $M' \in \overrightarrow{OM}$ y $OMxOM' = r^2$ es decir M' está en l, luego $I(l) = l$.

b). Si l no pasa por O, sea P el pie de la perpendicular trazada por O a l, P' su inverso bajo I, M otro punto cualquiera de l y M' su inverso bajo I, entonces por la definición de inversión se tiene que:

$OP \times OP' = r^2 = OMxOM'$ luego $\frac{OP}{OM} = \frac{OM'}{OP'}$ y como $\sphericalangle MOP \cong \sphericalangle M'OP'$ entonces

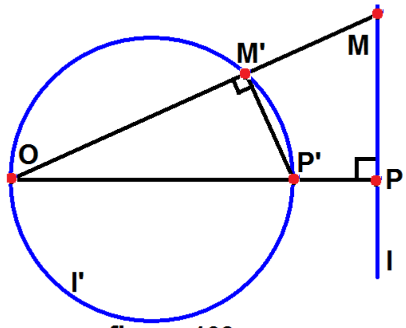


figura 109

$\triangle OMP \sim \triangle OP'M'$ y por consiguiente $\sphericalangle OM'P' \cong \sphericalangle OPM$ y como el ángulo $\sphericalangle OPM$ es recto entonces $\sphericalangle OM'P'$ también lo es, luego independientemente de la posición de M sobre l, el ángulo $\sphericalangle OM'P'$ es recto y siendo así, al moverse M sobre l el punto M' describe una circunferencia que pasa por O y de diámetro OP'. □

Teorema 63. *Sea $I(O, r^2)$ una inversión entonces la inversa de una circunferencia S que pasa por O es una recta que no pasa por O y perpendicular a la recta determinada por el diámetro de S que pasa por O.*

Demostración. Sea P un punto diametralmente opuesto de O y M un punto de S diferente de O y P, sean además P' y M' los inversos de P y M bajo $I(O, r^2)$ entonces $OP \times OP' = OM \times OM' = r^2$ y así $\frac{OM}{OP} = \frac{OP'}{OM'}$ y como $\sphericalangle MOP \cong \sphericalangle M'OP'$ se sigue que

$\triangle OMP \sim \triangle OP'M'$ y así se tiene que $\sphericalangle OMP \cong \sphericalangle OP'M'$ y puesto que el ángulo $\sphericalangle OMP$ recto se sigue que el ángulo $\sphericalangle OP'M'$ también es recto y por ello la recta $\overleftrightarrow{M'P'}$ es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{OP}$.

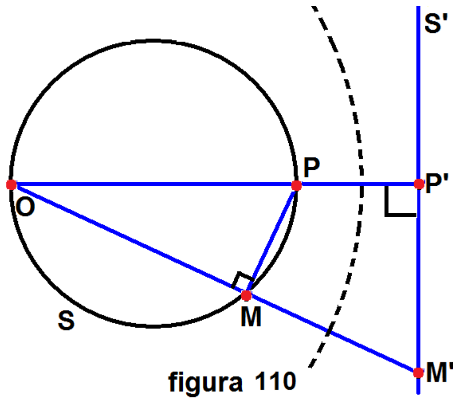


figura 110

Como para cualquier otro punto X sobre S diferente de O y P se tiene que $\sphericalangle OXP$ es recto y también $\sphericalangle OP'X'$ es recto, se tiene que X' está sobre la perpendicular por P a $\overline{OP}$ y como la perpendicular por un punto a una recta es única entonces X' está sobre la perpendicular $\overline{P'M'}$ a $\overline{OP}$, luego $I(S) = S'$ donde S' es una recta que no pasa por O y es perpendicular a la recta que contiene al diámetro de S que pasa por O. $\square$

Teorema 64. *Sea $I(O, r^2)$ una inversión, entonces la inversa de una circunferencia S que no pasa por O es una circunferencia S' que no pasa por O.*

Demostración. Sean P y Q dos puntos sobre S tales que $\overline{PQ}$ sea un diámetro de S y M otro punto cualquiera sobre S, entonces el ángulo $\sphericalangle PMQ$ es recto.
Sean P', M', Q' las imágenes bajo $I(O, r^2)$ entonces.
de los puntos P, M y Q respectivamente, entonces $OP \times OP' = OM \times OM' = OQ \times OQ' = r^2$ como $\frac{OP}{OM} = \frac{OM'}{OP'}$ y $\sphericalangle MOP \cong \sphericalangle M'OP'$ se sigue que $\triangle OMP \sim \triangle OP'M'$ y así $\sphericalangle OM'P' \cong \sphericalangle OPM$. a).
Como $\frac{OQ}{OM} = \frac{OM'}{OQ'}$ y $\sphericalangle MOQ \cong \sphericalangle M'OQ'$ se sigue $\triangle OMQ \sim \triangle OQ'M'$ y por tanto
$\sphericalangle OM'Q' \cong \sphericalangle OQM$ b).

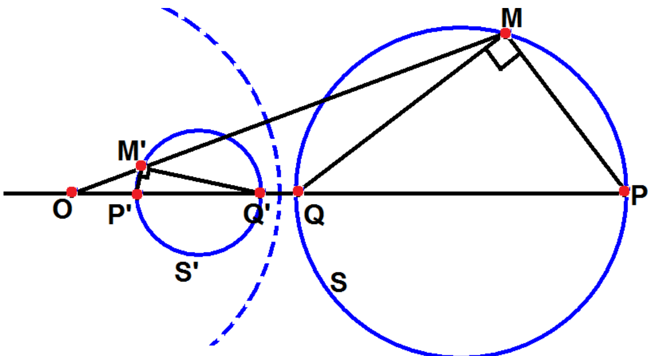


figura 111

De las partes a). y b). se tiene que

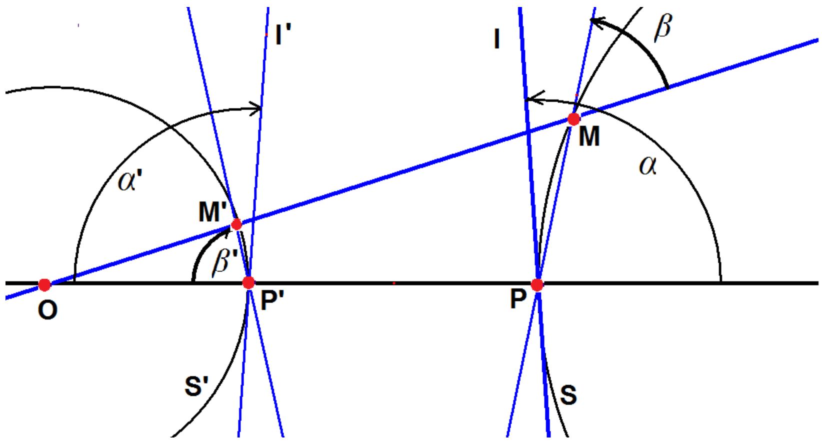
$$\sphericalangle P'M'Q' = \sphericalangle OM'Q' - \sphericalangle OM'P' = \sphericalangle OQM - \sphericalangle OPM = \sphericalangle PMQ$$

y como $\sphericalangle PMQ$ es recto entonces $\sphericalangle P'M'Q'$ es recto y por tanto $\sphericalangle P'M'Q'$ está inscrito en una circunferencia de diámetro $\overline{P'Q'}$ y así M' está sobre una circunferencia de diámetro $\overline{P'Q'}$ que no pasa por O ya que $OP' > Q'P'$. □

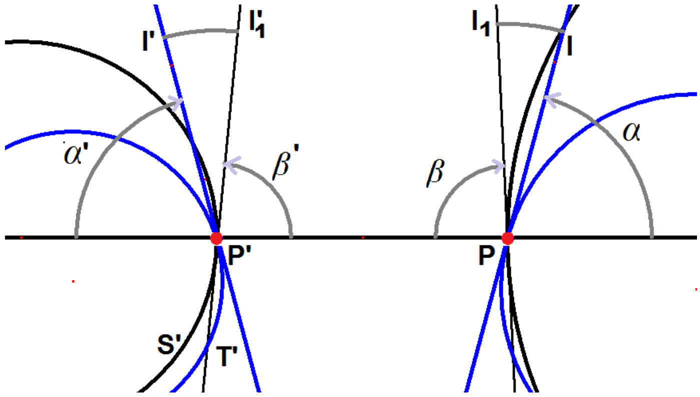
Definición 46. *Sean S y T dos curvas coplanares; el* **ángulo de intersección** *entre ellas en un punto común es el ángulo que forman las tangentes a las curvas en dicho punto.*

Teorema 65. *Si dos curvas se intersecan en un punto diferente de O entonces su ángulo de intersección en ese punto es igual en magnitud pero de signo opuesto al ángulo de intersección de las curvas inversas en el punto inverso.*

Demostración. Sea S la curva dada, S' su inversa y P un punto de S entonces el punto inverso P' de P está en S' y es tal que $P' \in \overrightarrow{OP}$ y $OP \times OP' = r^2$.
Sea M otro punto sobre S, entonces $I(M) = M'$ si y sólo si $M' \in \overrightarrow{OM}$ y $OM \times OM' = r^2$.
Se trazan las cuerdas $\overline{PM}$ y $\overline{P'M'}$ y las tangentes l y l' a S y S' en P y P' respectivamente, sean α y α' los ángulos entre $\overleftrightarrow{OP'}$ y las tangentes l y l', y sean β y β' los ángulos entre las rectas $\overleftrightarrow{OM}$ y $\overleftrightarrow{PM}$ y entre las rectas $\overleftrightarrow{OP'}$ y $\overleftrightarrow{P'M'}$.



Como $\frac{OP}{OM} = \frac{OM'}{OP'}$ y $\sphericalangle POM \cong \sphericalangle P'OM'$ entonces $\triangle POM \sim \triangle M'OP'$, luego $\sphericalangle OPM \cong \sphericalangle OM'P'$ pero tienen orientación opuesta, es decir $\beta = -\beta'$.
Si el punto M se mueve a lo largo de S hacia el punto P entonces el punto M' se mueve hacia P' y por tanto en la posición límite la secante $\overline{PM}$ se confunde con la tangente l, luego el ángulo β tiende al ángulo α y como la secante $\overline{P'M'}$ se corresponde con la tangente l' se sigue que el ángulo β' tiende al ángulo α' y por tanto $\widehat{\alpha} = -\widehat{\alpha'}$. Es decir, una secante $\overleftrightarrow{OP}$ forma ángulos de la misma medida pero de orientación opuesta con una curva y su inversa.



Si se traza otra curva T por el punto P entonces, por lo demostrado anteriormente esta curva y su inversa T' forman ángulos de la misma medida con la misma secante $\overleftrightarrow{OP}$ y como el ángulo entre dos curvas es la suma algebraica del ángulo que forman con la secante común entonces el ángulo entre las curvas S y T en el punto P es el mismo ángulo que entre las curvas inversas S' y T' en el punto P' aunque de sentido opuesto. □

Definición 47. *Dos curvas S y T son* ***ortogonales*** *si y sólo si su ángulo de intersección es recto.*

Teorema 66. *1). Considérese dos circunferencias ortogonales, si se traza una secante por el centro de una de ellas, los puntos de intersección de la secante con la segunda circunferencia son inversos entre sí con respecto a la primera circunferencia.*
2). Si dos puntos sobre una circunferencia son inversos entre sí con respecto a una segunda circunferencia entonces las circunferencias son ortogonales.

Demostración. Sean S y S' circunferencias ortogonales en un punto P entonces las tangentes en P a S y S' forman ángulo recto y los radios de S y S' están sobre estas tangentes.

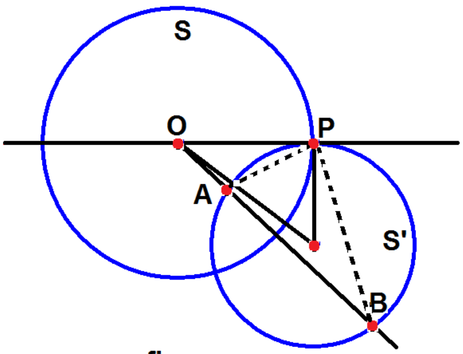


figura 114

Se traza por el centro O de S la secante a S' que la interseca en los puntos A y B.
Al unir A y B con P se encuentra que $\sphericalangle OAP \cong \sphericalangle OBP$ por subtender el mismo arco y

$\sphericalangle POA \cong \sphericalangle POB$ por lo tanto $\triangle OAP \sim \triangle OPB$ entonces $\frac{OA}{OP} = \frac{OP}{OB}$ y por ello $OA \times OB = (OP)^2 = r^2$ y como $B \in \overrightarrow{OA}$ entonces B es el inverso de A con respecto a $O(r)$.
La demostración de la parte 2 se deja como ejercicio para el lector. □

Teorema 67. *1). Si una circunferencia y dos puntos inversos se invierten con respecto a un punto que no esté en la circunferencia de inversión se obtiene una circunferencia y dos puntos inversos.*
2). Si una circunferencia y dos puntos inversos se invierten con respecto a un punto sobre la circunferencia de inversión se obtiene una recta y dos puntos que son las reflexiones el uno del otro en la recta.

Demostración. Sea $O(r) = S$ una circunferencia, A y B dos puntos inversos respecto a ella, K un punto en el plano que no esta en S y S_1, y S_2 dos circunferencias que pasan por A y B pero no por K, entonces como A y B son inversos con respecto a $O(r)$ se sigue por el teorema anterior que S_1 y S_2 son ortogonales a S.
Al invertir la configuración con respecto a K se tienen dos casos:
1). Si S no pasa por K, puesto que S, S_1 y S_2 son circunferencias que no pasan por K, se obtienen las circunferencias S', S_1' y S_2' y como A y B son puntos comunes a S_1 y S_2 entonces sus inversos A' y B' respecto de K son comunes a S_1' y S_2' y dado que una inversión preserva magnitud de ángulos entonces S_1' y S_2' son ortogonales a S' y de acuerdo con el teorema anterior existe un punto sobre S_1' que es inverso de A' con respecto a S', pero A' está también sobre S_2' entonces el inverso de A' también está sobre S_2', por lo tanto, el inverso de A' (con respecto a S') es común a S_1 y S_2, lo que significa que el inverso de A' con respecto a S' es B'.

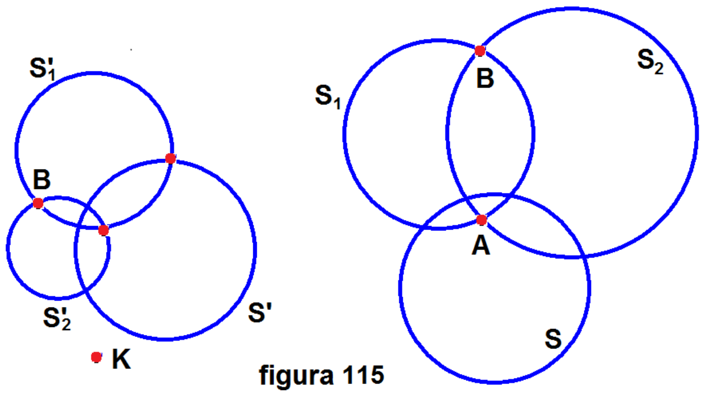


figura 115

2). Si S pasa por K, puesto que las circunferencias S_1 y S_2 no lo hacen, entonces se obtiene una recta S' perpendicular al diámetro de S que pasa por K y dos circunferencias y S_1' y S_2' y como A y B son comunes a S_1 y S_2 entonces sus inversos respecto de K, A' y B' son comunes a S_1' y S_2'.

