FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA SISTEMAS SINGULARES

DANNY MANUEL BOTINA MENESES

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2013

FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI PARA SISTEMAS SINGULARES

DANNY MANUEL BOTINA MENESES

Trabajo de grado presentado para optar el título profesional de Físico

Director:
GERMAN ENRIQUE RAMOS ZAMBRANO
PhD. Ciencias Fisicas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2013

Nota de responsabilidad

"Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores"
Articulo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

Director

Jurado

Jurado

Dedicatoria

A mi esposa Cristinita, la mujer que amo, a quien adoro, y con quien soy muy feliz...

Agradecimientos

A Dios, por darme la fortaleza y sabiduría para alcanzar mis metas.

A mi familía, por su apoyo incondicional.

A mi esposa Cristina, por su apoyo, cariño y comprensión durante todo este tiempo.

A mi Asesor, profesor German Ramos, por su paciencia y por compartir sus extraordinarios conocimientos.

Resumen

En este trabajo se propone estudiar la formulación de Hamilton Jacobi para sistemas cuya matriz Hessiana es singular, a partir del planteamiento hecho por Carathéodory desarrollado en principio para sistemas regulares. Se muestra el formalismo aplicado a sistemas que poseen un número finito de grados de libertad. Además de generalizar este procedimiento, se analiza las condiciones de integrabilidad y cómo es posible determinar las respectivas ecuaciones de movimiento para un sistema en particular.

Abstract

This work is dedicated to study the Hamilton Jacobi formulation developed by Carathéodory, applied to systems whose Hessian matrix is singular. We propose to solve some problems with a finite number of degrees of freedom. In addition, we will also show an integrability conditions analysis and how to determine the respective motion equations of such systems.

Tabla de Contenido

Índice de figuras

Glosario

MATRIZ HESSIANA: Se denomina matriz Hessiana a aquella matriz cuadrada de $n \times n$ elementos de segundas derivadas parciales de una función de n variables.

SISTEMA SINGULAR: Aquel sistema en el cual el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero. En caso contrario, se conoce como sistema regular.

VÍNCULO: Tipo de ligadura que surge del lagrangiano que describe el sistema bajo estudio.

Capítulo 1

Introducción

A partir de la mecánica Hamiltoniana y de la teoría de las transformaciones canónicas de Jacobi, existe un formalismo común entre dos disciplinas como son la mecánica y la óptica conocido como el formalismo de Hamilton-Jacobi, el cual sirvió a Schrodinger como punto de partida para la descripción de la mecánica cuántica (Pimentel, Bertin y Pompeia,2007). La formulación de Hamilton Jacobi es un método muy poderoso que permite encontrar clásicamente la solución general de las ecuaciones de movimiento, el cual involucra determinar una función generatriz de una transformación canónica, que permita el paso de las coordenadas y momentos (q, p) en algún instantante de tiempo t, a un nuevo conjunto de variables constantes para las cuales, la solución de las ecuaciones de movimiento sea trivial (Calkin,1996;Goldstein,1980), de este modo, se lo considera un medio para hallar la solución de las ecuaciones de Hamilton (Ferreira,2006).

La formulación de Hamilton Jacobi a la Carathéodory se basa en la analogía que puede presentarse entre la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias, la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales y el cálculo de variaciones, similitud que tiene una fuerte interpretación geométrica y que fue estudiada con detenimiento por Constantine Carathéodory y que denomina como cuadro completo (Carathéodory,1967). La formulación de Hamilton Jacobi a la Carathéodory puede utilizarse para describir sistemas regulares, es decir, sistemas para los cuales el determinante de la matriz Hessiana del lagrangiano asociado a un sistema es diferente de cero. Sin embargo, existen otro tipos de sistemas en los que se viola la condición Hessiana, esto es, el determiante de la matriz Hessiana es igual a cero, estos sistemas son conocidos como ”Sistemas singulares”(Pimentel,Bertin y Pompeia,2008).

El procedimiento para tratar sistemas singulares fue desarrollado por Dirac en la década de los años 50's (Dirac,1950,1950,1964) y aunque este formalismo es ampliamente aceptado, no limita la aparición de nuevos enfoques que brindan nuevos puntos de vista para los mismos problemas. Uno de ellos es el formalismo de Hamilton Jacobi basado en el método de lagrangianas equivalentes de Carathéodory. Método desarrollado para tratar en principio sistemas regulares con primeras derivadas y como una manera alternativa de obtener la ecuación de Hamilton Jacobi a partir del formalismo lagrangiano (Carathéodory,1967). Más adelante, Guler hizo una generalización del método de Carathéodory para tratar sistemas singulares, conduciendo a un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi (Guler,1992a). Luego analizó las condiciones de integrabilidad de un sistema singular en términos de los hamiltonianos respectivos (Guler,1992b).

Desde entonces, diferentes aplicaciones y avances se han realizado al respecto, como el estudio de sistemas singulares con derivadas de orden superior(Pimentel y Teixeira,1996,1998) o sistemas descritos por acciones de primer orden, donde se estudian sistemas cuyos lagrangianos son lineales en las velocidades y como paréntesis generalizados pueden ser construidos en relación con la existencia de una estructura simpléctica dentro del formalismo de Hamilton Jacobi (Pimentel,Bertin y Pompeia,2005). En (1998) Pimentel, Teixeira y Tomazelli hicieron una extensión para tratar con sistemas singulares descritos por variables de Berzin. Este formalismo no emplea argumentos físicos, como lo hace el formalismo Hamiltoniano, pero usa la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, siendo su principal característica.

Aplicaciones importantes de este método se pueden encontrar en la literatura, incluyendo el estudio de la teoría electromagnética mediante la formulación de Hamilton Jacobi para sistemas ligados (Guler y Rabei,1994), en el estudio del movimiento de una partícula relativista en presencia de un campo electromagnético (Guler y Farahat,1996) o su aplicación al teleparalelismo (Pimentel,Pompeia,Da Rocha y Teixeira,2003).

Se propone a continuación presentar un estudio clásico de los sistemas singulares empleando la formulación de Hamilton Jacobi a la Carathéodory de la siguiente manera: En el primer capítulo se hace una descripción del formalismo de Hamilton Jacobi basado en la forma tradicional de la mecánica clásica. Comenzando por la deducción de las ecuaciones de Hamilton empleando transformaciones de Legendre, que dan origen a las diferentes funciones generatrices (goldstein,1980) y que permite la descripción de un sistema en función de las coordenadas y momentos generalizados (Landau y Lifshitz,1994). Posteriormente, a partir de un principio variacional, se presenta la importancia de una transformación de coordenadas y momentos que preserve la esctructura de las ecuaciones de Hamilton mediante el estudio de las transformaciones canónicas y algunas propiedades de los paréntesis de Poisson. En seguida se deduce la ecuación de Hamilton Jacobi.

En el segundo capitulo, se presenta el formalismo de Hamilton Jacobi a la Carathéodory aplicado a sistemas regulares, indicando que la ecuación de Hamilton Jacobi puede obtenerse a partir del principio de acción estacionaria. Se menciona la importancia del método de separación de variables en la solución de la ecuación de Hamilton Jacobi y se resuelven dos problemas sencillos; el oscilador armónico unidimensional y el de una partícula dentro de un campo magnético, a partir de ellos, se analizan las características de las soluciones.

Finalmente, en el tercer capitulo se aplica el formalismo de Hamilton Jacobi en base a Carathéodory esta vez aplicado a sistemas singulares, es decir, aquellos sistemas que violan la condición Hessiana. Se introduce por tanto el concepto de lagrangianas singulares y se determina las ecuaciones características para estos sistemas. Mas adelante, se analiza las condiciones de integrablidad y como determinar las respectivas ecuaciones de movimiento en dos problemas; un ejemplo artificial y la partícula libre sobre una esfera.

Capítulo 2

Formulación de Hamilton Jacobi

2.1. Deducción de las ecuaciones de Hamilton

La formulación Lagrangiana hace una descripción de la mecánica en función de las coordenadas y velocidades generalizadas, empleando el tiempo como parámetro. Se trata de deducir entonces, otra formulación en la que la descripción del estado de un sistema sea en función de las coordenadas y momentos generalizados, es decir, que representen las variables independientes del problema. El paso de un conjunto de variables $(q, \dot{q}, t)$ al (q, p, t), se logra usando un proceso denominado transformación de Legendre (Goldstein,1980). A partir de la función Lagrangiana:

$$L = L(q^i, \dot{q}^i, t), \tag{2.1}$$

donde q^i y $\dot{q}^i$ representan las coordenadas y velocidades generalizadas respectivamente, se calcula el diferencial correspondiente

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt, \tag{2.2}$$

teniendo en cuenta que por definición $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}^i$ representan los momentos generalizados, la ecuación (2.2) se puede expresar como

$$dL = \sum_i \frac{\partial L}{\partial q^i} dq^i + \sum_i p_i d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{2.3}$$

A partir de las ecuaciones de lagrange, resulta una expresión para la derivada con respecto al tiempo de los momentos generalizados

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \tag{2.4}$$

que permite escribir (2.3) de la siguiente manera

$$dL = \sum_i \dot{p}_i dq^i + \sum_i p_i d\dot{q}^i + \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{2.5}$$

Expresando el segundo término de esta ecuación en la forma

$$\sum_i p_i d\dot{q}^i = d(p_i \dot{q}^i) - \dot{q}^i dp_i, \tag{2.6}$$

la ecuación (2.5) se convierte en

$$d(\sum_i p_i \dot{q}^i - L) = -\sum_i \dot{p}_i dq^i + \sum_i \dot{q}^i dp_i - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \tag{2.7}$$

La cantidad dentro del diferencial de la parte izquierda de (4.3) se denomina *Hamiltoniana* o *función de Hamilton* y se denota por la letra H. Está es función de las coordenadas, los momentos y el tiempo, esto es

$$H(q, p, t) = \sum_i p_i \dot{q}^i - L. \tag{2.8}$$

Considerada como función de (q, p, t), se calcula su diferencial

$$dH = \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial t} dt, \tag{2.9}$$

y al compararla con las ecuaciones (2.7) y (2.9), se llega al siguiente sistema de $2n + 1$ ecuaciones

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2.10}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \tag{2.12}$$

Las relaciones (2.10) y (2.11), representan las ecuaciones de movimiento de un sistema en el espacio de fase (q, p) y constituyen un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales de primer orden que son equivalentes a las n ecuaciones de Lagrange. Estas expresiones se conocen como *ecuaciones canónicas de Hamilton.*

2.2. Deducción de las ecuaciones de Hamilton a partir del principio variacional

De acuerdo al principio de Hamilton

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0, \tag{2.13}$$

el cual establece que el movimiento del sistema entre los tiempos t_1 y t_2 es tal, que el funcional S llamado acción, es un extremo para la trayectoria real del sistema entre todas las trayectorias posibles (Goldstein,1980;Oller,2007), se puede plantear un principio variacional que permita deducir además de las ecuaciones de Lagrange, las ecuaciones de movimiento de Hamilton. Por lo tanto, la ecuación (2.13) en virtud de (2.8) se puede reescribir en el espacio de fase en la forma:

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i p_i \dot{q}^i - H) dt = 0. \tag{2.14}$$

De aqui, es posible deducir las ecuaciones de Hamilton correspondientes, simplemente considerando variaciones independientes de q y p. Por tanto, a partir de (2.14) se obtiene (Goldstein,1980;Landau y Lifshitz,1994)

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\dot{q}^i \delta p_i + p_i \delta \dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta q - \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta p_i \right] dt = 0. \tag{2.15}$$

El segundo término de esta ecuación puede intergrarse por partes de la siguiente manera

$$\int_{t_1}^{t_2} p_i \delta \dot{q}^i dt = \int_{t_1}^{t_2} p_i \frac{d}{dt} \delta q^i dt = \left[p_i \delta q^i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}_i \delta q^i dt, \tag{2.16}$$

donde el primer término de (2.16) se anula, puesto que las variaciones en los extremos son iguales a cero, es decir, las trayectorias variadas poseen los mismos extremos y en consecuencia $\delta q^i(t_2) = \delta q^i(t_1) = 0$. De acuerdo a esto, la ecuación (2.15) se convierte en

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_i \left[\left(\dot{q}^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) \delta p_i - \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q^i} \right) \delta q^i \right] dt = 0, \tag{2.17}$$

como las variaciones δq^i y δp_i son independientes y arbitrarias (Soldovieri,2011), la integral es igual a cero solo si se anulan los respectivos coeficientes por separado, esto es

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \tag{2.18}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \tag{2.19}$$

que corresponden a las $2n$ ecuaciones canónicas de Hamilton, en concordancia con (2.10) y (2.11) deducidas en la sección anterior.

2.3. Transformaciones canónicas

En ocasiones es conveniente elegir un sistema de coordenadas generalizadas apropiado para poder analizar y resolver un problema dinámico en particular, asi que es necesario un procedimiento que transforme un conjunto de variables en otro más adecuado. De este modo, la elección de las coordenadas no esta limitada, permitiendo elegir un conjunto de magnitudes cualesquiera que definan el estado del sistema en el espacio de fase (Landau y Lifshitz,1994).

En principio, se transforma de un conjunto de coordenadas q^i a otro nuevo conjunto Q^i mediante las ecuaciones de transformación

$$Q^i = Q^i(q^i, t), \tag{2.20}$$

que son funciones de las antiguas coordenadas y del tiempo. Sin embargo, dentro de la formulación de Hamilton los momentos p_i son también variables idependientes, siendo necesario ampliar el concepto de transformación de coordenadas para incluir la transformción simultanea de las $2n$ variables independientes q^i y p_i a otro nuevo conjunto Q^i y P_i, las cuales son función de las antiguas coordenadas, los antiguos momentos y el tiempo. Resultan entonces, las ecuaciones de transformación

$$\begin{aligned} Q^i &= Q^i(q, p, t), \\ P_i &= P_i(q, p, t). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Debido a que las ecuaciones de movimiento para toda transformación de la forma (2.21) no conservan su forma canónica, al desarrollar la formulación Hamiltoniana se requiere de un conjunto de transformaciones para las cuales las variables Q y P sean coordenadas canónicas. Esto se cumple, si existe cierta función $H'(Q, P, t)$ que permite que las ecuaciones de movimiento (2.10) y (2.11) en el nuevo sistema de coordenadas conserven la forma canónica, es decir; sean de la forma

$$\begin{aligned} \dot{Q}^i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial H'}{\partial Q^i}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

en este caso, H' representará la Hamiltoniana en el nuevo sistema de coordenadas. Las transformaciones (2.21) que garantizan las ecuaciones (2.22) reciben el nombre de *transformaciones canónicas* (Goldstein,1980).

Si las nuevas variables Q^i y P_i son coordenadas canónicas, deben satisfacer un principio de Hamilton, es decir:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\sum_i P_i dQ^i - H' dt) = 0, \tag{2.23}$$

del mismo modo que las antiguas variables también satisfacen un principio variacional (2.14). Las ecuaciones (2.14) y (2.23) serán equivalentes si sus integrandos difieren a lo sumo en el diferencial de una función arbitraria F, esto significa

$$\sum_i P_i dQ^i - H' dt = \sum_i p_i dq^i - H dt + dF, \tag{2.24}$$

que se puede escribir como

$$dF = \sum_i p_i dq^i - \sum_i P_i dQ^i + (H' - H) dt. \tag{2.25}$$

La función F se conoce como *función generatriz* de la transformación, puesto que si se conoce esta función, será posible determinar completamente las ecuaciones de transformación (2.21) al igual que la nueva Hamiltoniana.

Para efectuar una transformación entre dos conjuntos de variables canónicas, la función generatriz debe ser función tanto de las antiguas como de las nuevas coordenadas además del tiempo. De este modo, la función generatriz será función de $4n$ variables en total, de las cuales, solo $2n$ son independientes debido a que ambos conjuntos están relacionados por las $2n$ ecuaciones de transformación (2.21).

Por lo tanto, la función generatriz puede expresarse de una de las siguientes cuatro formas como función de las variables independientes (Goldstein,1980):

$$F_1(q^i, Q^i, t), \tag{2.26}$$

$$F_2(q^i, P_i, t), \tag{2.27}$$

$$F_3(p_i, Q^i, t), \tag{2.28}$$

$$F_4(p_i, P_i, t), \tag{2.29}$$

Si la función generatriz es de la forma (2.26) la ecuación (2.25) se escribe

$$dF_1(q, Q, t) = \sum_i p_i dq^i - \sum_i P_i dQ^i + (H' - H)dt, \tag{2.30}$$

en tanto que el diferencial de F_1 se puede desarrollar como

$$dF_1 = \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q^i} dq^i + \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial Q^i} dQ^i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt, \tag{2.31}$$

comparando las ecuaciones (2.30) y (2.31) resulta

$$p_i = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q^i}, \tag{2.32}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q^i}, \tag{2.33}$$

$$H' - H = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}. \tag{2.34}$$

Las ecuciones (4.91) representan n relaciones entre las variables p_i, q^i, Q^i y el tiempo, que se pueden resolver para las nQ^i en función de p_i, q^i, t; obteniendo de este modo la primera mitad de las ecuaciones de transformación (2.21). Al establecerse la relación entre Q^i y p_i, q^i, t; las ecuaciones (2.33) proporcionan la otra mitad de las ecuaciones de transformación en las que P_i es función de p_i, q^i, t. Por último, (2.34) da la relación entre la antigua y nueva Hamiltoniana.

Si las variables independientes de la función generatriz F han de ser las q^i y P_i, esta función sera de la forma (2.27). El paso a este conjunto de coordenadas se lleva a cabo mediante una transformación de Legendre (Landau y Lifshitz,1994;Goldstein,1980). Reescribiendo el segundo término de (2.30)

$$\sum_i P_i dQ^i = d\left[\sum_i P_i Q^i\right] + \sum_i Q^i dP_i, \tag{2.35}$$

dicha ecuación se convierte en

$$d\left[F_1(q,Q,t)+\sum_i P_iQ^i\right]=\sum_i p_i dq^i+\sum_i Q^i dP_i+(H'-H)dt. \tag{2.36}$$

El argumento del diferencial del lado izquierdo de (2.36) es F_2, lo que sugiere que esta función se defina en terminos de F_1 de acuerdo con

$$F_2(q,P,t)=F_1(q,Q,t)+\sum_i P_iQ_i. \tag{2.37}$$

Se calcula entonces su diferencial

$$dF_2(q,P,t)=\sum_i \frac{\partial F_2}{\partial q^i}dq^i+\frac{\partial F_2}{\partial P_i}dP_i+\frac{\partial F_2}{\partial t}dt, \tag{2.38}$$

y al comparar las ecuaciones (2.36) y (2.38) resultan las ecuaciones de transformación

$$p_i=\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial q^i}, \tag{2.39}$$

$$Q^i=\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial P_i}, \tag{2.40}$$

$$H'-H=\frac{\partial F_2(q,P,t)}{\partial t}. \tag{2.41}$$

Las ecuaciones (2.39) proporcionan los p_i en función de las variables q^i, p_i, t representando la segunda mitad de las ecuaciones de transformación (2.21). La mitad restante se deducen a partir de (2.40).

