El Potencial Escalar en el Modelo Económico 3-3-1

Yithsbey Giraldo U.

Instituto de Física

Universidad de Antioquia

Universidad de Nariño

Medellín, Colombia

9 de Junio de 2008.

Motivaciones

- Amplia Literatura que estudia el Modelo Estándar extendido a dos dobletes de Higgses -THDM- (modelos específicos, métodos recientes de bases independientes).
- No hay Trabajos en los Modelos 3-3-1: poco o nada se ha hecho en el estudio del potencial escalar con tripletes de Higgses
  - La estabilidad del potencial.
  - El mínimo global.
  - El rompimiento adecuado de la simetría electrodébil (EWSB).
- El Modelo Económico 3-3-1: $\varphi_1(1,3^*,-\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \varphi_1^- \\ \varphi_1'^0 \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(1,3^*,\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} \varphi_2^0 \\ \varphi_2^+ \\ \varphi_2'^+ \end{pmatrix}$
  - Potencial simple.
  - Después del rompimiento de simetría: $12-8=4$ d.o.f reales $\hat{=}$ 1 par cargado y dos bosones de Higgs neutros.

Resumen de la Charla

1. Resumen del Método en el THDM

Resumen de la Charla

1. Resumen del Método en el THDM
2. Presentación del Modelo Económico 3-3-1
   - El Potencial Escalar y las Funciones Invariantes Gauge

Resumen de la Charla

1. Resumen del Método en el THDM
2. Presentación del Modelo Económico 3-3-1
   - El Potencial Escalar y las Funciones Invariantes Gauge
3. Su estabilidad

Resumen de la Charla

1. Resumen del Método en el THDM
2. Presentación del Modelo Económico 3-3-1
    - El Potencial Escalar y las Funciones Invariantes Gauge
3. Su estabilidad
4. El Mínimo Global
    - Puntos Estacionarios, Valor Mínimo del Potencial y Valores Esperados del Vacío

Resumen de la Charla

1. Resumen del Método en el THDM
2. Presentación del Modelo Económico 3-3-1
   - El Potencial Escalar y las Funciones Invariantes Gauge
3. Su estabilidad
4. El Mínimo Global
   - Puntos Estacionarios, Valor Mínimo del Potencial y Valores Esperados del Vacío
5. El Potencial Después del Rompimiento de Simetría
   - Los Bosones de Goldstone y Las Masas de los Higgses Físicos.

Resumen de la Charla

1. Resumen del Método en el THDM
2. Presentación del Modelo Económico 3-3-1
   - El Potencial Escalar y las Funciones Invariantes Gauge
3. Su estabilidad
4. El Mínimo Global
   - Puntos Estacionarios, Valor Mínimo del Potencial y Valores Esperados del Vacío
5. El Potencial Después del Rompimiento de Simetría
   - Los Bosones de Goldstone y Las Masas de los Higgses Físicos.
6. Potencial que contiene explícitamente los Valores de Expectación

Resumen: El Potencial Higgs THDM

Cómo podemos describir el más general THDM?

- Dos dobletes complejos de Higgses con hipercarga $y = +1/2$: $\varphi_1(x)$ y $\varphi_2(x)$
- El potencial invariante gauge, renormalizable contiene solamente $\varphi_i^\dagger \varphi_j, (\varphi_i^\dagger \varphi_j)(\varphi_k^\dagger \varphi_l), i, j, k, l \in \{1, 2\}$

Definición: variables orbitales K_0, K_1, K_2, K_3:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}(K_0 \mathbb{1} + K_a \sigma^a) \Leftrightarrow \begin{cases} K_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2, & K_1 = 2\,\mathrm{Re}\,\varphi_1^\dagger \varphi_2, \\ K_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2, & K_2 = 2\,\mathrm{Im}\,\varphi_1^\dagger \varphi_2 \end{cases}$$

con

$$K_0 \geq 0 \quad \text{y} \quad K_0^2 - \boldsymbol{K}^2 \geq 0 \qquad (1)$$

- El potencial general Higgs THDM:

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = V_2 + V_4 \quad \text{con} \quad \begin{cases} V_2 = \xi_0 K_0 + \xi_a K_a \\ V_4 = \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b \end{cases} \qquad (2)$$