Como una inversión preserva magnitudes de ángulos, entonces S_1' y S_2' son ortogonales a S' pero por el razonamiento de la parte 1, A' y B' son inversos con respecto a S' y como por el teorema 61 de esta sección, el inverso de un punto con respecto a una circunferencia de radio infinito es su reflexión en la recta se sigue que A' y B' son las reflexiones en uno del otro en la recta S'. □

El teorema anterior proporciona un ejemplo de otro invariante de la transformación por inversión, que no es claro desde su formulación y por ello se espera que sea develado por el lector. El siguiente teorema de carácter métrico muestra cómo influye la inversión en las distancias entre puntos.

Teorema 68. *Si A y A', B y B' son dos pares de puntos inversos con respecto a la circunferencia $O(r)$ entonces $A'B' = \frac{AB \times r^2}{OA \times OB}$.*

Demostración. 1). Los puntos O, A y B son no colineales.

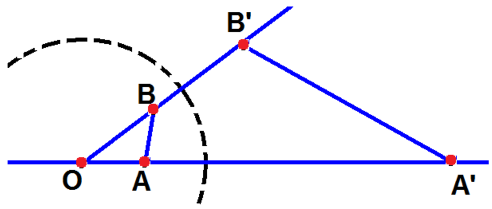


figura 116

Como A y A', B y B' son dos pares de puntos inversos se tiene $OA \times OA' = OB \times OB' = r^2$ y por ello $\frac{OA}{OB} = \frac{OB'}{OA'}$ y como $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle A'OB'$ se sigue que $\triangle AOB \sim \triangle B'OA'$ entonces

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{OB' \times OB}{OA \times OB} = \frac{r^2}{OA \times OB}$$

luego $A'B' = \frac{AB \times r^2}{OA \times OB}$.

2). Los puntos O, A y B son colineales. Como A y A', B y B' son dos pares de puntos inversos; entonces:

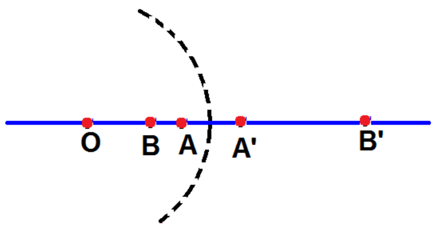


figura 117

$OA \times OA' = OB \times OB' = r^2$ y por ello se tiene que $OA' \times (OB + BA) = OB \times (OA' + A'B')$ de donde,

$$OA' \times OB + OA' \times BA = OB \times OA' + OB \times A'B'.$$

por tanto

$$A'B' = \frac{ABxOA'}{OB} = \frac{ABxOA'xOA}{OBxOA}$$

o sea $A'B' = \frac{ABxr^2}{OAxOB}$. $\square$

5.3. Razón Cruzada.

Este concepto tiene origen en los antiguos griegos, quienes construyeron alrededor de este tema un tratado casi completo el cual actualmente se conoce como razón doble o razón anarmónica. En el siglo IXX este tema fue retomado nuevamente y con la ayuda de las magnitudes con sentido (vectores), recibió un tratamiento más elegante y mejor desarrollado, el nuevo enfoque fue realizado de manera independiente por varios autores entre los que cuentan Möbius y Michel Chasles.

Aunque el concepto de razón cruzada es independiente de la teoría de inversión se trata una importante relación entre ellas, principalmente en el caso de la llamada razón armónica, en particular, uno de los resultados fundamentales de esta sección es mostrar que la razón anarmónica es invariante bajo una inversión. Es importante anotar que el concepto de razón cruzada es básico en el desarrollo de la geometría Proyectiva donde adquiere significados de poder y aplicabilidad.

Antes de definir lo que se entiende como razón cruzada, se anota que en esta sección sólo se consideran magnitudes con sentido y aunque no se utiliza ninguna notación especial se sobreentiende que las distancias son dirigidas. Desde este punto de vista, el hecho de que AB y BA sean iguales en magnitud pero con sentido contrario se expresa por la ecuación $AB = -BA$.

Los siguientes lemas son utiles en el desarrollo de esta sección.

Lema 5. *Si A, B y C son tres puntos colineales cualesquiera, entonces $AB + BC + CA = O$.*

Demostración. Si A, B y C son tres puntos colineales entonces C está entre A y B, C está en la prolongación de $\overrightarrow{AB}$ o C está en la prolongación de $\overrightarrow{BA}$, por ello:

1). Si $A-C-B$ se tiene que $AC+CB = AB$ o sea $AB-AC-CB = 0$, luego $AB+BC+CA = 0$.

2). Si $A-B-C$ se tiene que $AB+BC = AC$ o sea $AB+BC-AC = 0$, luego $AB+BC+CA = 0$.

3). Si $B-A-C$ se tiene que $BA+AC = BC$ o sea $BC-BA-AC = 0$ luego $AB+BC+CA = 0$. $\square$

Lema 6. *Si O es un punto cualquiera de $\overleftrightarrow{AB}$ entonces $AB = CO - OA$.*

Demostración. Por el lema 5 se tiene que $OA + AB + BO = 0$ entonces $AB = -BO - OA$ o sea $AB = OB - OA$. □

Lema 7. Teorema de Euler, 1747. *Si A, B, C y D son cuatro puntos colineales cualesquiera, entonces $AD \times BC + BD \times CA + CD \times AB = 0$.*

Demostración. Como A, B, C, D son colineales entonces:
$AD \times BC + BD \times CA + AB \times CD = (BD - BA) \times BC + (BA - BC) \times BD + (BD - BC) \times AB$
$= (BD \times BC - BA \times BC) + (BA \times BD - BC \times BD) + (BD \times AB - BC \times AB)$
$= BD \times BC - BA \times BC + BA \times BD - BC \times BD + BD \times AB - BC \times AB$
$= 0.$ □

Definición 48. *Si A, B, C y D son cuatro puntos diferentes sobre una recta l, la relación*

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}$$

se llama **razón cruzada (razón doble, razón anarmónica)** *de los puntos A, B, C y D en ese orden, lo que se denota como (AB, CD).*
Los puntos A, B, C y D se dice que forman una ***Alineación*** *y la recta l es la* ***Base de la alineación***.

Es claro que la razón cruzada depende del orden en que se elijan los cuatro puntos colineales y como el número de permutaciones con cuatro letras es 4! se tienen 24 formas en que esta relación puede escribirse, sin embargo, estas relaciones no tiene diferentes valores, ya que como se demuestra en el siguiente teorema se pueden agrupar de 4 en 4 para producir 6 valores diferentes y que si por ejemplo, se denota por k la relación (AB, CD) los otro cinco valores se pueden expresar en función de k.

Teorema 69. *Si A, B, C y D son cuatro puntos colineales cualesquiera y $(AB, CD) = k$ entonces:*
1). Si se intercambian dos puntos cualesquiera y simultáneamente se intercambian los otros dos, la razón doble no se altera.
2). Si se intercambia el primer par de puntos entonces la razón doble que resulta es $\frac{1}{k}$.
3). Si se intercambia el par del puntos del centro entonces la razón doble que resulta es $1 - k$.

Demostración. Se debe probar que $(AB, CD) = (BA, DC) = (DC, BA) = (CD, AB) = k$, entonces, por ejemplo:

$$(CD, AB) = \frac{\frac{CA}{AD}}{\frac{CB}{BD}} = \frac{AC \times DB}{AD \times CB} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = (AB, CD) = k$$

2). Se debe probar que si $(AB, CD) = k$ entonces $(BA, CD) = \frac{1}{k}$.

$$(BA, CD) = \frac{\frac{BC}{CA}}{\frac{BD}{DA}} = \frac{BC \times DA}{CA \times BD} = \frac{CB \times DA}{AC \times DB} = \frac{1}{\frac{AC \times DB}{CB \times AD}} = \frac{1}{\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}} = \frac{1}{(AB, CD)} = \frac{1}{k}$$

3). Se debe probar que si $(AB, CD) = k$ entonces $(AC, BD) = 1 - k$.

Por el lema 7 $AD \times BC + BD \times CA + AB \times CD = 0$ y dividiendo por $AD \times BC$ se tiene: $1 + \frac{BD \times CA}{AD \times BC} + \frac{AB \times CD}{AD \times BC} = 0$ o sea $1 + \frac{BD \times CA}{AD \times BC} = -\frac{AB \times CD}{AD \times BC}$ entonces $1 - \frac{AC \times DB}{AD \times CB} = \frac{AB \times DC}{AD \times BC}$ o sea $1 - \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{AD}{DC}}$ es decir $1 - (AB, CD) = (AC, BD)$ y por tanto $(AC, BD) = 1 - k$. □

Teorema 70. *Si* $(AB, CD) = k$ *entonces:*

1). $(AB, CD) = (BA, DC) = (CD, AB) = (DC, BA) = k$

2). $(BA, CD) = (AB, DC) = (DC, AB) = (CD, BA) = \frac{1}{k}$

3). $(BC, AD) = (AD, BC) = (DA, CB) = (CB, DA) = \frac{k-1}{k}$

4). $(CB, AD) = (DA, BC) = (AD, CB) = (BC, DA) = \frac{k}{k-1}$

5). $(AC, BD) = (BD, AC) = (CA, DB) = (DB, CA) = 1 - k$

6). $(CA, BD) = (DB, AC) = (AC, DB) = (BD, CA) = \frac{1}{1-k}$.

Demostración. 1). Aplicando a la relación (AB, CD) la operación de la parte 1 del teorema 69 se obtienen las igualdades 1.

2). Aplicando a las igualdades 1 la operación de la parte 2 del teorema 69 se obtienen las igualdades 2.

3). Aplicando a las igualdades 2 la operación de la parte 3 del teorema 69 se obtienen las igualdades 3.

4). Aplicando a las igualdades 3 la operación de la parte 2 del teorema 69 se obtienen las igualdades 4.

5). Aplicando a las igualdades 1 la operación de la parte 3 del teorema 69 se obtienen las igualdades 5.

6). Aplicando a las igualdades 5 la operación de la parte 2 del teorema 69 se obtienen las igualdades 6. □

Teorema 71. *Dados* A, B *y* C *colineales y* k *un número real existe un único punto* D *colineal con ellos tal que* $(AB, CD) = k$.

Demostración. Sean A, B y C colineales, se traza por C una recta cualquiera diferente de $\overleftrightarrow{AB}$ y se escogen sobre ella puntos M y N tales que $\frac{CM}{CN} = k$.

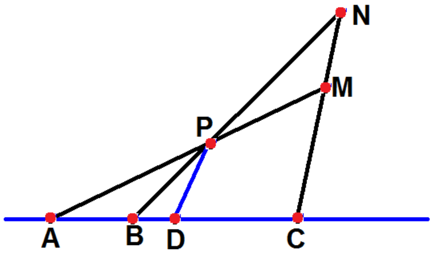


figura 118

Se unen B con N y A con M entonces $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{BN}$ se intersecan en un punto P por este punto se traza la paralela a $\overleftrightarrow{CN}$, la cual interseca a $\overleftrightarrow{AB}$ en el punto D deseado como se muestra a continuación.
Como $\overleftrightarrow{PD}$ es paralela con $\overleftrightarrow{CN}$ entonces $\triangle ADP \sim \triangle ACM$ y $\triangle BPD \sim \triangle BNC$, por tanto $\frac{CM}{DP} = \frac{AC}{AD}$ y $\frac{CN}{DP} = \frac{BC}{BD}$ y así

$$\frac{\frac{AC}{AD}}{\frac{BC}{BD}} = \frac{CMDP}{CNDP} = \frac{CM}{CN}$$

lo que significa que $(AB, CD) = k$.
La existencia y la unicidad de punto D se evidencian de la construcción realizada. $\square$

Definición 49. *Si $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}, \overleftrightarrow{VC}, \overleftrightarrow{VD}$ son cuatro rectas diferentes que pasan por el punto ordinario V, la relación*

$$\frac{\frac{Sen A\widehat{V}C}{Sen C\widehat{V}B}}{\frac{Sen A\widehat{V}D}{Sen D\widehat{V}B}}$$

se llama **Razón Doble** *del haz de rectas $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}, \overleftrightarrow{VC}, \overleftrightarrow{VD}$ tomadas en ese orden, que se denota por $V(AB, CD)$. El punto V se llama* **vértice del haz**.

Observe lo siguiente:
1). Si A', B', C', D' son otros cuatro puntos sobre las rectas $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}, \overleftrightarrow{VC}, \overleftrightarrow{VD}$ respectivamente, entonces

$$\frac{\frac{Sen A'\widehat{V}C'}{Sen C'\widehat{V}B'}}{\frac{Sen A'\widehat{V}D'}{Sen D'\widehat{V}B'}} = \frac{\frac{Sen A\widehat{V}C}{Sen C\widehat{V}B}}{\frac{Sen A\widehat{V}D}{Sen D\widehat{V}B}},$$

es decir $V(A'B', C'D') = V(AB, CD)$ y por tanto la razón doble de una haz de rectas es independiente de las posiciones de los puntos A, B, C, D sobre sus rectas respectivas rectas y esto significa que se pueden tomar los puntos A, B, C, D de la manera más conveniente posible.

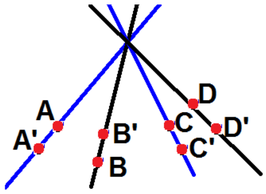


figura 119

2). Si cuatro rectas paralelas a, b, c, d son cortadas por dos transversales en los puntos A, B, C, D y A', B', C', D' respectivamente, entonces, por la aplicación del teorema de Thales se sigue que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{A'C'}{C'B'} \qquad \text{y} \qquad \frac{AD}{DB} = \frac{A'D'}{D'B'},$$

luego

$$\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{A'C'}{C'D'}}{\frac{A'D'}{D'B'}} \qquad \text{es decir,} \qquad (AB, CD) = (A'B', C'D').$$

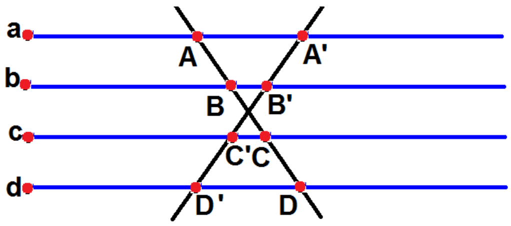


figura 120

Esto da lugar a la siguiente definición.

Definición 50. *La relación doble de una haz de cuatro rectas paralelas es la razón doble de la alineación A, B, C, D determinada por cualquier transversal a ellas y en este caso el punto ideal se considera como vértice del haz.*

El siguiente teorema es la base del poder y aplicabilidad que tiene la razón anarmónica en la Geometría Proyectiva y el cual en términos de Transformaciones proyectivas dice lo siguiente: La razón anarmónica es invariante bajo una *Perspectividad* y en los términos que se han utilizado en este texto corresponde al siguiente teorema.