En el caso en el que las variables independientes sean las cantidades p_i y Q^i la función generatriz es de la forma (2.28). Para realizar el paso de las variables q y Q a q y P se hace nuevamente una transformación de Legendre. De acuerdo a (2.30) el primer término se puede expresar como

$$\sum_i p_i dq^i=d\left[\sum_i q^i p_i\right]-q^i dp_i, \tag{2.42}$$

por lo que la ecuación (2.30) se escribe como

$$d\left[F_1(q,Q,t)-\sum_i q^i p_i\right]=-\sum_i q^i dp_i-\sum_i P_i dQ^i+(H'-H)dt. \tag{2.43}$$

Identificando mediante el mismo proceso de comparación con el diferencial de F_3, se obtiene las ecuaciones de transformación

$$q^i = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial p_i}, \tag{2.44}$$

$$P_i = -\frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial Q^i}, \tag{2.45}$$

$$H' - H = \frac{\partial F_3(p, Q, t)}{\partial t}. \tag{2.46}$$

De este modo, las ecuaciones (2.44) proporcionan las variables Q^i en función de las cantidades q^i, p_i, t, que representan la primera mitad de las ecuaciones de transformación (2.21), mientras que las (2.45) dan la mitad restante, es decir, los P_i en función de q^i, p_i, t.

Por último, en el caso en el que las variables independientes sean p_i y P_i la función generatriz es de la forma (2.29). De acuerdo a esto, para encontrar las ecuaciones de transformación se efectua una doble transformación de Legendre. En virtud de (2.35) y (2.42), la ecuación (2.30) se puede expresar de la siguiente manera

$$d\left[F_1(q, Q, t) - \sum_i q^i p_i + \sum_i Q^i P_i\right] = -\sum_i q^i dp_i + \sum_i Q^i dP_i + (H' - H)dt. \tag{2.47}$$

Al comparar con el diferencial de la función $F_4(p, P, t)$ resultan las ecuaciones de transformación

$$q^i = -\frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial p_i}, \tag{2.48}$$

$$Q^i = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial P_i}, \tag{2.49}$$

$$H' - H = \frac{\partial F_4(p, P, t)}{\partial t}. \tag{2.50}$$

En consecuencia, las ecuaciones (2.48) dan las variables P_i como función de las cantidades q^i, p_i, t; es decir, la segunda mitad de las ecuaciones (2.21). Las ecuaciones (2.49) determinan las variables Q^i en función de las antiguas variables proporcionando de este modo la mitad restante.

A partir de las ecuaciones (2.34), (2.41), (2.46) y (2.50), se puede identificar que la derivada parcial de la función generatriz con respecto al tiempo representa la diferencia entre la nueva y antigua Hamiltoniana. De acuerdo a esto, cuando la función generatriz es independiente del tiempo, la nueva hamiltoniana resulta de sustituir en H los valores de las variables q^i y p_i en función de la nuevas variables Q^i y P_i.

2.4. Paréntesis de Poisson

Dentro del formalismo Hamiltoniano, la derivada total con respecto al tiempo de una función que depende de las coordenadas, los momentos y el tiempo $f(q,p,t)$ es

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \right), \tag{2.51}$$

sustituyendo las ecuaciones de Hamilton (2.10) y (2.11) se obtiene

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}, \tag{2.52}$$

donde

$$\{f, H\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} \right). \tag{2.53}$$

La expresión (2.53) se define como Paréntesis de Poisson para las funciones f y H. En el caso de dos funciones f y g cualesquiera que dependen de las coordenadas, los momentos y el tiempo es decir, $f(q^i, p_i, t)$ y $g(q^i, p_i, t)$, se define el *Parentesis de Poisson* entre f y g con respecto a un conjunto de variables canónicas q^i y p_i como

$$\{f, g\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} \right). \tag{2.54}$$

Algunas de las propiedades más importantes de los paréntesis de Poisson para f, g y h funciones arbitrarias de q^i, p_i, t, siendo c es una constante arbitraria son las siguientes:

$$\{f, g\} = -\{g, f\}, \tag{2.55}$$

$$\{f, f\} = \{g, g\} = 0, \tag{2.56}$$

$$\{f, g + h\} = \{f, g\} + \{f, h\}, \tag{2.57}$$

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}, \tag{2.58}$$

$$\{cf, g\} = \{f, cg\} = c\{f, g\}, \tag{2.59}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \left\{\frac{\partial f}{\partial t}, g\right\} + \left\{f, \frac{\partial g}{\partial t}\right\}, \tag{2.60}$$

Si una de las funciones coincide con una coordenada o momento y la otra es función de q^i, p_i, t, de acuerdo a (2.54) los paréntesis se reducen a una derivada parcial:

$$\{f, q^i\} = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad \{f, p_i\} = -\frac{\partial f}{\partial q^i}. \tag{2.61}$$

Si en (2.61) la función f es igual a q^i o p_i, se obtiene en particular

$$\{q^i, q^j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q^i, p_j\} = \delta^i_j, \tag{2.62}$$

conocidos como los paréntesis fundamentales de Poisson entre las variables dinámicas que expanden el espacio de fase. Finalmente, los paréntesis de Poisson para tres funciones se relacionan mediante la identidad de Jacobi(Landau y Lifshitz,1994;Desloge,1982).

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0, \tag{2.63}$$

La prueba de cualquiera de estas propiedades se puede obtener de la definición de los paréntesis de Poisson ecuación (2.54) y el uso de algunas de las propiedades anteriores.

2.5. Ecuación de Hamilton Jacobi

Para un sistema de n grados de libertad cuya dinámica se describe mediante el conjunto de variables q^i y p_i, y cuyo comportamiento se define mediante la función Hamiltoniana $H(q^i, p_i, t)$, se puede buscar una transformación que permita pasar de las coordenadas q y momentos p en un determinado instante de tiempo t, a un nuevo conjunto de coordenadas constantes (Goldstein,1980). Esto se logra si la nueva Hamiltoniana H' es igual a cero. Se trata por tanto de determinar una transformación canónica de tal manera que en el nuevo sistema la Hamiltoniana sea cero, de este modo, las ecuaciones canónicas de Hamilton estarán representadas por

$$\begin{aligned} \dot{Q}^i &= \frac{\partial H'}{\partial P_i} = 0, \\ \dot{P}_i &= \frac{\partial H'}{\partial Q^i} = 0, \end{aligned} \tag{2.64}$$

que se pueden integrar directamente resultando

$$Q^i = \beta_i, \quad P_i = \alpha_i, \tag{2.65}$$

siendo α_i y β_i $2n$ constantes arbitrarias. Para poder efectuar dicha transformación canónica, es necesario una función generatriz que transforme las variables q^i y p_i en las nuevas variables β_i y α_i, que representan las nuevas coordenadas y momentos respectivamente. Eligiendo la función generatriz de modo que sea función de las antiguas coordenadas, de los nuevos momentos constantes y del tiempo. Se tiene entonces una función del tipo (2.27) que se representa en este caso por S. Asi, las ecuaciones de transformación (2.39) a (2.41) pueden escribirse como

$$p_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial q^i}, \tag{2.66}$$

$$\beta_i = \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial \alpha_i}, \tag{2.67}$$

$$H' = H + \frac{\partial S(q, \alpha, t)}{\partial t}. \tag{2.68}$$

Ahora, si la nueva Hamiltoniana se anula, (2.68) se convierte en

$$H(q, p, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{2.69}$$

y de acuerdo a (2.66) resulta

$$H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad \{i = 1, \ldots, n\}, \tag{2.70}$$

denominada *ecuación de Hamilton Jacobi*. Corresponde a una ecuación diferencial parcial de primer orden, no lineal, con $n+1$ variables representadas por las cantidades q^i y el tiempo. Mediante esta ecuación, se puede determinar la función generatriz S y de este modo la transformación canónica que anula la nueva Hamiltoniana. Así, la ecuación de Hamilton Jacobi (2.70) representa la base de un método general de integración de las ecuaciones de movimiento (Landau y Lifshitz,1994).

Para determinar la función S, se debe integrar $n+1$ veces la ecuación (2.70), resultando entonces $n+1$ constantes de integración independientes α_i (Soldovieri,2011). Debido a que la función principal de Hamilton aparece solo a tráves de sus derivadas parciales respecto de q^i o t, significa que puede ser encontrada pero con una constante de integración sumada a ella, es decir, si S es solución, $S + \alpha$ también es solución, puesto que α no afecta a los valores de las derivadas parciales. Por lo tanto, una de las $n+1$ constantes de integración debe ser aditiva a S.

Sin embargo, esta constante no tiene importancia dado que en las ecuaciones de transformación solo aparecen las derivadas de S. Se establece entonces, una solución completa de la forma:

$$S = S(q^i, \alpha, t). \tag{2.71}$$

De acuerdo con la ecuación (2.65) y teniendo en cuenta (2.67) las nuevas coordenadas constantes se obtienen a partir de

$$\beta_i = \frac{\partial S}{\partial \alpha_i}, \tag{2.72}$$

cuya solución suministra n ecuaciones algebraicas para las n variables q^i en función del tiempo y de $2n$ constantes arbitrarias, tales constantes α_i y β_i se determinan por las condiciones de frontera (Desloge,1982). Finalmente, se encuentran las relaciones para los momentos

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}. \tag{2.73}$$

En virtud de las ecuaciones (2.72) y (2.73), las variables q^i y p_i son ahora funciones del tiempo y de las $2n$ constantes, obteniéndose entonces la solución dinámica completa del sistema caracterizado por un Hamiltoniano $H(q, p, t)$.

2.5.1. Ecuación de Hamilton Jacobi independiente del tiempo

En el caso en el que la función Hamiltoniana no dependa explícitamente del tiempo, es decir, $H(q^i, p_i)$, la ecuación de Hamilton Jacobi (2.70) puede escribirse como

$$H\left(q^i, \frac{\partial S}{\partial q^i}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{2.74}$$

donde en el primer término solo aparece la dependencia con respecto a q^i, y en el segundo, únicamente la de t. En este caso se puede separar el tiempo si se escoge una solución (2.71) de la forma:

$$S(q^i, \alpha_i, t) = S'(q^i, \alpha_i) + T(t), \tag{2.75}$$

que representa la suma de una función $S'(q^i, \alpha_i)$ que depende solo de q^i y α_i, y una función T que depende solo del tiempo. Reemplazando (2.75) en la ecuación de Hamilton Jacobi (2.74) se obtiene

$$H\left(q^i, \frac{\partial S'}{\partial q^i}\right) + \frac{dT(t)}{dt} = 0. \tag{2.76}$$

Aqui, el primer término es función únicamente de las q^i, mientras que el segundo término solo depende de t, por lo tanto, la ecuación (2.76) se verifica solo si los dos términos son constantes iguales y de signo contrario, es decir,

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\alpha_0, \tag{2.77}$$

$$H\left(q^i, \frac{\partial S'}{\partial q^i}\right) = \alpha_0. \tag{2.78}$$

La primera ecuación (2.77) puede ser integrada fácilmente dando como resultado

$$T(t) = \alpha_0\, t, \tag{2.79}$$

mientras que la segunda ecuación (2.78) se conoce como la ecuación de Hamilton Jacobi independiente del tiempo. La constante α_0 representa el valor constante de la función Hamiltoniana, que normalmente es la energía total del sistema. En consecuencia, la solución completa de la ecuación de Hamilton Jacobi (2.74) es

$$S(q^i, \alpha_i, t) = S'(q^i, \alpha_i) - \alpha_0\, t, \tag{2.80}$$

la cual permite encontrar las n ecuaciones del movimiento para las variables q^i.

Capítulo 3

Sistemas Regulares

En este capítulo se estudia el formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas regulares (Pimentel,Bertin y Pompeia,2005), es decir, aquellos que obedecen la condición Hessiana, a partir de los aspectos mas importantes dentro del planteamiento de Carathéodory e identificando como estan relacionados el cálculo variacional, la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. También se plantean algunas herramientas necesarias para la solución de sistemas de tipo regular, en los cuales, es posible resolver directamente las ecuación de Hamilton Jacobi y por ende determinar las ecuaciones de movimiento.

3.1. Lagrangianas Equivalentes

Se considera la integral de acción para un sistema con n grados de libertad,

$$Ac = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)dt, \tag{3.1}$$

a lo largo de una trayectoría C entre dos puntos o posiciones que el sistema ocupa en dos instantes t_1 y t_2. Sea además, otra curva en las vecindades de C que coincide con los instantes $\bar{t_1}$ y $\bar{t_2}$ y que se representa por $\bar{C}$. Se define para ella también la integral de acción correspondiente

$$\bar{A}_{\bar{C}} = \int_{\bar{t_1}}^{\bar{t_2}} L(\bar{q}^i, \frac{d\bar{q}^i}{dt}, t)dt. \tag{3.2}$$

Para que C sea un extremo de A, esta acción debe tener un mínimo o máximo con relación a la curva de comparación $\bar{C}$. Por otro lado, se construye una función lagrangiana que tiene la siguiente forma

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt}, \tag{3.3}$$

donde L representa la lagrangiana tradicional del sistema y S una función de las coordenadas y del tiempo, es decir, $S(q^i, t)$. La acción en este caso es

$$\bar{A} = \int_{\bar{t_1}}^{\bar{t_2}} \left[L - \frac{dS}{dt} \right] dt = \int_{\bar{t_1}}^{\bar{t_2}} Ldt - S(\bar{q_2}, \bar{t_2}) + S(\bar{q_1}, \bar{t_1}) \tag{3.4}$$

Ahora, se calcula la primera variación de la ecuación (3.4) entre los mismos límites para la curva C, esto es, entre los tiempos t_1 y t_2. Por lo tanto se obtiene

$$\delta\bar{A} = \delta \int_{t_1}^{t_2} Ldt - \delta S(q_2, t_2) + \delta S(q_1, t_1) = \delta A - \delta S_2 + \delta S_1. \tag{3.5}$$

Puesto que la acción está calculada entre dos instantes fijos, que para nuestro caso corresponden a t_1 y t_2, δq será nulo y en consecuencia

$$\begin{aligned} \delta\bar{A} &= \delta A - \frac{\partial S}{\partial q_2}\delta q_2 + \frac{\partial S}{\partial q_1}\delta q_1, \\ \delta\bar{A} &= \delta A. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Lo que indica que la trayectoría que extremiza a A es la misma trayectoría que extremiza a $\bar{A}$ y por lo tanto, se puede afirmar que L y $\bar{L}$ son *lagrangianas equivalentes* representando en consecuencia la misma dinámica. De la ecuación (3.3) se puede deducir que S representa una función generadora de una transformación de coordenadas en el espacio de configuración.

La trayectoría dinámica $q^i(t)$ que caracteriza a la curva C, corresponde a la solución del conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{dq^i}{dt} - \phi^i(q, t) = 0, \tag{3.7}$$

siempre y cuando todos los $\phi^i(q, t)$ existan y se puedan determinar. Según Carathéodory (Carathéodory,1967), si se puede encontrar las funciones ϕ, la condición para que A sea un máximo o un mínimo radica en determinar la función $S(q, t)$ que cumple con

$$\bar{L}(q, \phi, t) = 0, \tag{3.8}$$

y que para cualquier curva en la vecindad de C, esta lagrangiana sea mayor o menor que cero.

3.2. Ecuación de Hamilton Jacobi para sistemas regulares

Se busca ahora determinar la función $S(q,t)$ y la forma que esta tiene, para ello, se tiene en cuenta que la curva C es el extremo de A, lo cual es posible si

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \phi^i} = \frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i} = 0, \tag{3.9}$$

por lo tanto, a partir de la ecuación (4.10) esta condición se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left[L - \frac{dS}{dt}\right] = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left(\frac{dS}{dt}\right) = 0. \tag{3.10}$$

Como S depende de las coordenadas y del tiempo, al reemplazar el segundo término de la ecuación (3.10) por la derivada de S con respecto al tiempo, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}\left[\frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t}\right] &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial}{\dot{q}^i}\left[\frac{\partial S}{\partial q^j}\dot{q}^j\right] - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial t} &= 0,\\
\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial S}{\partial \dot{q}^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial t} &= 0,
\end{aligned} \tag{3.11}$$

dado que S no depende de las velocidades, el segundo y cuarto término se anulan. Teniendo en cuenta que $\partial \dot{q}^j/\partial \dot{q}^i = \delta_i^j$ la ecuación (3.11) se puede escribir como

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial S}{\partial q^i} = 0, \tag{3.12}$$

puesto que $p_i \equiv \partial L/\partial \dot{q}^i$, se tiene

$$p_i \equiv \frac{\partial S}{\partial q^i}, \tag{3.13}$$

y según la ecuación (3.9), debe representar la condición para que C sea un extremo de A. Por otra parte, teniendo en cuenta que $\bar{L} = \bar{L}(q^i, \phi, t)$, la condición (3.8) se puede expresar, al reemplazar el diferencial de la función S con respecto al tiempo, de la siguiente manera

$$L - \frac{dS}{dt} = L - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i = 0, \tag{3.14}$$

reorganizando términos y en virtud de la ecuación (3.13), se tiene

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i \dot{q}^i - L = 0. \tag{3.15}$$

La ecuación (3.15) representa una ecuación diferencial parcial para la función S, siempre y cuando se pueda eliminar las velocidades y expresarlas en función de las coordenadas q y los momentos p. Para esto, la lagrangiana del sistema debe ser regular y la matriz Hessiana invertible, es decir, su determinante debe ser diferente de cero, esto es

$$W \equiv detW_{ij} = det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\right) \neq 0. \tag{3.16}$$

A los sistemas que cumplen con esta condición se les llama *Sistemas Regulares*(Pimentel,Bertin y Pompeia,2007). De acuerdo a esto, se puede escribir las velocidades como $q^i = \eta^i(q, p, t)$, es decir, como una función que depende de las coordenadas, los momentos y el tiempo. De esta manera, la ecuación (3.15) se escribe como

$$\frac{\partial S}{\partial t} + p_i \eta^i - L = 0, \tag{3.17}$$

se define dentro de esta ecuación, la *función de Hamilton o hamiltoniana* $H(q, p, t)$, la cual depende de las coordenadas, los momentos y el tiempo como

$$H(q, p, t) = p_i \eta^i - L(q, \eta, t). \tag{3.18}$$

En virtud de (3.18) y (3.13), la ecuación (3.17) se transforma en

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t) = 0, \tag{3.19}$$

conocida como la *ecuación diferencial parcial de Hamilton Jacobi* . Esta ecuación representa la segunda condición sobre la función S, y al igual que las ecuaciones de Lagrange y de Hamilton, representa la base de un método general para la integración las ecuaciones de movimiento.

