FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI EN TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

LUIS ALFREDO BRAVO HUERTAS

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Junio de 2013

FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI EN TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

LUIS ALFREDO BRAVO HUERTAS

TRABAJO DE GRADO

Director:
Germán Enriquez Ramos Zambrano
Ph.D. en física teórica

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Junio de 2013

Nota de Aceptación

Germán Enrique Ramos Zambrano

Director

Johana Herrera

Jurado

Alfredo Pasaje

Jurado

San Juan de Pasto, Junio 2013

Agradecimientos

Quiero expresar mis agradecimientos a mi familia. Especialmente a mi abuela Luz, mi madre Nelcy, mi padre Nolberto, mis hermanas Marcela, Lisbeth, mi sobrino Tawan, mi primo Fercho y mi tía Nancy, por su amor, confianza y el respaldo que me han brindado en todo momento de mi vida. En este periodo tan largo y en ocaciones tan dificil, han logrado que siguiera avanzando hacia mi objetivo.

Le agradezco a mi director de trabajo de grado el Ph.D. Germán Ramos por su dedicación y apoyo en todo momento, quien a corregido este trabajo con mucho esmero permitiendome elaborar un adecuado proyecto. Le agradezco también por haberme acogido en el grupo de investigación de Física teórica y abrirme las puertas a esta ciencia tan apasionante.

A mi novia Jennyfer, mis amigos de San Francisco Rubén, Jamith, Cristian y mis amigos de la carrera de Física Alberto, Jairo, Victor, Daniel^2, Leydi, Johana y María Fernanda, quienes me acompañaron en este camino de aprendizaje y conocimiento.

A la memoria de mi hermano Nolberto Bravo Huertas

"Nunca consideres el estudio
como una obligación,
sino como una oportunidad
para penetrar en el bello
y maravilloso mundo del saber."
Albert Einstein

FORMULACIÓN DE HAMILTON-JACOBI EN TEORÍA CLÁSICA DE CAMPOS

Resumen

En el presente trabajo se estudiará la formulación de Hamilton-Jacobi mediante el método de Lagrangianos equivalentes de Carathéodory. Se deducirán las ecuaciones de movimiento como ecuaciones diferenciales totales y se analizará las condiciones de integrabilidad para estas. Por medio de problemas prácticos se extenderá la formulación a sistemas con infinitos grados de libertad y descritos por variables de Grassmann. Finalmente se analizará por medio de este formalismo la estructura clásica de la electrodinámica cuántica (QED).

HAMILTON-JACOBI FORMULATION IN CLASSICAL FIELD THEORY

Abstract

In the present work will study the Hamilton-Jacobi formulation using the Carathéodory's Lagrangian equivalents method. The equations of motion as total differential equations will be deducted and will analyzed the integrability conditions. Through practical problems will extend the formulation to systems with infinite degrees of freedom and described by Grassmann variables. Finally, I will use this formalism to the classical structure of quantum electrodynamics (QED).

Índice general

Glosario

Vínculo: Se denomina vínculo a una expresión que relaciona coordenadas del espacio de configuraciones o coordenadas del espacio de fase.

Boson: Partícula elemental de la naturaleza que se caracterizan por tener spin entero.

Fermion: Partícula elemental que se caracteriza por tener espín semientero y cumplir el principio de exclusión de Pauli.

Antiparticula: A cada una de las partículas de la naturaleza le corresponde una antipartícula que posee la misma masa, el mismo espín, pero distinta carga eléctrica.

QED: Acrónimo en ingles de electrodinámica cuántica. Describe los fenómenos que implican las partículas eléctricamente cargadas que obran recíprocamente por medio de la fuerza electromagnética.

Grados de libertad: Es el número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias definir el estado de un sistema físico.

Campo: Representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio.

Álgebra de Lie: Es la estructura algebraica definida sobre un espacio vectorial, asociada usualmete a los grupos de Lie y usadas en el estudio geométrico de los propios grupos y de otras variedades diferenciales.

Transformación de gauge: Es una transformación de algún grado de libertad interno, que no modifica ninguna propiedad observable física.

Superespacio: Es un espacio físico costruido con variables del álgebra conmutativa y del álgebra de Grassmann.

Capítulo 1

Introducción

La mecánica clásica posee diferentes formulaciones para describir sistemas físicos, como: las leyes de Newton, la formulación Lagrangiana, la formulación Hamiltoniana, la formulación de Hamilton Jacobi, entre otras. Todas estas formulaciones son equivalentes entre si [1]. Las dos últimas formulaciones son las más empleadas en el estudio de la mecánica cuántica y la teoría de campos, por esta razón se desarrolla en este trabajo el formalismo de Hamilton Jacobi.

La formulación de Hamilton-Jacobi surge del formalismo de Hamilton cuando nos interesamos por una trasformación canónica que nos lleve aún nuevo sistema de coordenadas en el espacio de fase, en donde la nueva función hamiltoniana se anule y por lo tanto la integrabilidad de las ecuaciones de Hamilton para las nuevas variables sean elementales [1, 2].

Existe un método alternativo para deducir la ecuación de Hamilton-Jacobi en el cual no es necesario tener en cuenta la formulación de Hamilton y las transformaciones canónicas de Jacobi [12], este método relaciona el cálculo variacional con las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales mediante un análisis geométrico estudiado por Carathéodory al que él llama “Cuadro completo” [3].

Carathédory muestra como la ecuación de Hamilton-Jacobi se deriva del principio de Hamilton empleando el concepto de Lagrangianos equivalentes y utiliza el método de las características o método de Cauchy para resolver esta ecuación [4], se ha mostrado en diferentes trabajos [3, 5, 6], como este método puede extenderse a sistemas que son descritos por Lagrangianos singulares, en este caso la formulación de Hamilton-Jacobi agrega a los vínculos como ecuaciones diferenciales parciales y junto con la ecuación de Hamilton-Jacobi forman un conjunto de ecuaciones al cual se le denomina Ecuaciones Diferenciales Parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ), se calculan las ecuaciones características asociadas a este conjunto y finalmente se analiza sus condiciones de integrabilidad.

Existen sistemas físicos en mecánica clásica y en teoría de campos que son descritos por Lagrangianos singulares [7], en los que es necesario introducir un nuevo tipo de variables para describirlos clásicamente, estas variables son conocidas como variables de Grassmann [8, 9]; un ejemplo de estos sistemas es la descripción clásica de partículas fermionicas. Estas nuevas variables tienen la propiedad de ser anticonmutativas lo cual genera modificaciones en el cálculo diferencial e integral y por lo tanto modifica la estructura de la mecánica. Se adaptará el planteamiento hecho por por Caratheodory para estudiar este tipo de sistemas, calculando las ecuaciones características del conjunto de EDPHJ y analizar las condiciones de integrabilidad permitiendo la obtención de las ecuaciones de movimiento.

Se comenzará en el capítulo 2 desarrollando el formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas que satisfacen la condición Hessiana. Posteriormente se estudiará las implicaciones que surgen del rompimiento de esta condición y como esto determina la existencia de vínculos de la definición de momentos canónicos conjugados. Se analizará la estructura de estos vínculos por medio de las condiciones de integrabilidad lo que permitirá definir si el conjunto de EDPHJ está en involución con los paréntesis generalizados asegurando la integrabiliad de las ecuaciones de movimiento. En caso contrario, la dinámica se redefinirá utilizando la definición de paréntesis generalizados. En el capítulo 3 se aplicara este formalismo al campo electromagnético libre.

En el capítulo 4 se estudia las propiedades básicas del álgebra de Grassmann y se analiza un ejemplo mecánico en el que se introduce el concepto de variable dinámica Grassmanniana. En el capítulo 5 se analiza la estructura clásica del campo fermiónico libre mediante el formalismo de Hamilton Jacobi y finalmente en el capítulo 6 se aplica el formalismo de Hamilton Jacobi al estudio de la estructura clásica de la electrodinámica cuántica (QED).

Capítulo 2

Formulación de Hamilton-Jacobi según Caratheodory

En este capítulo se estudiará el formalismo de Hamilton-Jacobi (HJ) para sistemas singulares [10], por razón de simplicidad en los cálculos se trabajará inicialmente sistemas físicos con finitos grados de libertad y variables dinámicas conmutativas, en el momento adecuado se realizará la generalización a sistemas con infinitos grados de libertad [11] y cuando sea necesario a sistemas descritos por variables dinámicas del álgebra no conmutativa, álgebra de Grassmann [8].

Se obtendrá en primer lugar la ecuación de HJ para sistemas regulares utilizando el principio variacional mediante el método de Lagrangianos equivalentes de Caratheodory [12], posteriormente se mostrará como el formalismo de HJ envuelve naturalmente a los sistemas singulares. En este escenario ya no se tendrá una sino varias ecuaciones diferenciales parciales que el sistema debe obedecer. Se analizarán las condiciones de integrabilidad de estas ecuaciones parciales y se calcularán las respectivas ecuaciones características. Finalmente se muestra como se puede redefinir la dinámica con el uso de los paréntesis generalizados para sistemas físicos que contengan vínculos que no estan en involución con los paréntesis de Poisson.

2.1. Sistemas regulares

Consideremos inicialmente un sistema físico con n grados de libertad $(i = 1, ..., n)$ descrito por un Lagrangiano de la forma:

$$L(q^i, \dot{q}^i, t) \tag{2.1}$$

A este Lagrangiano se le puede asociar la integral de acción definida de la siguiente manera:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)dt \tag{2.2}$$

Calculada sobre C, una posible trayectoria del sistema entre dos puntos fijos t_1 y t_2. El problema del cálculo variacional es encontrar una forma paramétrica de la trayectoria del sistema en el espacio de configuracion $q^i = q^i(t)$ de modo que la primera variación de la acción sea nula [12]. Resolver directamente este problema conduce a las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange. Para abordar de una manera diferente este problema, primero se definirá una segunda función Lagrangiana construida a partir de (2.1) y de la derivada total respecto al tiempo de una función $S(q,t)$ arbitraria de la siguiente manera:

$$\bar{L} = L - \frac{dS}{dt} \tag{2.3}$$

A este Lagrangiano (2.3) se le puede asociar también una acción definida análogamente a (2.2):

$$\bar{A} = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \bar{L}(q^i, \dot{q}^i, t)dt = \int_{\bar{t}_1}^{\bar{t}_2} \left(L - \frac{dS}{dt}\right) dt \tag{2.4}$$

Considerando que la acción $\bar{A}$ varia entre los mismos valores de tiempo de A, osea, $\bar{t}_1 = t_1$ y $\bar{t}_2 = t_2$ y además, definiendo $q(\bar{t_2}) = q_{\bar{t}_2}$ y $q(\bar{t_1}) = q_{\bar{t}_1}$; se tiene en (2.4):

$$\bar{A} = A - S(q_{\bar{t}_2}, t_2) + S(q_{\bar{t}_1}, t_1) \tag{2.5}$$

Ahora, considerando la primera variación de (2.5), se obtiene:

$$\delta\bar{A} = \delta A - \delta S(q_{\bar{t}_2}, t_2) + \delta S(q_{\bar{t}_1}, t_1) \tag{2.6}$$

pero:

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial q}\delta q(t) \tag{2.7}$$

Si se consideran extremos fijos, es decir $\delta q(t_2) = 0$ y $\delta q(t_1) = 0$, entonces, se determina que:

$$\delta\bar{A} = \delta A \tag{2.8}$$

Este resultado muestra que la trayectoria que extremiza $\bar{A}$ es la misma que extremiza A por esta razón se dice que (2.1) y (2.3) son Lagrangianos equivalentes, por lo tanto, ellos conducen al mismo problema variacional y se refieren al mismo problema dinámico [12].

La trayectoria $q^i(t)$ solución del problema variacional, también es solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) [12]

$$\dot{q}^i = \phi^i(q,t) \tag{2.9}$$

De acuerdo a Carathéodory [12], si podemos encontrar las funciones ϕ, la condición suficiente para que $\bar{A}$ y consecuentemente A sean estacionarias es encontrar una función $S(q,t)$ para la cual:

$$\bar{L}(q,\dot{q},t)|_{\dot{q}=\phi} = 0 \tag{2.10}$$

Además, si $\bar{L}$ tiene un mínimo en $\dot{q} = \phi(q,t)$ entonces $\bar{A}$ tendrá también un mínimo y consecuentemente A, por lo tanto se debe cumplir:

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{q}^i}|_{\dot{q}^i=\phi^i} = 0 \tag{2.11}$$

esto lleva á:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial S}{\partial q^j}\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial^2 S}{\partial \dot{q}^i \partial t} = 0 \tag{2.12}$$

Como S es función únicamente de las coordenadas y del tiempo, el segundo y el último término de la ecuación anterior son cero, además, las componentes de las velocidades generalizadas son independientes, es decir, se cumple $\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^i} = \delta^j_i$, por lo tanto se determina que:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \frac{\partial S}{\partial q^i} \tag{2.13}$$

El lado izquierdo de (2.13), define el momento canónico, p_i, conjugada a la coordenada q^i, [13], entonces se establece la siguiente relación:

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i} \tag{2.14}$$

La condición (2.10) permite determinar que:

$$L - \frac{\partial S}{\partial q^i}\dot{q}^i - \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{2.15}$$

Utilizando (2.14) en la ecuación anterior se obtiene:

$$p_i\dot{q}^i - L\left(q, \dot{q}^i, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{2.16}$$

La relación anterior se puede considerar como una ecuación diferencial para S, si es posible eliminar las velocidades y escribirlas en función de las coordenadas y los momentos apartir de la definición:

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \tag{2.17}$$

Invertir las velocidades en términos de los momentos y las coordenadas en las relaciones anteriores, es factible si el determinante de la matriz Hessiana W, [14], es diferente de cero:

$$det\ W \neq 0 \tag{2.18}$$

donde:

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \tag{2.19}$$

La relación (2.18) se conoce como condición Hessiana; sistemas que cumplen esta condición son llamados sistemas regulares. Con la condición (2.18) satisfecha, se puede reconocer los dos primeros términos de (2.16) como la transformación de Legendre que permite definir la función Hamiltoniana $H(q, p, t)$, [13].

$$H(q, p, t) = \dot{q}^i p_i - L \tag{2.20}$$

Además, recordando la relación (2.14) en (2.16) se determina la siguiente expresión:

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{2.21}$$

La relación (2.21) es una ecuacion diferencial en derivadas parciales de primer orden no lineal y se conoce como la ecuación de Hamilton Jacobi [12]. Entonces, para que la primera variación de la acción A sea nula se consideró la existencia de una función arbitraria $S(q, t)$ que depende de las coordenadas, q, y del tiempo, t, para la cual se cumpla $\bar{L} = 0$ y además lo mínimice en $\dot{q} = \phi$. La función S que permite que se cumplan estas condiciones debera ser solución de la ecuación de Hamilton Jacobi (2.21).

2.1.1. Ecuaciones características

Se sabe como calcular la función S pero no se ha discutido como, apartir de ella. se puede calcular la trayectoria seguida por un sistema físico. Para ello se utilizará el hecho que todo sistema de ecuaciones diferenciales parciales esta asociado a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias [4]. Este conjunto se puede calcular por el método de las ecuaciones características resuelto primero por Cauchy [12].

Considerando la evolución temporal de (2.14), se determina:

$$\frac{d}{dt}p_i = \dot{p}_i = \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i}\dot{q}^j + \frac{\partial^2 S}{\partial t \partial q^i} \tag{2.22}$$

También se debe calcular la derivada de (2.21) respecto a q^i

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial p_j}{\partial q^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial t} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^i} + \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial q^i} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^j \partial t} = 0 \tag{2.23}$$

Recordando que en (2.21) se definió la función Hamiltoniana H utilizando la transformación de Legendre; (2.20), se puede determinar de esta la siguiente identidad

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j \tag{2.24}$$

Reemplazando esta relación en (2.23) se obtiene que:

$$-\frac{\partial H}{\partial q^i} = \dot{q}^j \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial q^j} + \frac{\partial^2 S}{\partial q^i \partial t} \tag{2.25}$$

De esta manera, comparando las relaciones (2.22) y (2.25) y junto con la identidad (2.24), se consigue un conjunto de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden:

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{2.26}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \tag{2.27}$$

Las ecuaciones (2.26) y (2.27) se conocen como las $2n$ ecuaciones características de la ecuación de Hamilton Jacobi (2.21). Ellas permiten definir un espacio de fase de variables q^i y p_i, y como bien se sabe, son idénticas a las ecuaciones canónicas del formalismo Hamiltoniano. Otra ecuación característica, se la puede obtener tomando el diferencial de $S(q,t)$:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial S}{\partial t} dt \tag{2.28}$$

Pero de la ecuación de Hamilton Jacobi se sabe que: $H = -\frac{\partial S}{\partial t}$ y empleando (2.14) en la ecuación anterior se reescribe:

$$dS = p_i dq^i - H dt = \left(p_i \frac{dq^i}{dt} - H \right) dt \tag{2.29}$$

$$= \left(p_i \dot{q}^i - H \right) dt \tag{2.30}$$

Utilizando (2.24) se obtiene:

$$dS = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} p_i - H \right) dt \tag{2.31}$$

Con este proceso, se ha calculado a partir de una ecuación diferencial parcial (EDP) de primer orden (2.21), un conjunto de $2n+1$ EDO de primer orden (2.26), (2.27) y (2.31)

2.2. Sistemas Singulares

Los sistemas físicos que obedecen la condición Hessiana (2.18) son sistemas regulares, la mayoría de sistemas conservativos en mecánica clásica cumplen esta condición ya que el Lagrangiano se escribe como la diferencia de la energía cinética y la energía potencial, de tal manera, que si la energía cinética contiene los cuadrados de las velocidades de todas las coordenadas generalizadas, se puede observar claramente que la relación (2.17) será siempre invertible. Sin embargo, existen sistemas tanto en mecánica clásica como en teoría de Campos cuyos Lagrangianos violan la condición (2.18), estos sistemas se conocen como sistemas singulares [3].

Para entender las consecuencias de un Lagrangiano singular $L(q, \dot{q}, t)$, se analizara primero las ecuaciones de movimiento en el formalismo Lagrangiano:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0 \quad i = 1, ..., n. \tag{2.32}$$

El segundo término de (2.32) puede ser expandido calculando la derivada total respecto al tiempo, es decir:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}\ddot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} = 0 \tag{2.33}$$

En esta forma, es fácil determinar que las ecuaciones de Euler-Lagrange son ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden en las coordenadas, además, esta forma sugiere una analogía con la segunda ley de Newton:

$$W_{ij}\ddot{q}^j = F_i(q, \dot{q}, t) \tag{2.34}$$

Donde se ha definido:

$$F_i(q, \dot{q}, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j}\dot{q}^j - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} \tag{2.35}$$

y se ha utilizado la definición de matriz hessiana.

- Si la matriz Hessiana es invertible, $det\, W_{ij} \neq 0$, las ecuaciones (2.34) describen un sistema físico regular, por lo tanto las aceleraciones estarán determinadas unívocamente en función de las velocidades y las coordenadas generalizadas por medio de:

$$\ddot{q}^j = W_{ji}^{-1} F_i(q, \dot{q}, t) \tag{2.36}$$

- Si la matriz Hessiana es no invertible, $det\, W_{ij} = 0$, entonces las ecuaciones (2.34) describen un sistema físico singular, las aceleraciones no estarán determinadas unívocamente en función de las velocidades y las coordenadas generalizadas. Estos sistemas son conocidos como sistemas singulares [7].

Sea W una matriz singular de dimensión n y rango r, tal que $r < n$. De la definición (2.19), se puede determinar que la matriz Hessiana es simétrica, por lo tanto, siempre diagonalizable. Entonces, se tendrá $n - r$ autovalores en la diagonal de la matriz iguales a cero. Asociado a cada uno de estos autovalores, se tendra un autovector ϕ^i, que deben cumplir en general la siguiente ecuación de autovalores:

$$\phi_s^i W_{ij} = 0 \tag{2.37}$$

Donde $s = 1, ..., n - r$. y $j, i = 1, ..., n$. Multiplicando (2.34) por ϕ_s^i resulta:

$$\phi_s^i W_{ij} \ddot{q}^j = \phi_s^i F_i = 0$$

Obteniendo p relaciones que no contienen aceleraciones, donde $p \equiv n - r$:

$$\phi_s^i F_i = 0 \tag{2.38}$$

Las ecuaciones (2.38) son conocidas como vínculos o ligaduras Lagrangianas, y establecen relaciones entre coordenadas o coordenadas con velocidades [7]. Se puede observar con lo planteado, que si la matriz Hessiana es singular con rango $r = n - p$, se puede ordenar las variables q^i de tal manera para formar una matriz de dimensión $r \times r$ no singular, que contenga todos los r autovalores no nulos, de la siguiente manera:

$$det\, W_{ab} \neq 0; \tag{2.39}$$

De este modo, se tendrá r coordenadas que se pueden escribir en la forma (2.36) y $N - R$ coordenadas que llevan a relaciones de la forma (2.38), esto es:

$$q^a \rightarrow \ddot{q}^a = W_{ba} F_b \tag{2.40}$$

$$q^s \rightarrow \phi_s^i F_i = 0 \tag{2.41}$$

Donde $a, b = 1, ..., r$ y $s = 1, ..., p$, con $p + r = n$

El paso al formalismo Hamiltoniano de estos sistemas singulares se realiza utilizando la definición de momento canónico conjugado (2.17), para el conjunto (2.40) será posible invertir las velocidades en términos de las posiciones y los momentos:

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^a = f^a(q^i, p_b) \tag{2.42}$$

Mientras para el conjunto (2.41), se puede determinar:

$$p_s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s} \quad \Rightarrow \quad p_s = g_s\left(q^i, p_b\right) \tag{2.43}$$

Las ecuaciones (2.43) relacionan coordenadas con momentos y son consideradas vinculos Hamiltonianos de la teoría [7]. Dirac fue el primero en mostrar que el formalismo Hamiltoninano puede ser extendido para estudiar sistemas singulares; en el formalismo Hamiltoniano de Dirac , estas relaciones (2.43) se denominan vínculos primarios [10]. En la primera parte de este capitulo se mostró que el formalismo de Hamilton surge del formalismo de Hamilton Jacobi, por lo tanto, la existencia de un formalismo canónico para sistemas singulares esta profundamente relacionado con el problema de la existencia de un formalismo de HJ para tales sistemas.

2.2.1. Sistema de EDP de Hamilton Jacobi

Se puede pensar en principio que la violación de la condición Hessiana impide que la ecuación de HJ pueda ser escrita a partir de la relación (2.16), debido a la no existencia de una función Hamiltoniana que sea única en todo el espacio de fase. Esto en realidad es un problema aparente, como se puede examinar a continuación. Las coordenadas generalizadas en un sistema singular se pueden dividir en coordenadas invertibles $\{q^a\}$ y no invertibles $\{q^s\}$, con esto, la transformación de legendre (2.20) se puede escribir de la siguiente manera:

$$p_i\dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i) = p_a\dot{q}^a + p_s\dot{q}^s - L(q^i, \dot{q}^a, \dot{q}^s) \equiv H(q^i, p_a, \dot{q}^s) \tag{2.44}$$

Ahora considerando la derivada de (2.44) respecto a $\dot{q}^m$:

$$\frac{\partial H(q^i, p_a, \dot{q}^s)}{\partial \dot{q}^m} = p_a\frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^m} + \frac{\partial \dot{q}^s}{\partial \dot{q}^m}p_s - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} \tag{2.45}$$

siendo $\dot{q}^a$ y $\dot{q}^m$ son independientes, se obtiene:

$$\frac{\partial H(q^i, p_a, \dot{q}^s)}{\partial \dot{q}^m} = p_s\delta^s_m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} = p_m - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} = 0$$

Por lo tanto, si los vínculos son respetados, la transformación de Legendre (2.20), determinará una función Hamiltoniana canónica que no depende de las velocidades no invertibles, es decir:

$$H(q^i, p_a, \dot{q}^r) = p_a\dot{q}^a + p_s\dot{q}^s - L(q^i, \dot{q}^a, \dot{q}^s) \equiv H_0(q^i, p_a) \tag{2.46}$$

En la región en que los vínculos son satisfechos, la Hamiltoniana anterior es bien definida y por consiguiente la ecuación de Hamilton-Jacobi puede ser expresada así:

$$\phi_0 \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + H_0(q^i, p_a) = 0 \tag{2.47}$$

Ahora, se definirá la cantidad $-\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^s} \equiv H_s$ en (2.43), de tal manera que los vínculos se puedan escribir de una forma análoga a la ecuación de HJ, (2.47):

$$\phi_s \equiv p_s + H_s(q^i, p_a) = 0 \tag{2.48}$$

Definiendo $p_0 = \frac{\partial S}{\partial t}$ en (2.47) y junto con (2.48) se tiene el conjunto:

$$\phi_0 \equiv p_0 + H_0(q^i, p_a) = 0 \tag{2.49}$$

$$\phi_s \equiv p_s + H_s(q^i, p_a) = 0 \tag{2.50}$$

La ecuación de HJ y los vinculos pueden escribirse de forma unificada así:

$$\phi_\alpha \equiv p_\alpha + H_\alpha(q^i, p_a) = 0 \tag{2.51}$$

Donde $\alpha = 0, 1, ...p$ y se ha definido $t \equiv q^0$. Recordando que aún son validas las condiciones $p_i = \frac{\partial S}{\partial q^i}$ donde $i = 1, ..., n$, las ecuaciones (2.51) forman un conjunto de $p + 1$ ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de primer orden, que se denominan ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi (EDPHJ), [3]. Por lo tanto para conseguir un extremo en la integral de acción se debe buscar una función $S(q, t)$ que satisfaga el conjunto de EDPHJ.

2.2.2. Ecuaciones Características

Se aplicara nuevamente el procedimiento de Cauchy para encontrar ecuaciones diferenciales totales a partir del conjunto de EDPHJ (2.51). Este sistema se puede reescribir así:

$$\phi_\alpha(q^a, q^\alpha, p_a, p_\alpha) = 0 \rightarrow \{\alpha\} = \{0, 1, ..., p\} \tag{2.52}$$

En el cual se cumplen las condiciones:

$$p_\alpha = \frac{\partial S\left(q^a, q^\alpha\right)}{\partial q^\alpha} \rightarrow \{\alpha\} = \{0, 1, ..., p\} \tag{2.53}$$

$$p_a = \frac{\partial S\left(q^a, q^\alpha\right)}{\partial q^a} \rightarrow \{a\} = \{1, ..., r\} \tag{2.54}$$

Tomando el diferencial de la última relación se obtiene:

$$dp_a = \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^b} dq^b + \frac{\partial^2 S}{\partial q^\alpha \partial q^b} dq^\alpha \tag{2.55}$$

Considerando ahora la derivada de (2.52) respecto a q^a:

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\beta}\frac{\partial p_\beta}{\partial q_a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q_a} = 0 \tag{2.56}$$

De acuerdo a (2.51), ϕ_α, depende linealmente de p_α, entonces:

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \delta^\beta_\alpha \frac{\partial p_\beta}{\partial q_a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q_a} = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial p_\alpha}{\partial q_a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q_a} = 0 \tag{2.57}$$

De aqui, se puede determinar la siguiente relación:

$$\frac{\partial p_\alpha}{\partial q_a} = \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^\alpha} \implies \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^\alpha} = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} - \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q_a} \tag{2.58}$$

Sustituyendo esta ecuación en (2.55), se obtiene:

$$dp_a = \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^b} dq^b - \left[\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q_a}\right] dq^\alpha \tag{2.59}$$

Se examinará la primera ecuación del conjunto de EDPHJ (2.51), en la siguiente forma:

$$\phi_0 = p_0 + p_a \dot{q}^a + p_r \dot{q}^r - L(q^i, \dot{q}^a, \dot{q}^r) = 0 \tag{2.60}$$

Usando el vínculo $p_r = -H_r$ y derivando con relación a los momentos p_b, en la expresión anterior da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_0}{\partial p_b} &= \frac{\partial}{\partial p_b}\left[p_a \dot{q}^a\right] - \frac{\partial}{\partial p_b}\left[H_r \dot{q}^r\right] \\ &= \delta^b_a \dot{q}^a - \frac{\partial H_r}{\partial p_b}\dot{q}^r = \dot{q}_b - \frac{\partial H_r}{\partial p_b}\dot{q}^r \end{aligned} \tag{2.61}$$

Mas, p_r no depende de p_b, con esto, se puede reescribir el ultimo término de la expresión anterior por:

$$\frac{\partial H_r}{\partial p_b} = \frac{\partial \left[p_r + H_r\right]}{\partial p_b} = \frac{\partial \phi_r}{\partial p_b}$$

Entonces, se consigue la siguiente relación:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial p_b} = \dot{q}^b - \frac{\partial \phi_r}{\partial p_b}\dot{q}^r \tag{2.62}$$

A esta ecuación se le introducira el término $\dot{q}^0 = \frac{\partial q^0}{\partial t} = \frac{\partial t}{\partial t} = 1$, así que:

$$\dot{q}^b = \frac{\partial \phi_0}{\partial p_b}\dot{q}^0 + \frac{\partial \phi_r}{\partial p_b}\dot{q}^r = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\dot{q}^\alpha, \tag{2.63}$$

Puede ser reescrita en la forma:

$$dq^b = \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b} dq^\alpha \tag{2.64}$$

Reemplazando (2.64) en (2.59) se obtiene:

$$dp_a = \frac{\partial p_a}{\partial q^b}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b} dq^\alpha - \left[\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_b}\frac{\partial p_b}{\partial q_a}\right] dq^\alpha \tag{2.65}$$

Haciendo uso de la propiedad:

$$\frac{\partial p_b}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a}\left[\frac{\partial S}{\partial q^b}\right] = \frac{\partial^2 S}{\partial q^a \partial q^b} = \frac{\partial^2 S}{\partial q^b \partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^b}\left[\frac{\partial S}{\partial q^a}\right] = \frac{\partial p_a}{\partial q^b} \tag{2.66}$$

en el diferencial de p_a, (2.65), se alcanza el siguiente resultado:

$$dp_a = -\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} dq^\alpha \tag{2.67}$$

Ahora, se analizara el diferencial de $S(q^a, q^\alpha)$:

$$dS = \frac{\partial S}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \tag{2.68}$$

Usando la ecuación (2.64), se obtiene:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\partial S}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha + \frac{\partial S}{\partial q^\alpha} dq^\alpha \\ &= \left[p_a \frac{\partial}{\partial p_a}\left(p_\alpha + H_\alpha\right) + p_\alpha\right] \end{aligned}$$

Pero p_α es independiente de p_a, por consiguiente, se determina la relación:

$$dS = \left[p_a \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_a} - H_\alpha \right] dq^\alpha \tag{2.69}$$

Donde el último termino de la anterior relación se ha reemplazado por (2.51). Las ecuaciones (2.64), (2.67) y (2.69) son las ecuaciones características asociadas al sistema de ED-PHJ, (2.51). La solución de las dos primeras ecuaciones son curvas características en el espacio de fase de dimensión $2r$ de las variables (q^a, p_a), paramétrizadas por las variables q^α, entonces, sin tener en cuenta condiciones iniciales, la solución del sistema en el espacio de configuraciones consisten en trayectorias cuyas ecuaciones paramétricas son de la forma $q^a = q^a(q^s, t)$, [3]. Por lo tanto, sistemas singulares en el formalismo de HJ son sistemas de varias variables independientes, con q^s como parámetros en las mismas condiciones que t; por esta razón, se nombrará a (q^a, p_a) como las variables dependientes de la teoría y $q^\alpha \equiv (q^r, t)$ los parámetros independientes del sistema.

Además, las ecuaciones (2.64) y (2.67) son identificadas como las ecuaciones de movimiento del sistema en términos de ecuaciones diferenciales totales. Se puede examinar que para un sistema no singular estas ecuaciones de movimiento se reducen a las ecuaciones de Hamilton usuales (2.24) y (2.27), [6].

La evolución de una observable física $F(q^a, p_a, q^\alpha)$, la cual debe ser función del espacio de fase reducido, esta dada por:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial F}{\partial q^a} dq^a + \frac{\partial F}{\partial p_a} dp_a \tag{2.70}$$

Utilizando las dos primeras ecuaciones características (2.64) y (2.67) se obtiene:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} dq^\alpha + \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} dq^\alpha - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} dq^\alpha = \left[\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} \right] dq^\alpha \tag{2.71}$$

El primer término de la expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera: $\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q^\beta}\delta^\beta_\alpha$. Como ϕ_α depende linealmente de p_α, entonces: $\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\beta} = \delta^\beta_\alpha$, por consiguiente, este término puede ser expresado en la forma:

$$\frac{\partial F}{\partial q^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial q^\beta}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\beta}.$$

Reemplazando este resultado en el diferencial (2.71), se determina que:

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial q^a} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial F}{\partial p_a} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} + \frac{\partial F}{\partial q^\beta} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_\beta} - \frac{\partial F}{\partial p_\beta} \frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^\beta} \right] dq^\alpha \tag{2.72}$$

El último término que se ha restado es un cero ya que F no depende p_β, sin alterar el resultado, mas en esta forma, se puede observar que la estructura entre corchetes permite definir unos paréntesis de Poisson en términos de todas las variables de la teoría, [3]:

$$\{F, G\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q^a} \frac{\partial G}{\partial p_a} - \frac{\partial G}{\partial q^a} \frac{\partial F}{\partial p_a} + \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \tag{2.73}$$

Con estos corchetes, el diferencial (2.72) se puede expresar de la siguiente manera:

$$dF = \{F, \phi_\alpha\} dq^\alpha \tag{2.74}$$

Sin embargo, solo se puede definir verdaderamente un espacio de fase para las variables (q^a, p_a), este espacio, será llamado espacio de fase reducido [3]. La ecuación característica (2.69) puede ser usada para encontrar una solución explicita del conjunto de EDPHJ siempre que conozcamos las soluciones de las ecuaciones características (2.64) y (2.67). Se observa también que (2.69) tiene la forma de la acción canónica referente a un sistema con varias variables independientes, mostrando que la acción es de hecho una solución del sistema [3]. Considerando el caso particular de una variable independiente $q^0 \equiv t$ en (2.69), se determina que:

$$dS = \left[p_i \frac{\partial H_0}{\partial p_i} - H_0 \right] dq^0 \tag{2.75}$$

Recordando que $\dot{q}^i = \frac{\partial H_0}{\partial p_i}$ y $q^0 \equiv t$ se obtiene:

$$S = \int \left[p_i \dot{q}^i - H_0 \right] dt \tag{2.76}$$

Esta expresión tiene la forma de la acción canónica para sistemas regulares. Por lo tanto, los sistemas regulares pueden ser tratados como apenas un caso particular de los sistemas singulares. Entonces, si se aplica el principio de acción estacionaria en (2.69) y haciendo la variación con relación a las variables (q^a, p_a) se recuperaran las ecuaciones características (2.64) y (2.67), [15].