Teorema 72. *La razón doble de una haz de rectas es la misma que la de cuatro puntos en la que una transversal ordinaria corta al haz.*

Demostración. Si el vértice V del haz es el punto ideal, el teorema se deduce de la definición (49). Si el vértice V es un punto ordinario, sea h la altura trazada desde V a la transversal l entonces: □

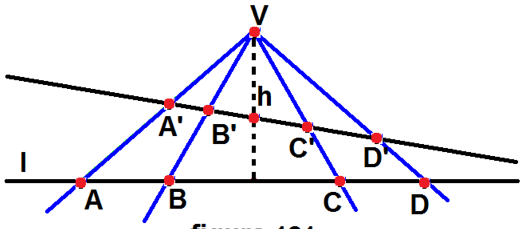


figura 121

$$\begin{aligned}\frac{AC}{CB} &= \frac{\frac{1}{2}h \times AC}{\frac{1}{2}h \times CB}\\ &= \frac{A(\triangle VAC)}{A(\triangle VCB)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}VC \times AVSenA\widehat{V}C}{\frac{1}{2}VB \times VCSenC\widehat{V}B}\\ &= \frac{AVSenA\widehat{V}D}{VBSenC\widehat{V}B}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{AD}{DB} &= \frac{\frac{1}{2}h \times AD}{\frac{1}{2}h \times DB}\\ &= \frac{A(\triangle VAD)}{A(\triangle VBD)}\\ &= \frac{\frac{1}{2}VD \times AVSenA\widehat{V}D}{\frac{1}{2}VD \times VBSenD\widehat{V}B}\\ &= \frac{AVSenA\widehat{V}D}{VBSenD\widehat{V}B}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(AB, CD) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{AVsenA\widehat{V}C}{VBSenC\widehat{V}B}}{\frac{AVSenA\widehat{V}D}{VBSenDVB}} = \frac{\frac{senA\widehat{V}C}{senC\widehat{V}B}}{\frac{senA\widehat{V}D}{senD\widehat{V}B}} = V(AB, CD).$$

donde, por ejemplo, $A(\triangle VAC)$ denota el área del triángulo VAC.

Observe que como se demostró con anterioridad, el valor de la razón doble de una haz de rectas no depende de los puntos escogidos sobre ellas, es decir $V(AB, CD) = V(A'B', C'D')$ y según el teorema que se acaba de demostrar $V(AB, CD) = (AB, CD)$ y $V(A'B', C'D') = (A'B', C'D')$ por lo tanto $(AB, CD) = (A'B', C'D')$, lo que se corresponde con la afirmación hecha respecto de la Geometría Proyectiva, ***la razón cruzada es invariante bajo una perspectividad***.

Nótese además que del teorema 72 se deduce que si V' es un punto diferente de V que no está en la recta que contiene los puntos A, B, C y D entonces $V(AB, CD) = (AB, CD) = V'(AB, CD)$.

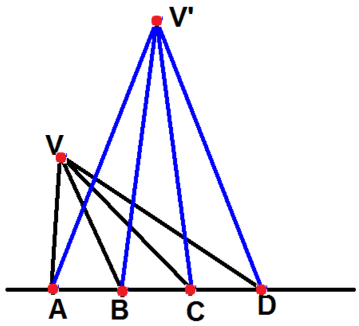


figura 122

Los siguientes corolarios son consecuencias del teorema anterior y de la observación 1 de la definición 49.

Corolario 4. *Sean A, B, C, D y A', B', C', D' dos alineaciones de bases diferentes tales que $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son concurrentes entonces $\overleftrightarrow{DD'}$ pasa por el punto de concurrencia.*

Demostración. Sea V el punto de corte de $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ y se traza la recta $\overleftrightarrow{VD}$ entonces $\overleftrightarrow{VD}$ interseca a $\overleftrightarrow{A'B'}$ en un punto D'', con lo cual se tiene que por el teorema 72,

$$V(AB, CD) = (AB, CD) \qquad \text{y} \qquad V(A'B', C'D') = (A'B', C'D').$$

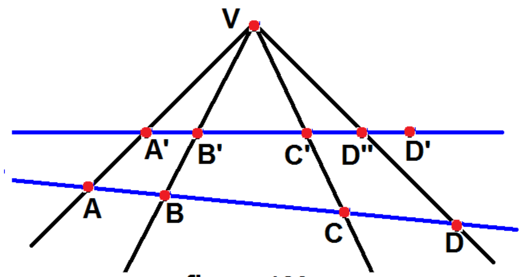


figura 123

Por la observación 1 de la definición 48, $V(AB, CD) = V(A'B', C'D'')$ por lo que $(AB, CD) = (A'B', C'D'')$ y como por hipótesis $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ se sigue que $(A'B', C'D') = (A'B', C'D'')$, pero el punto que completa una alineación dados tres puntos es único lo que nos permite concluir que $D' = D''$ y por tanto $\overleftrightarrow{DD'}$ pasa por V. □

Corolario 5. *Sean A, B, C, D y A', B', C', D' dos alineaciones de bases diferentes tales que $(AB, CD) = (A'B', C'D')$ y que A y A' coinciden, entonces $\overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ y $\overleftrightarrow{DD'}$ son concurrentes.*

Demostración. Sea V el punto de corte de $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$, se trazan las rectas $\overleftrightarrow{AD}$, $\overleftrightarrow{VD}$ y llámese D'' el punto de corte de $\overleftrightarrow{VD}$ con $\overleftrightarrow{B'C'}$, entonces por el teorema 72,

$$V(AB, CD) = (AB, CD) \qquad \text{y} \qquad V(AB', C'D") = (AB', C'D'').$$

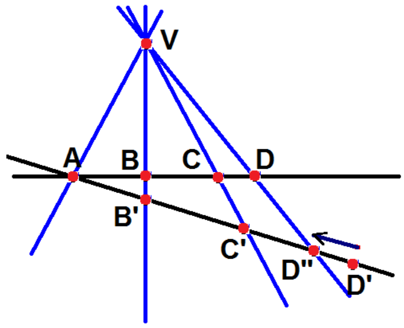


figura 124

Por la observación 1 de la definición 49 $V(AB,CD) = V(AB',C'D'')$ por lo que $(AB,CD) = (AB',C'D'')$ y como por hipótesis $(AB,CD) = (AB',C'D')$ se sigue que $(AB',C'D'') = (AB',C'D')$ y puesto que el punto que completa una alineación dados tres puntos de ella, es único se concluye que las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{CC'}$ y $\overleftrightarrow{DD'}$ son concurrentes. □

Corolario 6. *Sean $\overleftrightarrow{VA},\overleftrightarrow{VB},\overleftrightarrow{VC},\overleftrightarrow{VD}$ y $\overleftrightarrow{V'A},\overleftrightarrow{V'B},\overleftrightarrow{V'C},\overleftrightarrow{V'D}$ dos haces coplanares de vértices diferentes V y V' tales que $V(AB,CD) = V'(AB,CD)$ y que A está en $\overleftrightarrow{VV'}$ entonces B,C y D son colineales.*

Demostración. Sea A' el punto donde $\overleftrightarrow{BC}$ corta a $\overleftrightarrow{VV'}$, D' el punto donde $\overleftrightarrow{VD}$ interseca a $\overleftrightarrow{BC}$ y D'' el punto donde $\overleftrightarrow{V'D}$ corta a $\overleftrightarrow{BC}$ entonces A',B,C,D' y D'' son colineales.

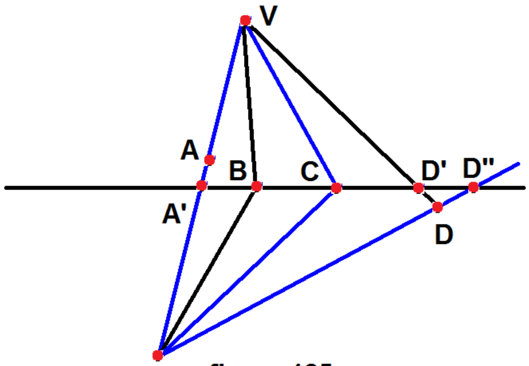


figura 125

Por la observación 1 de la definición 49 se tiene que

$$V(AB,CD) = V(A'B,CD') \qquad \text{y} \qquad V'(AB,CD) = V'(A'B,CD'')$$

y como por hipótesis $V(AB,CD) = V(AB,CD)$ entonces $V(A'B,CD') = V'(A'B,CD'')$ pero por el teorema 72 $V(A'B,CD') = (A'B,CD')$ y $V'(A'B,CD'') = (A'B,CD'')$ en consecuencia $(A'B,CD') = (A'B,CD'')$.

Pero el punto que completa una alineación dados tres es único entonces $D' = D''$, y puesto que dos rectas no paralelas tienen un único punto común, de donde $D = D' = D''$ y así los puntos B, C y D son colineales. $\square$

Corolario 7. *Sean $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}, \overleftrightarrow{VC}, \overleftrightarrow{VD}$ y $\overleftrightarrow{V'A}, \overleftrightarrow{V'B}, \overleftrightarrow{V'C}, \overleftrightarrow{V'D}$ dos haces coplanares de vértices diferentes V y V' tales que $V(AB, CD) = V'(AB, CD)$ y que A, B y C son colineales, entonces D está en la recta de colinealidad.*

Demostración. Sea D' el punto donde $\overleftrightarrow{VD}$ interseca a $\overleftrightarrow{BC}$ y D'' el punto donde $\overleftrightarrow{V'D}$ corta a $\overleftrightarrow{BC}$, entonces A, B, C, D' y D'' son colineales.

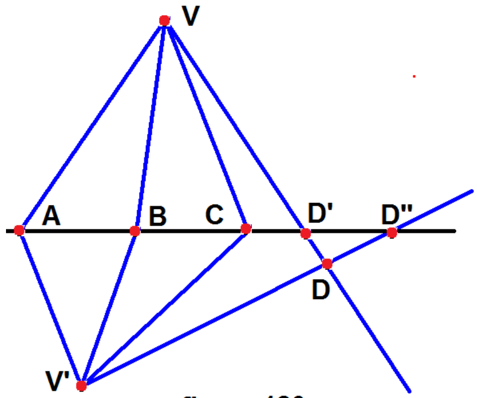


figura 126

Por la observación 1 de la definición 49 se tiene que

$$V(AB, CD) = V(AB, CD') \qquad \text{y} \qquad V'(AB, CD) = V'(AB, CD'')$$

como por hipótesis $V(AB, CD) = V'(AB, CD)$ entonces $V(AB, CD') = V'(AB, CD'')$ y dado que por el teorema 72 $V(AB, CD') = (AB, CD')$ y $V'(AB, CD'') = (AB, CD'')$ se sigue que $(AB, CD') = (AB, CD'')$ pero el punto que completa una alineación armónica dados tres puntos es único y así $D' = D''$ y como dos rectas no paralelas se intersecan en un único punto entonces $D' = D'' = D$ y en consecuencia D está en la recta $\overleftrightarrow{BC}$ $\square$

Definición 51. *Si A, B, C, D son puntos diferentes sobre una circunferencia diremos que ellos son* **Concíclicos**.

Corolario 8. *Sean A, B, C, D puntos concíclicos y V y V' dos punto diferentes sobre la circunferencia entonces $V(AB, CD) = V'(AB, CD)$.*

Demostración. Como los puntos A, B, C, D son conciclicos entonces los pares de ángulos $A\widehat{V}C$ y $A\widehat{V'}C$; $C\widehat{V}B$ y $C\widehat{V'}B$; $A\widehat{V}D$ y $A\widehat{V'}D$; $D\widehat{V}B$ y $D\widehat{V'}B$ subtienden los mismos arcos entre ellos, y por tanto son congruentes dos a dos.
y por tanto:

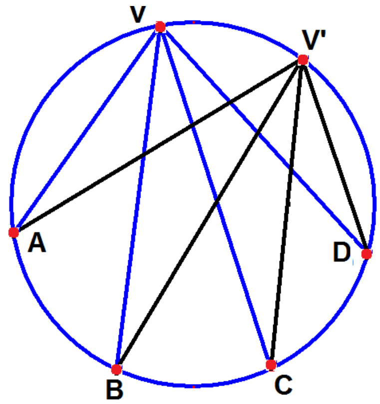


figura 127

$$V(AB,CD)=\frac{\frac{Sen A\widehat{V}C}{Sen C\widehat{V}B}}{\frac{Sen A\widehat{V}D}{Sen D\widehat{V}B}}=\frac{\frac{Sen A\widehat{V'}C}{Sen C\widehat{V'}B}}{\frac{Sen A\widehat{V'}D}{Sen D\widehat{V'}B}}=V'(AB,CD),$$

donde, por ejemplo $\overleftrightarrow{VA}$ se tomaría tangente a la circunferencia si V coincide con A. □

Lo anterior significa que la razón doble de un haz determinado por cuatro puntos en la misma circunferencia es independiente del punto sobre ella que se escoja como vértice.
Esto da lugar a la siguiente definición:

Definición 52. *Si A,B,C,D son puntos concíclicos diferentes y V es otro punto sobre la misma circunferencia, se notará la relación anarmónica $V(AB,CD)$ por el símbolo (AB,CD) y se llamará la* ***relación anarmónica de la serie cíclica*** *de los puntos A,B,C,D en ese orden.*

Teorema 73. *Si A,B,C,D son puntos concíclicos diferentes entonces*

$$(AB,CD)=e\left(\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}\right)$$

donde AC,CB,AD y DB son las longitudes de las cuerdas y e es -1 o +1 según que los pares A,B y C,D estén o no separados entre sí.

Demostración. Sean O y r el centro y radio de la circunferencia, entonces:

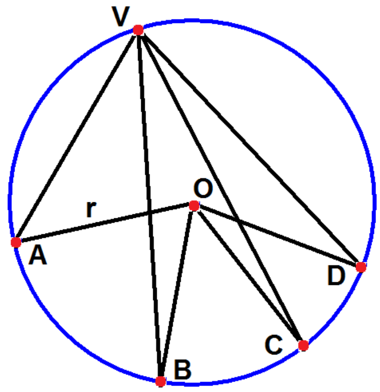


figura 128

$$senA\widehat{V}C = sen\frac{A\widehat{O}C}{2} = \frac{AC}{2r}; \qquad senC\widehat{V}B = sen\frac{C\widehat{O}B}{2} = \frac{CB}{2r} senA\widehat{V}D = sen\frac{A\widehat{O}D}{2} = \frac{AD}{2r};$$

$$sen\frac{D\widehat{O}B}{2} = \frac{DB}{2r}$$

por lo que

$$(AB, CD) = V(AB, CD) = \frac{\frac{senA\widehat{V}C}{senC\widehat{V}B}}{\frac{senA\widehat{V}D}{senD\widehat{V}B}} = \frac{\frac{\frac{AC}{2r}}{\frac{CB}{2r}}}{\frac{\frac{AD}{2r}}{\frac{BD}{2r}}} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{\frac{\frac{AC}{2r}}{\frac{CB}{2r}}}{\frac{\frac{AD}{2r}}{\frac{DB}{2r}}} = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}.$$

□

Observe que para la posición de los puntos A, B, C, D en la figura corresponde $+1$ pero es fácil verificar que si los pares de rayos $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}$ y $\overleftrightarrow{VC}, \overleftrightarrow{VD}$ están separados entre sí, corresponde -1. El siguiente teorema proporciona la primera muestra de la relación existente entre la teoría de la inversión y la razón anarmónica.

