APLICACIONES DE CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

ISBN 978-958-8958-47-7

Hernán Alberto Escobar J.

APLICACIONES DE CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

HERNÁN ALBERTO ESCOBAR J.

Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto

Escobar J, Hernán
Aplicaciones de cálculo de varias variables / Hernan Escobar J. – 1ª ed. – San Juan de Pasto. – Editorial Universidad de Nariño, 2018.

211 p.: il. incluye Bibliografía

ISBN: 978-958-8958-47-7

1. Cálculo variables 2. Herramientas matemáticas 3. Cálculo de variables – problemas – ejercicios.

515.43 E746 – SCDD – 21 Biblioteca Alberto Quijano Guerreo

APLICACIONES DE CÁLCULO DE VARIAS VARIABLES

© Autor: Hérnan Alberto Escobar J.
ISBN: 978-958-8958-47-7

Editorial Universitaria – Universidad de Nariño

Diagramación: María Elena Mesías
Diseño Portada: Mauricio Riascos

Impresión y Encuadernación: Centro de Publicaciones
Universidad de Nariño

Impreso en San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

CONTENIDO

PREFACIO

Los problemas de aplicaciones de cálculo de varias variables del presente texto, editado por la Universidad de Nariño, tienen como objetivo ilustrar de manera clara, pedagógica y concisa, la solución de diferentes tipos de situaciones que se pueden resolver con los rudimentos del cálculo de varias variables.

El libro puede ser utilizado como complemento a un curso formal de cálculo de varias variables y dirigido a estudiantes de matemáticas, física, biología, química, ingenierías de sistemas, civil y electrónica de nuestra universidad.

El texto está dividido en ocho capítulos relacionados entre sí. El primer capítulo, está dedicado a la resolución de problemas con vectores, sus propiedades y las operaciones entre ellos. En el segundo capítulo se abordan problemas con rectas y planos en el espacio tridimensional desde una perspectiva vectorial. En el tercer capítulo, se plantean y resuelven problemas relacionados con las curvas y superficies en el espacio. En el cuarto capítulo se aborda lo atinente al cálculo de límites de funciones multivariables y continuidad. En el quinto capítulo se plantean y resuelven problemas de maximización y minimización. En el sexto se resuelven problemas relacionados con diferenciales, aproximaciones y derivadas direccionales. En el séptimo capítulo, lo inherente a la integración en varias variables. Finalmente, en el octavo capítulo, se resuelven problemas relacionados con la integración vectorial.

Cada capítulo comienza con la presentación de los conceptos y herramientas matemáticas a ser utilizadas en el capítulo, con lo cual se brinda al lector una ayuda y a la vez una guía para la solución de los problemas.

Por otra parte, se han seleccionado y resuelto una serie de problemas, que en concepto del autor, tienen mucha utilidad en las ciencias e ingenierías. Incluso, se incorporaron unas demostraciones formales de propiedades matemáticas igualmente importantes.

El autor espera que este trabajo, sea de utilidad para los lectores y/o estudiantes de los programas que contemplan en su plan de estudios el cálculo de varias variables.

HERNÁN ALBERTO ESCOBAR J.

Pasto, Diciembre de 2017.

1. VECTORES EN $\mathbb{R}^3$

1.1. DEFINICIÓN

Un vector $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^3$ es un segmento de recta dirigido. En la Figura 1.1, se muestra un vector de $\mathbb{R}^3$ en el que A es el punto inicial y B es el punto final.

Todo vector localizado $\vec{v}$ es equivalente a un vector cuyo punto inicial es el orígen de coordenadas. En consecuencia todo vector anclado o localizado en el origen, queda determinado por su punto final.

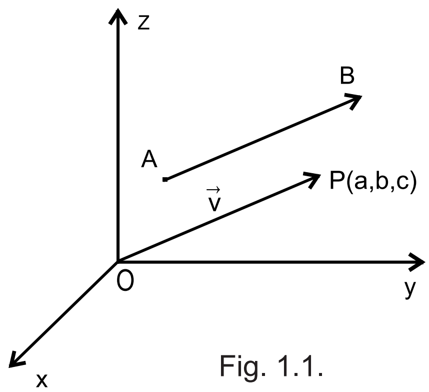

Fig. 1.1.

Se denota como $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$.

Los escalares a, b, c se denominan las componentes de $\vec{v}$.

1.2 LONGITUD DE UN VECTOR EN $\mathbb{R}^3$

La longitud, norma o magnitud de un vector $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ de $\mathbb{R}^3$ es un escalar no negativo denotado y definido por

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

1.3 ÁNGULOS DIRECTORES DE UN VECTOR EN $\mathbb{R}^3$

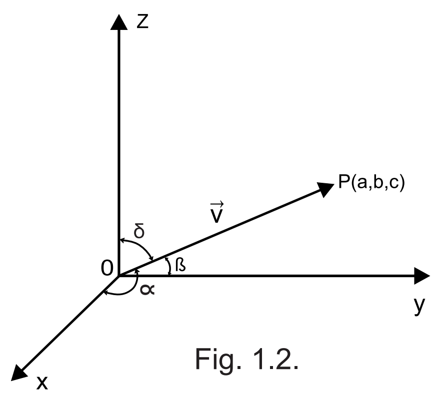

Fig. 1.2.

Los ángulos α, β y δ que forma el vector $\vec{v}$ con las partes positivas de los ejes x, y y z respectivamente, se llaman **ángulos directores** de dicho vector.

Además,

$$cos\,\alpha = \frac{a}{\|\vec{v}\|}\ ; \qquad cos\,\beta = \frac{b}{\|\vec{v}\|}; \qquad cos\,\delta = \frac{c}{\|\vec{v}\|}\ .$$

$cos\,\alpha,\ cos\,\beta$ y $cos\,\delta$ se denominan **cosenos directores** del vector $\vec{v}$.

1.4 IGUALDAD ENTRE VECTORES

Dos vectores de $\mathbb{R}^3$, definidos como $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, son iguales, siempre que sus respectivas componentes sean iguales; esto es,

$$\vec{A} = \vec{B} \Leftrightarrow a_i = b_i,\ i = 1, 2, 3.$$

1.5 VECTORES NULOS Y UNITARIOS

- El vector $\vec{O} = \langle 0, 0, 0 \rangle$ es el vector nulo o vector cero de $\mathbb{R}^3$.
- Un vector cuya longitud sea la unidad se denomina vector unitario.
- Los vectores $\vec{i}$, $\vec{j}$ y $\vec{k}$, definidos respectivamente por $\vec{i} = \langle 1, 0, 0 \rangle$, $\vec{j} = \langle 0, 1, 0 \rangle$, $\vec{k} = \langle 0, 0, 1 \rangle$ son unitarios. Se los denomina vectores canónicos o vectores base de $\mathbb{R}^3$.

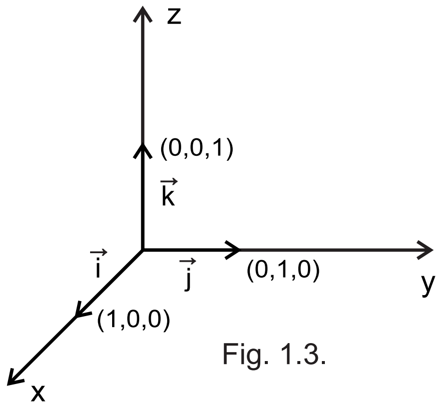

Fig. 1.3.

- El vector unitario $\vec{U}$, en la dirección de un vector dado $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$, se define y denota por

$$\vec{U}_{\vec{v}} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\langle a, b, c \rangle = \left\langle \frac{a}{\|\vec{v}\|}, \frac{b}{\|\vec{v}\|}, \frac{c}{\|\vec{v}\|} \right\rangle.$$

1.6 OPERACIONES FUNDAMENTALES CON VECTORES

Dados dos vectores de $\mathbb{R}^3$ definidos como $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y λ un escalar, se definen las operaciones suma de vectores y multiplicación por un escalar, respectivamente por:

- $\vec{A} + \vec{B} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle.$
- $\lambda\vec{A} = \lambda\langle a_1, a_2, a_3 \rangle = \langle \lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3 \rangle.$

1.7 PRODUCTO ESCALAR ENTRE VECTORES

El producto escalar, interno o punto entre los vectores de $\mathbb{R}^3$, definidos como $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, es un escalar denotado y definido por

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \text{ , o bien,}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| cos\,\theta, \text{ donde } \theta \text{ es al ángulo que forman } \vec{A} \text{ y } \vec{B}.$$

1.8 PERPENDICULARIDAD ENTRE VECTORES

Los vectores de $\mathbb{R}^3$, definidos como $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ son perpendiculares entre sí siempre que su producto escalar sea cero; esto es,

$$\vec{A} \perp \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0.$$

1.9 PROYECCIÓN ESCALAR DE UN VECTOR SOBRE OTRO VECTOR

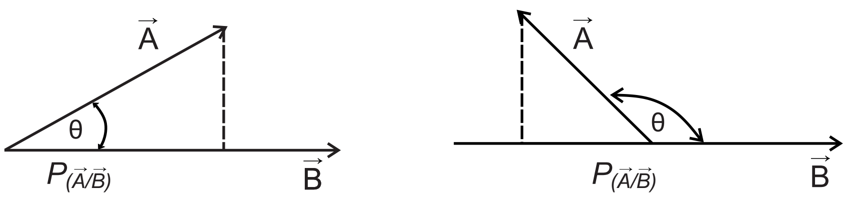

Fig. 1.4.

La proyección escalar de un vector $\vec{A} \neq \vec{O}$ sobre un vector $\vec{B} \neq \vec{O}$, es un escalar no negativo, denotado por $P_{(\vec{A}/\vec{B})}$ y definido como

$$P_{(\vec{A}/\vec{B})} = \frac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{\|\vec{B}\|}.$$

1.10 PRODUCTO VECTORIAL ENTRE DOS VECTORES DE $\mathbb{R}^3$

El producto vectorial o producto cruz entre los vectores de $\mathbb{R}^3$, definidos como $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, en ese orden, es un vector perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$, definido y denotado por

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Al desarrollar el determinante por los cofactores de la primera fila, se obtiene:

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

O bien,

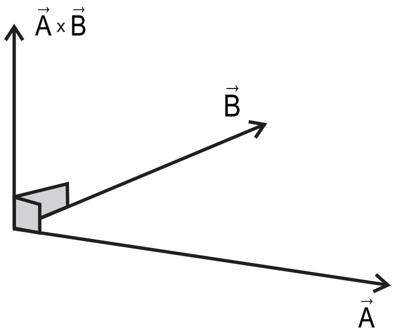

Fig. 1.5.

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left\langle \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\rangle.$$

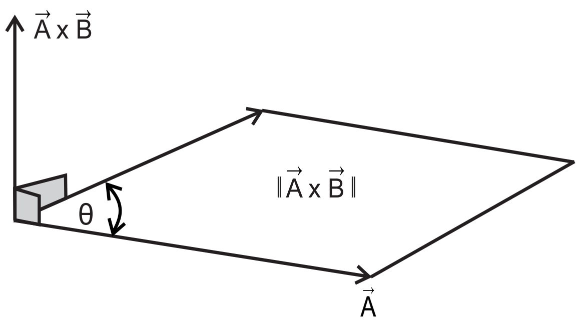

Fig. 1.6.

$$\|\vec{A} \times \vec{B}\| = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| sen\,\theta,$$

donde θ es el ángulo determinado por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

1.11 PARALELISMO ENTRE VECTORES

Dos vectores de $\mathbb{R}^3$, definidos como $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ y $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, son paralelos siempre y cuando el producto vectorial entre ellos sea el vector nulo; esto es:

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Leftrightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{O}.$$

1.12 PRODUCTO MIXTO ENTRE TRES VECTORES DE $\mathbb{R}^3$

Sean $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ no nulos, definidos por $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, $\vec{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$. El producto mixto entre $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ se simboliza por $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$ o $[\vec{A}\vec{B}\vec{C}]$ y se define como :

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

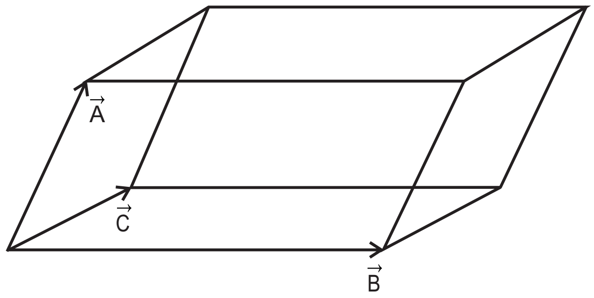

Fig. 1.7.

El valor absoluto del producto mixto entre tres vectores no nulos $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es el volumen del paralelepípedo determinado por ellos; es decir,

$$V = \left|\left[\, \vec{A}\,\vec{B}\,\vec{C}\,\right]\right|.$$

PROBLEMA 1.1

Sean $\vec{r}$ y $\vec{s}$ dos vectores no paralelos y

$$\vec{A} = (\alpha + 4\,\beta)\vec{r} + (\alpha + 4\,\beta)\vec{s}\,,$$

$$\vec{B} = (\,\beta - 2\alpha + 2\,)\vec{r} + (2\alpha - 3\,\beta - 1\,)\vec{s}\,.$$

Hallar los valores de los escalares α y β, de manera que $3\vec{A} = 2\vec{B}$.

SOLUCIÓN

$$3\vec{A} = 3\left[(\alpha + 4\,\beta\,)\,\vec{r} + (\alpha + 4\,\beta\,)\,\vec{s}\,\right],$$

$$3\vec{A} = (3\,\alpha + 12\,\beta\,)\,\vec{r} + (6\alpha + 3\,\beta + 3)\,\vec{s}\,;$$

y, de la misma manera,

$$2\,\vec{B} = 2\left[(\,\beta - 2\alpha + 2\,)\,\vec{r} + (2\alpha - 3\,\beta - 1\,)\vec{s}\,\right],$$

$$2\,\vec{B} = (2\,\beta - 4\alpha + 4\,)\,\vec{r} + (4\alpha - 6\,\beta - 2\,)\,\vec{s}\,.$$

Como $3\vec{A} = 2\vec{B}$, entonces,

$$(3\,\alpha + 12\,\beta\,)\vec{r} + (6\alpha + 3\,\beta + 3)\,\vec{s} = (2\,\beta - 4\alpha + 4\,)\vec{r} + (4\alpha - 6\,\beta - 2\,)\vec{s},$$

de donde,

$$(\,-7\alpha + 10\,\beta - 4\,)\,\vec{r} + (2\,\alpha + 9\,\beta + 5\,)\vec{s} = 0\,\vec{r} + 0\,\vec{s}\,.$$

Por igualdad entre vectores, se obtiene el sistema de ecuaciones lineales 2 x 2 :

$$\begin{cases} -7\alpha + 10\,\beta - 4 = 0 \\ \;\;2\,\alpha + 9\,\beta + 5 = 0. \end{cases}$$

Al resolver el sistema, se obtiene finalmente, que

$$\alpha = 2 \text{ y } \beta = -1.$$

PROBLEMA 1.2

Demostrar que el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a la mitad de su longitud.

DEMOSTRACIÓN

En la Figura 1.8 se observa el triángulo ABC, en el que M y N son los puntos medios de los lados $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{BC}$ respectivamente. Entonces,

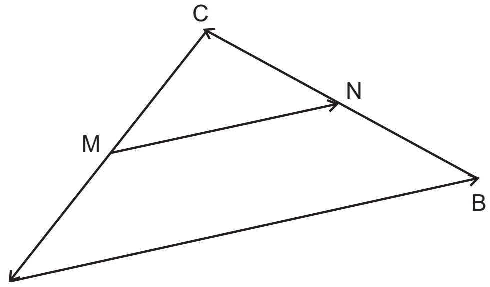

Fig. 1.8.

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NC};$$

pero $$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC},$$

entonces,

$$\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{NC},$$

$$\overrightarrow{NC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}. \tag{1}$$

Por otro lado,

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MA};$$

puesto que $$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA},$$

entonces,

$$\overrightarrow{CA} = 2\,\overrightarrow{CM},$$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{CA}. \tag{2}$$

Ahora bien, en el triángulo MNC, se cumple que :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM} = \vec{O},$$

de donde

$$\overrightarrow{MN} = -\left[\,\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CM}\,\right]. \tag{3}$$

Al reemplazar (1) y (2) en (3) se tiene

$$\overrightarrow{MN} = -\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\right],$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right]. \tag{4}$$

En el triángulo ABC, se cumple que

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{O},$$

entonces,

$$\overrightarrow{AB} = -\left[\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right]. \tag{5}$$

Al sustituir (5) en (4) se tiene

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}. \tag{6}$$

De la expresión (6) se deduce que $\overrightarrow{MN}$ y $\overrightarrow{AB}$ son paralelos y además $\overline{MN}$ es la mitad de $\overrightarrow{AB}$; es decir,

$$\|\overrightarrow{MN}\| = \left\|\frac{1}{2}\,\overrightarrow{AB}\right\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|. \blacksquare$$

PROBLEMA 1.3

Dados los vectores $\vec{A} = \langle 4, -2, 5\rangle$ y $\vec{B} = \langle 4, 3, 1\rangle$, calcular

a) Ángulos directores de $\vec{A} - 2\vec{B}$.

b) Producto escalar entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

c) Proyección escalar de $\vec{A}$ sobre $\vec{B}$.

d) Ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

SOLUCIÓN

a) $\vec{A} - 2\vec{B} = \langle 4, -2, 5\rangle - 2\langle 4, 3, 1\rangle = \langle 4-8, -2-6, 5-2\rangle$

$$= \langle -4, -8, 3\rangle = \vec{C}.$$

$$\|\vec{A} - 2\vec{B}\| = \|\vec{C}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (3)^2} = \sqrt{89}.$$

Entonces,

$$\cos\alpha = \frac{-4}{\sqrt{89}}; \qquad \alpha = \arccos\left[\frac{-4}{\sqrt{89}}\right] \approx 115^o\,5'.$$

$$\cos\beta = \frac{-8}{\sqrt{89}}; \qquad \beta = \arccos\left[\frac{-8}{\sqrt{89}}\right] \approx 147^o\,59'.$$

$$\cos\delta = \frac{3}{\sqrt{89}}; \qquad \delta = \arccos\left[\frac{3}{\sqrt{89}}\right] \approx 71^o\,27'.$$

b) $\vec{A}\cdot\vec{B} = \langle 4, -2, 5\rangle\cdot\langle 4, 3, 1\rangle = 16 - 6 + 5 = 15.$

c) $P_{(\vec{A}/\vec{B})} = \dfrac{|\vec{A} \cdot \vec{B}|}{\| \vec{B} \|} = \dfrac{15}{\| \langle 4,\ 3,\ 1 \rangle \|} = \dfrac{15}{\sqrt{26}} = \dfrac{15\sqrt{26}}{26}.$

d) $cos\, \theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{A} \| \| \vec{B} \|} = \dfrac{15}{\| \langle 4,\ -2,\ 5 \rangle \| \| \langle 4,\ 3,\ 1 \rangle \|}$;

$$= \frac{15}{\sqrt{45}\,\sqrt{26}} = 0,438529;$$

$$\theta = arccos(0,438529) \approx\ 63^0\ 59'.$$

PROBLEMA 1.4

Dados los vectores $\vec{A} = \langle -4, 2,\ 6 \rangle$, $\vec{B} = \langle -3,\ -1,\ 2 \rangle$ y $\vec{C} = \langle 1,\ -3,\ -4 \rangle$,

a) Mostrar que forman un triángulo.

b) Hallar sus ángulos internos.

c) Calcular su área.

SOLUCIÓN

a)

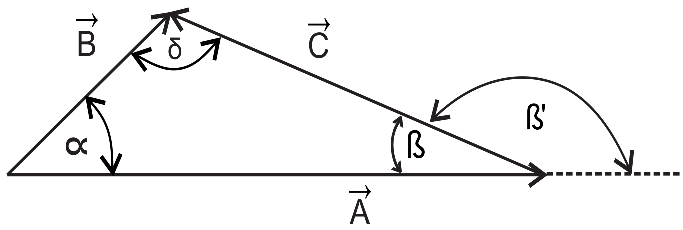

Fig. 1.9.

En la Figura 1.9, se puede ver que

$$\vec{A} + \vec{C} = \langle -4, 2,\ 6 \rangle + \langle 1,\ -3,\ -4 \rangle$$
$$= \langle -4+1, 2-3, 6-4 \rangle = \langle -3,\ -1, 2 \rangle = \vec{C}.$$

Por tanto, los tres vectores forman un triángulo.

b) Para calcular los ángulos internos, se calculan las normas de cada vector y los productos escalares entre ellos dos a dos, así :

$$\| \vec{A} \| = \sqrt{16+4+36} = \sqrt{56},$$
$$\| \vec{B} \| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14},$$
$$\| \vec{\mathrm{C}} \| = \sqrt{1+9+16} = \sqrt{26}.$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 12 - 2 + 12 = 22;$$

$$cos\, \alpha = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{A} \| \| \vec{B} \|} = \frac{22}{\sqrt{56(14)}} = 0,78571;\ \ \alpha \approx 38^0\ 12'.$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = -4-6-24 = -34;$$

$$cos\,\beta' = \frac{\vec{A}\cdot\vec{C}}{\|\vec{A}\|\|\vec{C}\|} = \frac{-34}{\sqrt{56(26)}} = 0,89104;\ \beta' \approx 153^o\ ;$$

$$\beta = 180^o - \beta' = 27^o,$$

La suma de ángulos internos de un triángulo es 180^o. Por tanto,

$$\alpha+\beta+\delta = 180^o;\ \delta = 180^o - (\alpha+\beta) \approx 114^o\,48'\,.$$

Así pues, los ángulos interiores del triángulo son aproximadamente:

$\alpha = 38^0\ 12'\ ;\ \beta' = 27^0$ y $\delta = 114^o\,48'\,.$

c) El área del triángulo es 1/2 del área del paralelogramo determinado por dos vectores del mismo, el que se calcula por medio de la norma del producto vectorial entre ellos. De esta manera,

$$\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \langle 10,\ -10,\ 10\rangle.$$

Área triángulo $= \frac{1}{2}\|\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}\| = \frac{1}{2}\sqrt{300} \approx 8,66$ unidades de área.

PROBLEMA 1.5

Dados tres vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$, demostrar la propiedad distributiva

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ y $\vec{C} = \langle c_1, c_2, c_3\rangle$ vectores de $\mathbb{R}^3$;

entonces,

$$\begin{aligned}
\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) &= \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot[\langle b_1, b_2, b_3\rangle + \langle c_1, c_2, c_3\rangle\,],\\
&= \langle a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle b_1+c_1,\ b_2+c_2, b_3+c_3\rangle,\\
&= a_1(b_1+c_1) + a_2(b_2+c_2) + a_3(b_3+c_3),\\
&= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3\,,\\
&= \langle a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3\rangle + \langle a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3\rangle,\\
&= \langle\ a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle\ b_1, b_2, b_3\rangle + \langle\ a_1, a_2, a_3\rangle\cdot\langle\ c_1, c_2, c_3\rangle,\\
&= \vec{A}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\vec{C}\,.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}\,.$$

PROBLEMA 1.6

Si $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$, demostrar la desigualdad de Cauchy - Schwarz

$$|\,\vec{X}\cdot\vec{Y}\,|\leq\|\vec{X}\|\|\vec{Y}\|.$$

DEMOSTRACIÓN

Si $\vec{A}$ es un vector de $\mathbb{R}^3$ no nulo, es decir $\vec{A}\neq\vec{O}$, entonces por lo menos una de sus componentes es diferente de cero; de modo que

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\left\langle a_1,a_2,a_3\right\rangle\cdot\left\langle a_1,a_2,a_3\right\rangle=a_1^2+a_2^2+a_3^2.$$

Como la suma de cuadrados es no negativa, se concluye que

$$\vec{A}\cdot\vec{A}\geq 0.$$

Por otra parte, la norma de $\vec{A}$ se define como $\|\vec{A}\,\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a^2}$; por tanto,

$$\|\vec{A}\,\|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=\vec{A}\cdot\vec{A}=\vec{A}^{\,2}.$$

Ahora bien, sean $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ vectores de $\mathbb{R}^3$ y α un escalar. Entonces, $\alpha\vec{X}+\vec{Y}$ también es un vector de $\mathbb{R}^3$ y, además,

$$(\alpha\vec{X}+\vec{Y}\,)\cdot(\alpha\vec{X}+\vec{Y})\geq 0.$$

Al aplicar propiedad distributiva se tiene :

$$(\alpha\vec{X}+\vec{Y}\,)\cdot(\alpha\vec{X}\,)+(\alpha\vec{X}+\vec{Y}\,)\cdot\vec{Y}\geq 0\,,$$

$$\alpha^2\vec{X}\cdot\vec{X}+\alpha\,\vec{X}\cdot\vec{Y}+\alpha\,\vec{X}\cdot\vec{Y}+\vec{Y}\cdot\vec{Y}\geq 0,$$

$$\alpha^2\vec{X}^{\,2}+2\,\alpha\,\vec{X}\cdot\vec{Y}+\vec{Y}^{\,2}\geq 0,$$

$$\alpha^2\vec{X}^{\,2}+(2\,\vec{X}\cdot\vec{Y}\,)\alpha+\vec{Y}^{\,2}\geq 0. \tag{1}$$

Puesto que $\vec{X}^{\,2}$, $2\,\vec{X}\cdot\vec{Y}$ y $\vec{Y}^{\,2}$ son números reales, entonces llámese

$$\vec{X}^{\,2}=a;\quad 2\,\vec{X}\cdot\vec{Y}=b;\qquad \vec{Y}^{\,2}=c. \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1), se tiene :

$$a\alpha^2+b\alpha+c\geq 0. \tag{3}$$

Como α es un número real, la desigualdad (3) se cumple para todos los α reales. De ahí que

$$a>0 \text{ y } b^2-4ac<0,$$

es decir,

$$\vec{X}^{\,2}>0 \text{ y } (2\,\vec{X}\cdot\vec{Y})^2-4\,(\vec{X}^{\,2}\vec{Y}^{\,2})<0.$$

Ahora bien, $a > 0$ pues $\vec{X}^{\,2} > 0$, y, además,

$$4\,(\vec{X}\cdot\vec{Y}\,)^2 - 4\,(\vec{X}^{\,2}\vec{Y}^{\,2}) < 0,$$

$$(\vec{X}\cdot\vec{Y})^2 < \vec{X}^{\,2}\vec{Y}^{\,2}.$$

Al extraer la raíz cuadrada a ambos miembros :

$$\sqrt{(\vec{X}\cdot\vec{Y})^2} < \sqrt{\vec{X}^{\,2}\vec{Y}^{\,2}}\,,$$

$$|\,\vec{X}\cdot\vec{Y}\,| < \sqrt{\|\vec{X}\|^2\|\vec{Y}\|^2}\,,$$

$$|\,\vec{X}\cdot\vec{Y}\,| < \|\vec{X}\|\|\vec{Y}\|.$$

Finalmente, si alguno de los vectores $\vec{X}$, $\vec{Y}$ es nulo, entonces, en general, se cumple que

$$|\,\vec{X}\cdot\vec{Y}\,| \leq \|\vec{X}\|\,\|\vec{Y}\|.\blacksquare$$

PROBLEMA 1.7

Demostrar que las diagonales de un paralelogramo se cortan en su punto medio.

DEMOSTRACIÓN

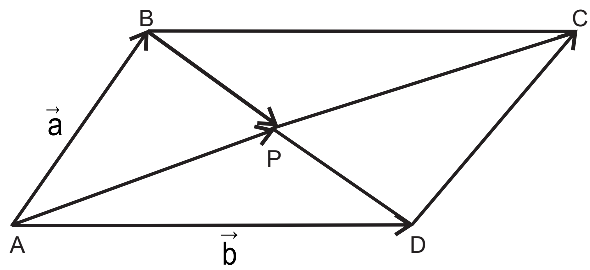

Fig. 1.10.