2.2.3. Condiciones de Integrabilidad

El cuadro completo de Carathéodory esta dado por una familia de superficies $S(q^a, q^\alpha)$ que son ortogonales a una congruencia de curvas características q^a, donde la familia de superficies es solución de las EDPHJ y la congruencia de curvas es solución de las ecuaciones características, [16]. Para un sistema físico dado, se debe analizar las condiciones de integrabilidad de las ecuaciones características [6]. Se empezara considerando el hecho de que para todo conjunto de ecuaciones diferenciales totales:

$$dq^i = \Lambda^i_\alpha(q^j, t^\beta)dt^\alpha \tag{2.77}$$

con $i, j = 0, 1, ..., N$ y $\alpha, \beta = 0, 1, ...R < N$, existe un conjunto asociado de ecuaciones diferenciales parciales:

$$X_\alpha f = \Lambda^i_\alpha \frac{\partial f}{\partial q^i} \tag{2.78}$$

Donde X_α son operadores lineales. Dada cualquier solución f dos veces diferenciables del conjunto (2.78), esta debe también satisfacer:

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right](F) = 0 \tag{2.79}$$

La estructura entre corchetes de arriba es definida por:

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right](F) \equiv X_\alpha\{X_\beta(F)\} - X_\beta\{X_\alpha(F)\} \tag{2.80}$$

y se conoce como corchetes de Lie [15]. En un espacio M, los corchetes de Lie calculados para cualquier par de operadores X_α que pertencen a M, debe ser otro operador que también pertence a M, esto es:

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right](F) \equiv C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma(F) \tag{2.81}$$

Donde $C^\gamma_{\alpha\beta}$ son conocidas como constantes de estructura. La condición (2.81) es llamada condición de integrabilidad de Frobenius [15]. La relación de conmutación (2.80) dará el número máximo de ecuaciones linealmente independientes. Cualquier corchete de Lie que resulte en una expresión que no puede ser escrita como (2.81), deberá ser considerada como un nuevo operador X, el cual debe ser agregado al conjunto de operadores X_α, una vez se hallan calculado todos los corchetes de Lie. Este proceso se debe repetir hasta que todos los operadores X cumplan la ecuación (2.81), es decir, hasta que el sistema se cierre en un álgebra de Lie.

Si todos los operadores X_α satisfacen la condición de integrabilidad de Frobenius, el sistema de ecuaciones diferenciales dadas por (2.78) se dice ser completo y el correspondiente conjunto de ecuaciones diferenciales totales (2.77) es integrable, si y solo si, el sistema (2.78), es completo [17].

Este mismo análisis se puede realizar para el conjunto de ecuaciones diferenciales totales (2.64), (2.67) y (2.69), que corresponden a las ecuaciones características asociadas al conjunto de EDPHJ (2.51). Se puede observar que si (2.64) y (2.67) son integrables, la solución de (2.69) se obtendra por cuadraturas, [17]. Los operadores X_α correspondiente a las ecuaciones diferenciales totales (2.64) y (2.67) estan dados por:

$$X_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial q^a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial p_a} - \frac{\partial f}{\partial p_a}\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial q^a} \tag{2.82}$$

La estructura del lado derecho en la expresión anterior constituye lo que se conoce como paréntesis de Poisson, entonces, la relación anterior se puede expresar así:

$$X_\alpha f = \{f, \phi_\alpha\} \tag{2.83}$$

Haciendo actuar ahora el operador X_β en la expresión anterior, se determina:

$$X_\beta \left[X_\alpha(F)\right] = X_\beta \left(\{F, \phi_\alpha\}\right) = \{\{F, \phi_\alpha\}, \phi_\beta\}. \tag{2.84}$$

Reemplazando este resultado en la definición de los corchetes de Lie (2.80), se obtiene:

$$\left[X_\alpha, X_\beta\right](F) = \{\{F, \phi_\beta\}, \phi_\alpha\} - \{\{F, \phi_\alpha\}, \phi_\beta\}. \tag{2.85}$$

Utilizando la identidad de Jacobi para los parentesis de Poisson:

$$\{\{A, B\}, C\} + \{\{C, A\}, B\} + \{\{B, C\}, A\} = 0; \tag{2.86}$$

siendo $A \equiv F$, $B \equiv \phi_\beta$, $C \equiv \phi_\alpha$; el primer término de (2.86) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\{\{F, \phi_\beta\}, \phi_\alpha\} = -\{\{\phi_\alpha, F\}, \phi_\beta\} - \{\{\phi_\beta, \phi_\alpha\}, F\}.$$

Con esto, se puede reescribir (2.85):

$$\begin{aligned} [X_\alpha, X_\beta](F) &= -\{\{\phi_\alpha, F\}, \phi_\beta\} - \{\{\phi_\beta, \phi_\alpha\}, F\} - \{\{F, \phi_\alpha\}, \phi_\beta\} && (2.87) \\ &= -\{\{\phi_\alpha, F\}, \phi_\beta\} - \{\{\phi_\beta, \phi_\alpha\}, F\} + \{\{\phi_\alpha, F\}, \phi_\beta\}. && (2.88) \end{aligned}$$

$$[X_\alpha, X_\beta](F) = \{F, \{\phi_\beta, \phi_\alpha\}\} \tag{2.89}$$

Donde se uso de la propiedad de antisimetría de los paréntesis de Poisson. De igual manera, el lado derecho de (2.81), se puede escribir así:

$$C^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma(F) = C^\gamma_{\alpha\beta}\{F, \phi_\gamma\} = \{F, C^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma\}. \tag{2.90}$$

Reemplazando los resultados (2.89) y (2.90) en (2.81), se obtiene:

$$\{F, \{\phi_\beta, \phi_\alpha\}\} = \{F, C^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma\}$$

Por lo tanto para toda F se determina que:

$$\{\phi_\beta, \phi_\alpha\} = C^\gamma_{\alpha\beta}\phi_\gamma \tag{2.91}$$

Es decir, el conjunto de EDPHJ deben cumplir tambien la condición de integrabilidad de Frobenius (2.81), pero en este caso con el uso de los paréntesis de Poisson. Si el conjunto de EDPHJ cumple esta condición, se dice que el sistema es involutivo y las respectivas ecuaciones características (2.64) y (2.67) son integrables, [15]. En general, los sistemas físicos no cumplen esta condición solo con las EDPHJ calculadas apartir de la definición de momentos canónicos conjugados (2.48). La condición de integrabilidad pueden revelar nuevas ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que complementarán el sistema de EDPHJ, esta situación es completamente permitida por la condición de integrabilidad en la forma (2.91), [18]. Puede suceder otra situación, la cual no es cubierta por la condición (2.91), es el caso en el cual las EDPHJ no son linealmente independientes. Para tratar con esta situación, es necesario reformular la condición de integrabilidad (2.91) utilizando el diferencial (2.74) de la siguiente manera:

$$d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_\beta\}dq^\beta = C^\gamma_{\beta\alpha}\phi_\gamma dq^\beta = 0; \tag{2.92}$$

donde se ha asumido la validez de las ecuaciones $\phi_\gamma = 0$. La condición anterior: $d\phi_\alpha = 0$, exige que los vínculos sean mantenidos inalterados a lo largo de la trayectoria dinámica y garantiza la existencia de soluciones completas para el sistema de EDPHJ, [15].

La condición (2.92) lleva a las siguientes situaciones: La primera es que aparezcan nuevas EDP de la forma $f(q,p) = 0$. Estas deberán ser incorporados al conjunto de EDPHJ después de que todas las EDP sean calculadas. Esto generará una dificultad debido a que se tiene que ampliar el espacio de los parámetros independientes para asignarle uno a cada nueva EDP que surgen de la condición de integrabilidad, [16]. De esta manera, se puede calcular las ecuaciones características del diferencial fundamental definido por:

$$dF = \{F, \phi_\alpha\}dq^\alpha \tag{2.93}$$

Donde ahora, q^α son todos los parámetros independientes del problema. En este punto, las condiciones de integrabilidad de todos las EDPHJ deben ser calculadas otra vez utilizando el diferencial (2.93). Esta es la segunda situación que puede suceder, todas las EDPHJ antiguas y nuevas, esten en involución obedeciendo la condición (2.91). Si las EDPHJ estan en este caso, el sistema da completamente integrable. Pero, puede suceder que el conjunto de EDPHJ no esten en involución con los paréntesis de Poisson.

2.2.4. Paréntesis Generalizados

Presumamos que todas las EDP han sido encontradas y estas forman un conjunto completo de EDPHJ, $\phi_\alpha = 0$; las cuales están relacionadas a un conjunto de parámetros q^α. Separando la variable temporal t, de las otras variables independientes, la condición de integrabilidad para cualquier ϕ_α se escribirá así [18]:

$$d\phi_\alpha = \{\phi_\alpha, \phi_0\}dt + \{\phi_\alpha, \phi_z\}dt^z = 0; \tag{2.94}$$

donde $\{\alpha, \beta\} = \{0, 1, ..., p\}$ y $\{z, x\} = \{1, ..., p\}$.

La integrabilidad para cualquier ϕ_x, esta dada por:

$$d\phi_x = \{\phi_x, \phi_0\}dt + \{\phi_x, \phi_z\}dt^z = 0 \tag{2.95}$$

Definiendo una matriz antisimétrica de elementos $M_{xz} \equiv \{\phi_x, \phi_z\}$, la integrabilidad de ϕ_x da:

$$M_{xz}dt^z = -\{\phi_x, \phi_0\}dt \tag{2.96}$$

Si el conjunto completo de EDPHJ no está en involución, entonces, la matriz M es regular. Por lo tanto, se tiene que los parámetros dt^z, no son linealmente indendientes, debido a la ecuación diferencial total :

$$dt^z = -(M_{zx})^{-1}\{\phi_x, \phi_0\}dt \tag{2.97}$$

Con este resultado, se puede escribir el diferencial (2.94) de la siguiente manera:

$$dF = \left[\{F, \phi_0\} - \{F, \phi_z\}(M_{zx})^{-1}\{\phi_x, \phi_0\}\right] dt \tag{2.98}$$

Por lo tanto, la dinámica se redefinirá eliminando todos los parámetros q^z con excepción de t. Esto permitirá definir los paréntesis generalizados (PG), [18]:

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_z\}(M_{zx})^{-1}\{\phi_x, G\}. \tag{2.99}$$

Estos paréntesis satisfacen todas las propiedades de los paréntesis de Poisson como son antisimetría, linealidad e identidad de Jacobi [19]. Bajo la defininción de PG, (2.98) se expresa así:

$$dF = \{F, \phi_0\}^* dt \tag{2.100}$$

Los paréntesis generalizados definirán la dinámica en el espacio de fase reducido y pueden ser construidos siempre que el conjunto de EDPHJ sea no involutivo. Además se puede observar del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}\{\phi_x, \phi_0\}^* &= \{\phi_x, \phi_0\} - \{\phi_x, \phi_z\}(M_{zy})^{-1}\{\phi_y, \phi_0\} = M_{xz}(M_{zy})^{-1}\{\phi_y, \phi_0\} \\ &= \{\phi_x, \phi_0\} - \delta_{xz}\{\phi_y, \phi_0\} = \{\phi_x, \phi_0\} - \{\phi_x, \phi_0\}\end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\therefore \quad d\phi_x = 0 \tag{2.102}$$

Utilizando la propiedad de antisimetría de los PG :

$$\{A, B\}^* = -\{B, A\}^* \Longrightarrow \{A, B\}^* + \{B, A\}^* = 0 \tag{2.103}$$

y definiendo $A = B \equiv \phi_0$, se determina que

$$\{\phi_0, \phi_0\}^* = 0 \Longrightarrow d\phi_0 = 0 \tag{2.104}$$

Los resultados (2.102) y (2.104) indican que el conjunto de EDPHJ están en involución con los PG.

Puede suceder que la matriz M sea singular de rango $k < p$, [20], entoces, se puede dividir el espacio de los parámetros de la siguiente manera: t y $q^z \equiv \{t^l, t^{\bar{x}}\}$; donde $\{l, s\} = \{1, ..., k\}$, $\{\bar{x}, \bar{z}\} = \{k+1...., p\}$. En este caso, habrá un conjunto de k EDP que no están en involución y $p-k$ EDP que están en involución con los paréntesis de Poisson, de esta manera, la relación (2.96) se puede expandir así:

$$M_{xl}dt^l + M_{x\bar{x}}dt^{\bar{x}} = -\{\phi_x, \phi_0\}dt \tag{2.105}$$

La última expresión determina dos ecuaciones:

$$M_{sl}dt^l + M_{s\bar{x}}dt^{\bar{x}} = -\{\phi_s, \phi_0\}dt \tag{2.106}$$

$$M_{\bar{z}l}dt^l + M_{\bar{z}\bar{x}}dt^{\bar{x}} = -\{\phi_{\bar{z}}, \phi_0\}dt \tag{2.107}$$

De la ecuación (2.106) resulta:

$$\begin{aligned} M_{sl}dt^l &= -\{\phi_s, \phi_0\}dt - M_{s\bar{x}}dt^{\bar{x}} = -\{\phi_s, \phi_0\}dt - \{\phi_s, \phi_{\bar{x}}\}dt^{\bar{x}} \\ &= -\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Donde $\{\bar{\alpha}\} = \{0, k+1, ..., p\}$ y se ha definido $dt \equiv dt^0$, además como las EDP, ϕ_s, no están en involución con los paréntesis de Poisson, entonces, la matriz M_{sl} es regular, por lo tanto existe su inversa y se puede escribir:

$$dt^l = -(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} \tag{2.109}$$

La relación anterior permite eliminar k parámetros independientes, de tal manera que la teoría ahora contara, entonces, con $\bar{\alpha}$ parámetros independientes. De esta manera el diferencial fundamental esta dado por:

$$\begin{aligned} dF &= \{F, \phi_0\}dt + \{F, \phi_{\bar{x}}\}dt^{\bar{x}} + \{F, \phi_s\}dt^s \\ &= \{F, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} + \{F, \phi_l\}dt^l \\ &= \{F, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} - \{F, \phi_l\}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} \\ &= \left[\{F, \phi_{\bar{\alpha}}\} - \{F, \phi_l\}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}\right] dt^{\bar{\alpha}} \end{aligned} \tag{2.110}$$

$$\therefore \; dF = \{F, \phi_{\bar{\alpha}}\}^* dt^{\bar{\alpha}} \tag{2.111}$$

En este caso, los paréntesis generalizados han sido definidos solo con las EDP que no están en involución:

$$\{F, G\}^* \equiv \{F, G\} - \{F, \phi_l\}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, G\} \tag{2.112}$$

Al sustituir la ecuación (2.109) en (2.107) resulta:

$$\begin{aligned} \{\phi_{\bar{z}}, \phi_0\}dt - M_{\bar{z}l}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} + M_{\bar{z}\bar{x}}dt^{\bar{x}} = 0 \\ \{\phi_{\bar{z}}, \phi_0\}dt - M_{\bar{z}l}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} + \{\phi_{\bar{z}}, \phi_{\bar{x}}\}dt^{\bar{x}} = 0 \\ \{\phi_{\bar{z}}, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} - \{\phi_{\bar{z}}, \phi_l\}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}dt^{\bar{\alpha}} = 0 \\ \left[\{\phi_{\bar{z}}, \phi_{\bar{\alpha}}\} - \{\phi_{\bar{z}}, \phi_l\}(M_{ls})^{-1}\{\phi_s, \phi_{\bar{\alpha}}\}\right] dt^{\bar{\alpha}} = 0 \\ \{\phi_{\bar{z}}, \phi_{\bar{\alpha}}\}^* dt^{\bar{\alpha}} = 0 \end{aligned}$$

Como $dt^{\bar{\alpha}} = \{dt, dt^{\bar{x}}\}$, son linealmente independientes, se debe cumplir:

$$\{\phi_{\bar{z}}, \phi_0\}^* = 0 \Longrightarrow d\phi_{\bar{z}} = 0 \tag{2.113}$$

De la definicion (2.112), se puede calcular:

$$\begin{aligned} \{\phi_s, \phi_0\}^* &= \{\phi_s, \phi_0\} - \{\phi_s, \phi_m\}(M_{mn})^{-1}\{\phi_n, \phi_0\} \qquad (2.114) \\ &= \{\phi_s, \phi_0\} - M_{sm}(M_{mn})^{-1}\{\phi_n, \phi_0\} \\ &= \{\phi_s, \phi_0\} - \delta_{sn}\{\phi_n, \phi_0\} = \{\phi_s, \phi_0\} - \{\phi_s, \phi_0\} = 0 \qquad (2.115) \end{aligned}$$

$$\therefore \{\phi_s, \phi_0\}^* = 0 \Longrightarrow d\phi_s = 0. \tag{2.116}$$

De la propiedad de antisimetría de los PG se puede demostrar facilmente que:

$$\{\phi_s, \phi_0\}^* = 0 \Longrightarrow d\phi_0 = 0 \tag{2.117}$$

La integrabilidad (2.113), (2.116) y (2.117) indican que el sistema de EDPHJ está en involución con los paréntesis generalizados y por lo tanto, las respectivas ecuaciones características son integrables.

Capítulo 3

Campo electromagnético libre

Hasta este momento se ha estudiado sistemas con un número finito N de grados de libertad. Ahora se estudiará sistemas mecánicos descritos por campos [11, 21]. En este caso las variables dinámicas de la teoría son los valores de los campos $\psi(x)$ en cada punto del espacio, sustituyendo el conjunto discreto de coordenadas q^i, esto constituye un sistema con un número infinito de grados de libertad. En lugar de $q^i(t)$, el sistema es representado por una función $\psi(x,t)$, con ψ reemplazando q y la variable continua x reemplazando el índice discreto "i".

El concepto de campo se extiende a sistemas no mecánicos como: campo electromagnético, campo gravitacional, campo de Dirac, entre otros. Los anteriores campos generalmente son representados en el espacio de Minkowski en la forma $\psi_a(x)$, donde $a = 1, 2, ..., N$ son las componentes del campo y $x \equiv x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ represena un evento en el espacio-tiempo [21]. A continución se generalizarán los resultados del formalismo de Hamilton Jacobi estudiando uno de los campos físicos más conocidos, el campo electromagnético [22].

En teoría de campos es usual trabajar con la densidad Lagrangiana la cual se relaciona con el Lagrangiano del sistema físico de la siguiente manera:

$$L = \int d^3x \, \mathscr{L} \tag{3.1}$$

El campo electromagnético libre o sin fuentes es un ejemplo conocido en la naturaleza de sistemas singulares, su densidad Lagrangiana esta dada por [3]:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{3.2}$$

Donde $F_{\mu\nu}$ se conoce como tensor de Maxwell y se define de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Los índices con letras griegas μ, ν, α, β toman los valores $0, 1, 2, 3$; $A_\mu = (A_0, A_k)$ es el cuadrivector potencial, los índices con letras latinas i, j, k, l toman los valores $1, 2, 3$. El Lagrangiano es singular ya que (3.2) es invariante por la transformación de gauge local [23]:

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi(x) \tag{3.3}$$

Escribiendo la densidad Lagrangiana para el campo A'_μ:

$$\mathscr{L}' = -\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu\right) \left(\partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu\right)$$

Y considerando la transformación (3.3) se obtendrá que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}' &= -\frac{1}{4} \left[\partial_\mu \left(A_\nu + \partial_\nu \chi(x)\right) - \partial_\nu \left(A_\mu + \partial_\mu \chi(x)\right)\right] \left[\partial^\mu \left(A^\nu + \partial^\nu \chi(x)\right) - \partial^\nu \left(A^\mu + \partial^\mu \chi(x)\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4} \left[\partial_\mu A_\nu + \partial_\mu \partial_\nu \chi(x) - \partial_\nu A_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \chi(x)\right] \left[\partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \chi(x) - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \chi(x)\right] \\
&= -\frac{1}{4} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right) \left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}
\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} \tag{3.4}$$

Se sabe que todo Lagrangiano invariante ante una transformación de gauge local es singular [24], esto puede ser observado también calculando la matriz Hessiana asociada a la densidad Lagrangiana (3.2). Esta matriz se define de la siguiente manera [25]:

$$W^{\nu\beta}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \frac{\delta^2 L}{\delta \dot{A}_\beta(\boldsymbol{x})) \delta \dot{A}_\nu(\boldsymbol{y}))} = \frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\beta \partial \dot{A}_\nu} \delta^3(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \tag{3.5}$$

Calculando la relación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left[F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right] = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial F_{\alpha\beta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \\
&= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \left[\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha\right] = -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \left[\delta^\mu_\alpha \delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta \delta^\nu_\alpha\right] \\
&= -\frac{1}{2} [\underbrace{F^{\mu\nu}}_{-F^{\nu\mu}} - F^{\nu\mu}]
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = F^{\nu\mu} \tag{3.6}$$

De igual manera la derivada de (3.6) respecto a las derivadas de los campos:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} F^{\nu\mu} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\theta} F_{\sigma\theta} \tag{3.7}$$
$$= \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\theta} \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)} \left[\partial_\sigma A_\theta - \partial_\theta A_\sigma\right] = \eta^{\nu\sigma}\eta^{\mu\theta}\left[\delta^\alpha_\sigma \delta^\beta_\theta - \delta^\alpha_\theta \delta^\beta_\sigma\right]$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{L}}{\partial(\partial_\alpha A_\beta)\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \eta^{\nu\alpha}\eta^{\mu\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{\mu\alpha} \tag{3.8}$$

Donde $\eta^{\mu\nu}$ es la métrica de Mikownski y su representación matricial es [11]:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reemplazando $\alpha = 0$ y $\mu = 0$ en (3.8), se tiene la siguiente matriz Hessiana para el sistema físico:

$$W^{\nu\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left(\eta^{\nu 0}\eta^{0\beta} - \eta^{\nu\beta}\eta^{00}\right)\delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3.9}$$

Utilizando la representación matricial de la métrica se determina:

$$W^{\nu\beta}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{3.10}$$

La matriz posee tres autovalores diferentes de cero por lo tanto su rango es 3 menor que su dimensión, indicando que el determinante de la matriz es nulo $det\ W = 0$, [26], esto conlleva a la existencia de un vínculo que surgirá de la definición de los momentos canónicos conjugados. Se escojerá como parámetro de evolución la coordenada x^0, por lo tanto las velocidades relativas a los campos serán definidas por $\dot{A}_\mu \equiv \partial_0 A_\mu$, teniendo en cuenta esto, se puede calcular los momentos canónicos π^μ asociados a los campos A_μ:

$$\pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} \tag{3.11}$$

Sustituyendo $\mu = 0$ en (3.6) se determina que:

$$\pi^\nu = F^{\nu 0} \tag{3.12}$$

Si se considera $\nu = 0$:

$$\pi^0 = F^{00} = \partial^0 A^0 - \partial^0 A^0 = 0$$

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \tag{3.13}$$

Si $\nu = k$:

$$\pi^k = F^{k0} = \underbrace{\eta^{kl}}_{-\delta_{kl}} \underbrace{\eta^{00}}_{1} F_{l0} = -F_{k0} = -\partial_k A_0 + \overbrace{\partial_0 A_k}^{\dot{A}_k}$$

Por lo tanto:

$$\dot{A}_k = \pi^k + \partial_k A_0 \tag{3.14}$$

La relación (3.13) se la conoce como un vínculo primario en el formalismo de Dirac [10], en la literatura de Hamilton Jacobi estas relaciones son tratadas como ecuaciones diferenciales parciales; mientras que la relación (3.14) permite despejar las componentes de las velocidades $\dot{A}_k$ en función de los momentos canónicos y los campos, por lo tanto (3.14) se la interpreta como una ecuación dinámica, en el espacio de fase. Conocidos los momentos canónicos, se puede calcular el Hamiltoniano canónico, el cual es definido por:

$$H_C \equiv \int d^3x \pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - L$$

$$H_C = \int d^3x \left[\pi^\mu(x) \dot{A}_\mu(x) - \mathscr{L} \right] \tag{3.15}$$

La densidad Hamiltoniana canónica de campo electromagnético se determina así:

$$\mathscr{H}_C \equiv \pi^\mu \dot{A}_\mu - \mathscr{L} \tag{3.16}$$

Expandiendo la suma sobre μ y utilizando las relaciones (3.13), (3.14) se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_C &= \pi^0 \dot{A}_0 + \pi^k \dot{A}_k - \mathscr{L} = \pi^k \left(\pi^k + \partial_k A_0\right) - \mathscr{L} \\
&= \pi^k \left(\pi^k + \partial_k A_0\right) + \frac{1}{4}[\overbrace{F_{00}F^{00}}^{0} + \overbrace{F_{0k}}^{-F_{k0}} \underbrace{F^{0k}}_{F^{k0}} + F_{k0}F^{k0} + F_{ki}F^{ki}] \\
&= \pi^k \left(\pi^k + \partial_k A_0\right) + \frac{1}{4}[2 \overbrace{F_{k0}}^{-\pi^k} \underbrace{F^{k0}}_{\pi^k} + F_{ki}F^{ki}]
\end{aligned}$$

De tal manera:

$$\mathscr{H}_C = \frac{1}{2}(\pi^k)^2 + \pi^k \partial_k A_0 + \frac{1}{4} F_{ki}F^{ki} \tag{3.17}$$

3.1. Formalismo de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) asociada al Hamiltoniano (3.15) es:

$$P^t + H_C = 0 \tag{3.18}$$

Donde $P^t \equiv \frac{\partial S}{\partial t}$; se define como el momento canónico conjugado asociado a la coordenada x^0 [3]. Es necesario escribir este momento en términos de una densidad de momento p^t tal que: $P^t \equiv \int d^3xp^t$, que junto con (3.15) permiten escribir la ecuación de HJ (3.18) así:

$$P^t + H_C = \int d^3xp^t + \int d^3x\mathscr{H} = \int d^3x[\underbrace{p^t + \mathscr{H}}_{\phi^t}] = 0 \tag{3.19}$$

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{3.20}$$

La relación (3.13) y (3.20) definen el sistema de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi (EDPHJ) [3]:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{3.21}$$

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \tag{3.22}$$

La EDPHJ (3.21) es asociada al parámetro $x^0 = t$ ya que p^t se ha definido como la densidad de momento canónico conjugado a la variable t y además ϕ^t contiene la $\mathscr{H}$ que esta relacionada directamente con la dinámica del sistema. A la EDPHJ (3.22) se le puede asociar en principio un parámetro arbitrario que sea función del espacio-tiempo, pero debido a que ϕ^1 nace de la definición de momento canónico conjugado al campo $A_0(x)$, se definirá a este campo como el parámetro asociado a esta EDPHJ, es decir que A_0 también es un parámetro que describe la evolución del sistema físico en las mismas condiciones que t. Se debe resaltar que desde el principio en la formulación de HJ la componente A_0 del potencial vector es considerada arbitraria [27], a diferencia de lo que sucede con el método de Dirac, donde la arbitrariedad de A_0 se observa al calcular las ecuaciones de movimiento. Con esto, los campos (A_i, π^i) forman el conjunto de variables dependientes y (t, A_0) el conjunto de variables independientes. La evolución de cualquier variable dinámica $F(A_\mu, \pi^\mu)$ asociada a el sistema, está dado por:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\} dt + \{F(x), \phi^1(y)\} dA_0(y) \right] \tag{3.23}$$

A diferencia de sistemas con finitos grados de libertad, en teoría de campos se tiene un vínculo por cada punto $(\boldsymbol{x})$ del espacio, es por esta razón que en la expresión anterior la integral representa la suma sobre todos estos vínculos en todos los puntos $(\boldsymbol{x})$. Los paréntesis de Poisson entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$[1] se definen de la siguiente manera [3]:

$$\{F(x), G(y)\}_{x_0=y_0} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta A_\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi^\mu(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\mu(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta A_\mu(z)} \right]_{x_0=y_0} \tag{3.24}$$

Donde $x_0 = y_0$ indica que los paréntesis entre $F(x_0, \boldsymbol{x})$ y $G(y_0, \boldsymbol{y})$ deben ser calculados al mismo instante de tiempo. De (3.24) se deduce que los paréntesis de Poisson fundamentales de la teoría son:

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y) \tag{3.25a}$$

$$\{A_\mu(x), A_\nu(y)\} = 0 = \{\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)\} \tag{3.25b}$$

En este momento se puede revisar las condiciones de integrabilidad del sistema de EDPHJ, la integrabilidad de ϕ^1 implica que se deba cumplir:

$$d\phi^1(x) = 0 \tag{3.26}$$

[1]Las variables dinámicas son funcionales de los campos A_i y π^i es decir $F[A_i(x), \pi^i(x)]$, $G[A_i(y), \pi^i(y)]$; la notación F(x) y G(y) es para especificar el punto del espacio donde se evalua cada funcional y que se debe tener en cuenta al calcular los paréntesis de Poisson. Se tiene que resaltar que los paréntesis de Poisson se deben calcular a instantes de tiempos iguales, donde la componente x^0 y y^0, están asociadas a las variables de tiempo de F y G respectivamente.

Utilizando (3.23) se puede escribir esta condición así:

$$d\phi^1(x) = \int d^3y\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}dt + \int d^3y\{\phi^1(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) \tag{3.27}$$

Se calculara los paréntesis necesarios para evaluar la relación (3.27). Se tendra por tanto:

$$\begin{aligned}
\{\phi^1(x), \phi^t(y)\} &= \{\pi^0(x), p^t + \frac{1}{2}(\pi^k(y))^2 + \pi^k(y)\underbrace{\partial_k^y A_0(y)}_{\frac{\partial A_0}{\partial y^k}} + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)\} \\
&= \{\pi^0(x), \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y)\} = \pi^k(y)\partial_k^y\{\pi^0(x), A_0(y)\} \\
&= -\pi^k(y)\underbrace{\partial_k^y\delta^3(x-y)}_{-\partial_k^x\delta^3(x-y)}
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \{\phi^1(x), \phi^t(y)\} = \pi^k(y)\partial_k^x\delta^3(x-y) \tag{3.28}$$

Donde se utilizó la identidad:

$$\partial_x f(x-y) = -\partial_y f(x-y) \tag{3.29}$$

Además:

$$\{\phi^1(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^0(x), \pi^0(y)\} = 0 \tag{3.30}$$

Reemplazando los resultados (3.28) y (3.30) en (3.27), se obtiene:

$$\begin{aligned}
d\phi^1(x) &= \int d^3y\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}dt + \int d^3y\overbrace{\{\phi^1(x), \phi^1(y)\}}^{0}dA_0(y) \\
&= \left[\int d^3y\pi^k(y)\partial_k^x\delta^3(x-y)\right]dt = \partial_k^x\underbrace{\left[\int d^3y\pi^k(y)\delta^3(x-y)\right]}_{\pi^k(x)}dt
\end{aligned}$$

$$d\phi^1(x) = \underbrace{\partial_k^x\pi^k(x)}_{\phi^2}dt = 0 \tag{3.31}$$

La condición de integrabilidad para ϕ^1 genera una nueva ecuación diferencial parcial (EDP) definida de la siguiente manera:

$$\phi^2 \equiv \partial_k^x\pi^k(x) = 0 \tag{3.32}$$

Esta EDP debe ser agregada al conjunto de EDPHJ, por lo tanto es necesario calcular la integrabilidad de esta:

$$d\phi^2(x) = 0 \tag{3.33}$$

Utilizando (3.23) se puede escribir la integrabilidad para ϕ^2 de la siguiente manera:

$$d\phi^2(x) = \int d^3y\{\phi^2(x), \phi^t(y)\}dt + \int d^3y\{\phi^2(x), \phi^1(y)\}dA_0(y)$$

Se calcula por separado los paréntesis de Poisson que aparecen en la relación anterior:

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^t(y)\} &= \{\partial_j^x \pi^j(x), \frac{1}{2}(\pi^k(y))^2 + \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)\} \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_j^x\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} = \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_j^x\{\pi^j(x), \partial_k^y A_i(y) - \partial_i^y A_k(y)\} \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_j^x \left[\partial_k^y\{\pi^j(x), A_i(y)\} - \partial_i^y\{\pi^j(x), A_k(y)\}\right] \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_j^x \left[\delta_i^j \partial_k^x - \delta_k^j \partial_i^x\right] \delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_i^x \partial_k^x - \partial_k^x \partial_i^x\right] F^{ki}(y)\delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial_i^x \partial_k^x F^{ki}(x) - \partial_k^x \partial_i^x F^{ki}(x)\right] \delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}\left[-\partial_k^x \partial_i^x F^{ki}(x) - \partial_k^x \partial_i^x F^{ki}(x)\right] \delta^3(x-y) \\
&= -\partial_k^x \partial_i^x F^{ki}(x)\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Recordando que el producto de un tensor simétrico $\partial_k \partial_i$ y un tensor antisimétrico F^{ki} es nulo, se tiene:

$$\{\phi^2(x), \phi^t(y)\} = 0 \tag{3.34}$$

de igual manera:

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = \{\partial_k^x \pi^k(x), \pi^0(y)\} = 0 \tag{3.35}$$

Reemplazando (3.34) y(3.35) en la integrabilidad de ϕ^2 da:

$$d\phi^2(x) = 0 \tag{3.36}$$

Es decir, la condición de integrabilidad (3.33) es identicamente satisfecha, indicando que no hay mas EDP, por lo tanto el conjunto completo de EDPHJ es:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{3.37}$$

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \tag{3.38}$$

$$\phi^2 \equiv \partial_k \pi^k = 0 \tag{3.39}$$

Como se agrego una nueva EDP, ϕ^2, al antiguo conjunto de EDPHJ (3.21) y (3.22), se debe expandir el espacio de parámetros $(t, A_0(x))$ para relacionar una variable independiente a ϕ^2, esta variable será designada como $W(x)$ y es en principio arbitraria. Considerando el conjunto completo de EDPHJ (3.37),(3.38) y (3.39) el diferencial (3.23) se debe redefinir así:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + \{F(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) + \{F(x), \phi^2(y)\}dW(y)\right] \tag{3.40}$$

Utilizando (3.40) se debe verificar nuevamente las condiciones de integrabilidad de el conjunto EDPHJ; la integrabilidad para ϕ^1 resulta en:

$$\begin{aligned} d\phi^1(x) &= \underbrace{\int d^3y[\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}dt}_{\partial_k^x \pi^k(x)dt} + \underbrace{\{\phi^1(x), \phi^1(y)\}}_{0} dA_0(y) + \underbrace{\{\phi^1(x), \phi^2(y)\}}_{0} dW(y)] \\ &= \partial_k^x \pi^k(x)dt = \phi^2 dt \end{aligned} \tag{3.41}$$

Entonces:

$$d\phi^1(x) = \phi^2(x)dt = 0$$

De igual manera, la integrabilidad para ϕ^2 establece:

$$d\phi^2(x) = \int d^3y \underbrace{\{\phi^2(x), \phi^t(y)\}}_{0} dt + \int d^3y \underbrace{\{\phi^2(x), \phi^1(y)\}}_{0} dA_0(y) + \int d^3y \underbrace{\{\phi^2(x), \phi^2(y)\}}_{0} dW(y) = 0$$

Por lo tanto :

$$d\phi^2(x) = 0$$

De esta manera, se dermina de (3.40) que:

$$d\phi^1(x) = \phi^2(x)dt = 0 \tag{3.42}$$

$$d\phi^2(x) = 0 \tag{3.43}$$

La condición de integrabilidad para ϕ^2 es identicamente cero, mientras la condición para ϕ^1 es proporcional a ϕ^2 que pertenece a las EDPHJ, la condición de integrabilidad para ϕ^t también es identicamente cero, mirar **Apéndice A**; estas relaciones establecen que el conjunto de EDPHJ (3.37),(3.38) y (3.39) esta en involución y por lo tanto las ecuaciones características son integrables.