Teorema 74. *La razón anarmónica de cuatro puntos sobre una circunferencia es invariante bajo una inversión cuyo centro es diferente de los cuatro puntos.*

Demostración. Sean A, B, C, D cuatro puntos diferentes sobre una circunferencia S y A', B', C', D' sus respectivas imágenes sobre S' que es la imagen de S bajo $I(O, r^2)$, entonces:
1). S y S' son circunferencias, en cuyo caso se tiene:

$$(A'B', C'D') = e\left(\frac{\frac{A'C'}{C'B'}}{\frac{A'D'}{D'B'}}\right) = e\frac{\frac{\frac{r^2 \times CA}{OC \times OA}}{\frac{r^2 \times BC}{OC \times OB}}}{\frac{\frac{r^2 \times DA}{OA \times OD}}{\frac{r^2 \times BD}{OD \times OB}}} = e\left(\frac{\frac{CA \times OB}{OB \times BC}}{\frac{OB \times DA}{OA \times OB}}\right) = e\left(\frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}}\right) = (AB, CD)$$

□

2). Se tratan de manera análoga los casos en que S sea una recta y S' una circunferencia, S una circunferencia y S' una recta, S una recta y S' una recta.

Definición 53. *Si A, B, C, D son cuatro puntos colineales tales que $(AB, CD) = -1$ entonces se dice que el segmento $\overline{AB}$ está* **dividido armónicamente** *por los puntos C y D. Los puntos C y D se llaman* **conjugados armónicos** *con respecto a A y B y los cuatro puntos A, B, C, D que constituyen una* **Alineación Armónica** *(hilera armónica).*
Si $V(AB, CD) = -1$ entonces se dice que $\overleftrightarrow{VA}, \overleftrightarrow{VB}, \overleftrightarrow{VC}$ y $\overleftrightarrow{VD}$ constituyen un **haz armónico**.
Observe que:
1). Si C y D son conjugados armónicos con respecto a A y B entonces $(AB, CD) = -1$ luego por el teorema 2 de la sección 3 de este capítulo $(CD, AB) = -1$ y por tanto A y B son conjugados armónicos con respecto a C y D.
2). Si P es un punto que se aleja indefinidamente a lo largo de la recta determinada por los puntos A y B entonces $\frac{AP}{PB}$ tiende al valor -1, esto conduce a la siguiente definición.

Definición 54. *Si A y B son dos puntos ordinarios de $\overline{AB}$ y Z es el punto ideal de la recta entonces $\frac{AZ}{ZB} = -1$.*

3).El conjugado armónico con respecto a A y B del punto medio de $\overline{AB}$ es el punto ideal $\overleftrightarrow{AB}$ ya que si Q es el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\frac{AQ}{QB} = 1$ y si P es el conjugado armónico de Q con respecto a A y B se debe tener que $\frac{AP}{PB} = -1$ y por tanto de la definición 54 se deduce que P es el punto ideal de $\overleftrightarrow{AB}$.
4).El conjugado armónico de un punto C con respecto a un segmento dado $\overline{AB}$ puede construirse geométricamente como sigue:

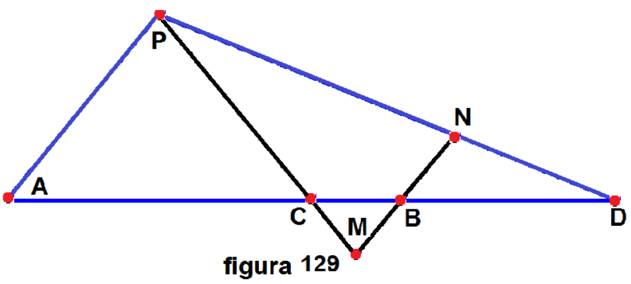


figura 129

Sea P un punto fuera de $\overleftrightarrow{AB}$, se une P con A y C y por B se traza la paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ la cual interseca a $\overleftrightarrow{PC}$ en un punto M. Se toma sobre $\overleftrightarrow{BM}$ un punto N tal que $MB = BN$ entonces $\overleftrightarrow{PN}$ interseca a $\overleftrightarrow{AB}$ en un punto D que es el conjugado armónico buscado, puesto que $\overleftrightarrow{MB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{AP}$ y $A\widehat{C}P \cong B\widehat{C}M$ entonces $\triangle ACP \sim \triangle BCM$ y por tanto $\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BM}$ o sea $-\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{MB}$ y como $\overleftrightarrow{AP}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BN}$ y $A\widehat{D}P \cong B\widehat{D}N$ entonces $\triangle ADP \sim \triangle BDN$ y por

$\frac{AD}{BD} = \frac{AP}{BN}$ y dado que $MB = BN$ entonces $-\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}$ y así $(AB, CD) = -1$ y por tanto C y D son conjugados armónicos con respecto a A y B.

Los siguientes dos teoremas brindan criterios útiles para que cuatro puntos colineales formen una hilera armónica, el segundo de ellos muestra además, la relación entre una inversión y una hilera armónica.

Teorema 75. $(AB, CD) = -1$ *si y sólo si los segmentos* $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ *y* $\overline{AD}$ *están en progresión armónica.*

Demostración. Suponga que $(AB, CD) = -1$ entonces $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ y así $\frac{CB}{AC \times AB} = \frac{BD}{AD \times AB}$ o sea $\frac{AB - AC}{AC \times AB} = \frac{AD - AB}{AD \times AB}$ entonces $\frac{1}{AC} - \frac{1}{AB} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{AD}$ y por tanto $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ luego $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ forman una progresión armónica. La implicación en el sentido contrario se establece invirtiendo los pasos anteriores. □

Teorema 76. *1). Si C y D son inversos respecto a $O(r)$ entonces $(AB, CD) = -1$ donde $\overline{AB}$ es el diámetro de $O(r)$ que pasa por C y D.*

2). Si $(AB, CD) = -1$ entonces C y D son inversos con respecto a $O(r)$ donde O es el punto medio de $\overline{AB}$.

Demostración. 1). Si C y D son inversos con respecto a $O(r)$ entonces $OD \times OC = r^2$ o sea $OD = \frac{r^2}{OC}$.

Si $\overline{AB}$ es el diámetro de $O(r)$, que pasa por C y D, entonces $OA = -OB$ y por ello:

$$(AB, CD) = \frac{\frac{AC}{CB}}{\frac{AD}{DB}} = \frac{AC \times DB}{CB \times AD} = \frac{(OC - OA)(OB - OD)}{(OB - OC)(OD - OA)} = \frac{(OC + OB)(OB - OD)}{(OB - OC)(OD + OB)}$$

$$= \frac{(OC + r)(OB \frac{r^2}{OC})}{(r - OC)(\frac{r^2}{OC} + r)} = \frac{r(OC + r)(OC - r)}{-r(OC - r)(r + OC)} = -1$$

2). Si O es el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $OA = -OB$.

Si $(AB, CD) = -1$ se tiene $\frac{AC}{CB} = -\frac{AD}{DB}$ luego $\frac{OC - OA}{OB - OC} = \frac{-(OD - OA)}{OB - OD}$ y así $\frac{OC + OB}{OB - OC} = \frac{OD + OB}{OD - OB}$ o sea $(OC + OB)(OD - OB) = (OD + OB)(OB - OC)$ por lo que

$$OC \times OD - OC \times OB + OB \times OD - (OB)^2 = OD \times OB - OD \times OC + (OB)^2 - OB \times OC$$

o sea $OC \times OD = (OB)^2 = r^2$ y como D está en $\overrightarrow{OC}$ se tiene que C y D son inversos respecto a $O(r)$. □

5.4. Aplicaciones de la Inversión y la Razón Cruzada.

En esta sección se mostrarán algunas aplicaciones de la teoría de la inversión en las cuales se observará la potencia y belleza de ella como transformación simplificadora; también se resuelven algunos problemas con la aplicación del concepto de razón cruzada y algunas de sus consecuencias.

5.4.1. Mecanismo Inversor de Peaucellier.

Uno de los problemas Geométricos más notables de la última mitad del siglo IXX fue descubrir un mecanismo articulado para trazar una recta. Este problema fue resuelto en 1803 por un oficial del ejército francés A. Peaucellier, pero el anuncio de tal hecho no tuvo la trascendencia debida, hasta que más tarde Lipkin, Alumno de Chebishev reinventó de manera independiente el mecanismo en 1861, y por lo que recibió un importante premio del gobierno ruso; después de ello el mérito de Peaucellier fue reconocido y se le otorgó el Gran Premio Mecánico del Instituto de Francia. El mecanismo de Peaucellier consta de siete barras y en 1874 Henry Hart descubrió un mecanismo articulado para trazar rectas que contiene cinco barras, después de esto no ha sido posible disminuir el número de barras, ni demostrar que es imposible una disminución mayor.

El mecanismo inversor de Peaucellier se describe a continuación.

Sea $PABP'$ un rombo, O un punto colineal con P y P', se unen los puntos A y B con O de modo que $OA = OB$, $OA > PA$, si todos los puntos de la figura, excepto O quedan en libertad de moverse se tiene que los puntos P y P' describen curvas inversas bajo la inversión $I(O, OA^2 - PA^2)$, como se muestra a continuación.

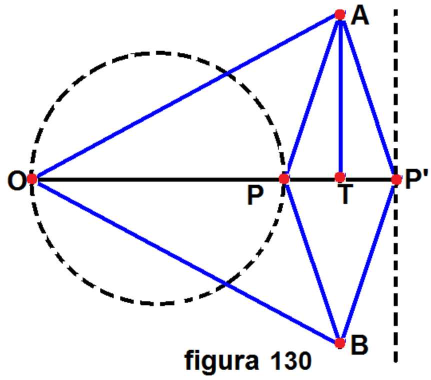


figura 130

Sea T el punto de corte de $\overline{PP'}$ y $\overline{AB}$ entonces

$$\begin{aligned} OP \times OP' &= (OT - PT)(PT + OT) = (OT)^2 - (PT)^2 = \left((OA)^2 - (AT)^2\right) - \left((PA)^2 - (AT)^2\right) \\ &= (OA)^2 - (PA)^2 = r^2 \end{aligned}$$

que es una constante y por lo tanto P y P' son inversos bajo la inversión $I(O, OA^2 - PA^2)$. Observe en particular que si C es un punto fijo sobre $\overline{OP}$ tal que $OC = CP$, se aumenta una barra por tanto los puntos O y C son fijos sobre la mesa, el punto P describe una circunferencia que pasa por O y por lo tanto P' describe una recta perpendicular a $\overleftrightarrow{OC}$.

5.4.2. Inversión de teoremas.

Por medio de la inversión se pueden deducir y probar nuevos teoremas a partir de teoremas y resultados conocidos. Este procedimiento se conoce como inversión de un teorema y se ilustra con los siguientes ejemplos:

5.4.2.1. Invertir el teorema *las alturas de un triángulo son concurrentes.*

Sea ABC un triángulo cualquiera, H el punto de concurrencia de las alturas (ortocentro) y P, Q, R los pies de las alturas sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ o sus prolongaciones respectivamente, al invertir el teorema con respecto a H se obtiene el siguiente resultado: "Si tres circunferencias tienen un punto en común entonces la cuerda común de dos de ellas pasa por el centro de la tercera."

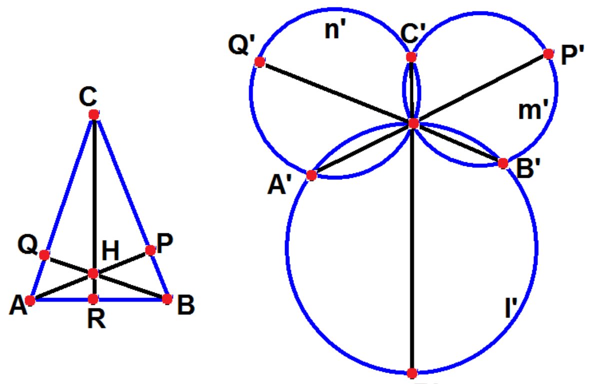


figura 131

Para probar esto observe que ninguna de las tres alturas del triángulo se altera por la inversión ya que pasan por el centro de ella y por tanto se convierten en las rectas $\overleftrightarrow{A'P'}$, $\overleftrightarrow{B'Q'}$ y $\overleftrightarrow{C'R'}$ y los tres lados del triángulo $\overleftrightarrow{AB} = l$, $\overleftrightarrow{BC} = m$ y $\overleftrightarrow{AC} = n$ se invierten respectivamente en las circunferencias l', m', n' que pasan por H y que se intersecan dos a dos en los puntos B', C' y A' que son inversos de B, C y A respectivamente.
Como la altura $\overline{AP}$ pasa por H su inversa $\overline{A'P'}$ pasa por H y por tanto es la cuerda común de las circunferencias n' y l', análogamente $\overline{C'R'}$ es la cuerda común de n' y m' y $\overline{B'Q'}$ es la cuerda común de m' y l' y dado que las alturas de un triángulo son ortogonales a sus lados

respectivos y las magnitudes de los ángulos no se alteran por la inversión, entonces las rectas $\overleftrightarrow{A'P'}, \overleftrightarrow{B'Q'}, \overleftrightarrow{C'R'}$ son ortogonales a las circunferencias m', n' y l' respectivamente, es decir $\overline{HP'}$, $\overline{HQ'}$ y $\overline{HR'}$ son diámetros de las circunferencias m', n' y l' y por tanto son cuerdas que pasan por el centro de cada una de ellas.

5.4.2.2. Invertir el teorema: *El ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.*

Sea S una circunferencia y $O\widehat{P}A$ un ángulo recto inscrito en ella, al invertir la figura con respecto a O se obtiene el siguiente resultado: "Si dos rectas se intersectan perpendicularmente y una circunferencia que pasa por su punto de intersección también pasa por un punto fijo de una de ellas y por un punto variable en la otra entonces el segmento determinado por los puntos fijo y variable es un diámetro de la circunferencia." El teorema en mención queda demostrado al observar que:

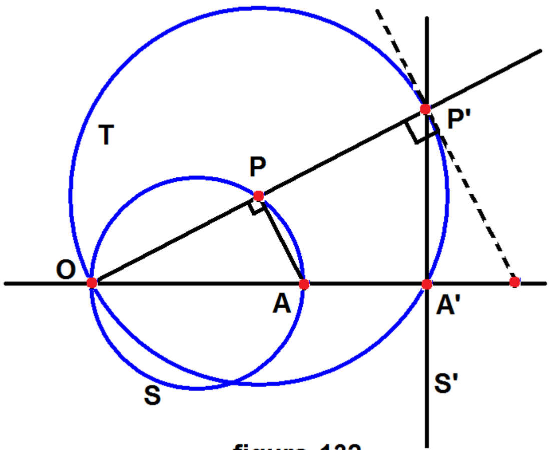


figura 132

Invirtiendo con respecto a O se tiene que la circunferencia S se invierte en la recta S' que no pasa por O, la recta $\overleftrightarrow{OA}$ se invierte en sí misma y es perpendicular a S' en A', la recta $\overleftrightarrow{OP}$ se invierte en sí misma, el punto P en un punto P' sobre S' y la recta $\overleftrightarrow{AP}$ se invierte en una circunferencia T que pasa por los puntos O, A' y P'.
Como $\overleftrightarrow{OP}$ y $\overleftrightarrow{AP}$ son ortogonales y una inversión preserva magnitud de ángulos entonces la recta $\overleftrightarrow{OP'}$ y la circunferencia T son ortogonales y en consecuencia el segmento $\overline{OP'}$ es un diámetro de T.