El paralelogramo $ABCD$, de la Figura 1.10, muestra que sus diagonales se cortan en el punto P. De esta construcción geométrica, se obtiene :

$$\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a},$$

$$\overrightarrow{BP} = \alpha\,(\vec{b} - \vec{a}\,),\ \alpha \text{ escalar.} \tag{1}$$

Por otra parte,

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}\,,\ \text{entonces,}$$

$$\overrightarrow{AP} = \boldsymbol{\beta}\,(\,\vec{a} + \vec{b}\,),\ \boldsymbol{\beta} \text{ escalar.} \tag{2}$$

De la misma Figura 1.10, también se obtiene :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}. \tag{3}$$

Al reemplazar (1) y (2) en (3) se llega a :

$$\vec{a} = \beta(\vec{a} + \vec{b}) - \alpha(\vec{b} - \vec{a}),$$

$$\vec{a} = \beta\vec{a} + \beta\vec{b} - \alpha\vec{b} + \alpha\vec{a},$$

$$\vec{a} = (\alpha + \beta)\vec{a} + (\beta - \alpha)\vec{b}.$$

Por igualdad entre vectores, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \beta - \alpha = 0. \end{cases}$$

Al resolver el sistema :

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2}.$$

Esto demuestra que P es el punto medio de las diagonales.∎

PROBLEMA 1.8

Dados tres vectores de $\mathbb{R}^3$ $\vec{A}, \vec{B}$ y $\vec{C}$, demostrar la propiedad distributiva

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}.$$

DEMOSTRACIÓN

Sean $\vec{A} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{B} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ y $\vec{C} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ vectores de $\mathbb{R}^3$; entonces,

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \times [\langle b_1, b_2, b_3 \rangle + \langle c_1, c_2, c_3 \rangle],$$

$$= \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \times \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle,$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix},$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$= \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}.$$

Se debe anotar que en esta prueba se utilizó la propiedad de los determinantes, que establece: Si cada uno de los elementos de una fila o columna, se expresa como la suma de dos o más términos, el determinante puede expresarse como la suma de dos o más determinantes.

PROBLEMA 1.9

Demostrar que los lados de todo triángulo son proporcionales a los senos trigonométricos de los ángulos opuestos. (**Ley de los senos**).

DEMOSTRACIÓN

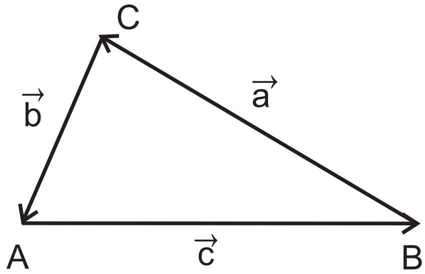

Fig. 1.11.

Al considerar la Figura 1.11, se quiere demostrar que

$$\frac{\|\vec{a}\|}{Sen\,A}=\frac{\|\vec{b}\|}{sen\,B}=\frac{\|\vec{c}\|}{sen\,C},$$

donde A, B y C son los ángulos internos del triángulo ABC y $\vec{a}$, $\vec{b}$ y $\vec{c}$ los vectores que lo forman.

De la Figura 1.11, se tiene que :

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{O}\,.$$

Al multiplicar vectorialmente esta expresión por $\vec{a}$ y $\vec{b}$ secuencialmente, se obtiene que :

$$\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{O}=\vec{O},$$

$$(\vec{a}\times\vec{a})+(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{O}\,.$$

Pero $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{O}$; entonces, al reemplazar en la última ecuación, se llega a:

$$(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})=\vec{O}\,. \qquad (1)$$

Por otra parte,

$$\vec{b}\times(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{b}\times\vec{O}=\vec{O},$$

$$(\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{O}\,.$$

Puesto que $\vec{b}\times\vec{b}=\vec{O}$, entonces,

$$(\vec{b}\times\vec{a})+(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{O}\,. \qquad (2)$$

De (1), se obtiene que :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a}\,,$$

$$\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| sen\, C = \|\vec{c}\|\|\vec{a}\| sen\, B.$$

Al simplificar y despejar :

$$\frac{\|\vec{b}\|}{sen\, B} = \frac{\|\vec{c}\|}{sen\, C}. \tag{3}$$

De (2), se obtiene :

$$\vec{b} \times \vec{a} = \vec{c} \times \vec{b}\,,$$

$$\|\vec{b}\|\|\vec{a}\| sen\, C = \|\vec{c}\|\|\vec{b}\| sen\, A.$$

De donde :

$$\frac{\|\vec{a}\|}{Sen\, A} = \frac{\|\vec{c}\|}{sen\, C}. \tag{4}$$

Finalmente de las ecuaciones (3) y (4) se concluye que :

$$\frac{\|\vec{a}\|}{Sen\, A} = \frac{\|\vec{b}\|}{sen\, B} = \frac{\|\vec{c}\|}{sen\, C}. \blacksquare$$

PROBLEMA 1.10

Hallar el vector de módulo 5 perpendicular a los vectores $\vec{A} = \langle 2,\, 3,\, -4 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 1,\, -2,\, 3 \rangle$.

SOLUCIÓN

Sea $\vec{X} = \langle a,\, b,\, c \rangle$ el vector pedido. Como se necesita que este vector tenga módulo 5, entonces $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 5;$ esto es,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 25\,. \tag{1}$$

Por otra parte, por definición de producto vectorial, el vector $\vec{X}$ es perpendicular a los vectores dados $\vec{A}$ y $\vec{B}$. En consecuencia, $\vec{A} \cdot \vec{X} = 0$ y, además, $\vec{B} \cdot \vec{X} = 0.$ Estos productos escalares originan las ecuaciones :

$$2a + 3b - 4c = 0\,, \tag{2}$$

$$a - 2b + 3c = 0\,. \tag{3}$$

Al eliminar a entre las ecuaciones (2) y (3), se obtiene que $b = \dfrac{10}{7}c.$

Al eliminar b entre las mismas ecuaciones, se obtiene que $a = -\dfrac{1}{7}c.$

Al reemplazar estas últimas ecuaciones en la relación (2), se encuentra que $c = \pm\dfrac{7\sqrt{6}}{6}$. Por tanto $a = \mp\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ y $b = \pm\dfrac{10\sqrt{6}}{6}$.
Así, el vector buscado es :

$$\vec{X} = \left\langle \mp\frac{\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{10\sqrt{6}}{6}, \pm\frac{7\sqrt{6}}{6} \right\rangle.$$

PROBLEMA 1.11

Si $\|\vec{A}\| = 4$ y $\|\vec{B}\| = 5$, determinar el valor de la constante λ, de manera que los vectores $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{B}$ y $\vec{X} = \vec{A} - \lambda\vec{B}$ sean perpendiculares entre sí.

SOLUCIÓN

Puesto que los vectores $\vec{X}$ y $\vec{Y}$ deben ser perpendiculares, entonces $\vec{X}\cdot\vec{Y} = 0$.
Por consiguiente,

$$(\vec{A} + \lambda\vec{B})\cdot(\vec{A} - \lambda\vec{B}) = 0.$$

Al operar y aplicar la propiedad distributiva, se tiene:

$$\|\vec{A}\|^2 - \lambda^2\|\vec{B}\|^2 + \cancel{\lambda\vec{B}\cdot\vec{A}} - \cancel{\lambda\vec{A}\cdot\vec{B}} = 0$$

$$\|\vec{A}\|^2 - \lambda^2\|\vec{B}\| = 0.$$

Si se tiene en cuenta que $\|\vec{A}\| = 4$ y $\|\vec{B}\| = 5$, entonces al reemplazar en la última ecuación, se encuentra que :

$$16 - \lambda^2 25 = 0; \qquad \lambda^2 = \frac{16}{25}; \qquad \lambda = \pm\frac{4}{5}.$$

Así, el valor de λ es $\lambda = \pm\dfrac{4}{5}$.

PROBLEMA 1.12

Si se tiene en cuenta que los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de 30^o y, además, $\|\vec{A}\| = 8$ y $\|\vec{B}\| = 15$, determinar $\|\vec{A} + \vec{B}\|$.

SOLUCIÓN

Del desarrollo de $\|\vec{A} + \vec{B}\|^2$, se obtiene :

$$\|\vec{A} + \vec{B}\|^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 - 2\,\vec{A}\cdot\vec{B}. \tag{1}$$

Pero,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\| cos\,30^o,$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 8(15)\frac{\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}\,. \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1) :

$$\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\|^2 = 8^2+15^2-120\sqrt{3},$$

$$\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\|^2 = 289-120\sqrt{3} = 81,154.$$

Por tanto,

$$\left\|\vec{A}+\vec{B}\right\| = \sqrt{81,154} \approx 9,0085.$$

PROBLEMA 1.13

Hallar el vector $\vec{X}$ perpendicular a los vectores $\vec{A}=\langle 2,\,4,1\rangle$ y $\vec{B}=\langle\,3,\,-2,\,5\,\rangle$ y tal que $\vec{X}\cdot\langle\,-3,2,\,-2\,\rangle=5.$

SOLUCIÓN

Sea $\vec{X}=\langle\,a,b,\,c\,\rangle$ el vector pedido. Las condiciones del problema establecen :

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \vec{X} \tag{1}$$

y

$$\vec{X}\cdot\langle\,-3,2,\,-2\,\rangle = 5, \text{ o bien :}$$

$$\langle\,a,b,\,c\,\rangle\cdot\langle\,-3,2,\,-2\,\rangle = 5\,. \tag{2}$$

Por tanto,

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \langle\,22,\,-7,\,-16\,\rangle = \vec{X}. \tag{3}$$

Como $\vec{X}=\langle\,a,b,\,c\,\rangle$, entonces, a partir de (3) se puede establecer la siguiente equivalencia :

$$\langle\,22,\,-7,\,-16\,\rangle t = \langle\,a,b,\,c\,\rangle,\ t \text{ es escalar},$$

$$\langle\,22t,\,-7t,\,-16t\,\rangle = \langle\,a,b,\,c\,\rangle.$$

Por igualdad entre vectores, se llega a:

$$a=22t; \qquad b=-7t; \qquad c=-16t. \tag{4}$$

Al reemplazar los valores obtenidos de (4) en (2), se obtiene :

$$\langle\,22t,\,-7t,\,-16t\,\rangle\cdot\langle\,-3,2,\,-2\,\rangle = 5;$$

$$-66t-14t+32t=5; \qquad t=-\frac{5}{48}\,. \tag{5}$$

Al sustituir (5) en (4):

$$a = 22(-\frac{5}{48}) = -\frac{55}{24},$$

$$b = -7(-\frac{5}{48}) = \frac{35}{48},$$

$$c = -16(-\frac{5}{48}) = \frac{5}{3}\cdot$$

Así, el vector pedido es:

$$\vec{X} = \langle -\frac{55}{24}, \frac{35}{48}, \frac{5}{3} \rangle.$$

PROBLEMA 1.14

Dados los vectores $\vec{A} = \langle 3, -2, 1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle 2, 3, -1 \rangle$, encontrar los vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ que satisfacen las condiciones siguientes:

a) $\vec{C} \parallel \vec{D}$.

b) $\vec{D} \perp \vec{B}$.

c) $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$.

SOLUCIÓN

Como $\vec{C}$ debe ser paralelo a $\vec{B}$, entonces, $\vec{C} = \lambda\vec{B}$, por lo que,

$$\vec{C} = \lambda\langle 2, 3, -1 \rangle,$$

$$\vec{C} = \langle 2\lambda, 3\lambda, -\boldsymbol{\lambda} \rangle. \tag{1}$$

Ahora bien, sea $\vec{D} = \langle a, b, c \rangle$. Según los datos del problema, $\vec{D}$ debe ser perpendicular a $\vec{B}$; es decir, $\vec{D} \cdot \vec{B} = 0$. Por tanto,

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle 2, 3, -1 \rangle = 0,$$

$$2a + 3b - c = 0. \tag{2}$$

Además, se pide que $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$; luego,

$$\langle 3, -2, 1 \rangle = \langle 2\lambda, 3\lambda, -\lambda \rangle + \langle a, b, c \rangle,$$

$$\langle 3, -2, 1 \rangle = \langle 2\lambda + a, 3\lambda + b, -\lambda + c \rangle.$$

Por igualdad entre vectores, se tiene :

$$\begin{aligned} 2\lambda + a = 3 \quad &\Rightarrow \quad a = 3 - 2\lambda \\ 3\lambda + b = -2 &\Rightarrow \quad b = -2 - 3\lambda \\ -\lambda + c = 1 \quad &\Rightarrow \quad c = 1 + \lambda \end{aligned} \tag{3}$$

Al reemplazar las igualdades (3) en (2), se encuentra que :

$$2(3 - 2\lambda) + 3(-2 - 3\lambda) - (1 + \lambda) = 0,$$

$$14\lambda - 1 = 0, \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{14}.$$

Al sustituir el valor de λ en las relaciones (3), se obtiene :

$$a = \frac{44}{14}; \qquad b = -\frac{25}{14}; \qquad c = \frac{13}{14}.$$

Por lo tanto, los vectores buscados $\vec{C}$ y $\vec{D}$ son :

$$\vec{C} = -\frac{1}{14}\langle 2,\, 3,\, -1 \rangle;$$

$$\vec{D} = \frac{1}{14}\langle 44,\, -25, 13 \rangle.$$

PROBLEMA 1.15

Demostrar que el volumen del paralelepípedo, determinado por los vectores $\vec{X}$, $\vec{Y}$ y $\vec{Z}$ no nulos, está determinado por el valor absoluto del producto mixto entre ellos; esto es :

$$V = \left|[\vec{X}\ \vec{Y}\ \vec{Z}]\right| \quad \text{o} \quad V = \left|\vec{X} \cdot (\vec{Y} \times \vec{Z})\right|$$

DEMOSTRACIÓN

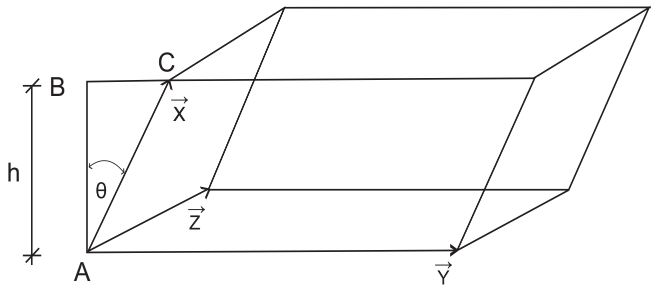

Fig. 1.12.

En la Figura 1.12, θ es el ángulo que forman $\vec{Y} \times \vec{Z}$ y $\vec{X}$, y $\boldsymbol{h}$ es la proyección escalar del vector $\vec{X}$ sobre el vector $\vec{Y} \times \vec{Z}$.

Del triángulo rectágulo ABC de la Figura 1.12, se tiene:

$$h = \|\vec{X}\|\,|\cos\theta\,|, \tag{1}$$

donde se ha considerado también el caso en el que θ sea un ángulo obtuso.

Ahora bien, la base del paralelepípedo es el paralelogramo determinado por los vectores $\vec{Y}$ y $\vec{Z}$, y su área es :

$$\text{Área} = \|\vec{Y} \times \vec{Z}\|\cdot \tag{2}$$

Pero el volumen del paralelepípedo es el producto del área de la base por la altura:

$$V = \|\vec{Y} \times \vec{Z}\|\, h. \tag{3}$$

Al reemplazar (1) en (3), se obtiene que :

$$V = \left\| \vec{Y} \text{ x } \vec{Z} \right\| \left\| \vec{X} \right\| \left| \cos\theta \right|. \qquad (4)$$

Por otra parte, el ángulo θ, formado por $\vec{Y} \text{ x } \vec{Z}$ y $\vec{X}$, se determina así :

$$\left| \cos\theta \right| = \frac{\left| \vec{X} \cdot (\vec{Y} \text{ x } \vec{Z}) \right|}{\left\| \vec{X} \right\| \left\| \vec{Y} \text{ x } \vec{Z} \right\|}. \qquad (5)$$

Al sustitur (5) en (4) y simplificar :

$$V = \cancel{\left\| \vec{Y} \text{ x } \vec{Z} \right\|} \left\| \vec{X} \right\| \frac{\left| \vec{X} \cdot (\vec{Y} \text{ x } \vec{Z}) \right|}{\cancel{\left\| \vec{X} \right\| \left\| \vec{Y} \text{ x } \vec{Z} \right\|}}.$$

En consecuencia,

$$V = \left| \vec{X} \cdot (\vec{Y} \text{ x } \vec{Z}) \right| = \left| \left[\vec{X}\ \vec{Y}\ \vec{Z} \right] \right|. \blacksquare$$

PROBLEMA 1.16

Hallar el volumen del parelepípedo determinado por los vectores $\vec{X} = \langle 4, -2, 5 \rangle$, $\vec{Y} = \langle 1, -1, 2 \rangle$ y $\vec{Z} = \langle 2, 3, 4 \rangle$.

SOLUCIÓN

De acuerdo a lo demostrado en el Problema 1.16 , el volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto entre los tres vectores que lo determinan. Entonces, el producto mixto es :

$$\vec{X} \cdot (\vec{Y} \text{ x } \vec{Z}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -61.$$

En consecuencia el volumen es :

$$V = \left| -61 \right| = 61 \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 1.17

Demostrar que la suma de los cuadrados de las longitudes de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de sus cuatro lados.

SOLUCIÓN

En correspondencia con la Figura 1.13, se debe demostrar que:

$$\left\| \overrightarrow{PR} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{QS} \right\|^2 = \left\| \overrightarrow{PQ} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{QR} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{PS} \right\|^2 + \left\| \overrightarrow{SR} \right\|^2.$$

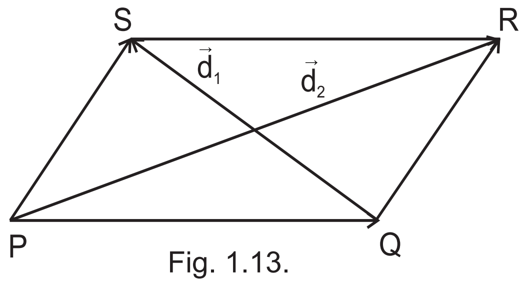

Fig. 1.13.

Sean

$$\vec{p} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR} \text{ y } \quad \vec{q} = \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}. \tag{1}$$

En el triángulo PQR, se tiene que $\vec{d_2} = \overrightarrow{PR}$, y, además,

$$\vec{d_2} = \vec{p} + \vec{q}; \qquad \vec{d_2}^{\,2} = (\vec{p} + \vec{q})^2;$$

$$\|\vec{d_2}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + 2\,\vec{p}\cdot\vec{q} + \|\vec{q}\|^2. \tag{2}$$

De la misma manera, en el triángulo PQS, se tiene que $\vec{d_1} = \overrightarrow{QS}$, y, por otro lado,

$$\vec{d_1} = \vec{q} - \vec{p}; \qquad \vec{d_1}^{\,2} = (\vec{q} - \vec{p})^2;$$

$$\|\vec{d_1}\|^2 = \|\vec{q}\|^2 - 2\,\vec{p}\cdot\vec{q} + \|\vec{p}\|^2. \tag{3}$$

Al sumar miembro a miembro las igualdades (1) y (2), se llega a :

$$\|\vec{d_2}\|^2 + \|\vec{d_1}\|^2 = \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2 + \|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2.$$

Por las ecuaciones (1), la relación anterior se convierte en :

$$\|\overrightarrow{PR}\|^2 + \|\overrightarrow{QS}\|^2 = \|\overrightarrow{PQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QR}\|^2 + \|\overrightarrow{PS}\|^2 + \|\overrightarrow{SR}\|^2.$$

2. RECTAS Y PLANOS EN $\mathbb{R}^3$

2.1 DEFINICIÓN DE RECTA

Una recta $L,$ que pasa por el extremo del vector $\vec{P}_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ en la dirección del vector $\vec{D} \neq \vec{O}$, dado por $\vec{D} = \langle a, b, c \rangle,$ se define vectorialmente por la ecuación

$$\vec{X} = \vec{P}_0 + t\,\vec{D}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

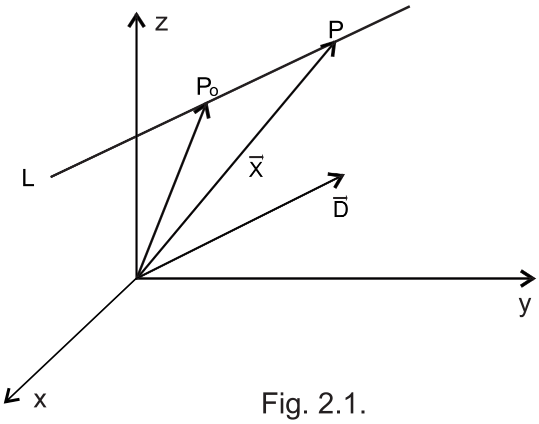

Fig. 2.1.

El vector $\vec{D}$ se llama vector direccional, y t es un parámetro.

2.2 ECUACIONES PARAMÉTRICAS DE UNA RECTA

Las ecuaciones paramétricas de la recta $L,$ que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ en la dirección del vector $\vec{D} \neq \vec{O}$, dado por $\vec{D} = \langle a, b, c \rangle$, son

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + b\,t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = z_0 + c\,t \end{cases}$$

Se debe tener en cuenta que $\vec{D} \neq O,$ no implica que todas sus componentes sean diferentes de cero. Si alguna de las componentes del vector direccional $\vec{D}$ es cero, entonces resulta conveniente utilizar las ecuaciones paramétricas en lugar de las ecuaciones simétricas.

2.3 ECUACIONES SIMÉTRICAS DE UNA RECTA

Las ecuaciones simétricas de la recta $L,$ que pasa por el punto $P_0(x_0, y_0, z_0),$ en la dirección del vector $\vec{D} \neq \vec{O}$, definido por $\vec{D} = \langle a, b, c \rangle$, son :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

2.4 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN $\mathbb{R}^3$

La distancia entre dos puntos de $\mathbb{R}^3$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$, se denota y define por

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

2.5 ÁNGULOS DIRECTORES DE UNA RECTA

Los ángulos α, β y δ formados por la recta L y las partes positivas de los ejes x, y y z se llaman ángulos directores de L. Un ángulo director puede tomar un valor que oscila entre 0^o y 180^o inclusive.

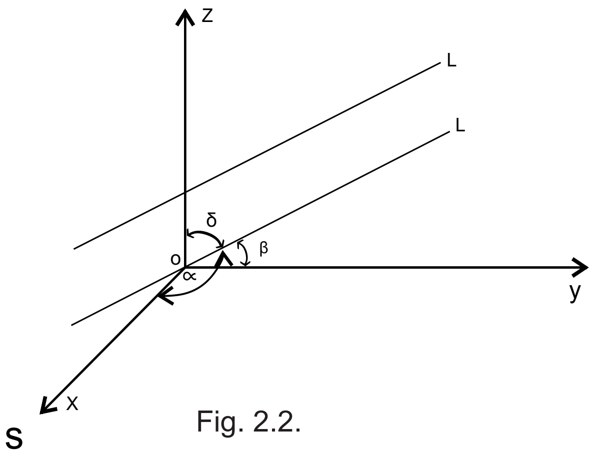

Fig. 2.2.

En la resolución de problemas, es conveniente utilizar los cosenos de los ángulos directores, en lugar de los ángulos mismos; de manera que a $cos\,\alpha$, $cos\,\beta$ y $cos\,\delta$ se los denomina cosenos directores de la recta L.

2.6 COSENOS DIRECTORES DE UNA RECTA

Los cosenos directores de la recta determinada por los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, y, dirigida de P a Q los dan las relaciones:

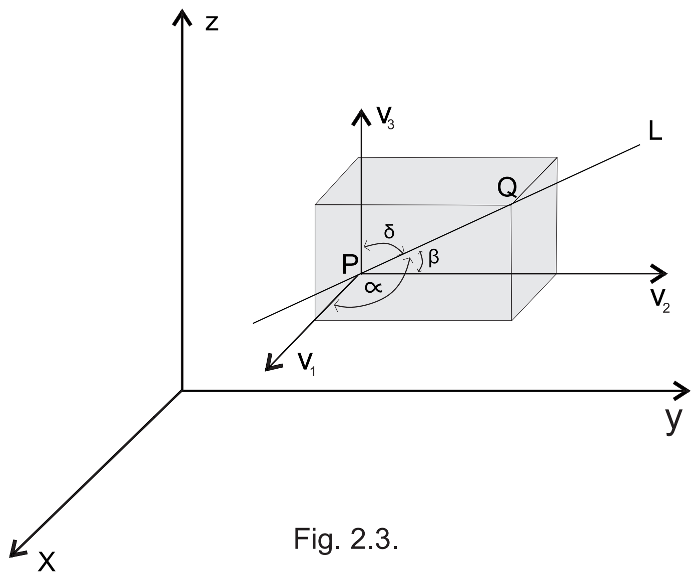

Fig. 2.3.

$$\left(\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \qquad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \qquad \cos\delta = \frac{z_2 - z_1}{d} \right),$$

en donde d es la distancia entre P y Q; es decir, $\overline{PQ} = d$.

2.7 ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS

Al ángulo θ formado por las rectas L_1 y L_2 de $\mathbb{R}^3$, cuyos vectores direccionales son $\vec{D}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\vec{D}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ respectivamente, lo determina la relación:

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}} \ ,$$

o bien,

$$\cos\theta = \frac{\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2}{\|\vec{D}_1\|\|\vec{D}_2\|}.$$

2.8 POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

2.8.1 Paralelismo. Dos rectas L_1 y L_2, cuyos vectores direccionales son $\vec{D}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\vec{D}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ respectivamente, son paralelas, siempre que $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ sean paralelos; es decir, $\vec{D}_1 = \lambda \vec{D}_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$; o sea, cuando las componentes respectivas de sus vectores direccionales sean proporcionales.

2.8.2 Perpendicularidad. Dos rectas L_1 y L_2 cuyos vectores direccionales son $\vec{D}_1 = \langle a_1, b_1, c_1 \rangle$ y $\vec{D}_2 = \langle a_2, b_2, c_2 \rangle$ respectivamente, son perpendiculares entre sí, siempre que $\vec{D}_1$ y $\vec{D}_2$ sean perpendiculares; esto es, $\vec{D}_1 \cdot \vec{D}_2 = 0$, o, equivalentemente, cuando $a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$.

2.9 EL PLANO

Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto cualquiera del plano π, y $\vec{N} = \langle A, B, C \rangle$ es un vector normal al plano π, entonces la ecuación del plano es :

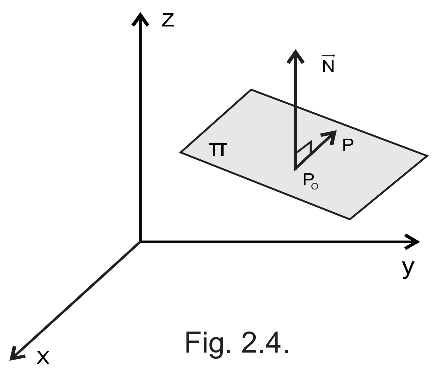

Fig. 2.4.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Al desarrollar la ecuación del plano anterior, se obtiene :

$$Ax + B\,y + C\,z + D = 0,$$

conocida como la **ecuación general del plano.**

2.8 POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

Dados dos planos π_1 y π_2, cuyos vectores normales son respectivamente $\vec{N}_1$ y $\vec{N}_2$, se presentan las siguientes posiciones relativas entre ellos:

a) Paralelos. Si $\vec{N}_1 = k\,\vec{N}_2, \quad k \neq 0.$

b) Perpendiculares. Si $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0.$

2.9 DISTANCIA DE UN UN PUNTO A UN PLANO

La distancia d entre un plano π, cuya ecuación es $Ax + By + Cz + D = 0$, y el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, la determina la relación :

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

2.10 ÁNGULO ENTRE DOS PLANOS

Al ángulo θ formado por planos π_1 y π_2 de $\mathbb{R}^3$, cuyos vectores normales son $\vec{N}_1 = \left\langle a_1, b_1, c_1 \right\rangle$ y $\vec{N}_2 = \left\langle a_2, b_2, c_2 \right\rangle$ respectivamente, lo determina la relación:

$$cos\,\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}\ ,$$

o bien,

$$cos\,\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\|\|\vec{N}_2\|}.$$

PROBLEMA 2.1

Hallar las ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas de la recta L que pasa por el punto $P_0(4, -1, 3)$ en la dirección del vector $\vec{D} = \left\langle 2, -3, 4 \right\rangle$.