3.1.1. Ecuaciones características

Se procede a calcular las ecuaciones características asociadas al conjunto de EDPHJ, las cuales corresponden a las ecuaciones de movimiento para las variables (A_i, π^i), de (3.40) se determina que:

$$dA_i(x) = \int d^3y \left[\{A_i(x), \phi^t(y)\}dt + \{A_i(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) + \{A_i(x), \phi^2(y)\}dW(y)\right] \tag{3.44}$$

$$d\pi^i(x) = \int d^3y \left[\{\pi^i(x), \phi^t(y)\}dt + \{\pi^i(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) + \{\pi^i(x), \phi^2(y)\}dW(y)\right] \tag{3.45}$$

Con el fin de obtener las ecuaciones de movimiento para estos campos se utilizaran los siguientes paréntesis de Poisson (Ver **apéndice B** para los calculos detallados):

$$\{A_i(x), \phi^t(y)\} = \left[\pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\right] \delta^3(x-y) \tag{3.46}$$

$$\{A_i(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{3.47}$$

$$\{A_i(x), \phi^2(y)\} = \partial_i^y \delta^3(x-y) \tag{3.48}$$

$$\{\pi^i(x), \phi^t(y)\} = \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x\right] \delta^3(x-y) \tag{3.49}$$

$$\{\pi^i(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{3.50}$$

$$\{\pi^i(x), \phi^2(y)\} = 0 \tag{3.51}$$

Utilizando los resultados anteriores se determina que:

$$dA_i(x) = \int d^3y \underbrace{\{A_i(x), \phi^t(y)\}}_{\left[\pi^i(y)+\partial_i^y A_0(y)\right]\delta^3(x-y)} dt + \int d^3y \overbrace{\{A_i(x), \phi^1(y)\}}^{0} dA_0(y) + \int d^3y \underbrace{\{A_i(x), \phi^2(y)\}}_{\partial_i^y \delta^3(x-y)} dW(y) \tag{3.52}$$

$$= \int d^3y \left[\pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\right] \delta^3(x-y)dt - \partial_i^x \int d^3y \delta^3(x-y) dW(y)$$

$$= \left[\pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x)\right] dt - \partial_i^x dW(x)$$

Definiendo $\dot{A}_i(x) \equiv \partial_0 A_i$ y $\dot{W}(x) \equiv \partial_0 W(x)$

$$\dot{A}_i(x) = \pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x) - \partial_i^x \dot{W}(x) \tag{3.53}$$

Si se compara este resultado con la ecuación (3.14) que surge de la la definición de momentos canónicos, se puede establecer la siguiente condición para el campo independiente $W(x)$:

$$\partial_i \dot{W}(x) = \partial_i \partial_0 W(x) = 0$$

De igual manera la evolución dinámica del campo $\pi^i(x)$, se determina sustituyendo los resultados (3.49), (3.50) y (3.51):

$$d\pi^i(x) = \int d^3y[\{\pi^i(x), \phi^t(y)\}dt + \overbrace{\{\pi^i(x), \phi^1(y)\}}^{0} dA_0(x) + \overbrace{\{\pi^i(x), \phi^2(y)\}}^{0} dW(x)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\delta^i_j \partial^x_k - \delta^i_k \partial^x_j\right] \underbrace{\int d^3y F^{kj}(y) \delta^3(x-y) dt}_{F^{kj}(x)dt}$$

$$= \partial^x_k F^{ki}(x) dt \tag{3.54}$$

Entonces definiendo $\dot{\pi}^i \equiv \partial_0 \pi^i$, se obtiene que:

$$\dot{\pi}^i(x) = \partial^x_k F^{ki}(x) \tag{3.55}$$

La expresión anterior se puede escribir de la siguiente manera:

$$\partial_0 \overbrace{\pi^i}^{F^{i0}} = \partial_k F^{ki}$$

$$\partial_0 F^{i0} = \partial_k F^{ki}$$

$$-\partial_0 F^{0i} - \partial_k F^{ki} = 0$$

$$\partial_0 F^{0i} + \partial_k F^{ki} = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu i} = 0 \tag{3.56}$$

Utilizando la última relación de las EDPHJ:

$$\phi^2 \equiv \partial_k \pi^k = 0$$
$$\partial_k \underbrace{\pi^k}_{F^{k0}} = 0$$
$$\partial_k F^{k0} + \partial_0 F^{00} = \partial_\mu F^{\mu 0} = 0 \tag{3.57}$$

Donde se ha sumado el cero $F^{00} = 0$ debido a la antisimetria de $F^{\mu\nu}$. Las ecuaciones (3.56) y (3.57) se pueden escribir de forma compacta de la siguiente manera:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + \partial_\mu F^{\mu i} = \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \tag{3.58}$$

La ecuación (3.58) describe el campo electromagnético sin fuentes, que en componentes se escribe como:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{E} = 0 \tag{3.59}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{3.60}$$

El hecho que el tensor de campo electromagnético, $F^{\mu\nu}$, satisface la siguiente relación:

$$\partial_\mu F_{\nu\alpha} + \partial_\nu F_{\alpha\mu} + \partial_\alpha F_{\mu\nu} = 0, \tag{3.61}$$

conocida como identidad de Bianchi, se puede deducir de aqui:

$$\nabla\cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{3.62}$$
$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{3.63}$$

(3.57),(3.58),(3.60) y (3.61) constituyen lo que se conoce como las ecuaciones del campo electromagnético libre.

Capítulo 4

Mecánica pseudo-clásica

El límite clásico ($\hbar \to 0$) de la teoría cuántica para fermiones y bosones [28], se denomina mecánica pseudo-clásica [9], estos sistemas físicos se describen por medio de variables reales o complejas (q_i), que se utilizan para describir bosones y variables de Grassmann ψ_α, que se emplean para describir fermiones. Por esta razón se introducirá las ideas básicas sobre un álgebra de Grassmann que serán utilizadas en el desarrollo de este trabajo, este planteamiento se basa en las siguientes referencias [9, 8, 27].

4.1. Álgebra de Grassmann

La dinámica de un sistema físico es descrita por medio de funciones que son soluciones de ecuaciones diferenciales, la característica de estas funciones es que conmutan entre si, esto es:

$$f * g = g * f \tag{4.1}$$

La relación anterior define lo que se denomina como un álgebra conmutativa. Sin embargo existen otras álgebras, en particular el álgebra de Grassman, en la cual sus elementos no cumplen la relación (4.1).

Un álgebra de Grassmann G_N, finita de dimensión N, es aquella constituida por N elementos ψ_α con $\alpha = 1, ..., N$, denominados generadores, los cuales satisfacen la siguiente relación [9]:

$$\psi_\alpha \psi_\beta + \psi_\beta \psi_\alpha = 0 \tag{4.2}$$

La relación (4.2) indica que el orden en que aparecen las variables de Grassmann en un producto es muy importante, ya que hay un cambio de signo cuando una variable es conmutada.

Si $\alpha = \beta$ en (4.2) se tiene:

$$\psi_\alpha^2 = 0 \tag{4.3}$$

Por lo tanto las variables de Grassmann son nilpotentes, es decir que la potencia de cualquier variable igual o mayor a dos, son idénticamente nulas [8] . Si Ω pertenece a G_N, Ω se puede expandir en términos de los generadores de la siguente manera [27]:

$$\Omega = \omega_0 + \omega_\alpha \psi_\alpha + \omega_{\alpha\beta} \psi_\alpha \psi_\beta + \omega_{\alpha\beta\sigma} \psi_\alpha \psi_\beta \psi_\sigma + \omega_{\alpha_1,...,\alpha_N} \psi_{\alpha_1} ... \psi_{\alpha_N} \tag{4.4}$$

Donde $\omega_0, \omega_\alpha, ..., \omega_{\alpha_1,...,\alpha_N}$ son números reales o complejos. Se llamará a $\Omega \in G_N$ par (impar) si la expansión (4.4) contiene coeficientes $\omega_{\alpha_1,...,\alpha_k}$ con k par (impar) diferente de cero. Entonces se define sobre elementos y funciones del álgebra de Grassmann el grado o paridad, asignando el valor cero para elementos pares, y el número 1 a elementos impares, el grado de Ω será denotado por n_Ω. Para elementos $\Omega, \Phi \in G_N$ las siguientes propiedades son validas :

$$n_{\Omega\Phi} = n_\Omega + n_\Phi \quad , \quad \Omega\,\Phi = (-1)^{n_\Omega n_\Phi} \Phi\,\Omega \tag{4.5}$$

la suma es definida en módulo dos. Para el caso particular que se tenga tres generadores ψ_1, ψ_2, ψ_3 que pertenecen a G_3, se obtendran los siguientes elementos de la base: $I, \psi_1, \psi_2, \psi_3$, $\psi_1\psi_2, \psi_1\psi_3, \psi_2\psi_3, \psi_1\psi_2\psi_3$; la dimensión de la base es: $d = 2^N$ [9], en el caso $N = 3$, $d = 2^3 = 8$. Si Ω pertenece a G_3 su expansión en términos de los elementos de la base es:

$$\Omega = \omega_0 I + \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3 + \omega_{12}\psi_1\psi_2 + \omega_{13}\psi_1\psi_3 + \omega_{23}\psi_2\psi_3 + \omega_{123}\psi_1\psi_2\psi_3 \tag{4.6}$$

Se puede obsevar para este caso particular que G_3 se puede dividir en 2 sub-conjuntos: $G_3 = G_3^{(0)} \oplus G_3^{(1)}$ Donde:

- $G_3^{(0)}$: Contiene todos los elementos pares en los generadores, estos elementos son: $I; \psi_1\psi_2; \psi_1\psi_3; \psi_2\psi_3$.

- $G_3^{(1)}$: Contiene todos los elementos impares en los generadores: $\psi_1; \psi_2; \psi_3; \psi_1\psi_2\psi_3$

.

4.1.1. Expansión en series de potencias de funciones de variables Grassmannianas

Sean x y y variables usuales del álgebra conmutativa y ψ_1, ψ_2 variables Grassmannianas. Si $F(x)$ es una función bien comportada de x en la vecindad de $x = 0$, la expansión de la función $F(x)$ en series de potencias en torno a este punto es:

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... \tag{4.7}$$

Donde los a_i son números. Si la función depende de las variables (x, y) su expansión entorno a la región $x = 0$, $y = 0$ es:

$$F(x, y) = a_{00} + a_{10} x + a_{01} y + a_{11} xy + a_{21} x^2 y + ... \tag{4.8}$$

donde a_{ij} son números complejos. Sea $f(\psi_1)$ una función de la variable de Grassmann ψ_1, utilizando la propiedad (4.3), se tendra que la expansión más general de la función $f(\psi_1)$ es:

$$f(\psi_1) = f_0 + f_1 \psi_1 \tag{4.9}$$

Donde f_i son números reales o complejos. Si se considera el caso de una función $g(\psi_1, \psi_2)$ tendremos la siguiente expansión:

$$g(\psi_1, \psi_2) = g_{00} + g_{10}\psi_1 + g_{01}\psi_2 + g_{11}\psi_1\psi_2 \tag{4.10}$$

Donde g_{ij} son números reales o complejos. Se puede analizar como ejemplo la serie de Taylor de la función exponencial en las dos álgebras [8]:

- **Álgebra conmutativa**:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$f(x, y) = e^{xy} = 1 + xy + \frac{(xy)^2}{2} + \frac{(xy)^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(xy)^n}{n!}$$

- **Álgebra de Grassmann**: Definiendo la función exponencial grassmaniana de manera análoga al álgebra conmutativa, se obtiene:

$$\Omega(\psi) = e^{\psi} = 1 + \psi$$

$$\Omega(\psi_1, \psi_2) = e^{\psi_1 \psi_2} = 1 + \psi_1 \psi_2$$

No aparecen términos de orden superior debido a la propiedada de nilpotencia de estas variables. Es muy común también trabajar con funciones que dependen de variables bosonicas (x, y) y de variables fermiónicas (ψ_1, ψ_2), las cuales definen lo que se conoce como un superespacio; la expansión de estas funciones toma la siguiente forma:

$$f(x, y, \psi_1, \psi_2) = a(x, y) + b(x, y)\psi_1 + c(x, y)\psi_2 + d(x, y)\psi_1\psi_2 \tag{4.11}$$

Donde los coeficientes a, b, c, d son funciones de las variables bosonicas (x, y)

4.1.2. Derivadas de los elementos del álgebra de Grassmann

En álgebra conmutativa las operaciones de derivación e integración son definidas por medio de límites y poseen una interpretación geométrica [29], mientras que en un álgebra de Grassmann estas operaciones no son definidas con límites ni tienen una interpretación geométrica, son definidas como operaciones de identidad [27]. Las reglas para calcular la derivada de un generador del álgebra respecto a otro generador estan definidas por:

$$\frac{\partial \psi_\beta}{\partial \psi_\alpha} = \delta_{\beta\alpha} \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial (1)}{\partial \psi_\alpha} = 0 \tag{4.13}$$

Aunque estas reglas son semejantes a las del álgebra usual, se debe tener en cuenta que la variable a ser derivada debe estar al lado del operador diferencial ya sea por la derecha o por la izquierda, esto permite definir dos tipos de derivadas por la izquierda (L) y por la derecha (R). Entonces si $\Omega(\psi)$ pertenece a G_N se tiene:

$$\delta\Omega(\psi) = \delta\psi_\alpha \frac{\partial\Omega}{\partial\psi_\alpha}|_R = \frac{\partial\Omega}{\partial\psi_\alpha}|_L \delta\psi_\alpha \tag{4.14}$$

Considerando el caso en que $\Omega = \psi_1\psi_2\psi_3$ con paridad $n_\Omega = 1$. La derivada de Ω respecto a ψ_1 por la derecha es:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}|_R = \psi_1\psi_2\psi_3 \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_1} = -\psi_2 \underbrace{\psi_1\psi_3}_{-\psi_3\psi_1} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_1} = \psi_2\psi_3 \frac{\partial\psi_1}{\partial\psi_1}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}|_R = \psi_2\psi_3 \tag{4.15}$$

Para llevar a la variable que se va a derivar al lado del operador derivada es necesario realizar permutaciones utilizando la relación de anticonmutación (4.2) como se muestra en la derivada anterior. También se puede calcular la derivada de Ω respecto ψ_1 por la izquierda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}|_L = \frac{\partial}{\partial\psi_1}(\psi_1\psi_2\psi_3) = \frac{\partial\psi_1}{\partial\psi_1}\psi_2\psi_3 \tag{4.16}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_1}|_L = \psi_2\psi_3 \tag{4.17}$$

Se tienen lo siguiente: si $n_\Omega = 1$ la derivada por la derecha es igual a la derivada por la izquierda.

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_i}|_R = \frac{\partial\Omega}{\partial\psi_i}|_L \tag{4.18}$$

Examinando el caso en que Ω es de paridad par ($n_\Omega = 0$), por ejemplo $\Omega = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$, la derivada de Ω respecto a ψ_3 por la derecha y por la izquierda es respectivamente:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_3}|_R = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\psi_3} = -\psi_1\psi_2\psi_4 \frac{\partial\psi_3}{\partial\psi_3}$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_3}|_R = -\psi_1\psi_2\psi_4 \tag{4.19}$$

Ahora se calculara la derivada por la izquierda:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\psi_3}|_L = \frac{\partial}{\partial\psi_3}(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4) = -\frac{\partial}{\partial\psi_3}(\psi_1\psi_3\psi_2\psi_4) = \frac{\partial\psi_3}{\partial\psi_3}\psi_1\psi_2\psi_4 = \psi_1\psi_2\psi_4$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_L = \psi_1 \psi_2 \psi_4 \tag{4.20}$$

Por lo tanto si Ω tiene paridad par se obtiene:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i}|_R = -\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i}|_L \tag{4.21}$$

De manera general se determina que si Ω_1 y Ω_2 pertenecen a G_N entonces la derivada izquierda, del producto de estas funciones respecto al generador ψ_α esta dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}(\Omega_1 \Omega_2) = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \psi_\alpha}\Omega_2 + (-1)^{n_{\Omega_1} n_{\Omega_2}}\Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \psi_\alpha} \tag{4.22}$$

4.1.3. Integrales de los elementos del álgebra de Grassmann

La operación de integración sobre los generadores del algebra de Grassmann fue introducida por Berezin en (1966) [9], junto con:

$$\psi_\alpha d\psi_\beta + d\psi_\beta \psi_\alpha = 0$$
$$d\psi_\alpha d\psi_\beta + d\psi_\beta d\psi_\alpha = 0$$

Las reglas de integración para cada generador del álgebra son definidas de la siguiente manera:

$$\int d\psi_\alpha \equiv 0 \tag{4.23}$$

$$\int \psi_\alpha d\psi_\alpha \equiv 1 \quad \text{No hay suma sobre } \alpha \tag{4.24}$$

Estas reglas se complementan con la condición de que la variable al ser integrada tiene que estar al lado del diferencial correspondiente al igual que en las derivadas. Como ejemplo se considera la integración de la función: $\Omega = \omega_0 + \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_{12}\psi_1\psi_2$, respecto al generador ψ_1, donde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_{12}$ son números reales:

$$\begin{aligned}\int \Omega d\psi_1 &= \omega_0 \int d\psi_1 + \omega_1 \int \psi_1 d\psi_1 + \omega_2\psi_2 \int d\psi_1 + \omega_{12} \int \psi_1\psi_2 d\psi_1 \\ &= \omega_0 \int d\psi_1 + \omega_1 \int \psi_1 d\psi_1 + \omega_2\psi_2 \int d\psi_1 - \omega_{12}\psi_2 \int \psi_1 d\psi_1\end{aligned}$$

Utilizando las definiciones (4.23) y (4.24) se determina:

$$\int \Omega d\psi_1 = \omega_1 - \omega_{12}\psi_2 \tag{4.25}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}
\int \Omega d\psi_1 d\psi_2 &= \omega_0 \int d\psi_1 d\psi_2 + \omega_1 \int \psi_1 d\psi_1 d\psi_2 + \omega_2 \int \psi_2 d\psi_1 d\psi_2 + \omega_{12} \int \psi_1\psi_2 d\psi_1 d\psi_2 \\
&= -\omega_{12} \int \psi_1 d\psi_1 \psi_2 d\psi_2 \\
&= -\omega_{12}
\end{aligned}$$

$$\int \Omega d\psi_1 d\psi_2 = -\omega_{12} \tag{4.26}$$

Para observar una característica importante de las derivadas e integrales de variables de Grassmann, se calculará las derivadas derechas de la función anterior Ω:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_R &= (\omega_0 + \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_{12}\psi_1\psi_2)\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_1} \\
&= \omega_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_1} - \omega_{12}\psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_1}
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_R = \omega_1 - \omega_{12}\psi_2 \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi_2 \partial \psi_1}|_R &= \frac{\partial}{\partial \psi_2}|_R \left[\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_R\right] = (\omega_1 - \omega_{12}\psi_2)\,\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_2} \\
&= -\omega_{12} \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi_2 \partial \psi_1}|_R = -\omega_{12} \tag{4.28}$$

Comparando las relaciones (4.25) y (4.26) con (4.27) y (4.28) respectivamente, se puede observar que las operaciones derivación e integración en álgebra de Grassmann son idénticas.

4.1.4. Definición de función analítica

Los estados fermionicos están asociados a funciones Grassmanianas escritas en términos de un sub-conjunto de generadores del álgebra, denóminadas funciones analíticas [8]. La definición general de función analítica para un álgebra de Grassman con dos generadores es:

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(\psi_1) = f_o + f_{10}\psi_1 \tag{4.29a}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \psi_1} = 0 \quad \Longrightarrow \quad F(\psi_2) = f_o + f_{10}\psi_2 \tag{4.29b}$$

Esta definición es muy diferente a lo que se conoce por funciones analíticas en álgebra conmutativa.

4.2. Formalismo Lagrangiano

El espacio de configuraciones de un sistema gobernado por un Lagrangiano de la forma:

$$L = L(q, \dot{q}, \psi, \dot{\psi}, t)$$

donde q,$\dot{q}$ son variables bosonicas y ψ,$\dot{\psi}$ variables fermionicas, se conoce como un super-espacio real. Se puede asociar a este Lagrangiano una integral de acción:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \psi_\alpha(t), \dot{q}_i(t), \dot{\psi}_\alpha(t)) = A[q_i, \psi_\alpha] \tag{4.30}$$

Se sabe que la trayectoria que seguirá el sistema es la que torne un extremo la acción (4.30), esto se conoce como el principio de Hamilton [9], entonces la primera variación de la acción considerando variaciones independientes de las variables bosonicas q_i y de las variables fermionicas ψ_α, es:

$$\delta A[q, \psi] = 0 \tag{4.31}$$

Con las condiciones de frontera $\delta q_i|_{t_1}^{t_2} = 0$ y $\delta\psi_i|_{t_1}^{t_2} = 0$, y considerando derivadas izquierdas respecto a las variables fermionicas, se determina:

$$\begin{aligned}
\delta A[q,\psi] &= \delta\left[\int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t),\psi_\alpha(t),\dot{q}_i(t),\dot{\psi}_\alpha(t))\right] \qquad (4.32)\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\delta L(q_i(t),\psi_\alpha(t),\dot{q}_i(t),\dot{\psi}_\alpha(t))\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\underbrace{\delta\dot{q}_i}_{\frac{d}{dt}(\delta q_i)} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}\delta\psi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_\alpha}\delta\underbrace{\dot{\psi}_\alpha}_{\frac{d}{dt}(\delta\psi_\alpha)}]\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt[\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial\psi_\alpha}\delta\psi_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_\alpha}\delta\psi_\alpha\right)\\
&- \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_\alpha}\right)\delta\psi_\alpha]\\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} dt\left[\frac{\partial L}{\partial\psi_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_\alpha}\right)\right]\delta\psi_\alpha\\
&+ \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\delta q_i|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_\alpha}\delta\psi_\alpha|_{t_1}^{t_2}
\end{aligned}$$

Además recordando que δq_i y $\delta\psi_\alpha$ son variaciones arbitrarias e independientes se debe cumplir por separado, debido al lema fundamental del cálculo de variaciones [30], que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}\right) = 0 \qquad (4.33)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\psi_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}_\alpha}\right) = 0 \qquad (4.34)$$

Las expresiones (4.33) y (4.34) corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen la dinámica de las variables bosonicas y fermionicas. La ecuación de movimiento (4.34) se calcula utilizando derivadas izquierdas.

4.3. Formalismo Hamiltoniano

Los momentos canónicos asociados a q_i y ψ_α se definen respectivamente de la siguiente manera:

$$p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i} \qquad (4.35)$$

$$\pi^{\alpha} \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_{\alpha}} \tag{4.36}$$

Donde cabe resaltar que el momento asociado a ψ_{α} es definido con derivadas izquierdas y al igual que ψ_{α}; π^{α} tambien es una variable de Grassmann. Una vez definidos los momentos canónicos, el Hamiltoniano canónico, bajo la definición de derivada izquierda, es definido por:

$$H_C \equiv \dot{q}_i p^i + \dot{\psi}_{\alpha} \pi^{\alpha} - L \tag{4.37}$$

Utilizando el principio de Hamilton modificado [9], se puede calcular las ecuaciones de movimiento de Hamilton a partir de la condición:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\dot{q}_i p^i + \dot{\psi}_{\alpha} \pi^{\alpha} - H_C \right] = 0 \tag{4.38}$$

La transformación de Legendre (4.37) define el espacio de fase de variables independientes $(q_i, p^i, \psi_{\alpha}, \pi^{\alpha})$, considerando variaciones en estas cantidades se obtiene que:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [\delta \dot{q}_i p^i + \dot{q}_i \delta p^i + \delta \dot{\psi}_{\alpha} \pi^{\alpha} + \dot{\psi}_{\alpha} \delta \pi^{\alpha} - \frac{\partial H_C}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H_C}{\partial p^i} \delta p^i - \frac{\partial H_C}{\partial \psi_{\alpha}} \delta \psi_{\alpha}$$
$$- \frac{\partial H_C}{\partial \pi^{\alpha}} \delta \pi^{\alpha}] = 0$$

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{d}{dt}(\delta q_i) p^i + \dot{q}_i \delta p^i + \frac{d}{dt}(\delta \psi_{\alpha}) \pi^{\alpha} + \dot{\psi}_{\alpha} \delta \pi^{\alpha} - \frac{\partial H_C}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H_C}{\partial p^i} \delta p^i \tag{4.39}$$
$$- \frac{\partial H_C}{\partial \psi_{\alpha}} \delta \psi_{\alpha} - \frac{\partial H_C}{\partial \pi^{\alpha}} \delta \pi^{\alpha}] = 0$$

Utilizando las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{dt}(\delta q_i) p^i = \frac{d}{dt}\left(\delta q_i p^i\right) - \delta q_i \dot{p}^i \tag{4.40}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta \psi_{\alpha}) \pi^{\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\delta \psi_{\alpha} \pi^{\alpha}\right) - \delta \psi_{\alpha} \dot{\pi}^{\alpha} \tag{4.41}$$

en la variación de la acción, resulta:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [-\delta q_i \dot{p}^i + \dot{q}_i \delta p^i - \delta \psi_{\alpha} \dot{\pi}^{\alpha} + \dot{\psi}_{\alpha} \delta \pi^{\alpha} - \frac{\partial H_C}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H_C}{\partial p^i} \delta p^i \tag{4.42}$$
$$- \frac{\partial H_C}{\partial \psi_{\alpha}} \delta \psi_{\alpha} - \frac{\partial H_C}{\partial \pi^{\alpha}} \delta \pi^{\alpha}] + \delta q_i p^i|_{t_1}^{t_2} + \delta \psi_{\alpha} \pi^{\alpha}|_{t_1}^{t_2} = 0$$

Además, utilizando la condición de extremos fijos $\delta q|_{t_1}^{t_2} = 0$, $\delta\psi|_{t_1}^{t_2} = 0$ y que las variaciones de q, p, ψ, π son arbitrarias e independientes, se determina:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_C}{\partial p^i} \tag{4.43}$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H_C}{\partial q_i} \tag{4.44}$$

$$\dot{\psi}_\alpha = -\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} \tag{4.45}$$

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha} \tag{4.46}$$

Las relaciones (4.43) a (4.46) son conocidas como ecuaciones de Hamilton y describen la dinámica de un sistema de partículas determinado por variables bosonicas y fermionicas.

4.3.1. Paréntesis de Bose-Fermi

Sea $F(q, \psi, p, \pi, t)$ una variable dinámica, donde q, ψ, p, π definen una trayectoria en el espacio de fase satisfaciendo las ecuaciones de Hamilton, entonces, la evolución temporal de F es determinada por:

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{d\psi_\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{dp^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{d\pi_\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.47}$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton (4.43) a (4.46) en la expresión anterior:

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_C}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H_C}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.48}$$

Agrupando de la siguiente manera se determina que:

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_C}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H_C}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.49}$$

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \{F, H_C\} + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{4.50}$$

Donde $\{F, H_C\}$ define el paréntesis de Poisson de la función $F(q, \psi, p, \pi, t)$ con el Hamiltoniano canónico.

$$\{F, H_C\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_C}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H_C}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}\right) \tag{4.51}$$

Los paréntesis de Poisson para una teoría que describe bosones y fermiones se conocen como paréntesis de Bose-Fermi [9], o paréntesis de Berezin [6]. Con ayuda de estos paréntesis se puede escribir las ecuaciones de Hamilton en la forma particular:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H_C\} \tag{4.52}$$

$$\frac{dp^i}{dt} = \{p_i, H_C\} \tag{4.53}$$

$$\frac{d\psi_\alpha}{dt} = \{\psi_\alpha, H_C\} \tag{4.54}$$

$$\frac{d\pi_\alpha}{dt} = \{\pi_\alpha, H_C\} \tag{4.55}$$

Si B representa alguna variable bosónica y F una variable fermiónica, entonces podemos definir los siguientes tres paréntesis de Bose-Fermi entre ellas:

$$\{B_1, B_2\} = \left(\frac{\partial B_1}{\partial q_i}\frac{\partial B_2}{\partial p^i} - \frac{\partial B_1}{\partial p^i}\frac{\partial B_2}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial B_2}{\partial \psi_\alpha}\right) \tag{4.56a}$$

$$\{F_1, F_2\} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial F_2}{\partial p^i} + \frac{\partial F_1}{\partial p^i}\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \psi_\alpha}\right) \tag{4.56b}$$

$$\{F, B\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial B}{\partial \psi_\alpha}\right) \tag{4.56c}$$

Los paréntesis de Bose-Fermi cumplen las siguientes propiedades [9]:

$$\{A, B\} = -(-1)^{n_A n_B}\{B, A\} \tag{4.57}$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \tag{4.58}$$

$$\{A, BC\} = (-1)^{n_A n_B} B\{A, C\} + \{A, B\}C \tag{4.59}$$

$$\{AB, C\} = (-1)^{n_B n_C}\{A, C\}B + A\{B, C\} \tag{4.60}$$

$$0 = \underbrace{(-1)^{n_A n_C}\{A, \{B, C\}\} + (-1)^{n_A n_B}\{B, \{C, A\}\} + (-1)^{n_C n_B}\{C, \{A, B\}\}}_{\text{Identidad de Jacobi}} \tag{4.61}$$

Donde n_A, n_B, n_C representan la paridad de A, B, C respectivamente.

4.4. Modelo no relativista

El siguiente ejemplo que se desarollará a continuación tiene el propósito de aplicar los conceptos antes mencionados en un problema mecánico, este ejemplo se basa en la referencia [31].