5.4.3. Teorema de Tolomeo.

La proposición que recibe este nombre fue empleada por Claudio de Tolomeo para el desarrollo de una tabla de cuerdas en el primer libro de su *ALMAGESTO*, el gran trabajo griego sobre astronomía. Aunque esta proposición fue conocida antes de la época de Tolomeo, la demostración realizada por este, es la primera que se conoce y su enunciado es el siguiente: "En una cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia el producto de sus diagonales es igual a la suma de los productos de los pares de lados opuestos."

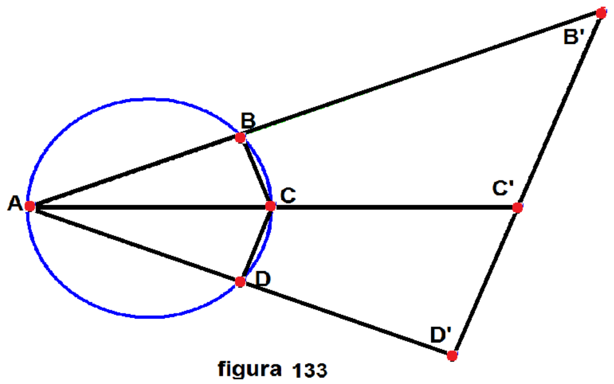


figura 133

Demostramos a continuación este resultad.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia S y sea I la inversión de centro en A y potencia r^2 entonces el punto A se invierte en el punto ideal Z y los puntos B, C y D en los puntos B', C' y D', la circunferencia S se invierte en una recta que pasa por los puntos B', C' y D' y por tanto los puntos B', C' y D' son colineales con $B' - C' - D'$ luego $B'C' + C'D' = B'D'$ y como para cualesquiera par de puntos X, Y y sus inversos X', Y' se cumple la relación $X'Y' = \frac{XY \times r^2}{OX \times OY}$ donde O es el centro de inversión, entonces:

$$B'C' = \frac{BC \times r^2}{AB \times AD}, \qquad C'D' = \frac{CD \times r^2}{AC \times AD}, \qquad B'D' = \frac{BD \times r^2}{AB \times AD}$$

y por tanto

$$\frac{BC \times r^2}{AB \times AC} + \frac{CD \times r^2}{AC \times AD} = \frac{BD \times r^2}{AB \times AD},$$

lo que produce la igualdad

$$\frac{r^2(BC \times AD + AB \times CD)}{AB \times AD} = \frac{r^2(BD \times AC)}{AB \times AD}$$

y así

$$BC \times AD + AB \times CD = BD \times AC.$$

5.4.4. Encontrar, utilizando exclusivamente compás, el inverso de un punto M bajo la inversión $I(O, r^2)$.

Sea $O(r)$ la circunferencia de inversión y M un punto fuera de $O(r)$, con centro en M y radio OM se traza un arco de circunferencia el cual interseca a $O(r)$ en los puntos A y B. Con A y B como centros y radio OA se trazan dos arcos que se intersecan en el centro O y en otro punto M' sobre $\overline{OM}$. Este punto $\overline{OM}$ es el inverso de M bajo $I(O, r^2)$ ya que:

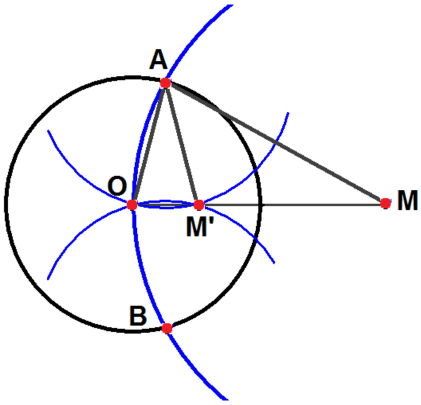


figura 134

Los triángulos AOM' y AOM son isósceles y como $\sphericalangle AOM' \cong \sphericalangle AOM$, adyacentes a la base se sigue que los triángulos AOM y $M'OA$ son semejantes y por lo tanto

$$\frac{OM}{OA} = \frac{OA}{OM'}$$

es decir, $OM \times OM' = (OA)^2 = r^2$ y como M' está en $\overrightarrow{OM}$ se tiene que M' es el inverso de M bajo $I(O, r^2)$.

5.4.5. Encontrar, usando solo compás, el punto medio entre dos puntos dados, cuando la recta determinados por ellos no se da.

Sean A y B los puntos dados, se traza con centros en A y B y radio AB las circunferencias S y T y con el mismo radio desde A se marcan sobre T los puntos P, Q y R, entonces R es colineal con A y B ya que cada uno de los ángulos ABP, PBQ, QBR mide 60 puesto que los triángulos ABP, PBQ y QBR son equiláteros, sus lados tienen longitud AB entonces R está situado a una distancia de A igual a $2AB$.
Invirtiendo con respecto a $I(A, (AB)^2)$, Por el método de la aplicación 4 se tiene que su inverso R' es el punto medio de $\overline{AB}$ ya que:

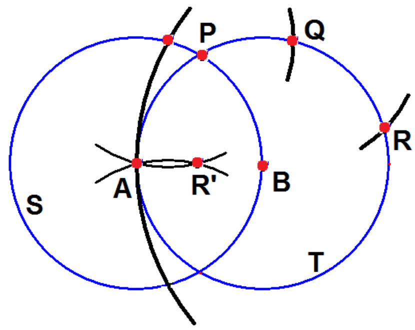


figura 135

$AR' \times AR = r^2 = (AB)^2$ o sea $AR' = \frac{(AB)^2}{AR} = \frac{(AB)^2}{2AB} = \frac{AB}{2}$ y R' es colineal con A y B y con $A - R' - B$.

5.4.6. Teorema de Stewart.

Este teorema fue enunciado sin demostración por Matthew Stewart en 1746, fue redescubierto y demostrado por Thomas Simpson en 1751, por Leonard Euler en 1780 y por Carnoten en 1803. El caso en que P es colineal con A, B y C se halla en la colección de Pappus.

Teorema 77. *Sean A, B y C tres puntos colineales y P un punto cualquiera, entonces*

$$PA^2 \times BC + PB^2 \times CA + PC^2 \times AB + BC \times CA \times AB = 0.$$

Demostración. a). Si P es colineal con A, B y C, escribimos la expresión de la parte izquierda en función de P para obtener:
$PA^2 \times BC + PB^2 \times CA + PC^2 \times AB + BC \times CA \times AB$
$= PA^2 \times (PC - PB) + PB^2 \times (PA - PC) + PC^2 \times (PB - PA) + (PC - PB) \times (PA - PC) \times (PB - PA)$
$= PA^2 \times PC - PA^2 \times PB + PB^2 \times PA - PB^2 \times PC + PC^2 \times PB - PC^2 \times PA + PC \times PB \times PA + PC^2 \times PA - PC^2 \times PB - PB^2 \times PA + PB^2 \times PC - PA^2 \times PC + PA^2 \times PB + PB^2 \times PC - PB^2 \times PC - PC \times PB \times PA$
$= 0$.
b). Si P no está en la recta determinada por A y B;

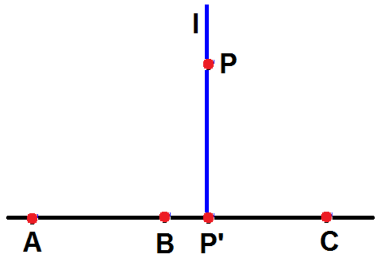


figura 136

sea l la perpendicular trazada por P a $\overleftrightarrow{AB}$ y P' el punto de corte de l y $\overleftrightarrow{AB}$ entonces P' es colineal con A, B y C y por la parte a). se tiene que:

$$P'A^2 \times BC + P'B^2 \times CA + P'C^2 \times AB + BC \times CA \times AB = 0$$

luego,

$PA^2 \times BC + PB^2 \times CA + PC^2 \times AB + BC \times CA \times AB$
$= (PP'^2 + P'A^2) \times BC + (PP'^2 + P'B^2) \times CA + (PP'^2 + P'C^2) \times AB + BC \times CA \times AB$
$= PP'^2 \times BC + P'A^2 \times BC + PP'^2 \times CA + P'B^2 \times CA$
$+ PP'^2 \times AB + P'C^2 \times AB + BC \times CA \times AB$
$= (P'A^2 \times BC + P'B^2 \times CA + P'C^2 \times AB + BC \times CA \times AB)$
$+ PP'^2(BC + CA + AB)$
$= 0 + PP'^2 \times 0$
$= 0.$ □

5.4.7. Teorema de Desargues de los dos triángulos.

Definición 55. *1. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se dicen* **COPOLARES** *si y sólo si las rectas determinadas por A y A', B y B', C y C' son concurrentes.*
2. Dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se dicen **COAXIALES** *si y sólo si los puntos de intersección de las rectas determinadas por los lados $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, $\overline{BC}$ y $\overline{B'C'}$, $\overline{AC}$ y $\overline{A'C'}$ son colineales.*

Teorema 78. *Dos triángulos son copolares si y sólo si son coaxiales.*

Demostración. 1).suponga que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son copolares entonces las rectas $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}, \overleftrightarrow{CC'}$ son concurrentes, sean V este punto de concurrente y P, Q y R los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ respectivamente, llámese M, M' y O los puntos donde $\overleftrightarrow{BB'}$ interseca a $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{A'C'}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ respectivamente, entonces aplicando repetidamente la observación 1 de la definición 3 y el teorema 72, se obtiene que:

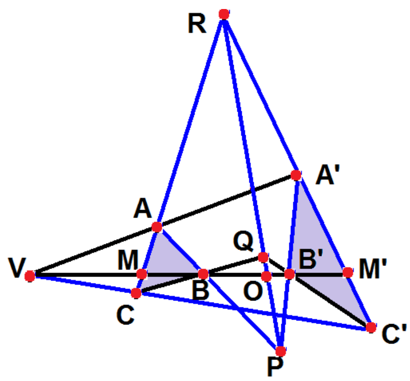


figura 137

$$B(OP,QR) = B(MA,CR) = (MA,CR) = V(MA,CR) = V(M'A',C'R) = (M'A',C'R)$$
$$= B'(M'A',C'R) = B'(OP,QR).$$

Puesto que O está en $\overleftrightarrow{BB'}$ se sigue por aplicación del corolario 3 al teorema 72 que P, Q y R son colineales y en consecuencia los triángulos ABC y $A'B'C'$ son coaxiales.
2). Suponga que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son coaxiales entonces los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{A'B'}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$, $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{A'C'}$ son colineales, es decir P, Q y R son colineales y aplicando reiteradamente el teorema 72 y la observación 1 de la definición 3, se obtiene:

$$(MA,CR) = B(MA,CR) = B(OP,QR) = B'(OP,QR) = B'(M'A',C'R) = (M'A',C'R)$$

y por el corolario 2 del teorema 72 se sigue que las rectas $\overleftrightarrow{MM'} = \overleftrightarrow{BB'}$, $\overleftrightarrow{AA'}$ y $\overleftrightarrow{CC'}$ son concurrentes y en consecuencia los triángulos ABC y $A'B'C'$ son copolares. □

El teorema de Desargues para dos triángulos parece haber sido formulado por éste en 1636, tres años antes de que se publicará su máxima obra *BROUILLON PROJECT* y que es un texto básico para el desarrollo de la Geometría Proyectiva ya que como se observa, lo establecido por el teorema de Desargues implica propiedades como las de concurrencia de rectas y colinealidad, propiedades que están desconectadas de la noción de medida y por tanto son esencialmente proyectivas, por esto se toma, en algunas ocasiones, el teorema de Desargues como el *teorema fundamental de la Geometría Proyectiva.* Las propiedades geométricas pueden ser clasificadas como *Métricas* y *Proyectivas.* Son propiedades métricas aquellas que están relacionadas explícita o implícitamente con la noción de medida (Por ejemplo, congruencia de segmentos, semejanza de triángulos) y son propiedades proyectivas aquellas que están desconectadas de la noción de medida (Por ejemplo, concurrencia de rectas y colinealidad).

5.4.8. Teorema del Hexagrama Místico de Pascal para una Circunferencia.

Teorema 79. *Los puntos de intersección de los pares de lados opuestos de un hexágono, no necesariamente convexo inscrito en una circunferencia son colineales.*

Demostración. Sea $ABCDEF$ un hexágono inscrito en una circunferencia, P, Q, R los puntos de intersección de los pares de lados opuestos, o sus prolongaciones si es necesario $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, $\overline{AF}$ y $\overline{CD}$ respectivamente y sean además M el punto de intersección de $\overleftrightarrow{AF}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, N el punto de intersección de $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.

Aplicando sucesivamente la observación 1 de la definición 50, la observación 1 de la definición 49 y el teorema 72 se obtiene que:

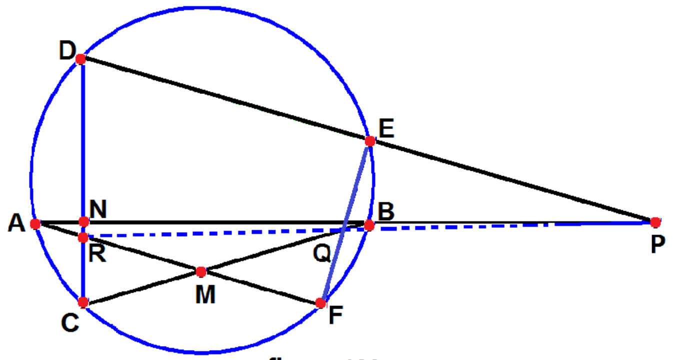


figura 138

$$F(BM, CQ) = (BM, CQ) = F(BA, CE) = D(BA, ND) = (BA, NP)$$

es decir, $(BM, CQ) = (BA, NP)$
Por tanto por el corolario 5 del teorema 72 se sigue que las rectas $\overleftrightarrow{MA}, \overleftrightarrow{CN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$ son concurrentes y como $\overleftrightarrow{MA}$ y $\overleftrightarrow{CN}$ se intersecan en R entonces $\overleftrightarrow{PQ}$ pasa también por R, es decir, P, Q y R son colineales. □

El teorema del hexagrama místico para una cónica general fue descubierto en 1639 por Blaise Pascal cuando solo tenía 16 años. Las consecuencias de este teorema son singularmente atractivas y numerosas y sea ha realizado estudios sobre su configuración, por ejemplo, la recta en la cual están los puntos P, Q y R se llama ***recta de Pascal*** del hexágono. Si los mismos seis puntos son unidos consecutivamente en cualquier otro orden se obtiene un hexágono diferente con los mismos seis puntos concíclicos como vértices y para cada uno de estos hexágonos hay una recta de Pascal. Como hay sesenta maneras de formar un hexágono con los 6 puntos dados hay entonces 60 rectas de Pascal, las cuales pasan de tres en tres por 20 puntos llamados ***Puntos de Steiner*** que a su vez están de cuatro en cuatro sobre 15 rectas llamadas ***Rectas de Plüker***.