La ecuación (3.19) tiene como solución una función o integral completa, que posee tantas constantes arbitrarias independientes como variables independientes hayan. En un sistemas que tiene n grados de libertad esta integral ha de tener $n + 1$ constantes arbitrarias, de las cuales una de ellas debe ser aditiva, y en consecuencia, la solución de la ecuacion de Hamilton Jacobi será

$$S = S'(q^i, \alpha_i, t) + C, \tag{3.20}$$

donde α_i representa n constantes independientes y C una constante arbitraria. Sin embargo, para determinar la relación que existe entre la solución de la ecuación (3.19), es decir, la función S y las ecuaciones de movimiento, dentro de la formulación de Hamilton Jacobi se busca una transformación canónica de la variables p y q a unas nuevas variables α_i y β_i que representan los nuevos momentos y coordenadas respectivamente que haga que la nueva hamiltoniana H' sea nula. En este caso, las nuevas ecuaciones canónicas en las nuevas variables corresponden a

$$\frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0 = \dot{\beta}_i, \tag{3.21}$$

$$-\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = 0 = \dot{\alpha}_i, \tag{3.22}$$

de donde se observa que las nuevas coordenadas y momentos son todos constantes. La solución del problema original se obtiene mediante la transformación inversa, es decir:

$$\frac{\partial S(q^i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} = \beta_i. \tag{3.23}$$

Esta ecuación permite expresar las n coordenadas q en función del tiempo y de las $2n$ constantes α y β, las cuales se determinan de acuerdo a condiciones iniciales apropiadas.

3.3. Interpretación Geométrica

En esta sección se considera un sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) en el cual se puede plantear la ecuación $p_i \equiv \partial S/\partial q^i$ como

$$\vec{p} = \nabla S, \tag{3.24}$$

que establece que p representa el gradiente de una función escalar, en este caso $S = \sigma$, siendo σ un parámetro real, y en consecuencia, el momento es ortogonal a la superficie asociada con la función S. Para un sistema con n partículas, la función S representa una familía de superficies que se diferencian por el valor del parámetro σ en diferentes instantes de tiempo tal como se ilustra en la figura 3.1 (Pimentel,Bertin y Pompeia,2007), A partir de la condición $\bar{L} = 0$, resulta

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt} = 0, \quad \longrightarrow \quad L = \frac{dS(q^i, t)}{dt}. \tag{3.25}$$

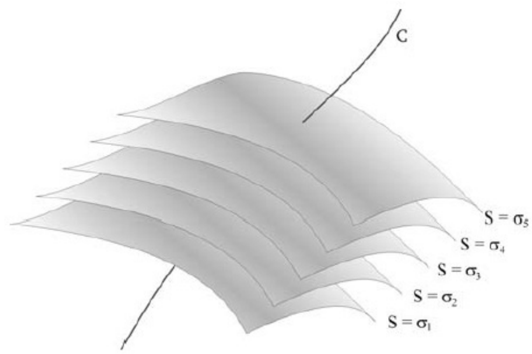

Figura 3.1: Familía de superficies

y puesto que la función S depende de las coordenadas y del tiempo, la anterior ecuación se puede escribir como

$$L = \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i, \tag{3.26}$$

Si se calcula la acción asociada a esta lagrangiana y teniendo en cuenta que la variación se hace entre dos instantes de tiempo diferentes se obtiene

$$\begin{aligned} A &= \int_{t_1}^{t_2} L dt, \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dS}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} dS = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} d\sigma = \sigma_2 - \sigma_1, \end{aligned} \tag{3.27}$$

esto indica que la acción entre dos puntos de la misma curva C está representada por la diferencia entre dos superficies de la familía σ para los tiempos t_1 y t_2.

3.4. Ecuaciones Características

Dentro del formalismo de Hamilton Jacobi se encuentra que la ecuación (3.19) depende de las primeras derivadas de S, siendo por tanto, una ecuación diferencial parcial de primer orden. Para encontrar las soluciones de este tipo de ecuaciones existen varias técnicas, entre las que se puede mencionar el método de las características (Arfken y Weber,1985), el cual reduce el estudio de una ecuación diferencial parcial de primer orden a resolver un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Para determinar dicho sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, se calcula la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (3.13) teniendo en cuenta que la función

S depende de las coordenadas y del tiempo, por tanto

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial S}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial S}{\partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial S}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\frac{dq^j}{dt} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}.$$

que se puede escribir como

$$\dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}. \tag{3.28}$$

Al derivar la ecuación de Hamilton Jacobi (3.19) con respecto a q^i y teniendo en cuenta que $p_j = \partial S/\partial q^j$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q^i}\left(\frac{\partial S(q,t)}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(H(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t)\right) &= 0, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} + \frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} &= 0, \end{aligned}$$

organizando la anterior ecuación y despejando el segundo término de la izquierda resulta

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}. \tag{3.29}$$

Ahora, derivando la función de Hamilton, ecuación (3.18), con respecto a p_i se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial p_i}(H(q,p,t)) = \frac{\partial}{\partial p_i}(p_i \eta^i - L(q, \eta, t)) = \eta^i = \dot{q}^i, \tag{3.30}$$

es decir,

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}. \tag{3.31}$$

Al introducir este resultado en (3.29) se tiene

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \dot{q}^i \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t}, \tag{3.32}$$

y comparando las ecuaciones (3.28) y (3.32) resulta

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}. \tag{3.33}$$

Las ecuaciones (3.31) y (3.33) representan un sistema de $2n$ ecuaciones ordinarias de primer orden, conocidas como las ecuaciones características de la ecuación de Hamilton

Jacobi, y coinciden con las ecuaciones de Hamilton. Finalmente, se calcula el diferencial de la función $S(q,t)$ con respecto al tiempo

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i + \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{3.34}$$

que se puede expresar en virtud de las ecuaciones (3.13), (3.19) y (3.26) como

$$\frac{dS}{dt} = p_i\frac{\partial H}{\partial p_i} - H. \tag{3.35}$$

Las ecuaciones (3.33) y (3.35) representan un sistema de $2n+1$ ecuaciones ordinarias de primer orden y definen un espacio de fase en términos de las variables q y p.

3.5. Método de Separación de Variables

El método de separación de variables permite encontrar la solución a problemas físicos que involucran ecuaciones diferenciales parciales, las cuales, se pueden separar en ecuaciones diferenciales ordinarias relacionadas por constantes arbitrarias. Cuando es posible esa separación la solución se reduce a cuadraturas. En el caso de la ecuación de Hamilton Jacobi, es posible en ciertas ocasiones separar sus variables y encontrar su solución conocida como la integral completa.

Para describir este método dentro de la formulación de Hamilton Jacobi, se considera que una de las coordenadas del sistema bajo estudio, por ejemplo la coordenada q_1 y su respectiva derivada $\partial S/\partial q_1$, están presentes dentro de la ecuación (3.19) como una combinación de la forma $\phi_1(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1})$, la cual no depende de otras coordenadas, de otras derivadas ni del tiempo. Es decir, el hamiltoniano tiene la forma (Fasano y Marmi,2006)

$$H = H\left(\phi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right), \tag{3.36}$$

de acuerdo a esto, la ecuación de Hamilton Jacobi se puede escribir como

$$H\left(\phi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right), q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{3.37}$$

Se propone una solución de la forma

$$S = S_1(q_1, \alpha_1) + S'(q_2, \ldots, q_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t), \tag{3.38}$$

donde S_1 es la función asociada a la coordenada q_1 y S' a las otras coordenadas y el tiempo. Reemplazando esta solución en la ecuación (3.37) se obtiene

$$H\left(\phi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right), q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0, \tag{3.39}$$

la cual debe constituirse en una identidad, válida en particular para cualquier valor de la coordenada q_1. Cuando q_1 varía solo se ve afectada la función ϕ_1, de este modo, la ecuación (3.39) permite determinar que ϕ_1 debe ser una constante (Goldstein,1980). En consecuencia, se originan dos ecuaciones

$$\phi_1\left(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}\right) = \alpha_1, \tag{3.40}$$

$$H\left(\alpha_1, q_2, \ldots, q_n, \frac{\partial S'}{\partial q_2}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S'}{\partial t} = 0, \tag{3.41}$$

donde α_1 representa una constante de separación arbitraría. La primera ecuación es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, a partir de la cual, se puede determinar la función S_1 por integración. La segunda ecuación corresponde a la ecuación de Hamilton Jacobi para las restantes variables.

Si se puede separar sucesivamentes estas variables junto con el tiempo, la busqueda de la función S se reduce simplemente a cuadraturas, y en consecuencia la ecuación de Hamilton Jacobi se dice que es completamente separable (Fasano y Marmi,2006).

3.5.1. Variables Cíclicas

Una coordenada cíclica es aquella variable que no aparece explícitamente en el hamiltoniano y por ende en la ecuación de Hamilton Jacobi. Si se quiere aplicar el método de separación de variables en un sistema que contiene una o más variables de esta clase, la función asociada a esta coordenada, por ejemplo la coordenada q_1, es a partir de (3.37)

$$\phi_1\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right) = \alpha_1, \tag{3.42}$$

que se reduce a

$$\frac{\partial S_1}{\partial q_1} = \alpha_1, \tag{3.43}$$

y a partir de la cual se obtiene

$$S_1(q_1) = \alpha_1 q_1. \tag{3.44}$$

De este modo, a partir de (3.44) la ecuación (3.38) se puede escribir como

$$S = \alpha_1 q_1 + S'(q_2, \ldots, q_n, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, t). \tag{3.45}$$

donde se puede identificar, teniendo en cuenta la ecuación (3.13), que la constante α_1 representa el momento asociado a la coordenada q_1 la cual como ya se había mencionado es cíclica.

3.5.2. Sistemas conservativos

Cuando las ecuaciones de transformación para las coordenadas generalizadas presentes dentro de un sistema físico no dependen explícitamente del tiempo, y además, el potencial en cuestión es independiente de las velocidades, el hamiltoniano coincide con la energía total del sistema, y en consecuencia, el sistema es conservativo.

Dentro de la ecuación de Hamilton Jacobi se puede considerar al tiempo t como otra variable separable, y de acuerdo a esto, se puede buscar una solución de la forma

$$S = S_0(t, \alpha_0) + S'(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n), \tag{3.46}$$

donde S_0 es la función que depende del tiempo y S' de las demás coordenadas. Si H no es una función explícita del tiempo, la ecuación de Hamilton Jacobi en relación con esta solución se convierte en

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S'}{\partial q^1}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n},\right) + \frac{\partial S_0}{\partial t} = 0. \tag{3.47}$$

Puesto que en este caso el primer término solo depende de las coordenadas y el segundo solo del tiempo, esta igualdad se cumple solo si los dos términos son iguales a una constante, es decir

$$\frac{\partial S_0}{\partial t} = -\alpha_0, \tag{3.48}$$

y

$$H\left(q_1, \ldots, q_n, \frac{\partial S'}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial S'}{\partial q_n},\right) = \alpha_0, \tag{3.49}$$

siendo α_0 la constante de separación. Al resolver la primera de estas dos ecuaciones se obtiene

$$S_0(t) = -\alpha_0 t. \tag{3.50}$$

Si se tiene en cuenta que la hamiltoniana es independiente del tiempo y el sistema es conservativo, la hamiltoniana en la ecuacion (3.49) representa la energía del sistema (Landau y Liftshitz,1994). En consecuencia, la constante α_0 es igual a la energía E y la ecuación (3.46) se puede expresar como

$$S = S'(q_1, \ldots, q_n, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) - Et. \tag{3.51}$$

3.5.3. Coordenadas parabólicas

Para aplicar el método de separación de variables, se considera el movimiento de una párticula descrito por el siguiente lagrangiano en coordenadas cilíndricas

$$L = T - V = \frac{m}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{z}^2\right) - U(\rho, \phi, z). \tag{3.52}$$

Ahora, se efectua una transformación a coordenadas parabólicas (ξ, η, ϕ) mediante las siguientes ecuaciones de transformación

$$z = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad \rho = \sqrt{\xi\eta}, \quad \phi = \phi, \tag{3.53}$$

donde $\xi \geq 0$, $\eta \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Se expresa cada término de la lagrangiana con relación a las nuevas variables. Derivando las ecuaciones (3.53) con respecto al tiempo se obtiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\xi}{dt} - \frac{d\eta}{dt}\right) \longrightarrow \dot{z} = \frac{1}{2}(\dot{\xi} - \dot{\eta}), \tag{3.54}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}(\xi\eta)^{-1/2}\left(\frac{d\xi}{dt}\eta + \xi\frac{d\eta}{dt}\right) \longrightarrow \dot{\rho} = \frac{1}{2\sqrt{\xi\eta}}(\dot{\xi}\eta + \xi\dot{\eta}), \tag{3.55}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \longrightarrow \dot{\phi} = \dot{\phi}. \tag{3.56}$$

Reemplazando las ecuaciones (3.54) a (3.56) en la ecuación (3.52) resulta

$$
\begin{aligned}
L &= \frac{m}{2}\left[\frac{1}{4\xi\eta}(\dot{\xi}\eta+\xi\dot{\eta})^2+(\xi\eta)\dot{\phi}^2+\frac{1}{4}(\dot{\xi}-\dot{\eta})^2\right]-U(\xi,\eta,\phi),\\
&= \frac{m}{2}\left[\frac{1}{4\xi\eta}(\dot{\xi}^2\eta^2+2\dot{\xi}\eta\xi\dot{\eta}+\xi^2\dot{\eta}^2)+\xi\eta\dot{\phi}^2+\frac{1}{4}(\dot{\xi}^2-2\dot{\xi}\dot{\eta}+\dot{\eta}^2)\right]-U(\xi,\eta,\phi),\\
&= \frac{m}{2}\left[\frac{\dot{\xi}^2}{4}\left(\frac{\eta+\xi}{\xi}\right)+\frac{\dot{\eta}^2}{4}\left(\frac{\eta+\xi}{\eta}\right)+\xi\eta\dot{\phi}^2\right]-U(\xi,\eta,\phi),\\
&= \frac{m}{8}(\eta+\xi)\left[\frac{\dot{\xi}^2}{\xi}+\frac{\dot{\eta}^2}{\eta}\right]+\frac{1}{2}m\xi\eta\dot{\phi}^2-U(\xi,\eta,\phi). \qquad (3.57)
\end{aligned}
$$

Para plantear la función Hamiltoniana se debe determinar los momentos asociados a las nuevas coordenadas y a partir de ellos las nuevas velocidades. Puesto que $p_i \equiv \partial L/\partial \dot{q}^i$ se obtiene

$$
p_\xi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}=\frac{m}{4}(\eta+\xi)\frac{\dot{\xi}}{\xi},\quad p_\eta=\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}}=\frac{m}{4}(\eta+\xi)\frac{\dot{\eta}}{\eta},\quad p_\phi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=m\xi\eta\dot{\phi}.
$$

de donde,

$$
\dot{\xi}=\frac{4p_\xi\xi}{m(\xi+\eta)},\quad \dot{\eta}=\frac{4p_\eta\eta}{m(\xi+\eta)},\quad \dot{\phi}=\frac{p_\phi}{m\xi\eta},
$$

sustituyendo estas velocidades en la ecuación correspondiente al Hamiltoniano se tiene

$$
\begin{aligned}
H &= p_\xi\dot{\xi}+p_\eta\dot{\eta}+p_\phi\dot{\phi}-L\\
&= \frac{4p_\xi^2\xi}{m(\xi+\eta)}+\frac{4p_\eta^2\eta}{m(\xi+\eta)}+\frac{p_\phi^2}{m\xi\eta}-\left[\frac{m(\xi+\eta)}{8\xi}\frac{16p_\xi^2\xi^2}{m^2(\xi+\eta)^2}\right]\\
&\quad+\left[\frac{m(\xi+\eta)}{8\eta}\frac{16p_\eta^2\eta^2}{m^2(\xi+\eta)^2}+\frac{m\xi\eta}{2\xi}\frac{p_\phi^2}{m^2\xi^2\eta^2}-U(\xi,\eta,\phi)\right],\\
&= \frac{2p_\xi^2\xi}{m(\xi+\eta)}+\frac{2p_\eta^2\eta}{m(\xi+\eta)}+\frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi,\eta,\phi),\\
&= \frac{2(p_\xi^2\xi+2p_\eta^2\eta)}{m(\xi+\eta)}+\frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi,\eta,\phi). \qquad (3.58)
\end{aligned}
$$

Que representa el hamiltoniano del sistema en términos de las variables (ξ,η,ϕ). Para desarrollar el método de separación de variables se supone que la energía potencial U, expresada en coordenadas parabólicas, sea de la forma

$$
U=\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}, \qquad (3.59)
$$

en consecuencia, la ecuación de Hamilton Jacobi para este sistema es

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2+\eta\left(\frac{\partial S}{\partial \eta}\right)^2\right]+\frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta}+U(\xi,\eta,\phi)+\frac{\partial S}{\partial t}=0. \tag{3.60}$$

A partir de (3.58) se puede observar que el sistema es conservativo y que ϕ es una coordenada cíclica. De acuerdo a esto, y como el potencial no depende de las velocidades, para resolver la ecuación (3.60) se considera una solución de la forma

$$S(\xi,\eta,\phi,t)=S_1(\xi)+S_2(\eta)+p_\phi\phi-Et, \tag{3.61}$$

sustituyendo las ecuaciones (3.59) y (3.61) en la ecuación de Hamilton Jacobi se obtiene

$$\frac{2}{m(\xi+\eta)}\left[\xi\left(\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}\right)^2+\eta\left(\frac{dS_2(\eta)}{d\eta}\right)^2\right]+\frac{p_\phi^2}{2m\xi\eta}+\frac{a(\xi)+b(\eta)}{\xi+\eta}=E, \tag{3.62}$$

multiplicando la ecuación (3.62) por el término $m(\xi+\eta)$ y agrupando términos semejantes resulta

$$2\xi\left(\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-m\xi E+\frac{p_\phi^2}{2\xi}+2\eta\left(\frac{dS_2(\eta)}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-m\eta E+\frac{p_\phi^2}{2\eta}=0. \tag{3.63}$$