SOLUCIÓN

$1)$ La ecuación vectorial de la recta pedida es :

$$\vec{X} = \left\langle 4, -1, 3 \right\rangle + t\left\langle 2, -3, 4 \right\rangle, \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

$2)$ Las ecuaciones paramétricas se escriben como :

$$\begin{cases} x = 4 + 2\,t \\ y = \; -1 - 3\,t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 + 4\,t \end{cases}$$

$3)$ La ecuaciones simétricas son : $\quad \dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-3}{4}.$

PROBLEMA 2.2

Hallar la ecuaciones vectorial, paramétricas y simétricas de la recta que pasa por los puntos $P(3,\,-2,\,3)$ y $Q(2,\,4\,,3)$.

SOLUCIÓN

El primer paso es determinar un vector direccional $\vec{D}$, de la siguienta manera :

$$\vec{D} = \overrightarrow{PQ} = \langle 2-3,\, 4+2,\, 3-3\rangle = \langle -1\,,6,0\,\rangle.$$

$1)$ Puesto que $P(3,\,-2,\,3)$ es un punto de la recta L, la ecuación vectorial de dicha recta se escribe como :

$$\vec{X} = \langle\, 3,\,-2,\,3\rangle + t\,\langle -1\,,\,6,\,0\rangle \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

$2)$ Las ecuaciones paramétricas de L son :

$$\begin{cases} x = 3 - \,t \\ y = \; -2 + 6t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$$

$3)$ Las ecuaciones simétricas de L son $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{6};\;\; z = 3.$

Es conveniente hacer notar que el vector direccional $\vec{D}$ pudo haber sido el determinado por el vector $\overrightarrow{QP}$ y definido como $\vec{D} = \overrightarrow{QP} = \langle 1,\,-6,\,0\,\rangle$ u otro vector cualquiera paralelo a $\overrightarrow{QP}$.

Por otra parte, se tomó como uno de los puntos de L, al punto $P\,(3,\,-2,\,3)$. Sin embargo, pudo tomarse el punto $Q(\,2,\,4\,,3\,)$.

En consecuencia, se pueden obtener otras ecuaciones vectoriales, paramétricas y simétricas para la recta L, que contiene a los puntos $(\,3,\,-2,\,3\,)$ y $Q(\,2,\,4\,,3\,)$, equivalentes a las ya obtenidas, pero que de todas maneras identifican el mismo lugar geométrico, como, por ejemplo la ecuación vectorial :

$$\vec{X} = \langle 2,\,4\,,3\rangle + t\,\langle 1,\,-6,\,0\,\rangle \text{ con } t \in \mathbb{R}.$$

Y, sus ecuaciones paramétricas son :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 4 - 6t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 \end{cases}$$

En cualquiera de los casos considerados, se obtiene que la tercera componente es la constante $z = 3$. Esto quiere decir que L, es una recta paralela al plano xy.

PROBLEMA 2.3

Hallar las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta L, que pasa por el punto $P(4, -3, 5)$ y es perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, definidos como $\vec{A} = \langle 5, 2, -1 \rangle$ y $\vec{B} = \langle -4, -3, 2 \rangle$.

SOLUCIÓN

Un vector perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se obtiene al efectuar el producto vectorial entre ellos :

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left\langle \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} \right\rangle,$$

$$= \langle 1, -6, -7 \rangle.$$

El vector $\vec{D} = \langle 1, -6, -7 \rangle$ es perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$, y por tanto, un vector direccional asociado a la recta pedida L es es precisamente este vector o cualquier vector paralelo a él.

Así, las ecuaciones paramétricas y simétricas de la recta que contiene al punto $P(4, -3, 5)$ y es perpendicular a $\vec{A} = \langle 5, 2, -1 \rangle$, $\vec{B} = \langle -4, -3, 2 \rangle$ son, respectivamente :

$$\begin{cases} x = 4 + t \\ y = -3 - 6t \quad t \in \mathbb{R}, \\ z = 5 - 7t \end{cases} \quad \text{y} \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y+3}{-6} = \frac{z-5}{-7}.$$

PROBLEMA 2.4

Hallar los ángulos directores de una recta L, que pasa por los puntos $P(5, -2, 3)$ y $Q(6 - 3, 4)$ y se dirige de Q a P.

SOLUCIÓN

La distancia entre P y Q es :

$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (-3+2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Como L se dirige de Q a P, entonces,

$$cos\,\alpha = \frac{5-6}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \alpha = arccos\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \approx 125^o\ 15'$$

$$cos\,\beta = \frac{-2+3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \beta = arccos\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \approx 54^o\,44'$$

$$cos\,\delta = \frac{3-4}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \delta = arccos\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \approx 125^o\,15'.$$

NOTA

Resulta conveniente decir que una recta L puede "dirigirse" en un sentido o en sentido contrario. Por ejemplo si los puntos $P\,(x_1, y_1, z_1)$ y $Q\,(x_2, y_2, z_2)$ pertenecen a una recta L, un vector direccional, puede ser el que se origina en P y termina en Q; esto es, $\vec{D} = \left\langle x_2 - x_1,\, y_2 - y_1,\, z_2 - z_1 \right\rangle = \left\langle a\,,\, b,\, c \right\rangle$. Pero, también, un vector direccional es el que se origina en Q y termina en P; es decir, $\vec{E} = \left\langle x_1 - x_2,\, y_1 - y_2,\, z_1 - z_2 \right\rangle = \left\langle -a\,,\, -b,\, -c \right\rangle$. De esta manera la recta L se dirige según $\vec{D}$ y se define por las ecuaciones simétricas :

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}.$$

De la misma manera, la misma recta L, se dirige según $\vec{E}$ y se define por las ecuaciones paramétricas :

$$\frac{x-x_1}{-a} = \frac{y-y_1}{-b} = \frac{z-z_1}{-c}.$$

No obstante, de acuerdo a lo observado en el Problema 2.2, los dos juegos de ecuaciones anteriormente descritos caracterizan al mismo lugar geométrico: la recta L, que pasa por los puntos P y Q.

PROBLEMA 2.5

Mostrar que la suma de los cuadrados de los cosenos directores de una recta es igual a la unidad.

SOLUCIÓN

En correspondencia con el Parágrafo 2.5, los ángulos α, β y δ son los ángulos directores de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$. En consecuencia:

$$cos\,\alpha = \frac{x_2 - x_1}{d}; \qquad cos\,\beta = \frac{y_2 - y_1}{d}; \qquad cos\,\delta = \frac{z_2 - z_1}{d};$$

donde d es la distancia entre P y Q; es decir, $\overline{PQ} = d$.

Al elevar al cuadrado las relaciones anteriores y sumarlas, se obtiene :

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\delta = \left[\frac{x_2 - x_1}{d}\right]^2 + \left[\frac{y_2 - y_1}{d}\right]^2 + \left[\frac{z_2 - z_1}{d}\right]^2,$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{d^2} \ ,$$

$$= \frac{d^2}{d^2} = 1.$$

Por tanto,

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\delta = 1.$$

PROBLEMA 2.6

Hallar el ángulo agudo formado entre las rectas definidas como

$L_1 : \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{3}$ y $L_2 : \dfrac{x+1}{-3} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+4}{2}.$

SOLUCIÓN

En correspondencia con el Parágrafo 2.7, se tiene :

$$\vec{D}_1 = \langle 4, -2, 3 \rangle \text{ y } \vec{D}_2 = \langle -3, 2, 2 \rangle; \text{ entonces}$$

$$cos\,\theta = \frac{\vec{D}_1 . \vec{D}_2}{\|\vec{D}_1\|\|\vec{D}_2\|} = \frac{4(-3) - 2(2) + (3)(2)}{\sqrt{29}\sqrt{17}} = \frac{-10}{\sqrt{29}\sqrt{17}} = -0,450377.$$

Por tanto,

$$\theta \approx arc\,cos(-0,450377) \approx 116^o\,46'.$$

Como el ángulo entre las rectas debe ser agudo, entonces el ángulo pedido es:

$$180^o - 116^o\,46' \approx 53^o\,34'.$$

PROBLEMA 2.7

Hallar las coordenadas del punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 que pasan por los puntos $P(3, -5, 2)$, $Q(11, -3, 6)$ y $R(5, -3, 2)$, $S(9, -5, 6)$ respectivamente.

SOLUCIÓN

Se parte del hecho que si dos rectas L_1 y L_2 no son paralelas, entonces la intersección entre ellas es un punto, o es vacía.

Ahora bien, un vector direccional para la recta L_1 es :

$$\vec{D}_1 = \langle 11-3,\,-3+5,\,6-2\,\rangle = \langle 8,\,2,\,4\,\rangle.$$

Análogamente, un vector direccional para la recta L_2 es :

$$\vec{D}_2 = \langle 9-5,\,-5+3,\,6-2\,\rangle = \langle 4,\,-2,\,4\,\rangle.$$

De esta manera, las ecuaciones paramétricas para la recta L_1 son :

$$\begin{cases} x = 3+8t \\ y = -5+2t \quad t\in\mathbb{R}, \\ z = 2+4t \end{cases} \tag{1}$$

y las ecuaciones paramétricas para la recta L_2 son :

$$\begin{cases} x = 5+4s \\ y = -3-2s \quad s\in\mathbb{R}. \\ z = 2+4s \end{cases} \tag{2}$$

De las ecuaciones (1) y (2) se obtiene el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} 8t-4s=2 \\ 2t+2s=2 \\ 4t-4s=0 \end{cases} \tag{3}$$

De las dos primeras ecuaciones anteriores, se obtiene que :

$$s=\frac{1}{2} \text{ y } t=\frac{1}{2}. \tag{5}$$

Al reemplazar los valores (5) en la tercera ecuación de (3), se encuentra :

$$4\,(\frac{1}{2})-4(\frac{1}{2})=0.$$

El sistema de ecuaciones (3) tiene solución única para s y t. Esto quiere decir que las rectas dadas se intersectan. El punto de intersección se encuentra al reemplazar los valores de s y t en las ecuaciones (1) o (2) :

$$x = 5+4(\frac{1}{2})=7; \quad y = -3-2(\frac{1}{2}) = -4; \qquad z = 2+4(\frac{1}{2})=4.$$

Por tanto, el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2 es (7, -4,4).

PROBLEMA 2.8

Hallar la expresión matemática que determine la distancia mínima entre dos rectas, si se conocen, de cada una de ellas, dos puntos.

SOLUCIÓN

Sean P y Q dos puntos de la recta L_1, R y S dos puntos de la recta L_2 y d la distancia mínima entre ellas. (Figura 2.5).

Por uno de los puntos de la recta L_2, R por ejemplo, se toma un vector perpendicular $\vec{V}$ a las dos rectas dadas. Además, se define otro vector que une el punto R, con otro punto de la recta L_1 : P, por ejemplo.

De esta manera, la proyección escalar del vector $\overrightarrow{PR}$ sobre el vector perpendicular $\vec{V}$, determina la distancia $\boldsymbol{d}$ entre L_1 y L_2.

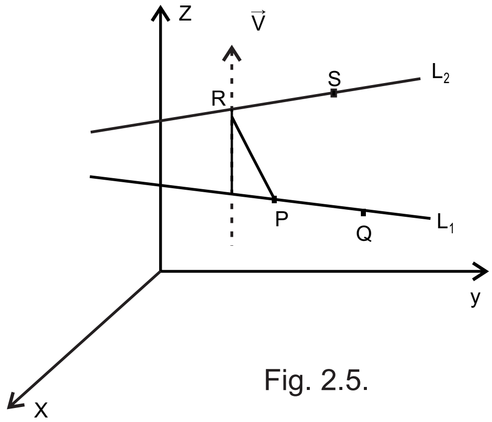

Fig. 2.5.

Ahora bien, el vector perpendicular $\vec{V}$ a L_1 y L_2 lo da el producto vectorial $\overrightarrow{PQ}$ x $\overrightarrow{RS}$ y la proyección escalar del vector $\overrightarrow{PR}$ sobre el vector $\overrightarrow{PQ}$ x $\overrightarrow{RS}$ lo determina la relación

$$d = C_{(\vec{X}/(\vec{Y}\,\mathsf{x}\,\vec{Z})} = \frac{|\,\vec{X}\cdot(\vec{Y}\,\mathsf{x}\,\vec{Z})\,|}{\|\,\vec{Y}\,\mathsf{x}\,\vec{Z}\,\|};$$

o bien,

$$d = \frac{|[\,\vec{X}\ \ \vec{Y}\ \ \vec{Z}\,]|}{\|\,\vec{Y}\,\mathsf{x}\,\vec{Z}\,\|},$$

donde :

$$\overrightarrow{PR} = \vec{X},\ \ \overrightarrow{PQ} = \vec{Y},\ \overrightarrow{RS} = \vec{Z}.$$

PROBLEMA 2.9

Hallar la distancia mínima de la recta que pasa por los puntos $M\,(2,\,1,\,-1)$ y $N(-1,\,2,\,1)$, al punto $R(-1,4,3)$.

SOLUCIÓN

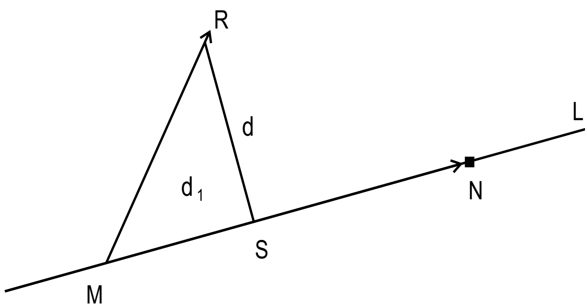

Fig. 2.6.

La Figura 2.6 ilustra la situación planteada. Entonces,

$$\overrightarrow{MN} = \langle -3,\, 1,\, 2\rangle \text{ y } \overrightarrow{MR} = \langle -3,\, 3,\, 4\rangle.$$

La proyección escalar del vector $\overrightarrow{MR}$ sobre el vector $\overrightarrow{MN}$ la determinada la relación :

$$d_1 = P_{(\overrightarrow{MR}/\overrightarrow{MN})} = \frac{|\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{MN}|}{\|\overrightarrow{MN}\|} = \frac{|9+3+8|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{20}{\sqrt{14}}.$$

Ahora bien, dado que el triángulo MSR es rectángulo, la distancia d entre el punto R y la recta L, que pasa por los puntos M y N, se obtiene por medio de la relación pitagórica :

$$d = \sqrt{\|\overrightarrow{MR}\|^2 - d_1^2}.$$

Puesto que $\|\overrightarrow{MR}\| = \sqrt{9+9+16} = \sqrt{34}$, entonces,

$$d = \sqrt{34 - \left[\frac{20}{\sqrt{14}}\right]^2} = \sqrt{\frac{76}{14}} = \sqrt{\frac{38}{7}} \approx 2,33$$

PROBLEMA 2.10

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P_0(4,\, 5,\, -6)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $R(2,\, -3,\, 1)$ y $S(-4,\, 2,\, -3)$.

SOLUCIÓN

Se requiere encontrar un vector normal $\vec{N}$ al plano pedido π. En este caso, el vector que se origina en R y termina en S es un vector normal al plano pedido, puesto que este vector está en la recta que pasa por los puntos R y S.

Entonces,

$$\vec{N} = \overrightarrow{RS} = \langle -6, 5,\, -4\rangle = \langle A, B, C\rangle.$$

Luego, la ecuación general del plano pedido es :

$$\langle -6, 5,\, -4\rangle\cdot\langle x-4,\, y-5,\, z+6\rangle = 0,$$

$$-6(x-4) + 5(y-5) - 4(z+6) = 0,$$

es decir,

$$6x - 5y + 4z + 25 = 0.$$

PROBLEMA 2.11

Hallar la ecuación general del plano que pasa por tres puntos no colineales $P(3,\, -3, 7)$, $Q(2,\, 5,\, -1)$ y $R(0,\, 2,\, -4)$.

SOLUCIÓN

En la Figura recursiva 2.7, se observan los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$. Al efectuar

el producto vectorial entre ellos, se obtiene el vector $\overrightarrow{PQ}$ x $\overrightarrow{PR} = \vec{N}$ el cual es normal a $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ y por ende normal al plano π.

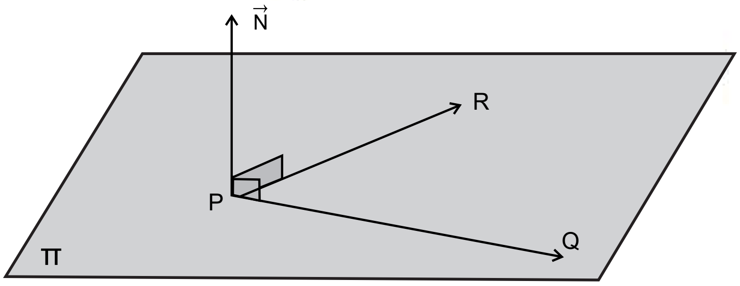

Fig. 2.7

A partir de los puntos $P(3, -3, 7)$, $Q(2, 5, -1)$ y $R(0, 2, -4)$ se obtienen los vectores coplanares $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$, así:

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 8, -8 \rangle \text{ y } \overline{PR} = \langle -3, 5, -11 \rangle.$$

El producto vectorial entre $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$ se obtiene de la siguiente manera :

$$\overrightarrow{PQ} \text{ x } \overrightarrow{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \langle -48, 13, 19 \rangle = \vec{N}.$$

Por tanto un vector normal al plano pedido π es $\vec{N} = \langle -48, 13, 19 \rangle$.

Al tomar uno de los puntos, $P(3, -3, 7)$, por ejemplo, se obtiene la ecuación general del plano :

$$\langle -48, 13, 19 \rangle \cdot \langle x-3,\ y+3,\ z-7 \rangle = 0,$$

$$-48(x-3) + 13(y+3) + 19(z-7) = 0,$$

$$48x - 13y - 19z - 50 = 0.$$

NOTAS

1) Los productos vectoriales $\overrightarrow{QR}$ x $\overrightarrow{QP}$ o $\overrightarrow{QR}$ x $\overrightarrow{RP}$ también generan sendos vectores normales al plano pedido. El lector puede comprobar que se obtiene el mismo vector normal, aunque pudo haber cambiado de sentido, pero, al fin y al cabo, es normal al plano π.

2) Igualmente, se pudo considerar otro punto diferente al punto P para obtener la ecuación general del plano. Por ejemplo al tomar $Q(2, 5, -1)$ se obtiene:

$$\langle -48, 13, 19 \rangle \cdot \langle x-2,\ y-5,\ z-1 \rangle = 0,$$

$$-48(x-2)+13(y-5)+19(z+1)=0,$$

$$48x-13y-19z-50=0.$$

PROBLEMA 2.11

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5,\,-4,\,3)$ y es paralelo al plano cuya ecuación general es $x-7y+2z+12=0$.

SOLUCIÓN

El vector normal del plano dado es $\vec{N}=\langle 1,\,-7\,,2\rangle$. Si el plano pedido es paralelo al plano $x-7y+2z+12=0$, entonces $\vec{N}$ también es normal al plano pedido. Puesto que este plano pasa por el punto $P(5,\,-4,\,3)$, entonces su ecuación general se obtiene así :

$$\langle 1,\,-7\,,2\rangle\cdot\langle x-5,\; y+4,\; z-3\rangle=0.$$

Al efectuar el producto escalar y simplificar se obtiene la ecuación general del plano pedido :

$$x-7y+2z-39=0.$$

PROBLEMA 2.12

Encontrar la ecuación del plano perpendicular al plano cuya ecuación general es $3x-2y+3z+15=0$ y que contenga al punto $P_0(3\,,4\,,\,-6)$.

SOLUCIÓN

El vector normal del plano dado es $\vec{N}_2=\langle 3,\,-2,\,5\rangle$ y el vector normal del plano buscado es $\vec{N}_1=\langle A,\,B,C\rangle$, donde $A,\,B$ y C son constantes por el momento desconocidas.

Para que los planos sean perpendiculares, se requiere que sus respectivos vectores normales también lo sean; es decir, $\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=0$; entonces,

$$\langle A,\,B,C\rangle\cdot\langle 3,\,-2,\,5\rangle=0.$$

De donde $3A-2B+5C=0$. al hacer $B=1$ y $C=1$, se obtiene $A=\,-1$ y, en consecuencia, el vector normal al plano pedido es $\vec{N}_1=\langle -1\,,\,1\,,1\rangle$.

Ahora bien, el plano pedido debe contener al punto $P_0(3\,,4\,,\,-6)$; entonces, su ecuación general se obtiene al efectuar el producto escalar :

$$\langle -1,\,1,\;1\rangle\cdot\langle x-3,\,y-4,\,z+6\rangle=0.$$

De donde, finalmente, se obtiene que la ecuación general del plano pedido es :

$$x-y-z-5=0.$$

PROBLEMA 2.13

Hallar la ecuación del plano perpendicular al plano xy que pasa por los puntos $P(3, -4, 7)$ y $Q(2, 2, 5)$.

SOLUCIÓN

Puesto que el plano buscado es perpendicular al plano xy, entonces su ecuación es de la forma $Ax + By + D = 0$. En efecto, el vector normal al plano pedido es $\langle A, B, 0 \rangle$ y el vector normal al plano xy es $\langle 0, 0, 1 \rangle$.

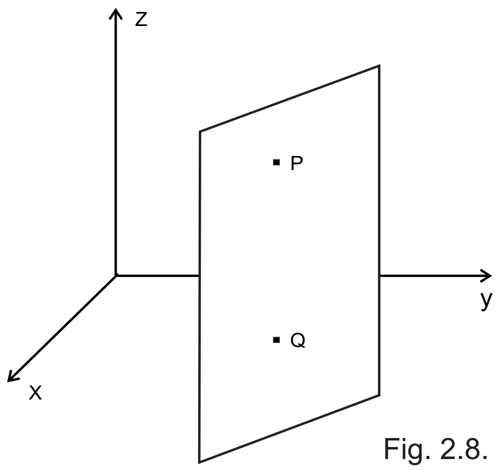

Fig. 2.8.

Para que los planos sean perpendiculares, se requiere que sus respectivos vectores normales también lo sean; es decir, $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$; entonces,

$$\langle A, B, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, 1 \rangle = 0.$$

De manera que, el plano pedido tiene como ecuación general a :

$$Ax + By + D = 0.$$

Como P y Q son puntos del plano pedido, entonces deben satisfacer su ecuación; esto es :

$$\begin{cases} 3A - 4B + D = 0 \\ 2A + 2B + D = 0 \ . \end{cases}$$

Al eliminar B entre las dos ecuaciones del sistema anterior se obtiene $A = -\dfrac{3}{7}D$. De igual manera, al eliminar A se encuentra que $B = -\dfrac{1}{14}D$.

Al reemplazar estos valores en la expresión del plano pedido, se llega a

$$\left[-\frac{3}{7}\, D \right] x + \left[-\frac{1}{14}\, D \right] y + D = 0.$$

Al cancelar $D \neq 0$, y simplificar se obtiene la ecuación general del plano pedido :

$$6x + y - 14 = 0.$$

PROBLEMA 2.14

Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto $P(5,\,4,\,-1)$ y es perpendicular a cada uno de los planos definidos como $3x - y + 2z - 6 = 0$ y $x + 2y + z + 4 = 0.$

SOLUCIÓN

Un vector $\vec{N}$ del plano buscado debe ser perpendicular a cada uno de los vectores normales de los planos dados; es decir, a los vectores $\langle 3,\,-1,\,2\rangle$ y $\langle 1,\,2,\,1\rangle$.

Para obtener un vector $\vec{N}$ perpendicular a dos vectores dados, basta efectuar el producto vectorial entre ellos :

$$\vec{N} = \langle 3,\,-1,\,2\rangle \times \langle 1,\,2,\,1\rangle,$$

es decir,

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \langle -5,\,-1,\,7\rangle.$$

Como el plano buscado debe contener al punto $P(5,\,4,\,-1)$, entonces su ecuación general es :

$$\langle -5,\,-1,\,7\rangle \cdot \langle x-5,\,y-4,\,z+1\rangle = 0.$$

Después de efectuar el producto escalar y simplificar, se obtiene que :

$$5x + y - 7z - 36 = 0.$$

PROBLEMA 2.15

Encontrar las ecuaciones de la recta de intersección entre los planos

$$\pi_1 \colon x + 3y - z - 4 = 0 \ \text{ y } \ \pi_2 \colon 2x - y + z + 6 = 0.$$

SOLUCIÓN

Dados dos planos π_1 y π_2 no paralelos, definidos por sus ecuaciones generales como $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ y $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ respectivamente, se intersectan según una recta L, que se obtiene al resolver el sistema de ecuaciones lineales :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Para este caso, se debe resolver el sistema lineal de ecuaciones 2×3, formado por las ecuaciones de los planos dados, para $x,\,y,\,z$. Para facilitar los cálculos, se expresan los valores de x y y en términos de z, de la siguiente manera :

$$\begin{cases} x + 3y - z - 4 = 0 & (1) \\ 2\,x - y + z + 6 = 0\,. & (2) \end{cases}$$

Al eliminar x entre las ecuaciones dadas se obtiene :

$$y = \frac{14 + 3z}{7}\ . \tag{3}$$

Con la eliminación de y entre las ecuaciones dadas se obtiene :

$$x = \frac{14 + 2z}{-\,7}.$$

Al tomar $z = t$ como parámetro, se obtiene que las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección pedida L son :

$$x = \frac{14 + 2t}{-\,7},\ y = \frac{14 + 3t}{7},\quad z = t.$$

Las ecuaciones simétricas de la recta se escriben como :

$$\frac{-\,7x - 14}{2} = \frac{7y - 14}{3} = z\,;$$

o bien,

$$\frac{x + 2}{-\,2/7} = \frac{y - 2}{3/7} = \frac{z}{1}.$$

Esta última expresión queda mejor escrita como :

$$\frac{x + 2}{-\,2} = \frac{y - 2}{3} = \frac{z}{7}.$$

Y las ecuaciones paramétricas de la recta intersección obtenida son:

$$\begin{cases} x = \ -\,2 - 2t \\ y = 2 + 3t \qquad t \in \mathbb{R}. \\ z = 7t \end{cases}$$

Ahora bien, para comprobar que efectivamente la recta obtenida es la intersección entre los dos planos dados, sus ecuaciones deben satisfacer las ecuaciones generales de los planos.