Consideremos una particula libre no relativista con coordenadas de posición $x^n = x^n(t)$, donde $n = 1, 2, 3$; la descripción de los grados de libertad del spin estan asociados a tres variables de Grassmann $\psi^n = \psi^n(t)$, las cuales transforman como vectores mediante transformaciones del grupo de rotaciones espaciales. El Lagrangiano para una particula libre no relativista, sin considerar su espin, es:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \tag{4.62}$$

Para estudiar el espin de una particula libre, se deberia agregar al Lagrangiano (4.62), la parte cinética de las variables de Grassmann, para ello se debe tener en cuenta que ella debe ser una función par y real. Debido a la propiedad de nilpotencia de las variables Grassmannianas (4.3), el término mas simple que se puede construir es $\dot{\psi}_n\psi^n$, [31]. Bajo la operación de complejo conjugado el término anterior transforma así:

$$\left(\dot{\psi}_n\psi^n\right)^* = (\psi^n)^*(\dot{\psi}_n)^* = \psi^n\dot{\psi}_n = -\dot{\psi}_n\psi^n \tag{4.63}$$

por lo tanto, para garantizar que el Lagrangiano sea real, el término cinético de las variable Grassmannianas deben ser multiplicado por el imaginario puro i. Entonces, el Lagrangiano para una particula no relativista, considerando su espin, se propone para ser:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{i}{2}\dot{\psi}_n\psi^n = \frac{1}{2}m\dot{x}_n\dot{x}^n + \frac{i}{2}\dot{\psi}_n\psi^n \tag{4.64}$$

La ecuacion de Euler-Lagrange (4.33) y (4.34) para el Lagrangiano (4.64) resultan ser:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = 0 \tag{4.65}$$

$$\dot{\psi}^n = 0 \tag{4.66}$$

Las relaciones (4.35) y (4.36) determinan los momentos canónicos conjugados asociados a las variables x^n y ψ^n respectivamente, recordando que en (4.36) se utilizan derivadas izquierdas, se deduce:

$$p_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^n} = m\dot{x}_n \tag{4.67}$$

Por lo tanto se puede escribir las velocidades en términos de los momentos así:

$$\dot{x}_n = \frac{p_n}{m} \tag{4.68}$$

En cuanto que:

$$\pi_n \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^n} = \frac{i}{2}\psi_n \tag{4.69}$$

determina tres vínculos, ya que no es posible despejar las velocidades $\dot{\psi}_n$ en términos de los momentos π_n. Estos vínculos son definidos como vínculos primarios de acuerdo al formalismo de Dirac [10]:

$$\phi_n = \pi_n - \frac{i}{2}\psi_n \approx 0 \tag{4.70}$$

El Hamiltoniano canónico del sistema esta definido por la trasformación de Legendre (4.37):

$$H_C = \dot{x}^n p_n + \dot{\psi}^n \pi_n - L \tag{4.71}$$

Utilizando (4.68) y (4.69), se obtiene el Hamiltoniano canónico para el sistema:

$$H_C = \frac{p^n p_n}{m} + \frac{i}{2}\dot{\psi}^n \psi_n - \frac{1}{2}m\frac{p^n p_n}{m^2} - \frac{i}{2}\dot{\psi}^n \psi_n \tag{4.72}$$

$$H_C = \frac{1}{2}\frac{p^n p_n}{m} \tag{4.73}$$

Siguiendo con el formalismo de Dirac, se debe definir el Hamiltoniano primario así:

$$H_P = H_C + u^n \phi_n \tag{4.74}$$

Donde u^n son variables de Grassmann de paridad impar $n_u = 1$ y en principio son arbitrarios, por esta razón se dice que el H_P no es unico. La dinámica del sistema esta asociada con el Hamiltoniano primario y las igualdades son igualdades débiles.

Las condiciones de consistencia de los vínculos ϕ_n exigen que se cumpla [10]:

$$\dot{\phi}_n = \{\phi_n, H_P\} \approx 0 \tag{4.75}$$

Para calcular estas condiciones es necesario tener en cuenta los siguientes paréntesis de Bose-Fermi fundamentales, deducidos de (4.56a) y (4.56b):

$$\{x^n, p_m\} = \delta^n_m, \qquad \{\psi^n, \pi_m\} = -\delta^n_m \tag{4.76}$$

Con esto y utilizando la propiedad (56) la condición de consistencia (4.75) da:

$$\dot{\phi}_n = \{\phi_n, H_C\} + \{\phi_n, u^m\phi_m\} = \{\phi_n, H_C\} - u^m\{\phi_n, \phi_m\} \tag{4.77}$$

Se procede a calcular los paréntesis que aparecen en la expresión anterior:

$$\{\phi_n, H_C\} = \{\pi_n - \frac{i}{2}\psi_n, \frac{1}{2}\frac{p^n p_n}{m}\} = 0 \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned} \{\phi_n, \phi_m\} &= \{\pi_n - \frac{i}{2}\psi_n, \pi_m - \frac{i}{2}\psi_m\} = -\frac{i}{2}\{\pi_n, \psi_m\} - \frac{i}{2}\{\psi_n, \pi_m\} = \frac{i}{2}\delta_{nm} + \frac{i}{2}\delta_{nm} \\ &= i\delta_{nm} \end{aligned} \tag{4.79}$$

Reemplazando los resultados anteriores en la condición de consistencia (4.77), se determina que:

$$\dot{\phi}_n = -iu^m\delta_{nm} = -iu^n \approx 0 \tag{4.80}$$

La condición de consistencia sobre los vínculos conduce a $u^n \approx 0$, y no se generan vínculos secundarios. Además el resultado (4.79) determina que los vínculos ϕ_n son de segunda clase. Se puede definir entonces la matriz de vínculos de segunda clase de la siguiente manera:

$$C_{nm} = \{\phi_n, \phi_m\} = i\delta_{nm} \tag{4.81}$$

La cual tiene determinante diferente de cero y por lo tanto posee matriz inversa, que puede ser facilmente calculada mediante transformaciones elementales:

$$C^{-1}_{nm} = -i\delta_{nm} \tag{4.82}$$

Los paréntesis de Dirac entre dos variables dinámicas A y B, se definen utilizando la matriz C^{-1}_{nm} de la siguiente manera:

$$\{A, B\}_D = \{A, B\} - \{A, \phi_n\}C^{-1}_{nm}\{\phi_m, B\} = \{A, B\} + i\{A, \phi_n\}\{\phi_n, B\} \tag{4.83}$$

Bajo la definición de paréntesis de Dirac los vínculos de segunda clase ϕ_n son igualdades fuertes [10], es decir, se puede determinar los momentos π_n en términos de ψ_n, (4.70), con esto los grados de libertad del problema se reducen a: x_n, p^n, ψ_n. Se puede determinar que los únicos paréntesis de Dirac no nulos entre estas variables son:

$$\{x_n, p^m\}_D = \delta^m_n \tag{4.84}$$

$$\{\psi_n, \psi_m\}_D = i\delta_{nm} \tag{4.85}$$

La evolución dinámica de una variable A del sistema, se calcula utilizando los paréntesis de Dirac, de la siguiente manera:

$$\dot{A} = \{A, H_C\}_D \tag{4.86}$$

Para los grados de libertad de nuestro sistema, se deduce las siguientes ecuaciones de movimiento:

$$\dot{x}_n = \{x_n, H_C\}_D = \frac{p^n}{m} \tag{4.87a}$$

$$\dot{p}_n = \{p_n, H_C\}_D = 0 \tag{4.87b}$$

$$\dot{\psi}_n = \{\psi_n, H_C\}_D = 0 \tag{4.87c}$$

La variación de la integral de acción en la forma (4.39), permite obtener las leyes de conservación asociadas al sistema, la acción es invariante bajo transformaciones de Galileo, traslaciones y rotaciones, de estas tres trasformaciones solo las rotaciones afectan a las variables de Grassmann, por esta razón se va analizar solo este caso. Considerando una rotación infinitecimal, tal que:

$$\delta x^n = \omega^n_m x^m, \quad \delta p_n = \omega^m_n p_m, \quad \delta\psi^n = \omega^n_m \psi^m \tag{4.88}$$

con $\omega_{nm} = -\omega_{mn}$, tiene la propiedad de ser antisimétrico con el fin de garantizar la invarianza de la distancia entre dos puntos [32]. Utilizando las ecuaciones de movimiento (4.65), (4.66), la variación de la acción (4.39) junto con los vínculos (4.70) se escribe de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\delta A &= \delta x^n p_n|_{t1}^{t_2} + \frac{i}{2}\delta\psi_n\psi^n|_{t1}^{t_2} = 0 \\ &= \omega_m^n x^m p_n|_{t1}^{t_2} + \frac{i}{2}\omega_{nm}\psi^m\psi^n|_{t1}^{t_2} = 0 \\ &= \omega_{nm} x^m p^n|_{t1}^{t_2} + \frac{i}{2}\omega_{nm}\psi^m\psi^n|_{t1}^{t_2} = 0\end{aligned}$$

Analicemos el producto $\omega_{nm}x^m p^n$, la condición $\omega_{nm} = -\omega_{mn}$ indica que ω_{nm} es antisimétrico en los indices m, n, además $x^m p^n$ se puede expresar como la suma de una parte simétrica y una antisimétrica

$$\omega_{nm}x^m p^n = \omega_{nm}[\underbrace{\frac{1}{2}\left(x^m p^n + x^n p^m\right)}_{\text{simetrico}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(x^m p^n - x^n p^m\right)]}_{\text{antisimetrico}} \tag{4.89}$$

En vista de que el producto de un tensor antisimétrico por un simétrico es cero, entonces el producto anterior se escribe así:

$$\omega_{nm}x^m p^n = \frac{1}{2}\omega_{nm}\left(x^m p^n - x^n p^m\right) \tag{4.90}$$

Con esto la variación de la acción da:

$$\delta A = \frac{1}{2}\omega_{nm}\left(x^n p^m - x^m p^n\right)|_{t1}^{t_2} + \frac{i}{2}\omega_{nm}\psi^n\psi^m|_{t1}^{t_2} = 0 \tag{4.91}$$

$$\delta A = \omega_{nm}J^{nm}|_{t1}^{t_2} = 0 \tag{4.92}$$

De donde se obtiene las constantes de movimiento:

$$J_{nm} = L_{nm} + S_{nm}, \quad L_{nm} = x_n p_m - x_m p_n, \quad S_{nm} = i\psi_n\psi_m \tag{4.93}$$

La variable J_{nm} es el generador de rotaciones y es identificado como el momento angular total del sistema. Este se construye sumando el momento angular orbital L_{nm} y una parte intrínseca S_{nm}, con la cual se puede definir el vector de spin en la forma:

$$S_n = -\frac{i}{2}\epsilon_{nmk}S_{mk} \tag{4.94}$$

Capítulo 5

Campos Fermiónicos

5.1. Ecuación de Dirac

En mecánica cuántica no relativista la ecuación de Schrödinger en la representación de las coordenadas se obtiene al reemplazar por operadores la energía, y el momento de la siguiente manera [33]:

$$E \Rightarrow \; \hat{E} \equiv i\hbar\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{5.1}$$

$$p \Rightarrow \; \hat{p} \equiv -i\hbar\nabla \tag{5.2}$$

En la ecuación de autovalores:

$$\hat{H}\psi = \hat{E}\psi \tag{5.3}$$

En relatividad especial, se ha definido el cuadrivector momento de la siguiente manera [22]:

$$p^{\mu} = \left(\frac{E}{c}, \boldsymbol{p}\right) \tag{5.4}$$

el cual satisface la siguiente propiedad:

$$p^{\mu}p_{\mu} = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2$$

Al exigir que la energía relativista sea positiva se deberá cumplir:

$$E = \left[p^2c^2 + m^2c^4\right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.5}$$

La ecuación de autovalores asociada al autovector ψ se puede determinar, utilizando en (5.5), las condiciones de cuatización (5.1) y (5.2), de tal manera se obtiene que:

$$\hat{E}\psi = \left[c^2\hat{p}^2 + m^2c^4\right]^{\frac{1}{2}}\psi = mc^2\left[1 + \frac{\hat{p}^2}{2m^2c^2} - \frac{\hat{p}^4}{8m^4c^4} + ...\right]\psi, \tag{5.6}$$

lo que implica que se deben conocer derivadas de orden superior de la función de onda ψ. Dirac propuso que una manera de evitar este tipo de dificultades es linealizar la ecuación (5.5), asi que él formulo la siguiente expresión [22]:

$$E = \left[p^2c^2 + m^2c^4\right]^{\frac{1}{2}} = c\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + mc^2\beta \tag{5.7}$$

Donde $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y β son constantes desconocidas. Elevando al cuadrado (5.7) y escribiendo en notación de indices[1] [34], se determina:

$$\begin{aligned} p^2c^2 + m^2c^4 &= \left(c\,\alpha_i p_i + mc^2\beta\right)\left(c\,\alpha_j p_j + mc^2\beta\right) \\ c^2 p_i p_i + m^2c^4 &= c^2 \underbrace{\alpha_i\alpha_j}_{\text{simetrizando}} p_i p_j + mc^3\alpha_i p_i\beta + mc^3\beta\underbrace{\alpha_j p_j}_{j\to i} + m^2c^4\beta^2 \\ c^2 p_i p_j \delta_{ij} + m^2c^4 &= c^2\,\frac{1}{2}\left(\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i\right)p_i p_j + mc^3 p_i\left(\alpha_i\beta + \beta\alpha_i\right) + m^2c^4\beta^2 \end{aligned}$$

Comparando el lado izquierdo y derecho se debe cumplir:

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \tag{5.8a}$$

$$\text{si } i = j \Rightarrow \alpha_i^2 = 1 \implies \alpha_1^2 = \alpha_2^2 = \alpha_3^2 = 1$$

$$\text{si } i \neq j \Rightarrow \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0$$

$$\alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \tag{5.8b}$$

$$\beta^2 = 1 \tag{5.8c}$$

Las condiciones anteriores no se satisfacen si α_i y β son simples números; por lo tanto, las relaciones (5.8a), (5.8b) y (5.8c) se cumplen solo si α_i y β son matrices, y donde 1 representará la matriz identidad.

Las reglas de cuantización (5.1) y (5.2) permiten expresar la ecuación de autovalores $\hat{H}\psi = \hat{E}\psi$, de la forma:

$$-ic\hbar\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi + mc^2\beta\psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{5.9}$$

[1]Se debe tener en cuenta que se esta sumando sobre indices repetidos.

La ecuación (5.9) se conoce como ecuación de Dirac en forma Hamiltoniana [22], esta depende de cuatro matrices complejas (α_i, β) de dimensión $(n \times n)$ y un vector columna ψ de dimensión $n \times 1$, que se lo conoce como spinor de Dirac. De la condición que el operador Hamiltoniano debe ser hermítico: $H^\dagger = H$, [35], se deduce que las matrices $\alpha\ y\ \beta$ deben ser tambien hermiticas: $\alpha^\dagger = \alpha$ y $\beta^\dagger = \beta$ [36].

Considerando el adjunto Hermitiano de la ecuación de Dirac (5.9):

$$-i\hbar\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} = i\hbar c \nabla\psi^\dagger\cdot \boldsymbol{\alpha} + mc^2\psi^\dagger\beta \tag{5.10}$$

y ahora multiplicando (5.9) por $\psi^\dagger$ y (5.10) por ψ se tiene:

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\hbar c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi + mc^2\psi^\dagger\beta\psi \tag{5.11}$$

$$-i\hbar\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi = i\hbar c\nabla\psi^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi + mc^2\psi^\dagger\beta\psi \tag{5.12}$$

Considerando (5.11) menos (5.12)

$$i\hbar\psi^\dagger\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\hbar\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi = -i\hbar c\psi^\dagger\boldsymbol{\alpha}\cdot\nabla\psi - i\hbar c\nabla\psi^\dagger\cdot\boldsymbol{\alpha}\psi + mc^2\psi^\dagger\beta\psi - mc^2\psi^\dagger\beta\psi \tag{5.13}$$

$$i\hbar\left[\psi^\dagger\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi\right] = -i\hbar c\left[\psi^\dagger\alpha_i\partial_i\psi + \partial_i\psi^\dagger\alpha_i\psi\right]$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi^\dagger\psi\right) = \partial_i\left(\psi^\dagger\alpha_i\psi\right) \tag{5.14}$$

Definiendo $\rho = \psi^\dagger\psi$: Densidad de probabilidad y $J_i = c\,\psi^\dagger\alpha_i\psi$: la componente i-ésima del vector corriente de probaliblidad, se llega a:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 \tag{5.15}$$

Esta es la ecuación de continuidad de probabilidad [22].

Es posible demostrar también que $Tr(\alpha_i) = 0$ y $Tr(\beta) = 0$, y además, que los autovalores asociados a α_i y β son ± 1, [22]. Estos hechos implican que n debe ser par. La mas simple estructura matricial no trivial surge para n=2, es decir, cuando las matrices pueden ser de dimensión 2. Se conoce que las 3 matrices de Pauli junto con la matriz identidad definen una base completa para matrices 2×2 [37]. De cualquier manera, ellas no satisfacen las relaciones álgebraicas (5.8a),(5.8b) y (5.8c). De hecho se conoce que en 2 dimensiones, no pueden existir 4 matrices anticonmutantes [38]. La siguiente elección es $n = 4$, para la cual las matrices sera de dimensión 4, (es decir, matrices 4×4). En este caso, se encuentra que un conjunto de 4 matrices constantes linealmente independientes que satisfacen las relaciones (5.8a),(5.8b) y (5.8c) se conocen como matrices gamma de Dirac [38, 22].

5.1.1. Matrices Gama de Dirac

Las matrices Gama de Dirac se definen de la siguiente manera:

$$\gamma^0 \equiv \beta \tag{5.16}$$

$$\gamma^i \equiv \beta\alpha^i \tag{5.17}$$

Multilplicando la ecuación (5.9) por β

$$-i\hbar\, c\, \beta\boldsymbol{\alpha}\cdot \nabla\psi + mc^2 \underbrace{\beta^2}_{I} \psi = i\hbar\beta\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

$$i\hbar\frac{\gamma^0}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} + i\hbar\gamma^i\partial_i\psi - mc\psi = 0$$

Recordando que $\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial x^0}$, la expresión anterior se puede reescribir así:

$$i\hbar\left(\gamma^0\partial_0\psi + \gamma^i\partial_i\psi\right) - mc\psi = 0$$

$$\left(i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu - mc\right)\psi = 0 \tag{5.18}$$

Esta ecuación es conocida como la forma covariante de la ecuación de Dirac [22]. Las propiedades de las matrices α y β, se pueden reescribir en términos de las matrices gamma de la siguiente manera [22]:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \tag{5.19}$$

Las matrices γ^μ satisfacen la siguiente propiedad: bajo la operación de adjunto hermitiano

$$\left(\gamma^\mu\right)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \tag{5.20}$$

Multiplicando la ecuación de Dirac (5.18) por $(i\hbar\gamma^{\nu}\partial_{\nu} + mc)$:

$$(i\hbar\gamma^{\nu}\partial_{\nu} + mc)\,(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\,\psi = 0$$

$$\left(-\hbar^2\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu} - \cancel{imc\hbar\gamma^{\nu}\partial_{\nu}} + \cancel{imc\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu}} - m^2c^2\right)\psi = 0$$

$$\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{5.21}$$

Se calculara la expresión $\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu}$ que aparece en la relación anterior, para esto se escribira el producto matricial $\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}$, en su parte simétrica y antisimétrica respectivamente, esto es:

$$\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = \frac{1}{2}\underbrace{(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\nu})}_{\text{simétrico}} + \frac{1}{2}\underbrace{(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} - \gamma^{\mu}\gamma^{\nu})}_{\text{antisimétrico}} \tag{5.22}$$

Ahora, la expresión $\partial_{\nu}\partial_{\mu}$ es simétrica en los indices μ, ν. Se sabe que el producto de un tensor simétrico y un antisimétrico es cero, entonces, el producto que se busca utilizando la propiedad (5.19) es:

$$\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \frac{1}{2}\left(\gamma^{\nu}\gamma^{\mu} + \gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\right)\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \eta^{\nu\mu}\partial_{\nu}\partial_{\mu} = \partial^{\mu}\partial_{\mu} \tag{5.23}$$

Esta propiedad permite expresar (5.21), así:

$$\left(\partial^{\mu}\partial_{\mu} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{5.24}$$

Definiendo $\partial^{\mu}\partial_{\mu} \equiv \Box^2$, se determina que:

$$\left(\Box^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\psi = 0 \tag{5.25}$$

lo que demuestra que cada componente del espinor $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ satisface la ecuación de Klein-Gordon.

Calculando el adjunto hermitiano de la ecuación de Dirac (5.18), se obtiene:

$$\left[(i\hbar\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - mc)\,\psi\right]^{\dagger} = 0$$

$$\psi^{\dagger}\left[-i\hbar\,(\gamma^{\mu})^{\dagger}\,\overleftarrow{\partial_{\mu}} - mc\right] = 0$$

La propiedad (5.20), permite reescribir la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi^\dagger \left[-i\hbar\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \overleftarrow{\partial_\mu} - mc \right] &= 0 \\ i\hbar\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 \overleftarrow{\partial_\mu} + mc\psi^\dagger &= 0 \\ i\hbar\psi^\dagger\gamma^0\gamma^\mu \underbrace{\gamma^0\gamma^0}_{I} \overleftarrow{\partial_\mu} + mc\psi^\dagger\gamma^0 &= 0 \end{aligned}$$

Definiendo $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger\gamma^0$ como el espinor adjunto hermitiano de Dirac, la relación anterior se expresa en la forma:

$$\bar{\psi} \left(i\hbar\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + mc \right) = 0 \tag{5.26}$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de Dirac para el campo $\bar{\psi}$. Multiplicando la ecuación Dirac (5.18) por $\bar{\psi}$ por el lado izquierdo y (5.26) por ψ por la derecha da:

$$i\hbar\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\bar{\psi}\psi = 0 \tag{5.27}$$

$$i\hbar\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + mc\bar{\psi}\psi = 0 \tag{5.28}$$

Sumando estas dos expresiones se obtiene:

$$\partial_\mu \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \right) = 0 \tag{5.29}$$

Separando el indice temporal del espacial da:

$$\partial_0 \left(\bar{\psi}\gamma^0\psi \right) + \partial_k \left(\bar{\psi}\gamma^k\psi \right) = 0 \tag{5.30}$$

con $k = 1, 2, 3$, sustituyendo $\partial_0 \equiv \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, se puede escribir la expresión anterior de la siguiente manera:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\psi}\gamma^0\psi \right) + \partial_k \left(c\bar{\psi}\gamma^k\psi \right) = 0 \tag{5.31}$$

Se habia definido $\rho = \psi^\dagger\psi$ y $J^k = c\,\psi^\dagger\alpha^k\psi$, utilizando la propiedad $(\gamma^0)^2 = I$, se puede verificar que:

$$\rho = \psi^\dagger(\gamma^0)^2\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi \tag{5.32}$$

también:

$$J^k = c\,\psi^\dagger(\gamma^0)^2\alpha^k\psi = c\,\bar{\psi}\gamma^0\alpha^k\psi = c\,\bar{\psi}\gamma^k\psi \tag{5.33}$$

Esto permite reconocer la ecuación (5.31) como la ecuación de continuidad, esta vez deducidas de las ecuaciones de Dirac en forma covariante.

5.2. Formalismo Lagrangiano

Clásicamente los campos fundamentales de Dirac ψ y $\bar{\psi}$ son representados por campos Grassmannianos, donde sus componentes ψ_a y $\bar{\psi}_b$ con $a, b = 1, 2, 3, 4$, deben satisfacer las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\psi_a \psi_b + \psi_b \psi_a = 0 \tag{5.34a}$$

$$\psi_a \bar{\psi}_b + \bar{\psi}_b \psi_a = 0 \tag{5.34b}$$

$$\bar{\psi}_a \bar{\psi}_b + \bar{\psi}_b \bar{\psi}_a = 0 \tag{5.34c}$$

Las ecuaciones de movimiento (5.18) y (5.26) asociados a los campos clásicos ψ y $\bar{\psi}$ respectivamente se puede deducir de la siguiente densidad Lagrangiana [23]:

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi\right] - m\bar{\psi}\psi \tag{5.35}$$

La cual descrita en términos de las componentes de los campos: ψ_a , $\bar{\psi}_a$ y de las matrices $\gamma^\mu : \gamma^\mu_{ab}$, se expresa explicitamente así:

$$\mathscr{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}_a \gamma^\mu_{ab} \partial_\mu \psi_b - \partial_\mu \bar{\psi}_a \gamma^\mu_{ab} \psi_b\right] - m\bar{\psi}_a \psi_a \tag{5.36}$$

Aqui se debe entender que se suma sobre índices matriciales repetidos. Extendiendo el principio de Hamilton, a los campos fermionicos es posible demostrar que ψ_a y $\bar{\psi}_a$ deben satisfacer las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange [23]:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_a\right)}\right) = 0 \tag{5.37}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)}\right) = 0 \tag{5.38}$$

Donde las derivadas calculadas respecto a los campos fermionicos se entenderán de ahora en adelante como izquierdas. De (5.36) se deducirá la ecuación de campo asociada a ψ, (5.37), para ello, se calcularan las correspondientes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} &= \frac{\partial}{\partial \psi_a}\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \partial_\mu \psi_b - \partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \psi_b\right) - m\bar{\psi}_b \psi_b\right] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \psi_a}\underbrace{(\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \psi_b)}_{-\psi_b \partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb}} - m\frac{\partial}{\partial \psi_a}\underbrace{(\bar{\psi}_b \psi_b)}_{-\psi_b \bar{\psi}_b} \\
&= \frac{i}{2}\underbrace{\frac{\partial \psi_b}{\partial \psi_a}}_{\delta_{ba}} \partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} + m\underbrace{\frac{\partial \psi_b}{\partial \psi_a}}_{\delta_{ba}} \bar{\psi}_b
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} = \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a \tag{5.39}$$

De igual manera:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)} &= \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)}\left[\bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb} \partial_\nu \psi_b\right] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\nu \psi_b\right)}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)}\bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb} = -\frac{i}{2}\delta^\mu_\nu \delta_{ab} \bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{5.40}$$

Reemplazando (5.39) y (5.40) en (5.37) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a - \partial_\mu\left[-\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca}\right] &= 0 \\
\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a + \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} &= 0 \\
i\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\delta_{ca}\bar{\psi}_c &= 0 \\
\bar{\psi}_c\left[i\gamma^\mu_{ca}\overleftarrow{\partial_\mu} + m\delta_{ca}\right] &= 0
\end{aligned}$$

$$\left[\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m\right)\right]_a = 0 \tag{5.41}$$

o en forma compacta:

$$\bar{\psi}\left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial_\mu} + m\right) = 0 \tag{5.42}$$

La ecuación de campo asociada a ψ, (5.37), determina la ecuación de Dirac para el campo $\bar{\psi}$, (5.26), expresada en unidades naturales $\hbar = c = 1$, [36]. De igual manera, la ecuación de campo asociada a $\bar{\psi}$, (5.38), implica que:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} = \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_a}\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \partial_\mu \psi_b - \partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \psi_b\right) - m\bar{\psi}_b \psi_b\right]$$

$$= \frac{i}{2}\frac{\partial \bar{\psi}_c}{\partial \bar{\psi}_a}\gamma^\mu_{cb}\partial_\mu \psi_b - m\frac{\partial \bar{\psi}_b}{\partial \bar{\psi}_a}\psi_b = \frac{i}{2}\delta_{ca}\gamma^\mu_{cb}\partial_\mu\psi_b - m\delta_{ba}\psi_b$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} = \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu \psi_b - m\psi_a \tag{5.43}$$

En forma similar

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)}\left[-\partial_\nu \bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb}\psi_b\right]$$

$$= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\nu \bar{\psi}_c\right)}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)}\gamma^\nu_{cb}\psi_b = -\frac{i}{2}\delta^\mu_\nu \delta_{ca}\gamma^\nu_{cb}\psi_b$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\psi_b \tag{5.44}$$

Sustituyendo (5.43) y (5.44) en la ecuación de campo (5.38) se determina:

$$\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\psi_b - m\psi_a - \partial_\mu\left(-\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\psi_b\right) = 0$$

$$\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\psi_b - m\psi_a + \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\psi_b = 0$$

$$i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\psi_b - m\delta_{ba}\psi_b = 0$$

$$\left[\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi\right]_a = 0 \tag{5.45}$$

o en forma compacta:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi = 0 \tag{5.46}$$

Que determina la ecuación de campo de Dirac asociada a ψ. Se procederá ahora a un estudio canónico de la teoría, para ello se definirá los momentos canónicos conjugandos a los campos de Dirac fundamentales de la siguiente manera:

$$\pi_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} \tag{5.47}$$

$$\bar{\pi}_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_a} \tag{5.48}$$

Donde π_a se ha definido como el momento canónico asociado a $\bar{\psi}_a$ y $\bar{\pi}_a$ el momento canónico asociado a ψ_a. Utilizando (5.44) y (5.40) con $\mu = 0$, se deduce:

$$\pi_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 \bar{\psi}_a\right)} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b$$

$$\pi_a = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \tag{5.49}$$

$$\bar{\pi}_a = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 \psi_a\right)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}$$

$$\bar{\pi}_a = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \tag{5.50}$$

Las expresiones (5.49) y (5.50) relacionan los momentos canónicos con los campos, por lo tanto, son vínculos primarios y se los definirá de la siguiente manera:

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0 \tag{5.51}$$

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0 \tag{5.52}$$

Como el índice a toma los valores $1, 2, 3, 4$, se tiene en principio 8 vínculos primarios. El conjunto de variables $(\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi})$ definen el espacio de fase, en el que la densidad Hamiltoniana canónica bajo la definición de derivada izquierda, se define así:

$$\mathscr{H} \equiv \dot{\psi}_a\bar{\pi}_a + \dot{\bar{\psi}}_a\pi_a - \mathscr{L} \tag{5.53}$$

Utilizando (5.49) y (5.50) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H} &= \partial_0\psi_a\left(-\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}\right) + \partial_0\bar{\psi}_a\left(-\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b\right) - \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}_a\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu\psi_b - \partial_\mu\bar{\psi}_a\gamma^\mu_{ab}\psi_b\right] + m\bar{\psi}_a\psi_a \\
&= \frac{i}{2}\underbrace{\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}\partial_0\psi_a}_{b\leftrightarrow a} - \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}_a\gamma^0_{ab}\psi_b - \frac{i}{2}\bar{\psi}_a\gamma^0_{ab}\partial_0\psi_b - \frac{i}{2}\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b + \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}_a\gamma^0_{ab}\psi_b + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\psi_b \\
&+ m\bar{\psi}_a\psi_a \\
&= -\frac{i}{2}\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\psi_b + m\bar{\psi}_a\psi_a
\end{aligned}$$

$$\mathscr{H} = \frac{i}{2}\left[\partial_k\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\psi_b - \bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b\right] + m\bar{\psi}_a\psi_a \tag{5.54}$$

Ahora como el espacio de fase $(\psi_a, \bar{\psi}_a, \pi_a, \bar{\pi}_a)$ son campos fermionicos, los paréntesis de Bose-Fermi, se definen formalmente en términos de derivadas funcionales izquierdas de la siguiente manera:

$$\{F_1(x), F_2(y)\}_{BF} \equiv -\int d^3z[\frac{\delta F_1(x)}{\delta\psi_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\bar{\pi}_a(z)} + \frac{\delta F_1(x)}{\delta\bar{\pi}_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\psi_a(z)} + \frac{\delta F_1(x)}{\delta\bar{\psi}_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\pi_a(z)} + \frac{\delta F_1(x)}{\delta\pi_a(z)}\frac{\delta F_2(y)}{\delta\bar{\psi}_a(z)}] \tag{5.55}$$

De la expresión (5.55) y del hecho que las variables en el espacio de fase son independientes, se deduce que los paréntesis de Bose-Fermi fundamentales de la teoría diferentes de cero son:

$$\{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_{BF} = -\int d^3z\left[\frac{\delta\psi_a(x)}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta\bar{\pi}_b(y)}{\delta\bar{\pi}_c(z)}\right] = -\int d^3z\delta_{ac}\delta^3(x-z)\delta_{bc}\delta^3(y-z)$$

Por lo tanto:

$$\{\psi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}_{BF} = -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{5.56}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}_{BF} = -\int d^3z\left[\frac{\delta\bar{\psi}_a(x)}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta\pi_b(y)}{\delta\pi_c(z)}\right] = -\int d^3z\delta_{ac}\delta^3(x-z)\delta_{bc}\delta^3(y-z)$$

Finalmente se determina:

$$\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}_{BF} = -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{5.57}$$

5.3. Formalismo de Hamilton-Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) asociada a la densidad hamiltoniana (5.54) es:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{5.58}$$

Utilizando (5.54) la ecuación de HJ se puede escribir así:

$$\phi^t = p^t + \frac{i}{2}\left[\partial_k\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\psi_b - \bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b\right] + m\bar{\psi}_a\psi_a = 0 \tag{5.59}$$

Los vínculos primarios (5.51) y (5.52) son ecuaciones diferenciales parciales (EDP) en el formalismo de HJ, con esto, el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton Jacobi (EDPHJ) [6], son:

$$\phi^t \equiv p^t + \frac{i}{2}\left[\partial_k\bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\psi_b - \bar{\psi}_a\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b\right] + m\bar{\psi}_a\psi_a = 0 \tag{5.60}$$

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0 \tag{5.61}$$

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0 \tag{5.62}$$

La ecuación diferencial (5.60) contiene la densidad hamiltoniana $\mathscr{H}$ que está relacionada con la dinámica del sistema, además, p^t se ha definido como la densidad de momento canónico conjugado a la variable $x^0 = t$, asi que, se asociara a t como el parámetro independiente correspondiente a la EDPHJ (5.60). Las EDPHJ (5.61) y (5.62) surgen de la definición de los momentos $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$ conjugados a las variables $(\bar{\psi}_a, \psi_a)$ respectivamente, por lo tanto, se relacionará a $(\bar{\psi}, \psi)$ como los parámetros independientes a las EDPHJ (60) y (61). De esta manera, la evolución dinámica de una variable definida en el espacio de fase $F\left(\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi}\right)$ asociada al sistema, está dada por el diferencial:

$$dF(x) = \int d^3y\left[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + \{F(x), \phi_a(y)\}d\bar{\psi}_a(y) + \{F(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)\right] \tag{5.63}$$

Definiendo $A \equiv \{F(x), \phi_a(y)\}$ y $B \equiv d\bar{\psi}_a(y)$, donde la paridad de A es $n_A = n_F + n_{\phi_a}$ y la paridad de B es $n_B = n_{\psi_a}$. Ahora usando la siguiente propiedad de variables Grassmannianas:

$$AB = (-1)^{n_A n_B}BA \tag{5.64}$$

El segundo término de la expresión anterior se puede reescribir así:

$$\{F(x), \phi_a(y)\}d\bar{\psi}_a(y) = (-1)^{(n_F + n_{\phi_a})n_{\psi_a}}d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\} \tag{5.65}$$