Se observa que los cuatro primeros términos son función únicamente de la coordenada ξ y los restantes de la coordenada η, para que la ecuación (3.63) sea igual a cero, los terminos asociados con cada coordenada deben ser iguales a una misma constante pero de signo contrario, esto es

$$2\xi\left(\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}\right)^2+ma(\xi)-m\xi E+\frac{p_\phi^2}{2\xi}=\beta, \tag{3.64}$$

$$2\eta\left(\frac{dS_2(\eta)}{d\eta}\right)^2+mb(\eta)-m\eta E+\frac{p_\phi^2}{2\eta}=-\beta, \tag{3.65}$$

se resuelve entonces cada ecuación y se determina los valores de las funciones $S_1(\xi)$ y $S_2(\eta)$. En este caso para ξ se obtiene

$$
\begin{aligned}
2\xi\left(\frac{dS_1(\xi)}{d\xi}\right)^2 &= \beta + ma(\xi) - m\xi E + \frac{p_\phi^2}{2\xi},\\
\frac{dS_1(\xi)}{d\xi} &= \sqrt{\frac{\beta}{2\xi} + \frac{mE}{2} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}},\\
S_1(\xi) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2}\sqrt{\frac{\beta}{2\xi} + \frac{mE}{2} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}}d\xi, \qquad (3.66)
\end{aligned}
$$

de igual manera para η,

$$
\begin{aligned}
2\eta\left(\frac{dS_2(\eta)}{d\eta}\right)^2 &= -\beta - mb(\eta) + m\eta E - \frac{p_\phi^2}{2\eta},\\
\frac{dS_2(\eta)}{d\eta} &= \sqrt{-\frac{\beta}{2\eta} + \frac{mE}{2} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}},\\
S_2(\eta) &= \int_{\eta_1}^{\eta_2}\sqrt{-\frac{\beta}{2\eta} + \frac{mE}{2} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}}d\eta. \qquad (3.67)
\end{aligned}
$$

Finalmente, la solución de la ecuación de Hamilton Jacobi (3.60) para este sistema en coordenadas parabólicas de acuerdo a (3.61) es

$$
\begin{aligned}
S(\xi,\eta,\phi,t) = &\int_{\xi_1}^{\xi_2}\sqrt{\frac{\beta}{2\xi} + \frac{mE}{2} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}}d\xi\\
&+\int_{\eta_1}^{\eta_2}\sqrt{-\frac{\beta}{2\eta} + \frac{mE}{2} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}}d\eta\\
&+p_\phi\phi - Et, \qquad (3.68)
\end{aligned}
$$

donde las constantes arbitrarías en este caso corresponden a las cantidades p_ϕ, β y E. Al derivar la ecuación (3.68) con respecto a estas cantidades e igualar el resultado a otras constantes, se puede obtener las ecuaciones de movimiento. De acuerdo a esto y en virtud de (3.23) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S(\xi,\eta,\phi,t)}{\partial E} = &\frac{m}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left[\frac{\beta}{2\xi} + \frac{mE}{2} - \frac{ma(\xi)}{2\xi} - \frac{p_\phi^2}{4\xi^2}\right]^{-1/2}d\xi\\
&+\frac{m}{4}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\left[-\frac{\beta}{2\eta} + \frac{mE}{2} - \frac{mb(\eta)}{2\eta} - \frac{p_\phi^2}{4\eta^2}\right]^{-1/2}d\eta - t = \beta_1, \qquad (3.69)
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial S(\xi,\eta,\phi,t)}{\partial \beta}=\frac{1}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{1}{\xi}\left[\frac{\beta}{2\xi}+\frac{mE}{2}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_\phi^2}{4\xi^2}\right]^{-1/2}d\xi$$
$$-\frac{1}{4}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{1}{\eta}\left[-\frac{\beta}{2\eta}+\frac{mE}{2}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_\phi^2}{4\eta^2}\right]^{-1/2}d\eta=\beta_2, \tag{3.70}$$

$$\frac{\partial S(\xi,\eta,\phi,t)}{\partial p_\phi}=-\frac{1}{4}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{p_\phi}{\xi^2}\left[\frac{\beta}{2\xi}+\frac{mE}{2}-\frac{ma(\xi)}{2\xi}-\frac{p_\phi^2}{4\xi^2}\right]^{-1/2}d\xi$$
$$-\frac{1}{4}\int_{\eta_1}^{\eta_2}\frac{p_\phi}{\eta^2}\left[-\frac{\beta}{2\eta}+\frac{mE}{2}-\frac{mb(\eta)}{2\eta}-\frac{p_\phi^2}{4\eta^2}\right]^{-1/2}d\eta+\phi=\beta_3. \tag{3.71}$$

Al resolver las ecuaciones (3.69), (3.70) y (3.71) y combinar los respectivos resultados se puede determinar las características del movimiento (Desloge,1982).

3.6. Aplicaciones

Se ha mencionado anteriormente que al resolver la ecuación diferencial parcial de Hamilton Jacobi se puede determinar la forma de la función $S(q_1,\ldots,q_n,\alpha_1,\ldots,\alpha_n,t)$, y en base a ella, encontrar las ecuaciones de movimiento basado en la utilidad que presenta el manejo del método de separación de variables. De acuerdo a esto, se analiza la solución de dos sistemas regulares; un oscilador armónico en una dimensión y una partícula cargada en interacción con un campo magnético uniforme.

3.6.1. Oscilador Armónico Unidimensional

Se considera un oscilador armónico unidimensional descrito por la siguiente lagrangiana

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2-\omega^2x^2), \tag{3.72}$$

donde $\omega\equiv\sqrt{k/m}$, siendo k la constante del resorte. En este caso, la matriz Hessiana de rango 1 tiene la forma

$$W_{ij}=\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}=m, \tag{3.73}$$

por tanto, como $\det W_{ij}\neq 0$, el sistema es regular y es posible entonces escribir las velocidades en función de los momentos, es decir

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{p_x}{m}. \tag{3.74}$$

De acuerdo a esto, la Hamiltoniana para este sistema es

$$H = p_x\dot{x} - L = \frac{p_x^2}{m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \tag{3.75}$$

Como $p_x = \partial S/\partial x$ para el caso unidimensional, en virtud de (3.19) la ecuación de Hamilton Jacobi correspondiente es

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \tag{3.76}$$

de acuerdo a (3.75), la Hamiltoniana no depende explícitamente del tiempo, por tanto, se puede plantear una solución de la forma

$$S(x,t) = S_1(x) - Et, \tag{3.77}$$

en donde S_1 es función únicamente de x. En consecuencia, la ecuación de Hamilton Jacobi se reduce a

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + \frac{m\omega^2 x^2}{2} = E, \tag{3.78}$$

multiplicando por $2m$

$$\left(\frac{dS_1}{dx}\right)^2 + \frac{m^2\omega^2 x^2}{2} = 2mE, \tag{3.79}$$

y resolviendo para dS_1/dx se tiene

$$\begin{aligned} \frac{dS_1(x)}{dx} &= \sqrt{2m\left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)}, \\ S_1(x) &= \sqrt{2mE}\int\sqrt{1 - \frac{m\omega^2 x^2}{2E}}dx. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Para calcular esta integral se hace el cambio de variable $a = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega x$ en la ecuación (3.80) encontrándose una expresión en la que S_1 depende únicamente de a, esto es

$$S_1 = \frac{2E}{\omega}\int\sqrt{1-a^2}da = \frac{2E}{\omega}\left[\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1}a\right], \tag{3.81}$$

en consecuencia, la solución general en términos de las cantidades a, E y t es

$$S_1(a,E,t) = \frac{2E}{\omega}\left[\frac{a}{2}\sqrt{1-a^2} + \frac{1}{2}\cos^{-1} a\right] - Et. \tag{3.82}$$

Por otra parte, del momento asociado a la coordenada x se establece que

$$p_x = \frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S}{\partial a}\cdot\frac{da}{dx} = \sqrt{2m}\sqrt{E-a^2}, \tag{3.83}$$

como $a = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega x$ resulta

$$p_x = \sqrt{2m}\sqrt{E - \frac{m\omega^2}{2}x^2}. \tag{3.84}$$

Ecuación que permite identificar a E como la energía del sistema y que se relaciona con los valores tanto de x como de p_x. Para encontrar la ecuación de movimiento, es decir, x en función del tiempo t, se emplea la ecuación (3.23), por lo tanto

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S}{\partial E} + \frac{\partial S}{\partial a}\frac{da}{dE} = \frac{1}{\omega}\operatorname{arc}\cos(a-t) = \beta, \tag{3.85}$$

resolviendo para a resulta

$$\cos\left(\omega(\beta+t)\right) = a,$$

y teniendo en cuenta que $a = \sqrt{\frac{m}{2E}}\omega x$ se llega a

$$x(t) = \frac{1}{w}\sqrt{\frac{2E}{m}}\cos\left(\omega(\beta+t)\right). \tag{3.86}$$

Finalmente, definiendo las cantidades $t_0 = -\beta$ y $A = \frac{1}{w}\sqrt{\frac{2E}{m}}$, la ecuación (3.86) se escribe en la forma

$$x(t) = A\cos\omega(t-t_0), \tag{3.87}$$

que representa la conocida solución de un oscilador armónico unidimensional.

3.6.2. Partícula cargada en un campo magnético

Como segunda aplicación se considera una partícula de carga q, en interacción con un campo electromagnético $(\mathbf{E},\mathbf{B})$. En general, la lagrangiana para este sistema es

$$L = T - q\left(\psi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\right),$$

donde T representa la energía cinética, ψ el potencial escalar, $\mathbf{v}$ la velocidad de la particula y $\mathbf{A}$ el potencial vectorial.

Ahora, se analiza el movimiento de una partícula con carga $q = e$, que se mueve sobre el plano (x, y) y bajo la acción únicamente de un campo magnético constante en la dirección z. De acuerdo a esto, la lagrangiana de este sistema tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 - e\psi + e\mathbf{v}\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + e(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y) - e\psi, \tag{3.88}$$

Se calcula la matriz hessiana, la cual es de orden 2×2 y sus elementos vienen dados por

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}\partial \dot{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{y}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(m\dot{x} + eA_x) & \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(m\dot{y} + eA_y) \\ \frac{\partial}{\partial \dot{x}}(m\dot{x} + eA_y) & \frac{\partial}{\partial \dot{y}}(m\dot{y} + eA_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix},$$

al calcular el determinante se obtiene

$$\det(W_{ij}) = m^2 \neq 0, \tag{3.89}$$

a partir de la ecuación (3.16), este resultado indica que el sistema es regular y por tanto se puede expresar las velocidades en función de los momentos. En general, el campo magnético corresponde por definición a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{3.90}$$

como este campo es uniforme y constante, el potencial vectorial en este caso es

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}, \tag{3.91}$$

donde $\hat{\mathbf{r}}$ representa un vector unitario. Como se trata dentro del problema de un campo únicamente magnético, el campo eléctrico $\mathbf{E}$ es nulo. Teniendo en cuenta que

$$\mathbf{E} = -\nabla\psi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{3.92}$$

si $\mathbf{E} = 0$, esta ecuación se puede escribir de la siguiente manera

$$\nabla\psi = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \tag{3.93}$$

reemplazando la ecuación (3.91) y puesto que $\mathbf{B}$ es constante, se obtiene

$$\nabla\psi = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{r}}\right) = \frac{1}{2c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\times\hat{\mathbf{r}} = 0, \tag{3.94}$$

De acuerdo a esto, se puede concluir que el potencial escalar ψ es constante y dado que es siempre arbitrario, por conveniencia se escoge igual a cero.

Finalmente, como el campo $\mathbf{B}$ debe estar orientado en la dirección z se asume $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ y debido a esto el problema posee simetria azimutal. Se debe por tanto, buscar las componentes del potencial vectorial que hacen que dicha simetria se cumpla. Para ello, se adiciona a la ecuación (3.91) el gradiente de cierto escalar φ que se considera puede ser de la forma $\varphi = xyB/2$. En consecuencia

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{B}\times\hat{\mathbf{r}} + \nabla\varphi = \frac{1}{2}[-yB\hat{x} + xB\hat{y}] + \frac{1}{2}[yB\hat{x} + xB\hat{y}] = xB\hat{y},$$

esto da como resultado que las componentes del potencial vectorial $\mathbf{A}$ sean

$$A_y = xB, \quad A_x = 0, \quad A_z = 0.$$

Por lo tanto, la lagrangiana de este sistema tiene la forma

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + exB\dot{y}, \tag{3.95}$$

y los momentos respectivos, a partir de $p_i \equiv \partial L/\partial \dot{q}^i$ son

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \longrightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m} \tag{3.96}$$

$$p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} + eBx \longrightarrow \dot{y} = \frac{p_y - eBx}{m}. \tag{3.97}$$

En virtud de las ecuaciones (3.95), (3.96) y (3.97) la Hamiltoniana del sistema es

$$H = p_x\dot{x} + p_y\dot{y} - L = \frac{1}{2m}\left[p_x^2 + (p_y - eBx)^2\right]. \tag{3.98}$$

que conduce a la ecuación de Hamilton Jacobi

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} - exB\right)^2\right] + \frac{\partial S}{\partial t} = 0. \tag{3.99}$$

cuya solución se puede encontrar empleando el método de separación de variables. Puesto que el sistema es conservativo, y a partir de la Hamiltoniana (3.98) se observa que existe una coordenada cíclica que es y, se puede considerar una solución de la forma

$$S(x,y,t) = S_1(x) + \alpha_1 y - Et. \tag{3.100}$$

donde S_1 es una función solo de x, α_1 una constante y E la energía del sistema. Sustituyendo esta solución en la ecuación (3.99) se obtiene

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{dS_1(x)}{dx}\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(\alpha_1 - exB\right)^2 = E, \tag{3.101}$$

multiplicando por $2m$ y resolviendo para $dS_1(x)/dx$

$$\frac{dS_1(x)}{dx} = 2mE - \left(\alpha_1 - exB\right)^2, \tag{3.102}$$

resulta

$$S_1(x) = \int \sqrt{2mE - \left(\alpha_1 - exB\right)^2} dx. \tag{3.103}$$

La solución completa en este caso después de sustituir la ecuación (3.103) en la expresión (3.100) es

$$S(x,y,t) = \int \sqrt{2mE - \left(\alpha_1 - exB\right)^2} dx + \alpha_1 y - Et. \tag{3.104}$$

Ahora, se determina las ecuaciones que describen el movimiento de esta partícula, es decir, $x(t)$ y $y(t)$. Empleando la ecuación (3.23) se obtiene

$$\frac{\partial S}{\partial E} = m \int \frac{dx}{\sqrt{2mE - \left(\alpha_1 - exB\right)^2}} - t = \beta_1. \tag{3.105}$$

Para resolver esta integral se emplea una sustitución trigonométrica, organizando esta expresión se obtiene

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{m}{2E}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_1 - exB}{\sqrt{2mE}}\right)^2}} - t. \tag{3.106}$$

En este caso el cambio de variable correspondiente es

$$\sin\theta = \frac{\alpha_1 - exB}{\sqrt{2mE}} \tag{3.107}$$

resolviendo la integral respectiva resulta que

$$\beta_1 = -\frac{m}{eB} \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sqrt{1 - \sin^2\theta}} - t = -\frac{m}{eB}\theta - t.$$

Empleando nuevamente el cambio de variable (3.107) se determina que

$$x(t) = \frac{\alpha_1}{eB} + \frac{\sqrt{2mE}}{eB}\sin\left[\frac{eB}{m}(t+\beta_1)\right], \tag{3.108}$$

esta ecuación indica que el movimiento del sistema en la dirección x es de tipo oscilatorio, con amplitud $\sqrt{2m\alpha}/eB$, fase inicial $-\beta_1$ y posición inicial α_1/eB.

Por otro lado, se determina la ecuación de movimiento en la dirección y, es decir

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_1} = \beta_2 = y - \int \frac{(\alpha_1 - exB)\,dx}{\sqrt{2mE - (\alpha_1 - exB)^2}}. \tag{3.109}$$

realizando el cambio de variable $u = \alpha - exB$ resulta

$$\beta_2 = y - \frac{1}{eB}\sqrt{2mE - (\alpha_1 - exB)^2}. \tag{3.110}$$

y reemplazando la ecuación (3.108) en (3.110) se obtiene

$$\begin{aligned}
y - \beta_2 &= \frac{1}{eB}\left[2m\alpha - \left(\alpha_1 - e\underbrace{\left(\frac{\alpha_1}{eB} + \frac{\sqrt{2mE}}{eB}\sin\left[\frac{eB}{m}(t+\beta_1)\right]\right)}_{x(t)}B\right)^2\right]^{1/2}, \\
y &= \beta_2 + \frac{(2mE)^{1/2}}{eB}\left[\cos^2\left[\frac{eB}{m}(t+\beta_1)\right]\right]^{1/2}, \\
y(t) &= \beta_2 + \frac{\sqrt{2mE}}{eB}\cos\left[\frac{eB}{m}(t+\beta_1)\right].
\end{aligned} \tag{3.111}$$

Que representa nuevamente un movimiento oscilatorio con posición inicial β_2, amplitud $\sqrt{2mE}/eB$ y fase inicial $-\beta_1$. Las ecuaciones (3.108) y (3.111) son suficientes para determinar la dinámica del sistema.

Por último, reescribiendo la ecuación (3.110) se puede determinar la trayectoria del sistema en el espacio de configuración. Despues de algunos procesos matemáticos se obtiene

$$\left(x - \frac{\alpha_1}{eB}\right)^2 + (y - \beta_2)^2 = \frac{2mE}{e^2B^2}, \tag{3.112}$$

que constituye un circulo de radio $\sqrt{2mE}/eB$ y centro en el punto con coordenadas $\left(\frac{E}{eB}, \beta_2\right)$. Exactamente esta expresión indica que la trayectoria es una familía de circunferencias con radio distinto dado que esta cantidad depende arbitrariamente de la energía del sistema.

Capítulo 4

Sistemas singulares

Existen sistemas en la naturaleza tanto en la mecánica como en la teoría de campos clásicos que violan la condición Hessiana [**?**], es decir, sistemas para los cuales el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero, $\det(W_{ij}) = 0$. Al violarse esta condición, no es posible escribir las ecuaciones de Hamilton Jacobi a partir de la expresión $\frac{\partial S}{\partial t} + p_i\dot{q}^i - L = 0$; puesto que no existe una función hamiltoniana que sea única en todo el espacio de configuración, siendo necesario reformular los aspectos planteados en el Capítulo 1, esta vez adaptado a *sistemas Singulares*. Se trata por tanto de estudiar clásicamente sistemas lagrangianos que poseen vínculos a partir del formalismo de Hamilton Jacobi.