5.4.9. El Teorema de Pappus en la Adición y la Multiplicación.

En uno de los textos de matemáticas utilizados como referencia en la enseñanza básica, se presenta un método geométrico para multiplicar números enteros ¿cual es la justificación de este procedimiento? La respuesta a este interrogante, como se verá más adelante, se obtiene como una aplicación del teorema de Thales, sin embargo al profundizar en él, se encuentra que existe un teorema geométrico, el teorema de Pappus, que guarda una estrecha relación con algunas propiedades aritméticas de la adición y multiplicación. En esta sección presentamos esta interrelación.

5.4.9.1. El Teorema de Pappus.

Pappus de Alejandría fue un matemático de la antigua Grecia que vivió a finales del siglo III A.de C. Su gran obra *La colección* se puede considerar como el libro guía de los trabajos geométricos existentes en su época ya que en ella aparecen numerosas proposiciones originales, versiones mejoradas de otras, extensiones y comentarios históricos valiosos. Según los historiadores, Pappus fue el último de los geómetras griegos creadores, ya que después de él, la matemática griega prácticamente desapareció y solo fue perpetuada por escritores y críticos secundarios.

Teorema 80. *Si los vértices de un hexágono se encuentran alternadamente sobre dos rectas entonces los puntos de intersección de los pares de lados opuestos son colineales.*

Demostración. Sea $ABCDEF$ un hexágono cuyos vértices A, C, E están sobre una recta l y los vértices B, D y F sobre una recta m. Sean además P, Q y R los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DE}$, $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AF}$ respectivamente, entonces pueden ocurrir dos casos:
a). Las rectas l y m se cortan en un punto O. Si se llaman K, H los puntos de corte de las rectas $\overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{ED}$ y $\overleftrightarrow{AF}$ respectivamente entonces por la segunda observación realizada al teorema 72

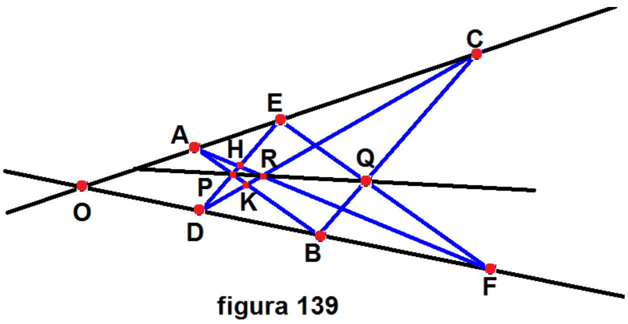


figura 139

$$A(OB, DF) = C(OB, DF),$$

Puesto que por la observación 1 de la definición 49 y el teorema 72 se tiene que

$$A(OB, DF) = A(EB, DF) = A(EP, DF) = (EP, DH)$$

y $C(OB, DF) = C(EB, DF) = C(EQ, KF) = (EQ, KF)$ entonces $(EP, GH) = (EQ, KF)$.
Por el corolario 5 del teorema 72, las rectas $\overleftrightarrow{PQ}, \overleftrightarrow{DK}$ y $\overleftrightarrow{HF}$ son concurrentes y puesto que las rectas $\overleftrightarrow{DK}$ y $\overleftrightarrow{HF}$ se intersectan en R entonces la recta $\overleftrightarrow{PQ}$ pasa por R y así los puntos P, Q y

R son colineales.

b).las rectas l y m son paralelas. La demostración de este caso se deja como ejercicio.

$\square$

Obsérvese que la existencia de los puntos P, Q y R como puntos ordinarios, depende esencialmente, de la disposición de los puntos A, E, C y B, D, F sobre las rectas l y m, por tanto es posible considerar algunos casos particulares, entre los cuales está el siguiente que tiene singular relevancia. ¿qué sucede si en el hexágono hay dos pares de lados opuestos paralelos?

Se deben considerar dos posibilidades:

a). l es paralela a m.

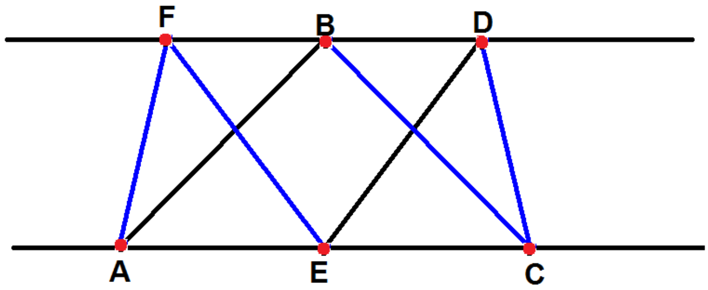


figura 140

Puesto que $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{ED}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BC}$ entonces los cuadriláteros $ABDE$ y $ECFB$ son paralelogramos por lo que $AE = BD$ y $EC = BF$ por tanto $AC = FD$ o sea el cuadrilátero $ACDF$ es un paralelogramo y así $\overleftrightarrow{AF}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$.

b). l y m se interceptan en un punto O.

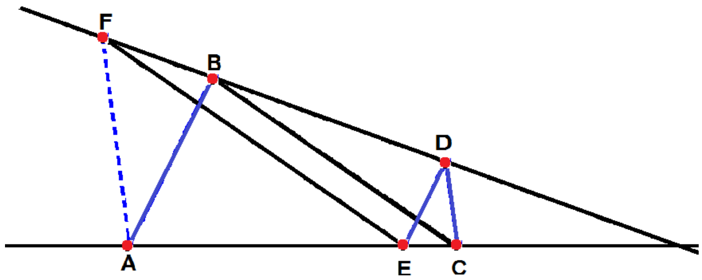


figura 141

Dado que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{ED}$ y las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{EF}$ son paralelas se sigue que los triángulos AOB y EOD y los triángulos EOF y COB son semejantes por tanto

$$\frac{AO}{BO} = \frac{EO}{DO} \qquad \text{y} \qquad \frac{EO}{CO} = \frac{FO}{BO},$$

es decir, $\frac{FO}{AO} = \frac{DO}{CO}$ y así $\overleftrightarrow{AF}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CD}$.

De esta manera se ha demostrado que:

"Si los vertices de un hexágono están alternadamente sobre dos rectas l y m y el hexágono tiene dos pares de lados opuestos paralelos entonces los lados del tercer par también son paralelos." El caso de que l y m son paralelos se denomina: **El pequeño teorema de Pappus** y el caso en que m y l no son paralelas, **El teorema de Pappus.**

5.4.9.2. El pequeño teorema de Pappus y la adición.

La adición tiene geométricamente su fundamento en la noción intuitiva de colocar, en la misma recta, un segmento a continuación de otro. Puesto que, dada una recta l, un punto de ella como origen y un segmento unidad, existe una correspondencia biunivoca entre los puntos de la recta y los numeros reales, no haremos diferencia entre los puntos de la recta y los números reales.

Definición 56. *Sean l una recta y O un punto sobre ella. Si se consideran tres puntos A, B y C sobre ella, diremos que C es la **suma** de A y B, denotado $C = A+B$ si y sólo si $OC = OA+OB$, consideradas como distancias dirigidas.*

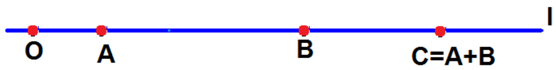


figura 142

El siguiente algoritmo, implementa geométricamente la definición anterior.

Algoritmo

Sea l una recta, O un punto sobre ella y A, B dos puntos cualquiera sobre l, entonces

a). Se traza por O una recta m diferente de l.

b). Se traza una recta l' paralela a l entonces l' corta a m en un punto D.

c). Por B se traza una recta paralela a m la cual intercepta a l' en un punto E.

d). Se une A con D y por E se traza una paralela a $\overleftrightarrow{AD}$ la cual intersecta a l en un punto C.

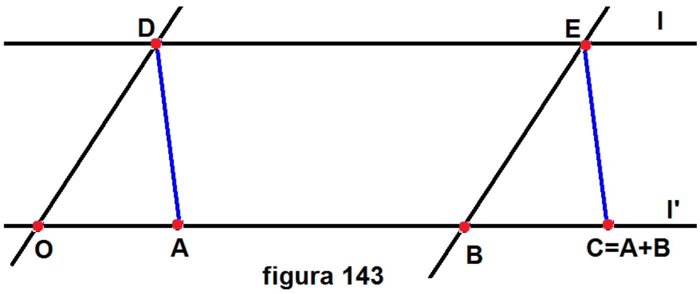


figura 143

El punto C es tal que $C = A + B$ ya que $OC = OA + AC = OA + DE = OA + OB$.

Teorema 81. *El pequeño teorema de Pappus es equivalente a la conmutatividad de la adición.*

Demostración. Sea l una recta, O un punto en ella y consideremos dos puntos cualesquiera A, B en l, entonces:

a). Construimos $A+B$ de acuerdo con el algoritmo dado, figura 143, con lo cual obtenemos los puntos D y E sobre la recta l' paralela a l, el punto C sobre l tal que $C = A+B$ y las rectas $m = \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{EB}, \overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{EC}$ tales que $\overleftrightarrow{OD}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{AD}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CE}$

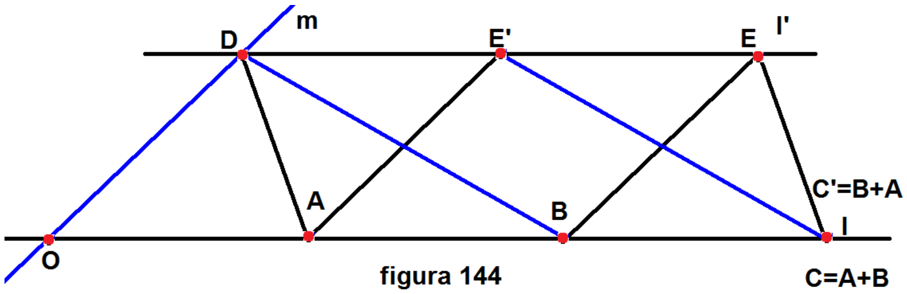


figura 144

b). Construimos $B+A$, para lo cual trazamos por A una paralela a m que determina un punto E' en l', unimos B con D y luego E' con C.

El punto C es $B+A$, siempre que $\overleftrightarrow{BD}$ sea paralela a $\overleftrightarrow{E'C}$. Veamos esto.

Puesto que por construcción $\overleftrightarrow{BE}$ es paralela a $\overleftrightarrow{OD}$ y $\overleftrightarrow{AE'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{OD}$ entonces por transitividad $\overleftrightarrow{BE}$ es paralela a $\overleftrightarrow{AE'}$ y dado que por construcción $\overleftrightarrow{AD}$ es paralela a $\overleftrightarrow{CE}$ entonces el hexágono $ADBECE'$ posee dos pares de lados opuestos paralelos, luego por el pequeño teorema de Pappus $\overleftrightarrow{DB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{E'C}$, luego C representa a $B+A$ y así la adición es conmutativa.

Recíprocamente, se realiza la construcción de $C = A+B$ y $C' = B+A$ con lo cual se obtiene que $\overleftrightarrow{OD}$ es paralela a $\overleftrightarrow{AE'}$ y $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{AD}$ es paralela a $\overleftrightarrow{EC}$ y $\overleftrightarrow{DB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{E'C'}$ entonces el hexágono $EBDAE'C$ posee dos pares de lados opuestos paralelos, $\overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{AE'}$, $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{EC}$ y puesto que $A+B = B+A$, C coincide con C', es decir, $\overleftrightarrow{DB}$ es paralela a $\overleftrightarrow{E'C}$ y por tanto se cumple el pequeño teorema de Pappus. □

5.4.9.3. El teorema de Pappus y la Multiplicación.

Definición 57. *Sea l una recta dada del plano y O un punto sobre ella, se ubica un punto U en l diferente de O y se adopta $\overline{OU}$ como el segmento unidad. Si A, B y C son tres puntos cualquiera de l, diremos que C es el* ***producto*** *de A y B si y sólo si se cumple la relación*

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{OU}.$$

Esta definición se convierte en el siguiente algoritmo geométrico.

Algoritmo.

Sea l una recta del plano, O y U puntos sobre ella, O diferente de U y $\overline{OU}$ el segmento unidad. Sean además A y B puntos cualquiera sobre l entonces

a). Sea traza por O una recta l' diferente de l.

b). Se selecciona sobre l' un punto U' tal que $OU = OU'$.

c). Se une U con U' y por B se traza una paralela a $\overline{UU'}$, esto determina en l' un punto B' tal que $OB = OB'$.

d). Se une U con A y por B' se traza una paralela a $\overleftrightarrow{U'A}$ la cual corta a l en un punto C.

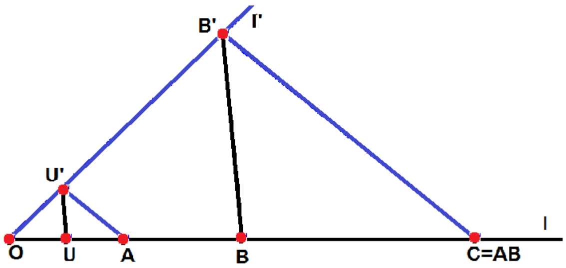


figura 145

El punto C es el producto de A y B ya que los triángulos $OU'A$ y $OB'C$ son semejantes por lo que

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB'}{OU'} = \frac{OB}{OU}.$$

Nótese que este algoritmo proporciona una tabla de multiplicar por un número dado ya que es suficiente colocar en l el primer factor A, en l' el segundo factor B y el segmento unidad $\overline{OU}$, unir U con A y por B trazar una paralela a $\overleftrightarrow{UA}$. El punto C en el cual esta paralela corta a l es el producto de A y B.