El número de paridad de ϕ_a es $n_{\phi_a} = 1$, y el de ψ_a es $n_{\psi_a} = 1$, además para este sistema en particular F representa variables de paridad impar, por lo tanto $n_F = 1$. Sustituyendo los anteriores valores de paridad en (5.65), se determina que:

$$\{F(x), \phi_a(y)\}d\bar{\psi}_a(y) = d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\} \tag{5.66}$$

Con el resultado anterior el diferencial (5.63), se escribe de la siguiente manera:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\} + \{F(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)\right] \tag{5.67}$$

Ahora, se analizará las condiciones de integrabilidad del sistema de EDPHJ. La integrabilidad de ϕ_a, implica que se deba cumplir:

$$d\phi_a(x) = 0 \tag{5.68}$$

Usando (5.67), la integrabilidad para ϕ_a se puede escribir de la siguiente manera:

$$d\phi_a(x) = \int d^3y \left[\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}dt + d\bar{\psi}_b(y)\{\phi_a(x)\ , \phi_b(y)\} + \{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\}d\psi_b(y)\right] \tag{5.69}$$

Con el propósito de analizar la relación anterior se emplearan los siguientes paréntesis de Bose-Fermi obtenidos en el **apéndice C**:

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\} = \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y) - m\psi_a(y)\right]\delta^3(x-y) \tag{5.70}$$

$$\{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{5.71}$$

$$\{\phi_a(x), \phi_b(y)\} = 0 \tag{5.72}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en la integrabilidad de ϕ_a, se determina que:

$$\begin{aligned}
d\phi_a(x) &= \int d^3y \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y)\right]dt \\
&+ \int d^3y \left(-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)\right)d\psi_b(y) \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k \int d^3y\psi_b(y)\delta^3(x-y)dt + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\int d^3y\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y)dt \\
&- m\int d^3y\psi_a(y)\delta^3(x-y)dt - i\gamma^0_{ab}\int d^3y\delta^3(x-y)d\psi_b(y) \\
&= \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) - m\psi_a(x)\right]dt - i\gamma^0_{ab}d\psi_b(x) \\
&= \left[i\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) - m\psi_a(x)\right]dt - i\gamma^0_{ab}d\psi_b(x) = 0
\end{aligned}$$

Multiplicando la anterior expresión por $-i\gamma^0_{ca}$,

$$\left[\gamma^0_{ca}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) + im\gamma^0_{ca}\psi_a(x)\right]dt - \underbrace{\gamma^0_{ca}\gamma^0_{ab}}_{\delta_{cb}}d\psi_b(x) = 0$$

$$\left[\gamma^0_{ca}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) + im\gamma^0_{ca}\psi_a(x)\right]dt = d\psi_c(x)$$

Finalmente se obtiene que:

$$d\psi_a(x) = \left[\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^x_k\psi_c(x) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(x)\right]dt \tag{5.73}$$

De la misma manera, la integrabilidad de $\bar{\phi}_a$, exige que:

$$d\bar{\phi}_a(x) = 0 \tag{5.74}$$

Utilizando nuevamente (5.67) la condición de integrabilidad (5.74) se puede escribir de la siguiente manera:

$$d\bar{\phi}_a(x) = \int d^3y \left[\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}dt + d\bar{\psi}_b(y)\{\bar{\phi}_a(x)\ , \phi_b(y)\} + \{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\}d\psi_b(y)\right] \tag{5.75}$$

Para analizar esta expresión se utilizara los siguientes paréntesis de Bose-Fermi calculados en el **Apéndice D**:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\} = \left[\frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k + m\bar{\psi}_a(y)\right]\delta^3(x-y) \tag{5.76}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} = -i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y) \tag{5.77}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = 0 \tag{5.78}$$

Usando los resultados anteriores se determina que:

$$\begin{aligned}
d\bar{\phi}_a(x) &= \int d^3y \left[\frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k\delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y)\right]dt \\
&\quad + \int d^3y d\bar{\psi}_b(y)\left(-i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)\right) \\
&= \left[\frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + \frac{i}{2}\partial^x_k\int d^3y\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(x)\right]dt - id\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba} \\
&= \left[\frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + \frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + m\bar{\psi}_a(x)\right]dt - id\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba} \\
&= \left[i\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + m\bar{\psi}_a(x)\right]dt - id\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba} = 0
\end{aligned}$$

multiplicando por $-i\gamma^0_{ad}$

$$-i\left[i\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca}\gamma^0_{ad} + m\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ad}\right]dt - d\bar{\psi}_b(x)\underbrace{\gamma^0_{ba}\gamma^0_{ad}}_{\delta_{bd}} = 0$$

$$\left[\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca}\gamma^0_{ad} - im\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ad}\right]dt = d\bar{\psi}_d(x)$$

$$\therefore \qquad d\bar{\psi}_a(x) = \left[\partial^x_k\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba}\right]dt \tag{5.79}$$

Las condiciones de integrabilidad (5.68) y (5.74) expresan relaciones entre los diferenciales de las variables independientes como lo muestran (5.73) y (5.79), lo que indica que las ED-PHJ no son linealmente independientes [6].

Las relaciones (5.73) y (5.79) permiten escribir el diferencial (5.67) de una variable dinámica $F(x)$ del sistema de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
dF(x) &= \int d^3y\{F(x),\phi^t(y)\}dt + \int d^3y\left[\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right]dt\{F(x),\phi_a(y)\} \\
&\quad + \int d^3y\{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left[\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right]dt \\
dF(x) &= \int d^3y[\{F(x),\phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right)\{F(x),\phi_a(y)\} \qquad (5.80) \\
&\quad + \{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left(\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right)]dt
\end{aligned}$$

5.3.1. Paréntesis Generalizados

La expresión entre corchetes, define una forma particular de una estructura mas general conocida como los "paréntesis Generalizados"(PG) [5]:

$$\begin{aligned}
\{F(x),\phi^t(y)\}^* \equiv\ & \{F(x),\phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right)\{F(x),\phi_a(y)\} \qquad (5.81) \\
& + \{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left(\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right)
\end{aligned}$$

En términos de estos paréntesis generalizados la dinámica de una variable del espacio de fase F se redefinirá así:

$$dF(x) = \int d^3y\{F(x),\phi^t(y)\}^*dt \tag{5.82}$$

Los paréntesis generalizados entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$ se definen formalmente de la siguiente manera:

$$\{F(x), G(y)\}^* = \{F(x), G(y)\} - \int\int d^3u d^3v \left\{F(x), \Sigma_a^i(u)\right\} \left(C_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1} \{\Sigma_b^j(v), G(y)\} \tag{5.83}$$

Donde $i, j = 1, 2$; además se ha definido:

$$\Sigma_a^1 \equiv \phi_a = \pi_a + \frac{i}{2}\gamma_{ab}^0 \psi_b = 0$$

y

$$\Sigma_a^2 \equiv \bar{\phi}_a = \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b \gamma_{ba}^0 = 0$$

$\left(C_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1}$ es la inversa de la matriz $C_{ab}^{ij}(u,v)$ cuyos elementos son los paréntesis de Bose-Fermi entre las EDPHJ Σ_a^i y Σ_b^j.

$$C_{ab}^{ij}(u,v) = \begin{pmatrix} \{\phi_a(u), \phi_b(v)\} & \{\phi_a(u), \bar{\phi}_b(v)\} \\ \{\bar{\phi}_a(u), \phi_b(v)\} & \{\bar{\phi}_a(u), \bar{\phi}_b(v)\} \end{pmatrix} \tag{5.84}$$

Con ayuda de los resultados del **apéndice C y D**:

$$\{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = -i\gamma_{ab}^0 \delta^3(x-y) \tag{5.85}$$

$$\{\phi_a(x), \phi_b(y)\} = 0 \tag{5.86}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} = -i\gamma_{ba}^0 \delta^3(x-y) \tag{5.87}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = 0 \tag{5.88}$$

la matriz $C_{ab}^{ij}(u,v)$ tiene la siguiente forma:

$$C_{ab}^{ij}(u,v) = -i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ab}^0 \\ \gamma_{ba}^0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(u-v) \tag{5.89}$$

y su inversa es [23]:

$$\left(C_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ba}^0 \\ \gamma_{ab}^0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(u-v) \tag{5.90}$$

Con esta representación de la matriz inversa el paréntesis generalizado (5.83) entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$, esta determinado por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \{F(x),G(y)\}^* &= \{F(x),G(y)\} - i\gamma^0_{ba}\int d^3v\,\{F(x),\phi_a(v)\}\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\} \\ &\quad -i\gamma^0_{ab}\int d^3v\left\{F(x),\bar{\phi}_a(v)\right\}\{\phi_b(v),G(y)\} \end{aligned} \tag{5.91}$$

Utilizando la propiedad (5.64), se puede escribir el segundo término de la expresión anterior así:

$$\{F(x),\phi_a(v)\}\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\} = (-1)^{(n_F+n_{\phi_a})(n_{\bar{\phi}_b}+n_G)}\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\}\{F(x),\phi_a(v)\} \tag{5.92}$$

Recordando que se tiene los siguientes números de paridad $n_{\phi_a}=1$, $n_{\bar{\phi}_b}=1$, también para este problema en particular la paridad de F es $n_F=1$; con estos números de paridad el producto (6.80), da:

$$\{F(x),\phi_a(v)\}\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\} = (-1)^{(0)(1+n_G)}\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\}\{F(x),\phi_a(v)\}$$

Por lo tanto se determina que:

$$\{F(x),\phi_a(v)\}\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\} = \left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\}\{F(x),\phi_a(v)\} \tag{5.93}$$

Entonces el PG (5.91) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{F(x),G(y)\}^* &= \{F(x),G(y)\} - i\gamma^0_{ba}\int d^3v\left\{\bar{\phi}_b(v),G(y)\right\}\{F(x),\phi_a(v)\} \\ &\quad -i\gamma^0_{ab}\int d^3v\left\{F(x),\bar{\phi}_a(v)\right\}\{\phi_b(v),G(y)\} \end{aligned} \tag{5.94}$$

Si se considera $G(y)\equiv\phi^t(y)$ en (5.91) y se usa los siguientes resultados del **apéndice A y B**:

$$\{\phi_a(x),\phi^t(y)\} = \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y) - m\psi_a(y)\right]\delta^3(x-y) \tag{5.95}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x),\phi^t(y)\} = \left[\frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k + m\bar{\psi}_a(y)\right]\delta^3(x-y) \tag{5.96}$$

se deduce que:

$$\begin{aligned} \{F(x),\phi^t(y)\}^* &= \{F(x),\phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\gamma^0_{ba} - im\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\right)\{F(x),\phi_a(y)\} \\ &\quad +\{F(x),\bar{\phi}_a(y)\}\left(\gamma^0_{ab}\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{ab}\psi_b(y)\right) \end{aligned} \tag{5.97}$$

Resultado que concuerda correctamente con la relación (5.81). En un principio se asumio que los campos $(\psi_a, \bar{\psi}_a, \pi_a, \bar{\pi}_a)$ eran independientes, pero debido a la presencia de las relaciones (5.47) y (5.48) y del hecho de haber considerado a $(\psi, \bar{\psi})$ como los parámetros independientes asociados a las EDPHJ; se definira a a los campos $(\pi, \bar{\pi})$ como los grados de libertad de la teoría.

De la definición de los PG, se procedera a deducir estas cantidades entre los campos independientes del problema, para ello se inicia calculando el PG de $\pi_a(x)$ con cualquier variable dinámica $G(y)$, el cual esta dado por:

$$\begin{aligned} \{\pi_a(x), G(y)\}^* &= \{\pi_a(x), G(y)\} - i\gamma^0_{cb} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_c(v), G(y)\right\} \{\pi_a(x), \phi_b(v)\} \\ &\quad -i\gamma^0_{bc} \int d^3v \left\{\pi_a(x), \bar{\phi}_b(v)\right\} \{\phi_c(v), G(y)\} \end{aligned} \tag{5.98}$$

Calculando por separado los paréntesis de Bose-Fermi:

$$\{\pi_a(x), \phi_a(v)\} = 0 \tag{5.99}$$

$$\begin{aligned} \left\{\pi_a(x), \bar{\phi}_b(v)\right\} &= \{\pi_a(x), \bar{\pi}_b + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{cb}\} = \frac{i}{2}\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c\}\gamma^0_{cb} \\ &= \frac{i}{2}\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-v)\right)\gamma^0_{cb} \end{aligned}$$

$$\left\{\pi_a(x), \bar{\phi}_b(v)\right\} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-v) \tag{5.100}$$

y utilizando estos resultados, el paréntesis generalizado (5.98) se reescribe así:

$$\begin{aligned} \{\pi_a(x), G(y)\}^* &= \{\pi_a(x), G(y)\} - i\gamma^0_{bc} \int d^3v \left(-\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-v)\right) \{\phi_b(v), G(y)\} \\ &= \{\pi_a(x), G(y)\} - \frac{1}{2}\{\phi_a(x), G(y)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\pi_a(x) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c(x), G(y)\} \end{aligned} \tag{5.101}$$

Ahora se consideraran situaciones particulares para $G(y)$: si $G(y) = \pi_b(y)$, se obtiene que:

$$\{\pi_a(x), \pi_b(y)\}^* = 0 \tag{5.102}$$

Para $G(y) = \bar{\pi}_b(y)$, se determina lo siguiente:

$$\{\pi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}^* = -\frac{i}{4}\gamma^0_{ac}\{\psi_c(x), \bar{\pi}_b(y)\} = \frac{i}{4}\gamma^0_{ac}\delta_{cb}\delta^3(x-y) \implies$$
$$\{\pi_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}^* = \frac{i}{4}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{5.103}$$

Ahora, se analizara el caso en el que $F(x) = \bar{\pi}_a(x)$ en (5.91):

$$\begin{aligned}\{\bar{\pi}_a(x), G(y)\}^* &= \{\bar{\pi}_a(x), G(y)\} - i\gamma^0_{bc}\int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\}\{\bar{\pi}_a(x), \phi_c(v)\} \\ &\quad -i\gamma^0_{cb}\int d^3v \left\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\phi}_c(v)\right\}\{\phi_b(v), G(y)\}\end{aligned} \tag{5.104}$$

Si se usa los siguientes paréntesis de Bose-Fermi:

$$\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\phi}_c(v)\} = 0 \tag{5.105}$$

Junto con:

$$\begin{aligned}\{\bar{\pi}_a(x), \phi_c(v)\} &= \{\bar{\pi}_a(x), \pi_c(v) + \frac{i}{2}\gamma^0_{cd}\psi_d(v)\} = \frac{i}{2}\gamma^0_{cd}\{\bar{\pi}_a(x), \psi_d(v)\} \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^0_{ca}\delta^3(x-v)\end{aligned} \tag{5.106}$$

en el paréntesis generalizado (5.104), finalmente se obtiene:

$$\{\bar{\pi}_a(x), G(y)\}^* = \frac{1}{2}\{\bar{\pi}_a(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{ca}, G(y)\} \tag{5.107}$$

Para el caso particular en el que $G(y) = \bar{\pi}_b(y)$, se concluye:

$$\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\}^* = 0 \tag{5.108}$$

Se procedera a mostrar una propiedad fundamental de los PG, para esto se calculará lo siguiente:

$$\begin{aligned}\{F(x), \phi_c(y)\}^* &= \{F(x), \phi_c(y)\} - i\gamma^0_{ba}\int d^3v \,\{F(x), \phi_a(v)\}\left\{\bar{\phi}_b(v), \phi_c(y)\right\} \\ &\quad - i\gamma^0_{ab}\int d^3v \left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\{\phi_b(v), \phi_c(y)\}\end{aligned} \tag{5.109}$$

Usando los resultados del **apéndice C y D**:

$$\{\phi_b(v), \phi_c(y)\} = 0$$
$$\{\bar{\phi}_b(v), \phi_c(y)\} = -i\gamma^0_{cb}\delta^3(v-y)$$

en el paréntesis generalizado (5.109), se puede determinar lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\{F(x), \phi_c(y)\}^* &= \{F(x), \phi_c(y)\} - i\gamma^0_{ba}\left(-i\gamma^0_{cb}\right)\int d^3v\,\{F(x), \phi_a(v)\}\,\delta^3(v-y) \quad (5.110)\\
&= \{F(x), \phi_c(y)\} - \gamma^0_{cb}\gamma^0_{ba}\int d^3v\,\{F(x), \phi_a(v)\}\,\delta^3(v-y)\\
&= \{F(x), \phi_c(y)\} - \delta_{ca}\,\{F(x), \phi_a(y)\}\\
\{F(x), \phi_c(y)\}^* &= 0 \quad (5.111)
\end{aligned}$$

De igual manera se puede calcular:

$$\begin{aligned}
\{F(x), \bar{\phi}_c(y)\}^* = &\left\{F(x), \bar{\phi}_c(y)\right\} - i\gamma^0_{ba}\int d^3v\,\{F(x), \phi_a(v)\}\left\{\bar{\phi}_b(v), \bar{\phi}_c(y)\right\} \quad (5.112)\\
&- i\gamma^0_{ab}\int d^3v\left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\left\{\phi_b(v), \bar{\phi}_c(y)\right\}
\end{aligned}$$

Utilizando los siguientes resultados del **apéndice C y D**:

$$\{\phi_b(v), \bar{\phi}_c(y)\} = -i\gamma^0_{bc}\delta^3(v-y)$$
$$\{\bar{\phi}_b(x), \bar{\phi}_c(v)\} = 0$$

en el PG (5.112), se muestra que:

$$\begin{aligned}
\{F(x), \bar{\phi}_c(y)\}^* &= \left\{F(x), \bar{\phi}_c(y)\right\} - i\gamma^0_{ab}\left(-i\gamma^0_{bc}\right)\int d^3v\left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\delta^3(v-y)\\
&= \left\{F(x), \bar{\phi}_c(y)\right\} - \delta_{ac}\left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}\\
\{F(x), \bar{\phi}_c(y)\}^* &= 0 \quad (5.113)
\end{aligned}$$

Los resultados (5.111) y (5.113) muestran que el PG de cualquier variable dinámica $F(x)$ con las EDPHJ (5.47) y (5.48) son nulos.

5.3.2. Ecuaciones Características

Se debe verificar con el diferencial (5.82), si las condiciones de integrabilidad se cumplen. La integrabilidad de $\phi_a(x)$, exige que:

$$d\phi_a(x) = \int d^3y \{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt = 0 \tag{5.114}$$

Utilizando el siguiente resultado del **Apéndice E**:

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k \delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k \psi_b(y)\delta^3(x-y) \tag{5.115}$$

Se determina que:

$$\begin{aligned} d\phi_a(x) &= \int d^3y \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k \delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k \psi_b(y)\delta^3(x-y)\right] dt \\ &= \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k \psi_b(x) - \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k \psi_b(x)\right] dt = 0 \end{aligned}$$

$$d\phi_a(x) = 0 \tag{5.116}$$

De manera similar, la integrabilidad para $\bar{\phi}_a(x)$, implica que se cumpla:

$$d\bar{\phi}_a(x) = \int d^3y \{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* dt = 0 \tag{5.117}$$

Usando el resultado del **Apéndice E**:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = -\frac{i}{2}\partial^y_k \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k \delta^3(x-y) \tag{5.118}$$

En la integrabilidad de $\bar{\phi}$, se obtiene que:

$$\begin{aligned} d\bar{\phi}_a(x) &= \int d^3y \left[-\frac{i}{2}\partial^y_k \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k \delta^3(x-y)\right] dt \\ &= \left[-\frac{i}{2}\partial^x_k \bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca} + \frac{i}{2}\partial^x_k \bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{ca}\right] dt = 0 \end{aligned}$$

$$d\bar{\phi}_a(x) = 0 \tag{5.119}$$

Los resultados (5.116) y (5.119) establecen que las EDPHJ estan involución con los paréntesis Generalizados y por lo tanto las respectivas ecuaciones características son integrables.

Se procede a calcular las ecuaciones características asociadas al conjunto de EDPHJ que corresponden a las ecuaciones de movimiento para las variables $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$, de (5.82) se determina lo siguiente:

$$d\pi_a(x) = \int d^3y \{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt \tag{5.120}$$

$$d\bar{\pi}_a(x) = \int d^3y \{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* dt \tag{5.121}$$

Para calcular las ecuaciones de movimiento para estos campos se emplearán los siguientes resultados del **Apéndice E**:

$$\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \tag{5.122}$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\partial^x_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \tag{5.123}$$

Usando (5.122) en (5.120) se determina lo siguiente:

$$\begin{aligned} d\pi_a(x) &= \int d^3y \left[\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y)\right] dt \\ &= \left(\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) - \frac{1}{2}m\psi_a(x)\right) dt \\ \partial_0\pi_a(x) &= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(x) - \frac{1}{2}m\psi_a(x) \end{aligned}$$

Recordando que $\pi_a = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b$

$$\begin{aligned} -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\partial_0\psi_b &= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b - \frac{1}{2}m\psi_a \\ 0 &= i\gamma^0_{ab}\partial_0\psi_b + i\gamma^k_{ab}\partial_k\psi_b - m\psi_a \\ 0 &= i\left(\gamma^0_{ab}\partial_0 + \gamma^k_{ab}\partial_k\right)\psi_b - m\delta_{ab}\psi_b \\ 0 &= \left(i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu - m\delta_{ab}\right)\psi_b \end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \left[\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi\right]_a = 0 \tag{5.124}$$

De la misma manera la evolución del campo $\bar{\pi}(x)$ utilizando el resultado (5.123) es:

$$\begin{aligned}
d\bar{\pi}_a(x) &= \int d^3y \left(\frac{i}{2}\partial_k^x \bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \right) dt \\
&= \left(\frac{i}{2}\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(x) \right) dt \\
\partial_0\bar{\pi}_a(x) &= \frac{i}{2}\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(x)
\end{aligned}$$

Recordando el resultado:

$$\bar{\pi}_a(x) = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma_{ba}^0$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 \left(-\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma_{ba}^0 \right) - \frac{i}{2}\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k - \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(x) =& 0 \\
i\partial_0\bar{\psi}_b\gamma_{ba}^0 + i\partial_k\bar{\psi}_b\gamma_{ba}^k + m\bar{\psi}_a =& 0 \\
i\bar{\psi}_b \left(\gamma_{ba}^0 \overleftarrow{\partial}_0 + \gamma_{ba}^k \overleftarrow{\partial}_k \right) + m\bar{\psi}_b\delta_{ba} =& 0 \\
i\bar{\psi}_b\gamma_{ba}^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\bar{\psi}_b\delta_{ba} =& 0 \\
\bar{\psi}_b \left(i\gamma_{ba}^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m\delta_{ba} \right) =& 0
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \left[\bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m \right) \right]_a = 0 \tag{5.125}$$

Las ecuaciones de campo (5.124) y (5.125) se conocen como las ecuaciones de Dirac. La primera ecuación describe el movimiento de una partícula fermionica libre de spin $\frac{1}{2}$ y la segunda describe el movimiento de la correspondiente antipartícula.

Capítulo 6

Formulación de Hamilton-Jacobi aplicado a QED

En los capítulos anteriores se estudio campos libres, sin embargo, desde un punto de vista de físico, esto no tiene mucho interés porque la presencia de un campo es evidente cuando ellos interactuan y dan origen a fuerzas. En teoría de campos, una manera de describir el acoplamiento entre campos es construir un Lagrangiano que describa la teoría, como la suma de las densidades Lagrangianas de los campos libres ($\mathscr{L}^{libre}$) mas un término que describe la interacción ($\mathscr{L}^{int}$) y que dependera de los campos presentes en el problema [11].

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{libre} + \mathscr{L}^{int} \tag{6.1}$$

El término de interacción no es del todo arbitrario, ya que además de depender de restricciones impuestas por las simetrías internas y del espacio tiempo [21], existen restricciones debido a la presencia de vínculos en la teoría libre [23].

La electrodinámica cuántica (QED) estudia la interacción de un campo fermionico y el campo electromagnético [39], esta teoría es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}^{EM} + \mathscr{L}^{CF} + \mathscr{L}^{int} \tag{6.2}$$

Siendo:

$$\mathscr{L}^{EM} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{6.3}$$

la densidad Lagrangiana del campo electromagnético libre,

$$\mathscr{L}^{CF} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right] - m\bar{\psi}\psi, \tag{6.4}$$

la densidad Lagrangiana que describe el campo fermionico y

$$\mathscr{L}^{int} = -gA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi, \tag{6.5}$$

el término de interacción, donde g se conoce como la constante de acoplamiento.

Para realizar un estudio clásico de la teoría [23], se parte de la siguente acción:

$$\mathscr{A} = \int d^4x \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi - gA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \right) \tag{6.6}$$

Se puede observar entonces, que la acción es una funcional de los campos $(A_{\mu}, \psi, \bar{\psi})$. Las variables $\psi, \bar{\psi}$ son generadores del álgebra de Grassmann con número de paridad $n_{\psi} = 1$ y la variable bosónica A_{μ} puede ser considerada como un elemento del álgebra de Grassman con número de paridad par, $n_A = 0$.

6.1. Formalismo Lagrangiano

Las ecuaciones de campo para A_{μ}, ψ_a y $\bar{\psi}_a$ deducidas de (6.6) son respectivamente [23]:

$$\frac{\delta\mathscr{A}}{\delta A_{\nu}} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\nu}} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)}\right) = 0 \tag{6.7}$$

$$\frac{\delta\mathscr{A}}{\delta \psi_a} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \psi_a} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\psi_a\right)}\right) = 0 \tag{6.8}$$

$$\frac{\delta\mathscr{A}}{\delta \bar{\psi}_a} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} - \partial_{\mu}\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}_a\right)}\right) = 0 \tag{6.9}$$

Donde derivadas izquierdas respecto a las variables fermionicas serán consideradas de ahora en adelante. Para calcular estas ecuaciones de campo es necesario poner de manifiesto los índices matriciales en el Lagrangiano de la siguiente manera:

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_a\gamma^{\mu}_{ab}\partial_{\mu}\psi_b - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}_a\gamma^{\mu}_{ab}\psi_b - m\bar{\psi}_a\psi_a - gA_{\mu}\bar{\psi}_a\gamma^{\mu}_{ab}\psi_b \tag{6.10}$$

Con $a, b = 1, 2, 3, 4$. Utilizando los siguientes resultados derivados en el **apéndice F**:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_{\nu}} = -g\bar{\psi}_a\gamma^{\nu}_{ab}\psi_b \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_{\mu}A_{\nu}\right)} = -F^{\mu\nu} \tag{6.12}$$

en la ecuación (6.7) se obtiene:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = g\bar{\psi}_a \gamma^\nu_{ab} \psi_b \tag{6.13}$$

Definiendo la corriente fermionica: $J^\nu \equiv g\bar{\psi}_a \gamma^\nu_{ab} \psi_b$, [39], la ecuación covariante de campo para A_μ es:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{6.14}$$

De igual manera, las derivadas izquierdas asociada a los campos fermionicos necesarias para deducir las ecuaciones de campo (6.8) y (6.9) son (ver **apéndice F**):

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} = \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a + gA_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{6.15}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_a\right)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{6.16}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} = \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu \psi_b - m\psi_a - gA_\mu \gamma^\mu_{ab}\psi_b \tag{6.17}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\psi_b \tag{6.18}$$

Utilizando los resultados (6.15) a (6.18), las ecuaciones relacionadas a los campos $(\psi, \bar{\psi})$ son:

$$i\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a = -gA_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{6.19}$$

$$i\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu \psi_b - m\psi_a = gA_\mu \gamma^\mu_{ab}\psi_b \tag{6.20}$$

Es posible observar que en límite de la constante de acoplamiento $g \to 0$, las ecuaciones (6.14), (6.19) y (6.20) se reducen a las ecuaciones de campo electromagnético y fermionico libres.

Para un estudio canónico de la QED, se definirá los momentos canónicos asociados a los campos A_μ, ψ y $\bar{\psi}$, de la siguiente manera [23]:

$$\pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{A}_\nu} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 A_\nu\right)} \tag{6.21}$$

$$\pi_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 \bar{\psi}_a\right)} \tag{6.22}$$

$$\bar{\pi}_a \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{\psi}_a} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \left(\partial_0 \psi_a\right)} \tag{6.23}$$

Utilizando (6.12), con $\mu = 0$ en (6.21) se determina:

$$\pi^\nu = -F^{0\nu} = F^{\nu 0} \tag{6.24}$$

Si se considera el caso particular en el que $\nu = 0$, se concluye que:

$$\pi^0 = F^{00} = 0$$

Esta relación corresponde a un vínculo primario, que pertenece al álgebra de Grassman y tendra asociado un número de paridad par $n_{\phi^1} = 0$, ya que surge del momento canónico conjugado a la variable bosónica A_μ, este vínculo primario se definira así:

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \tag{6.25}$$

Ahora si se escoge $\nu = k$:

$$\pi^k = F^{k0} = F_{0k} = \underbrace{\partial_0 A_k}_{\dot{A}_k} - \partial_k A_0$$

Por tanto:

$$\dot{A}_k = \pi^k + \partial_k A_0 \tag{6.26}$$

Esta relación proporciona las velocidades $\dot{A}_k$ en función de sus momentos canónicos conjugados, por esta razón se la entiende como una relación dinámica en el espacio de fase.

Ahora, utilizando la expresión (6.18) para $\mu = 0$ en (6.22) se logra:

$$\pi_a = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \tag{6.27}$$

Esta expresión conecta los momentos canónicos, π_a con los campos ψ, por tanto, también es un vínculo primario, el cual será definido de la siguiente manera:

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \tag{6.28}$$

En realidad son cuatro vínculos ya que el indice a toma los valores $1, 2, 3, 4$. De la misma manera, usando la relación (6.16) con $\mu = 0$ en (6.23), se concluye que:

$$\bar{\pi}_a = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca} \tag{6.29}$$

que corresponde a cuatro vínculos primarios que serán definidos de la siguiente forma:

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca} = 0 \tag{6.30}$$

(6.28) y (6.30) pertenencen al álgebra de Grassman con paridad impar $n_\psi = n_{\bar{\psi}} = 1$ debido a que surgen de la definición de momentos canónicos conjugados a las variables fermiónicas $\bar{\psi}$ y ψ respectivamente. El problema cuenta en total con 9 vínculos primarios.

Se definirá el Hamiltoniano canónico de la teoría de la siguiente manera [23]:

$$H_C = \int d^3x \mathscr{H}_C = \int d^3x \left(\dot{A}_\mu\pi^\mu + \dot{\psi}_a\bar{\pi}_a + \dot{\bar{\psi}}_a\pi_a - \mathscr{L}\right) \tag{6.31}$$

Ahora, utilizando las ecuaciones (6.25),(6.26),(6.27) y (6.29) la densidad Hamiltoniana canónica $(\mathscr{H}_C)$, se reescribe en la forma:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_C &= \left(\pi^k + \partial_k A_0\right)\pi^k - \frac{i}{2}\underbrace{\dot{\psi}_a\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca}}_{-\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi}} - \frac{i}{2}\dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi + \frac{1}{4}\underbrace{F_{0i}F^{0i}}_{-\pi^i\pi^i} + \frac{1}{4}\underbrace{F_{k0}F^{k0}}_{-\pi^k\pi^k} + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} \\
&\quad - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^0\underbrace{\partial_0\psi}_{\dot{\psi}} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi + \frac{i}{2}\underbrace{\partial_0\bar{\psi}}_{\dot{\bar{\psi}}}\gamma^0\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\gamma^k\psi + m\bar{\psi}\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \\
&= \left(\pi^k + \partial_k A_0\right)\pi^k - \frac{1}{2}\pi^k\pi^k + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\gamma^k\psi + m\bar{\psi}\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \mathscr{H}_C = \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2 + \pi^k\partial_k A_0 + \frac{1}{4}F_{ki}F^{ki} + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\gamma^k\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^k\partial_k\psi + m\bar{\psi}\psi + gA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{6.32}$$

La QED esta construida en el espacio de fase compuesto por variables bosónicas y fermiónicas: $(A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \pi^\mu, \bar{\pi}_a, \pi_a)$, debido a esto, será necesario utilizar los parentesis de Bose-Fermi en cálculos posteriores; si B define una variable bosonica y F una fermionica, los paréntesis de Bose-Fermi serán definidos como [9]:

$$\{B_1, B_2\} \equiv \int d^3z \left[\left(\frac{\delta B_1}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta B_2}{\delta\bar{\pi}_c(z)} - \frac{\delta B_2}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta B_1}{\delta\bar{\pi}_c(z)} + \frac{\delta B_1}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta B_2}{\delta\pi_c(z)} - \frac{\delta B_2}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta B_1}{\delta\pi_c(z)}\right)\right] \tag{6.33}$$

$$+\int d^3z\left[\left(\frac{\delta B_1}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta B_2}{\delta\pi^\alpha(z)}-\frac{\delta B_2}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta B_1}{\delta\pi^\alpha(z)}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\{F,B\}\equiv\int d^3z\left[-\left(\frac{\delta F}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta B}{\delta\bar{\pi}_c(z)}+\frac{\delta B}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta F}{\delta\bar{\pi}_c(z)}+\frac{\delta F}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta B}{\delta\pi_c(z)}+\frac{\delta B}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta F}{\delta\pi_c(z)}\right)\right]\\+\int d^3z\left[\left(\frac{\delta F}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta B}{\delta\pi^\alpha(z)}-\frac{\delta B}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta F}{\delta\pi^\alpha(z)}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.34}$$

$$\begin{aligned}\{F_1,F_2\}\equiv\int d^3z\left[-\left(\frac{\delta F_1}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta F_2}{\delta\bar{\pi}_c(z)}+\frac{\delta F_2}{\delta\psi_c(z)}\frac{\delta F_1}{\delta\bar{\pi}_c(z)}+\frac{\delta F_1}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta F_2}{\delta\pi_c(z)}+\frac{\delta F_2}{\delta\bar{\psi}_c(z)}\frac{\delta F_1}{\delta\pi_c(z)}\right)\right]\\+\int d^3z\left[\left(\frac{\delta F_1}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta F_2}{\delta\pi^\alpha(z)}+\frac{\delta F_2}{\delta A_\alpha(z)}\frac{\delta F_1}{\delta\pi^\alpha(z)}\right)\right]\end{aligned} \tag{6.35}$$

De (6.33), (6.34) y (6.35) se deduce que los parentesis fundamentales no nulos de Bose-Fermi para la QED son:

$$\{A_\mu(x),\pi^\nu(y)\}=\delta_\mu^\nu\delta^3(x-y) \tag{6.36}$$

$$\{\psi_a(x),\bar{\pi}_b(y)\}=-\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{6.37}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x),\pi_b(y)\}=-\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{6.38}$$

6.2. Formulación de Hamilton Jacobi

La ecuación de Hamilton-Jacobi (HJ) asociada a la densidad Hamiltoniana (6.32) es:

$$\phi^t\equiv p^t+\mathscr{H}=0 \tag{6.39}$$

Donde p^t es la densidad de momento asociado a t, los vínculos primarios (6.25),(6.28) y (6.30) son ecuaciones diferenciales parciales en el formalismo de HJ, y junto con (6.39) forman el sistema de ecuaciones diferenciales parciales denominado EDPHJ:

$$\phi^t \equiv p^t + \mathscr{H} = 0 \tag{6.40}$$

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = 0 \tag{6.41}$$

$$\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0 \tag{6.42}$$

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{ca} = 0 \tag{6.43}$$

La ecuación (6.40) esta asociada a la variable independiente $x^0 = t$, debido a que p^t se ha definido como la densidad de momento asociado a esta coordenada, además, ϕ^t contiene la densidad Hamiltoniana que esta directamente relacionada con la dinámica del sistema. Las ecuaciones (6.41),(6.42) y (6.43) son idénticas a las EDP obtenidas en los dos capítulos anteriores, en vista de esto, se les asociara la misma variable independiente que habian sido asignadas a cada una de ellas, con esto, se establecera que las variables independientes asociadas al conjunto de EDPHJ $(\phi^t, \phi^1, \phi_a, \bar{\phi}_a)$ son $(t, A_0, \bar{\psi}_a, \psi_a)$ respectivamente.