4.1. Lagrangianas Singulares

Sea un sistema dinámico descrito por una lagrangiana $L(q^i, \dot{q}^i, t)$ que depende de las coordenadas, las velocidades y el tiempo. Las respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad \{i\} = \{1, \ldots, n\}, \tag{4.1}$$

las cuales, se expresan expandiendo el término de la derivada temporal de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \tag{4.2}$$

escribiendo (4.2) en forma análoga a la segunda ley de Newton resulta

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\ddot{q}^j = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t}, \tag{4.3}$$

o en forma matricial,

$$W_{ij}\ddot{q}^j = G_i(q^i, \dot{q}^i, t), \tag{4.4}$$

donde

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \tag{4.5}$$

son los elementos de la matriz Hessiana W, y la ecuación

$$G_i(q^i, \dot{q}^i, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t}, \tag{4.6}$$

una función de las coordenadas, las velocidades y el tiempo. Al mencionar la transición de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana, se tiene en cuenta la necesidad de expresar las velocidades $\dot{q}^i$ en función de las coordenadas q^i y los momentos p_i, lo cual se logra si la Lagrangiana del sistema es regular, es decir, si el determinante de la matriz Hessiana (4.5) es diferente de cero

$$\det W_{ij} = \det \left| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \dot{q}^j} \right| \neq 0. \tag{4.7}$$

Si el determinante de la Hessiana es igual a cero

$$\det W_{ij} = 0, \tag{4.8}$$

la Lagrangiana que describe el sistema es singular. Esto significa desde el punto de vista de la formulación Lagrangiana, que no es posible despejar todas las aceleraciones a partir de (3.15), y de acuerdo a la formulación hamiltoniana las ecuaciones que definen los momentos canónicos no pueden ser resueltas para expresar todas las velocidades en terminos de las coordenadas, momentos y el tiempo. Si n es la dimensión del espacio de fase y m el rango de la matriz, se tiene entonces m velocidades que pueden expresarse en función de q y p, y $k = n - m$ velocidades restantes indeterminadas de la forma

$$\phi_z = 0, \quad \{z\} = \{1, \ldots, k\}, \tag{4.9}$$

denominados vínculos porque se obtienen de la definición (3.13) sin hacer uso de las ecuaciones de movimiento. Si se considera por ejemplo, una función Lagrangiana

$$L = L(x, \dot{x}, y), \tag{4.10}$$

donde y representa una coordenada ignorable, las ecuaciones de Euler-Lagrange en función de las variables x y y son respectivamente

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \dot{x}}\dot{y} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}(0) = \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \tag{4.12}$$

que se pueden expresar como

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x} = \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \dot{x}}\dot{x} - \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \dot{x}}\dot{y}, \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0. \tag{4.14}$$

De acuerdo a esto, la ecuación (4.13) requiere de dos condiciones para que pueda ser resuelta; en primer lugar, es necesario que el factor que acompaña a $\ddot{x}$ sea diferente de cero, y en segundo lugar que la cantidad $\dot{y}$ se pueda expresar en términos de las variables x y $\dot{x}$. A diferencia de (4.13), en (4.14) se observa que no existen ecuaciones dinámicas para la variable y debido a que no aparece ningún término en el cual este presente $\ddot{y}$.

La ecuación (4.14) debe ser satisfecha por el sistema, y como de hecho es una ecuación dinámica, representa en este caso un vínculo lagrangiano. Si se cumple (4.8) la matriz Hessiana es singular y en consecuencia no tiene inversa. Para resolver un sistema descrito por una Lagrangiana representada por (4.10), se debe buscar un medio para determinar una expresión que sea función de $\dot{y}$, o reescribir el sistema de tal manera que no este presente dicha cantidad.

4.2. Ecuaciones de Hamilton Jacobi para sistemas singulares

Para analizar aquellos sistemas que violan la condición Hessiana (4.7), se considera una función Lagrangiana con n grados de libertad cuya matriz Hessiana es singular y de rango m. De acuerdo a esto, existe $k = n - m$ vínculos y el sistema tiene su espacio de configuración separado en dos subespacios; el espacio de m coordenadas q^a relacionado con la parte inversible de la matriz Hessiana, y el espacio de k coordenadas q^z relacionado con la parte no inversible. Para el primer conjunto de coordenadas relacionado con q^a, se puede definir los momentos respectivos

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \tag{4.15}$$

para los cuales, es posible determinar una expresión para las velocidades en función de las coordenadas y de los momentos de la forma

$$\dot{q}^a = \dot{q}^a(q^i, p_b) \equiv \eta^a(q^i, p_b). \tag{4.16}$$

Los índices en las ecuaciones (4.15) y (4.16) estan dados por $\{a, b\} = \{1, \ldots, m\}$ y $\{i\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. El segundo conjunto de coordenadas q^z se refiere al sector nulo de la matriz Hessiana, para este, los momentos estan representados por las ecuaciones

$$p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}, \tag{4.17}$$

donde $\{z\} = \{1, 2, \ldots, k\}$. Esta ecuación se puede escribir como

$$\phi_z \equiv p_z - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z} = p_z + H_z = 0. \tag{4.18}$$

Las cantidades

$$H_z(q^i, \eta^a) \equiv -\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^z}, \tag{4.19}$$

se denominan vínculos del sistema, debido a que no es posible encontrar una expresión para las velocidades en función de las coordenadas y momentos puesto que no son invertibles. De acuerdo a esa división de coordenadas, la ecuación (3.15) toma la forma

$$p_0 + p_a\dot{q}^a + p_z\dot{q}^z - L = p_0 + p_a\eta^a + p_z\dot{q}^z - L = 0, \tag{4.20}$$

donde se ha definido $p_0 \equiv \partial S/\partial q^0 = \partial S/\partial t$. La ecuación (4.20) se convierte en una ecuación diferencial parcial de Hamilton Jacobi con un Hamiltoniano canónico definido por

$$H_0 \equiv p_a\dot{q}^a + p_z\dot{q}^z - L = p_a\eta^a + p_z\dot{q}^z - L, \tag{4.21}$$

de acuerdo a esto, la ecuación (4.20) se puede escribir de la siguiente manera

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0(q^i, \eta^a) = 0. \tag{4.22}$$

y como $\eta^a(q^i, p_b)$ es función de los momentos asociados a la parte inversible p_a, se obtiene para (4.22)

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0(q^i, p_a) = 0. \tag{4.23}$$

Las ecuaciones (4.18) y (4.23) se pueden reescribir en forma compacta de la siguiente manera:

$$\phi_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha(q^i, p_a) = 0, \tag{4.24}$$

donde $\{\alpha\} = \{0, 1, \ldots, k\}$. Al conjunto de ecuaciones (4.24) se le conoce como el *Sistema de Ecuaciones Diferenciales Parciales de Hamilton Jacobi* (Pimentel,Bertin y Pompeia,2008).

4.3. Ecuaciones Características

El sistema de ecuaciones de Hamilton Jacobi (4.24) puede ser escrito como

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(q^a, q^\alpha, p_a, p_\alpha) = 0, \tag{4.25}$$

es decir, función de las coordenadas y momentos de la parte invertible y no invertible de la matriz Hessiana. Del mismo modo que en el caso regular, esta implícito en este caso que la condición

$$p_\alpha \equiv \partial S / \partial q^\alpha, \tag{4.26}$$

donde $S = S(q^a, q^\alpha)$ deben ser satisfecha por el sistema. Al calcular el diferencial de $p_a(q^a, q^\alpha)$ se obtiene

$$dp_a = \frac{\partial}{\partial q^b}\left(\frac{\partial S}{\partial q^a}\right) dq^b + \frac{\partial}{\partial q^\alpha}\left(\frac{\partial S}{\partial q^a}\right) dq^\alpha = \frac{\partial^2 S}{\partial q^b \partial q^a} dq^b + \frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial q^a} dq^\alpha, \tag{4.27}$$

ahora, se deriva la ecuación (4.25) con respecto a q^a lo que conduce a

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a} = 0. \tag{4.28}$$

Puesto que

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\beta} \equiv \frac{\partial}{\partial p_\beta}(p_\alpha + H_\alpha(q^i, p_a)) = \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_\beta} = \delta^\alpha_\beta, \tag{4.29}$$

la ecuación (4.28) puede expresarse de la siguiente manera

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \delta^\alpha_\beta \frac{\partial p_\beta}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a} = 0,$$

despejando el segundo término

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial q^a} = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}, \tag{4.30}$$

ecuación que se emplea más adelante. Por otra parte, al derivar (4.26) con respecto a q^a

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a}\left(\frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^\alpha}, \tag{4.31}$$

comparando las ecuaciones (4.30) y (4.31)

$$\frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^\alpha} = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}, \tag{4.32}$$

reemplazando (4.32) en (4.27) que determina el diferencial para p_a, resulta

$$dp_a = \frac{\partial^2 S}{\partial q^b \partial q^a} dq^b - \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}\right) dq^\alpha. \tag{4.33}$$

Por otro lado, a partir del Hamiltoniano canónico (4.21) la ecuación (4.23) se puede escribir en la forma

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0 = p_0 + p_a \dot{q}^a + p_z \dot{q}^z - L, \tag{4.34}$$

se deriva esta ecuación con respecto a los momentos p_b

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p_b} = \frac{\partial}{\partial p_b}(p_0 + p_a \dot{q}^a + p_z \dot{q}^z - L) = \dot{q}^b + \frac{\partial p_z}{\partial p_b}\dot{q}^z, \tag{4.35}$$

y de igual manera, al derivar la ecuación (4.18) con respecto a p_b se obtiene

$$\frac{\partial \phi_z}{\partial p_b} = -\frac{\partial p_z}{\partial p_b}. \tag{4.36}$$

Reemplazando este resultado en (4.35), esta ecuación se convierte en

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p_b} = \dot{q}^b - \frac{\partial \phi_z}{\partial p_b}\dot{q}^z,$$

ahora, despejando el primer término de la derecha

$$\dot{q}^b = \frac{\partial \phi_0}{\partial p_b} + \frac{\partial \phi_z}{\partial p_b}\dot{q}^z,$$

y multiplicando por el diferencial dt resulta

$$dq^b = \frac{\partial \phi_0}{\partial p_b}dt + \frac{\partial \phi_z}{\partial p_b}dq^z = \frac{\partial \phi_0}{\partial p_b}dq^0 + \frac{\partial \phi_z}{\partial p_b}dq^z, \tag{4.37}$$

donde se ha definido $q^0 \equiv t$. La ecuación anterior se puede unificar en

$$dq^b = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}dq^\alpha, \tag{4.38}$$

donde $\{\alpha\} = \{0, z\}$. La ecuación (4.38) representa la *primera ecuación característica* del sistema. Por otra parte, retomando la ecuación (4.33) y reemplazando en ella las ecuaciones (4.31) y (4.38) se tiene

$$\begin{aligned}
dp_a &= \frac{\partial^2 S}{\partial q^b \partial q^a}\left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}dq^\alpha\right) - \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}\right)dq^\alpha, \\
&= \left(\frac{\partial p_b}{\partial q^a}\right)\left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}dq^\alpha\right) - \left(\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}\right)dq^\alpha, \\
&= \frac{\partial p_b}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}dq^\alpha - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a}dq^\alpha - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}dq^\alpha,
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Teniendo en cuenta que $\partial p_b / \partial q^a = \partial p_a / \partial q^b$, la ecuación (4.39) se convierte en

$$dp_a = \frac{\partial p_b}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}dq^\alpha - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a}dq^\alpha - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q^a}dq^\alpha = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a}dq^\alpha,$$

es decir

$$dp_a = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a}dq^\alpha. \tag{4.40}$$

Que corresponde a *la segunda ecuación característica*. Por último, tomando el diferencial de $S(q^a, q^\alpha)$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^a}dq^a + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}dq^\alpha, \tag{4.41}$$

y empleando las ecuaciones (4.38) y (4.26) se obtiene

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^a}\left[\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha\right] + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} dq^\alpha = \left[\frac{\partial S}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha}\right] dq^\alpha = \left[p_a \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} + p_\alpha\right] dq^\alpha, \quad (4.42)$$

donde el conjunto de parámetros q^α corresponde a las variables independientes del sistema debido a que incluyen las variables q^z y el tiempo, las cuales permiten parametrizar las trayectorias del sistema y sirven como parámetros de evolución. Ahora, de la ecuación de Hamilton Jacobi (4.24) se puede escribir como

$$p_\alpha = -H_\alpha(q^i, p_a), \quad (4.43)$$

derivando con respecto a p_a

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} = \frac{\partial p_\alpha}{\partial p_a} + \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} = \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a}, \quad (4.44)$$

puesto que H_a depende también de los momentos asociados a la parte inversible de la matriz Hessiana. Reemplazando (4.43) y (4.44) la ecuación (4.42) se transforma en

$$dS = \left[p_a \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a} - H_\alpha\right] dq^\alpha, \quad (4.45)$$

que representa la *tercera ecuación característica*. Las ecuaciones (4.38), (4.40) y (4.45) definen un espacio de fase reducido de dimensión $2m$, cuyas coordenadas son las variables dependientes (q^a, p_a) y donde q^α corresponde al conjunto de variables independientes del sistema.

La solución de las ecuaciónes características representa un conjunto de curvas en este espacio de fase reducido que estan parametrizadas por las variables q^α, de este modo, las trayectorías dinámicas se ven restringidas al espacio de las variables q^a. Ahora, si se refiere al espacio de configuracion, la solución de este sistema consiste en trayectorías cuyas ecuaciones paramétricas tienen la forma $q^a = q^a(q^z, t)$, donde q^z representa un conjunto de parámetros con las mismas condiciones que el tiempo.

4.4. Condiciones de Integrabilidad

4.4.1. Evolución de un observable

La evolución de un observable físico está dada por un conjunto de parámetros q^α denominados variables independientes del sistema. Para un observable de la forma $F(q^a, p_a, q^\alpha)$, donde (q^a, p_a) son las variables dependientes de las variables independientes, la evolución esta determinada por

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial F}{\partial p_a} dp_a + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} dq^\alpha, \tag{4.46}$$

que en virtud de las ecuaciones (4.38) y (4.40) se puede expresar como

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} dq^\alpha + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} dq^\alpha, \\ &= \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \left(\frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} \right) dq^\alpha. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Puesto que $F(q^a, p_a, q^\alpha)$, y en virtud de (4.24), al derivar estas cantidades con respecto a p_α y q^α resulta

$$\frac{\partial F}{\partial p_\alpha} = 0, \;\; \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\alpha} = 1, \;\; \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^\alpha} = 0, \tag{4.48}$$

reemplazando en (4.47) y organizando

$$\begin{aligned} dF &= \left[\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} \right] dq^\alpha, \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} \right] dq^\alpha, \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^\alpha} \right] dq^\alpha, \end{aligned} \tag{4.49}$$

Ahora, definiendo los siguientes Paréntesis de Poisson

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial G}{\partial p_a} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha}\frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial G}{\partial q^a} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}\frac{\partial g}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q^{\alpha'}}\frac{\partial G}{\partial p_{\alpha'}} - \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha'}}\frac{\partial G}{\partial q^\alpha}, \tag{4.50}$$

los cuales se expresan en términos de todas las variables $\{\alpha'\} = \{0, 1, \ldots, m\}$ del sistema, la ecuación (4.49) con $G = \phi_\alpha$ representa el diferencial

$$dF = \{F, \phi_\alpha\} dq^\alpha, \tag{4.51}$$

que permite determinar la evolución de un observable y cuyo paréntesis $\{F, \phi_\alpha\}$ satisface todas las propiedades de los paréntesis de Poisson. En este contexto, el espacio de fase construido a partir del conjunto de variables (q^a, p_a) se conoce como espacio de fase reducido de dimensión m.

De la ecuación (4.45) se puede identificar que $S(q^a, q^\alpha)$ representa una acción en relación a un sistema con varias variables independientes, y a partir de ella, al hacer las respectivas variaciones con respecto a las variables (q^a, p_a) se encuentra las ecuaciones características (4.38) y (4.40).

4.4.2. Algebra de Lie

La estructura definida por(Pimentel,Bertin y Pompeia,2008;José y Saletan,1998)

$$[X_\alpha, X_\beta](F) \equiv X_\alpha\{X_\beta(F)\} - X_\beta\{X_\alpha(F)\} \tag{4.52}$$

donde X_α constituye un conjunto completo de vectores linealmente independientes, recibe el nombre de Corchetes de Lie. La condición de integrabilidad de Frobenius establece que los corchetes de Lie entre dos miembros de una distribución Γ que representa un espacio tangente a la familia de superficies $S = \sigma$, es también un miembro de la distribución(Pimentel,Bertin y Pompeia,2008). Si X_α representa un conjunto completo de vectores linealmente independientes se cumple la condición

$$[X_\alpha, X_\beta](F) = C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma(F), \tag{4.53}$$

donde los vectores base X_α forman un algebra de Lie (Pimentel,Bertin y Pompeia,2008). Para el caso de sistemas con Lagrangiana singular, el sistema de ecuaciones de Hamilton Jacobi (4.24) tiene asociadas las ecuaciones características

$$dq^\alpha = \{q^a, \phi_\alpha\} dq^\alpha, \tag{4.54}$$

donde las componentes de los vectores base corresponden a

$$\chi^a_\alpha = \{q^a, \phi_\alpha\}. \tag{4.55}$$

De acuerdo a esto, se puede establecer para una función $F(q, \dot{q})$ que

$$X_\alpha(F) = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} + \chi^a_\alpha \frac{\partial F}{\partial q^a} = \chi^a_\alpha \frac{\partial F}{\partial q^a} = \{q^a, \phi_\alpha\} \frac{\partial F}{\partial q^a} = \{F, \phi_\alpha\}, \tag{4.56}$$

además, empleando (4.56) en (4.52) se obtiene

$$[X_\alpha, X_\beta](F) = X_\alpha(\{F, \phi_\beta\}) - X_\beta(\{F, \phi_\alpha\}) = \{\{F, \phi_\beta\}, \phi_\alpha\} - \{\{F, \phi_\alpha\}, \phi_\beta\}. \tag{4.57}$$

De acuerdo a la identidad de Jacobi,

$$\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}+\{\{f,g\},h\}=0,$$

el primer término de (4.57) se puede escribir de la siguiente manera

$$\{\{F,\phi_\beta\},\phi_\alpha\}+\{\{\phi_\beta,\phi_\alpha\},F\}+\{\{\phi_\alpha,F\},\phi_\beta\}=0,$$

despejando el primer término se obtiene la ecuación

$$\{\{F,\phi_\beta\},\phi_\alpha\}=-\{\{\phi_\beta,\phi_\alpha\},F\}-\{\{\phi_\alpha,F\},\phi_\beta\}. \tag{4.58}$$

que sustituida en (4.57) conduce a

$$\begin{aligned}
[X_\alpha,X_\beta](F) &= -\{\{\phi_\beta,\phi_\alpha\},F\}-\{\{\phi_\alpha,F\},\phi_\beta\}-\{\{F,\phi_\alpha\},\phi_\beta\},\\
&= -\{\{\phi_\beta,\phi_\alpha\},F\}+\{\{F,\phi_\alpha\},\phi_\beta\}-\{\{F,\phi_\alpha\},\phi_\beta\},\\
&= -\{\{\phi_\beta,\phi_\alpha\},F\}
\end{aligned}$$

donde se ha empleado la propiedad de antisimetría de los paréntesis de Poisson, por lo tanto, se tiene la relación

$$[X_\alpha,X_\beta](F)=\{\{\phi_\alpha,\phi_\beta\},F\}. \tag{4.59}$$

En consecuencia, la condición (4.53) se refleja sobre el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi el cual debe formar un sistema en involución, de la siguiente manera

$$\{\phi_\alpha,\phi_\beta\}=C^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma, \tag{4.60}$$

esto significa que los vínculos forman un sistema involutivo y que obedecen el algebra de Lie (José y Saletan,1998), en este caso relacionados con los paréntesis de Poisson. En consecuencia, todo sistema es integrable si es posible encontrar un conjunto de funciones dinámicas que formen un conjunto en involución (Pompeia,Bertin,Pimentel y Valcarcel,2008).