En efecto, al reemplazar las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano π_1: $x + 3y - z - 4 = 0$, se obtiene:

$$-\,2 - 2t + 6 + 9t - 7t - 4 = 0.$$

De la misma manera al reemplazar las ecuaciones paramétricas en la ecuación del plano π_2: $2\,x - y + z + 6 = 0$, se encuentra que :

$$-\,4 - 4t - 2 - 3t + 7t + 6 = 0.$$

PROBLEMA 2.16

Encontrar el ángulo agudo formado por los planos definidos por $\pi_1 : 4x + 3y - z + 12 = 0$ y $\pi_2 : x - y + 2z - 6 = 0.$

SOLUCIÓN

En correspondencia con el Parágrafo 2.10, el ángulo formado por dos planos no paralelos, se determina por el ángulo que forman los respectivos vectores normales a los planos dados. En este caso, los vectores normales a los planos dados son:

$$\vec{N}_1 = \langle 4, 3, -1 \rangle \text{ y } \vec{N}_2 = \langle 1, -1, 2 \rangle;$$

entonces,

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = \langle 4, 3, -1 \rangle \cdot \langle 1, -1, 2 \rangle = 4 - 3 - 2 = -1;$$

$$\| \vec{N}_1 \| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{16 + 9 + 1} = \sqrt{26};$$

$$\| \vec{N}_2 \| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

Por tanto,

$$cos\,\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\overline{N_1}\| \| \vec{N}_2 \|} = \frac{-1}{\sqrt{26}\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{156}}.$$

En consecuencia, el ángulo buscado es :

$$\theta = arccos\left[-\frac{1}{\sqrt{156}}\right] = 95^o\,35'.$$

Como el ángulo entre dos planos debe ser agudo, entonces el ángulo buscado es $180^o - 95^o\,35' = 84^o 25'.$

PROBLEMA 2.17

Mostrar que la recta intersección de los planos $\pi_1 : x - y + 2z - 8 = 0$ y $\pi_2 : x + 2y + 8z - 20 = 0$ es paralela al plano π: $3x - 2y + 8z - 5 = 0.$

SOLUCIÓN

Las ecuaciones de la recta intersección de los planos π_1 y π_2 se encuentran al resolver el sistema :

$$\begin{cases} x - y + 2z - 8 = 0 \\ 3x - 2y + 8z - 5 = 0\,. \end{cases}$$

Al eliminar x entre las ecuaciones anteriores se obtiene :

$$y = -2z + 4,$$

y con la eliminación de y se llega a:

$$x = -4z + 12.$$

Al tomar $z = t$ como parámetro, se obtienen las ecuaciones paramétricas de la recta intersección así:

$$x = -4z + 12; \qquad y = -2z + 4; \qquad z = t; \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Las ecuaciones simétricas son :

$$\frac{x-12}{-4} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z}{1}.$$

La recta intersección L tiene como vector direcional a $\vec{D} = \langle -4, -2, 1 \rangle$, y el vector normal del plano π es $\vec{N} = \langle 3, -2, 8 \rangle$. Para que L y π sean paralelos, se requiere que $\vec{D}$ y $\vec{N}$ sean perpendiculares; esto es, $\vec{D} \cdot \vec{N} = 0$. En efecto,

$$\vec{D} \cdot \vec{N} = \langle -4, -2, 1 \rangle \cdot \langle 3, -2, 8 \rangle = -12 + 4 + 8 = 0.$$

De esta manera, se comprueba que la recta L intersección de los planos π_1 y π_2 es paralela al plano dado π.

PROBLEMA 2.18

Hallar las coordenadas del punto de intersección de la recta L, definida como :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{3},$$

y el plano π definido como : π : $3x - 2y + 8z - 5 = 0$.

SOLUCIÓN

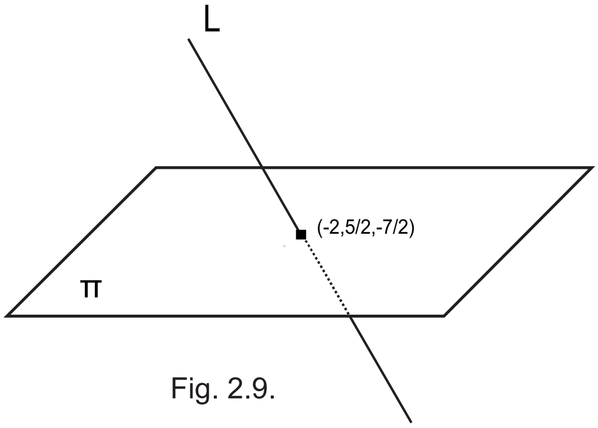

Fig. 2.9.

La recta L tiene como ecuaciones paramétricas :

$$x = 1 + 2t; \quad y = 1 - t; \quad z = 1 + 3t; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Al reemplazar estas relaciones en la ecuación general del plano dado, se encuentra que :

$$2(1 + 2t) + 3(1 - t) - (1 + 3t) - 7 = 0.$$

Al resolver para t, se llega a $t = -3/2$. Al sustituir el valor de $t = -3/2$ en las ecuaciones paramétricas de la recta, se obtiene :

$$x = 1 + 2(-3/2) = -2; \; y = 1 + 3/2 = 5/2; \quad z = 1 + 3(-3/2) = -7/2.$$

Así, el punto de intersección de la recta L y el plano π es $(-2\,,5/2,\ -7/2)$.

PROBLEMA 2.19. DISTANCIA DE UN UN PUNTO A UN PLANO

Mostrar que la distancia d entre un plano π, cuya ecuación es $Ax+By+Cz+D=0$, y el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$, es :

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\ .$$

DEMOSTRACIÓN

Sea $P(x,\, y,\, z)$ un punto cualquiera del plano π, y $\vec{N}$ un vector normal al plano en el punto P, definido como $\vec{N}=\langle A\,, B, C\rangle$. (Figura 2.10).

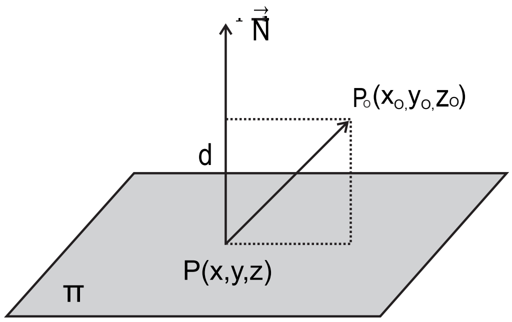

Fig. 2.10.

El vector $\overrightarrow{PP_0}$ une el pie del vector normal $\vec{N}$, con el punto P_0 no perteneciente al plano π. Entonces,

$$\overrightarrow{PP_0}=\langle x_0-x, y_0-y\,, z_0-z\rangle.$$

Ahora bien, la proyección escalar del vector $\overrightarrow{PP_0}$ sobre el vector normal $\vec{N}$ es precisamente la distancia d buscada. Así de acuerdo al parágrafo 1.9, se puede calcular ***d*** como :

$$d=C_{(\overrightarrow{PP_0}/\vec{N})}=\frac{|\ \overrightarrow{PP_0}\cdot\vec{N}\ |}{\|\ \vec{N}\|}.$$

Al utilizar componentes y efectuar el producto escalar, se tiene :

$$d=\frac{|\langle x_0-x,\ y_0-y\,, z_0-z\rangle\,.\,\langle A\,, B, C\rangle|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$d=\frac{|\ A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)\,|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax + By + Cz) \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (1)$$

Puesto que $P(x,\, y,\, z,)$ es un punto del plano π, entonces debe satisfacer la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$.

Al despejar D se obtiene :

$$D = -(Ax + By + Cz). \qquad (2)$$

Finalmente, al reemplazar (2) en (1) se tiene:

$$d = \frac{\left| Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\ .\blacksquare$$

PROBLEMA 2.20

Hallar la distancia entre el punto $P_0(3,\, -7, 1)$ y el plano π, cuya ecuación general es $2x - 5y + 4z - 1 = 0$.

SOLUCIÓN

En correspondencia con el Problema 2.19, la distancia pedida se calcula así :

$$d = \frac{\left|2(3) - 5(-7) + 4(1) - 1\right|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2}} = \frac{\left|6 + 35 + 4 - 1\right|}{\sqrt{4 + 25 + 16}} = \frac{44}{\sqrt{45}} = \frac{44\sqrt{5}}{15}\ .$$

PROBLEMA 2.21

Hallar la ecuación del plano π que contiene a la recta L, cuyas ecuaciones paramétricas son $x = 2t + 1;\ y = -3t + 2;\ z = 2t - 3,\ t \in \mathbb{R}$, y pasa por el punto $P_0(2,\, -2,\, 1)$.

SOLUCIÓN

Las ecuaciones simétricas de la recta L son:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{2}.$$

Esto quiere decir que un punto de la recta L es $P_1(1,\, 2,\, -3)$ y además su vector direccional se define como :

$$\vec{D} = \left\langle 2,\, -3, 2 \right\rangle.$$

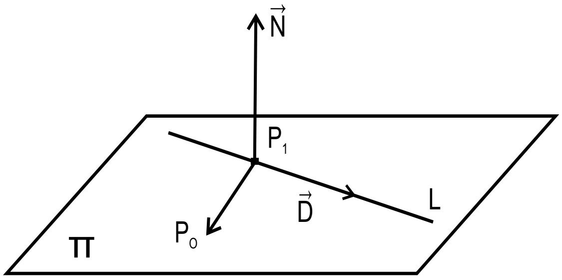

Fig. 2.11.

Además, el vector $\overrightarrow{P_1P_0} = \langle 1, -4, 4 \rangle$ también está en el plano pedido.

Ahora bien, un vector normal $\vec{N}$ al plano π lo determina el producto vectorial $\vec{N} = \overrightarrow{P_1P_0} \times \vec{D}$, así :

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \langle 4, 6, 5 \rangle.$$

En consecuencia, la ecuación general del plano pedido es :

$$4(x-2) + 6(y+2) + 5(z-1) = 0;$$

$$4x + 6y + 5z - 1 = 0.$$

PROBLEMA 2.22

Encontrar el punto de intersección de los planos π_1, π_2 y π_3 definidos por

$$\pi_1 : \ 3x - 2y - z - 6 = 0,$$

$$\pi_2 : 2x + 3y - 2z - 1 = 0,$$

$$\pi_3 : \ x - 4y + z + 3 = 0.$$

SOLUCIÓN

Tres planos no paralelos dos a dos tienen un único punto de intersección, el que se obtiene por medio de la solución de un sistema de ecuaciones lineales 3 x 3, determinado por sus respectivas ecuaciones generales. Existen varios métodos de solución, tales como el de igualación, reducción y métodos matriciales. En este caso, por simplicidad se utiliza el método de Cramer. Por tanto, se trata de resolver el sistema :

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 \\ 2x + 3y - 2z - 1 = 0 \\ x - 4y + z + 3 = 0. \end{cases}$$

El determinante del sistema es:

$$\Delta s = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0,$$

Lo que indica que el sistema tiene solución única.

Por otra parte,

$$\Delta x = \begin{vmatrix} +6 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -3 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \text{-}45 \qquad \Delta y = \begin{vmatrix} 3 & +6 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \text{-}32$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} 3 & -2 & +6 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \end{vmatrix} = \text{-}95$$

Por tanto,

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\text{-}45}{2},\ y = \frac{\Delta y}{\Delta s} = \frac{\text{-}32}{4} = \text{-}8 \qquad z = \frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\text{-}95}{4}.$$

Así, los planos π_1, π_2 y π_3 se cortan en el punto $(\frac{\text{-}45}{\text{-}4}, \text{-}8\ \frac{\text{-}95}{4})$.

PROBLEMA 2.23

Sean π_1 y π_2 dos planos paralelos, cuyas ecuaciones generales son $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ y $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, respectivamente. Mostrar que la distancia mínima entre ellos se encuentra mediante la relación :

$$d = \frac{|\ D_2 - D_1\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

SOLUCIÓN

De acuerdo con el Problema 2.19, la distancia entre el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ y el plano cuya ecuación general es $Ax + By + Cz + D = 0$ es :

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Ahora bien, para encontrar la distancia entre los planos paralelos dados, basta encontrar un punto de uno de los planos y aplicar la relación anterior.

Sea, entonces, $P(x, y, z)$ un punto del plano π_1. Así, la distancia entre el punto $P(x, y, z)$ y el plano π_2 es :

$$d = \frac{|Ax + By + Cz + D_2\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Pero $P(x, y, z)$ es punto de π_2; entonces, debe satisfacer su ecuación; esto es:

$$Ax + By + Cz = -D_1.$$

Al reemplazar en la expresión de la distancia, se encuentra que :

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \blacksquare$$

PROBLEMA 2.24

Hallar las ecuaciones de los planos paralelos al plano $\pi: \; x + 2y - 2z + 1 = 0$ y que se encuentren de él, a una distancia $d = 7$.

SOLUCIÓN

El vector normal al plano π es $\vec{N} = \langle 1, 2, -2 \rangle$ y la distancia entre dos planos paralelos se encuentra por medio de la relación :

$$d = \frac{|D_2 - D_1|}{\|\vec{N}\|},$$

donde $\vec{N}$ es el vector normal a los dos planos D_1 y D_2 son los términos independientes de las ecuaciones generales de los respectivos planos.

En este caso, sea $D_2 = 1$ y D_1 el término independiente de los planos paralelos buscados. Entonces

$$7 = \frac{|1 - D_1|}{\|\langle 1, 2, -2 \rangle\|} = \frac{|1 - D_1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - D_1|}{3}.$$

Por tanto,

$$|1 - D_1| = 21; \text{ es decir } D_1 = -20 \text{ o } D_1 = 22.$$

En conclusión, hay dos planos que satisfacen las condiciones del problema :

$$x + 2y - 2z - 20 = 0,$$

y

$$x + 2y - 2z + 22 = 0\,.$$

PROBLEMA 2.25

Hallar la ecuación general del plano π que contiene a las rectas paralelas definidas como $L_1: \; \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z}{1}$ y $L_1: \; \dfrac{x+2}{4} = \dfrac{y-2}{-2} = \dfrac{z+3}{1}$.

SOLUCIÓN

El punto $P(1, -1, 0)$ está en la recta L_2 y el punto $Q(-2, 2, -3)$ está en la recta L_2.

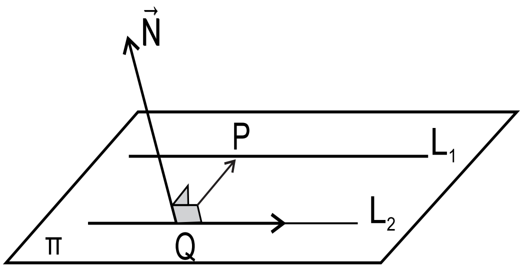

Fig. 2.12.

Por otra parte el vector $\overrightarrow{QP} = \langle 3, -3, 3 \rangle$ pertenece al plano buscado π, y el vector direccional de la recta L_2 es $\vec{D} = \langle 4, -2, 1 \rangle$.

De esta manera, el vector $\vec{N} = \vec{D} \times \overrightarrow{QP}$ es un vector normal al plano π. Entonces,

$$\vec{N} = \vec{D} \times \overrightarrow{QP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \langle -3, -9, -6 \rangle.$$

Finalmente, la ecuación general del plano π es:

$$-\langle 3, 9, 6 \rangle \cdot \langle x-1, y+1, z \rangle = 0.$$

Al operar y simplificar se encuentra que :

$$x + 3y + 2z + 2 = 0.$$

3. CURVAS Y SUPERFICIES

3.1 CURVAS EN $\mathbb{R}^3$

Sean $f_1(t),\ f_2(t)$ y $f_3(t)$ funciones reales de variable real t. Una curva Γ, en $\mathbb{R}^3$, se expresa paramétricamente mediante las ecuaciones :

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t)\ ,\ z = f_3(t);\ t \in \mathbb{R}.$$

De igual manera, la curva Γ puede definirse vectorialmente como :

$$\vec{r}(t) = \left\langle f_1(t),\ f_2(t), f_3(t) \right\rangle;\ t \in \mathbb{R}$$

o bien,

$$\vec{r}(t) = f_1(t)\,\vec{i} + f_2(t)\,\vec{j} + f_3(t)\,\vec{k}\,;\ t \in \mathbb{R}.$$

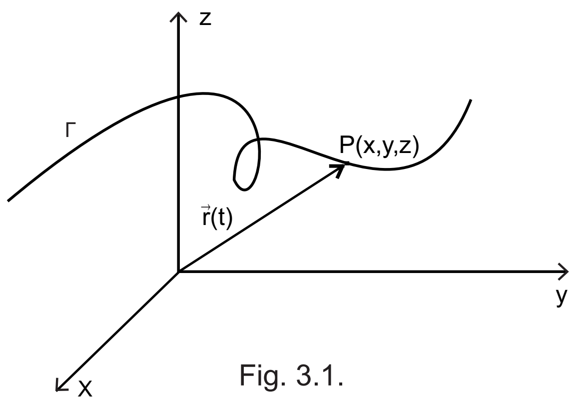

Fig. 3.1.

Para cada valor de t, se obtiene un punto de la curva Γ, o bien se determina un vector de posición $\vec{r}(t)$.

3.2 RECTA TANGENTE Y PLANO NORMAL A UNA CURVA

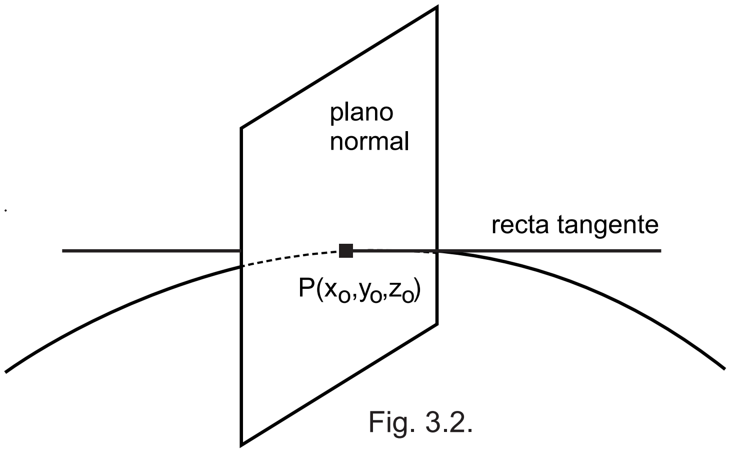

Fig. 3.2.

Si $f_1(t),\ f_2(t)$ y $f_3(t)$ son funciones escalares diferenciables de t, y $\vec{r}(t)$ es una función vectorial definida por $\vec{r}(t) = \left\langle f_1(t),\ f_2(t), f_3(t) \right\rangle$, entonces el vector tangente a la curva Γ, en cualquier t, se define y denota por :

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle f_1'(t),\ f_2'(t), f_3'(t) \right\rangle.$$

Las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva Γ, definida vectorialmente por $\vec{r}(t) = \left\langle f_1(t),\ f_2(t), f_3(t) \right\rangle$, en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ determinado por $t = t_0$, son :

$$\frac{x - x_0}{f_1'(t_0)} = \frac{y - y_0}{f_2'(t_0)} = \frac{z - z_0}{f_3'(t_0)}.$$

La ecuación general del plano normal a la curva Γ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ determinado por $t = t_0$, es :

$$f_1'(t_0)(x - x_0) + f_2'(t_0)(y - y_0) + f_3'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

3.3 VECTOR VELOCIDAD Y VECTOR ACELERACIÓN

Sea Γ una curva de $\mathbb{R}^3$ definida vectorialmente por $\vec{r}(t) = \left\langle f_1(t),\ f_2(t), f_3(t) \right\rangle$, $t \in \mathbb{R}$, donde las $f_i(t)$ son diferenciables al menos dos veces. Si Γ describe la trayectoria de una partícula material en $\mathbb{R}^3$, donde el parámetro t es el tiempo, entonces :

3.3.1 El vector velocidad de la partícula en el instante t se define y denota por :

$$v(t) = \vec{r}\,'(t) = \left\langle f_1'(t),\ f_2'(t), f_3'(t) \right\rangle.$$

3.3.2 La rapidez de la partícula en el instante t, se define como la magnitud del vector velocidad; esto es :

$$v = \left\| \vec{v} \right\| = \left\| \vec{r}\,'(t) \right\|.$$

3.3.3 El vector aceleración se define como como la derivada de la función velocidad; es decir :

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t) = \left\langle f_1''(t),\ f_2''(t), f_3''(t) \right\rangle.$$

3.3.4 La aceleración de la partícula, en el instante t, se define como la magnitud de la función aceleración; esto es :

$$a = \left\| \vec{a} \right\| = \left\| \vec{v}\,'(t) \right\| = \left\| \vec{r}\,''(t) \right\|.$$

3.4 CURVAS REGULARES

Sea Γ una curva de $\mathbb{R}^3$ definida vectorialmente por $\vec{r}(t) = \left\langle f_1(t),\ f_2(t), f_3(t) \right\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Se dice que Γ es curva regular o curva suave, si el vector unitario tangente $\vec{T}$ existe y es único para todo valor de t. Esto equivale a decir que las funciones $f_1(t)$, $f_2(t)$ y $f_3(t)$ poseen derivadas continuas para todo t.

3.5 LONGITUD DE ARCO

Sea Γ una curva de $\mathbb{R}^3$ definida vectorialmente por $\vec{r}(t) = \left\langle f_1(t),\ f_2(t), f_3(t) \right\rangle$, $t \in [a\,,\,b]$. Si $\vec{r}(t)$ es diferenciable, entonces, la longitud del arco de Γ, comprendido entre los puntos para los cuales $t = a$ y $t = b$, es :

$$l = \int_a^b \| \vec{r}'(t) \| dt.$$

3.6 PLANO TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA SUPERFICIE

3.6.1 Una superficie S es la representación gráfica en $\mathbb{R}^3$, de una función de la forma $F(x, y, z) = 0$.

3.6.2 Si $\dfrac{\partial F}{\partial x}$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z}$ existen y son continuas, el gradiente de F es un campo vectorial denotado y definido como :

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle.$$

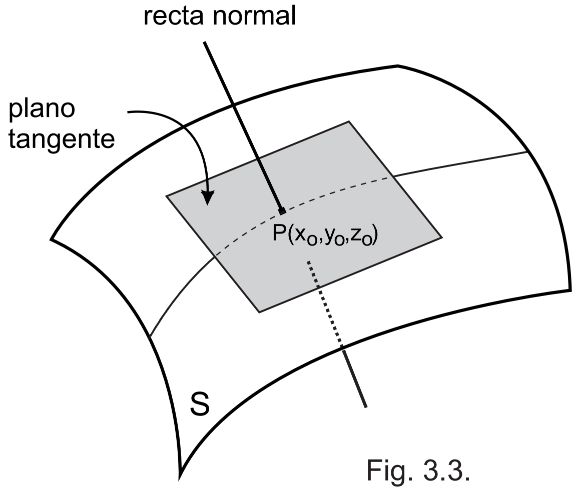

Fig. 3.3.

3.6.3 Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de la superficie S, entonces la ecuación general del plano tangente a S en P_0 es :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial x}(z - z_0) = 0.$$

Y las ecuaciones simétricas de la recta normal a S en P_0 son :

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}.$$

En las anteriores ecuaciones, tanto del plano como de la recta, las derivadas parciales se calculan en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

3.7 CURVAS COMO INTERSECCIÓN DE SUPERFICIES

Una curva Γ en $\mathbb{R}^3$ también se define como la intersección de dos superficies, cuyas ecuaciones son $F(x, y, z) = 0$ y $G(x, y, z) = 0$.

Si $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es un punto de Γ, entonces las ecuaciones de la recta tangente a la curva Γ en el punto P_0 son :

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}} .$$

La ecuación del plano normal a la curva Γ en el punto P_0 es :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}(x - x_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x} \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}(z - z_0) = 0.$$

En las ecuaciones anteriores, las derivadas parciales se calculan en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

PROBLEMA 3.1

Trazar aproximadamente la curva definida vectorialmente por :

$$\vec{r}(t) = \langle a\cos t,\ b\,sen\,t,\ t \rangle,\ t \in \mathbb{R}.$$

SOLUCIÓN

Para cada valor de t, se obtiene un punto de la curva Γ.

La tabla muestra algunos puntos de Γ.

t	x	y	z
0	a	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{2}$	0	b	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}a$	$\frac{\sqrt{2}}{2}b$	$\frac{3\pi}{4}$
$\frac{3\pi}{2}$	0	$-b$	$\frac{3\pi}{2}$
...	...	...	...

En la Figura 3.4, se puede apreciar un tramo de la curva Γ.

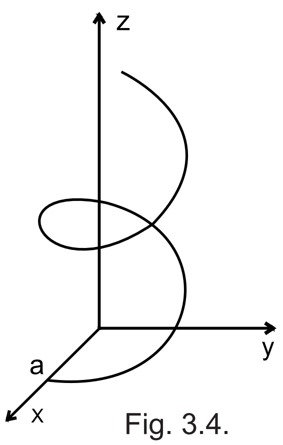

Fig. 3.4.

Esta curva recibe el nombre de hélice. Si $a = b$, se denomina hélice circular.

PROBLEMA 3.2

Hallar el vector tangente y las ecuaciones de la recta tangente a la curva Γ, definida como $\vec{r}(t)=\left\langle t-t^2/3,\, t^2\,,\, t+t^2/3\right\rangle$, en el punto de la curva para el cual $t=1$.

SOLUCIÓN

a) El vector tangente a la curva dada en cualquier punto, lo determina la derivada del vector posición; esto es :

$$\vec{r}\,'(t)\;=\left\langle 1-(2/3)\,t,\; 2t\,, 1+(2/3)\,t\right\rangle.$$

Para $t=1$, el vector tangente es :

$$\vec{r}\,'(1)\;=\left\langle 1-(2/3)(\,1),\; 2(1)\,, 1+(2/3)(1)\right\rangle,$$

$$\vec{r}\,'(1)\;=\left\langle 1/3\,,\,2\,,4/3\right\rangle.$$

b) El vector posición de la curva Γ, para $t=1$, es :

$$\vec{r}(1)=\left\langle 1-1/3,\;1\,,\;1+1/3\right\rangle=\left\langle 2/3,\;1\,,\;4/3\right\rangle.$$

De esta manera el punto $P_0(\,2/3,\,1\,,\,4/3)$ pertenece a la curva Γ.

En la parte a) de este ejercicio se encontró que $\vec{r}\,'(1)\;=\left\langle 1/3\,,\,2\,,4/3\right\rangle$, que es el vector direccional de la recta tangente a la curva Γ en el punto P_0.

Por tanto, las ecuaciones simétricas de dicha recta son

$$\frac{x-2/3}{1/3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4/3}{4/3},$$

o más precisamente,

$$\frac{x-2/3}{1}=\frac{y-1}{6}=\frac{z-4/3}{4}.$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta pedida son :

$$\begin{cases} x=2/3+t \\ y=1+6t \qquad t\in\mathbb{R}. \\ z=4/3+4t \end{cases}$$

PROBLEMA 3.3

Hallar el vector tangente unitario para la curva definida como $\vec{r}(t)=\left\langle t,\,t^2,t^3\right\rangle$, en el punto para el cual $t=1$.

SOLUCIÓN

La tabla muestra algunos puntos de la curva, que se conoce como cúbica enroscada. (Figura 3.5).

t	x	y	z
0	0	0	0
1	1	1	1
2	2	4	8
3	3	9	27
...	...	...	...

Ahora bien, el vector tangente en cualquier punto viene dado por

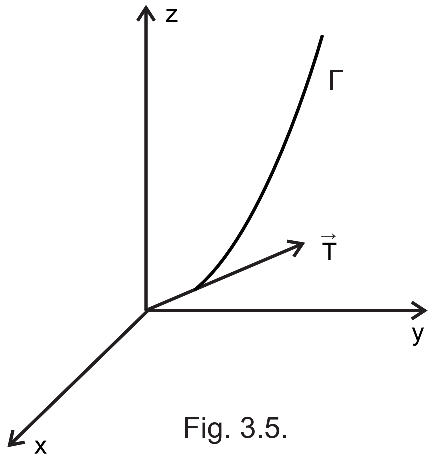

Fig. 3.5.

$$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 1,\, 2t\,, 3t^2 \right\rangle.$$

Para $t = 1$, $\vec{r}\,'(1) = \left\langle 1,\, 2(1)\,, 3(1)^2 \right\rangle = \left\langle 1,\, 2\,, 3 \right\rangle$.

Por otra parte, $\left\| \vec{r}\,'(1) \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$.

Por tanto, el vector tangente unitario a la curva dada, en el punto para que $t = 1$, es :

$$\vec{T}(1) = \frac{\vec{r}(1)}{\left\| \vec{r}\,'(1) \right\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \left\langle 1,\, 2\,, 3 \right\rangle,$$

$$\vec{T}(1) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right\rangle.$$

PROBLEMA 3.4

Para la curva del Problema 3.3, encontrar las ecuaciones de la recta tangente y plano normal a la curva en el punto para el que $t = 1$.