La dinámica de una variable en el espacio de fase $F(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, \pi^\mu, \pi, \bar{\pi})$ está definido por el diferencial:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}dt + \{F(x), \phi^1 y)\}dA_0 + (-1)^{(n_F+1)}d\bar{\psi}_a(y)\{F(x), \phi_a(y)\}\right] \\ + \int d^3y \left[\{F(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)\right] \tag{6.44}$$

Se procede ahora a analizar las condiciones de integrabilidad del sistema de EDPHJ. Primero, se analizará la integrabilidad de las ecuaciones fermionicas empezando por ϕ_a:

$$d\phi_a(x) = 0 \tag{6.45}$$

Haciendo uso de (6.44) se puede escribir (6.45) así:

$$d\phi_a(x) = \int d^3y[\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}dt + \{\phi_a(x), \phi^1 y)\}dA_0 + d\bar{\psi}_a(y)\{\phi_a(x), \phi_a(y)\} \tag{6.46}$$

$$+\{\phi_a(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)]$$

Utilizando los siguientes paréntesis de Bose-Fermi calculados en el **apéndice G**:

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\} = -\frac{i}{2}\partial_k^y \delta^3(x-y)\gamma_{ad}^k \psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma_{ad}^k \partial_k^y \psi_d(y)\delta^3(x-y) \tag{6.47}$$

$$-m\psi_a(y)\delta^3(x-y) - gA_\mu(y)\gamma_{ad}^\mu \psi_d(y)\delta^3(x-y)$$

$$\{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = -i\gamma_{ab}^0 \delta^3(x-y) \tag{6.48}$$

$$\{\phi_a(x), \phi_b(y)\} = 0 \tag{6.49}$$

$$\{\phi_a(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.50}$$

en la relación (6.46) se obtendrá:

$$\begin{aligned} d\phi_a(x) = &\int d^3y(-\frac{i}{2}\partial_k^y \delta^3(x-y)\gamma_{ad}^k \psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma_{ad}^k \partial_k^y \psi_d(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\ &- gA_\mu(y)\gamma_{ad}^\mu \psi_d(y)\delta^3(x-y))dt + \int d^3y \left(-i\gamma_{ab}^0 \delta^3(x-y)\right) d\psi_b(y) \\ &= \left(i\gamma_{ad}^k \partial_k^x \psi_d(x) - m\psi_a(x) - gA_\mu(x)\gamma_{ad}^\mu \psi_d(x)\right) dt - i\gamma_{ab}^0 d\psi_b(x) = 0 \end{aligned}$$

de la cual se deduce que:

$$i\gamma_{ab}^0 d\psi_b(x) = \left(i\gamma_{ad}^k \partial_k^x \psi_d(x) - m\psi_a(x) - gA_\mu(x)\gamma_{ad}^\mu \psi_d(x)\right) dt$$

Multiplicando la ecuación anterior por la expresión $-i\gamma_{ca}^0$ por la izquierda:

$$\underbrace{\gamma_{ca}^0 \gamma_{ab}^0}_{\delta_{cb}} d\psi_b(x) = \left(\gamma_{ca}^0 \gamma_{ad}^k \partial_k^x \psi_d(x) + im\gamma_{ca}^0 \psi_a(x) + igA_\mu(x)\gamma_{ca}^0 \gamma_{ad}^\mu \psi_d(x)\right) dt$$

de tal manera que:

$$d\psi_c(x) = \left(\gamma_{ca}^0 \gamma_{ad}^k \partial_k^x \psi_d(x) + im\gamma_{ca}^0 \psi_a(x) + igA_\mu(x)\gamma_{ca}^0 \gamma_{ad}^\mu \psi_d(x)\right) dt \tag{6.51}$$

Se procede a calcular la integrabilidad de $\bar{\phi}_a$: $d\bar{\phi}_a(x) = 0$, la cual se escribe en la siguiente forma:

$$d\bar{\phi}_a(x) = \int d^3y[\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}dt + \{\bar{\phi}_a(x), \phi^1 y)\}dA_0(y) + d\bar{\psi}_b(y)\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} \tag{6.52}$$

$$+\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\}d\psi_b(y)]$$

y utilizando los siguientes resultados: (ver **apéndice G**):

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\} = \frac{i}{2}\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \partial_k^y \delta^3(x-y) \tag{6.53}$$

$$+m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^\mu \delta^3(x-y)$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} = -i\gamma_{ba}^0 \delta^3(x-y) \tag{6.54}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = 0 \tag{6.55}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.56}$$

en la expresión (6.52), permite escribir esta relación en la forma:

$$\begin{aligned} d\bar{\phi}_a(x) = &\int d^3y(\frac{i}{2}\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \partial_k^y \delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \\ &+ gA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^\mu \delta^3(x-y))dt + \int d^3y d\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma_{ba}^0 \delta^3(x-y)) \\ = &\left(\frac{i}{2}\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k + \frac{i}{2}\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k + m\bar{\psi}_a(x) + gA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^\mu\right) dt - id\bar{\psi}_b(x)\gamma_{ba}^0 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$id\bar{\psi}_b(x)\gamma_{ba}^0 = \left(i\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k + m\bar{\psi}_a(x) + gA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^\mu\right) dt$$

Si se multiplica la derecha de este enunciado por $-i\gamma_{ad}^0$, se obtiene la relación:

$$d\bar{\psi}_d(x) = \left(\partial_k^x \bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^k \gamma_{ad}^0 - im\bar{\psi}_a(x)\gamma_{ad}^0 - igA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^\mu \gamma_{ad}^0\right) dt \tag{6.57}$$

Así, las condiciones de integrabilidad de las EDPHJ fermionicas determinan relaciones entre los diferenciales $d\psi$,$d\bar{\psi}$ y dt, tal como lo muestran las relaciones (6.51) y (6.57), indicando, que las EDPHJ (6.41) y (6.42) no son linealmente independientes [5].

Se analizará la integrabilidad de la EDPHJ bosonica (6.41), esta condición exige que se cumpla:

$$d\phi^1(x) = 0 \tag{6.58}$$

Utilizando (6.44) y teniendo en cuenta que $n_{\phi^1} = 0$, (6.58) se puede expresar en la forma:

$$d\phi^1(x) = \int d^3y[\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}dt + \{\phi^1(x), \phi^1 y)\}dA_0 - d\bar{\psi}_a(y)\{\phi^1(x), \phi_a(y)\} \tag{6.59}$$

$$+\{\phi^1(x), \bar{\phi}_a(y)\}d\psi_a(y)]$$

Los paréntesis de Bose-Fermi necesarios en la expresión anterior son calculados a continuación:

$$\begin{aligned}
\{\phi^1(x), \phi^t(y)\} &= \{\pi^0(x), p^t + \frac{1}{2}\pi^k(y)\pi^k(y) + \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) + \frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\psi_d(y) \\
&- \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\partial_k^y\psi_d(y) + m\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^\mu\psi_d(y)\} \\
&= \{\pi^0(x), \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y) + gA_0(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^0\psi_d(y)\} \\
&= \pi^k(y)\partial_k^y \underbrace{\{\pi^0(x), A_0(y)\}}_{-\delta^3(x-y)} + g\underbrace{\{\pi^0(x), A_0(y)\}}_{-\delta^3(x-y)}\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^0\psi_d(y)
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\{\phi^1(x), \phi^t(y)\} = \pi^k(y)\partial_k^x\delta^3(x-y) - g\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^0\psi_d(y)\delta^3(x-y) \tag{6.60}$$

De igual manera, se puede determinar que:

$$\{\phi^1(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.61}$$

$$\{\phi^1(x), \phi_a(y)\} = 0 \tag{6.62}$$

$$\{\phi^1(x), \bar{\phi}_a(y)\} = 0 \tag{6.63}$$

Utilizando los resultados anteriores en la integrabilidad de ϕ^1, (6.59), se obtiene:

$$\begin{aligned}
d\phi^1(x) &= \int d^3y \left(\pi^k(y)\partial_k^x\delta^3(x-y) - g\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^0\psi_d(y)\delta^3(x-y)\right)dt \qquad (6.64) \\
&= \partial_k^x \int d^3y\pi^k(y)\delta^3(x-y)dt - g\int d^3y\bar{\psi}(y)\gamma^0\psi(y)\delta^3(x-y)dt \\
&= \left(\partial_k^x\pi^k(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x)\right)dt = 0
\end{aligned}$$

Así, la condición de integrabilidad de ϕ^1 genera una nueva EDP de caracter bosónico $n_{\phi^2} = 0$, esta debe ser agregada al conjunto de EDPHJ y se definira de la siguiente forma:

$$\phi^2(x) \equiv \partial_k^x\pi^k(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = 0 \tag{6.65}$$

Se procedera a analizar la integrabilidad de esta nueva EDPHJ, exigiendo que se cumpla: $d\phi^2(x) = 0$. Utilizando (6.44) se puede reescribir la integrabilidad de ϕ^2 de la siguiente manera:

$$d\phi^2(x) = \int d^3y[\{\phi^2(x), \phi^t(y)\}dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) - d\bar{\psi}_b(y)\{\phi^2(x), \phi_b(y)\} \tag{6.66}$$

$$+\{\phi^2(x),\bar{\phi}_b(y)\}d\psi_b(y)]$$

Los paréntesis que aparecen en la expresión anterior son calculados con detalle en el **apéndice H**:

$$\{\phi^2(x),\phi^t(y)\} = -g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) \tag{6.67}$$

$$\{\phi^2(x),\phi_b(y)\} = -g\gamma^0_{bc}\psi_c(x)\delta^3(x-y) \tag{6.68}$$

$$\{\phi^2(x),\bar{\phi}_b(y)\} = g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cb}\delta^3(x-y) \tag{6.69}$$

$$\{\phi^2(x),\phi^1(y)\} = 0 \tag{6.70}$$

Sustituyendo los resultados anteriores en (6.66), y utilizando las relaciones (6.51) y (6.57), se determina que:

$$\begin{aligned} d\phi^2(x) = &\int d^3y\big[\big(-g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y)\big)\,dt - d\bar{\psi}_b(y)\{\phi^2(x),\phi_b(y)\} \\ &+ \{\phi^2(x),\bar{\phi}_b(y)\}d\psi_b(y)] &(6.71)\\ &= -g\partial^x_k\left(\bar{\psi}_c(x)\gamma^k_{cd}\psi_d(x)\right) + g\left(d\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\psi_c(x) + \bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cb}d\psi_b(x)\right) &(6.72)\end{aligned}$$

Calculando por separado el último término se deduce que

$$\begin{aligned} d\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\psi_c(x) + \bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cb}d\psi_b(x) &= \partial^x_k\bar{\psi}_d(x)\gamma^k_{da}\psi_a(x) - im\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x) \\ &- igA_\mu(x)\bar{\psi}_d(x)\gamma^\mu_{da}\psi_a(x) + \bar{\psi}_a(x)\gamma^k_{ad}\partial^x_k\psi_d(x) \\ &+ im\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x) + igA_\mu(x)\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu_{ad}\psi_d(x) \\ &= \partial^x_k\left(\bar{\psi}_a(x)\gamma^k_{ad}\psi_d(x)\right) &(6.73)\end{aligned}$$

el que al sustituir en (6.72), y realizando el cambio de índices $c \to a$, determina que la integrabilidad de ϕ^2 es identicamente satisfecha, por lo tanto, las EDPHJ de caracter bosonicas estan en involución con los paréntesis de Bose-Fermi. La nueva EDP ϕ^2, debe ser agregada al antiguo conjunto de EDPHJ (6.40),(6.41),(6.42),(6.43), y al igual que este conjunto, será necesario asociarle un nuevo parámetro; este parámetro debera ser de paridad par y será designado como $W(x)$ y en principio es arbitrario.

Considerando el conjunto completo de EDPHJ (6.40),(6.41),(6.42),(6.43), (6.65), y las relaciones (6.51) y (6.57), se puede escribir el diferencial de una variable dinámica $F(x)$, (6.44), en la forma:

$$dF(x) = \int d^3y[\{F(x), \phi^t(y)\} + \{F(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) + \{F(x), \phi^2(y)\}dW(y) \tag{6.74}$$
$$+(-1)^{(n_F+1)} \left(\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\gamma^0_{da} - im\bar{\psi}_d(y)\gamma^0_{da} - igA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma^\mu_{cd}\gamma^0_{da}\right) \{F(x), \phi_a(y)\}$$
$$+\{F(x), \bar{\phi}_a(y)\} \left(\gamma^0_{ac}\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) + im\gamma^0_{ac}\psi_c(y) + igA_\mu(y)\gamma^0_{ac}\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\right)]$$

6.2.1. Paréntesis Generalizados

La expresión entre corchetes cuadrados en (6.74), especifica una forma particular de los paréntesis generalizados (PG) [5]. Así, el PG entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$ se definen formalmente de la siguiente manera:

$$\{F(x), G(y)\}^* = \{F(x), G(y)\} - \int\int d^3ud^3v \left\{F(x), \Sigma^i_a(u)\right\} \left(C^{ij}_{ab}(u,v)\right)^{-1} \{\Sigma^j_b(v), G(y)\} \tag{6.75}$$

Donde $i, j = 1, 2$, y se ha definido:

$$\Sigma^1_a \equiv \phi_a = \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0$$

y

$$\Sigma^2_a \equiv \bar{\phi}_a = \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0$$

$\left(C^{ij}_{ab}(u,v)\right)^{-1}$ es la inversa de la matriz $C^{ij}_{ab}(u,v)$ cuyos elementos de matriz son construidos a partir de los paréntesis de Bose-Fermi entre las EDPHJ Σ^i_a y Σ^j_b.

$$C^{ij}_{ab}(u,v) = \begin{pmatrix} \{\phi_a(u), \phi_b(v)\} & \{\phi_a(u), \bar{\phi}_b(v)\} \\ \{\bar{\phi}_a(u), \phi_b(v)\} & \{\bar{\phi}_a(u), \bar{\phi}_b(v)\} \end{pmatrix} \tag{6.76}$$

Con ayuda de los resultados (6.48), (6.49), (6.54) y (6.55), $C^{ij}_{ab}(u,v)$ tiene la siguiente forma:

$$C^{ij}_{ab}(u,v) = -i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0_{ab} \\ \gamma^0_{ba} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(u-v) \tag{6.77}$$

con una inversa dada por [23]:

$$\left(C^{ij}_{ab}(u,v)\right)^{-1} = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0_{ba} \\ \gamma^0_{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(u-v) \tag{6.78}$$

Con esta relación, el paréntesis generalizado entre dos variables dinámicas $F(x)$ y $G(y)$, se calcula a patir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}^* &= \{F(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ba} \textstyle\int d^3v \,\{F(x), \phi_a(v)\} \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \\ &\quad -i\gamma^0_{ab} \textstyle\int d^3v \left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\} \end{aligned} \tag{6.79}$$

Utilizando la propiedad (5.64), se puede escribir el segundo término de la expresión anterior así:

$$\{F(x), \phi_a(v)\} \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} = (-1)^{(n_F+n_{\phi_a})(n_{\bar{\phi}_b}+n_G)} \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{F(x), \phi_a(v)\} \tag{6.80}$$

Teniendo en cuenta que $n_{\phi_a} = 1$, $n_{\bar{\phi}_b} = 1$, el producto (6.80), se expresa:

$$\{F(x), \phi_a(v)\} \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} = (-1)^{(n_F+1)(n_G+1)} \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{F(x), \phi_a(v)\}$$

Entonces, el PG (6.79) se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{F(x), G(y)\}^* &= \{F(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ab} \textstyle\int d^3v \left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\} \\ &\quad -i(-1)^{(n_F+1)(n_G+1)}\gamma^0_{ba} \textstyle\int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{F(x), \phi_a(v)\} \end{aligned} \tag{6.81}$$

La definición de PG permite reducir el número de parámetros independientes, en este caso ψ_a y $\bar{\psi}_a$; con esto, la evolución de una variable dinámica $F(x)$ depende únicamente de los parámetros independientes (t, A_0, W). En términos de los PG, el diferencial (6.74) esta dado por la expresión:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{F(x), \phi^1(y)\} dA_0(y) + \{F(x), \phi^2(y)\} dW(y)\right] \tag{6.82}$$

Se procedera ahora a analizar nuevamente las condiciones de integrabilidad utilizando el diferencial (6.82). Se comenzara con las EDPHJ de carácter bosonico y se estudiara primero la integrabilidad de $\phi^1(x)$:

$$d\phi^1(x) = 0 \tag{6.83}$$

$$d\phi^1(x) = \int d^3y \left[\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\phi^1(x), \phi^1(y)\} dA_0(y) + \{\phi^1(x), \phi^2(y)\} dW(y)\right] \tag{6.84}$$

Utilizando los resultados:

$$\{\phi^1(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.85}$$

$$\{\phi^1(x), \phi^2(y)\} = 0 \tag{6.86}$$

y el siguiente PG calculado en el **Apéndice I**:

$$\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}^* = \pi^k(y)\partial_k^x \delta^3(x-y) - g\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cd}\psi_d(y)\delta^3(x-y) \tag{6.87}$$

en la integrabilidad de ϕ^1 da:

$$d\phi^1(x) = \left[\partial_k^x \pi^k(x) - g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cd}\psi_d(x)\right] dt = \phi^2(x) dt = 0 \tag{6.88}$$

Apoyandose en (6.82), la integrabilidad de $\phi^2(x)$ está dada por:

$$d\phi^2(x) = \int d^3y \left[\{\phi^2(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\phi^2(x), \phi^1(y)\} dA_0(y) + \{\phi^2(x), \phi^2(y)\} dW(y)\right] \tag{6.89}$$

Con ayuda de los siguientes paréntesis de Bose-Fermi (ver **Apéndice H**):

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.90}$$

$$\{\phi^2(x), \phi^2(y)\} = 0 \tag{6.91}$$

La integrabilidad (6.89) resulta ser:

$$d\phi^2(x) = \int d^3y \{\phi^2(x), \phi^t(y)\}^* dt \tag{6.92}$$

Ahora, utilizando el siguiente PG deducido igualmente en el **Apéndice I**:

$$\begin{aligned}\{\phi^2(x), \phi^t(y)\}^* = &-g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial_k^x\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}g\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{bd}\psi_d(y)\partial_k^y\delta^3(x-y) \\ &+ \frac{1}{2}g\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{bd}\partial_k^y\psi_d(y)\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}g\partial_k^y\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\psi_b(x)\delta^3(x-y) \\ &- \frac{1}{2}g\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\psi_b(x)\partial_k^y\delta^3(x-y)\end{aligned}$$

en (6.92), se determina que:

$$\begin{aligned}d\phi^2(x) &= -g\partial_k^x\left(\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\psi_d(y)\right) + \frac{1}{2}g\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bd}^k\partial_k^x\psi_d(x) + \frac{1}{2}g\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bd}^k\partial_k^x\psi_d(x) \\ &+ \frac{1}{2}g\partial_k^x\bar{\psi}_d(x)\gamma_{db}^k\psi_b(x) + \frac{1}{2}g\partial_k^x\bar{\psi}_d(x)\gamma_{db}^k\psi_b(x) \\ &= -g\partial_k^x\left(\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\psi_d(y)\right) + g\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bd}^k\partial_k^x\psi_d(x) + g\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bd}^k\partial_k^x\psi_d(x)\end{aligned} \tag{6.93}$$

$$\therefore \quad d\phi^2(x) = 0 \tag{6.94}$$

Las relaciones (6.88) y (6.94) establecen que las EDPHJ (ϕ^1 y ϕ^2) están en involución bajo la definición (6.82).

Se analizara a continución la integrabilidad de los vínculos fermionicos. La integrabilidad de $\phi_a(x)$, usando (6.82), se escribe de la siguiente manera:

$$d\phi_a(x) = \int d^3y\left[\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\phi_a(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) + \{\phi_a(x), \phi^2(y)\}dW(y)\right] = 0 \tag{6.95}$$

Utilizando los paréntesis de Bose-Fermi:

$$\{\phi_a(x), \phi^1(y)\} = 0$$

$$\{\phi_a(x), \phi^2(y)\} = -\{\phi^2(y), \phi_a(x)\} = g\gamma_{ac}^0\psi_c(y)\delta^3(x-y)$$

y el PG calculado en el **apéndice H**:

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = 0 \tag{6.96}$$

La integrabilidad de $\phi_a(x)$, da:

$$d\phi_a(x) = g\gamma_{ac}^0\int d^3y\psi_c(y)\delta^3(x-y)dW(y) = g\gamma_{ac}^0\psi_c(x)dW(x) = 0 \tag{6.97}$$

Como las componentes del spinor ψ son independientes, se determina que:

$$dW = 0 \tag{6.98}$$

De igual manera, la integrabilidad de $\bar{\phi}_a$ se puede escribir de la siguiente manera:

$$d\bar{\phi}_a(x) = \int d^3y \left[\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\bar{\phi}_a(x), \phi^1(y)\} dA_0(y) + \{\bar{\phi}_a(x), \phi^2(y)\} dW(y)\right] = 0 \tag{6.99}$$

Utilizando los paréntesis de Bose-Fermi:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^1(y)\} = 0$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^2(y)\} = -\{\phi^2(y), \bar{\phi}_a(x)\} = -g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{ca}\delta^3(x-y)$$

y el PG (ver **apéndice H**):

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = 0 \tag{6.100}$$

La ecuación (6.99) se escribe como:

$$d\phi_a(x) = g\gamma^0_{ac} \int d^3y \psi_c(y) \delta^3(x-y) dW(y) = g\gamma^0_{ac}\psi_c(x) dW(x) = 0 \tag{6.101}$$

Del hecho que las componentes del spinor $\bar{\psi}$ son independientes, se obtiene:

$$dW = 0 \tag{6.102}$$

Debido a las condiciones (6.98) y (6.102), el diferencial (6.82), se debe reescribir de la siguiente manera:

$$dF(x) = \int d^3y \left[\{F(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{F(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right] \tag{6.103}$$

Se verifica facilmente con el diferencial anterior que el sistema de EDPHJ esta en involución, y por lo tanto este y las respectivas ecuaciones características son integrables. En principio se asumio que los campos $(A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \pi^\mu, \bar{\pi}_a, \pi)$ eran independientes, pero debido a la presencia de las relaciones (6.41), (6.42) y (6.43) y de de haber considerado a $(A_0, \psi, \bar{\psi})$ como los parámetros independientes asociados a las EDPHJ; se establece que los campos $(A_k, \pi^k, \bar{\pi}_a, \pi_a)$ son los grados de libertad de la teoría.

Ahora, se procederá a deducir primero los PG entre los campos independientes del problema, para ello, se iniciara calculando el PG de $A_i(x)$ con cualquier variable dinámica $G(y)$, el cual esta dado por:

$$\begin{aligned} \{A_i(x), G(y)\}^* = \{A_i(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ab} \int d^3v \left\{A_i(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\} \\ - i(-1)^{(n_G+1)}\gamma^0_{ba} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{A_i(x), \phi_a(v)\} \end{aligned} \tag{6.104}$$

Utilizando los siguientes paréntesis de Bose-Fermi:

$$\{A_i(x), \phi_a(v)\} = 0, \tag{6.105}$$

$$\left\{A_i(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} = 0, \tag{6.106}$$

en el PG (6.104), se obtiene que éste coincide con el párentesis de Bose-Fermi, es decir:

$$\{A_i(x), G(y)\}^* = \{A_i(x), G(y)\} \tag{6.107}$$

Por lo tanto el único PG de A_i diferente de cero con los campos independientes es:

$$\left\{A_i(x), \pi^k(y)\right\}^* = \delta^k_i \delta^3(x-y) \tag{6.108}$$

El PG de $\pi^k(x)$ con cualquier variable dinámica $G(y)$, esta dado por:

$$\begin{aligned} \left\{\pi^k(x), G(y)\right\}^* = \left\{\pi^k(x), G(y)\right\} - i\gamma^0_{ab} \int d^3v \left\{\pi^k(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\} \\ - i(-1)^{(n_G+1)}\gamma^0_{ba} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \left\{\pi^k(x), \phi_a(v)\right\} \end{aligned} \tag{6.109}$$

En vista de los siguientes paréntesis de Bose-Fermi:

$$\left\{\pi^k(x), \phi_a(v)\right\} = 0 \tag{6.110}$$

$$\left\{\pi^k(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} = 0 \tag{6.111}$$

Se muestra también que el PG de $\pi^k(x)$ con cualquier variable dinámica coincide con el paréntesis de Bose-Fermi:

$$\left\{\pi^k(x), G(y)\right\}^* = \left\{\pi^k(x), G(y)\right\} \tag{6.112}$$

Por lo tanto, el unico PG no nulo se obtiene al sustituir $G(y) \equiv A_i(y)$ en (6.112):

$$\left\{\pi^k(x), A_i(y)\right\}^* = -\delta_i^k \delta^3(x-y) \tag{6.113}$$

En forma similar, el PG de $\pi_c(x)$ con cualquier variable dinámica, esta definido así:

$$\begin{aligned} \{\pi_c(x), G(y)\}^* &= \{\pi_c(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ab} \int d^3v \left\{\pi_c(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\} \\ &\quad -i\gamma^0_{ba} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{\pi_c(x), \phi_a(v)\} \end{aligned} \tag{6.114}$$

Utilizando los siguientes resultados:

$$\{\pi_c(x), \phi_a(v)\} = 0, \tag{6.115}$$

$$\{\pi_c, \bar{\phi}_a(v)\} = \{\pi_c, \frac{i}{2}\bar{\psi}_b(v)\gamma^0_{ba}\} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ca}\delta^3(x-v), \tag{6.116}$$

En el PG (6.114), se verifica que:

$$\{\pi_c(x), G(y)\}^* = \{\pi_c(x), G(y)\} - \frac{1}{2}\delta_{cb} \int d^3v \, \{\phi_b(v), G(y)\} \, \delta^3(x-v) \tag{6.117}$$

entonces:

$$\{\pi_c(x), G(y)\}^* = \{\pi_c(x), G(y)\} - \frac{1}{2}\{\phi_c(x), G(y)\} \tag{6.118}$$

Considerando el caso particular en el que $G(y) \equiv \pi_a(y)$, se determina que:

$$\{\pi_c(x), \pi_a(y)\}^* = \{\pi_c(x), \pi_a(y)\} - \frac{1}{2}\{\phi_c(x), \pi_a(y)\} = 0 \tag{6.119}$$

Ahora, si $G(y) \equiv \bar{\pi}_a(y)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \{\pi_c(v), \bar{\pi}_a(y)\}^* &= \{\pi_c(x), \bar{\pi}_a(y)\} - \frac{1}{2}\{\phi_c(x), \bar{\pi}_a(y)\} \\ &= -\frac{1}{2}\{\frac{i}{2}\gamma^0_{cb}\psi_b(v), \bar{\pi}_a(y)\} = -\frac{i}{4}\gamma^0_{cb}\{\psi_b(x), \bar{\pi}_a(y)\} \end{aligned} \tag{6.120}$$

De tal manera que:

$$\{\pi_c(x), \bar{\pi}_a(y)\}^* = \frac{i}{4}\gamma^0_{ca}\delta^3(x-y) \tag{6.121}$$

Por último, se calculara el PG de $\bar{\pi}_c(x)$ con cualquier variable dinámica $G(y)$, el cual está definido de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{\bar{\pi}_c(x), G(y)\}^* &= \{\bar{\pi}_c(x), G(y)\} - i\gamma^0_{ab} \int d^3v \left\{\bar{\pi}_c(x), \bar{\phi}_a(v)\right\} \{\phi_b(v), G(y)\} \\ &\quad -i\gamma^0_{ba} \int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\} \{\bar{\pi}_c(x), \phi_a(v)\} \end{aligned} \tag{6.122}$$

Usando los siguientes resultados:

$$\{\bar{\pi}_c(x), \bar{\phi}_a(v)\} = 0, \tag{6.123}$$

$$\{\bar{\pi}_c(x), \phi_a(v)\} = \{\bar{\pi}_c(x), \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b(v)\} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\delta^3(x-v), \tag{6.124}$$

En (6.122), se muestra que:

$$\{\bar{\pi}_c(x), G(y)\}^* \quad = \{\bar{\pi}_c(x), G(y)\} - \tfrac{1}{2}\delta_{bc}\int d^3v \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\}\delta^3(x-v)$$

por lo tanto

$$\{\bar{\pi}_c(x), G(y)\}^* = \{\bar{\pi}_c(x), G(y)\} - \frac{1}{2}\left\{\bar{\phi}_c(x), G(y)\right\} \tag{6.125}$$

Al considerar $G(y) \equiv \bar{\pi}_b(y)$, se obtiene que:

$$\{\bar{\pi}_c(x), \bar{\pi}_b(y)\}^* = \{\bar{\pi}_c(x), \bar{\pi}_b(y)\} - \frac{1}{2}\left\{\bar{\phi}_c(x), \bar{\pi}_b(y)\right\} = 0 \tag{6.126}$$

Ahora, si $G(y) \equiv \pi_b(y)$, se concluye que:

$$\begin{aligned}\{\bar{\pi}_c(x), \pi_b(y)\}^* &= \{\bar{\pi}_c(x), \pi_b(y)\} - \frac{1}{2}\left\{\bar{\phi}_c(x), \pi_b(y)\right\} \\ &= -\frac{i}{4}\gamma^0_{ac}\left\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\right\}\end{aligned} \tag{6.127}$$

entonces:

$$\{\bar{\pi}_c(x), \pi_b(y)\}^* = \frac{i}{4}\gamma^0_{bc}\delta^3(x-y) \tag{6.128}$$

6.2.2. Ecuaciones características

Se procedera a calcular, mediante el diferencial (6.103), las ecuaciones características asociadas a las sistema de EDPHJ, que corresponden a las ecuaciones de movimiento de la teoría [6]. Empezando con las varibles dinámicas bosonicas A_i:

$$dA_i(x) = \int d^3y \left[\{A_i(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{A_i(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right] \tag{6.129}$$

Como el PG de $A_i(x)$ con cualquier variable dinámica coincide con el paréntesis de Bose-Fermi, entonces se obtiene:

$$\begin{aligned}\{A_i(x), \phi^t(y)\}^* &= \{A_i(x), \frac{1}{2}\left(\pi^k\right)^2(y) + \pi^k(y)\partial^y_k A_0(y)\} \\ &= \pi^k(y)\{A_i(x), \pi^k(y)\} + \{A_i(x), \pi^k(y)\}\partial^y_k A_0(y) \\ &= \pi^k(y)\delta_{ik}\delta^3(x-y) + \delta_{ik}\delta^3(x-y)\partial^y_k A_0(y)\end{aligned} \tag{6.130}$$

$$\{A_i(x), \phi^t(y)\}^* = \left[\pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\right] \delta^3(x-y) \tag{6.131}$$

El segundo paréntesis de Bose-Fermi en (6.129), esta dado por:

$$\{A_i(x), \phi^1(y)\} = \{A_i(x), \pi^0(y)\} = 0 \tag{6.132}$$

Reemplazando los resultados (6.131) y (6.132) en (6.129), se determina que:

$$dA_i(x) = \int d^3y \left[\pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\right] \delta^3(x-y) dt \tag{6.133}$$

$$= \left[\pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x)\right] dt \tag{6.134}$$

Definiendo $\dot{A}_i \equiv \partial_0 A_i$, se obtiene:

$$\dot{A}_i = \pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x) \tag{6.135}$$

Este resultado concuerda correctamente con la expresión (6.26) derivada de la definición de momento canónico conjugado. De igual manera, la evolución del campo $\pi^k(x)$, utilizando (6.103), esta dado por:

$$d\pi^k(x) = \int d^3y \left[\{\pi^k(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\pi^k(x), \phi^1(y)\} dA_0(y)\right] \tag{6.136}$$

Usando la relación (6.112), se puede calcular el PG que aparece en la expresión anterior:

$$\left\{\pi^k(x), \phi^t(y)\right\}^* = \left\{\pi^k(x), \phi^t(y)\right\} = \{\pi^k(x), \frac{1}{4}F_{ij}(y)F^{ij}(y) + gA_i(y)\bar{\psi}(y)\gamma^i\psi(y)\} \tag{6.137}$$

El tensor de Maxwell se define en términos de los campos A_μ, así:

$$F_{ij}(y) = \partial_i^y A_j(y) - \partial_j^y A_i(y) \tag{6.138}$$

con esto, el PG anterior resulta en:

$$\{\pi^k(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{1}{2}F^{ij}(y)\{\pi^k(x), \partial_i^y A_j(y) - \partial_j^y A_i(y)\} + g\{\pi^k(x), A_i(y)\}\bar{\psi}(y)\gamma^i\psi(y)$$

así que:

$$\therefore\ \{\pi^k(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{1}{2}F^{ij}(y)\left[\delta_i^k\partial_j^y - \delta_j^k\partial_i^y\right]\delta^3(x-y) - g\bar{\psi}(y)\gamma^k\psi(y)\delta^3(x-y) \tag{6.139}$$

El segundo paréntesis de Bose-Fermi que aparece en (6.136), esta dado por:

$$\{\pi^k(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^k(x), \pi^0(y)\} = 0 \tag{6.140}$$

Reemplazando los paréntesis (6.139) y (6.140) en (6.136), se obtiene:

$$\begin{aligned} d\pi^k(x) &= \int d^3y \left[\frac{1}{2}F^{ij}(y)\left[\delta_i^k \partial_j^y - \delta_j^k \partial_i^y\right]\delta^3(x-y) - g\bar{\psi}(y)\gamma^k\psi(y)\delta^3(x-y)\right] dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\left(\partial_i^x F^{ik}(x) - \partial_j^x F^{kj}(x)\right) - g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)\right] dt \end{aligned}$$

Cambiando el indice mudo $j \to i$ y utilizando la propiedad de antisimetria del tensor de Maxwell, la expresión anterior resulta en:

$$d\pi^k(x) = \left[\partial_i^x F^{ik}(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x)\right] dt$$

Definiendo $\dot{\pi}^k \equiv \partial_0 \pi^k$, y usando $\pi^k = F^{k0}$, se determina:

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{k0} &= \partial_i F^{ik} - g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x) \qquad (6.141) \\ -\left(\partial_0 F^{k0} + \partial_i F^{ik}\right) &= -g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x) \end{aligned}$$

de donde se concluye que

$$\partial_\mu F^{\mu k} = g\bar{\psi}(x)\gamma^k\psi(x) \tag{6.142}$$

Ahora la EDPHJ (6.65), se puede reescribir así:

$$\begin{aligned} \phi^2(x) \equiv &\partial_k^x \pi^k(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) = 0 \\ &\partial_k^x F^{k0}(x) = g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \qquad (6.143) \end{aligned}$$

Sumando un cero particular $\partial_0 F^{00}$, a la expresión anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_0 F^{00} + \partial_k^x F^{k0}(x) &= g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \\ \partial_\mu F^{\mu 0} &= g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \qquad (6.144) \end{aligned}$$

Recordando que $J^\nu \equiv g\bar{\psi}(x)\gamma^\nu\psi(x)$, las ecuaciones (6.142) y (6.144) se escriben en forma compacta como:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \tag{6.145}$$

La ecuación (6.145) describe el campo electromagnético con fuentes, en componentes se escribe como:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = J^0 \tag{6.146}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \boldsymbol{J} \tag{6.147}$$

El hecho de que el tensor de campo electromagnético, $F^{\mu\nu}$ satisface la identidad de Bianchi:

$$\partial_\mu F^{\nu\alpha} + \partial_\nu F^{\alpha\mu} + \partial_\alpha F^{\mu\nu} = 0 \tag{6.148}$$

se deduce de aquí:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{6.149}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{6.150}$$

Las relaciones (6.146), (6.147), (6.149) y (6.150) constituye lo que se conoce como las ecuaciones de de campo electromagnético con fuentes [11].