- no d.o.f. gauge en este esquema, potencias reducidas

Resumen: Estabilidad

- potencial estable: acotado por debajo
- La estabilidad de V se determina en el límite $K_0 \to \infty$,
- considere V_4 para $K_0 > 0$, defina:

$$\mathbf{k} \equiv \mathbf{K}/K_0, \quad \text{con} \quad |\mathbf{k}| \leq 1. \tag{3}$$

$$V_4 = K_0^2 J_4(\mathbf{k}), \quad J_4(\mathbf{k}) \equiv \eta_{00} + 2\eta^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E \mathbf{k} \tag{4}$$

- estabilidad garantizada por $V_4 \Leftrightarrow J_4(\mathbf{k}) > 0$ para todo $|\mathbf{k}| \leq 1$
- el dominio de J_4 es una esfera unidad: compacta

  $J_4 > 0 \Leftrightarrow J_4|_{stat} > 0$ para todos sus puntos estacionarios
- los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k}) \equiv \eta_{00} + 2\eta^T k + k^T E k$ en el dominio $\mathbf{k}^2 \leq 1$

  $|\mathbf{k}| < 1$: resuelva $\nabla_k J_4(\mathbf{k}) = 0 \quad \Leftrightarrow Ek = -\eta$ with $1 - \mathbf{k}^2 > 0$

  $|\mathbf{k}| = 1$: defina $F_4(\mathbf{k}, u) \equiv J_4(\mathbf{k}) + u(1 - \mathbf{k}^2)$ con el multiplicador de Lagrange u,

  resuelva $\nabla_k F_4(\mathbf{k}, u) = 0 \quad \Leftrightarrow (E - u)k = -\eta$ con $1 - \mathbf{k}^2 = 0$

Resumen: Puntos Estacionarios

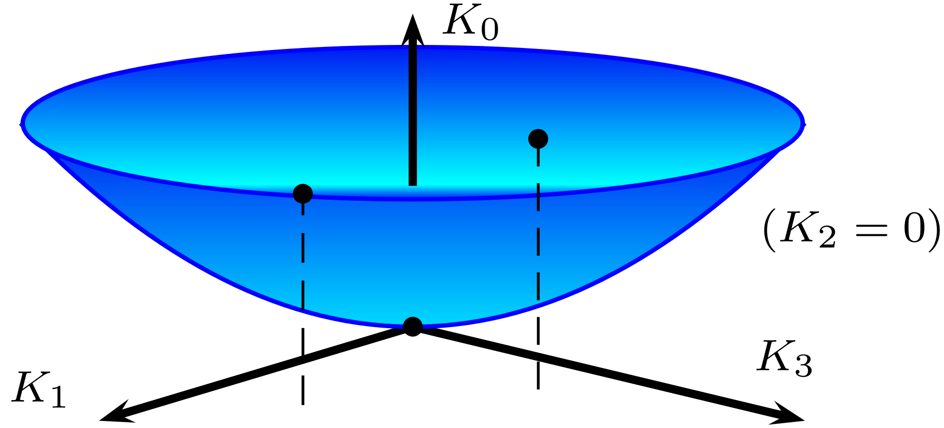
- notación 4-vector: $\tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{pmatrix} K_0 \\ \boldsymbol{K} \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \tilde{E} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \boldsymbol{\eta}^T \\ \boldsymbol{\eta} & E \end{pmatrix}, \tilde{g} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$
- potencial $V = \tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{E} \tilde{\boldsymbol{K}}$
- tres clases de puntos estacionarios:

  $K_0 = \boldsymbol{K} = 0$:

  Solución trivial ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$)

  $K_0 > \boldsymbol{K}$: resuelva ($\nabla_{\tilde{\boldsymbol{K}}} V = 0$)

  $K_0 = \boldsymbol{K} > 0$: resuelva $\left(\nabla_{\tilde{\boldsymbol{K}},w}[V - w(K_0^2 - \boldsymbol{K}^2)] = 0\right)$



Resumen: Puntos Estacionarios

Cuáles son las implicaciones para EWSB ?

- considere el comportamiento del rompimiento de simetría para los tres tipos de mínimos globales $K_0, \boldsymbol{K}$

$$\boxed{\begin{aligned} K_0 &= ||\varphi_1||^2 + ||\varphi_2||^2 && \geq 0 \\ K_0^2 - \boldsymbol{K}^2 &= 4(||\varphi_1||^2||\varphi_2||^2 - |\varphi_1^\dagger \varphi_2|^2) && \geq 0 \end{aligned}}$$

$K_0 = \boldsymbol{K} = 0 \Rightarrow \langle\varphi_1\rangle = \langle\varphi_2\rangle = 0$
$K_0 > |\boldsymbol{K}| \quad \Rightarrow \langle\varphi_1\rangle, \langle\varphi_2\rangle$ lin. indep.
$K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0 \Rightarrow \langle\varphi_1\rangle, \langle\varphi_2\rangle$ lin. dep.

  consideraciones para los puntos estacionarios son fácilmente dadas:

- $V = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{K}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}} = -\tilde{\boldsymbol{K}}^T\tilde{E}\tilde{\boldsymbol{K}}$ en los puntos estacionarios
  $\overset{\text{stab.}}{\Rightarrow} V < 0$ para todos los puntos estacionarios no triviales.

