2.6. TALLER B6

¿Confía en sus conocimientos matemáticos sobre la inconmensurabilidad y la irracionalidad?

Edgar Alberto Guacaneme Suárez, guacaneme@pedagogica.edu.co,
Universidad Pedagógica Nacional.

Resumen. La inconmensurabilidad y la irracionalidad constituyen dos objetos matemáticos fundamentales en la historia de las Matemáticas, aunque es posible que este carácter no sea compartido en las matemáticas escolares o que la relación entre estos logre ocultar las diferencias epistémicas y conceptuales existentes entre estos. Una aproximación a la expresión de estos en los currículos de matemáticas, seguida de una discusión sobre estos objetos desde un punto de vista histórico y matemático, ofrece una oportunidad para re-conocerlos, ponderar el conocimiento docente sobre estos y visionar potenciales prácticas pedagógicas a favor de su aprendizaje en ambientes escolares.

Palabras claves. Inconmensurabilidad, irracionalidad, razón, proporción.

1. Temática y objetivos del taller o cursillo

Los dos objetos matemáticos fundamentales del taller son inconmensurabilidad e irracionalidad. De manera natural, ligado a estos emergen otros objetos matemáticos (*v.g.*, magnitud, número, tamaño, medida, racional, razón, proporción) cuya comprensión aporta a una reconceptualización de aquéllos. Ahora bien, el tratamiento escolar de estos objetos así como su tratamiento histórico, constituyen las dos dimensiones de aproximación del taller.

Así, en relación con estos objetos y bajo estas dimensiones, se pretende desarrollar un trabajo para procurar:

- Explicitar el lugar y tratamiento que de estos se propone en el currículo escolar colombiano.
- Reconocer y analizar críticamente prácticas pedagógicas que se desarrollan en el aula que pretender promover el aprendizaje de estos objetos.
- Reconstruir, desde la perspectiva histórica, algunas prácticas y objetos matemáticos que recontextualizan y reconceptualizan los objetos en cuestión.
- Reflexionar sobre el conocimiento docente que se posee y requiere en torno a estos objetos.
- Prever algunas tareas matemáticas que, en relación con estos objetos, promuevan el desarrollo del pensamiento matemático.

2. Metodología

En cuanto taller, se prevé la formulación de algunas consignas de tareas que orienten actividades de los asistentes, a través de las cuales se manifiesten sus conocimientos, inquietudes y experiencias, en torno de las ideas de irracionalidad e inconmensurabilidad, y especialmente de su tratamiento escolar e histórico.

En sesiones colectivas, orientadas por el tallerista, se discutirán los aportes de los asistentes para reconocer el conocimiento implicado, así como para exhibir ámbitos donde este requiere de profundización o fortalecimiento.

3. Descripción general del taller

A continuación se presentan las tareas que se proponen a los asistentes:

Taller 1:

1. Identifique y explicite qué elementos (*v.g.*, objetivos, temáticas, estándares, competencias) del plan de estudios de matemáticas de la institución donde labora o de donde se graduó de bachiller, refieren a la inconmensurabilidad o a la irracionalidad.
2. Refiera una tarea matemática que proponga como profesor o que le hayan propuesto como aprendiz de matemáticas, en relación con el estudio de la inconmensurabilidad.
3. Refiera una tarea matemática que proponga como profesor o que le hayan propuesto como aprendiz de matemáticas, en relación con el estudio de la irracionalidad.

Taller 2:

1. Establezca algunas condiciones que definen que una pareja de magnitudes geométricas es conmensurable.
2. Establezca algunas condiciones que definen que una pareja de magnitudes geométricas es inconmensurable.
3. Establezca algunas condiciones que definen que un número es racional.
4. Establezca algunas condiciones que definen que un número es irracional.
5. Refiera una demostración sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$.
6. Refiera una demostración sobre la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado y su lado.
7. Compare las dos demostraciones anteriores y establezca semejanzas, diferencias y conexiones.