Sin embargo, los sistemas físicos generalmente no respetan la condición (4.60) únicamente con los vínculos que se obtienen a partir de la lagrangiana. En este caso, si un sistema de ecuaciones diferenciales parciales no satisface dicha condición, se puede tratar de forzar la integrabilidad del sistema; ya sea asumiendo la existencia de un subespacio donde la integrabilidad se cumpla o que las variables no sean realmente independientes entre si.

Las condiciones de integrabilidad que se impongan sobre el sistema pueden dar origen a nuevos vínculos que completen el sistema de ecuaciones o revelar dependencia entre las variables independientes q^{α}. Entonces, es posible reformular las condiciones de integrabilidad de manera que multiplicando por dq^{β} la ecuación (4.60) resulta

$$\{\phi_{\alpha}, \phi_{\beta}\}dq^{\beta} = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\phi_{\gamma}dq^{\beta}, \tag{4.61}$$

ecuación que es equivalente al diferencial de $d\phi_{\alpha}$. Puesto que $\phi_{\alpha} = 0$, se tiene

$$d\phi_{\alpha} = \{\phi_{\alpha}, \phi_{\beta}\}dq^{\beta} = C^{\gamma}_{\alpha\beta}\phi_{\gamma}dq^{\beta} = 0, \tag{4.62}$$

las cuales también se toman como condiciones sobre el sistema. Esta condición exige que los vínculos se mantengan inalterados durante la trayectoría dinámica y garantiza la existencia de soluciones completas para el sistema de ecuaciones de Hamilton Jacobi, así como la integrabilidad de las ecuaciones características.

Finalmente, las condiciones de integrabilidad garantizan un medio para encontrar un conjunto involutivo de integrales de movimiento, además, la solución de un problema depende de la existencia o no de un conjunto o subconjunto de vínculos en involución.

4.5. Aplicaciones

En los siguientes ejemplos se encuentra una aplicación de los conceptos mencionados anteriormente relacionados con el formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas singulares. A partir del análisis de las condiciones de integrabilidad, se estudia entonces el movimiento unidimensional de una partícula sujeta a un potencial que depende de la posición y el movimiento de una partícula libre que se mueve sobre la superficie de una esfera.

4.5.1. Ejemplo Artificial

Se considera el movimiento de una partícula (Pimentel,Bertin y Pompeia,2008). en una dimensión bajo la acción de un potencial que depende únicamente de la posición x. Se redefine esta variable haciendo $x \to x_1 + x_2$, en consecuencia la función lagrangiana para este sistema corresponde a

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 - V(x_1 + x_2). \tag{4.63}$$

En este caso, la matriz Hessiana tiene como elementos W_{ij} los terminos

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_1 \partial \dot{x}_2} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2 \partial \dot{x}_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ m & m \end{pmatrix}, \tag{4.64}$$

cuyo determinante es

$$\det(W_{ij}) = m^2 - m^2 = 0, \tag{4.65}$$

indicando que el sistema en cuestión es *singular*. Los momentos conjugados para este sistema, de acuerdo a $p_i \equiv \partial L / \partial \dot{q}^i$ son

$$p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2), \tag{4.66}$$

$$p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \tag{4.67}$$

igualando (4.66) y (4.67) resulta

$$p_1 = p_2, \quad \longrightarrow \quad p_1 - p_2 = 0, \tag{4.68}$$

que representa un vínculo asociado a este sistema. Se plantea entonces las ecuaciones de Hamilton Jacobi (4.24) de acuerdo con (4.18) y (4.23)

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0(x_1, x_2, p_1) = 0, \tag{4.69}$$

$$\phi_1 \equiv p_1 - p_2 = 0. \tag{4.70}$$

donde la Hamiltoniana canónica H_0 en virtud de (4.68) es

$$\begin{aligned} H_0 &= p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - L, \\ &= p_1\dot{x}_1 + p_2\dot{x}_2 - \frac{m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2}{2} + V(x_1 + x_2), \\ &= p_1(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) - \frac{p_1^2}{2m} + V(x_1 + x_2), \\ &= \frac{p_1^2}{2m} + V(x_1 + x_2). \end{aligned} \tag{4.71}$$

Se estudia la evolución del sistema a partir del diferencial (4.51), donde el parámetro de evolución para el vínculo ϕ_0 es el tiempo y para el vínculo ϕ_1 se puede escoger a partir de las variables presentes en la Hamiltoniana , en este caso puede ser x_2 debido a que la función (4.71) se expresa en función de p_1, en consecuencia

$$dF = \{F, \phi_\alpha\} dq^\alpha = \{F, \phi_0\} dt + \{F, \phi_1\} dx_2, \tag{4.72}$$

se analiza entonces las condiciones de integrabilidad, asumiendo que las coordenadas que definen este sistema satisfacen los paréntesis de Poisson fundamentales

$$\{x_i, x_j\} = \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta^i_j, \quad i, j = 1, 2. \tag{4.73}$$

Teniendo en cuenta esto, se obtiene para el vínculo ϕ_1

$$d\phi_1 = \{\phi_1, \phi_0\} dt + \{\phi_1, \phi_1\} dx_2 = \{\phi_1, \phi_0\} dt, \tag{4.74}$$

y a partir de (4.69), (4.70) y (4.71) resulta

$$\begin{aligned}
\{\phi_0, \phi_1\} &= \{p_0 + \frac{p_1^2}{2m} + V, p_1 - p_2\}, \\
&= \{V, p_1\} - \{V, p_2\}, \\
&= \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial p_1}{\partial p_1} - \frac{\partial V}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial p_1}{\partial p_1} + \frac{\partial V}{\partial p_2}\frac{\partial p_1}{\partial x_2}, \\
&= \frac{\partial V}{\partial x_1} - \frac{\partial V}{\partial x_2}, \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.75}$$

es decir, $d\phi_1 = 0$. Esto significa que los vínculos del sistema se encuentran en involución satisfaciendo las condiciones de integrabilidad. Puesto que el sistema es integrable se deducen las ecuaciones de movimiento de acuerdo a (4.72)

$$\begin{aligned}
dx_1 &= \{x_1, \phi_0\} dt + \{x_1, \phi_1\} dx_2. \\
&= \{x_1, p_0 + \frac{p_1^2}{2m} + V\} dt + \{x_1, p_1 - p_2\} dx_2, \\
&= \{x_1, \frac{p_1^2}{2m}\} dt + \{x_1, p_1\} dx_2, \\
&= \frac{p_1}{m} dt + dx_2,
\end{aligned} \tag{4.76}$$

dividiendo entre dt,

$$v_1 = \frac{p_1}{m} + v_2, \tag{4.77}$$

que representa una ecuación canónica donde la cantidad v_2 es arbitraria. En cuanto al momento p_1

$$\begin{aligned} dp_1 &= \{p_1, \phi_0\}dt + \{p_1, \phi_1\}dx_2, \\ &= \{p_1, p_0 + \frac{p_1^2}{2m} + V\}dt + \{p_1, p_1 - p_2\}dx_2, \\ &= \{p_1, \frac{p_1^2}{2m}\}dt + \{p_1, p_1\}dx_2, \\ &= \{p_1, V\}dt, \\ &= \left[\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial p_1} - \frac{\partial p_1}{\partial p_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\right] dt, \\ &= -\frac{\partial V}{\partial x_1}dt, \end{aligned} \tag{4.78}$$

que puede escribirse como

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \tag{4.79}$$

y representa la fuerza asociada al sistema derivable de un potencial que depende de la posición. La ecuación (4.79) especifica la dinámica del sistema y no depende de la velocidad v_2. Puesto que la elección del parámetro x_2 es arbitraría, este no interfiere en la dinámica del sistema.

4.5.2. Partícula libre sobre una esfera

Por otra parte, se considera el movimiento de una partícula sobre una superficie de una esfera y cuya ecuación esta definida por

$$\psi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0, \tag{4.80}$$

donde (x, y, z) representan las coordenadas de la partícula en el espacio $\mathbf{R}^3$, y r el radio de la esfera. En este caso, solo existe energía cinética puesto que no hay interacción con un potencial, además, cuando el sistema posee ligaduras la Lagrangiana en general es de la forma:

$$L = T - V + u^z\phi_z, \tag{4.81}$$

donde u^z son los multiplicadores de Lagrange y ϕ_z los vínculos del sistema (Sundermeyer,1982). Por lo tanto, la Lagrangiana para este sistema es

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + u\psi(x, y, z) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + u\psi(\mathbf{x}), \tag{4.82}$$

siendo $\mathbf{v}$ es la velocidad de la partícula y u el multiplicador de Lagrange que permite incorporar el vínculo $\psi = 0$ a la dinámica del sistema. De este modo, el sistema queda descrito por el conjunto de variables x, y, z, u. Para el paso de la formulación Lagrangiana a la Hamiltoniana se encuentran los momentos respectivos a partir de

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}, \tag{4.83}$$

de donde se deduce que existen tres velocidades representadas por

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}}, \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{4.84}$$

y un vínculo

$$p_u = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = 0. \tag{4.85}$$

La matriz Hessiana asociada a este sistema es

$$W_{ij} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.86}$$

puesto que $\det W_{ij} = 0$, la Lagrangiana (4.82) describe un sistema singular. La función Hamiltoniana canónica correspondiente en virtud de (4.20), (4.82) y (4.84) es

$$H_0 = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} + p_u \dot{u} - L = \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left[\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 + u\psi(\mathbf{x})\right] = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi(\mathbf{x}), \tag{4.87}$$

de acuerdo a (4.18) y (4.23) se tiene las ecuaciones

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = 0, \tag{4.88}$$

$$\phi_1 \equiv p_u = 0. \tag{4.89}$$

Ahora, se analiza la integrabilidad del conjunto de ecuaciones (4.88) y (4.89) teniendo en cuenta que las variables del espacio de fase del sistema satisfacen los paréntesis de Poisson fundamentales

$$\{\mathbf{x},\mathbf{p}\} = \mathbf{I}, \quad \{\mathbf{x},\mathbf{x}\} = \{\mathbf{p},\mathbf{p}\} = 0, \tag{4.90}$$

$$\{u, p_u\} = 1, \quad \{u, u\} = \{p_u, p_u\} = 0, \tag{4.91}$$

y que la evolución de cualquier función dinámica $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, u, p_u)$ se puede calcular a partir de (4.51). Tomando para este sistema como variables dependientes la posición $\mathbf{x}$ y como variables independientes los parametros u y t el diferencial correspondiente es

$$dF = \{F, \phi_\alpha\}dq^\alpha = \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_1\}du. \tag{4.92}$$

empleando (4.92), en relación a la ecuación ϕ_1 y en virtud de (4.88) y (4.89) resulta

$$d\phi_1 = \{\phi_1, \phi_0\}dt + \{\phi_1, \phi_1\}du = \psi dt = 0. \tag{4.93}$$

Para que el sistema sea integrable se debe cumplir que

$$\psi = 0, \tag{4.94}$$

lo que da origen a otro vínculo sobre el sistema representado por ϕ_2 y que corresponde a la ecuación de la esfera, por lo tanto

$$\phi_2 \equiv \psi = 0. \tag{4.95}$$

Este vínculo debe también satisfacer la condición de integrabilidad, en consecuencia se calcula su diferencial a partir de (4.88), (4.89) y (4.95) obteniendo

$$d\phi_2 = \{\phi_2, \phi_0\}dt + \{\phi_2, \phi_1\}du = \left[-\frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\right]dt + (0)du = -\frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\,dt = 0, \tag{4.96}$$

que muestra que el sistema aún no es integrable puesto que se debe satisfacer

$$\frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = 0. \tag{4.97}$$

Se tiene por tanto, un nuevo vínculo que se identifica por ϕ_3

$$\phi_3 \equiv \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p} = 0. \tag{4.98}$$

que indica que el momento es tangente a la superficie de la esfera. Se verifica nuevamente la condición de integrabilidad para ϕ_3 buscando que el sistema sea integrable

$$d\phi_3 = \{\phi_3, \phi_0\}dt + \{\phi_3, \phi_1\}du = 0, \tag{4.99}$$

empleando las ecuaciones (4.88), (4.89) y (4.98) resulta

$$d\phi_3 = \left[\frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2)\right] dt + (0)du = \frac{2}{m^2}\left[\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2\right] dt = 0, \tag{4.100}$$

que satisface la condición de integrabilidad si

$$\frac{2}{m^2}\left[\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2\right] = 0, \tag{4.101}$$

de este modo, aparece otro vínculo que se representa por ϕ_4. En consecuencia

$$\phi_4 \equiv \frac{2}{m^2}[\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2] = 0. \tag{4.102}$$

Nuevamente se analiza la integrabilidad del sistema calculando el diferencial del vínculo ϕ_4, por tanto

$$d\phi_4 = \{\phi_4, \phi_0\}dt + \{\phi_4, \phi_1\}du = 0, \tag{4.103}$$

de acuerdo a (4.88), (4.89) y (4.102) se obtiene

$$d\phi_4 = \frac{16u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\, dt + \frac{4}{m}\mathbf{x}^2\, du = 0. \tag{4.104}$$

Puesto que los paréntesis de Poisson $\{\phi_4, \phi_0\}$ y $\{\phi_4, \phi_1\}$ son en este caso diferentes de cero, al verificar la condición de integrabilidad de ϕ_4 no se obtiene otro vínculo sobre el sistema sino una ecuación diferencial que relaciona las variables independientes t y u.

El análisis de las condiciones de integrabilidad muestra que para que el sistema sea integrable es necesario la imposición de nuevos vínculos los cuales forman un conjunto completo de ecuaciones diferenciales. Para considerar estos vínculos dentro de la dinámica y por tanto para que el sistema sea integrable, se debe construir un diferencial que contenga esos vínculos. Sin embargo, al no contar con suficientes variables independientes asociadas a ellos, se debe ampliar el espacio de parámetros con nuevas variables independientes arbitrarias.

Como se tienen los parámetros t y u asociados a los vínculos ϕ_0 y ϕ_1 respectivamente y no existen lo suficientes parámetros dentro de la teoría que se relacionen con los demás vínculos, es necesario adicionar nuevos parámetros, que corresponden a ω, τ y θ. De este modo, se tiene cada vínculo con su respectiva variable independiente (Pimentel,Bertin y Pompeia,2008). De acuerdo a esto, se describe la dinámica del sistema mediante una redefinición del diferencial (4.92)

$$dF = \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_1\}du + \{F, \phi_2\}d\omega + \{F, \phi_3\}d\tau + \{F, \phi_4\}d\theta, \tag{4.105}$$

y se verifica nuevamente las condiciones de integrabilidad para los vínculos ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 y ϕ_4 de manera que el sistema sea ahora integrable. Se espera que todas las variables independientes se expresen en función del tiempo. De este modo para ϕ_1 se obtiene

$$d\phi_1 = \{\phi_1, \phi_0\}dt + \{\phi_1, \phi_2\}d\omega + \{\phi_1, \phi_3\}d\tau + \{\phi_1, \phi_4\}d\theta = \psi dt - \frac{4\mathbf{x}^2}{m}d\theta = 0, \tag{4.106}$$

de donde despejando $d\theta$, y teniendo en cuenta (4.101) resulta

$$d\theta = \frac{m\psi}{4\mathbf{x}^2}dt = \frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt, \tag{4.107}$$

ecuación que muestra la dependencia de la variable θ con el tiempo. Se verifica ahora la integrabilidad del vínculo ϕ_2, entonces

$$\begin{aligned} d\phi_2 &= \{\phi_2, \phi_0\}dt + \{\phi_2, \phi_1\}du + \{\phi_2, \phi_3\}d\tau + \{\phi_2, \phi_4\}d\theta = 0, \\ &= \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}dt + \frac{4}{m}\mathbf{x}^2\,d\tau + \frac{8}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\,d\theta = 0, \end{aligned} \tag{4.108}$$

empleando (4.107) y al despejar $d\tau$ se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\,dt + \frac{4}{m}\mathbf{x}^2 d\tau + \frac{8}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\left[\frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt\right] &= 0, \\ -\frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt &= \frac{4\mathbf{x}^2}{m}\,d\tau, \end{aligned} \tag{4.109}$$

$$d\tau = -\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt, \tag{4.110}$$

que relaciona τ con el tiempo. Ahora se analiza la integrabilidad con relación a ϕ_3, entonces

$$\begin{aligned} d\phi_3 &= \{\phi_3, \phi_0\}dt + \{\phi_3, \phi_1\}du + \{\phi_3, \phi_2\}d\omega + \{\phi_3, \phi_4\}d\theta = 0, \\ &= \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2mu\mathbf{x}^2)dt - \frac{4}{m}\mathbf{x}^2 d\omega + \left(\frac{8}{m^3}\mathbf{p} - \frac{16u}{m^2}\mathbf{x}^2\right)d\theta = 0, \end{aligned} \tag{4.111}$$

reemplazando (4.107),

$$\frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2+2mu\mathbf{x}^2)dt-\frac{4}{m}\mathbf{x}^2d\omega+\left(\frac{8}{m^3}\mathbf{p}-\frac{16u}{m^2}\mathbf{x}^2\right)\left[\frac{m}{4}\left(1-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt\right]=0, \quad (4.112)$$

y resolviendo para $d\omega$ resulta

$$d\omega=\left[\frac{\mathbf{p}^2}{m\mathbf{x}^2}\left(2-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)+u\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right]dt. \quad (4.113)$$

Finalmente, se prueba la integrabilidad del último vínculo ϕ_4, es decir

$$\begin{aligned} d\phi_4 &= \{\phi_4,\phi_0\}dt+\{\phi_4,\phi_1\}du+\{\phi_4,\phi_2\}d\omega+\{\phi_4,\phi_3\}d\tau=0,\\ &= \frac{16u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}dt+\frac{4\mathbf{x}^2}{m}du-\frac{8}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}d\omega+\left[-\frac{8\mathbf{x}^2}{m^3}+\frac{16u\mathbf{x}^2}{m^2}\right]d\tau=0, \quad (4.114)\end{aligned}$$

y en virtud de las ecuaciones (4.110) y (4.113),

$$\begin{aligned}\frac{16u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}dt+\frac{4\mathbf{x}^2}{m}du-\frac{8}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\left[\frac{\mathbf{p}^2}{m\mathbf{x}^2}\left(2-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)+u\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right]dt+\\ +\left[-\frac{8\mathbf{x}^2}{m^3}+\frac{16u\mathbf{x}^2}{m^2}\right]\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)\right]dt=0, \quad (4.115)\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\frac{4\mathbf{x}^2}{m}du=-\frac{16u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}+\frac{8}{m^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{x}^2}\left(2-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)+\frac{8u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}+\\ +\frac{8u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\left(2-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)-\frac{8\mathbf{p}^2}{m^3\mathbf{x}^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\left(2-\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right),\end{aligned}$$

puesto que $r^2=\mathbf{x}^2$ y organizando terminos resulta

$$\frac{4\mathbf{x}^2}{m}du=-\frac{16u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}+\frac{8}{m^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{x}^2}+\frac{16u}{m^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}-\frac{8}{m^3}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\frac{\mathbf{p}^2}{\mathbf{x}^2}, \quad (4.116)$$

el lado derecho de esta ecuación se anula, por lo tanto

$$du=0. \quad (4.117)$$

indicando que u es una coordenada ignorable o degenerada. Cada condición despues de ser verificada, resulta en una relación entre las variables independientes y el parámetro t, indicando que el problema de integrabilidad no radica en la integridad de las ecuaciones diferenciales, sino en asumir la indepedencia de los parámetros(Pimentel,Bertin y Pompeia,2008).