- mínimo no trivial $\Leftrightarrow \xi_0 < |\boldsymbol{\xi}|$.

El Modelo Económico 3-3-1

- dos tripletes escalares: $\varphi_1(1,3^*,-\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \varphi_1^- \\ \varphi_1'^0 \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2(1,3^*,\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} \varphi_2^0 \\ \varphi_2^+ \\ \varphi_2'^+ \end{pmatrix}$, de donde el potencial más general renormalizable e invariante 3-3-1

$$V(\varphi_1,\varphi_2) = \mu_1^2\varphi_1^\dagger\varphi_1 + \mu_2^2\varphi_2^\dagger\varphi_2 + \lambda_1(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^2 + \lambda_2(\varphi_2^\dagger\varphi_2)^2 + \lambda_3(\varphi_1^\dagger\varphi_1)(\varphi_2^\dagger\varphi_2) + \lambda_4(\varphi_1^\dagger\varphi_2)(\varphi_2^\dagger\varphi_1). \tag{5}$$

- Funciones invariantes gauge: K_0, K_1, K_2 y K_3

$$\xi_0 = \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2), \quad \vec{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(\mu_1^2 - \mu_2^2) \end{pmatrix}, \quad \eta_{00} = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3),$$

$$\vec{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2) \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_4}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \end{pmatrix}.$$

Su Estabilidad

- Multiplicadores de Lagrange:
  - Regulares, excepcionales y el cero:

$$u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3), \quad u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_3), \quad u_3 = \frac{\lambda_4}{4} \quad \text{y} \quad u_4 = 0. \tag{6}$$

- Condiciones potencial estable: tomando las diferentes posibilidades $u_i < u_j$ (con $i, j = 1, 2, 3, 4$) e imponiendo $J_4(k_i) > 0$

$$\lambda_1 > 0, \tag{7}$$

$$\lambda_2 > 0, \tag{8}$$

$$4\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2, \tag{9}$$

$$4\lambda_1\lambda_2 > (\lambda_3 + \lambda_4)^2. \tag{10}$$

El mínimo Global

- condición $\xi_0 < |\vec{\xi}|$: implica que $\mu_1^2 + \mu_2^2 < |\mu_1^2 - \mu_2^2|$ y que V sea más pequeño

$$\mu_1^2 < 0 \quad \text{y} \quad \mu_2^2 < 0. \tag{11}$$

- puntos Estacionarios:

$$(\tilde{E} - w\tilde{g})\tilde{\boldsymbol{K}} = -\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \quad \text{con} \quad \tilde{\boldsymbol{K}}^T\tilde{g}\tilde{\boldsymbol{K}} = 0 \quad \left(\text{ó} \quad \tilde{\boldsymbol{K}}^T\tilde{g}\tilde{\boldsymbol{K}} > 0 \quad \text{sí} \quad w = 0\right) \quad \text{y} \quad K_0 > 0. \tag{12}$$

  - soluciones regulares: $w_1 = \frac{1}{4}\left(\lambda_3 - \frac{2\lambda_1\mu_2^2}{\mu_1^2}\right), \quad w_2 = \frac{1}{4}\left(\lambda_3 - \frac{2\lambda_2\mu_1^2}{\mu_2^2}\right)$
    - w_1: con $K_0 = -\frac{\mu_1^2}{2\lambda_1} > 0$ luego $w_1 \in$\{*soluciones*\}$\Longleftrightarrow \mu_1^2 < 0.$
    - w_2: con $K_0 = -\frac{\mu_2^2}{2\lambda_2} > 0$ luego $w_2 \in$\{*soluciones*\}$\Longleftrightarrow \mu_2^2 < 0.$
  - soluciones excepcionales: $w_3 = -\frac{\lambda_4}{4}, w_4 = \frac{\lambda_3 - 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{4}, w_5 = \frac{\lambda_3 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}{4}$
    - w_3: $\lambda_4 > 0.$
    - w_5: no mínimo global si $\quad \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \mu_1^2 \neq -\mu_2^2,$

$$\text{y si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \mu_2^2 \neq \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)\mu_1^2.$$