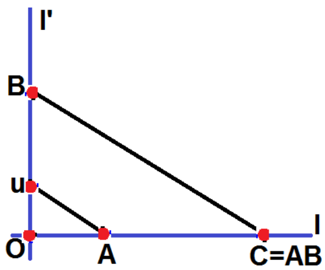


figura 146

Teorema 82. *El teorema de Pappus es equivalente a la conmutatividad de la multiplicación.*

Demostración. Sea l una recta del plano, O y U dos puntos diferentes sobre ella y $\overline{OU}$ el segmento unidad. Sean además A y B puntos arbitrarios de l, entonces:

a). Se construye AB de acuerdo con el algoritmo establecido, con ello se obtienen los puntos U', B' sobre l', el punto C sobre l que representa AB y las rectas $\overleftrightarrow{U'U}$, $\overleftrightarrow{UA}$, $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{BC}$ tales que $\overleftrightarrow{UU'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{U'A}$ es paralela a $\overleftrightarrow{B'C}$

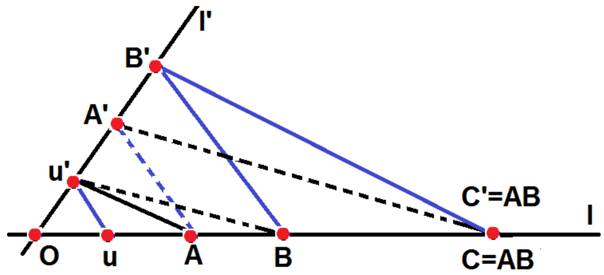


figura 147

b). Se construye BA, para lo cual se traza por A una paralela a $\overleftrightarrow{UU'}$ que determina en l' un punto A', se une B con U' y A' con C.
C es el producto de B y A, siempre que las rectas $\overleftrightarrow{U'B}$ y $\overleftrightarrow{A'C}$ sean paralelas. Veamos esto.
Puesto que por construcción $\overleftrightarrow{UU'}$ es paralela a las rectas $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{AA'}$ entonces por transitividad $\overleftrightarrow{BB'}$ y $\overleftrightarrow{AA'}$ son paralelas. Como por construcción $\overleftrightarrow{U'A}$ es paralela a $\overleftrightarrow{B'C}$ entonces el hexágono $U'BB'CA'A$ tiene dos pares de lados opuestos paralelos y por el teorema de Pappus los lados del tercer par también lo son, es decir, $\overleftrightarrow{U'B}$ es paralela a $\overleftrightarrow{A'C}$ y por tanto C representa a BA.
La demostración en el otro sentido es análoga a la de la adición. □

Como última consideración obsérvese que la tabla de multiplicar dada, proporciona un procedimiento para verificar las leyes de los signos de la multiplicación, como se puede deducir de las siguientes gráficas.

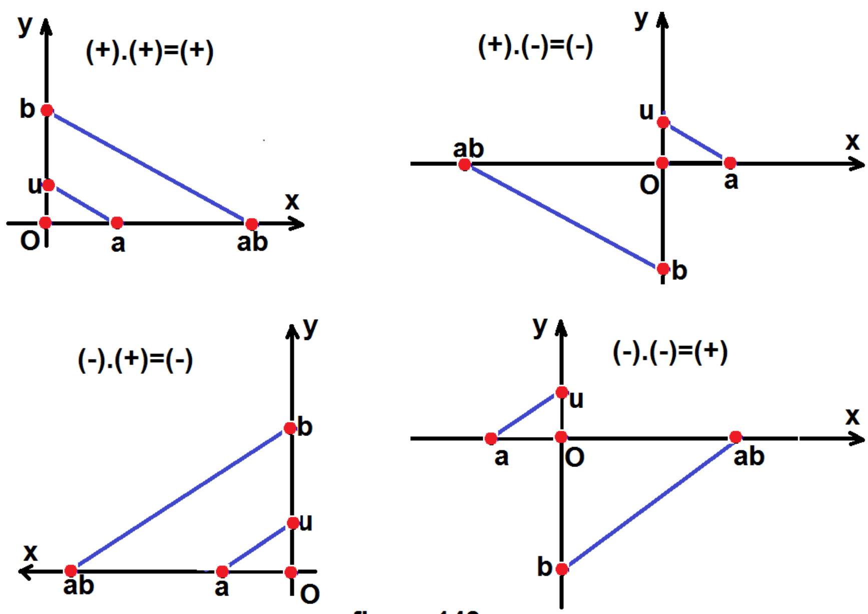


figura 148

Capítulo 6

Ejercicios Propuestos.

En este apartado final, se considera un grupo de ejercicios para cada una de las temáticas tratadas en el texto. Está conformado por 76 problemas de moderada dificultad que complementan la teoría desarrollada. La resolución de cada uno de ellos permitirá afianzar los conceptos y serán una autoevaluación de la comprensión de la teoría.

6.1. Capítulo 1

1). Demuestre que la fórmula antigua babilónica

$$A = \frac{1}{4}(a+c)(b+d)$$

para el área de un cuadrilátero, de lados consecutivos a, b, c, d proporciona una respuesta demasiado grande para todos los cuadriláteros que no son rectángulos.
2). Si a y b son los catetos de un triángulo rectángulo, los geómetras babilónicos calcularon aproximadamente la hipotenusa C por la fórmula

$$C = a + \frac{b^2}{2a}$$

justifique esta aproximación por medio de la relación pitagórica y el teorema del binomio. 3). Supongamos que tenemos dos curvas α y β, un punto O y que permitimos marcar, en una regla, un segmento $\overline{AB}$ y luego ajustar la regla de manera que pase por O y corte a las curvas α y β con A sobre α y β, sobre β. La línea trazada sobre la recta se dice que se ha construido por el ***principio de inserción***. Algunos problemas más allá de las herramientas euclidianas pueden resolverse si se permite utilizar el principio de inserción. Demuestre que las dos construcciones siguientes son correctas.

a). ***El problema de la duplicación del Cubo. (Vieta 1646, Newton 1728)***. Sea PQ un segmento dado, trácese el ángulo $PQA = 90$ y el ángulo $PQB = 120$. Trácese ahora PRS que corte a QA en R y a QB en S y tal que $PQ = RS$, entonces $(PR)^3 = 2(PQ)^3$.

b). ***El Problema de la Trisección del Ángulo (Arquímedes 240 a. de C.)*** Sea POQ un ángulo central de una circunferencia dada. Por Q trácese una recta QRS que corte a la circunferencia en R, la prolongación de $\overrightarrow{OP}$ en S y tal que $RS = OP$ el radio de la circunferencia, entonces la medida del ángulo POQ es tres veces la medida del ángulo PSQ.

4). Demuestre el teorema de Tolomeo: En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los dos pares de lados opuestos.

5). Utilizando el teorema de Tolomeo demuestre las siguientes relaciones. Si P está en el arco AB del circuncírculo de

a). Un triángulo equilátero ABC entonces $PC = PA + PB$.

b). Un cuadrado $ABCD$, entonces $(PA + PC)PC = (PB + PD)PD$.

c). Un pentágono regular $ABCDE$, entonces $PC + PE = PA + PB + PD$.

d). Un hexágono regular $ABCDEF$, entonces $PD + PE = PA + PB + PC + PF$.

6). En los problemas hindúes aritméticos intervenía frecuentemente la relación pitagórica. Resuelva los siguientes tres problemas, los dos primeros adaptados (**??**) de los textos de Brahmagupta (630) y el último de un problema de Bhaskara (1150).

a). Dos ermitaños vivieron en la cima de una montaña de altura h, cuya base estaba a una distancia d de un pueblo vecino. Uno de ellos descendió de la montaña y camino hasta el pueblo. El otro, que era mago, voló hasta una altura X y luego voló en línea recta hasta el pueblo, si la distancia recorrida por cada uno fue la misma, halle el valor de X.

b). Un bambú cuya altura era 810 cms fue quebrado por el viento. Su punta quedó tocando la tierra a 270cms de la raíz. Halle longitud de las partes del bambú.

c). Una madriguera de una víbora está en el pie de un poste cuya altura es de 675 cms y una ave de rapiña está posada en su cúspide. Esta ve a la víbora, a una distancia tres veces la de la altura del poste, que va deslizándose hacia su madriguera y se lanza oblicuamente sobre ella. ¿A cuántos centímetros de la madriguera de la víbora se encuentran si ambas han recorrido la misma distancia?

7). La pobreza de la geometría en el oeste de Europa durante las épocas del oscurantismo se ilustra por los dos problemas siguientes tratados por el famoso escolar francés y clérigo Gerbert (950-1003) quien se convirtió en el papa Silvestre II.

a). En su Geometría, Gerbert resolvió el problema, considerado muy difícil en esa ápoca, de determinar los catetos de un triángulo rectángulo dados su área y su hipotenusa. Resuelva este problema.

b). Gerbert expresó el área de un triángulo equilátero de lado a como $\frac{a}{2}\left(a-\frac{a}{7}\right)$. Demuestre que esto es incorrecto y equivale a tomar $\sqrt{3}=1{,}7114$.

8). Sean X,Y dos conjuntos no vacíos, $f:X\to Y$ una función y A,B subconjuntos de X, demuestre que

a). $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

b). $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$ y de un ejemplo para mostrar que, en general, la igualdad no puede darse.

c). Si $A\subseteq B$ entonces $f(A)\subseteq f(B)$.

9). Sean X,Y dos conjuntos no vacíos, $f:X\to Y$ una función y A,B subconjuntos de Y, demuestre que:

a). $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

b). $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$.

c). Si $A\subset B$ entonces $f^{-1}(A)\subset f^{-1}(B)$.

10). Mostrar que la aplicación inversa de una aplicación biyectiva es una aplicación y que también es biyectiva.

11)

a). Sea $G=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:f(x)=\frac{ax+b}{cx+d},ad-bc=1\}$, demuestre que $(G,\circ)$ es un grupo.

b). Sea $G=\{f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:f(x,y)=(kx+c,\frac{y}{k}+d),k>0\}$, demuestre que $(G,\circ)$ es un grupo.

c). Sea $G=\{f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:f(x,y)=(xcos\theta-ysen\theta,xsen\theta+ycos\theta)\}$, demuestre que $(G,\circ)$ es un grupo.

12).

a). Sea $G=\{f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:f(x,y)=(ax+by+h,dx+ey+k),ae-bd\neq 0\}$, demuestre que $(G,\circ)$ es un grupo.

b). Si en la transformación anterior $a^2+d^2=b^2+e^2$ y $ab+de=0$, hallar la imagen bajo f de la expresión $(x-p)^2+(y-q)^2$.

13).Considere un hemisferio de una esfera tangente a un plano π y sea α la correspondencia tal que a cada punto M de π le asocia el punto M' del mismo plano el cual hace que $\overline{PM'}$ sea perpendicular a π, donde P es el punto de intersección del rayo OM con el hemisferio y O es el centro de la esfera. ¿Es α una transformación de π?

14). Sean $S_1,S_2,...,S_n$ una sucesión de triángulos orientados, no necesariamente una cadena, demuestre que S_1 y S_n tienen la misma orientación si y sólo si el número de pares de triángulos consecutivos que tienen orientaciones opuestas es par.

15). Sean α, β transformaciones de un plano π, demuestre que:
a). Si α y β son opuestos entonces $\beta \circ \alpha$ es directa.
b). Si α es directa y β es opuesta entonces $\beta \circ \alpha$ es opuesta.
c). Si α es opuesta entonces α^{-1} es opuesta.

6.2. Capítulo 2

1).
a). Demuestre que toda isometría cuyo cuadrado es la identidad es una reflexión en una recta o una reflexión en un punto.
b). Demuestre que si una isometría deja dos puntos fijos entonces es la identidad o una reflexión en alguna recta.
c). Demuestre que si α es una isometría opuesta entonces α^2 es una traslación.
2).
a). Pruebe que el producto de una traslación por una reflexión en un punto es otra reflexión en cierto punto O'.
b). Pruebe que el producto de una reflexión en una recta por una traslación en la dirección de la recta es el producto de tres reflexiones en rectas dos de ellas perpendiculares a la tercera.
3).Sea ρ la rotación en un ángulo de $\frac{\pi}{2}$ alrededor del punto O y φ_l la reflexión en una recta que pasa por O, demuestre que
a).$\varphi_l \circ \rho = \rho^3 \circ \varphi_l$.
b).Si se llama $D_4 = \{I, \rho, \rho^2, \rho^3, \varphi_l, \varphi_l \circ \rho, \varphi_l \circ \rho^2, \varphi_l \circ \rho^3\}$ entonces $(D_4, \circ)$ es un grupo de transformaciones. Este grupo se denomina ***cuarto grupo Dihédrico.***
4). Demuestre que el producto de dos rotaciones, en el mismo sentido y ángulos de $\frac{\pi}{2}$ alrededor de dos puntos A y B es una reflexión en el centro del cuadrado que tiene a $\overline{AB}$ como lado.
5). Demuestre que si $\varphi_l, \varphi_m, \varphi_n$ son reflexiones en rectas entonces $(\varphi_m \circ \varphi_n \circ \varphi_l \circ \varphi_m \circ \varphi_l)^2$ es una traslación a lo largo de l.
6).
a). Sean ρ_θ y ρ'_θ rotaciones con centros diferentes en puntos O y O' demuestre que

$$T_{\overrightarrow{BA}} \circ \rho_\theta \circ T_{\overrightarrow{AB}} = \rho'_\theta \text{ donde } \overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{AB}.$$

b). Sea $l = \overleftrightarrow{OO'}$ y ρ_θ la rotación de centro en O demuestre que $\varphi_l \circ \rho_\theta = \varphi_m$ donde m es una recta que pasa por O y el ángulo orientado de m a l es $\frac{\theta}{2}$.
7).

a). Sea $l = \overleftrightarrow{AB}$ pruebe que $\varphi_l \circ \varphi_A = \varphi_A \circ \varphi_l = \varphi_m$ donde m es la perpendicular a l en A.

b). Si $\rho_\theta, \rho_{-\theta}$ son rotaciones en puntos diferentes O y O' demuestre que $\rho_\theta \circ \rho_{-\theta}$ es una traslación.

8). Si $\overline{AB}$ se transforma en $\overline{A'B'}$ por una rotación, hallar el centro de rotación.

9). Demuestre que el producto de tres reflexiones en rectas paralelas o concurrentes es una reflexión en alguna recta.

10).Se llama ***deslizamiento*** al producto de tres reflexiones en rectas que no son paralelas ni concurrentes. Demuestre que un deslizamiento se puede expresar como el producto de una reflexión en una recta y una traslación en la dirección de la recta.

11). Demuestre que si dos triángulos tienen dos lados respectivamente paralelos y congruentes entonces los lados restantes son paralelos y congruentes.

12). Pruebe que las bisectrices de los ángulos de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se llama ***incentro.***

13). Considere un triángulo ABC y sean P, Q, R los puntos medios de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Si se llaman O_1, O_2 y O_3 los centros de las circunferencias circunscritas a los triángulos APR, BPQ y CQR y Q_1, Q_2, Q_3 los centros de las circunferencias inscritas a los mismos triángulos demuestre que los triángulos $O_1O_2O_3$ y $Q_1Q_2Q_3$ son congruentes.

14). Sea S una circunferencia, AB y CD dos cuerdas de S y P un punto sobre la cuerda CD. Hallar un punto Q sobre la circunferencia S de tal manera que las cuerdas AQ y BQ corten a la cuerda CD en un segmento MN tal que P sea su punto medio.

15). Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros. Pruebe que los centroides de estos triángulos forman un triángulo equilátero.

16). sobre los lados de un triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros BCA_1, ACB_1 y ABC_1 de tal manera que los vértices A y A_1 estén en lados opuestos de BC, B y B_1 estén en lados opuestos AC y C y C_1 estén del mismo lado de AB. Sea G el centroide del triángulo ABC, pruebe que el triángulo A_1B_1G es isósceles con un ángulo de $\frac{2\pi}{3}$ en el vértice G.