De acuerdo a esto, el diferencial que permite determinar la evolución de un observable y verificar las condiciones de integrabilidad para este sistema corresponde a

$$dF = \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_1\}du + \{F, \phi_2\}d\omega + \{F, \phi_3\}d\tau + \{F, \phi_4\}d\theta,$$

y en virtud de las ecuaciones (4.107), (4.110), (4.113) y (4.117) se tiene

$$\begin{aligned} dF = {} & \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_2\}\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) + u\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right]dt \\ & - \{F, \phi_3\}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt + \{F, \phi_4\}\frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt. \end{aligned} \tag{4.118}$$

Se determina ahora las ecuaciones de movimiento para este sistema tomando las variables $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$. A partir de (4.118) se tiene para $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} = {} & \{\mathbf{x}, \phi_0\}dt + \{\mathbf{x}, \phi_2\}\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) + u\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right]dt \\ & - \{\mathbf{x}, \phi_3\}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt + \{\mathbf{x}, \phi_4\}\frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)dt, \end{aligned} \tag{4.119}$$

de donde los paréntesis de Poisson respectivos corresponden a

$$\{\mathbf{x}, \phi_0\} = \{\mathbf{x}, p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi\} = \frac{1}{2m}\{\mathbf{x}, \mathbf{p}^2\} = \frac{1}{m}\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\}\cdot\mathbf{p} = \frac{1}{m}\mathbf{I}\cdot\mathbf{p} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{4.120}$$

$$\{\mathbf{x}, \phi_2\} = \{\mathbf{x}, \psi\} = 0, \tag{4.121}$$

$$\{\mathbf{x}, \phi_3\} = \{\mathbf{x}, \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\} = \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\} = \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{I} = \frac{2}{m}\mathbf{x}, \tag{4.122}$$

$$\{\mathbf{x}, \phi_4\} = \{\mathbf{x}, \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2mu\mathbf{x}^2)\} = \frac{2}{m^2}\{\mathbf{x}, \mathbf{p}^2\} = \frac{4}{m^2}\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\}\cdot\mathbf{p} = \frac{4}{m^2}\mathbf{I}\cdot\mathbf{p} = \frac{4\mathbf{p}}{m^2}. \tag{4.123}$$

Reemplazando las ecuaciones (4.120) a (4.123) en (4.119) resulta

$$\begin{aligned}
d\mathbf{x} &= \left[\frac{\mathbf{p}}{m} - \frac{2\mathbf{x}}{m}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) + \frac{4\mathbf{p}}{m^2}\frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)\right] dt, \\
&= \left[\frac{\mathbf{p}}{m}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) + \frac{\mathbf{x}}{m}\frac{1}{\mathbf{x}^2}\left(\frac{r^2}{\mathbf{x}^2} - 2\right)\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\right] dt,
\end{aligned} \tag{4.124}$$

de acuerdo a las ecuaciones (4.94) y (4.97), que son condiciones sobre el sistema, el diferencial para $\mathbf{x}$ es

$$d\mathbf{x} = \frac{\mathbf{p}}{m}dt, \quad \longrightarrow \quad \dot{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{p}}{m}, \tag{4.125}$$

que representa la ecuación de movimiento (4.87) mencionada al comienzo del problema. Por otra parte, se calcula el diferencial para $\mathbf{p}$ empleando (4.118) obteniendo

$$\begin{aligned}
d\mathbf{p} = \{\mathbf{p}, \phi_0\}dt + \{\mathbf{p}, \phi_2\}\left[\frac{\mathbf{p}^2}{2m\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) + u\frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right] dt \\
- \{\mathbf{p}, \phi_3\}\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) dt + \{\mathbf{p}, \phi_4\}\frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right) dt,
\end{aligned} \tag{4.126}$$

los paréntesis de Poisson del diferencial son

$$\{\mathbf{p}, \phi_0\} = \{\mathbf{p}, p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi\} = -u\{\mathbf{p}, \psi\} = -u\nabla\psi = -2u\mathbf{x}, \tag{4.127}$$

$$\{\mathbf{p}, \phi_2\} = \{\mathbf{p}, \psi\} = -\nabla\psi = -2\mathbf{x}, \tag{4.128}$$

$$\{\mathbf{p}, \phi_3\} = \{\mathbf{p}, \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\} = \frac{2}{m}\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{p} = -\frac{2}{m}\mathbf{I}\cdot\mathbf{p} = -\frac{2\mathbf{p}}{m}, \tag{4.129}$$

$$\{\mathbf{p}, \phi_4\} = \{\mathbf{p}, \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2mu\mathbf{x}^2)\} = \frac{4u}{m}\{\mathbf{p}, \mathbf{x}^2\} = \frac{8u}{m}\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{x} = -\frac{8u\mathbf{x}}{m}. \tag{4.130}$$

Reemplazando (4.127) a (4.130) en (4.126) se obtiene

$$\begin{aligned}
d\mathbf{p} = -2u\mathbf{x}dt - 2\mathbf{x}\left[\frac{\mathbf{p}^2}{m\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)\right] dt \\
+ \frac{2\mathbf{p}}{m}\left[\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}}{2\mathbf{x}^2}\left(2 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)\right] dt - \frac{8u\mathbf{x}}{m}\left[\frac{m}{4}\left(1 - \frac{r^2}{\mathbf{x}^2}\right)\right] dt,
\end{aligned} \tag{4.131}$$

puesto que $\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}=0$ y $\mathbf{x}^2=r^2$, el diferencial para $\mathbf{p}$ es

$$d\mathbf{p}=-\frac{\mathbf{p}^2}{m\mathbf{x}^2}\mathbf{x}dt=-\frac{\mathbf{p}^2}{m}\frac{\mathbf{x}}{r^2}dt, \quad\longrightarrow\quad \dot{\mathbf{p}}=-\frac{\mathbf{p}^2}{mr^2}\mathbf{x}. \tag{4.132}$$

Finalmente, al derivar la ecuación (4.125) con respecto al tiempo y emplear (4.132) se obtiene

$$\frac{d\dot{\mathbf{x}}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)=\frac{\dot{\mathbf{p}}}{m}, \tag{4.133}$$

que se puede escribir como

$$\ddot{\mathbf{x}}=-\frac{\mathbf{p}^2}{m^2r^2}\mathbf{x}=-\left(\frac{\mathbf{p}}{m}\right)^2\frac{\mathbf{x}}{r^2}=-\frac{\mathbf{v}^2}{r}\hat{\mathbf{x}}. \tag{4.134}$$

donde s $\mathbf{v}=\mathbf{p}/m$ es la velocidad de la partícula y $\hat{\mathbf{x}}=\mathbf{x}/r$ es un vector unitario en dirección radial. Este resultado indica que la aceleración del sistema corresponde a la aceleración centrípeta y cuya dirección es hacia el centro del a esfera.

Las ecuaciones que conforman los vínculos tienen varios aspectos relacionados con el movimiento del sistema; la ecuación (4.42) dice que el momento conjugado con respecto al parámetro u es igual a cero, debido a que representa una coordenada degenerada, mientras que la ecuación (4.95) representa la ecuación de la superficie de la esfera incluida dentro de la Lagrangiana como un vínculo.

Por otro lado, la ecuación (4.98) indica que el vector velocidad es siempre tangente a la superficie de la esfera, debido a que $\nabla\psi$ representa un campo vectorial ortogonal en cada punto de la superficie y la ecuación (4.102) permite determinar el parámetro u siendo igual en este caso a $-\mathbf{p}^2/2m\mathbf{x}^2$.

Por último, al derivar la ecuación correspondiente a la energía cinética del sistema con respecto al tiempo se tiene

$$\frac{dT}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{m\mathbf{x}^2}{2}\right)=m\dot{\mathbf{x}}\cdot\ddot{\mathbf{x}}, \tag{4.135}$$

y que en virtud de (4.125), (4.134) y (4.98) se puede escribir como

$$\frac{dT}{dt}=-\frac{\mathbf{v}^2}{r^2}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}=0. \tag{4.136}$$

Esto indica que la energía cinética de la partícula se conserva. De acuerdo a lo planteado anteriormente, la existencia de un conjunto de vínculos no integrables implica una reducción de los grados de libertad del sistema mediante una redefinición de la dinámica del movimiento (Pimentel,Bertin y Pompeia,2008).

Conclusiones

Dentro de la formulación de Hamilton Jacobi a la Carathéodory para sistemas regulares se evidenció la relación que existe entre el cálculo variacional, la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias. De este modo, la ecuación de Hamilton Jacobi que corresponde a una ecuación diferencial parcial de primer orden puede tener mas de una solución diferente. Al resolver la ecuación de Hamilton Jacobi por el método de las características o por la resolución directa de la propia ecuación se puede determinar las curvas características del sistema.

Al analizar los dos sistemas mecánicos cuyas lagrangianas son regulares mediante el método de separación de variables, se determinó una solución de la forma $S(q, u, t)$, de modo que al resolver la ecuación diferencial parcial, las soluciones respectivas permitieron determinar las ecuaciones de movimiento. Así, las ecuaciones características se reducen a las ecuaciones de Hamilton para dichos sistemas. Al estudiar el oscilador armónico empleando esta formulación, se obtuvo la tradicional solución, mientras que para la segunda aplicación se encontró un movimiento oscilatorio en la dirección x, mientras que en la dirección y se trata de un círculo de radio r con centro en un punto (x_0, y_0).

Existen casos en los cuales el determinante de la matriz Hessiana es igual a cero a los que se les llama sistemas singulares. Mediante el formalismo de Hamilton Jacobi a la Carathéodory se identificó la presencia de vínculos dentro de la teoría, los cuales surgen de la definición de los momentos conjugados de las coordenadas. Sin embargo, se pudo definir una ecuación de Hamilton Jacobi para una región del espacio de configuración en la que los vínculos son tomados como condiciones sobre el sistema.

Los sistemas singulares representan una generalización de los sistemas regulares y un conjunto de ecuaciones que contenga a los vínculos al igual que la ecuación de Hamilton Jacobi, puede definirse como un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi a partir de las cuales se puede construir las ecuaciones características.

La singularidad de la matriz Hessiana implica la imposibilidad, a diferencia de los sistemas regulares, de escribir ciertas velocidades a no ser que todas, en términos de las coordenadas y de los momentos generalizados.

Las condiciones de integrabilidad forman parte importante dentro del formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas singulares. Ellas permiten garantizar la existencia de un conjunto completo de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi y la integrabilidad de las ecuaciones características.

El análisis del movimiento artificial de una partícula y el de una partícula libre sobre una esfera permitió entender como se relaciona el formalismo de Hamlton Jacobi con el manejo de las condiciones de integrabilidad. En el primer caso, al introducir un grado de libertad innecesario se obtuvo un ejemplo de un sistema mecánico con libertad gauge. Se encontró entonces dos vínculos que automáticamente están en involución formando un sistema con ecuaciones características integrables.

Por otro lado, en el segundo caso al aplicar las condiciones de integrabilidad, se encontró que existen nuevas condiciones sobre el sistema, exigiendo que se introduzcan nuevas variables, las cuales redefinen la dinámica del sistema y hacen que este sea ahora integrable. Al presentarse esta redefinición, se definieron los paréntesis generalizados, los cuales, poseen las mismas propiedades de los Paréntesis de Poisson.

Bibliografía

ARFKEN George B. and WEBER Hans J. Differential equations. In Mathematical Methods for Physicists, pages 456463. Academic Press., USA, 4th edition, 1985.

CALKIN Melvin G. Lagrangian and Hamiltonian Mechanics. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 1996. ISBN 981-02-2672.

CARATHEODORY Constantine. Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order - Part I, II. Holden Day, Inc., San Francisco, 1967.

DESLOGE Edward A. Section 3: Hamilton- Jacobi theory. In Classical Mechanics, volume Vol. 2, pages 797806. John Wiley and Sons. Inc., Canada, 1982.

DIRAC Paul Adrien Maurice. Generalized hamiltonian dynamics. Canadian Journal of Mathematics, Vol. 2:p. 129, (1950).

DIRAC Paul Adrien Maurice. The hamiltonian form of field dynamics. Canadian Journal of Mathematics, Vol. 3:p. 1, (1951).

DIRAC Paul Adrien Maurice. Lecture no.1: The Hamilton method. In Lectures on Quantum Mechanics, pages 124. Dover Publications. Inc., New York, 1964.

FASANO Antonio and MARMI Stefano. Analytic mechanics: Hamilton- Jacobi theory and integrability. In Analytical Mechanics, pages 421431. Oxford University Press Inc., New York, 2006.

FERREIRA GOMEZ BERTIN Mario Cezar. Formalismo de Hamilton-Jacobi para acoes de primeira ordem. Dissertacao de mestrado, Instituto de Física Teórica. Universidade Estaudual Paulista, Sao Paulo, 2006.

GOLDSTEIN Herbert. Classical Mechanics. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., USA, 1980. ISBN 0-201-02969-3.

GULER Y. Canonical formulation of singular systems. I1 Nuovo Cimento B, Vol. 107(Issue 12):p. 13981395, (December 1992).

GULER Y. Integration of singular systems. I1 Nuovo Cimento B, Vol. 107(Issue 10):p. 11431149, (October 1992).

GULER Y. and RABEI MUFLEH E.M. A treatment of electromagnetic theory as a singular system. I1 Nuovo Cimento B, Vol. 109(Issue 4):p. 341346, (April 1994).

GULER Y. and FARAHAT N.I. Treatment of a relativistic particle in external electromagnetic field as a singular system. I1 Nuovo Cimento B, Vol. 111(Issue 4):p. 513520, (April 1996).

JOSE Jorge V. and SALETAN Eugene J. Topics in lagrangian dynamics. In Classical Dynamics. A Contemporary Approach, page 136. Cambridge University Press, USA, 1998. LANDAU L.D. and LIFSHITZ E.M. Curso de Física Teórica. Mecánica. Vol.1. Editorial Reverte, S.A., Espana, 1994. ISBN 84-291-4081-6

PIMENTEL B.M., BERTIN M.C., and POMPEIA P.J. Firstorder actions: a new view. Modern Physics Letters, Vol. 20(Issue 37):p. 2873, (December 2005).

PIMENTEL B.M., BERTIN M.C., and POMPEIA P.J. Formalismo de Hamilton-Jacobi a la Carath´eodory. Revista Brasileira de Ensino de F´ýsica, Vol. 29(No. 3):p. 393403, (Junio 2007).

PIMENTEL B.M., BERTIN M.C., and POMPEIA P.J. Formalismo de Hamilton-Jacobi a la Carath´eodory. Parte 2: sistemas singulares. Revista Brasileira de Ensino de F´ýsica, Vol. 30(No. 3):p. 3310, (Octubre 2008).

PIMENTEL B.M., POMPEIA P.J., DA ROCHA J.F., and TEIXEIRA R.G. The teleparallel Lagrangian and Hamilton-Jacobi formalism. Gen. Rel. Grav., 35:p. 877884, (March 2003).

PIMENTEL B.M. and TEIXEIRA R.G. Hamilton-Jacobi formulation for singular systems with second-order lagrangians. I1 Nuovo Cimento B, Vol. 111(Issue 7):p. 841854, (July 1996).

PIMENTEL B.M. and TEIXEIRA R.G. Generalization of the Hamilton-Jacobi approach for higher-order singular systems. I1 Nuovo Cimento B, Vol. 113(Issue 6):p.805818, (June 1998).

PIMENTEL B.M., TEIXEIRA R.G., and TOMAZELLI J.L. Hamilton-Jacobi approach to Berezinian singular systems. Annals of Physics, Vol. 267(Issue 1):p. 7596, (July 1998).

SOLDOVIERI Terenzio. Cap´ýtulo 7. Transformaciones can´onicas. In Introducción a la mecánica de Lagrange y Hamilton, pages 295301. Universidad de Zulia, República Bolivariana de Venezuela, 2011.