El mínimo Global

- mínimo global: en $K_0 > |K|$ si $w_1 < 0$ y $w_2 < 0$, es decir

$$\lambda_3 < \frac{2\lambda_1\mu_2^2}{\mu_1^2} \quad \text{y} \quad \lambda_3 < \frac{2\lambda_2\mu_1^2}{\mu_2^2}. \tag{13}$$

- $\underline{K} = \begin{pmatrix} \frac{4\mu_2^2 w_2}{4\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2} & 0 \\ 0 & \frac{4\mu_1^2 w_1}{4\lambda_1\lambda_2-\lambda_3^2} \end{pmatrix}$ y $\langle\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \langle\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

$$\frac{v_1^2 + V_1^2}{2} = \frac{4\mu_2^2 w_2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2} = \frac{\lambda_3\mu_2^2 - 2\lambda_2\mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}, \tag{14}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{4\mu_1^2 w_1}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2} = \frac{\lambda_3\mu_1^2 - 2\lambda_1\mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}. \tag{15}$$

- mínimo potencial: $V|_{\text{mín.}} = \frac{\mu_1^2(v_1^2+V_1^2)}{4} + \frac{\mu_2^2 v_2^2}{4} < 0$, de donde

$$v_1, V_1, v_2 \neq 0. \tag{16}$$

El Potencial Después del Rompimiento de Simetría

- $\mathrm{Im}\,\varphi_1'^0 = 0, \mathrm{Im}\,\varphi_2^0 = 0$: $\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{2}\varphi_1^- \\ v_1 + H_1' \\ V_1 + H_1 + iA_1 \end{pmatrix}, \varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} v_2 + H_2 \\ \sqrt{2}\varphi_2^+ \\ \sqrt{2}\varphi_2'^+ \end{pmatrix}$, y

  $h_1^- = \phi_1^-, \quad h_1^+ = (h_1^-)^*, h_2^+ = \phi_2^+, \quad h_2^- = (h_2^+)^*, h_2'^+ = \phi_2'^+, \quad h_2'^- = (h_2'^+)^*.$

- descomposición en potencia de los campos: $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\{0\}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\{1\}} + \tilde{\mathbf{K}}_{\{2\}}$, con

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\{0\}} = \begin{pmatrix} \frac{V_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} + \frac{v_2^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{V_1^2}{2} + \frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{K}}_{\{1\}} = \begin{pmatrix} V_1 H_1 + v_2 H_2 + v_1 H_1' \\ \frac{V_1}{\sqrt{2}} h_2'^- + \frac{V_1}{\sqrt{2}} h_2'^+ + \frac{v_1}{\sqrt{2}} h_2^- + \frac{v_1}{\sqrt{2}} h_2^+ + \frac{v_2}{\sqrt{2}} h_1^- + \frac{v_2}{\sqrt{2}} h_1^+ \\ \frac{\mathrm{i}V_1}{\sqrt{2}} h_2'^- - \frac{\mathrm{i}V_1}{\sqrt{2}} h_2'^+ + \frac{\mathrm{i}v_1}{\sqrt{2}} h_2^- - \frac{\mathrm{i}V_1}{\sqrt{2}} h_2^+ + \frac{\mathrm{i}v_2}{\sqrt{2}} h_1^- - \frac{\mathrm{i}v_2}{\sqrt{2}} h_1^+ \\ V_1 H_1 + v_1 H_1' - v_2 H_2 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

  y $\tilde{E}\tilde{\mathbf{K}}_{\{0\}} = -\frac{1}{2}\tilde{\xi}$.

- el potencial: $V = V_{\{0\}} + V_{\{2\}} + V_{\{3\}} + V_{\{4\}}$, donde $V_{\{2\}} = \tilde{\mathbf{K}}_{\{1\}} \cdot \tilde{E} \cdot \tilde{\mathbf{K}}_{\{1\}}$ determina la masa de los campos.