SOLUCIÓN

La curva tiene como ecuación vectorial a $\vec{r}(t) = \left\langle t,\, t^2, t^3 \right\rangle$, y el punto correspondiente a $t = 1$ es $P_0(1,\, 1\,,\, 1)$.

Como $\vec{r}\,'(1) = \left\langle 1,\, 2\,, 3 \right\rangle$, entonces este vector es el direccional de la recta tangente a la curva en $P_0(\,2/3,\, 1\,,\, 4/3)$ y, también el normal del plano perpendicular a la misma curva en el punto P_0.

Por tanto, las ecuaciones de la recta tangente y del plano normal a la curva en $P_0(2/3,\ 1\ ,\ 4/3)$ son, respectivamente :

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3};$$

$$1(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0,$$

$$x+2y+3z-6=0.$$

PROBLEMA 3.5

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la curva Γ, definida vectorialmente por $\vec{r}(t)=\left\langle Rcos^2t,\ Rsen\,t\,cos\,t\,,R\,sen\,t\right\rangle$, cuando $t=\pi/4$.

SOLUCIÓN

Para $t=\pi/4$, el vector de posición de la curva es :

$$\vec{r}(\pi/4)=\left\langle Rcos^2(\pi/4),\ Rsen(\pi/4)cos(\pi/4)\,,r\,sen(\pi/4)\right\rangle,$$

$$\vec{r}(\pi/4)=\left\langle Rcos^2(\pi/4),\ Rsen(\pi/4)cos(\pi/4)\,,r\,sen(\pi/4)\right\rangle,$$

$$\vec{r}(\pi/4)=\left\langle \tfrac{1}{2}R, \tfrac{1}{2}R, \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right\rangle.$$

En consecuencia, el punto de la curva Γ correspondiente es $P_0\left(\tfrac{1}{2}R, \tfrac{1}{2}R, \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)$.

Ahora bien,

$$\vec{r}\,'(t)=\left\langle R\frac{d}{dt}(cos^2t), R\frac{d}{dt}(sen\,t\,cos\,t), R\frac{d}{dt}\,(sen\,t)\ \right\rangle;$$

$$\vec{r}\,'(t)=\left\langle -2Rcost\,sent,\ R^2(cos^2t\ -sen^2t\,),\ Rcos\,t\right\rangle,$$

$$\vec{r}\,'(\pi/4)=\left\langle R,\ 0,\ -\tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right\rangle.$$

Por consiguiente, las ecuaciones de la recta tangente a la curva Γ en el punto $P_0\left(\tfrac{1}{2}R, \tfrac{1}{2}R, \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)$son :

$$\frac{x-\frac{R}{2}}{R}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}R}{\frac{\sqrt{2}}{2}R};\ y=\frac{R}{2}\,,$$

o bien,

$$\frac{x-\frac{R}{2}}{2}=\frac{z-\frac{\sqrt{2}}{2}R}{-\sqrt{2}};\ y=\frac{R}{2}.$$

La ecuación del plano normal a la curva Γ en el punto $P_0\left(\tfrac{1}{2}R, \tfrac{1}{2}R, \tfrac{\sqrt{2}}{2}R\right)$es :

$$2(x-\tfrac{R}{2})-\sqrt{2}(z-\tfrac{\sqrt{2}}{2}R)=0.$$

Al operar y simplificar,

$$2x-\sqrt{2}z=0.$$

PROBLEMA 3.6

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y el plano normal a la curva Γ, definida vectorialmente por $\vec{r}(t) = \langle t-2,\, 3\,t^2+1\,, 2t^3 \rangle$ en el punto donde corta al plano yz.

SOLUCIÓN

La curva Γ corta al eje x en $x = 0$; es decir, cuando $t - 2 = 0$ o $t = 2$.

Para $t = 2$, el vector posición $\vec{r}(t)$ es :

$$\vec{r}(t) = \langle 2-2,\, 3\,(2)^2+1\,, 2(1)^3 \rangle = \langle 0,\, 13\,, 16 \rangle.$$

Por tanto, el punto de la curva Γ, para $t = 2$ es $P_0(0,\, 13\,, 16)$.
Por otra parte,

$$\vec{r}\,'(t) = \langle 1,\, 6t,\, 6t^2 \rangle,$$
$$\vec{r}\,'(2) = \langle 1,\, 6(2),\, 6(2)^2 \rangle = \langle 1,\, 12,\, 24 \rangle.$$

En estas condiciones, las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva Γ en el punto $P_0(0,\, 13\,, 16)$ son :

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-13}{12} = \frac{z-16}{24},$$

y la ecuación del plano tangente a la curva Γ en el punto $P_0(0,\, 13\,, 16)$ es :

$$1(x-0) + 12(y-13) + 24(z-16) = 0,$$
$$x + 12y + 24z - 540 = 0.$$

PROBLEMA 3.7

Una partícula material se mueve a lo largo de una curva Γ definida por las ecuaciones paramétricas $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$, siendo t el tiempo. Encontrar los vectores velocidad y aceleración en $t = 1$. ¿Cuál es la rapidez en $t = 1$?

SOLUCIÓN

La ecuación vectorial de la curva Γ es $\vec{r}(t) = \langle\, 2t^2,\, t^2 - 4t, 3t - 5 \,\rangle$.

El vector velocidad, en cualquier t, es :

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \langle\, 4t, 2t-4\,, 3 \,\rangle.$$

Para $t = 1$,

$$\vec{v}(1) = \langle\, 4(1),\, 2(1) - 4\,, 3 \,\rangle = \langle\, 4,\, -2\,,\, 3 \,\rangle.$$

Y el vector aceleración es :

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \langle\, 4, 2\,, 3 \,\rangle.$$

La rapidez en $t = 1$ es la norma del vector velocidad en $t = 1$; esto es,

$$v = \left\|\vec{v}(1)\right\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{16+4+9} = \sqrt{29}.$$

PROBLEMA 3.8

Una partícula material se mueve a lo largo de una curva Γ definida por la ecuación vectorial $\vec{r}(t) = \left\langle\, cos\,\alpha\, cos\,\omega t,\ sen\,\alpha\, cos\,\omega t, sen\,\omega t \,\right\rangle$, donde α, ω son constantes, y t es el tiempo. Encontrar la velocidad y la aceleración de la partícula y sus respectivas magnitudes en cualquier t.

SOLUCIÓN

La velocidad es la derivada de la función vectorial que determina la posición de la partícula en t; es decir,

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t) = \left\langle\, \frac{d}{dt}(\,cos\,\alpha\, cos\,\omega t), \frac{d}{dt}(sen\,\alpha\, cos\,\omega), \frac{d}{dt}(sen\,\omega t) \,\right\rangle,$$

$$\vec{v}(t) = \left\langle\, cos\,\alpha\frac{d}{dt}(\,cos\,\omega t), sen\,\alpha\frac{d}{dt}(\,cos\,\omega t), \frac{d}{dt}(sen\,\omega t) \,\right\rangle,$$

$$\vec{v}(t) = \left\langle\, -\,\omega\, cos\,\alpha\, sen\,\omega t,\ -\,\omega\, sen\alpha\, sen\,\omega t,\ \omega\, cos\,\omega t \,\right\rangle.$$

La rapidez o magnitud de la velocidad es :

$$v = \left\|\vec{v}(t)\right\| = \sqrt{(-\,\omega\, cos\,\alpha\, sen\,\omega t)^2 + (-\,\omega\, sen\alpha\, sen\,\omega t)^2 + (\omega\, cos\,\omega t)^2}\ ,$$

$$v = \sqrt{(\omega)^2\left[cos^2\alpha\, sen^2\omega t + sen^2\alpha sen^2\omega t + cos^2\omega t\right]},$$

$$v = \left|\,\omega\,\right|\sqrt{sen^2\omega t(cos^2\alpha + sen^2\alpha) + cos^2\omega t} = \left|\,\omega\,\right|.$$

La aceleración es la derivada de la velocidad; entonces,

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \left\langle\, -\,\omega\, cos\,\alpha\,\frac{d}{dt}(\,sen\,\omega t),\ -\,\omega\, sen\alpha\frac{d}{dt}(sen\,\omega t), \omega\frac{d}{dt}(cos\,\omega t) \,\right\rangle,$$

$$\vec{a}(t) = \left\langle\, -\,\omega^2\, cos\,\alpha\, cos\,\omega t,\ -\,\omega^2\, sen\alpha\, cos\,\omega t,\ -\,\omega^2\, sen\,\omega t \,\right\rangle.$$

La magnitud de la aceleración es la norma de $\vec{a}(t)$:

$$a = \left\|\vec{a}(t)\right\| = \sqrt{(-\,\omega^2\, cos\,\alpha\, cos\,\omega t)^2 + (-\,\omega^2\, sen\alpha\, cos\,\omega t)^2 + (-\,\omega^2\, sen\,\omega t)^2}$$

$$a = \omega^2\sqrt{cos^2\alpha\, cos^2\omega t + sen^2\alpha\, cos^2\omega t + sen^2\omega t},$$

$$a = \omega^2\,\sqrt{cos^2\omega t(cos^2\alpha + sen^2\alpha) + sen^2\omega t} = \omega^2\,\sqrt{1} = \omega^2,$$

$$a = \omega^2.$$

PROBLEMA 3.9

Calcular las longitudes de arco de las curvas definidas por $\vec{r}(t)$:

a) $\vec{r}(t) = \left\langle\, tsen\,t, t\,cos\,t, \sqrt{8}t \,\right\rangle;\ t \in \left[\,0\,,4\,\right].$

b) $\vec{r}(t) = \left\langle\, 2t^{3/2}, t\, -3,\, 3t \,\right\rangle;\ t \in \left[\,6\,,10\right].$

c) $\vec{r}(t) = \left\langle\, senh2\,t,\, cosh2\,t, 2t \,\right\rangle;\ t \in \left[\,-1/2\,,1\right].$

d) $\vec{r}(t) = \left\langle\, 2t,\, lnt, 2t \,\right\rangle;\ t \in \left[\,1\,,10\right].$

SOLUCIÓN

a) $\vec{r}\,'(t) = \left\langle\, \dfrac{d}{dt}(tsen\,t), \dfrac{d}{dt}(t\,cos\,t), \dfrac{d}{dt}(\sqrt{8}t) \,\right\rangle,$

$\vec{r}\,'(t) = \left\langle\, tcos\,t + sen\,t,\, -tsen\,t + cos\,t, \sqrt{8} \,\right\rangle,$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \sqrt{(\,tcos\,t + sen\,t)^2 + (\,-tsen\,t + cos\,t)^2 + (\sqrt{8})^2},$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \sqrt{\,t^2(cos^2\,t + sen^2t) + 1 + 8\,} = \sqrt{t^2+9}.$

En consecuencia, la longitud de arco de la curva dada es :

$$l = \int_0^4 \left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \int_0^4 \sqrt{t^2+9}\,dt,$$

$$l = \left[\frac{t}{2}\sqrt{t^2+9} + \frac{9}{2}ln(t + \sqrt{t^2+9})\right]_0^4 \simeq 14,94.$$

b) $\vec{r}\,'(t) = \left\langle\, \dfrac{d}{dt}(2t^{3/2}), \dfrac{d}{dt}(t\,-3), \dfrac{d}{dt}(3t) \,\right\rangle,$

$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 3\,t^{1/2}, 1, 3 \,\right\rangle,$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \sqrt{(\,3\,t^{1/2})^2 + (1 + (3)^2},$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \sqrt{\,9t + 1 + 9\,} = \sqrt{9t+10}.$

Por tanto, la longitud de arco de la curva dada es :

$$l = \int_6^{10} \left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \int_6^{10} \sqrt{9t+10}\,dt,$$

$$l = \left[\frac{2}{27}\sqrt{(9t+10)^3}\right]_6^{10} \simeq 36,15.$$

c) $\vec{r}\,'(t) = \left\langle\, \dfrac{d}{dt}(senh2\,t\,), \dfrac{d}{dt}(\,cosh2\,t), \dfrac{d}{dt}(2t) \,\right\rangle,$

$\vec{r}\,'(t) = \left\langle 2\,cosh2t, 2senh2t, 2 \,\right\rangle,$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = \sqrt{4\,cosh^2 2t +\ 4senh^2 2t + 4},$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = 2\sqrt{\,cosh^2 2t +\ cosh^2 2t - 1 + 1\,} = 2\sqrt{2\,cosh^2 2t},$

$\left\|\, \vec{r}\,'(t) \,\right\| = 2\sqrt{2}\,cosh2t.$

Luego, la longitud de arco de la curva dada es :

$$l = \int_{-1/2}^{1} \| \vec{r}\,'(t) \| = 2\sqrt{2}\int_{-1/2}^{1} cosh2t\, dt,$$

$$l = \Big[\frac{2\sqrt{2}}{2} senh2t\Big]_{-1/2}^{1} \simeq 6,79.$$

d) $\vec{r}\,'(t) = \Big\langle \dfrac{d}{dt}(2t\,), \dfrac{d}{dt}(\,ln\, t), \dfrac{d}{dt}(t^2)\,\Big\rangle,$

$$\vec{r}\,'(t) = \big\langle 2, 1/t, 2t \big\rangle,$$

$$\| \vec{r}\,'(t) \| = \sqrt{4 + \,(1/t)^2 + 4t^2} = \frac{\sqrt{4t^2 \,+\, 1 + 4t^4}}{t},$$

$$\| \vec{r}\,'(t) \| = \frac{\sqrt{(1 + 2t^2)^2}}{t} = \frac{1 + 2t^2}{t},$$

$$\| \vec{r}\,'(t) \| = \,1/t + 2t.$$

Por tanto, la longitud de arco de la curva dada es :

$$l = \int_{1}^{10} \| \vec{r}\,'(t) \| = \int_{1}^{10} \Big[1/t + 2t\Big] dt.$$

$$l = \Big[ln\, t + t^2\Big]_{1}^{10} = ln\, 10 + 100 - 1 = ln\, 10 + 99 \simeq 101,43.$$

PROBLEMA 3.10

Un mosca vuela según la trayectoria $\vec{r}(t) = 100e^{-t}\big\langle\, cost\,, sent, 1\,\big\rangle$.¿ A qué lugar llegó y qué distancia recorrió durante su vida; es decir para $t \in \big[0\,, \infty)$?

SOLUCIÓN

Para resolver este problema, inicialmente se calcula la derivada de la función vectorial que define la curva de la trayectoria de la mosca; luego, se halla su norma y, finalmente, la longitud de la curva en el intervalo $0 \leq t < \infty$.

En efecto,

$$\vec{r}\,'(t) = 100\Big\langle \frac{d}{dt}(e^{-t}cost)\,, \frac{d}{dt}(e^{-t}sent), \frac{d}{dt}(e^{-t})\,\Big\rangle,$$

$$\vec{r}\,'(t) = 100e^{-t}\Big\langle -cos\, t - sent,\; cos\, t - sen\, t,\; -1\,\Big\rangle,$$

$$\|\vec{r}\,'(t)\| = 100e^{-t}\sqrt{\,(-cos\, t - sent)^2 + \,(cos\, t - sen\, t)^2 + (\,-1)^2},$$

$$\| \vec{r}\,'(t) \| = \,100e^{-t}\sqrt{(cos^2 t + sen^2 t) + (cos^2 t + sen^2 t) + 1}\,,$$

$$\| \vec{r}\,'(t) \| = \,100e^{-t}\sqrt{3} = 100\sqrt{3}e^{-t}.$$

Luego, la longitud de arco de la curva descrita por el vuelo de la mosca es :

$$l = \int_0^{\infty} \| \vec{r}\,'(t) \| = 100\sqrt{3}\int_0^{\infty} e^{-t},$$

$$l = -100\sqrt{3}\,[0-1] = 100\sqrt{3}.$$

En conclusión, la mosca llegó al origen de coordenadas y recorrió $100\sqrt{3}$ unidades de longitud, pues al inicio, cuando $t = 0$, la mosca se encuentra en el punto $100e^0(cos\,0,\ sen\,0,\ 1) = (100,\ 0,\ 0)$. Cuando $t \to \infty$, la mosca está en el origen de coordenadas.

PROBLEMA 3.11

Hallar las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a las superficies en el punto indicado.

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 11;$ $P_0(1,\ 1,3)$.

b) $x^2 + 3y^2 = 2z^2;$ $P_0(3,\ 1,\sqrt{6})$.

c) $z = 4 - x^2 - y^2;$ $P_0(1,\ 1,2)$.

SOLUCIÓN

a) Sea $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0$. El primer paso es verificar si el punto $P_0(1,\ 1,3)$ pertenece a la superficie (esfera de centro en el origen y radio $\sqrt{11}$). En efecto, $F(1,1,3) = 1^2 + 1^2 + 3^2 - 11 = 0$. Esto comprueba que el punto P_0 pertenece a la superficie esférica.

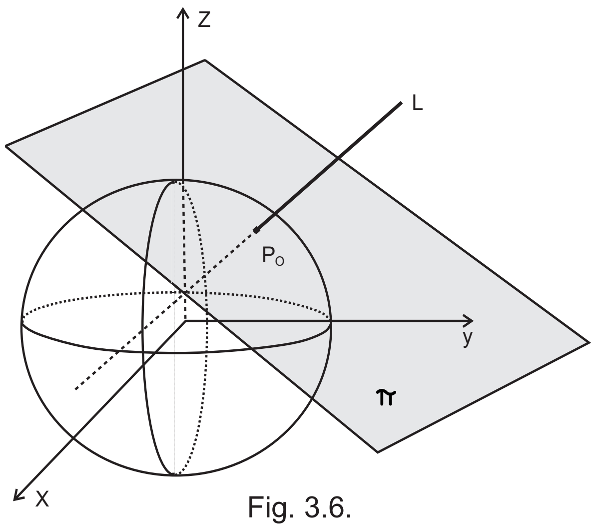

Fig. 3.6.

En correspondencia con el Parágrafo 3.6, se debe calcular el gradiente de la función $F(x,y,z) = 0$.

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x,\ 2y, 2z \rangle;$$

$$\nabla F(1,\, 1\,, 3) = \big\langle 2(1),\, 2(1), 2(3)\,\big\rangle = (\,2,\, 3\,, 6).$$

En consecuencia, la ecuación general del plano tangente a la superficie S, cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 - 11 = 0$, es :

$$2(x-1) + 3(y-1) + 6(z-3) = 0,$$

$$2x + 3y + 6z - 23 = 0.$$

Y las ecuaciones simétricas de la recta normal a la superficie S en el punto P_0 son:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{6}.$$

b) De manera análoga, sea $F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$.

$F(3,\, 1\,, \sqrt{6}) = 3^2 + 3(1)^2 - 2(\sqrt{6})^2 = 0$. Esto significa que el punto $P_0(3,\, 1,\, \sqrt{6})$ pertenece a la superficie S (Cono elíptico). Ahora,

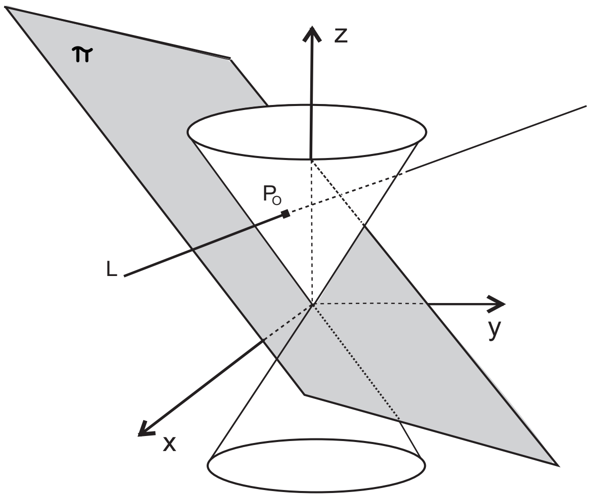

Fig. 3.7.

$$\nabla F = \Big\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \Big\rangle = \big\langle 2x,\, 6y,\, -4z\,\big\rangle,$$

$$\nabla F(3,\, 1\,, \sqrt{6}) = \big\langle 2(3),\, 6(1),\, -4(\sqrt{6})\,\big\rangle = \big\langle 6,\, 6,\, -4\sqrt{6}\,\big\rangle.$$

La ecuación del plano tangente a la superficie definida como $x^2 + 3y^2 - 2z^2 = 0$, en el punto $P_0(3,\, 1,\, \sqrt{6})$ es :

$$6(x-3) + 6(y-1) - 4\sqrt{6}(z - \sqrt{6}) = 0.$$

Al efectuar y simplificar :

$$3x + 3y - 2\sqrt{6}z + 12 = 0.$$

Ahora, las ecuaciones simétricas de la recta normal a S en el punto $P_0(3,\, 1,\, \sqrt{6})$ son :

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-4\sqrt{6}}{-2\sqrt{6}}.$$

c) $F(x,y,z)=4-x^2-y^2-z=0.$

$F(1,1,2)=4-1^2-1^2-2=0$. Esto significa que el punto $P_0(1,\ 1\ ,2)$ pertenece a la superficie S (Paraboloide circular).

$$\nabla F=\left\langle \frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle=\left\langle -2x,\ -2y,\ -1\right\rangle,$$

$$\nabla F(1,\ 1\ ,2)=\left\langle -2(1),\ -2(1),\ -1)\right\rangle=\left\langle -2,\ -2,\ -1\right\rangle.$$

La ecuación del plano tangente al paraboloide en el punto $P_0(1,\ 1\ ,2)$ es :

$$2(x-1)+2(y-1)+1(z-2)=0,$$

$$2x+2y+z-6=0.$$

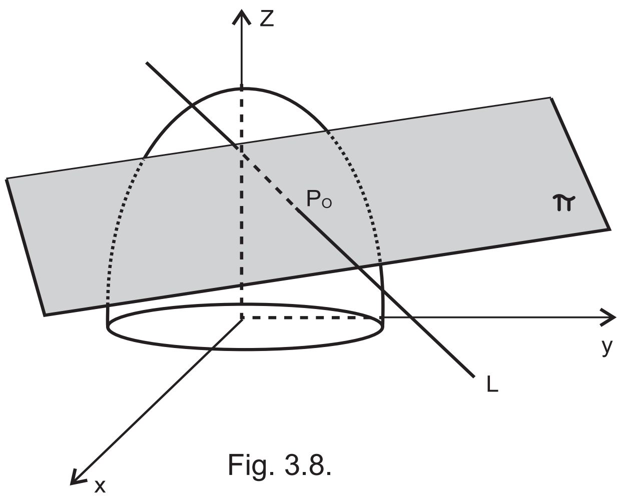

Fig. 3.8.

Las ecuaciones simétricas de la recta normal a S en el punto $P_0(1,\ 1\ ,2)$ son :

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{1}.$$

PROBLEMA 3.12

Si $F(x,y,z)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, calcular $\nabla F(2,\ 2\ ,\ -1)$ y $\dfrac{\nabla F}{\|\nabla F\|}(2,\ 2\ ,\ -1)$.

SOLUCIÓN

$$\nabla F=\left\langle \frac{\partial F}{\partial x},\ \frac{\partial F}{\partial y},\frac{\partial F}{\partial z}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\left\langle -x,\ -y,\ -z\right\rangle,$$

$$\nabla F=\frac{-1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\left\langle x,\ y,\ z\right\rangle.$$

El gradiente de F calculado en el punto $(2,\ 2\ ,\ -1)$ es :

$$\nabla F(2,\,2\,,\,-1)=\frac{-1}{\sqrt{(4+4+1)^3}}\langle 2,\,2\,,\,-1\rangle,$$

$$\nabla F(2,\,2\,,\,-1)=\frac{-1}{27}\langle 2,\,2\,,\,-1\rangle=\Big\langle\frac{-2}{27},\frac{-2}{27},\frac{1}{27}\Big\rangle.$$

La norma del gradiente de F calculado en el punto $(2,\,2\,,\,-1)$ es :

$$\|\nabla F(2,\,2\,,\,-1)\|=\frac{1}{27}\sqrt{4+4+1}=\frac{3}{27}=\frac{1}{9}.$$

Por tanto,

$$\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}(2,\,2\,,\,-1)=\frac{\Big\langle\frac{-2}{27},\frac{-2}{27},\frac{1}{27}\Big\rangle}{\frac{1}{9}}=\Big\langle\frac{-2}{3},\frac{-2}{3},\frac{1}{3}\Big\rangle.$$

PROBLEMA 3.13

Mostrar que las superficies $x^2+y^2+z^2=50$ y $x^2+y^2-10z+25=0$ son perpendiculares en el punto $P_0(3,\,4\,,5)$.

SOLUCIÓN

Para demostrar que las superficies dadas son perpendiculares en el punto P_0, basta mostrar que los planos tangentes a las superficies en ese punto son perpendiculares.

Sea S_1 la superficie cuya ecuación es $F_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-50=0$ y S_2 la superficie cuya ecuación es $F_2(x,y,z)=x^2+y^2-10z+25=0$.

Se debe verificar que el punto $P_0(3,\,4\,,5)$ pertenece a las dos superficies. En efecto,

$$F_1(3,4,5)=3^2+4^2+5^2-50=9+16+25-50=0.$$
$$F_2(3,4,5)=3^2+4^2-10(5)+25=9+16-50+25=0.$$

Las anteriores relaciones muestran que el punto $P_0(3,\,4\,,5)$ pertenece a las dos superficies. Por otra parte,

$$\nabla F_1=\Big\langle\frac{\partial F_1}{\partial x},\frac{\partial F_1}{\partial y},\frac{\partial F_1}{\partial z}\Big\rangle=\langle 2x,\,2y,2z\rangle,$$

$$\nabla F_1(3,4,5)=\langle 2(3),\,2(4),2(5)\rangle=\langle 6,\,8,10\rangle=\vec{N}_1.$$

El vector $\vec{N}_1=\langle 6,\,8,10\rangle$ es el vector normal del plano tangente a la superficie S_1 en el punto $P_0(3,\,4\,,5)$.

Análogamente,

$$\nabla F_2=\Big\langle\frac{\partial F_2}{\partial x},\frac{\partial F_2}{\partial y},\frac{\partial F_2}{\partial z}\Big\rangle=\langle 2x,\,2y,\,-10\rangle,$$

$$\nabla F_2(3,4,5)=\langle 2(3),\,2(4),\,-10\rangle=\langle 6,\,8,\,-10\rangle=\vec{N}_2.$$

El vector $\vec{N}_2 = \langle 6,\, 8,\, -10 \rangle$ es el vector normal del plano tangente a la superficie S_2 en el punto $P_0(3,\, 4\,, 5)$. Ahora,

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = \langle 6,\, 8, 10 \rangle \cdot \langle 6,\, 8,\, -10 \rangle = 36 + 64 - 100 = 0.$$

Como el producto escalar entre los vectores normales a los planos tangentes a las superficies dadas en el punto P_0 es cero, entonces los planos tangentes son perpendiculares y, por ende, las superficies S_1 y S_2 también lo son.

PROBLEMA 3.14

Hallar el ángulo que forman las superficies S_1 y S_2 definidas respectivamente por $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ y $G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 3 = 0$ en el punto $P_0(2,\, -1\,, 2)$.

SOLUCIÓN

Inicialmente, se debe verificar que el punto $P_0(2,\, -1\,, 2)$ pertenece a las dos superficies:

$$F(2,\, -1\,, 2) = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 - 9 = 4 + 1 + 4 - 9 = 0.$$

$$G(2,\, -1\,, 2) = 2^2 + (-1)^2 - 2 - 3 = 4 + 1 - 2 - 3 = 0.$$

Esto significa que el punto $P_0(2,\, -1\,, 2)$ pertenece a las dos superficies.