Ahora, se calcularán las ecuaciones de movimiento para las variables fermionicas. El diferencial de $\pi_a(x)$, usando (6.103), es:

$$d\pi_a(x) = \int d^3y \left[\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* dt + \{\pi_a(x), \phi^1(y)\} dA_0(y) \right] \tag{6.151}$$

El segundo paréntesis en la expresión anterior da:

$$\{\pi_a(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.152}$$

Utilizando (6.118) se puede calcular el siguiente PG:

$$\left\{\pi_a(x), \phi^t(y)\right\}^* = \left\{\pi_a(x), \phi^t(y)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\phi_a(x), \phi^t(y)\right\} \tag{6.153}$$

como $\phi_a \equiv \pi_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b$, se determina lo siguiente:

$$\left\{\pi_a(x), \phi^t(y)\right\}^* = \frac{1}{2}\left\{\pi_a(x), \phi^t(y)\right\} \tag{6.154}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_a(x),\phi^t(y)\right\}^* &= \frac{1}{2}\{\pi_a(x),\frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{bc}\psi_c - \frac{i}{2}\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{bc}\partial_k^y\psi_c(y)\\ &+ m\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)\}\\ &= \frac{i}{4}\partial_k^y\{\pi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}\gamma^k_{bc}\psi_c - \frac{i}{4}\{\pi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}\gamma^k_{bc}\partial_k^y\psi_c(y)\\ &+ \frac{1}{2}m\{\pi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}\psi_b(y) + \frac{1}{2}gA_\mu(y)\{\pi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{\pi_a(x),\phi^t(y)\right\}^* &= -\frac{i}{4}\partial_k^y\delta^3(x-y)\gamma^k_{ac}\psi_c + \frac{i}{4}\gamma^k_{ac}\partial_k^y\psi_c(y)\delta^3(x-y)\\ &- \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}gA_\mu(y)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(y)\delta^3(x-y)\end{aligned} \tag{6.155}$$

Sustituyendo (6.152) y (6.155) en (6.151), se obtiene:

$$\begin{aligned}d\pi_a(x) &= \int d^3y[-\frac{i}{4}\partial_k^y\delta^3(x-y)\gamma^k_{ac}\psi_c + \frac{i}{4}\gamma^k_{ac}\partial_k^y\psi_c(y)\delta^3(x-y)\\ &- \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}gA_\mu(y)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(y)\delta^3(x-y)]dt\\ 2\partial_0\pi_a(x) &= i\gamma^k_{ac}\partial_k^x\psi_c(x) - m\psi_a(x) - gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x)\end{aligned} \tag{6.156}$$

Utilizando la relación (6.27) en la expresión anterior se determina que:

$$\begin{aligned}-i\gamma^0_{ab}\partial_0\psi_b(x) &= i\gamma^k_{ac}\partial_k^x\psi_c(x) - m\psi_a(x) - gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x) \;\text{ ó}\\ \left[i\gamma^\mu_{ac}\partial_\mu - m\delta_{ac}\right]\psi_c(x) &= gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x)\end{aligned} \tag{6.157}$$

por lo tanto se cumple:

$$\left[\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi(x)\right]_a = gA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x) \tag{6.158}$$

Finalmente, se calculara la ecuación de movimiento para $\bar{\psi}_a(x)$, utilizando nuevamente (6.103) se obtiene el siguiente diferencial para esta variable fermionica:

$$d\bar{\pi}_a(x) = \int d^3y\left[\{\bar{\pi}_a(x),\phi^t(y)\}^*dt + \{\bar{\pi}_a(x),\phi^1(y)\}dA_0(y)\right] \tag{6.159}$$

El segundo paréntesis en la expresión anterior da:

$$\{\bar{\pi}_a(x),\phi^1(y)\} = 0 \tag{6.160}$$

Utilizando (6.125), se puede calcular el siguiente PG:

$$\left\{\bar{\pi}_c(x), \phi^t(y)\right\}^* = \left\{\bar{\pi}_c(x), \phi^t(y)\right\} - \frac{1}{2}\left\{\bar{\phi}_c(x), \phi^t(y)\right\} \tag{6.161}$$

como $\bar{\phi}_a \equiv \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}$, se determina que:

$$\left\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\right\}^* = \frac{1}{2}\left\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\right\} \tag{6.162}$$

entonces:

$$\begin{aligned}\left\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\right\}^* &= \frac{1}{2}\{\bar{\pi}_a(x), \frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{bc}\psi_c - \frac{i}{2}\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{bc}\partial^y_k\psi_c(y) \\ &+ m\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)\} \\ &= -\frac{i}{4}\partial^y_k\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{bc}\{\bar{\pi}_a(x), \psi_c\} + \frac{i}{4}\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{bc}\partial^y_k\{\bar{\pi}_a(x), \psi_c(y)\} \\ &- \frac{1}{2}m\bar{\psi}_b(y)\{\bar{\pi}_a(x), \psi_b(y)\} - \frac{1}{2}gA_\mu(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\{\bar{\pi}_a(x), \psi_c(y)\}\end{aligned} \tag{6.163}$$

Por lo tanto se obtiene:

$$\begin{aligned}\left\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\right\}^* &= \frac{i}{4}\partial^y_k\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{ba}\delta^3(x-y) - \frac{i}{4}\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{ba}\partial^y_k\delta^3(x-y) \\ &+ \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}gA_\mu(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{ba}\delta^3(x-y)\end{aligned} \tag{6.164}$$

Reemplazando (6.160) y (6.164) en (6.159) resulta:

$$\begin{aligned}d\bar{\pi}_a(x) = \int d^3y[&\frac{i}{4}\partial^y_k\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{ba}\delta^3(x-y) - \frac{i}{4}\bar{\psi}_b(y)\gamma^k_{ba}\partial^y_k\delta^3(x-y) \\ &+ \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}gA_\mu(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{ba}\delta^3(x-y)]dt\end{aligned} \tag{6.165}$$

ahora utilizando la expresión (6.29), $\bar{\pi}_a = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}$, se determina que:

$$\begin{aligned}-i\partial_0\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} &= i\partial^x_k\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{ba} + m\bar{\psi}_a(x) + gA_\mu(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{ba} \\ i\partial^x_\mu\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{ba} + m\bar{\psi}_a(x) &= -gA_\mu(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{ba}\end{aligned} \tag{6.166}$$

de donde:

$$\left[\bar{\psi}(x)\left(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m\right)\right]_a = -gA_\mu(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{ba} \tag{6.167}$$

Las ecuaciones (6.158) y (6.167) se conocen como las ecuaciones de Dirac para los campos spinoriales ψ y $\bar{\psi}$ respectivamente [6].

Conclusiones y Recomendaciones

En este trabajo se presentó el formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas singulares. Mediante problemas prácticos se hizo la generalización para sistemas con infinitos grados de libertad y sistemas descritos por medio de variables de Grassmann. Se mostró que el formalismo de Hamilton Jacobi, permite a través de las condiciones de integrabilidad obtener nuevos vínculos que surgen de la teoría, de igual manera que las condiciones de consistencia lo hacen en el formalismo Hamiltoniano de Dirac. En algunos trabajos se ha probado la equivalencia entre las condiciones de integrabilidad y las condiciones de consistencia [6].

En particular, se mostró que cada vínculo es reconocido como una ecuación diferencial parcial en el formalismo de Hamilton Jacobi y a cada uno de estos vínculos se les asigna un parámetro independiente. Si todos los vínculos primarios y obtenidos por integrabilidad se cierran en un álgebra de Lie, entonces, se dice que el sistema es involutivo y las respectivas ecuaciones de movimiento o características son integrables. Si todos los vínculos o algunos no están en involución es debido a que existe una dependencia lineal entre las EDP, esto permitirá redefinir la dinámica en términos de los paréntesis generalizados reduciendo el número de parámetros independientes. Las ecuaciones de movimiento quedan entonces expresadas en términos de los vínculos que están en involución con los paréntesis de Poisson y sus respectivos parámetros independientes. Se puede observar que vínculos en involución se refiere a vínculos de primera clase en el formalismo de Dirac, por lo tanto, la evolución de un sistema en el formalismo de Hamilton Jacobi esta dada por el Hamiltoniano y los vínculos de primera clase y sus respectivos parámetros independientes, llegando directamente a la conjetura de Dirac [10].

Para el campo electromagnético libre, el formalismo de HJ indica que la ecuación (3.20) y el vínculo (3.13) forman el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales denominado EDPHJ [3], las ecuaciones características asociadas a este conjunto de EDPHJ definen un espacio de fase reducido cuyas coordenadas son los campos (A_i, π^i), estas coordenadas se conocen como variables dependientes. Toda observable física debe entonces ser función de estas coordenadas. La evolución dinámica de cualquier observable es dictada por dos parámetros independientes el tiempo t y el campo A_0.

Para garantizar la existencia de soluciones completas para el sistema de EDPHJ y la integrabilidad de las ecuaciones características fue necesario analizar las condiciones de integrabilidad del conjunto de EDPHJ ϕ^1 y ϕ^2. La integrabilidad para (3.13) genera una nueva EDP ϕ^2, y su integrabilidad es automaticamente satisfecha, lo que muestra que el problema no tiene mas EDP. El conjunto inicial (3.21) y (3.22) se complemento con la EDP (3.32), de esta manera, se expandió el conjunto de variables independientes para asociar un parámetro arbitrario a esta nueva EDP, ahora, la evolución dinámica del sistema es dado por (3.40). Se verifico que bajo (3.40), el conjunto esta en involución [17]. Finalmente, el formalismo de HJ permitió obtener las ecuaciones de Maxwell sin fuentes en forma covariante (3.58).

En el análisis de la estructura clásica de los campos de Dirac por medio del formalismo de Hamilton Jacobi se determino que, los vínculos ϕ y $\bar{\phi}$ junto con la ecuación de HJ (5.59), forman el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi (EDPHJ) y es sobre este conjunto que se calcularon las ecuaciones características. Las variables dependientes son los campos $(\pi_a, \bar{\pi}_a)$ y el conjunto de parámetros independientes que describen la evolución dinámica del sistema físico son $(t, \psi_a, \bar{\psi}_a)$.

Al analizar las condiciones de integrabilidad de ϕ y $\bar{\phi}$ se observo relaciones entre las variables independientes del sistema, cuando esto sucede, se dice que el conjunto de EDPHJ no es linealmente independiente y por lo tanto estas ecuaciones no están involución con los paréntesis de Bose-Fermi. Las relaciones entre las variables independientes permitieron reescribir el diferencial fundamental en términos del tiempo que es ahora la única variable independiente del sistema. Esto permitió definir la estructura conocida como paréntesis generalizados (PG). Ahora, la evolución dinámica del sistema esta dada por (5.82) y se observo entonces que al definir los PG el número de variables independientes del sistema disminuyeron, además, se verifico que bajo (5.82) el conjunto de EDPHJ esta en involución y por lo tanto las ecuaciones características que corresponden a las ecuaciones de movimiento del sistema son integrables. Por último, se obtuvo las ecuaciones de Dirac (5.124) y (5.125) mediante el formalismo de HJ.

Finalmente, el formalismo de Hamilton-Jacobi permitió estudiar la estructura clásica de la electrodinámica cuántica (QED), el problema tiene un vínculo bosónico y ocho vínculos fermiónicos, al analizar la integrabilidad de los vínculos fermiónicos se determinó relaciones entre las variables independientes del sistema. La integrabilidad del vínculo bosónico genera otro vínculo también de carácter bosónico y la integrabilidad de este es directamente satisfecha. En este punto, se debe asociar un parámetro independiente al nuevo vínculo bosónico y junto con las relaciones (6.51) y (6.57) la dinámica está dada en términos de los paréntesis generalizados y los vinculos bosónicos que están en involución con los paréntesis de Bose-Fermi como lo indica (6.82). Se mostró que con el uso de este diferencial las EDPHJ cumplen las condiciones de integrabilidad y por lo tanto las ecuaciones de movimiento son integrables. Finalmente, se calcularon las ecuaciones de Maxwell con fuentes en forma covariante (6.142) y las ecuaciones (6.158) y (6.167) que se conocen como las ecuaciones de Dirac para los campos spinoriales ψ y $\bar{\psi}$.

Se recomienda realizar estudios en el desarrollo del formalismo de Hamilton Jacobi para sistemas singulares descritos por Lagrangianos de orden superior y aplicarlo al análisis de la electrodinámica de Podolsky.

Apéndices

Apéndice A. Integrabilidad para ϕ^t.

La condición de de integrabilidad para ϕ^t exige que se cumpla:

$$d\phi^t = 0$$

$$d\phi^t = \int d^3y \left[\{\phi^t(x), \phi^t(y)\}dt + \{\phi^t(x), \phi^1(y)\}dA_0(y) + \{\phi^t(x), \phi^2(y)\}dW(y)\right] \quad (6.168)$$

Calculando por separado los parentesis de Poisson que aparecen en la expresion anterior:

$$\begin{aligned}
\{\phi^t(x), \phi^t(y)\} &= \{\frac{1}{2}(\pi^j(x))^2 + \pi^j(x)\partial_j^x A_0(x) + \frac{1}{4}F_{jl}(x)F^{jl}(x), \frac{1}{2}(\pi^k(y))^2 + \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)\} \\
&= \{\frac{1}{2}(\pi^j(x))^2, \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)\} + \{\pi^j(x)\partial_j^x A_0(x), \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)\} \\
&+ \{\frac{1}{4}F_{jl}(x)F^{jl}(x), \frac{1}{2}(\pi^k(y))^2\} + \{\frac{1}{4}F_{jl}(x)F^{jl}(x), \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y)\} \\
&= \frac{1}{2}\pi^j(x)F^{ki}(y)\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} + \frac{1}{2}\partial_j^x A_0(x)F^{ki}(y)\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} \\
&+ \frac{1}{2}F^{jl}(x)\pi^k(y)\{F_{jl}(x), \pi^k(y)\} + \frac{1}{2}F^{jl}(x)\partial_k^y A_0(y)\{F_{jl}(x), \pi^k(y)\} \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} + \frac{1}{2}F^{jl}(x)\left[\pi^k(y) + \partial_k^y A_0(y)\right]\{F_{jl}(x), \pi^k(y)\}
\end{aligned}$$

$$\{\phi^t(x), \phi^t(y)\} = \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} + \frac{1}{2}F^{jl}(x)\left[\pi^k(y) + \partial_k^y A_0(y)\right]\{F_{jl}(x), \pi^k(y)\} \quad (6.169)$$

Calculemos:

$$\begin{aligned}
\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} &= \{\pi^j(x), \partial_k^y A_i(y) - \partial_i^y A_k(y)\} = \partial_k^y \underbrace{\{\pi^j(x), A_i(y)\}}_{-\delta_i^j\delta^3(x-y)} - \partial_i^y \underbrace{\{\pi^j(x), A_k(y)\}}_{-\delta_k^j\delta^3(x-y)} \\
&= [\delta_k^j \underbrace{\partial_i^y}_{-\partial_i^x} - \delta_i^j \underbrace{\partial_k^y}_{-\partial_k^x}]\delta^3(x-y) = \left[\delta_i^j\partial_k^x - \delta_k^j\partial_i^x\right]\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} = \left[\delta_i^j\partial_k^x - \delta_k^j\partial_i^x\right]\delta^3(x-y) \quad (6.170)$$

$$\begin{aligned}
\{F_{ki}(x), \pi^j(y)\} &= -\{\pi^j(y), F_{ki}(x)\} = -\left[\delta_i^j\partial_k^y - \delta_k^j\partial_i^y\right]\delta^3(y-x) \\
&= \left[\delta_i^j\partial_k^x - \delta_k^j\partial_i^x\right]\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Realizando el siguiente cambio de indices $k \to j$ $i \to l$ $j \to k$:

$$\{F_{jl}(x), \pi^k(y)\} = \left[\delta_l^k \partial_j^x - \delta_j^k \partial_l^x\right] \delta^3(x-y) \tag{6.171}$$

Sustituyendo (6.170) y (6.171) en (6.169):

$$\begin{aligned}
\{\phi^t(x), \phi^t(y)\} &= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\left[\delta_i^j \partial_k^x - \delta_k^j \partial_i^x\right]\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}F^{jl}(x)\left[\pi^k(y) + \partial_k^y A_0(y)\right]\left[\delta_l^k \partial_j^x - \delta_j^k \partial_l^x\right]\delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\partial_k^x \delta^3(x-y) - \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^k(x) + \partial_k^x A_0(x)\right]\partial_i^x \delta^3(x-y) \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2}F^{jk}(x)\left[\pi^k(y) + \partial_k^y A_0(y)\right]\partial_j^x \delta^3(x-y)}_{k\longleftrightarrow j,\ x\longleftrightarrow y} - \underbrace{\frac{1}{2}F^{kl}(x)\left[\pi^k(y) + \partial_k^y A_0(y)\right]\partial_l^x \delta^3(x-y)}_{l\rightarrow i,\ x\longleftrightarrow y} \\
&= \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\partial_k^x \delta^3(x-y) - \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^k(x) + \partial_k^x A_0(x)\right]\partial_i^x \delta^3(x-y) \\
&+ \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\underbrace{\partial_k^y \delta^3(y-x)}_{-\partial_k^x \delta^3(x-y)} - \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^k(x) + \partial_k^x A_0(x)\right]\underbrace{\partial_i^y \delta^3(y-x)}_{-\partial_i^x \delta^3(x-y)} \\
&= \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\pi^j(x) + \partial_j^x A_0(x)\right]\partial_k^x \delta^3(x-y) - \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^k(x) + \partial_k^x A_0(x)\right]\partial_i^x \delta^3(x-y) \\
&- \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\pi^j(x) - \partial_j^x A_0(x)\right]\partial_k^x \delta^3(x-y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)\left[\pi^k(x) + \partial_k^x A_0(x)\right]\partial_i^x \delta^3(x-y) = 0
\end{aligned}$$

$$\{\phi^t(x), \phi^t(y)\} = 0 \tag{6.172}$$

$$\{\phi^t(x), \phi^1(y)\} = -\{\phi^1(y), \phi^t(x)\} = -\pi^k(x)\partial_k^y \delta^3(y-x)$$

$$\{\phi^t(x), \phi^1(y)\} = -\pi^k(x)\partial_k^y \delta^3(x-y) \tag{6.173}$$

$$\{\phi^t(x), \phi^2(y)\} = -\{\phi^2(y), \phi^t(x)\} = 0 \tag{6.174}$$

Donde se ha utilizado la siguiente propiedad de la funcion delta de Dirac

$$\delta^3(y-x) = \delta^3(x-y)$$

Sustituyendo los resultados (6.172), (6.173) y (6.174) en (6.168) se tiene:

$$\begin{aligned}
d\phi^t &= \int d^3y\left(-\pi^k(x)\partial_k^y \delta^3(x-y)\right) dA_0(y) = -\int d^3y dA_0(y)\partial_k^y \underbrace{\pi^k(x)\delta^3(x-y)}_{\pi^k(y)\delta^3(x-y)} \\
&= -\int d^3y dA_0(y)\underbrace{\partial_k^y \pi^k(y)}_{\phi^2(y)=0}\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad d\phi^t = 0 \tag{6.175}$$

Es decir que la condición de integrabilidad para ϕ^t es identicamente satisfecha.

Apéndice B. Paréntesis de Poisson necesarios para calcular las ecuaciones de movimiento del campo electromagnético libre.

En este apéndice se calculan los paréntesis de Poisson para las ecuaciones de movimiento del campo electromagnético libre, comenzando con el campo A_i:

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^t(y)\} &= \{A_i(x), \frac{1}{2}(\pi^k(y))^2 + \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{kj}(y)F^{kj}(y)\} \\
&= \pi^k(y)\{A_i(x), \pi^k(y)\} + \partial_k^y A_0(y)\{A_i(x), \pi^k(y)\} \\
&= \left[\pi^k(y) + \partial_k^y A_0(y)\right] \underbrace{\{A_i(x), \pi^k(y)\}}_{\delta_i^k \delta^3(x-y)}
\end{aligned}$$

$$\{A_i(x), \phi^t(y)\} = \left[\pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\right] \delta^3(x-y) \tag{6.176}$$

$$\{A_i(x), \phi^1(y)\} = \{A_i(x), \pi^0\} = 0 \tag{6.177}$$

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), \phi^2(y)\} &= \{A_i(x), \partial_k^y \pi^k(y\} = \partial_k^y \{A_i(x), \pi^k(y\} \\
&= \partial_k^y \delta_i^k \delta^3(x-y) = \partial_i^y \delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{A_i(x), \phi^2(y)\} = \partial_i^y \delta^3(x-y) \tag{6.178}$$

$$\begin{aligned}
\{\pi^i(x), \phi^t(y)\} &= \{\pi^i(x), \frac{1}{2}(\pi^k(y))^2 + \pi^k(y)\partial_k^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{kj}(y)F^{kj}(y)\} \\
&= \frac{1}{2}F^{kj}(y) \underbrace{\{\pi^i(x), F_{kj}(y)\}}_{\left[\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x\right]\delta^3(x-y)}
\end{aligned}$$

$$\{\pi^i(x), \phi^t(y)\} = \frac{1}{2}F^{kj}(y)\left[\delta_j^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_j^x\right]\delta^3(x-y) \tag{6.179}$$

$$\{\pi^i(x), \phi^1(y)\} = \{\pi^i(x), \pi^0(x)\} = 0 \tag{6.180}$$

$$\{\pi^i(x), \phi^2(y)\} = \{\pi^i(x), \partial_k^y \pi^k(y)\} = 0 \tag{6.181}$$

Apéndice C. Paréntesis de Bose-Fermi para el cálculo de la integrabilidad de ϕ_a.

Los paréntesis de Bose-Fermi necesarios para analizar la condición de integrabilidad de ϕ_a se calculan acontinuación:

$$\begin{aligned}\{\phi_a(x),\phi^t(y)\} &= \{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\psi_d(x), p^t+\frac{i}{2}\left[\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\psi_b(y)-\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\right]\\ &+m\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y)\}\\ &=\frac{i}{2}\{\pi_a(x),\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_c\psi_b(y)\}-\frac{i}{2}\{\pi_a(x),\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\}\\ &+m\{\pi_a(x),\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y)\}\end{aligned}$$

Utilizando las propiedades (41), (43) y los paréntesis fundamentales de Bose-Fermi del sistema, se tiene:

$$\begin{aligned}\{\phi_a(x),\phi^t(y)\} &= \frac{i}{2}\partial^y_k\{\pi_a(x),\bar{\psi}_c(y)\}\gamma^k_{cb}\psi_b(y)-\frac{i}{2}\{\pi_a(x),\bar{\psi}_c(y)\}\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\\ &+m\{\pi_a(x),\bar{\psi}_c(y)\}\psi_c(y)\\ &=\frac{i}{2}\partial^y_k\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\gamma^k_{cb}\psi_b(y)-\frac{i}{2}\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\\ &+m\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\psi_c(y)\\ &=-\frac{i}{2}\partial^y_k\delta^3(x-y)\gamma^k_{ab}\psi_b(y)+\frac{i}{2}\delta^3(x-y)\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)-m\delta^3(x-y)\psi_a(y)\\ &=\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y)+\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y)-m\psi_a(y)\delta^3(x-y)\end{aligned}$$

entonces:

$$\{\phi_a(x),\phi^t(y)\}=\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y)+\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y)-m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \quad (6.182)$$

$$
\begin{aligned}
\{\phi_a(x),\bar{\phi}_b(y)\} &= \{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\psi_d(x),\bar{\pi}_b(y)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb}\}\\
&= \frac{i}{2}\{\pi_a(x),\bar{\psi}_c(y)\}\gamma^0_{cb}+\frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\{\psi_d(x),\bar{\pi}_b(y)\}\\
&= \frac{i}{2}\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\gamma^0_{cb}+\frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\left(-\delta_{bd}\delta^3(x-y)\right)\\
&= -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)\\
&= -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)
\end{aligned}
$$

$$
\{\phi_a(x),\bar{\phi}_b(y)\} = -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{6.183}
$$

$$
\{\phi_a(x),\phi_b(y)\} = \{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\psi_c(x)\gamma^0_{ca},\pi_b(y)+\frac{i}{2}\psi_d(y)\gamma^0_{db}\} = 0
$$

$$
\therefore\quad \{\phi_a(x),\phi_b(y)\} = 0 \tag{6.184}
$$

Apéndice D. Paréntesis de Bose-Fermi para el cálculo de la integrabilidad de $\bar{\phi}_a$.

Es necesario calcular los siguientes paréntesis para evaluar la integrabilidad de $\bar{\phi}_a$:

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\phi}_a(x),\phi^t(y)\} &= \{\bar{\pi}_a(x)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_d(x)\gamma^0_{da},p^t+\frac{i}{2}\left[\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\psi_b(y)-\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\right]\\
&\quad +m\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y)\}\\
&= \frac{i}{2}\{\bar{\pi}_a(x),\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\psi_b(y)\}-\frac{i}{2}\{\bar{\pi}_a(x),\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\}\\
&\quad +m\{\bar{\pi}_a(x),\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y)\}\\
&= -\frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\{\bar{\pi}_a(x),\psi_b(y)\}+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\{\bar{\pi}_a(x),\psi_b(y)\}\\
&\quad -m\bar{\psi}_c(y)\{\bar{\pi}_a(x),\psi_c(y)\}\\
&= -\frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\left(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)\right)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\left(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)\right)\\
&\quad -m\bar{\psi}_c(y)\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\\
&= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^y_k\delta^3(x-y)\\
&\quad +m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y)
\end{aligned}
$$

Entonces se tiene el primer parentesis de Bose-Fermi:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\} = \frac{i}{2}\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \partial_k^x \delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \quad (6.185)$$

El siguiente paréntesis que aparece en la integrabilidad $\bar{\phi}_a$ es:

$$\begin{aligned}\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} &= \{\bar{\pi}_a(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^0, \pi_b(y) + \frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\psi_d(y)\} \\ &= \frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\left(-\delta_{ad}\delta^3(x-y)\right) + \frac{i}{2}\left(-\delta_{cb}\delta^3(x-y)\right)\gamma_{ca}^0 \\ &= -\frac{i}{2}\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y) \\ &= -i\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y)\end{aligned}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} = -i\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y) \quad (6.186)$$

El último paréntesis:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = \{\bar{\pi}_a(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(x)\gamma_{ca}^0, \bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_d(y)\gamma_{db}^0\} = 0$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = 0 \quad (6.187)$$

Apéndice E. Paréntesis generalizados para el cálculo de la integrabilidad de ϕ_a, $\bar{\phi}_a$ y ecuaciones de movimiento.