El Potencial Después del Rompimiento de Simetría

- $V_{\{2\}} =$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} H_1 & H_2 & H_1' \end{pmatrix} \mathcal{M}^2_{\mathrm{neutral}} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_1' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1^+ & h_2^+ & h_2'^+ \end{pmatrix} \mathcal{M}^2_{\mathrm{charged}} \begin{pmatrix} h_1^- \\ h_2^- \\ h_2'^- \end{pmatrix}, \text{ con}$$

$$\mathcal{M}^2_{\mathrm{neutral}} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 V_1^2 & \lambda_3 v_2 V_1 & 2\lambda_1 v_1 V_1 \\ \lambda_3 v_2 V_1 & 2\lambda_2 v_2^2 & \lambda_3 v_1 v_2 \\ 2\lambda_1 v_1 V_1 & \lambda_3 v_1 v_2 & 2\lambda_1 v_1^2 \end{pmatrix}, \mathcal{M}^2_{\mathrm{charged}} = \frac{\lambda_4}{2}\begin{pmatrix} v_2^2 & v_1 v_2 & v_2 V_1 \\ v_1 v_2 & v_1^2 & v_1 V_1 \\ v_2 V_1 & v_1 V_1 & V_1^2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

- dos campos neutros físicos masivos pares:

$$M^2_{Hgg_1, Hgg_2} = (v_1^2 + V_1^2)\lambda_1 + v_2^2\lambda_2 \pm \sqrt{[(v_1^2 + V_1^2)\lambda_1 + v_2^2\lambda_2]^2 + v_2^2(v_1^2 + V_1^2)(\lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2)}, \quad (19)$$

- un par de Higgses físicos cargados: $m^2_{h^\pm} = \frac{\lambda_4}{2}(v_1^2 + v_2^2 + V_1^2)$.

Potencial que Contiene Explícitamente los Valores de Expectación

- forma alternativa de escribir el potencial

$$V(\phi_1,\phi_2) = a\left[\phi_1^2+\phi_2^2-\frac{(v_2^2+z^2)}{2}\right]^2 + b_1\left(\phi_1^2-\frac{z^2}{2}\right)^2 + b_2\left(\phi_2^2-\frac{v_2^2}{2}\right)^2 + \lambda(\phi_1^\dagger\phi_2)(\phi_2^\dagger\phi_1), \quad (20)$$

donde $z^2 = v_1^2 + V_1^2$ y $\phi_i^2 = \phi_i^\dagger\phi_i$ $(i = 1, 2)$ y $a, b_1, b_2, \lambda > 0$.

- se relacionan ambas representaciones:

$$\mu_1^2 = -(a+b1)z^2 - av_2^2, \quad (21)$$

$$\mu_2^2 = -az^2 - (a+b_2)v_2^2, \quad (22)$$

$$\lambda_1 = a + b_1, \quad (23)$$

$$\lambda_2 = a + b_2, \quad (24)$$

$$\lambda_3 = 2a, \quad (25)$$

$$\lambda_4 = \lambda, \quad (26)$$

Resumen

- condiciones sobre los parámetros para un potencial adecuado:

$$\lambda_1 > 0, \tag{27}$$

$$\lambda_2 > 0, \tag{28}$$

$$4\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2, \tag{29}$$

$$4\lambda_1\lambda_2 > (\lambda_3 + \lambda_4)^2, \tag{30}$$

$$\mu_1^2 < 0 \quad \text{y} \quad \mu_2^2 < 0, \tag{31}$$

$$\lambda_4 > 0, \tag{32}$$

$$\text{si} \quad \lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow \mu_1^2 \neq -\mu_2^2, \tag{33}$$

$$\text{si} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow \mu_2^2 \neq \left(\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\right)\mu_1^2, \tag{34}$$

$$\lambda_3 < \frac{2\lambda_1\mu_2^2}{\mu_1^2} \quad \text{y} \quad \lambda_3 < \frac{2\lambda_2\mu_1^2}{\mu_2^2}, \tag{35}$$

Resumen

- los valores de expectación en el vacío en términos de los parámetros

$$\frac{v_1^2 + V_1^2}{2} = \frac{\lambda_3 \mu_2^2 - 2\lambda_2 \mu_1^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}, \tag{36}$$

$$\frac{v_2^2}{2} = \frac{\lambda_3 \mu_1^2 - 2\lambda_1 \mu_2^2}{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}. \tag{37}$$

- el valor mínimo del potencial:

$$V\big|_{\text{mín.}} = \frac{\mu_1^2 (v_1^2 + V_1^2)}{4} + \frac{\mu_2^2 v_2^2}{4} < 0, \tag{38}$$

Para que tengamos un valor mínimo del potencial se requiere que

$$\mu_1^2 < 0 \quad \text{y} \quad \mu_2^2 < 0, \quad \text{y} \quad v_1, V_1, v_2 \neq 0. \tag{39}$$