Ahora bien, el ángulo que forman las dos superficies es el ángulo que forman los planos tangentes a las superficies en el punto común; o sea, el ángulo que forman los vectores normales a los respectivos planos tangentes a las superficies en el punto P_0. Entonces,

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x,\, 2y, 2z \rangle,$$

$$\nabla F(2,\, -1\,, 2) = \langle 4,\, -2, 4 \rangle = \vec{N}_1.$$

Análogamente,

$$\nabla G = \left\langle \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right\rangle = \langle 2x,\, 2y,\, -1 \rangle,$$

$$\nabla G(2,\, -1\,, 2) = \langle 4,\, -2,\, -1 \rangle = \vec{N}_2.$$

Si θ es el ángulo buscado, entonces,

$$cos\,\theta = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{\|\vec{N}_1\| \|\vec{N}_2\|} = \frac{\langle 4,\, -2, 4 \rangle \cdot \langle 4,\, -2,\, -1 \rangle}{\sqrt{16 + 4 + 16}\,\sqrt{16 + 4 + 1}},$$

$$cos\,\theta = \frac{16 + 4 - 4}{6\sqrt{21}} = \frac{16}{6\sqrt{21}} = \frac{8}{3\sqrt{21}} \simeq 0,581914374.$$

Luego,

$$\theta = arc\,cos(0,581914374) \simeq 54^o\, 24'.$$

PROBLEMA 3.15

Hallar las constantes a y b de forma que la superficie $ax^2 + byz = (a+2)x$ sea ortogonal a la superficie $4x^2y + z^3 = 4$, en el punto $P_0(1, -1, 2)$.

SOLUCIÓN

Sean $S_1 : F(x, y\, z) = ax^2 + byz - (a+2)x$ y
$S_2 : G(x, y, z) = 4x^2y + z^3 - 4 = 0$, las ecuaciones de las dos superficies.

El punto $P_0(1, -1, 2)$ debe pertenecer a la superficie S_1; entonces,

$$F(1, -1, 2) = 0; \text{ es decir,}$$

$$a(1)^2 - b(-1)2 - (a+2)(1) = 0,$$

$$a + 2b - a - 2 = 0; \quad b = 1.$$

Por otra parte,

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = \langle 2ax - a - 2, -bz, -by \rangle,$$

$$\nabla F(1, -1, 2) = \langle a - 2, -2b, b \rangle = \vec{N}_1.$$

Análogamente,

$$\nabla G = \left\langle \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial y}, \frac{\partial G}{\partial z} \right\rangle = \langle 8xy, 4x^2, 3z^2 \rangle,$$

$$\nabla G(1, -1, 2) = \langle -8, 4, 12 \rangle = \vec{N}_2.$$

Como S_1 y S_2 deben ser ortogonales, entonces los vectores normales de los planos tangentes a las dos superficies deben ser también ortogonales, y, por consiguiente, su producto escalar es cero. En efecto,

$$\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = \langle a - 2, -2b, b \rangle \cdot \langle -8, 4, 12 \rangle = 0,$$

$$-8a + 4b + 16 = 0.$$

Puesto que se encontró que $b = 1$, entonces,

$$-8a = -20; \qquad a = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}.$$

Por tanto, los valores buscados son: $a = \dfrac{5}{2}$ y $b = 1$.

PROBLEMA 3.16

Mostrar que la función $u = ln(x^2 + y^2 + y^2)$ satisface la relación

$$u = 2\, ln2 - ln(\nabla u)^2.$$

SOLUCIÓN

El gradiente de la función u es :

$$\nabla u = \left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{2x}{x^2+y^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2+y^2}, \frac{2z}{x^2+y^2+y^2} \right\rangle.$$

Ahora bien, de acuerdo al Problema 1.6, se tiene que :

$$\nabla u \cdot \nabla u = (\nabla u)^2 = \frac{4x^2}{(x^2+y^2+y^2)^2} + \frac{4y^2}{(x^2+y^2+y^2)^2} + \frac{4z^2}{(x^2+y^2+y^2)^2},$$

$$(\nabla u)^2 = \frac{4x^2+4y^2+4z^2}{(x^2+y^2+y^2)^2} = \frac{4(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+y^2)^2} = \frac{4}{x^2+y^2+y^2}.$$

Por otra parte,

$$ln(\nabla u)^2 = ln\left[\frac{4}{x^2+y^2+y^2}\right] = ln\, 4 - ln(x^2+y^2+y^2)$$

$$ln(\nabla u)^2 = 2\, ln2 - ln(x^2+y^2+y^2).$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} 2\, ln2 - ln(\nabla u)^2 &= 2\, ln2 - (2\, ln2 - ln(x^2+y^2+y^2)) \\ &= ln(x^2+y^2+y^2) = u. \end{aligned}$$

De esta manera, se ha probado que :

$$u = 2\, ln2 - ln(\nabla u)^2.$$

PROBLEMA 3.17

Mostrar que la ecuación del plano tangente al elipsoide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1,$ en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ perteneciente a él, es :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 y}{c^2} = 1.$$

SOLUCIÓN

Como el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ pertenece al elipsoide, entonces debe satisfacer su ecuación; esto es,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1\,. \tag{1}$$

Ahora bien, sea $F(x,y,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0;$ entonces,

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle = \left\langle \frac{2x}{a^2}, \frac{2y}{b^2}, \frac{2z}{c^2} \right\rangle,$$

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) = \left\langle \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, \frac{2z_0}{c^2} \right\rangle = \vec{N}.$$

El vector $\vec{N}$ es el vector normal al plano tangente buscado. En consecuencia la ecuación del plano tangente al elipsoide en el punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ es :

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$
$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0.$$

Al operar y simplificar se llega a :

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0y}{c^2}-\left[\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right]=0\,. \tag{2}$$

Al sustituir (1) en (2) se obtiene :

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0y}{c^2}-1=0,$$
$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0y}{c^2}=1.$$

PROBLEMA 3.18

Hallar las ecuaciones de la recta tangente y plano normal a la curva Γ originadas por la intersección de las superficies $9x^2+4y^2-36z=0$ y $3x+y+z-z^2-1=0$, en el punto $P_0(2,-3,2)$.

SOLUCIÓN

Sean $F(x,y,z)=9x^2+4y^2-36z=0$ y $G(x,y,z)=3x+y+z-z^2-1=0$. El punto $P_0(2,-3,2)$ debe pertenecer a las dos superficies. En efecto,

$$F(2,-3,2)=9(2)^2+4(-3)^2-36(2)=36+36-72=0.$$
$$G(2,-3,2)=3(2)-3+2-(2)^2-1=6-3+2-4-1=0.$$

Esto significa que el punto $P_0(2,-3,2)$ pertenece a las dos superficies.

Por otra parte,

$$\frac{\partial F}{\partial x}=18x;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=8y;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=-36$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(2,-3,2)=36;\quad \frac{\partial F}{\partial y}(2,-3,2)=-24;\quad \frac{\partial F}{\partial z}(2,-3,2)=-36.$$

Además,

$$\frac{\partial G}{\partial z}=3;\quad \frac{\partial F}{\partial y}=1;\quad \frac{\partial F}{\partial z}=1-2z;$$
$$\frac{\partial G}{\partial x}(2,-3,2)=3;\quad \frac{\partial G}{\partial y}(2,-3,2)=1;\quad \frac{\partial F}{\partial z}(2,-3,2)=-3.$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z}\\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-24 & -36\\ 1 & -3\end{vmatrix}=108;$$

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial x}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-36 & 36\\ -3 & 3\end{vmatrix}=0\,;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 36 & -24 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 108 \,.$$

En consecuencia, las ecuaciones simétricas de la recta tangente a la curva Γ en el punto $P_0(2, -3, 2)$ son :

$$\frac{x-2}{108} = \frac{z-2}{108}; \; y = -3, \text{ o bien}$$

$$\frac{x-2}{1} = \frac{z-2}{1}; \; y = -3.$$

La ecuación del plano normal a la curva Γ en el punto $P_0(2, -3, 2)$ es :

$$1(x-2) + 0(y+3) + 1(z-2) = 0,$$

$$x + z - 4 = 0.$$

4 . LÍMITES Y CONTINUIDAD

4.1 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS EN $\mathbb{R}^n$

Sean $P\,(x_1, x_2, ..., x_n)$ y $A\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ puntos de $\mathbb{R}^n$. La distancia entre P y Q se denota y define como

$$\| P - A \| = \sqrt{(\,x_1 - a_1)^2 + (\,x_2 - a_2)^2 + ... + (\,x_n - a_n)^2}.$$

Si $P(x, y, z)$ y $A(a, b, c)$ son puntos de $\mathbb{R}^3$, entonces ,

$$\| P - A \| = \sqrt{(\,x - a)^2 + (\,y - b)^2 + (\,z - c)^2}.$$

De igual manera, para $P(x, y)$ y $A(a, b)$ puntos de $\mathbb{R}^2$,

$$\| P - A \| = \sqrt{(\,x - a)^2 + (\,y - b)^2}.$$

4.2 VECINDAD DE UN PUNTO

Sea $A\,(a_1, a_2, ..., a_n)$ puntos de $\mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Una vecindad de radio $\boldsymbol{r}$ y centro en A, se define y denota por

$$V_r(A) = \big\{ X \in \mathbb{R}^n / \, \| P - A \| < r \big\}.$$

Si $A(a, b, c)$ es un punto de $\mathbb{R}^3$, entonces,

$$V_r(A) = \big\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / \, \sqrt{(\,x - a)^2 + (\,y - b)^2 + (\,z - c)^2} < r \big\}.$$

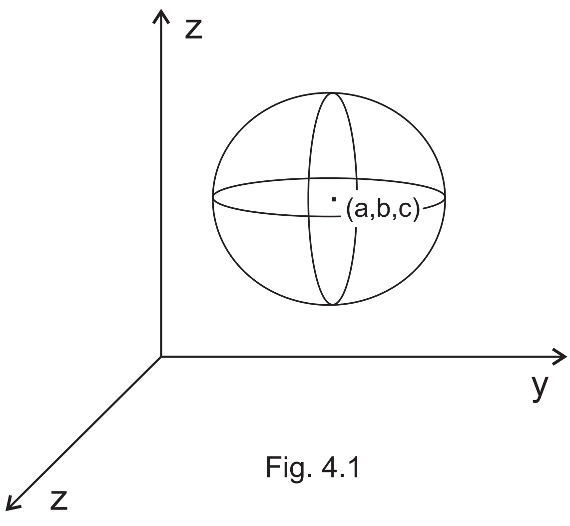

Fig. 4.1

En este caso, $V_r(A)$ está constituida por todos los puntos de $\mathbb{R}^3$, dentro de la esfera de radio $\boldsymbol{r}$ y centro en el punto $A(a, b, c)$, sin incluir la frontera.

Consecuentemente, si $A(a, b)$ es un punto de $\mathbb{R}^2$, entonces,

$$V_r(A) = \big\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \, \sqrt{(\,x - a)^2 + (\,y - b)^2} < r \big\}.$$

Aquí, la vecindad de centro en $A(a,b)$ y radio $\boldsymbol{r}$, corresponde al interior del círculo $(x-a)^2+(y-b)^2=\boldsymbol{r}$, sin incluir la frontera. Figura 4.2.

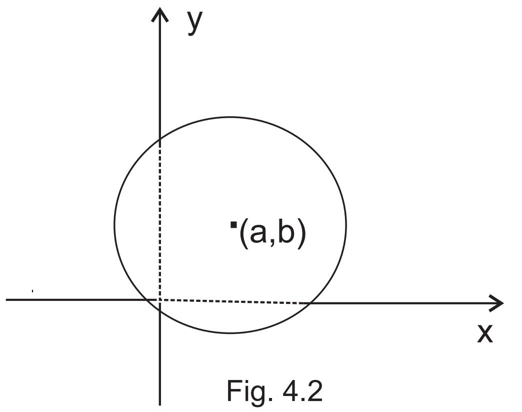

Fig. 4.2

4.3 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN DE VARIAS VARIABLES

sea f una función definida en $\mathbb{R}^n$, $A\in\mathbb{R}^n$ y $L\in\mathbb{R}$.

$$\lim_{X\to A} f(X)=L \Leftrightarrow \forall\,\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \text{tal que } 0\le \|X-A\|\le\delta,$$
$$\text{implica que } \left|f(X)-L\right|<\epsilon.$$

Nótese que el esquema de definición del límite de funciones de varias variables es el mismo que para funciones de una variable.

Para funciones bivariables de la forma $z=f(x,y)$ con $A(a,b)$, se tiene :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L \Leftrightarrow \forall\,\epsilon>0, \exists\,\delta>0, \text{tal que, } 0\le\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<r,$$
$$\text{implica que } \left|f(x,y)-L\right|<\epsilon.$$

4.4 PROPIEDADES DE LOS LÍMITES DE FUNCIONES DE $\boldsymbol{n}$ VARIABLES

Sean f y g funciones de $\boldsymbol{n}$ variables independientes, $A\in\mathbb{R}^n$ y $L\in\mathbb{R}$.

Si $\lim\limits_{X\to A} f(X)=L$ existe, este es único. Además, si $\lim\limits_{X\to A} g(X)=M$ y α es una constante, entonces,

1) $\lim\limits_{X\to A} \alpha\, f(X)=\alpha\, L.$

2) $\lim\limits_{X\to A} \left[f(X)+g(X)\right]=\lim\limits_{X\to A} f(X)+\lim\limits_{X\to A} g(X)=L+M.$

3) $\lim\limits_{X\to A} \left[f(X).g(X)\right]=\lim\limits_{X\to A} f(X).\lim\limits_{X\to A} g(X)=L.M.$

4) $\lim\limits_{X\to A}\left[\dfrac{f(X)}{g(X)}\right]=\dfrac{\lim\limits_{X\to A} f(X)}{\lim\limits_{X\to A} g(X)}=\dfrac{L}{M},\ M\neq 0.$

4.5 CÁLCULO DE LÍMITES DE FUNCIONES DE n VARIABLES

Esencialmente, el cálculo de límites de funciones de varias variables es el mismo que para funciones de una variable. Resulta particularmente especial el manejo de las indeterminaciones.

Por otra parte, es necesario tener en cuenta dos resultados importantes :

1) **Para funciones bivariables**.- Si la función $z = f(x, y)$ tiene diferentes límites cuando (x, y) se aproxima a (a, b), a través de diferentes caminos que tienden a (a, b), entonces $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$ no existe.

2) **Teorema del emparedado**.- Si f, g y h son funciones de varias variables, $\lim\limits_{X\to A} f(X) = L$, $\lim\limits_{X\to A} g(X) = L$ y $f(X) \leq h(X) \leq g(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, entonces $\lim\limits_{X\to A} h(X) = L.$

4.6 CONTINUIDAD

La función de varias variables $y = f(X)$ es continua en $X = A$, si y solo si

1) $f(A)$ existe.

2) $\lim\limits_{X\to A} f(X)$ existe.

3) $\lim\limits_{X\to A} f(X) = f(A).$

Si $f(A)$ no existe, pero $\lim\limits_{X\to A} f(X) = L$, entonces se dice que f presenta una <u>discontinuidad removible</u> en $X = A.$

Si $\lim\limits_{X\to A} f(X)$ no existe, entonces la función f tiene una <u>discontinuidad esencial</u> en $X = A.$

PROBLEMA 4.1

Utilizar la definición de límite de una función bivariable para demostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

SOLUCIÓN

Si se tiene $\epsilon > 0$, se debe hallar un δ, $\delta(\epsilon) > 0$, tal que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, entonces se cumple que $\left| \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| < \epsilon.$

Puesto que $(x - y)^2 \geq 0$, entonces, $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$; de donde, $x^2 + y^2 \geq 2xy$, para cualquier x, $y \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, dado que $|x| = \sqrt{x^2}$, entonces,

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = |x|\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\right| \leq |x|\left|\frac{xy}{2xy}\right| \leq \frac{1}{2}|x| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}.$$

Al tomar $\delta = 2\epsilon,\ \forall (x,y) \neq (0,0)$, se llega a :

$$\sqrt{x^2+y^2} < \delta, \text{ implica que } \left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{2}(2\epsilon) = \epsilon.$$

De esta manera se ha demostrado por medio de la defínción de límite de una función bivariable que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = 0.$$

PROBLEMA 4.2

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} e^x\left[\cos\frac{y}{3} + \operatorname{sen}\frac{y}{3}\right].$

SOLUCIÓN

Al reemplazar x , y por los valores hacia los cuales tienden respectivamente se tiene :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} e^x\left[\cos\frac{y}{3} + \operatorname{sen}\frac{y}{3}\right] &= e^0\left[\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right],\\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,\pi)} e^x\left[\cos\frac{y}{3} + \operatorname{sen}\frac{y}{3}\right] = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}).$$

PROBLEMA 4.3

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2}.$

SOLUCIÓN

Fácilmente se puede ver que,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación se puede eliminar al factorizar el denominador y posteriormente cancelar en numerador y denominador el factor común, así :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 4.4

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

SOLUCIÓN

Antes de efectuar el cálculo se hace notar que el dominio de definición de la función está constituido por las parejas (x,y) tales que $\sqrt{x}>0$ y $\sqrt{y}>0$.

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{0}{0}.$$

Al racionalizar el denominador de la función se tiene :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} &= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}, \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(\sqrt{x}+\sqrt{y})}{x-y}, \\
&= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \sqrt{x}+\sqrt{y} = 1+1 = 2.
\end{aligned}$$

De manera que,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2.$$

PROBLEMA 4.5

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2}$.

SOLUCIÓN

Al reemplazar x,y por los valores hacia los cuales tienden se obtiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2} = \frac{0}{0}.$$

Esta indeterminación se elimina al multiplicar numerador y denominador por el conjugado del numerador y luego simplificar, así :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left[\sqrt{x^2y^2+1}-1\right]\left[\sqrt{x^2y^2+1}+1\right]}{x^2y^2\left[\sqrt{x^2y^2+1}+1\right]} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left[\sqrt{x^2y^2+1}\right]^2-1^2}{x^2y^2\left[\sqrt{x^2y^2+1}+1\right]},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\left[\sqrt{x^2y^2+1}-1\right]\left[\sqrt{x^2y^2+1}+1\right]}{x^2y^2\left[\sqrt{x^2y^2+1}+1\right]} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2\left[\sqrt{x^2y^2+1}+1\right]},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{x^2y^2+1}+1} = \frac{1}{2}.$$

Se concluye entonces que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2y^2} = \frac{1}{2}.$$

PROBLEMA 4.6

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}}$.

SOLUCIÓN

Es evidente, que $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \dfrac{0}{0}$.

Al multiplicar numerador y denominador por el factor de racionalización

$$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1,$$

se obtiene :

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-y)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{x-y},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(1,1)} (\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1) = 3.$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}} = 3.$$

PROBLEMA 4.7

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{sen\,xy}{y}$.

SOLUCIÓN

Al hacer el reemplazo de x, y por los valores hacia los cuales tienden, se obtiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen\,xy}{x} = \frac{0}{0}.$$

Para eliminar la indeterminación se recurre al conocido límite indeterminado para funciones de una variable :

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen\, xy}{x} &= \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{y\,(sen\, xy)}{xy}, \\
&= \left[\lim_{(x,y)\to(0,2)} y\right]\left[\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen\, xy}{xy}\right], \\
&= 2(1) = 2.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{sen\, xy}{x} = 2.$$

PROBLEMA 4.8

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN

Por simple inspección $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{0}{0}$.

En este caso, no es posible eliminar la indeterminación por métodos algebraicos. Se recurre entonces al parágrafo, aparte 1), para lo cual se proponen dos "caminos" que tienden a $(0,0)$ como punto de acumulación, así :

Sea $S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, x = 0\right\}$.Figura 4.3.a.

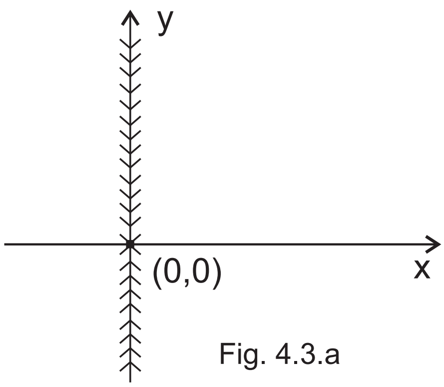

Fig. 4.3.a

En este conjunto, hay acercamientos al punto $(0,0)$, a través del eje $\boldsymbol{y}$. Por consiguiente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0(y)}{0^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0.$$

Sea $S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, y = x\right\}$.Figura 4.3.b.

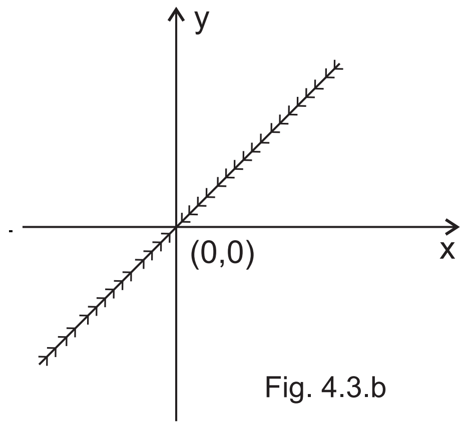

Fig. 4.3.b

De esta manera,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \quad \lim_{x\to 0} \frac{x(x)}{x^2+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}.$$

La función $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ tiene límites diferentes a través de diferentes "caminos" cuando $(x,y) \to (0,0)$. Por tanto, por el criterio antes mencionado, se puede afirmar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ no existe.}$$

PROBLEMA 4.9

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}$.

SOLUCIÓN

Igual que en el Problema 4.8, se puede ver que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{0}{0}$.

Se toman dos conjuntos de puntos diferentes que tienden a $(0,0)$ así :

$S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, y = 0\right\}$.Figura 4.4.a.

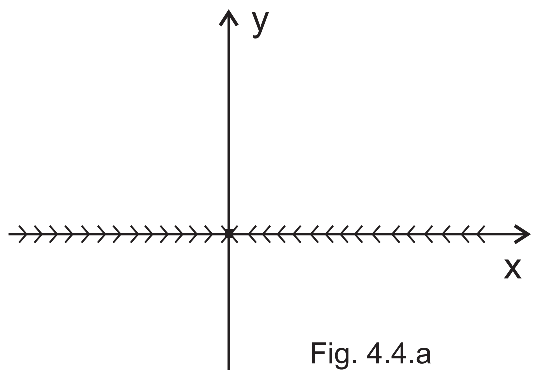

Fig. 4.4.a

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+0^2}{x+0} = \lim_{x\to 0} x = 0.$$

Sea $S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 /\, y = x^2\right\}$.Figura 4.4.b.

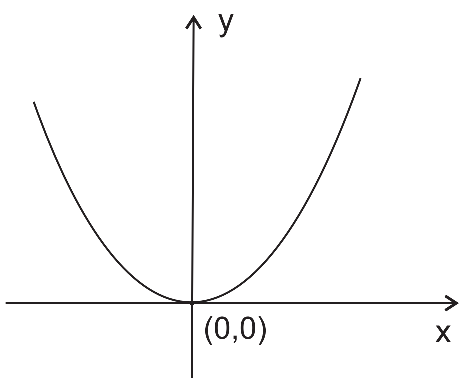

Fig. 4.4.b

A través de S_2 el límite se calcula así :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(x^2)^2}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+x^3)}{x(1+x)} = \frac{0}{1} = 0.$$

Se puede ver que el límite existe y vale cero, a través de dos caminos diferentes. Pero esto no significa que efectivamente el límite sea cero. Se debe demostrar formalmente este hecho.

Para ello, se recurre a una sustitución a coordenadas polares :

$x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$. Cuando $x \to 0$ y $y \to 0$ entonces, $r \to 0$.

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta}{r\cos\theta + r\,sen\,\theta},$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^2\theta + sen^2\theta)}{r(\cos\theta + sen\,\theta)},$$

$$= \frac{1}{\cos\theta + sen\,\theta} \lim_{r\to 0} r = \frac{1}{\cos\theta + sen\,\theta}(0) = 0.$$

En consecuencia,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = 0.$$

PROBLEMA 4.10

Calcular $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)}{x+y}$.

SOLUCIÓN

Por simple inspección se puede ver que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)}{x+y} = \frac{0}{0}.$$

Para eliminar esta indeterminación, se multiplica numerador y denominador por la expresión x^2+y^2 :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)(x^2+y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)},$$

$$= \left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)}\right].\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y}\right].$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)} = 1$ y $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = 0$, (Problema 4.9)

entonces,

$$.\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(x^2+y^2)}{x+y} = 1(0) = 0.$$

PROBLEMA 4.11

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+2xy-3y^2}.$

SOLUCIÓN

Fácilmente se puede ver que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+2xy-3y^2} = \frac{0}{0}.$

Al factorizar numerador y denominador y simplificar se tiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+2y)(x-y)}{(x+3y)(x-y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x+3y} = \frac{0}{0}.$$

Como la indeterminación subsiste, defínase dos conjuntos de puntos que tienden a $(0,0)$:

$S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = 0\right\}$.Figura 4.5.a.

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x+3y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2(0)}{x+3(0)} = \lim_{y\to 0} 1 = 1.$$

$S_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x.\right.$ Figura 4.5.b.

Entonces,

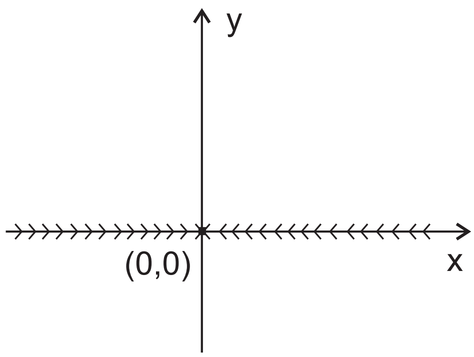

Fig. 4.5.a

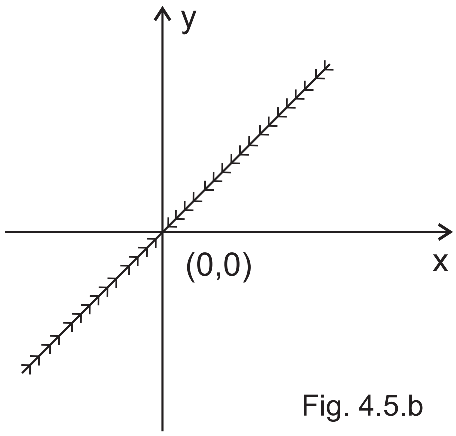

Fig. 4.5.b

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x+3y} = \lim_{x\to 0} \frac{x+2x}{x+3x} = \lim_{y\to 0} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Puesto que la función $f(x,y) = \dfrac{x^2+xy-2y^2}{x^2+2xy-3y^2}$ tiene límites diferentes por diferentes "caminos" que tienden a $(0,0)$ como punto de acumulación, entonces se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy-2y^2}{x^2+2xy-3y^2} \text{ no existe.}$$

PROBLEMA 4.12

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN

Al reemplazar respectivamente x, y por los valores hacia los cuales tieden se, se constata que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} = \frac{0}{0}.$$

Para calcular el límite por medio de acercamientos, defínase dos conjuntos de puntos que tienden a $(0,0)$:

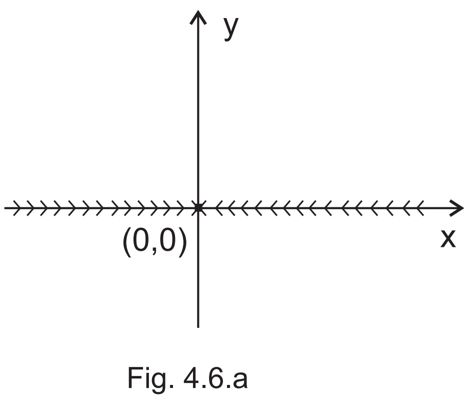

Fig. 4.6.a

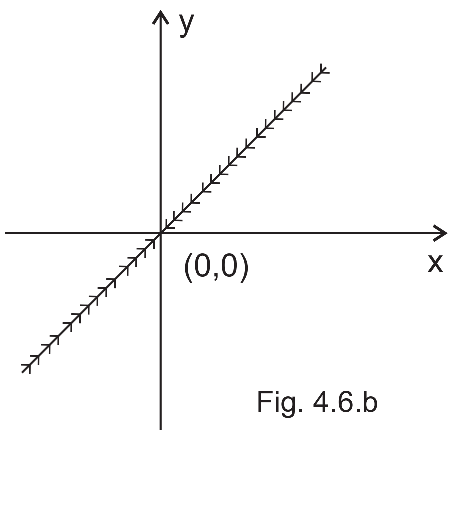

Fig. 4.6.b

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = 0\}$.Figura 4.6.a.