Apéndice A

Paréntesis fundamentales

Si se tiene dos magnitudes cualesquiera f y g, los paréntesis de Poisson se definen de la siguiente manera

$$\{f,g\} \equiv \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} \right), \tag{A.1}$$

los cuales tienen los siguientes paréntesis fundamentales que se deducen de su definición. Si f ó g corresponde a una coordenada q^i o a un momento p_i, los paréntesis correspondientes a partir de (A.1) se reducen a una derivada parcial

$$\{p_i,g\} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial p_i}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j} - \frac{\partial p_i}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} \right) = \sum_j \delta^i_j \frac{\partial g}{\partial q^j} = \sum_i \frac{\partial g}{\partial q^i}, \tag{A.2}$$

$$\{q^i,g\} \equiv \sum_j \left(\frac{\partial q^i}{\partial p_j}\frac{\partial g}{\partial q^j} - \frac{\partial q^i}{\partial q^j}\frac{\partial g}{\partial p_j} \right) = -\sum_j \delta^i_j \frac{\partial g}{\partial p_j} = -\sum_i \frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{A.3}$$

Haciendo en (A.2) y (A.3) la función g igual a q^i y p_i se obtienen los paréntesis:

$$\{q^i,q^j\} = \{p_i,p_j\} = 0, \tag{A.4}$$

$$\{q^i,p_j\} = -\{p_j,q^i\} = \delta^i_j. \tag{A.5}$$

Dentro de la formulación expuesta en el Capítulo 3, se requiere el calculo de algunos paréntesis importantes, en este caso, se encuentran los paréntesis de Poisson entre los vectores $\mathbf{x} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{p} = p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}$ que determinan la posición y el momento asociado a una partícula en $\mathbf{R}^3$ respectivamente, donde x, y, z y p_x, p_y, p_z son cantidades escalares. De acuerdo a esto y en virtud de (A.4) y (A.5) resulta

$$\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = \{z, p_z\} = 1, \tag{A.6}$$

$$\{x, p_y\} = \{y, p_z\} = \{z, p_x\} = 0, \tag{A.7}$$

$$\{x, x\} = \{y, y\} = \{z, z\} = 0, \tag{A.8}$$

$$\{x, y\} = \{y, z\} = \{z, x\} = 0, \tag{A.9}$$

$$\{p_x, p_x\} = \{p_y, p_y\} = \{p_z, p_z\} = 0, \tag{A.10}$$

$$\{p_x, p_y\} = \{p_y, p_z\} = \{p_z, p_x\} = 0, \tag{A.11}$$

de este modo, los paréntesis de Poisson entre los vectores $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$ corresponden a

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{x}\} = \{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\} = 0, \tag{A.12}$$

$$\{\mathbf{p}, \mathbf{p}\} = \{p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}, p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}\} = 0, \tag{A.13}$$

$$\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\} = -\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\} = \{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}\} = \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{I}. \tag{A.14}$$

Para una función que depende de las coordenadas $\psi = \psi(\mathbf{x})$, los Paréntesis de Poisson con relación al vector posición $\mathbf{x}$ y al vector momento $\mathbf{p}$ empleando las ecuaciones (A.2) y (A.3) son respectivamente

$$\{\mathbf{x}, \psi(\mathbf{x})\} = \{x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}, \psi(\mathbf{x})\} = -\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\psi}{\partial p_x} - \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\psi}{\partial p_y} - \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\psi}{\partial p_z} = 0,$$

por tanto

$$\{\mathbf{x}, \psi\} = -\{\psi, \mathbf{x}\} = 0. \tag{A.15}$$

De igual manera con respecto al vector $\mathbf{p}$

$$\{\mathbf{p}, \psi(\mathbf{x})\} = \{p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}, \psi(\mathbf{x})\} = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial\psi}{\partial z} = \nabla\psi,$$

obteniendo

$$\{\mathbf{p}, \psi\} = -\{\psi, \mathbf{p}\} = \nabla\psi. \tag{A.16}$$

Por último, al considerar p_0 como la derivada de la función S con respecto a $q_0 \equiv t$

$$p_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial q_0} = \frac{\partial S}{\partial t}, \tag{A.17}$$

se definen los siguientes Paréntesis de Poisson con relación a $\mathbf{x}$ y $\mathbf{p}$

$$\{p_0, \mathbf{p}\} = \{p_0, p_x\hat{\mathbf{x}} + p_y\hat{\mathbf{y}} + p_z\hat{\mathbf{z}}\} = \{p_0, p_x\}\hat{\mathbf{x}} + \{p_0, p_y\}\hat{\mathbf{y}} + \{p_0, p_z\}\hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{A.18}$$

$$\{p_0, \mathbf{x}\} = \{p_0, x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\} = \{p_0, x\}\hat{\mathbf{x}} + \{p_0, y\}\hat{\mathbf{y}} + \{p_0, z\}\hat{\mathbf{z}} = 0, \tag{A.19}$$

de acuerdo con (A.4) y (A.5). Para una función ψ que depende únicamente de las coordenadas el PP con respecto a p_0 usando la ecuación (A.2) es

$$\{p_0, \psi\} = \frac{\partial \psi}{\partial q_0} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0. \tag{A.20}$$

Apéndice B

Paréntesis de Poisson entre los vínculos

En el análisis de las condiciones de integrabilidad para una partícula libre, es necesario el calculo de los paréntesis de Poisson entre los vínculos que posee el sistema. A partir de los resultados del Apéndice A relacionados con los paréntesis fundamentales, se encuentra los resultados correspodientes.

Se calcula los paréntesis entre ϕ_0 y los demás vínculos, entonces, empleando (4.89) resulta

$$\{\phi_0, \phi_0\} = \{p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi, p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi\},$$

aplicando la propiedad (A.20) el segundo y quinto término se anulan

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2m}\{p_0, \mathbf{p}^2\} - u\{p_0, \psi\} + \frac{1}{2m}\{\mathbf{p}^2, p_0\} - \frac{u}{2m}\{\mathbf{p}^2, \psi\} \\ &- u\{\psi, p_0\} - \frac{u}{2m}\{\psi, \mathbf{p}^2\}, \end{aligned}$$

y desarrollando los productos respectivos se obtiene

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{m}\{p_0, \mathbf{p}\} \cdot \mathbf{p} + \frac{1}{m}\mathbf{p} \cdot \{\mathbf{p}, p_0\} + \frac{u}{m}\{\psi, \mathbf{p}\} \cdot \mathbf{p} \\ &+ \frac{u}{m}\mathbf{p} \cdot \{\mathbf{p}, \psi\}, \end{aligned}$$

en virtud de los paréntesis (A.18) y (A.19) los términos de esta ecuación se anulan, por lo tanto

$$\{\phi_0, \phi_0\} = 0. \tag{B.1}$$

Con relación al vínculo ϕ_1, las ecuaciones (4.89) y (4.92) conducen a

$$\{\phi_0, \phi_1\} = \{p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi, p_u\},$$

aplicando la propiedad distributiva

$$\{\phi_0, \phi_1\} = \{p_0, p_u\} + \frac{1}{2m}\{\mathbf{p}^2, p_u\} - \psi\{u, p_u\},$$

y de acuerdo a los paréntesis fundamentales (A.4) y (A.18) el primer y segundo término se anulan, obteniendo

$$\{\phi_0, \phi_1\} = -\psi(1),$$

en consecuencia

$$\{\phi_0, \phi_1\} = -\{\phi_1, \phi_0\} = -\psi. \tag{B.2}$$

En cuanto al vínculo ϕ_2, a partir de las ecuaciones (4.89) y (4.95) el Paréntesis de Poisson respectivo es

$$\{\phi_0, \phi_2\} = \{p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi, \psi\} = \{p_0, \psi\} + \frac{1}{m}\mathbf{p} \cdot \{\mathbf{p}, \psi\} - u\{\psi, \psi\}, \tag{B.3}$$

de acuerdo a los resultados (A.2) y (A.20) se obtiene

$$\{\phi_0, \phi_2\} = \frac{1}{2m}[2\{\mathbf{p}, \psi\} \cdot \mathbf{p}] = \frac{1}{m}\{\mathbf{p}, \psi\} \cdot \mathbf{p} = \frac{1}{m}\nabla\psi \cdot \mathbf{p}. \tag{B.4}$$

Teniendo en cuenta que $\nabla\psi$ se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\nabla\psi &= \nabla(\mathbf{x}^2), \\
&= \nabla(x^2 + y^2 + z^2), \\
&= \left(\hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{z}}\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^2 + y^2 + z^2), \\
&= 2x\hat{\mathbf{x}} + 2y\hat{\mathbf{y}} + 2z\hat{\mathbf{z}}, \\
\nabla\psi &= 2\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

la ecuación (B.4) toma la forma

$$\{\phi_0, \phi_2\} = -\{\phi_2, \phi_0\} = \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}. \tag{B.5}$$

Por otro lado, se determina los paréntesis de Poisson entre los vínculos ϕ_0 y ϕ_3 de acuerdo a las ecuaciones (4.89) y (4.98) obteniendo

$$\begin{aligned}
\{\phi_0, \phi_3\} &= \{p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi, \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\}, \\
&= \frac{2}{m}\{p_0, \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\} + \frac{1}{m^2}\{\mathbf{p}^2, \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\} - \frac{2u}{m}\{\psi, \mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\}, \\
&= \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\{p_0, \mathbf{p}\} + \frac{2}{m}\{p_0, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{p} + \frac{1}{m^2}\mathbf{x}\cdot\{\mathbf{p}^2, \mathbf{p}\} + \frac{1}{m^2}\{\mathbf{p}^2, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{p} \\
&- \frac{2u}{m}\mathbf{x}\cdot\{\psi, \mathbf{p}\} - \frac{2u}{m}\{\psi, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{p},
\end{aligned}$$

de acuerdo a los paréntesis (A.3), (A.18) y (A.19), los tres primeros terminos junto con el último se anulan, quedando

$$\{\phi_0, \phi_3\} = \frac{1}{m^2}\{\mathbf{p}^2, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{p} - \frac{2u}{m}\mathbf{x}\cdot\{\psi, \mathbf{p}\},$$

de los resultados (A.2) y (A.14) se obtiene

$$\begin{aligned}
\{\phi_0, \phi_3\} &= \frac{1}{m^2}[2\mathbf{p}\cdot\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\}]\cdot\mathbf{p} + \frac{2u}{m}\mathbf{x}\cdot\nabla\psi, \\
&= -\frac{2}{m^2}[\mathbf{p}\cdot\mathbf{I}]\cdot\mathbf{p} + \frac{4u}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}, \\
&= -\frac{2}{m^2}\mathbf{p}\cdot\mathbf{p} + \frac{4u}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x},
\end{aligned}$$

en consecuencia

$$\{\phi_0, \phi_3\} = -\{\phi_3, \phi_0\} = -\frac{2}{m^2}\mathbf{p}^2 + \frac{4u}{m}\mathbf{x}^2. \tag{B.6}$$

Finalmente, se calcula para ϕ_0 y ϕ_4 empleando las ecuaciones (4.89) y (4.102)

$$\begin{aligned}
\{\phi_0, \phi_4\} &= \{p_0 + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - u\psi, \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2mu\mathbf{x}^2)\}, \\
&= \frac{2}{m^2}\{p_0, \mathbf{p}^2\} + \frac{4u}{m}\{p_0, \mathbf{x}^2\} + \frac{1}{m^3}\{\mathbf{p}^2, \mathbf{p}^2\} + \frac{2u}{m^2}\{\mathbf{x}^2, \mathbf{p}^2\} - \frac{2u}{m^2}\{\psi, \mathbf{p}^2\} \\
&- \frac{4u^2}{m}\{\psi, \mathbf{x}^2\},
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta (A.13), (A.18) y (A.19) únicamente se tiene los términos

$$\{\phi_0, \phi_4\} = \frac{2u}{m^2}\{\mathbf{x}^2, \mathbf{p}^2\} - \frac{2u}{m^2}\{\psi, \mathbf{p}^2\},$$

desarrollando los productos respectivos

$$= \frac{2u}{m^2}[2\mathbf{p} \cdot \{\mathbf{p}, \mathbf{x}^2\}] - \frac{2u}{m^2}[2\{\psi, \mathbf{p}\} \cdot \mathbf{p}],$$

y empleando (A.3) y (A.14) resulta

$$\begin{aligned} &= \frac{4u}{m^2}[\mathbf{p} \cdot (2\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\} \cdot \mathbf{x})] - \frac{4u}{m^2}[\nabla\psi, \mathbf{p}], \\ &= -\frac{8u}{m^2}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - \frac{8u}{m^2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \end{aligned}$$

es decir

$$\{\phi_0, \phi_4\} = -\{\phi_4, \phi_0\} = -\frac{16u}{m^2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \tag{B.7}$$

Ahora se calcula los paréntesis de Poisson a partir del vínculo ϕ_1, para determinar si estos vínculos se encuentran en involución. De la ecuación (4.92) y empleando el paréntesis (A.4) se obtiene

$$\{\phi_1, \phi_1\} = \{p_u, p_u\} = 0.$$

Con relación al vínculo ϕ_2, a partir de (4.92), (4.95) y el paréntesis fundamental (A.2)

$$\{\phi_1, \phi_2\} = \{p_u, \psi\} = \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial u} = 0,$$

es decir,

$$\{\phi_1, \phi_2\} = -\{\phi_2, \phi_1\} = 0. \tag{B.7}$$

Luego, se calcula el paréntesis de Poisson entre ϕ_1 y ϕ_3, de acuerdo a las ecuaciones (4.92), (4.98) y los resultados (A.4) y (A.5) obteniendo

$$\{\phi_1, \phi_3\} = \frac{2}{m}\{p_u, \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}\} = \frac{2}{m}\mathbf{x} \cdot \{p_u, \mathbf{p}\} + \frac{2}{m}\{p_u, \mathbf{x}\} \cdot \mathbf{p} = 0,$$

en consecuencia

$$\{\phi_1, \phi_3\} = -\{\phi_3, \phi_1\} = 0. \tag{B.8}$$

Por último, se calcula los paréntesis entre los vínculos ϕ_1 y ϕ_4 de acuerdo con la ecuación (4.102)

$$\{\phi_1, \phi_4\} = \{p_u, \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2)\} = \frac{2}{m^2}\{p_u, \mathbf{p}^2\} + \frac{4\mathbf{x}^2}{m}\{p_u, u\} = -\frac{4\mathbf{x}^2}{m},$$

es decir

$$\{\phi_1, \phi_4\} = -\{\phi_4, \phi_1\} = -\frac{4\mathbf{x}^2}{m}. \tag{B.9}$$

De igual manera se determina los paréntesis de Poisson asociados al vínculo ϕ_2 y en relación con los demás vínculos. A partir de la ecuación (4.95) se obtiene

$$\{\phi_2, \phi_2\} = \{\psi, \psi\} = \frac{\partial\psi}{\partial q}\frac{\partial\psi}{\partial p} - \frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial\psi}{\partial q} = 0,$$

en virtud de la definición de los paréntesis de Poisson (A.1). Por lo tanto

$$\{\phi_2, \phi_2\} = 0. \tag{B.10}$$

Entre ϕ_2 y ϕ_3 de acuerdo a (4.95) y (4.98) el paréntesis correspondiente es

$$\begin{aligned}\{\phi_2, \phi_3\} &= \{\psi, \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{p}\},\\ &= \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\{\psi, \mathbf{p}\} + \frac{2}{m}\{\psi, \mathbf{x}\}\cdot\mathbf{p},\end{aligned}$$

empleando los paréntesis (A.2) y (A.3) resulta

$$\begin{aligned}\{\phi_2, \phi_3\} &= \frac{2}{m}\mathbf{x}\cdot\nabla\psi,\\ &= \frac{4}{m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x},\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$\{\phi_2, \phi_3\} = -\{\phi_3, \phi_2\} = \frac{4}{m}\mathbf{x}^2. \tag{B.11}$$

Finalmente, el paréntesis de Poisson entre los vínculos ϕ_2 y ϕ_4 empleando las ecuaciones (4.95) y (4.102) es

$$\{\phi_2, \phi_4\} = \{\psi, \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2)\} = \frac{2}{m^2}\{\psi, \mathbf{p}^2\} + \frac{4u}{m}\{\psi, \mathbf{x}^2\},$$

desarrollando los productos respectivos y teniendo en cuenta (A.2) y que $\nabla\psi = 2\mathbf{x}$ resulta

$$\{\phi_2, \phi_4\} = \frac{4}{m^2}\{\psi, \mathbf{p}\} \cdot \mathbf{p} = \frac{4}{m^2}\nabla\psi \cdot \mathbf{p} = \frac{8}{m^2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p},$$

es decir

$$\{\phi_2, \phi_4\} = -\{\phi_4, \phi_2\} = \frac{8}{m^2}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \tag{B.12}$$

Para terminar con el calculo de los paréntesis de Poisson se determinan los asociados a ϕ_3 y ϕ_4. Para el vínculo ϕ_3 se tiene entonces

$$\{\phi_3, \phi_3\} = \{\frac{2}{m}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \frac{2}{m}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}\} = \frac{4}{m^2}\{xp_x + yp_y + zp_z, xp_x + yp_y + zp_z\} = 0,$$

donde se ha empleado la relación (A.5). por lo tanto

$$\{\phi_3, \phi_3\} = 0. \tag{B.13}$$

Entre los vínculos ϕ_3 y ϕ_4 a partir de (A.12), (A.13) y (A.14) resulta

$$\begin{aligned}
\{\phi_3, \phi_4\} &= \{\frac{2}{m}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2)\}, \\
&= \frac{4}{m^3}\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{p}^2\} + \frac{8u}{m^2}\{\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \mathbf{x}^2\}, \\
&= \frac{4}{m^3}\mathbf{x} \cdot \{\mathbf{p}, \mathbf{p}^2\} + \frac{4}{m^3}\{\mathbf{x}, \mathbf{p}^2\} \cdot \mathbf{p} + \frac{8u}{m^2}\mathbf{x} \cdot \{\mathbf{p}, \mathbf{x}^2\} + \frac{8u}{m^2}\{\mathbf{x}, \mathbf{x}^2\} \cdot \mathbf{p}, \\
&= \frac{4}{m^3}[2\{\mathbf{x}, \mathbf{p}\} \cdot \mathbf{p}] \cdot \mathbf{p} + \frac{8u}{m}\mathbf{x} \cdot [-2\{\mathbf{p}, \mathbf{x}\} \cdot \mathbf{x}], \\
&= \frac{8}{m^3}[\mathbf{I} \cdot \mathbf{p}] \cdot \mathbf{p} - \frac{16u}{m}\mathbf{x} \cdot [\mathbf{I} \cdot \mathbf{x}], \\
&= \frac{8}{m^3}\mathbf{p} \cdot \mathbf{p} - \frac{16u}{m}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x},
\end{aligned}$$

es decir,

$$\{\phi_3, \phi_4\} = -\{\phi_4, \phi_3\} = \frac{8}{m^3}\mathbf{p}^2 - \frac{16u}{m}\mathbf{x}^2. \tag{B.14}$$

De igual manera el paréntesis de Poisson con relación al vínculo ϕ_4 es

$$
\begin{aligned}
\{\phi_4, \phi_4\} &= \{\frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2), \frac{2}{m^2}(\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2)\}, \\
&= \frac{4}{m^2}\{\mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2, \mathbf{p}^2 + 2um\mathbf{x}^2\}, \\
&= \frac{4}{m^2}\{\mathbf{p}^2, \mathbf{p}^2\} + \frac{8u}{m}\{\mathbf{p}^2, \mathbf{x}^2\} + \frac{8u}{m}\{\mathbf{x}^2, \mathbf{p}^2\} + 16uu^2\{\mathbf{x}^2, \mathbf{x}^2\},
\end{aligned}
$$

desarrollando los productos de cada paréntesis y haciendo uso de las ecuaciones (A.12) a (A.14) se obtiene

$$
\begin{aligned}
\{\phi_4, \phi_4\} &= -\frac{32u}{m}\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + \frac{32u}{m}\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}, \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

esto es

$$
\{\phi_4, \phi_4\} = 0. \tag{B.15}
$$