17). Establecer analíticamente los siguientes invariantes con respecto a las isometrías directas

a). $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ como un invariante de los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2).

b). $\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{a_1b_1 + a_2b_2}$ como un invariante de las rectas $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ y $b_1x + b_2y + b_3 = 0$.

c). $\frac{a_1x_0 + a_2y_0 + a_3}{(a_1^2 + b_1^2)^{\frac{1}{2}}}$ como invariante del punto (x_0, y_0) y la recta $a_1x + a_2y + a_3 = 0$.

d). $x_0^2 + y_0^2 + a_1x_0 + a_2y_0 + a_3$ como un invariante del punto (x_0, y_0) y la circunferencia $x^2 + y^2 + a_1x + a_2y + a_3 = 0$.

e). Cuál es el significado de cada uno de estos invariantes?

18). Demuestre analíticamente que:

a). En una rotación en único punto fijo es el centro de rotación y que ninguna recta queda fija.

b). En una reflexión en una recta l los puntos fijos son los punto de l y las rectas fijas son las perpendiculares a l.
c). En una reflexión en un punto O, el único punto fijo es O y las rectas fijas son las que pasan por O.
d). En una traslación $T_{\overrightarrow{a}}, a \neq \overrightarrow{0}$ ningún punto es fijo y las rectas fijas son las paralelas a $\overrightarrow{a}$.

6.3. Capítulo 3.

1).
a). Demuestre que una semejanza directa que no es una traslación tiene un punto fijo.
b). Demuestre que una semejanza opuesta que no es el producto de una reflexión en una recta y una traslación en un vector paralelo a la recta tiene un punto fijo.
2). Demuestre que si α es una semejanza opuesta entonces α^2 es una traslación o una homotecia.
3). Sean O y O' los centros de semejanza exterior e interior de dos circunferencias S y S' (ver problema resuelto 6 del capitulo 3) de radios diferentes R y R' entonces la circunferencia que tiene a $\overline{OO'}$ como diámetro se llama ***Circunferencia de Semejanza*** de S y S' entonces:
a). Pruebe que si A y A' son los centros de S y S' entonces A' es la imagen de A bajo el producto de una homotecia y una rotación que tienen el mismo centro.
b). Hallar el lugar geométrico de un punto P tal que sus distancias a dos puntos fijos B y B' tienen una razón constante.
4). Demuestre que si dos circunferencias tienen tangentes exteriores comunes estas pasan por el centro de semejanza exterior de las dos circunferencias y si tienen tangentes interiores comunes estas pasan por el centro de semejanza interior.
5). En un triángulo ABC, sean P, Q, R los puntos medios de $\overline{BC}, \overline{AC}$ y $\overline{AB}$; M, N, L los pies de las alturas sobre estos lados; S, T, U los puntos medios de los segmentos AH, BH, CH donde H es el ortocentro del triángulo ABC. Demuestre que los nueve puntos $P, Q, R, M, N, L, S, T, U$ están sobre la circunferencia cuyo centro E es el punto medio del segmento $\overline{HG}$ donde G es el circuncentro del triángulo ABC y cuyo radio es la mitad del circunradio del mismo triángulo. La circunferencia que pasa por estos puntos se llama ***circunferencia de los nueve puntos o circunferencia de Euler.***
6). Sean M, N, P tres puntos sobre los lados, o sus prolongaciones, de los lados AB, BC y AC de un triángulo ABC, demuestre que:
a). Los puntos M, N, P son colineales si y sólo si $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = 1$. Este resultado se conoce

como ***el teorema de Menelao.***

b). Las rectas $\overleftrightarrow{CM}, \overleftrightarrow{AN}, \overleftrightarrow{BP}$ son concurrentes ó paralelas si y sólo si $\frac{AM}{BM} \cdot \frac{BN}{CN} \cdot \frac{CP}{AP} = -1$. Este resultado se conoce como ***el teorema de Ceva.***

7). Sean α, β homotecias de centros O y O' y coeficientes k y t respectivamente con $kt \neq 1$, demuestre que:

a). El producto $\alpha \circ \beta$ es una homotecia λ con centro A colineal con O y O' y coeficiente kt.

b). El punto A divide al segmento $\overline{OO'}$ en la razón $\frac{k-1}{k(t-1)}$.

c) Si $k \neq 1$, $t \neq 1$ entonces $\alpha\beta \neq \beta\alpha$.

d). $\frac{AO'}{O'O} = \frac{k-1}{kt-1}$.

8). Considere el triángulo ABC, k paralela a $\overline{BC}$ que corta a $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$ en los puntos K y L, m la paralela a $\overline{AC}$ que corta a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N y n la paralela a $\overline{AB}$ que corta a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ en P y Q. Demuestre que los puntos de intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{KM}$, de $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{MQ}$, de $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{PL}$, si existen, son colineales.

9). Sea ABC un triángulo P un punto cualquiera del plano. Si K, L, M son los simétricos de P con respecto a los puntos medios D, E, F de los lados $\overline{AB}, \overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ABC, demuestre que $\overline{CK}, \overline{AL}$ y $\overline{BN}$ se interceptan en un punto Q que es el punto medio de cada uno de estos segmentos.

10). Sean S y S' dos circunferencias tangentes, M su punto de tangencia y l una recta a través de M. Si l corta a S en un segundo punto A y a S' en un segundo punto A' demuestre que la tangente a S en A es paralela a la tangente a S' en A'.

11). Demuestre que las tres rectas que pasan a través de los puntos medios de los lados de un triángulo y que son paralelas a las bisectrices de los ángulos opuestos son concurrentes.

12).

a). ¿ Mediante qué transformación el punto (x, y) se transforma respectivamente en los puntos $(x + a, y), (-x, y + b), (kx, -ky), (y, x), (-y, x)$?.

b). ¿ Mediante qué transformación el punto (r, θ) se transforma respectivamente en los puntos $(r, \theta + \alpha), (r, \theta + \pi), (r, -\theta), (r, 2\alpha - \theta), (kr, \theta), (kr, 2\alpha - \theta)$?.

13). Sea α una semejanza de coeficiente $k \neq 1$, hallar una representación analítica para α cuando esta se expresa en la forma $\alpha = \lambda \circ \beta$ donde β es una transformación ortogonal y λ es una homotecia.

14). Una homotecia de centro en un punto A diferente del origen tiene como representación analítica

$$x' = -2x + 3$$
$$y' = -2x - 4,$$

hallar el centro de la homotecia.
15). Demuestre que dos parabolas son semejantes.
16). Si α es una semejanza tal que $\alpha(1,2) = (0,0)$ y $\alpha(3,4) = (3,4)$, hallar la razón de semejanza de α.
17). Si α es una semejanza tal que $\alpha(0,0) = (1,0), \alpha(1,0) = (2,2)$ y $\alpha(2,2) = (-1,6)$, hallar $\alpha(-1,6)$.

6.4. Capítulo 4.

En la sección 4.5 del capítulo 4 se demostró que una transformación afín α tiene una representación analítica de la forma $\alpha(x,y) = (a_1x + b_1y + c, a_2x + b_2y + c_2)$ con $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, demuestre que el conjunto de las transformaciones afines para las cuales $a_1b_2 - a_2b_1 = \pm 1$, es un grupo. Si se cumple únicamente que $a_1b_2 - a_2b_1 = 1$. ¿Es un grupo?
2).
a). Demuestre que la transformación afín para la cual $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$ y $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$ transforma $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ en $k^2[(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2]$. ¿cuál es el valor de k^2?
b). Demuestre que también debe cumplirse que $a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2$ y $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
3). En el ejercicio 11b del capitulo 1, se pidió demostrar que el conjunto

$$G = \{f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : f(x,y) = \left(kx + c, \tfrac{y}{k} + d\right)\}$$

con la operación composición de funciones es un grupo. Cada elemento de este conjunto se denomina ***transformación Planar de Lorentz***.
La Transformación de Lorentz

$$x' = kx + c(1-k) \qquad y' = \frac{y}{k} + d\left(1 - \frac{1}{k}\right),$$

se llama ***Lorrotación (Rotación de Lorentz)*** de centro en el punto (c,d).
a). Demuestre que una traslación es una transformación planar de Lorentz.
b). Demuestre que el conjunto de todas las lorrotaciones alrededor del punto (c,d) es un subgrupo del grupo de transformaciones planares de Lorentz.
c). Demuestre que una lorrotación transforma una recta en una recta y, en particular, una recta que pasa por el centro de lorrotación en una recta que pasa por dicho centro.
d). Demuestre que una lorrotación transforma una recta en sí misma si y sólo si $k = 1$.
e). Demuestre que una lorrotación preserva el área de un triángulo.
f). Demuestre que una lorrotación transforma una circunferencia con centro en el centro de

lorrotación en una elipse con centro en el mismo punto y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados.

g). Se define una ***Lorcircunferencia*** (circunferencia de Lorentz) como el lugar geométrico de todos los puntos que se obtiene a partir de un punto dado mediante lorrotaciones alrededor de un punto fijo. Demuestre que una Lorcircunferencia es la rama de una hipérbola equilátera que pasa por el punto dado y cuyas asíntotas son las paralelas a los ejes de coordenadas trazadas por el centro de Lorrotación.

4). Demuestre que una transformación afín preserva la razón de las áreas de dos triángulos.

5). Considere una transformación afín α demuestre que:

a). α preserva el área (α es equiafín) de un triángulo si y sólo si $|a_1b_2 - a_2b_1| = 1$.

b). α es una semejanza si y sólo si $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2$ y $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

c). α es una transformación ortogonal si y sólo si $a_1^2 + a_2^2 = b_1^2 + b_2^2 = 1$ y $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$.

6). Hallar una representación analítica para una compresión de coeficiente k y de eje la recta $y = mx$.

7). Hallar el área del triángulo de vertices $A(-2,-1), B(1,2)$ y $C(3,-6)$. ¿cuál es el área del triángulo imagen bajo una compresión con eje, el eje y? ¿cuál es el área del triángulo imagen bajo un cizallamiento?

8). Demuestre que un cizallamiento queda determinado por su eje, un punto y su imagen.

9).Demuestre o de un contraejemplo para la siguiente proposición.

Si α es una transformación afín involutiva entonces α es una reflexión en una recta o una reflexión en un punto.

6.5. Capítulo 5.

1). Construya la gráfica que resulta al invertir un cuadrado con respecto a su centro y con respecto a uno de sus vértices.

2). Demuestre que si $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{RS}$ son tangentes comunes a dos circunferencias PAR y QAS entonces las circunferencias QAP y RAS son tangentes.

3). Dos circunferencias se cortan ortogonalmente en un punto P, O es un punto de otra circunferencia tangente a las anteriores en Q y R, demuestre que las circunferencias que pasan por OPQ y OPR se cortan en un ángulo de $\frac{\pi}{4}$.

4). Considere un triángulo ABC y un punto M. Si se construyen las circunferencias MBC, MCA, MAB y las tangentes a ellas en M, de manera que corten a BC, CA, AB en R, S, T respectivamente demostrar que estos puntos son colineales.

5). Considere cuatro puntos concíclicos A, B, C, D. Si una circunferencia que pasa por A y B es tangente a otra circunferencia que pasa por C y D, demuestre que el lugar geométrico del punto de contacto es una circunferencia.
6). Sean A, B, C puntos diferentes sobre una recta l, construir un punto D sobre l de tal manera que la razón anarmónica (AB, CD) tenga un valor de k.
7). ***Teorema de Bríanchon.*** Si $ABCDEF$ es un hexágono, no necesariamente convexo, circunscrito a una circunferencia entonces las rectas $\overleftrightarrow{AD}, \overleftrightarrow{BE}$ y $\overleftrightarrow{CF}$ son concurrentes.
8). Si A, BC, D, E son puntos colineales, demuestre que:
a). $(AB, CE)(AB, ED) = (AB, CD)$
b). $(AE, CD)(EB, CD) = (AB, CD)$
9). Si O, A, B, C, A', B', C' son puntos colineales y $OAxOA' = OBxOB' = OCxOC'$ demuestre que $(AB', BC) = (A'B, B'C')$.
10). Sean $A, B, C, D, A', B', C', D', M, N$ puntos colineales tales que
$(AA', MN) = (BB', MN) = (CC', MN) = (DD', MN)$ demuestre que $(AB, CD) = (A'B', C'D')$.
11).
a). Demuestre que las rectas que unen un punto de una circunferencia con los vértices de un cuadrado inscrito forman un haz armónico.
b). Demuestre que las rectas que unen un punto de una circunferencia con los extremos de un diámetro dado y con los extremos de una perpendicular a este diámetro forman un haz armónico.
c). El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia en la cual $\overline{DE}$ es el diámetro perpendicular al lado de $\overline{AC}$. Si las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{EB}$ cortan a $\overleftrightarrow{AC}$ en P y Q, demuestre que $(AC, PQ) = -1$.
d). Demuestre que el diámetro de una circunferencia perpendicular a uno de los lados de un triángulo inscrito queda dividido armónicamente por los otros lados.
13). Dos circunferencias se cortan en los puntos A y B. Los puntos de contacto de una tangente común a las circunferencias son P y Q y esta tangente corta a una tercera circunferencia que también pasa por A y B en los puntos de L y N. Demuestre que $(PQ, LM) = -1$.
14). Sean A, B, C tres puntos colineales, P un punto tal que $(BC, AP) = -1$, Q un punto tal que $(CA, BQ) = -1$ y R un punto tal que $(AB, CR) = -1$ demuestre que $(QR, PA) = -1$.
15).
a). Sea O un punto de una circunferencia con centro C y supongamos que la inversa de esta circunferencia con respecto a O como centro de inversión cortan a $\overleftrightarrow{OC}$ en B. Si C' es el inverso de C, demuestre que $OB = BC'$.

b). Demuestre que si dos circunferencias son ortogonales, el inverso del centro de una de ellas con respecto a la otra es el punto medio de su cuerda común.

16). Si $\overline{AC}$ es el diámetro de un circunferencia dada y las cuerdas AB y CD o sus respectivas prolongaciones, se cortan en un punto O, demuestre que la circunferencia OBD es ortogonal a la circunferencia dada.

Bibliografía

[1] Barry, H. Edward. *Introducción a las Transformaciones Geométricas*. Editorial CECSA. México (1968).

[2] Coxeter, H.S.M. and Greitzer, S.L. *Geometry Revisited*. New Mathematical Library 19. The Mathematical Association of America. Washington. (1967).

[3] Coxeter, H.S.M. *Fundamentos de Geometría*. Editorial Limusa- Wiley.México. (1971).

[4] Heves, Howard. *El estudio de las Geometrías*. Vol 1 y 2.Editorial Uteha. México (1975).

[5] Martín, E.G. *Transformation Geometry. An Introduction to Symetry*. Springer- Verlag. New York. (1982).

[6] Martinez A. *Isometrías y Similitudes*. U.I.S. Bucaramanga- Colombia (1979).

[7] Modenov and Parkhomenko. *Geometric Transformations*. Vol 1 y 2. Academic Press. New York. (1965).

[8] Shevely, S. *Introducción a la Geometría Moderna.*. Editorial CECSA. México. (1975).