El límite a través de S_1 se calcula así :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x(0)}-1}{x^2+0^2} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Sea $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x\}$. Figura 4.6.b.

Entonces, a través de S_2 el limite se calcula como

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x(x)}-1}{x^2+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}.$$

Se hace notar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{x^2} = 1,$ pues se basa en el conocido límite para funciones de una variable que establece :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-1}{x} = 1.$$

Como los límites de la función $f(x,y) = \dfrac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$ a través de S_1 y S_2 son diferentes, entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2} \text{ no existe.}$$

PROBLEMA 4.13

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)}.$

SOLUCIÓN

Método1) Fácilmente se puede establecer, inicialmente, que :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)} = \frac{0}{0}.$$

Al multiplicar numerador y denominador por el factor x^2+y^2 se tiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(e^{x^2+y^2}-1)(x^2+y^2)}{sen(x^2+y^2)(x^2+y^2)},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ \left[\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right] \left[\frac{x^2+y^2}{sen(x^2+y^2)}\right] \right\},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right] \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2+y^2}{sen(x^2+y^2)}\right].$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)} = \frac{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}}{\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen(x^2+y^2)}{x^2+y^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Método 2) El cambio a coordenadas polares conduce a :

$x = rcos\,\theta,\ y = rsen\,\theta;$ cuando $x \to 0$ y $y \to 0$ entonces, $r \to 0.$

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{(rcos\theta)^2+(rsen\,\theta)^2}-1}{sen\left[(rcos\,\theta)^2+(rsen\,\theta)^2\right]},$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}-1}{sen\,r^2}.$$

Al aplicar Regla de L'Hopital se llega a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)} = \lim_{r\to 0} \frac{2re^{r^2}}{2rcos\,r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{e^{r^2}}{cos\,r^2} = \frac{1}{1} = 1.$$

En consecuencia,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{sen(x^2+y^2)} = 1.$$

PROBLEMA 4.14

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos\sqrt{xy}-1}{y}.$

SOLUCIÓN

A simple vista se pude establecer que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos\sqrt{xy}-1}{y} = \frac{0}{0}.$

Al multiplicar numerador y denominador por $cos\sqrt{xy}+1$ se tiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{cos\sqrt{xy}-1}{y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(cos\sqrt{xy}-1)(cos\sqrt{xy}+1)}{y(cos\sqrt{xy}+1)},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x(cos^2\sqrt{xy}-1)}{xy(cos\sqrt{xy}+1)},$$

$$= -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xsen^2\sqrt{xy}}{xy(cos\sqrt{xy}+1)},$$

$$= -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,sen^2\sqrt{xy}}{(\sqrt{xy})^2(cos\sqrt{xy}+1)},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\sqrt{xy}-1}{y} = -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ \left[\frac{sen^2\sqrt{xy}}{(\sqrt{xy})^2}\right]\left[\frac{x}{(\cos\sqrt{xy}+1)}\right]\right\},$$

$$= -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{sen\sqrt{xy}}{\sqrt{xy}}\right]^2 . \left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{(\cos\sqrt{xy}+1)}\right],$$

$$= (-1).(0) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\cos\sqrt{xy}-1}{y} = 0.$$

PROBLEMA 4.15

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\,sen\,y^3}{x^4+y^4}$.

SOLUCIÓN

Por simple inspección se pude ver que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\,sen\,y^3}{x^4+y^4} = \dfrac{0}{0}$.

Al multiplicar numerador y denominador por y^3 se obtiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,sen\,y^3}{x^4+y^4} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy.\,y^3\,sen\,y^3}{(x^4+y^4).\,y^3},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{\left[\frac{x\,y^4}{(x^4+y^4)}\right]\left[\frac{sen\,y^3}{y^3}\right]\right\},$$

$$= \left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^4}{x^4+y^4}\right]\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{sen\,y^3}{y^3}\right]\right] \quad (A)$$

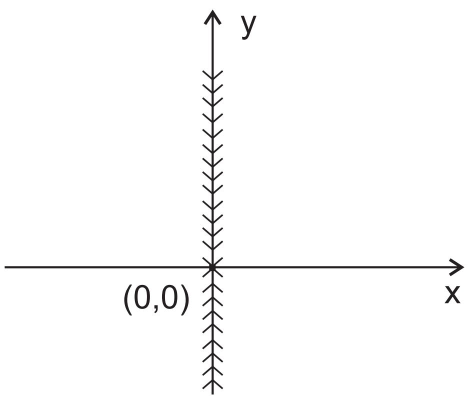

Fig. 4.7.a

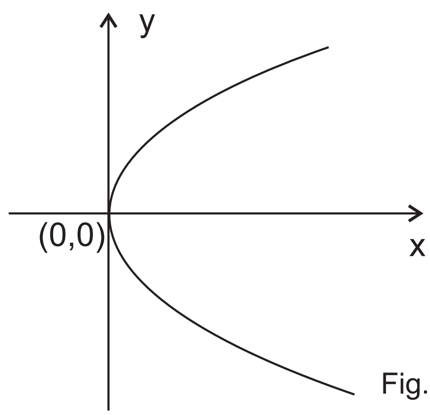

Fig. 4.7.b

Para calcular el primer límite, se definen dos conjuntos de puntos que tienden a $(0,0)$ como punto de acumulación, así :

Sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x = 0\}$.Figura 4.7.a. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^4}{x^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{(0)\,y^4}{0^4+y^4)} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0.$$

Sea $S_2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\, x = y^2\right\}$.Figura 4.7.b.

El límite de la función $f(x,y) = \dfrac{x\,y^4}{x^4+y^4}$ se calcula de esta manera :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^4}{x^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2\,y^4}{(y^2)^4+y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^8+y^4},$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{y^4(y^4+1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^4+1} = 0.$$

Aunque el valor del límite por diferentes caminos es uno, se debe probar formalmente, que existe y vale uno. Para ello se emplea la técnica de acotamiento :

$$0 \le \left|\frac{x\,y^4}{x^4+y^4}\right| \le \frac{|x|\,y^4}{x^4+y^4} \le \frac{|x|\,y^4}{y^4} = |x|.$$

Por tanto,

$$0 \le \left|\frac{x\,y^4}{x^4+y^4}\right| \le |x|.$$

Puesto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} x = 0,$$

entonces por el Teorema del emparedado se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,y^4}{x^4+y^4} = 0.$$

Por otra parte,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{sen\,y^3}{y^3}\right] = 1.$$

Al reemplazar estos valores en la expresión (A), finalmente se obtiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\,sen\,y^3}{x^4+y^4} = (0).(1) = 0.$$

PROBLEMA 4.16

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x+y^2}$.

SOLUCIÓN

Por simple inspección $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x+y^2} = \frac{0}{0}$.

Se va a calcular el límite por medio de acercamientos a $(0,0)$.

Sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x\}$. Figura 4.8.a.

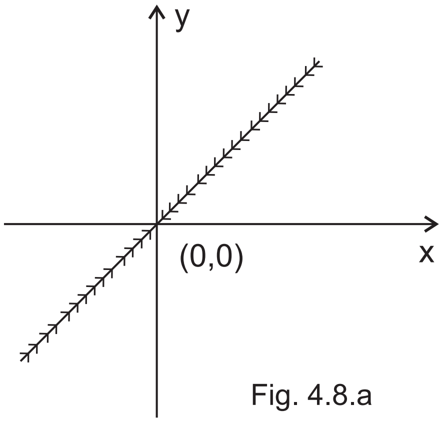

Fig. 4.8.a

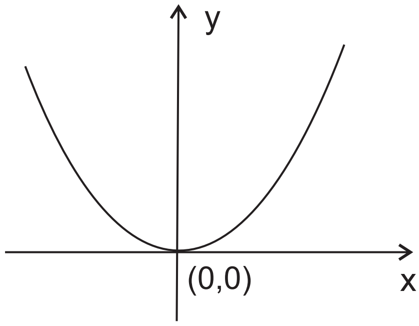

Fig. 4.8.b

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{xx^2}{x+x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x(1+x)},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1+x} = \frac{0}{1} = 0.$$

Sea $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = x^2\}$. Figura 4.8.b. De esta manera,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2)^2}{x+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x+x^4},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5}{x(1+x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{1+x^3} = 0.$$

No obstante que el límite de la función $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x+y^2}$ por diferentes caminos vale cero, es necesario probar formalmente este hecho. Se utiliza para ello la técnica del acotamiento y posteriomente el Teorema del emparedado :

$$0 \leq \left| \frac{x\,y^2}{x+y^2} \right| \leq \frac{|xy^2|}{x} = \frac{x|y^2|}{x} = y^2.$$

Es decir,

$$0 \leq \left| \frac{x\,y^2}{x+y^2} \right| \leq y^2.$$

Puesto que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^2 = 0,$$

entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x+y^2} = 0.$$

PROBLEMA 4.17

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2}$.

SOLUCIÓN

Fácilmente se pude ver que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2} = \dfrac{0}{0}$.

Se definen dos conjuntos de puntos que tienden a $(0,1)$:

Sea $S_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \, y = x+1\}$. Figura 4.9.a.

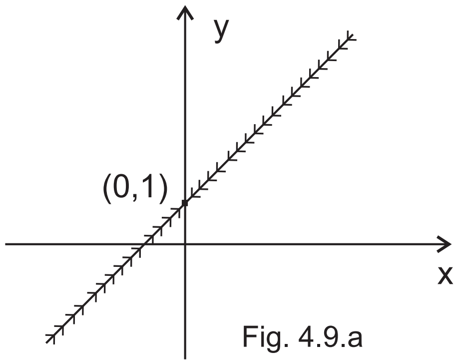

Fig. 4.9.a

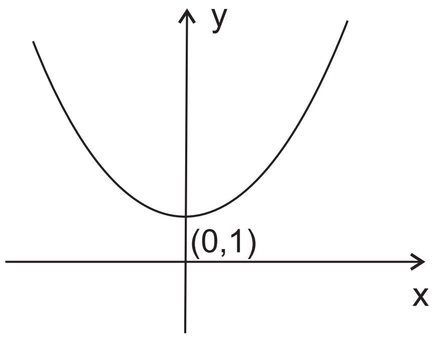

Fig. 4.9.b

El límite a través de S_1 se calcula así :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen\big[x(x+1)\big]}{x^2+x^2},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen\big[x(x+1)\big]}{2x^2},$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0} sen\big[x(x+1)\big] = \frac{1}{2}(0) = 0.$$

Sea $S_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \, y = x^2+1\}$. Figura 4.9.b. Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4 sen\big[x(x^2+1)\big]}{x^2+x^4},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 sen\big[x(x^2+1)\big]}{x^2(1+x^2)},$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 sen\big[x(x^2+1)\big]}{1+x^2} = \frac{0}{1} = 0.$$

Aunque el valor del límite de la función $f(x,y) = \dfrac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2}$ por dos caminos diferentes cuando $(x,y)\to(0,0)$, vale cero, se debe probar formalmente que existe y vale cero.

Al multiplicar numerador y denominador por por xy se llega a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{ \left[\frac{xy(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \right] \left[\frac{sen\, xy}{xy} \right] \right\},$$

$$= \underset{(A)}{\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \right]} \underset{(B)}{\left[\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\, xy}{xy} \right]}.$$

Para calcular el límite (A) se recurre al acotamiento :

$$0 \leq \left| \frac{xy\,(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \right| \leq \frac{|x||y|(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \leq \frac{|x||y|(y-1)^2}{(y-1)^2} = |x||y|.$$

Por tanto,

$$0 \leq \left| \frac{xy\,(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2} \right| \leq |x||y|.$$

Puesto que,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0; \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x||y| = 0,$$

entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2} = 0.$$

En cuanto al límite (B),

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\, xy}{xy} = 1.$$

Finalmente,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y-1)^2 sen\, xy}{x^2+(y-1)^2} = (0).(1) = 0.$$

PROBLEMA 4.18

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\, arctg\, \dfrac{y}{x}.$

SOLUCIÓN

En este caso $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\, arctg\, \dfrac{y}{x} = 0\, arctg\, \dfrac{0}{0}.$

Se recurre a la técnica de acotamiento :

Puesto que $\left| arctg\, \dfrac{y}{x} \right| \leq \dfrac{\pi}{2}$, entonces, por propiedad del valor absoluto, se puede escribir :

$$-\frac{\pi}{2} \leq arctg\, \frac{y}{x} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Al multiplicar los tres términos de esta cadena de desigualdades por el factor xy se presentan las siguientes situaciones :

$1)$ Si $x>0$ y $y>0$ o si $x<0$ y $y<0,$ entonces :

$$-\frac{\pi}{2}xy \le xy\,arctg\,\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{2}xy \qquad .$$

Como $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} -\frac{\pi}{2}xy = 0$ y $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \frac{\pi}{2}xy = 0,$ entonces por el Teorema del emparedado se concluye que

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \; xy\,arctg\,\frac{y}{x} = 0.$$

$2)$ Si $x<0$ y $y>0$ o $x>0$ y $y<0,$ se tiene :

$$\frac{\pi}{2}xy \ge xy\,arctg\,\frac{y}{x} \ge -\frac{\pi}{2}xy\,,$$

es decir,

$$-\frac{\pi}{2}xy \le xy\,arctg\,\frac{y}{x} \le \frac{\pi}{2}xy.$$

Puesto que $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} -\frac{\pi}{2}xy = 0$ y $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \frac{\pi}{2}xy = 0,$ entonces por el Teorema del emparedado se llega a :

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \; xy\,arctg\,\frac{y}{x} = 0.$$

PROBLEMA 4.19

Calcular $\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2y^2}}$.

SOLUCIÓN

Por simple inspección se puede ver que se origina una indeterminación :

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 1^{-\infty}.$$

Ahora bien, para funciones de una variable se sabe que $\underset{x\to 0}{lim} (1+x)^{-\frac{1}{x}} =$ e.

Con base en este último criterio, se obtiene :

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \left[(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2y^2}}\right]^{-\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}}$$

$$\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = \boldsymbol{e}^{\,-\underset{(x,y)\to(0,0)}{lim} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}} \qquad (A)$$

Enseguida se calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$. Para ello se recurre a un cambio a coordenadas polares :

$$x = r\cos\theta,\ y = r\,sen\,\theta;$$

cuando $x \to 0$ y $y \to 0$ entonces, $r \to 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} &= \lim_{r\to 0} \frac{(r^2\cos^2\theta)(r^2 sen^2\theta)}{r^2\cos^2\theta + r^2 sen^2\theta},\\ &= \lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\, sen^2\theta}{r^2},\\ &= (\cos^2\theta\, sen^2\theta)\lim_{r\to 0} r^2 = (\cos^2\theta\, sen^2\theta)(0) = 0.\end{aligned}$$

Al sustituir este último resultado en (A), se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = e^{-0} = 1.$$

PROBLEMA 4.20

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen\,xy}{sen\,x\,sen\,y}$.

SOLUCIÓN

A simple vista se ve que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen\,xy}{sen\,x\,sen\,y} = \dfrac{0}{0}$.

Para eliminar la indeterminación se multiplica numerador y denominador por el factor xy, para obtener :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,xy}{sen\,x\,sen\,y} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy.sen\,xy}{xy.sen\,x\,sen\,y},\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{\left[\frac{sen\,xy}{xy}\right]\left[\frac{x}{sen\,x}\right]\left[\frac{y}{sen\,y}\right]\right\},\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{\left[\frac{sen\,xy}{xy}\right]\left[\frac{1}{\frac{sen\,x}{x}}\right]\left[\frac{1}{\frac{sen\,y}{y}}\right]\right\},\\ &= 1.1.1 = 1.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,xy}{sen\,x\,sen\,y} = 1.$$

PROBLEMA 4.21

Calcular $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4}{x^2-2xy+2y^2}$.

SOLUCIÓN

Evidentemente, $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \dfrac{y^4}{x^2-2xy+2y^2}=\dfrac{0}{0}.$

Para eliminar la indeterminación, se expresa el denominador de la función dada de la siguiente manera :

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{y^4}{x^2-2xy+2y^2} = \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{y^4}{(x^2-2xy+y^2)+y^2},$$

$$= \lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{y^4}{(x-y)^2+y^2}.$$

Enseguida se procede a utilizar la técnica del acotamiento :

$$0 \le \left|\frac{y^4}{(x-y)^2+y^2}\right| = \frac{y^4}{(x-y)^2+y^2} \le \frac{y^4}{y^2} = y^2.$$

Por tanto,

$$0 \le \frac{y^4}{(x-y)^2+y^2} \le y^2.$$

Al calcular el límite cuando $(x,\,y)\to(0,\,0)$ en los extremos de la anterior desigualdad, se tiene que $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} 0 = 0$ y $\lim\limits_{(x,\,y)\to(0,0)} y^2 = 0.$

Entonces por el Teorema del emparedado se concluye que

$$\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{y^4}{x^2-2xy+2y^2} = 0.$$

PROBLEMA 4.22

Calcular $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,3)} \dfrac{(x-2)(y-3)}{(x-2)^2+(y-3)^2}$

SOLUCIÓN

Fácilmente se puede ver que $\lim\limits_{(x,\,y)\to(2,3)} \dfrac{(x-2)(y-3)}{(x-2)^2+(y-3)^2} = \dfrac{0}{0}.$

Para este problema conviene un cambio de variables :

$u = x-2;$ si $x\to 2,$ entonces $u \to 0;$

$v = y-3;$ si $y \to 2,$ entonces $v\to 0.$

Por tanto,

$$\lim_{(x,\,y)\to(2,3)} \frac{(x-2)(y-3)}{(x-2)^2+(y-3)^2} = \lim_{(u,\,v)\to(0,0)} \frac{uv}{u^2+v^2}.$$

Este último límite no existe, en correspondencia con el Problema $4.7.$

Por tanto se puede concluir que :

$$\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{(x-2)(y-3)}{(x-2)^2+(y-3)^2} \text{ no existe.}$$

PROBLEMA 4.23

Calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

SOLUCIÓN

En este caso se presenta una indeterminación $\frac{0}{0}$; esto es :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2} = \frac{0}{0}.$$

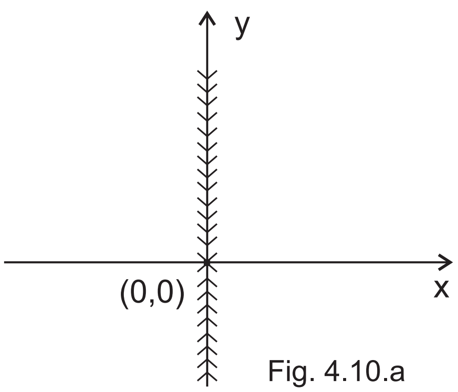

Fig. 4.10.a

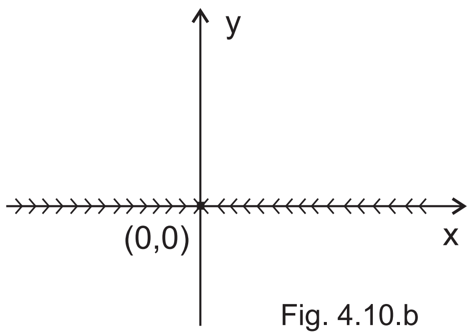

Fig. 4.10.b

El cálculo del límite se hace por medio de acercamientos, para lo cual, se definen dos conjunto de puntos que tienden a $(0,0)$ como punto de acumulación :

Sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x = 0\}$. Figura 4.10.a.

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{sen\,(2(0)^2+y^2)}{(0)^2-y^2},$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{sen\,y^2}{-y^2} = -1.$$

Sea $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = 0\}$. Figura 4.10.b.

De esta manera,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,(2x^2+0^2)}{x^2-0^2},$$
$$= \lim_{y\to 0} \frac{sen\,2x^2}{x^2},$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2} = 2\lim_{y\to 0} \frac{sen\,2x^2}{2x^2} = 2(1) = 2.$$

Puesto que la función $f(x,y) = \dfrac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2}$ tiene límites diferentes a través de dos conjuntos de puntos que tienden a $(0,0)$, entonces se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(2x^2+y^2)}{x^2-y^2} \text{ no existe.}$$

PROBLEMA 4.24

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$

Estudiar la continuidad de la función en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

Al aplicar el Parágrafo 4.6, se obtiene :

$1)\ f(0,0) = 0.$

$2)\ \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0.$

Puesto que $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = f(0,0) = 0,$ entonces se concluye que la

función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$ es continua en $(0,0)$.

PROBLEMA 4.25

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Estudiar la continuidad de la función en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

$1)\ f(0,0) = 0.$ Luego $f(0,0)$ existe y vale cero.

$2)$ Para calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$ se definen dos conjuntos de puntos que tienden a $(0,0)$:

Sea $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, x = 0\}$. Figura 4.11.a.

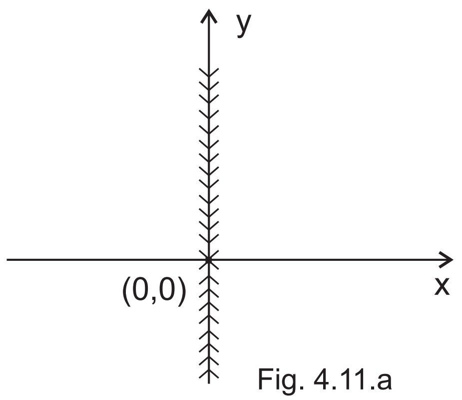

Fig. 4.11.a

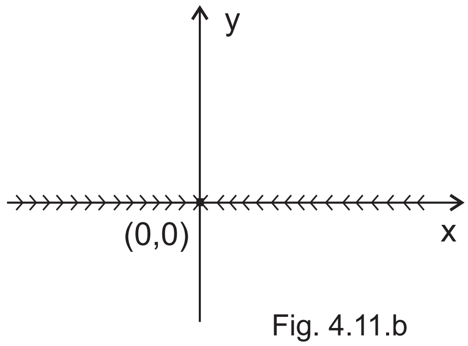

Fig. 4.11.b

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0^2-y^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1.$$

Sea $S_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, y = 0\right\}$. Figura 4.11.b.

El límite se calcula como,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0^2}{x^2+0} = \lim_{y\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Puesto que los límites son diferentes a través de diferentes caminos que tienden a $(0,0)$, entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ no existe.}$$

En conclusión la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$ presenta una

<u>discontinuidad esencial</u> en el punto $(0,0)$, dado que el límite no existe.

PROBLEMA 4.26

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Estudiar la continuidad de la función en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

$1)$ $f(0,0) = 0$. Luego $f(0,0)$ existe.

$2)$ Para calcular $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}$ se efectúa un cambio a coordenadas polares :

$x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\,\theta$; cuando $x \to 0$ y $y \to 0$ entonces, $r \to 0$. Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r^3cos^3\theta)(r^3sen^3\theta)}{r^2cos^2\theta + r^2sen^2\theta},$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^6cos^3\theta\, sen^3\theta}{r^2},$$

$$= (cos^3\theta\, sen^3\theta) \lim_{r\to 0} r^4 = (cos^3\theta\, sen^3\theta)\,(0) = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = 0.$$

3) Puesto que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = f(0,0) = 0$, se concluye que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$ es continua en $(0,0)$.

PROBLEMA 4.27

Sea $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x+y}$

Estudiar la continuidad de la función en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

1) $f(0,0)$ no existe.

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)(x-y)}{x+y},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y) = 0.$$

Como $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y}$ existe y vale cero, entonces en este caso se presenta una discontinuidad evitable en $(0,\ 0)$. Esto permite redefinir la función y convertirla en continua de la siguiente manera:

$$F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

La función $F(x,y)$ es continua en $(0,0)$. En efecto,

1) $F(0,0) = 0.$ Luego $F(0,0)$ existe.

2) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x+y} = 0.$$

Puesto que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x+y} = F(0,0) = 0$, entonces la función $F(x,y)$ es continua en $(0,0)$.

PROBLEMA 4.28

Considerar la función $f(x,y) = \begin{cases} x^2\, sen\left[\dfrac{1}{x+y}\right] & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \boldsymbol{k} & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Determinar el valor de $\boldsymbol{k}$ para que la función $f(x,y)$ sea continua en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

$1)\ f(0,0) = \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}$ por determinar.

$2)$ El límite de la función $f(x,y)$ cuando $(x,\, y) \to (0,\, 0)$ se calcula por medio de la técnica de acotamiento :

$$0 \leq \left| x^2\, sen\left[\frac{1}{x+y}\right] \right| = x^2 \left| sen\left[\frac{1}{x+y}\right] \right| \leq x^2.$$

Entonces,

$$0 \leq \left| x^2\, sen\left[\frac{1}{x+y}\right] \right. \leq x^2.$$

Esto es cierto por cuanto la función seno es acotada y su valor está en el intervalo $\left[-1,\, 1\right]$.

Al tomar límites en los extremos de la anterior desigualdad se tiene :

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0;\quad \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$, entonces por Teorema del emparedado se concluye que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\, sen\left[\frac{1}{x+y}\right] = 0.$$

Luego, para que la función dada sea continua se requiere que $\boldsymbol{k} = 0$, y, de esta manera la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\, sen\left[\dfrac{1}{x+y}\right] & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

PROBLEMA 4.29

Considerar la función $f(x,y)$ y estudiar la continuidad en $(0,0)$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6} & \text{si } (x,y)\neq(-1,1)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(-1,1).\end{cases}$$

SOLUCIÓN

$1)$ $f(0,0)=0.$ Luego $f(0,0)$ existe.

$2)$ Se calcula el límite de $f(x,y)$ por medio de acercamientos :

Sea $S_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,x=-1\}$. Figura 4.12.a.

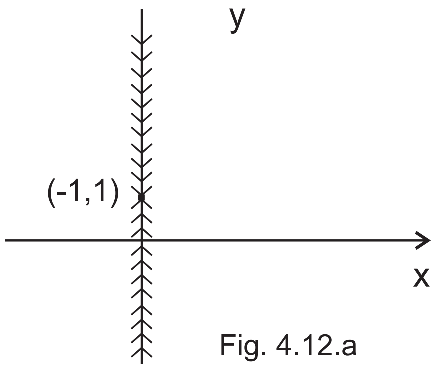

Fig. 4.12.a

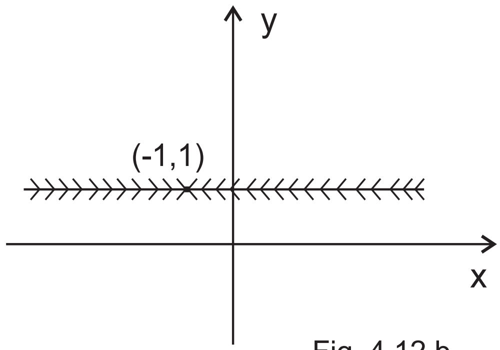

Fig. 4.12.b

Entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6}=\lim_{y\to1}\frac{(-1+1)^2(y-1)^2}{(-1+1)^4+(y-1)^6},$$
$$=\lim_{y\to1}\frac{0}{(y-1)^4}=0.$$

Sea $S_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,y=1\}$. Figura 4.12.b.
A través de S_2 el límite se calcula así :

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(1-1)^2}{(x+1)^4+(1-1)^6},$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{0}{(x+1)^4}=0.$$

Sea $S_3=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/\,y=-x\}$. Figura 4.12.c.