Taller 3:

1. A partir de lo planteado en los dos anteriores talleres esboce una tarea matemática que le propondría a unos estudiantes para promover el aprendizaje de algún conocimiento relacionado con la inconmensurabilidad o la irracionalidad.
2. Establezca, en relación con el currículo de matemáticas colombiano, con cuál de los tipos de pensamiento matemático se relaciona la actividad de los estudiantes al abordar la tarea, cuál de los procesos matemáticos está ampliamente vinculado con la dicha actividad y qué contexto incorpora la tarea?

4. Resultados esperados

Con el Taller 1 se espera que los asistentes reconozcan aspectos como los referidos en las siguientes afirmaciones:

- La inconmensurabilidad es un tema asociado al pensamiento métrico, pero de manera extraña (o equívoca) se vincula con el pensamiento aritmético o tiene un exiguo tratamiento en las matemáticas escolares.
- El tratamiento de la medida de las magnitudes geométricas se da desde una perspectiva cuantitativa numérica que la asocia a lo numérico, más que a lo métrico.
- La conmensurabilidad de las magnitudes, cuando se aborda escolarmente, refiere casi exclusivamente a las longitudes de segmentos y normalmente incorpora la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado o de la circunferencia y su diámetro.
- La irracionalidad se trata como negación de la racionalidad, fundamentalmente para construir el conjunto numérico de los reales.
- Una tarea usual es demostrar que $\sqrt{2}$ es irracional; otra es que la razón entre la circunferencia y su diámetro es la constante π.

Entre tanto, con el Taller 2 se espera que los asistentes se apropien de aspectos como los referidos en las siguientes afirmaciones:

- La existencia de una tercera magnitud, bien sea como máximo común divisor o mínimo común múltiplo, garantiza la conmensurabilidad.
- La naturaleza finita o infinita de la antanairesis de dos magnitudes geométricas homogéneas determina la conmensurabilidad o inconmensurabilidad de estas.
- La búsqueda de la relación entre la diagonal y el lado de un cuadrado puede conllevar una aproximación a la convergencia de sucesiones.
- Es usual establecer la racionalidad o la irracionalidad a través de condiciones sobre las representaciones del número y no como característica esencial de este.
- Si bien se conoce una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{2}$, no se suele conocer una para la inconmensurabilidad de la diagonal y el lado de un cuadrado. En consecuencia, no es probable identificar que ambas proceden por reducción al absurdo.

Entre tanto, con el Taller 3 se espera que los asistentes se apropien de aspectos como los referidos en las siguientes afirmaciones:

- Tareas que relacionen las longitudes de las diagonales y los lados de los polígonos regulares pueden conllevar trabajos sobre la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad de pares de magnitudes.
- El trabajo con la antanairesis podría constituir un marco para la innovación curricular en el tratamiento de la inconmensurabilidad.
- Tareas que involucran las relaciones entre cadenas de cuadrados construidos mediante sumas o restas reiteradas de las longitudes de los lados o diagonales, puede conllevar una aproximación intuitiva a la convergencia de una sucesión racional a un irracional.
- Las ideas de inconmensurabilidad y la irracionalidad están asociadas a diversos tipos de pensamiento matemático y pueden incorporar varios procesos matemáticos, en el contexto de las matemáticas.

Referencias

Gómez, H. A. (2014). *La Historia de las Matemáticas en la formación de profesores: un ejemplo de su transposición didáctica*. Tesis de Maestría en Docencia de la Matemática. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Guacaneme, E. A. (2016) Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas. Tesis del Doctorado Interinstitucional en Educación – Énfasis en Educación Matemática. Cali: Universidad del Valle.

Parra, E. Y. & Vargas, E. S. (2012). *¿Puede la conmensurabilidad cerrar el cerco a la inconmensurabilidad?* Trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ríos, G. Y. & Sandoval, R. A. (2016). *Una aproximación al Libro X de Elementos de Euclides*. Trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Zafra, E. L. (2012). *¿Euclides es a proporción como Dedekind es a cortaduras?* Trabajo de grado de la Licenciatura en Matemáticas. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.