A continuación se presentan los cálculos de los paréntesis generalizados utilizados en en la integrabilidad de ϕ_a y $\bar{\phi}_a$

$$\begin{aligned}\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \{\phi_a(x), \phi^t(y)\} &+ \left(\partial_k^y\bar{\psi}_d(y)\gamma_{dc}^k\gamma_{cb}^0 - im\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cb}^0\right)\{\phi_a(x), \phi_b(y)\} \\ &+ \{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\}\left(\gamma_{bc}^0\gamma_{cd}^k\partial_k^y\psi_d(y) + im\gamma_{bc}^0\psi_c(y)\right)\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados (6.182),(6.183) y (6.184) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned}
\{\phi_a(x),\phi^t(y)\}^* &= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&- i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)\left(\gamma^0_{bc}\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) + im\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\right) \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&- i\underbrace{\gamma^0_{ab}\gamma^0_{bc}}_{\delta_{ac}}\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(x-y) + m\underbrace{\gamma^0_{ab}\gamma^0_{bc}}_{\delta_{ac}}\psi_c(y)\delta^3(x-y) \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \cancel{m\psi_a(y)\delta^3(x-y)} \\
&- \underbrace{i\gamma^k_{ad}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(x-y)}_{d\to b} + \cancel{m\psi_a(y)\delta^3(x-y)} \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\phi_a(x),\phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\psi_b(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) \tag{6.188}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar\phi_a(x),\phi^t(y)\}^* &= \{\bar\phi_a(x),\phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k\bar\psi_d(y)\gamma^k_{dc}\gamma^0_{cb} - im\bar\psi_c(y)\gamma^0_{cb}\right)\{\bar\phi_a(x),\phi_b(y)\} \\
&+ \{\bar\phi_a(x),\bar\phi_b(y)\}\left(\gamma^0_{bc}\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) + im\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo los resultados (6.185),(6.186) y (6.187) en el paréntesis anterior:

$$\begin{aligned}
\{\bar\phi_a(x),\phi^t(y)\}^* &= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k\delta^3(x-y) + m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&+ \left(\partial^y_k\bar\psi_d(y)\gamma^k_{dc}\gamma^0_{cb} - im\bar\psi_c(y)\gamma^0_{cb}\right)\left(-i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)\right) \\
&= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k\delta^3(x-y) + m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&- i\partial^y_k\bar\psi_d(y)\gamma^k_{dc}\underbrace{\gamma^0_{cb}\gamma^0_{ba}}_{\delta_{ca}}\delta^3(x-y) - m\bar\psi_c(y)\underbrace{\gamma^0_{cb}\gamma^0_{ba}}_{\delta_{ca}}\delta^3(x-y) \\
&= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k\delta^3(x-y) + \cancel{m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y)} \\
&- i\partial^y_k\bar\psi_d(y)\gamma^k_{da}\delta^3(x-y) - \cancel{m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y)} \\
&= -\frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^x_k\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = -\frac{i}{2}\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k \partial_k^x \delta^3(x-y) \tag{6.189}$$

Para calcular las ecuaciones de movimiento es necesario considerar los siguientes paréntesis generalizados:

$$\begin{aligned}\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* =& \{\pi_a(x), \phi^t(y)\} + \left(\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k \gamma_{db}^0 - im\bar{\psi}_d(y)\gamma_{db}^0\right)\{\pi_a(x), \phi_b(y)\} \\ &+ \{\pi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\}\left(\gamma_{bd}^0 \gamma_{dc}^k \partial_k^y \psi_c(y) + im\gamma_{bd}^0 \psi_d(y)\right)\end{aligned}$$

Se calculara por separado los paréntesis de Bose-Fermi que aparecen en la relación anterior:

$$\begin{aligned}\{\pi_a(x), \phi^t(y)\} &= \{\pi_a(x), \frac{i}{2}\left(\partial_k^y \bar{\psi}_c(y)\gamma_{cb}^k \psi_b(y) - \bar{\psi}_c(y)\gamma_{cb}^k \partial_k^y \psi_b(y)\right) \\ &\quad + m\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y)\} \\ &= \frac{i}{2}\partial_k^y \left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\gamma_{cb}^k \psi_b(y) - \frac{i}{2}\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\gamma_{cb}^k \partial_k^y \psi_b(y) \\ &\quad + m\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right)\psi_c(y) \\ &= -\frac{i}{2}\partial_k^y \delta^3(x-y)\gamma_{ab}^k \psi_b(y) + \frac{i}{2}\gamma_{ab}^k \partial_k^y \psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y)\end{aligned}$$

$$\{\pi_a(x), \phi^t(y)\} = \frac{i}{2}\gamma_{ab}^k \partial_k^x \psi_b(y)\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma_{ab}^k \partial_k^y \psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \tag{6.190}$$

$$\{\pi_a(x), \phi(y)\} = 0 \tag{6.191}$$

$$\begin{aligned}\{\pi_a(x), \bar{\phi}(y)_b\} &= \{\pi_a(x), \bar{\pi}_b + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma_{cb}^0\} = \frac{i}{2}\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c\}\gamma_{cb}^0 \\ &= -\frac{i}{2}\gamma_{ab}^0 \delta^3(x-y)\end{aligned}$$

$$\{\pi_a(x), \bar{\phi}(y)_b\} = -\frac{i}{2}\gamma_{ab}^0 \delta^3(x-y) \tag{6.192}$$

Sustituyendo los resultados (6.190), (6.191) y(6.192) en el paréntesis generalizado de $\pi_a(x)$:

$$\begin{aligned}
\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* &= \left(\frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y)\right) \\
&+ \left(-\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)\right)\left(\gamma^0_{bd}\gamma^k_{dc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{bd}\psi_d(y)\right) \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&- \frac{i}{2}\delta_{ad}\gamma^k_{dc}\partial^y_k\psi_c(y)\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\delta_{ad}\psi_d(y)\delta^3(x-y) \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^y_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&- \frac{i}{2}\gamma^k_{ac}\partial^y_k\psi_c(y)\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&= \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\gamma^k_{ab}\partial^x_k\psi_b(y)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\psi_a(y)\delta^3(x-y) \tag{6.193}$$

Se calculara el siguiente parentesis generalizado:

$$\begin{aligned}
\{\bar\pi_a(x), \phi^t(y)\}^* =& \{\bar\pi_a(x), \phi^t(y)\} + \left(\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\gamma^0_{db} - im\bar\psi_d(y)\gamma^0_{db}\right)\{\bar\pi_a(x), \phi_b(y)\} \\
&+ \{\bar\pi_a(x), \bar\phi_b(y)\}\left(\gamma^0_{bd}\gamma^k_{dc}\partial^y_k\psi_c(y) + im\gamma^0_{bd}\psi_d(y)\right)
\end{aligned}$$

Analizando por separado los paréntesis de Bose-Fermi que aparecen en la relación anterior:

$$\begin{aligned}
\{\bar\pi_a(x), \phi^t(y)\} &= \{\bar\pi_a(x), \frac{i}{2}\left(\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cb}\psi_b(y) - \bar\psi_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\right) \\
&+ m\bar\psi_c(y)\psi_c(y)\} \\
&= \frac{i}{2}\{\bar\pi_a(x), \partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cb}\psi_b(y)\} - \frac{i}{2}\{\bar\pi_a(x), \bar\psi_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\psi_b(y)\} \\
&+ m\{\bar\pi_a(x), \bar\psi_c(y)\psi_c(y)\} \\
&= -\frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cb}\underbrace{\{\bar\pi_a(x), \psi_b(y)\}}_{-\delta_{ab}\delta^3(x-y)} + \frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cb}\partial^y_k\{\bar\pi_a(x), \psi_b(y)\} \\
&- m\bar\psi_c(y)\{\bar\pi_a(x), \psi_c(y)\} \\
&= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^y_k\delta^3(x-y) + m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y) \\
&= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\partial^x_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y) + m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\} = \frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\partial_k^x\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \quad (6.194)$$

$$\begin{aligned}\{\bar{\pi}_a(x), \phi_b(y)\} &= \{\bar{\pi}_a(x), \pi_b(y) + \frac{i}{2}\gamma_{bc}^0\psi_c(y)\} = \frac{i}{2}\gamma_{bc}^0\{\bar{\pi}_a(x), \psi_c(y)\} \\ &= \frac{i}{2}\gamma_{bc}^0\left(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)\right) = -\frac{i}{2}\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y)\end{aligned}$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \phi_b(y)\} = -\frac{i}{2}\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y) \quad (6.195)$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = 0 \quad (6.196)$$

Sustituyendo los resultados (6.194), (6.195) y(6.196) en el paréntesis generalizado de $\bar{\pi}_a$:

$$\begin{aligned}\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = &\left(\frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\partial_k^x\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y)\right) \\ &+ \left(\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\gamma_{db}^0 - im\bar{\psi}_d(y)\gamma_{db}^0\right)\left(-\frac{i}{2}\gamma_{ba}^0\delta^3(x-y)\right) \\ &= \frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\partial_k^x\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \\ &- \frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{cd}^k\underbrace{\gamma_{db}^0\gamma_{ba}^0}_{\delta_{da}}\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\bar{\psi}_d(y)\underbrace{\gamma_{db}^0\gamma_{ba}^0}_{\delta_{da}}\delta^3(x-y) \\ &= \frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + \frac{i}{2}\partial_k^x\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \\ &- \frac{i}{2}\partial_k^y\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \\ &= \frac{i}{2}\partial_k^x\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y)\end{aligned}$$

$$\{\bar{\pi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = \frac{i}{2}\partial_k^x\bar{\psi}_c(y)\gamma_{ca}^k\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}m\bar{\psi}_a(y)\delta^3(x-y) \quad (6.197)$$

Apéndice F. Ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange para QED.

Se calcularan las derivadas que se necesitan para obtener las ecuaciones de campo en QED:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} &= \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left[-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - gA_\alpha\bar{\psi}_a\gamma^\alpha_{ab}\psi_b\right] = \frac{\partial}{\partial A_\nu}\left[-gA_\alpha\bar{\psi}_a\gamma^\alpha_{ab}\psi_b\right] \\ &= -g\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\nu}\bar{\psi}_a\gamma^\alpha_{ab}\psi_b = -g\delta^\nu_\alpha\bar{\psi}_a\gamma^\alpha_{ab}\psi_b\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\nu} = -g\bar{\psi}_a\gamma^\nu_{ab}\psi_b \tag{6.198}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left(-\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\left[-\frac{1}{4}(\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\sigma}(\partial_\theta A_\sigma - \partial_\sigma A_\theta)\right] \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\sigma}\left[\left(\frac{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} - \frac{\partial\left(\partial_\beta A_\alpha\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)(\partial_\theta A_\sigma - \partial_\sigma A_\theta) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\left(\frac{\partial\left(\partial_\theta A_\sigma\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} - \frac{\partial\left(\partial_\sigma A_\theta\right)}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\sigma}\left[\left(\delta^\mu_\alpha\delta^\nu_\beta - \delta^\mu_\beta\delta^\nu_\alpha\right)(\partial_\theta A_\sigma - \partial_\sigma A_\theta) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\left(\delta^\mu_\theta\delta^\nu_\sigma - \delta^\mu_\sigma\delta^\nu_\theta\right)\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[\left(\eta^{\mu\theta}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\theta}\eta^{\mu\sigma}\right)(\partial_\theta A_\sigma - \partial_\sigma A_\theta) + (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)\left(\eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu} - \eta^{\alpha\nu}\eta^{\beta\mu}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{4}\left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu\right] \\ &= -\left[\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right] = -F^{\mu\nu}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} = -F^{\mu\nu} \tag{6.199}$$

Para la ecuación de movimiento del campo ψ_a son necesarias las siguientes derivadas:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} = \frac{\partial}{\partial \psi_a}\left[-\frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_c\gamma^\mu_{cb}\psi_b - m\bar{\psi}_c\psi_c - gA_\mu\bar{\psi}_c\gamma^\mu_{cb}\psi_b\right]$$

Es necesario realizar una permutacion de ψ en todos los terminos para poder realizar la derivada, entonces haciendo uso de la siguiente propiedad

$$A * C = (-1)^{(n_A n_C)} C * A \tag{6.200}$$

Se determina lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} &= \frac{\partial}{\partial \psi_a}\left[\frac{i}{2}\psi_b \partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} + m\psi_c\bar{\psi}_c + gA_\mu \psi_b \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb}\right] \\
&= \frac{i}{2}\frac{\partial \psi_b}{\partial \psi_a}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} + m\frac{\partial \psi_c}{\partial \psi_a}\bar{\psi}_c + gA_\mu \frac{\partial \psi_b}{\partial \psi_a}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \\
&= \frac{i}{2}\delta_{ab}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} + m\delta_{ca}\bar{\psi}_c + gA_\mu \delta_{ab}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb} \\
&= \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a + gA_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_a} = \frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} + m\bar{\psi}_a + gA_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{6.201}
$$

Calculemos la siguiente derivada:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)}\left(\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb}\partial_\nu \psi_b\right) = -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)}\left(\partial_\nu \psi_b \bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb}\right) \\
&= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\nu \psi_b\right)}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)}\bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb} = -\frac{i}{2}\delta^\mu_\nu \delta_{ba}\bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb} \\
&= -\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca}
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{ca} \tag{6.202}
$$

Calculemos las derivadas izquierdas necesarias en la ecuación de campo (6.9) asociada a $\bar{\psi}_a$:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} &= \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_a}\left[\frac{i}{2}\bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb}\partial_\mu \psi_b - m\bar{\psi}_c \psi_c - gA_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu_{cb}\psi_b\right] \\
&= \frac{i}{2}\frac{\partial \bar{\psi}_c}{\partial \bar{\psi}_a}\gamma^\mu_{cb}\partial_\mu \psi_b - m\frac{\partial \bar{\psi}_c}{\partial \bar{\psi}_a}\psi_c - gA_\mu \frac{\partial \bar{\psi}_c}{\partial \bar{\psi}_a}\gamma^\mu_{cb}\psi_b \\
&= \frac{i}{2}\delta_{ca}\gamma^\mu_{cb}\partial_\mu \psi_b - m\delta_{ca}\psi_c - gA_\mu \delta_{ca}\gamma^\mu_{cb}\psi_b \\
&= \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu \psi_b - m\psi_a - gA_\mu \gamma^\mu_{ab}\psi_b
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \bar{\psi}_a} = \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\partial_\mu \psi_b - m\psi_a - gA_\mu \gamma^\mu_{ab}\psi_b \tag{6.203}
$$

Calculemos la siguiente derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)}\left[-\frac{i}{2}\partial_\nu \bar{\psi}_c \gamma^\nu_{cb}\psi_b\right] = -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\nu \bar{\psi}_c\right)}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)}\gamma^\nu_{cb}\psi_b \\ &= -\frac{i}{2}\delta^\mu_\nu \delta_{ca}\gamma^\nu_{cb}\psi_b = -\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\psi_b\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} = -\frac{i}{2}\gamma^\mu_{ab}\psi_b \tag{6.204}$$

Apéndice G. Paréntesis de Bose-Fermi para el cálculo de la integrabilidad de ϕ_a, $\bar{\phi}_a$ en QED.

Paréntesis necesarios para el análisis de las condiciones de integrabilidad de las EDPHJ:

$$\begin{aligned}\{\phi_a(x), \phi^t(y)\} &= \{\pi_a(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b(x), p^t + \frac{1}{2}\pi^k(y)\pi^k(y) + \pi^k(y)\partial^y_k A_0(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) \\ &+ \frac{i}{2}\partial^y_k \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) + m\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\} \\ &= \frac{i}{2}\{\pi_a(x), \partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\} - \frac{i}{2}\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y)\} + m\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\psi_c(y)\} \\ &+ gA_\mu(y)\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\}\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad de los parentesis de Bose-Fermi:

$$\{A, BC\} = (-1)^{n_A n_B} B\{A, C\} + \{A, B\}C \tag{6.205}$$

$$\begin{aligned}\{\phi_a(x), \phi^t(y)\} &= \frac{i}{2}\partial^y_k \underbrace{\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}}_{-\delta_{ac}\delta^3(x-y)}\gamma^k_{cd}\psi_d(y) - \frac{i}{2}\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) + m\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}\psi_c(y) \\ &+ gA_\mu(y)\{\pi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y) \\ &= -\frac{i}{2}\partial^y_k\delta_{ac}\delta^3(x-y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y) + \frac{i}{2}\delta_{ac}\delta^3(x-y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) - m\delta_{ac}\delta^3(x-y)\psi_c(y) \\ &- gA_\mu(y)\delta_{ac}\delta^3(x-y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\end{aligned}$$

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\} = -\frac{i}{2}\partial^y_k\delta^3(x-y)\gamma^k_{ad}\psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{ad}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(x-y) - m\psi_a(y)\delta^3(x-y) - gA_\mu(y)\gamma^\mu_{ad}\psi_d(y)\delta^3(x-y) \tag{6.206}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi_a(x),\bar\phi_b(y)\} &= \{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c(x),\bar\pi_b(y)+\frac{i}{2}\bar\psi_d(y)\gamma^0_{db}\}\\
&= \frac{i}{2}\underbrace{\{\pi_a(x),\bar\psi_d(y)\}}_{-\delta_{ad}\delta^3(x-y)}\gamma^0_{db}+\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\underbrace{\{\psi_c(x),\bar\pi_b(y)\}}_{-\delta_{cb}\delta^3(x-y)}\\
&= -\frac{i}{2}\delta_{ad}\delta^3(x-y)\gamma^0_{db}-\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\delta_{cb}\delta^3(x-y)\\
&= -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\phi_a(x),\bar\phi_b(y)\} = -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{6.207}$$

$$\{\phi_a(x),\phi_b(y)\} = 0 \tag{6.208}$$

$$\{\phi_a(x),\phi^1(y)\} = 0 \tag{6.209}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar\phi_a(x),\phi^t(y)\} &= \{\bar\pi_a(x)+\frac{i}{2}\bar\psi_b(x)\gamma^0_{ba}\ ,\ p^t+\frac{1}{2}\pi^k(y)\pi^k(y)+\pi^k(y)\partial^y_kA_0(y)+\frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)\\
&+\frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)-\frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y)+m\bar\psi_c(y)\psi_c(y)+gA_\mu(y)\bar\psi_c(y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\}\\
&= \frac{i}{2}\{\bar\pi_a(x),\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\}-\frac{i}{2}\{\bar\pi_a(x),\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y)\}+m\{\bar\pi_a(x),\bar\psi_c(y)\psi_c(y)\}\\
&+gA_\mu(y)\{\bar\pi_a(x),\bar\psi_c(y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\}
\end{aligned}$$

Utilizando la propiedad (6.205) tenemos:

$$\begin{aligned}
\{\bar\phi_a(x),\phi^t(y)\} &= -\frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\underbrace{\{\bar\pi_a(x),\psi_d(y)\}}_{-\delta_{ad}\delta^3(x-y)}+\frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\underbrace{\{\bar\pi_a(x),\psi_d(y)\}}_{-\delta_{ad}\delta^3(x-y)}-m\bar\psi_c(y)\underbrace{\{\bar\pi_a(x),\psi_c(y)\}}_{-\delta_{ac}\delta^3(x-y)}\\
&-gA_\mu(y)\bar\psi_c(y)\gamma^\mu_{cd}\underbrace{\{\bar\pi_a(x),\psi_d(y)\}}_{-\delta_{ad}\delta^3(x-y)}\\
&= \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\delta_{ad}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\delta_{ad}\delta^3(x-y)+m\bar\psi_c(y)\delta_{ac}\delta^3(x-y)\\
&+gA_\mu(y)\bar\psi_c(y)\gamma^\mu_{cd}\delta_{ad}\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\bar\phi_a(x),\phi^t(y)\} = \frac{i}{2}\partial^y_k\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\bar\psi_c(y)\gamma^k_{ca}\partial^y_k\delta^3(x-y)+m\bar\psi_a(y)\delta^3(x-y)+gA_\mu(y)\bar\psi_c(y)\gamma^\mu_{ca}\delta^3(x-y) \tag{6.210}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar\phi_a(x),\phi_b(y)\} &= \{\bar\pi_a(x)+\frac{i}{2}\bar\psi_c(x)\gamma^0_{ca}\ ,\pi_b(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d(y)\}\\
&= \frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\underbrace{\{\bar\pi_a(x),\psi_d(y)\}}_{-\delta_{ad}\delta^3(x-y)}+\frac{i}{2}\underbrace{\{\bar\psi_c(x),\pi_b(y)\}}_{-\delta_{cb}\delta^3(x-y)}\gamma^0_{ca}\\
&= -\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(y)\} = -i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y) \tag{6.211}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(y)\} = 0 \tag{6.212}$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.213}$$

Apéndice H. Paréntesis de Bose-Fermi para el cálculo de la integrabilidad de ϕ^2.

Calculemos los paréntesis necesarios para analizar la integrabilidad de ϕ^2:

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x), \phi^t(y)\} &= \{\partial^x_j \pi^j(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x), p^t + \frac{1}{2}\pi^k(y)\pi^k(y) + \pi^k(y)\partial^y_k A_0(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) \\
&\quad + \frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\partial^y_k\psi_d(y) + m\bar{\psi}_c(y)\psi_c(y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\} \\
&= \frac{1}{4}\{\partial^x_j\pi^j(x), F_{ki}(y)F^{ki}(y)\} + g\{\partial^x_j\pi^j(x), A_k(y)\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\} \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial^x_j\{\pi^j(x), F_{ki}(y)\} + g\partial^x_j\underbrace{\{\pi^j(x), A_k(y)\}}_{-\delta^j_k\delta^3(x-y)}\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y) \\
&= \frac{1}{4}F^{ki}(y)\partial^x_j\{\pi^j(x), \partial^y_k A_i(y) - \partial^y_i A_k(y)\} - g\partial^x_j\delta^j_k\delta^3(x-y)\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y) \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial^x_j\left(\partial^y_k\{\pi^j(x), A_i(y)\} - \partial^y_i\{\pi^j(x), A_k(y)\}\right) - g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial^x_j\left[\partial^y_k\left(-\delta^j_i\delta^3(x-y)\right) - \partial^y_i\left(-\delta^j_k\delta^3(x-y)\right)\right] - g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial^x_j\left[\delta^j_i\partial^x_k\delta^3(x-y) - \delta^j_k\partial^x_i\delta^3(x-y)\right] - g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) \\
&= \frac{1}{2}F^{ki}(y)[\partial^x_i\partial^x_k\delta^3(x-y) - \underbrace{\partial^x_k\partial^x_i}_{\partial^x_i\partial^x_k}\delta^3(x-y)] - g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \{\phi^2(x), \phi^t(y)\} = -g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) \tag{6.214}$$

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = \{\partial^x_j\pi^j(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x), \pi^0(y)\} = 0 \tag{6.215}$$

$$\{\phi^2(x), \phi^1(y)\} = 0 \tag{6.216}$$

$$\{\phi^2(x), \phi^2(y)\} = 0 \tag{6.217}$$

$$\{\phi^2(x), \phi_b(y)\} = \{\partial_j^x \pi^j(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x), \pi_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\}$$
$$= -g\{\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ac}\psi_c(x), \pi_b(y)\}$$

Utilizando la propiedad para paréntesis de Bose-Fermi:

$$\{AB, C\} = (-1)^{n_B n_C}\{A, C\}B + A\{B, C\} \tag{6.218}$$

$$\{\phi^2(x), \phi_b(y)\} = g\{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y)\}\gamma^0_{ac}\psi_c(x) = -g\delta_{ab}\delta^3(x-y)\gamma^0_{ac}\psi_c(x)$$

$$\therefore \quad \{\phi^2(x), \phi_b(y)\} = -g\gamma^0_{bc}\psi_c(x)\delta^3(x-y) \tag{6.219}$$

$$\{\phi^2(x), \bar{\phi}_b(y)\} = \{\partial_j^x \pi^j(x) - g\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x), \bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c\gamma^0_{cb}(y)\}$$
$$= -g\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ac}\{\psi_c(x), \bar{\pi}_b(y)\} = g\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ac}\delta_{cb}\delta^3(x-y)$$

$$\{\phi^2(x), \bar{\phi}_b(y)\} = g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cb}\delta^3(x-y) \tag{6.220}$$

Apéndice I. Paréntesis generalizados para el cálculo de la integrabilidad de ϕ^1.

Paréntesis generalizado de $\phi^1(x)$ con $\phi^t(y)$

$$\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}^* = \{\phi^1(x), \phi^t(y)\} - i\gamma^0_{ab}\int d^3v\{\phi^1(x), \bar{\phi}_a(v)\}\{\phi_b(v), \phi^t(y)\} \tag{6.221}$$
$$+ i\gamma^0_{ba}\int d^3v\{\bar{\phi}_b(v), \phi^t(y)\}\{\phi^1(x), \phi_a(v)\}$$

Utilizando los resultados (6.60), (6.206) y (6.207) se determina:

$$\{\phi^1(x), \phi^t(y)\}^* = \pi^k(y)\partial_k^x\delta^3(x-y) - g\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cd}\psi_d(y)\delta^3(x-y) \tag{6.222}$$

Paréntesis generalizado de $\phi^2(x)$ con $\phi^t(y)$

$$\{\phi^2(x),\phi^t(y)\}^* = \{\phi^2(x),\phi^t(y)\} - i\gamma^0_{ab}\int d^3v\{\phi^2(x),\bar{\phi}_a(v)\}\{\phi_b(v),\phi^t(y)\} + i\gamma^0_{ba}\int d^3v\{\bar{\phi}_b(v),\phi^t(y)\}\{\phi^2(x),\phi_a(v)\} \tag{6.223}$$

utilizando los resultados calculados en el **Apéndice B y C**

$$\{\bar{\phi}_b(v),\phi^t(y)\} = \frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\delta^3(v-y) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\partial^y_k\delta^3(v-y) + m\bar{\psi}_b(y)\delta^3(v-y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_d(y)\gamma^\mu_{db}\delta^3(v-y) \tag{6.224}$$

$$\{\phi_b(v),\phi^t(y)\} = -\frac{i}{2}\partial^y_k\delta^3(v-y)\gamma^k_{bd}\psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{bd}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(v-y) - m\psi_b(y)\delta^3(v-y) - gA_\mu(y)\gamma^\mu_{bd}\psi_d(y)\delta^3(v-y) \tag{6.225}$$

$$\{\phi^2(x),\phi^t(y)\} = -g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) \tag{6.226}$$

$$\{\phi^2(x),\phi_a(v)\} = -g\gamma^0_{ac}\psi_c(x)\delta^3(x-v) \tag{6.227}$$

$$\{\phi^2(x),\bar{\phi}_a(v)\} = g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{ca}\delta^3(x-v) \tag{6.228}$$

$$\begin{aligned}
\{\phi^2(x),\phi^t(y)\}^* &= -g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y)\\
&- ig\delta_{cb}\bar{\psi}_c(x)\int d^3v\delta^3(x-v)(-\frac{i}{2}\partial^y_k\delta^3(v-y)\gamma^k_{bd}\psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma^k_{bd}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(v-y)\\
&- m\psi_b(y)\delta^3(v-y) - gA_\mu(y)\gamma^\mu_{bd}\psi_d(y)\delta^3(v-y))\\
&- ig\delta_{bc}\int d^3v\delta^3(x-v)(\frac{i}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\delta^3(v-y) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\partial^y_k\delta^3(v-y)\\
&+ m\bar{\psi}_b(y)\delta^3(v-y) + gA_\mu(y)\bar{\psi}_d(y)\gamma^\mu_{db}\delta^3(v-y))\psi_c(x)\\
&= -g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y)\\
&+ g\bar{\psi}_b(x)(-\frac{1}{2}\partial^y_k\delta^3(x-y)\gamma^k_{bd}\psi_d(y) + \frac{1}{2}\gamma^k_{bd}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(x-y)\\
&+ im\psi_b(y)\delta^3(x-y) + igA_\mu(y)\gamma^\mu_{bd}\psi_d(y)\delta^3(x-y))\\
&+ g(\frac{1}{2}\partial^y_k\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\partial^y_k\delta^3(x-y)\\
&- im\bar{\psi}_b(y)\delta^3(x-y) - igA_\mu(y)\bar{\psi}_d(y)\gamma^\mu_{db}\delta^3(x-y))\psi_b(x)\\
\{\phi^2(x),\phi^t(y)\}^* &= -g\bar{\psi}_c(y)\gamma^k_{cd}\psi_d(y)\partial^x_k\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}g\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{bd}\psi_d(y)\partial^y_k\delta^3(x-y) + \frac{1}{2}g\bar{\psi}_b(x)\gamma^k_{bd}\partial^y_k\psi_d(y)\delta^3(x-y)\\
&+ \frac{1}{2}g\partial^y_k\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\psi_b(x)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}g\bar{\psi}_d(y)\gamma^k_{db}\psi_b(x)\partial^y_k\delta^3(x-y)
\end{aligned}$$

Paréntesis generalizado de $\phi_a(x)$ con $\phi^t(y)$

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \{\phi_a(x), \phi^t(y)\} - i\gamma^0_{bd} \int d^3v \{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(v)\}\{\phi_d(v), \phi^t(y)\}$$
$$- i\gamma_{db} \int d^3v \{\bar{\phi}_d(v), \phi^t(y)\}\{\phi_a(x), \phi_b(v)\}$$

Utilizando los siguientes paréntesis de Bose-Fermi, en el paréntesis generalizado anterior:

$$\{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(v)\} = -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x - v)$$

$$\{\phi_a(x), \phi_b(v)\} = 0$$

Se determina que:

$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = \{\phi_a(x), \phi^t(y)\} - \gamma^0_{ab}\gamma^0_{bd} \int d^3v \delta^3(x - v)\{\phi_d(v), \phi^t(y)\}$$
$$= \{\phi_a(x), \phi^t(y)\} - \delta_{ad}\{\phi_d(x), \phi^t(y)\}$$
$$\{\phi_a(x), \phi^t(y)\}^* = 0 \tag{6.229}$$

Paréntesis generalizado de $\bar{\phi}_a(x)$ con $\phi^t(y)$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = \{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\} - i\gamma^0_{bd} \int d^3v \{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(v)\}\{\phi_d(v), \phi^t(y)\}$$
$$- i\gamma_{db} \int d^3v \{\bar{\phi}_d(v), \phi^t(y)\}\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(v)\}$$

Utilizando los siguientes paréntesis de Bose-Fermi, en el paréntesis generalizado anterior:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \bar{\phi}_b(v)\} = 0$$

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi_b(v)\} = -i\gamma^0_{ba}\delta^3(x - v)$$

Se puede escribir de la siguiente manera:

$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = \{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\} - \gamma^0_{db}\gamma^0_{ba} \int d^3v \{\bar{\phi}_d(v), \phi^t(y)\}\delta^3(x - v)$$
$$= \{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\} - \delta_{da}\{\bar{\phi}_d(x), \phi^t(y)\}$$
$$\{\bar{\phi}_a(x), \phi^t(y)\}^* = 0 \tag{6.230}$$

Bibliografía

[1] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, New York, NY, USA, 3th edition, 1990.

[2] L Landau and E. Lifshitz. *Mechanics*, volume 1. Reverté, Barcelona, 2th edition, 1994.

[3] Bertin M.C, Pimentel B.M, and Pompeia P.J. Formalismo de Hamilton Jacobi á la Caratheodory. Parte 2:sistemas singulares. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*, 30(3):1–17, Marzo/Octubre 2008.

[4] P Puig. *Curso Teórico Práctico de Ecuaciones Diferenciales Aplicado a la Física y Tecnia*, volume 2, page 208. Roberto Puig Alvarez, Madrid, 2th edition, 1978.

[5] Pimentel B, Teixeira R, and Valcárcel C.E. Non-Involutive constrained systems and Hamilton-Jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323:3137–3149, September 2008.

[6] Pimentel B, Teixeira R, and Tomazelli J.L. Hamilton-Jacobi Aproach to Berezinian Singular Systems. *Annals of Physics*, 267:75–96, January 1998.

[7] K Sundermeyer. *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, chapter II. Springer-Verlag, New York, 1th edition, 1982.

[8] Carneiro C. and Thomaz M. The Algebra of fermions. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 22:474–479, Dezembro 2000.

[9] K Sundermeyer. *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, chapter Apéndice C. Springer-Verlag, New York, 1th edition, 1982.

[10] P Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva University, New York, 1964.

[11] R Aldrovandi and J Pereira. *Notes for a Course on CLASSICAL FIELDS*, chapter III. IFT, Sao Paulo, SP, Brazil, 2008.

[12] Bertin M.C, Pimentel B.M, and Pompeia P.J. Formalismo de Hamilton Jacobi á la Caratheodory. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*, 29:393–403, 2007.

[13] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*, page 395. Addison-Wesley, New York, NY, USA, 3th edition, 1990.

[14] K Sundermeyer. *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, page 38. Springer-Verlag, New York, 1982.

[15] Bertin M.C, Pimentel B.M, and Pompeia P.J. Formalismo de Hamilton Jacobi á la Caratheodory. Parte 2:sistemas singulares. *Revista Brasileira de Ensino de Fisica*, 30(3):7, Marzo/Octubre 2008.

[16] Pimentel B, Teixeira R, and Valcárcel C.E. Non-Involutive constrained systems and Hamilton-Jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323:3139, September 2008.

[17] Pimentel B, Teixeira R, and Tomazelli J.L. Hamilton-Jacobi Aproach to Berezinian Singular Systems. *Annals of Physics*, 267:84, January 1998.

[18] Pimentel B, Teixeira R, and Valcárcel C.E. Non-Involutive constrained systems and Hamilton-Jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323:3140, September 2008.

[19] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*, page 337. Addison-Wesley, New York, NY, USA, 3th edition, 1990.

[20] Pimentel B, Teixeira R, and Valcárcel C.E. Non-Involutive constrained systems and Hamilton-Jacobi formalism. *Annals of Physics*, 323:3141, September 2008.

[21] W Greiner and J Reinhardt. *Field Quantization*, chapter II. Springer, New York, 1996.

[22] R Aldrovandi and J Pereira. *Notes for a Course on CLASSICAL FIELDS*, chapter VI,VII,VIII. IFT, Sao Paulo, SP, Brazil, 2008.

[23] K Sundermeyer. *Constrained Dynamics with Applications to Yang-Mills Theory, General Relativity, Classical Spin, Dual String Model*, pages 153–159. Springer-Verlag, New York, 1982.

[24] Teixeira. Formalismo de Hamilton Jacobi para Sistemas Singulares. Master's thesis, Sao Paulo, 1996.

[25] R Teixeira. *Quantização de sistemas singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi*. PhD thesis, Sao Paulo, Agosto 2000.

[26] G Arfken. *Mathematical methods for physicists*, page 170. Academic Press, San Diego, California, 3th edition, 1985.

[27] R Teixeira. *Quantização de sistemas singulares via formalismo de Hamilton-Jacobi*. PhD thesis, Sao Paulo, Agosto 2000.

[28] L Landau and E. Lifshitz. *Teoría Cuántica Relativista*, volume 4, chapter II,III. Reverté, Barcelona, 2th edition, 1975.

[29] L Leithold. *El Cálculo*, pages 104–341. Oxford University Press, Harla, México, 7 edition, 1998.

[30] Elsgoltz L. *Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional*. MIR, Moscú, 1977.

[31] Tilles C. Quantização de partículas com spin. Master's thesis, Sao Paulo, 2007.

[32] W Greiner and J Reinhardt. *Field Quantization*, page 31. Springer, New York, 1996.

[33] S Gasiorowicz. *Quantum Physics*, page 38. Wiley International Edition, Madrid, third edition edition, 2003.

[34] J Heinbockel. *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics*, chapter I. Old Dominion University, third edition edition, 1996.

[35] R Liboff. *Introductory Quantum Mechanics*, chapter IV. Addison-Wesley publishing Company, 1980.

[36] F Mandl and G Shaw. *Quantum Field Theory*, chapter VI. Willey,John and Sons, Incorporated, 2010.

[37] G Arfken. *Mathematical methods for physicists*, page 211. Academic Press, San Diego, California, 3th edition, 1985.

[38] A Hans. and Roman Jackiw. *Intermediate Quantum Mechanics*. Advanced Books Classics, 3th edition, 1997.

[39] Franz Mandl and Graham Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 2th edition, 2010.