De esta manera,

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)}\frac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^2(-x-1)^2}{(x+1)^4+(-x-1)^6},$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)^4}{(x+1)^4+(x+1)^6},$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{1}{1+(x+1)^2}=1.$$

Como los límites de la función $\dfrac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6}$ son diferentes a través d

conjuntos de puntos para los cuales $(x,\ y) \to (-1,1)$, entonces,

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6} \text{ no existe.}$$

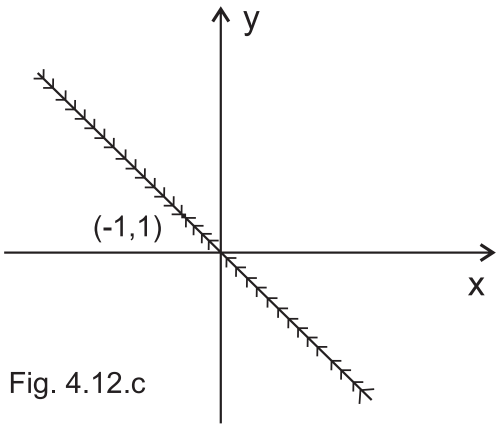

Fig. 4.12.c

Finalmente se concluye que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2(y-1)^2}{(x+1)^4+(y-1)^6} & \text{si } (x,y) \neq (-1,1) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (-1,1). \end{cases}$$

presenta una discontinuidad esencial en $(-1,1)$.

PROBLEMA 4.30

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\, sen\, x}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Estudiar la continuidad de $f(x,y)$ en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

1) $f(0,0) = 0$. Luego $f(0,0)$ existe.

2) Para calcular el límite se procede así :

De entrada se puede ver que se produce una indeterminación :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\, sen\, x}{|x|+|y|} = \frac{0}{0}.$$

Para eliminar esta indeterminación se procede de la siguiente manera :

Al multiplicar numerador y denominador de la fracción por x se obtiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,sen\,x}{|x|+|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\,sen\,x}{(|x|+|y|)\,x},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{\left[\frac{sen\,x}{x}\right]\left[\frac{x^2}{|x|+|y|}\right]\right\},$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{sen\,x}{x}\right]. \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2}{|x|+|y|}\right],$$

$$= 1. \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{x^2}{|x|+|y|}\right] \qquad (A)$$

El límite que aparece en (A) se calcula por medio de acotamiento :

$$0 \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| = \frac{x^2}{|x|+|y|} \le \frac{|x|^2}{|x|+|y|} \le \frac{|x|^2}{|x|} = |x|.$$

Por tanto,

$$0 \le \left|\frac{x^2}{|x|+|y|}\right| \le |x|.$$

Al tomar límites en los extremos de la desigualdad se obtiene :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0; \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0,$$

entonces por Teorema del emparedado,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{|x|+|y|} = 0.$$

Al reemplazar este último valor en (A) :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,sen\,x}{|x|+|y|} = (1).(0) = 0.$$

Puesto $f(0,0)=0$ y $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\,sen\,x}{|x|+|y|} = (1).(0) = 0,$ se concluye que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,sen\,x}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$ es continua en $(0,0)$.

PROBLEMA 4.31

Sea $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{tg(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 3 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$

Estudiar la continuidad de la función en $(0,0)$.

SOLUCIÓN

$1)$ $f(0,0)=3.$ Luego $f(0,0)$ existe.

$2)$ Para calcular el límite de la función se procede así :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2}=\frac{0}{0}.$$

La indeterminación se puede eliminar de la siguiente manera :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3tg(3x^2+3y^2)}{3(x^2+y^2)},\\
&= 3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(3x^2+3y^2)}{3x^2+3y^2},\\
&= 3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{sen\,(3x^2+3y^2)}{(3x^2+3y^2)\,cos\,(3x^2+3y^2)},\\
&= 3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left\{\left[\frac{sen\,(3x^2+3y^2)}{(3x^2+3y^2)}\right]\left[\frac{1}{cos\,(3x^2+3y^2}\right]\right\},\\
&= 3\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left[\frac{sen\,(3x^2+3y^2)}{(3x^2+3y^2)}\right]\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left[\frac{1}{cos\,(3x^2+3y^2}\right],\\
&= 3.1.1=3.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2}=3.$$

Como $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2}=f(0,0)=3,$ entonces se concluye que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{tg(3x^2+3y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 3 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

es continua en $(0,0)$.

5. OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES MULTIVARIABLES

Optimizar una función de una o varias variables es un proceso mediante el cual se determinan los valores de las variables, para los cuales la función dada toma un valor máximo o mínimo. Con frecuencia, a la función que se pretende optimizar se la suele llamar FUNCIÓN OBJETIVO.

5.1 FUNCIÓN BIVARIABLE

Se escribe $Z = F(x, y)$ para indicar que Z es una función que depende tanto de x como de y. En estas condiciones, x y y son las variables independientes y Z es la variable dependiente o función.

5.2 MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES BIVARIABLES

Para optimizar una función bivariable $Z = F(x, y)$, se procede de la siguiente manera:

1) Determinar las primeras derivadas de f respecto de x y y : F_x, F_y.

2) Igualar a cero cada derivada y resolver para x y y el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0\,. \end{cases}$$

De la solución de este sistema, se obtienen puntos críticos (estacionarios) de la forma (x^*, y^*).

3) Calcular las segundas derivadas de F respecto de x y y :

$$F_{xx}\,; \quad F_{yy}; \quad F_{xy}.$$

4) Determinar las **Matrices Hessianas:**

$$H_1 = (F_{xx}); \quad H_2 = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}.$$

5) Evaluar cada matriz hessiana en cada punto crítico (x^*, y^*) y obtener su determinante (simplemente hessianas) : $|H_1^*|$ y $|H_2^*|$.

6) Decisión:

- Si $|H_2^*| > 0$ y $\begin{cases} |H_1^*| > 0, \text{ entonces } (x^*, y^*) \text{ define MÍNIMO RELATIVO.} \\ |H_1^*| < 0, \text{ entonces } (x^*, y^*) \text{ define MÁXIMO RELATIVO.} \end{cases}$

- Si $|H_2^*| < 0$, entonces (x^*, y^*) define un PUNTO DE SILLA.

• Si $\left|H_2^*\right| = 0$, entonces no se concluye nada acerca de la naturaleza del punto crítico.

5.3 FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Se escribe $W = F(x, y, z)$ para indicar que Z es una función que depende de x, y y z. En estas condiciones, x, y, z son las variables independientes y W es la variable dependiente o función.

5.4 MÁXIMOS Y MÍNIMOS PARA FUNCIONES DE TRES VARIABLES

Para optimizar funciones de la forma $W = F(x, y, z)$, se procede de manera análoga como para funciones bivariables:

1) Calcular las primeras derivadas de la función objetivo; esto es F_x, F_y, F_z.

2) Resolver el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0\,. \end{cases}$$

Al resolver este sistema, se obtienen puntos críticos de la forma (x^*, y^*, z^*).

3) Hallar las segundas derivadas parciales de la función objetivo : $F_{xx}, F_{yy}, F_{zz}, F_{xy}, F_{xz}$ y F_{yz}.

4) Definir las matrices hessianas H_1, H_2 y H_3, así :

$$H_1 = (F_{xx}); \qquad H_2 = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{pmatrix}; \qquad H_3 = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix}.$$

5) Evaluar cada matriz hessiana en cada punto crítico y calcular sus respectivos determinantes o hessianas : $\left|H_1^*\right|$, $\left|H_2^*\right|$ y $\left|H_3^*\right|$.

6) Decisión :

• Si $\left|H_1^*\right| > 0$, $\left|H_2^*\right| > 0$ y $\left|H_3^*\right| > 0$, entonces (x^*, y^*, z^*) define un MÍNIMO RELATIVO.

• Si $\left|H_1^*\right| < 0$, $\left|H_2^*\right| > 0$ y $\left|H_3^*\right| < 0$, entonces (x^*, y^*, z^*) define un MÁXIMO RELATIVO.

5.5. OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA

5.5.1 El problema general de optimización

La Programación Matemática es el conjunto de procedimientos y técnicas empleados para encontrar la solución óptima de un problema específico.

El problema general de optimización se puede definir como el siguiente problema matemático :

Hallar los valores de las variables $x_1, x_2, ..., x_n$ que optimicen (maximicen o minimicen) una función $F = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ y que, simultáneamente satisfagan un conjunto de restricciones establecidas mediante igualdades y desigualdades. Conviene aclarar que estas restricciones también son funciones de $x_1, x_2, ...x_n$. Con símbolos, se puede escribir :

Optimizar $Z = F(x_1, x_2, .., x_n)$

sujeta a $G_1(x_1, x_2, ..., x_n)$

$G_2(x_1, x_2, ..., x_n)$

....

$G_n(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Ahora bien, mediante los procedimientos basados en el Cálculo diferencial, se pueden hallar los máximos o mínimos de una función sujeta a restricciones, hecho que comunmente se conoce como OPTIMIZACIÓN RESTRINGIDA u OPTIMIZACIÓN FORZADA.

El método clásico usado para la solución de este tipo de problemas es el método de los MULTIPLICADORES DE LAGRANGE, que se explica en las siguientes líneas.

5.5.2 Función bivariable y una restricción bivariable

Considérese el problema de optimización restringida :

Optimizar $Z = F(x, y)$

sujeta a $G(x, y) = k$.

Desde luego que $F(x, y)$ es la función objetivo y $G(x, y) = k$ es una restricción de igualdad. Se deben dar secuencialmente los siguientes pasos :

- Determinar la Función de Lagrange o más brevemente lagrangiana :

$$L(x, y, \lambda) = F(x, y) + \lambda\big[\, G((x, y) - k\big];$$

λ se denomina Multiplicador de Lagrange.

- Calcular las primeras derivadas parciales de la lagrangiana : L_x, L_y y L_λ.

- Resolver el sistema $\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_\lambda = 0. \end{cases}$

Al resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones algebraicas, se obtienen valores (x^*, y^*, λ^*), llamados puntos críticos o estacionarios para la lagrangiana.

- El valor óptimo de la función objetivo es $L(x^*, y^*, \lambda^*) = F(x^*, y^*)$.

• Para decidir si $L(x_1, x_2, \lambda)$ es máximo o mínimo se determina la Matriz Hessiana Acotada H_B, definida como:

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & G_x & G_y \\ G_x & L_{xx} & L_{xy} \\ G_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}.$$

• Evaluar H_B en cada punto crítico y obtener H_B^*.

• Decisión:

Si $|H_B^*| > 0$, entonces (x^*, y^*, λ^*) determina un MÁXIMO RELATIVO.

Si $|H_B^*| < 0$, entonces (x^*, y^*, λ^*) determina un MÍNIMO RELATIVO.

5.5.3. Función de tres variables y una restricción en tres variables

Para optimizar funciones de tres variables de la forma $W = F(x, y, z)$ sujeta a la restricción $G(x, y, z) = k$, también se utiliza el método de los multiplicadores de Lagrange, así:

1) Determinar la función de Lagrange o lagrangiana :

$$L(x, y, z, \lambda) = F(x, y, z) + \lambda\left[G(x, y, z) - k\right],$$

donde λ es el multiplicador de Lagrange.

2) Calcular las primeras derivadas de L con respecto a x, y, z y λ; esto es,

L_x, L_y, L_z y L_λ.

3) Resolver simultáneamente el sistema de ecuaciones resultante de igualar cada una de las primeras derivadas parciales de la función de Lagrange L; es decir, obtener los valores de x, y, z y λ, para los cuales se satisface el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0\,. \end{cases}$$

De este sistema se obtienen puntos críticos $(x^*, y^*, z^*, \lambda^*)$.

4) Calcular las segundas derivadas parciales L_{xx}, L_{yy}, L_{zz}, L_{xy}, L_{xz}, L_{yz} y las primeras parciales de G : G_x, G_y y G_z.

5) Determinar las Matrices Hessianas Acotadas denotadas H_4 y H_3 y definidas como :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & G_x & G_y & G_z \\ G_x & L_{xx} & L_{xy} & L_{xz} \\ G_y & L_{yx} & L_{yy} & L_{yz} \\ G_z & L_{zx} & L_{zy} & L_{zz} \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & G_x & G_y \\ G_x & L_{xx} & L_{xy} \\ G_y & L_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix}.$$

6) Calcular las Matrices Acotadas en cada punto crítico; esto es,

$$H_4^* = H_4(x^*,\ y^*, z^*, \lambda^*) \quad \text{y}$$

$$H_3^* = H_3(x^*,\ y^*, z^*, \lambda^*)\,.$$

7) Decisión:

- Si $|H_4^*| < 0$ y $|H_3^*| < 0$, entonces $(x^*,\ y^*, z^*, \lambda^*)$ define un MÍNIMO RELATIVO.
  Además, $F_{min} = F(\ x^*,\ y^*, z^*)$ en el punto $(\ x^*,\ y^*, z^*\ )$.
- Si $|H_4^*| < 0$ y $|H_3^*| > 0$, entonces $(x^*,\ y^*, z^*, \lambda^*)$ define un MÁXIMO RELATIVO.
  Además, $F_{max} = F(\ x^*,\ y^*, z^*\ )$ en el punto $(\ x^*,\ y^*, z^*\ )$.

PROBLEMA 5.1

Optimizar la función bivarible :

$$Z = x^3 + y^3 + 6xy.$$

SOLUCIÓN

1) Las primeras derivadas de Z respecto de x y y son:

$$Z_x = 3x^2 + 6y, \qquad Z_y = 3y^2 + 6x\,.$$

2) Al igualar cada derivada a cero se origina el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ 3y^2 + 6x = 0\,. \end{cases}$$

De la la primera ecuación : $y = -\dfrac{1}{2}x^2$.

Al reemplazar en (2) : $3\left[-\dfrac{1}{2}x^2\right]^2 + 6\,x = 0; \quad 3\,x^4 + 24\,x = 0;$

$$3\,x(x^3 + 8) = 0; \qquad x = 0; \qquad x = -2.$$

De $x=0$ y $x=-2$ se obtiene $y=0$ y $y=-2$.

En consecuencia, los puntos críticos son :

$$P(0,0) \text{ y } Q(-2,-2).$$

3) Las segundas derivadas parciales son :

$$Z_{xx}=6x\ ;\quad Z_{yy}=6y;\quad Z_{xy}=6.$$

4) Las Matrices Hessianas son : $H_1=\begin{pmatrix}6x\end{pmatrix};\quad H_2=\begin{pmatrix}6x & 6\\ 6 & 6y\end{pmatrix}$.

5) La evaluación de las Matrices Hessianas en cada punto crítico da como resultado :

- En el punto $P(0,0)$:

$$H_2^P=\begin{pmatrix}6(0) & 6\\ 6 & 6(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 6\\ 6 & 0\end{pmatrix};$$

$$H_1^P=\begin{pmatrix}6(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\end{pmatrix}.$$

- En el punto $Q(-2,-2)$:

$$H_2^Q=\begin{pmatrix}6(-2) & 6\\ 6 & 6(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & 6\\ 6 & -12\end{pmatrix};$$

$$H_1^Q=\begin{pmatrix}6(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\end{pmatrix}.$$

6) Decisión:

$\left|H_2^P\right|=-36<0.$ Entonces el punto $P(0,0)$ define un PUNTO DE SILLA .

$Z_{silla}=Z(0,0)=0,$ en el punto $(0,0)$.

$\left|H_2^Q\right|=76>0$ y $\left|H_1^Q\right|=-12<0.$ Entonces el punto $Q(-2,-2)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

$Z_{max}=f(-2,-2)=8,$ en el punto $(-2,-2)$.

En conclusión :

$Z_{max}=8,$ en el punto $(-2,-2)$

$Z_{silla}=0,$ en el punto (0 , 0).

PROBLEMA 5.2

Optimizar la función bivariable :

$$Z(x\,,\,y) = \,-\,x^2 + 50x - 2y^2 + 60y - 2xy.$$

SOLUCIÓN

1) Las derivadas parciales de la función Z con respecto a x y y son :

$$Z_x = \,-\,2\,x - 2\,y + 50; \qquad Z_y = \,-\,2\,x - 4\,y + 60.$$

2) Al igualar a cero cada derivada y resolver el sistema

$$\begin{cases} -\,2\,x_1 - 2\,x_2 + 50 = 0 \\ -\,2\,x_1 - 4\,x_2 + 60 = 0, \end{cases}$$

se obtiene:

$(x^*,\,y^*) = \,(20\,,\,5),$ (Único punto crítico).

3) Las segundas derivadas parciales de Z :

$$Z_{xx} = \,-\,2; \quad Z_{yy} = \,-\,4; \quad Z_{xy} = \,-\,2.$$

4) Las Matrices Hessianas son: $H_1 = \begin{pmatrix} -\,2 \end{pmatrix}; \;\; H_2 = \begin{pmatrix} -\,2 & -\,2 \\ -\,2 & -\,4 \end{pmatrix}.$

5) La evaluación de las matrices Hessianas en el punto crítico da como resultado las mismas matrices calculadas en el punto 4).

6) Decisión :

$\left|H_2\right| = 4 > 0$ y $\left|H_1\right| = \,-\,2 < 0.$

Puesto que $\left|H_2\right| > 0$ y $\left|H_1\right| < 0,$ entonces el punto $(20\,,\,5)$. define MÁXIMO RELATIVO. Por otra parte,

$$Z_{max} = Z(20\,,5) = \,-\,(20)^2 + 50(20)\,-2(5)^2 + 60(5) - 2(20)(5)$$

Por tanto,

$Z_{max} = 650,$ en el punto $(20\,,\,5)$.

PROBLEMA 5.3

Optimizar la función bivariable

$$Z(x,y) = 3x - 3y - 2x^3 - xy^2 + 2x^2y + y^3.$$

SOLUCIÓN

1) Las derivadas parciales de la función Z con respecto a x y y son :

$$Z_x = 3 - 6x^2 - y^2 + 4xy; \quad Z_y = \,-\,3 - 2xy + 2x^2 + 3y^2.$$

2) Al igualar a cero cada derivada, se origina el siguiente sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} \;\;\,3 - 6x^2 - y^2 + 4xy = 0 & (1) \\ -\,3 + 2x^2 + 3y^2 - 2xy = 0. & (2) \end{cases}$$

Para resolver este sistema no lineal, se procede así: al sumar miembro a miembro (1) y (2), se obtiene :

$$y^2 + xy - 2x^2 = 0,$$

$$(y + 2x)(y - x) = 0.$$

Si $y = x$, al reemplazar en (1) se llega a :

$$3 - 3x^2 = 0;\ x = \pm 1.$$

Luego, los puntos $P(1\,,\,1)$ y $Q\,(-1,\,-1)$ son críticos.

Si $y = -2x$, al reemplazar en (1), se obtiene la ecuación :

$$1 - 6x^2 = 0;\ x = \pm\sqrt{6}/6.$$

De manera que los puntos $R\big(\sqrt{6}/6,\,-\sqrt{6}/3\big)$ y $S\big(-\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/3\big)$ también son críticos.

3) Las segundas derivadas parciales de Z :

$$Z_{xx} = -12x + 4y;\quad Z_{yy} = -2x + 6y;\qquad Z_{xy} = -2y + 4x.$$

4) Las Matrices Hessianas son: $H_1 = \Big(-12x + 4y\Big);$

$$H_2 = \begin{pmatrix} -12x + 4y & -2y + 4x \\ -2y + 4x & -2x + 6y \end{pmatrix}.$$

5) La evaluación de las Matrices Hessianas en cada punto crítico da como resultado :

$$H_2^P = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};\quad H_2^Q = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};$$

$$H_2^R = \begin{pmatrix} -\frac{10\sqrt{6}}{3} & \frac{4\sqrt{6}}{3} \\ \frac{4\sqrt{6}}{3} & -\frac{7\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix};\qquad H_2^S = \begin{pmatrix} -\frac{10\sqrt{6}}{3} & \frac{4\sqrt{6}}{3} \\ \frac{4\sqrt{6}}{3} & -\frac{7\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix};$$

$$H_1^R = \Big(-\tfrac{10\sqrt{6}}{3}\Big);\quad H_1^S = \Big(\tfrac{10\sqrt{6}}{3}\Big).$$

6) Decisión:

- $\left|H_2^P\right| = -36 < 0.$ Entonces, el punto $P\,(1,1)$ define un PUNTO DE SILLA. $F_{silla} = F(1,1) = 0.$
- $\left|H_2^Q\right| = -36 < 0.$ Entonces, el punto $P\,(1,1)$ define un PUNTO DE SILLA. $F_{silla} = F(-1,\,-1) = 0.$
- $\left|H_2^R\right| = 36 > 0$ y $\left|H_1^R\right| = -\frac{10\sqrt{6}}{3} < 0.$

Entonces, el punto $R\big(\sqrt{6}/6,\,-\sqrt{6}/3\big)$ define un MÁXIMO RELATIVO. $F_{max} = F(\sqrt{6}/6,\,-\sqrt{6}/3\,) = \sqrt{6}.$

- $\left|H^S_2\right| = 36 > 0$ y $\left|H^S_1\right| = \frac{10\sqrt{6}}{3} > 0.$

  Entonces, el punto $S\left(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3\right)$ define un MÍNIMO RELATIVO. $F_{min} = F(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3) = -\sqrt{6}.$

Conclusión :

$F_{silla} = 0$ en $(1,1)$,
$F_{silla} = 0$ en $(-1, -1)$,
$F_{max} = \sqrt{6}$ en $(\sqrt{6}/6, -\sqrt{6}/3)$,
$F_{min} = -\sqrt{6}$ en $(-\sqrt{6}/6, \sqrt{6}/3)$.

PROBLEMA 5.4

Optimizar la función :

$$Z = (x-y)(1-xy).$$

SOLUCIÓN

Al realizar el producto se obtiene que $Z = x - x^2y - y + xy^2$.

1) Las primeras derivadas de Z respecto de x y y son:

$$Z_x = 1 - 2xy + y^2, \quad Z_y = -x^2 - 1 + 2xy.$$

2) Al igualar cada derivada a cero se origina el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} 1 - 2xy + y^2 = 0 \\ -1 + 2xy - x^2 = 0. \end{cases}$$

Al sumar miembro a miembro las ecuaciones anteriores se tiene :

$$y^2 = x^2; \quad y = \pm x.$$

Al reemplazar $y = x$ en la primera ecuación, se llega a :

$$1 - 2x(x) + x^2 = 0,$$

$$1 - x^2 = 0; \, x = \pm 1.$$

De esta manera, los puntos $P(1,1)$ y $Q(-1, -1)$ son críticos.

Ahora bien, al sustituir $y = -x$ en la primera ecuación del sistema anteriormente planteado, se obtiene :

$$1 - 2x(-x) + (-x)^2 = 0,$$

$$1 + x^2 = 0.$$

Esta última ecuación no tiene solución en los reales.

3) Las segundas derivadas parciales son:

$$Z_{xx} = -2y; \quad Z_{yy} = 2x; \quad Z_{xy} = 2y.$$

4) Las Matrices Hessianas son: $H_1 = \begin{pmatrix} -2y \end{pmatrix}$; $H_2 = \begin{pmatrix} -2y & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$.

5) La evaluación de las Matrices Hessianas en cada punto crítico da como resultado:

• En el punto $P(1,1)$:

$$H_2^P = \begin{pmatrix} -2(1) & 2(1) \\ 2(1) & 2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$H_1^P = \begin{pmatrix} -2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}.$$

• En el punto $Q(-1,-1)$:

$$H_2^Q = \begin{pmatrix} -2(-1) & 2(-1) \\ 2(-1) & 2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$H_1^Q = \begin{pmatrix} -2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}.$$

6) Decisión:

$\left|H_2^P\right| = -8 < 0.$ Entonces, el punto $P(0,0)$ define un PUNTO DE SILLA .

$z_{silla} = Z(1,1) = 0$ en el punto $(1,1)$.

$\left|H_2^Q\right| = -8 < 0.$ Entonces, el punto $Q(-1,-1)$ define un PUNTO DE SILLA.

$z_{silla} = Z(-1,-1) = 0,$ en el punto $(-1,-1)$.

En conclusión:

La función no tiene ni máximo ni mínimo. Tiene dos puntos de silla con un valor de $Z = 0$, en los puntos $(1,1)$ y $(-1,-1)$.

PROBLEMA 5.5

Optimizar la función

$$Z = sen\, x + sen\, y + sen\,(x+y);\ 0 \leq x \leq \pi/2,\ \ 0 \leq y \leq \pi/2.$$

SOLUCIÓN

1) Las primeras derivadas de Z respecto de x y y son:

$$Z_x = cos\, x + cos\,(x+y),$$

$$Z_y = cos\, y + cos\,(x+y).$$

2) Se igualan a cero las derivadas antes calculadas y se resuelve el sistema

para x y y :

$$\begin{cases} cos\,x + cos\,(x+\,y) = 0 \\ cos\,y + cos\,(x+\,y) = 0. \end{cases}$$

De aquí se obtiene :

$$cos\,x = cos\,y \Rightarrow x = y.$$

Al reemplazar en la primera ecuación del sistema :

$$cos\,x + cos\,cos\,(x+\,x) = 0; \qquad cos\,x + cos\,2\,x = 0;$$

$$2cos^2x + cos\,x - 1 = 0.$$

La solución de la ecuación cuadrática es :

$$cos\,x = 1/2 \quad \text{o} \quad cos\,x = -1.$$

Finalmente, $x = \pi/3$, pues $x = \pi$ es inadmisible, dadas las limitaciones impuestas a la función desde un principio.

Entonces, $(x^*,\ y^*) = (\pi/3\,,\pi/3)$ es el único punto crítico.

3) Las segundas derivadas parciales de Z :

$$Z_{xx} = -\,sen\,x - sen\,(x+\,y);$$
$$Z_{yy} = -\,sen\,y - sen\,(x+\,y),$$
$$Z_{xy} = -\,sen\,(x+\,y).$$

4) Las Matrices Hessianas son :

$$H_1 = \Big(-\,sen\,x - sen\,(x+\,y)\Big);$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} -\,sen\,x - sen\,(x+\,y) & -\,sen\,(x+\,y) \\ -\,sen\,(x+\,y) & -\,sen\,y - sen\,(x+\,y) \end{pmatrix}.$$

5) La evaluación de las Matrices Hessianas en el punto crítico da como resultado :

$$H_1^* = \left(-\,sen\,\frac{\pi}{3} - sen\,(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3})\right) = \quad \left(-\sqrt{3}\right);$$

$$H_2^* = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

6) Decisión:

$\left|H_2^*\right| = 9/4 > 0$ y $\left|H_1^*\right| = -\sqrt{3} < 0$. Entonces, el punto crítico $(\pi/3\,,\pi/3)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

$Z_{max} = f(\pi/3\,,\pi/3) = 3\sqrt{3}/2$ en el punto $(\pi/3\,,\pi/3)$.

Por simple inspección, se puede concluir además que $Z = 0$ en el punto $(0\,,0)$.

En conclusión,

$$Z_{max} = 3\sqrt{3}/2 \text{, en el punto } (\,\pi/3\,,\pi/3\,);$$
$$Z_{min} = 0 \text{ en el punto } (\,0\,,0\,) \qquad .$$

PROBLEMA 5.6

Optimizar la función

$$Z = \, e^{x-y}\,(x^2\, - 2y^2).$$

SOLUCIÓN

1) Las primeras derivadas de Z respecto de x y y son:

$$Z_x = \, e^{x-y}\,(x^2 + 2x - 2y^2), \quad Z_y = \, e^{x-y}\,(\,-x^2 - 4y + 2y^2)\,.$$

2) Al igualar cada derivada a cero se origina el sistema de ecuaciones :

$$\begin{cases} e^{x-y}\,(x^2 + 2x - 2y^2) = 0 \\ e^{x-y}\,(\,-x^2 - 4y + 2y^2) = 0\,. \end{cases}$$

El anterior sistema es equivalente al sistema :

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2y^2 = 0 & (1) \\ -x^2 - 4y + 2y^2 = 0. & (2) \end{cases}$$

La suma miembro a miembro de las ecuaciones (1) y (2), conduce a :

$$2x - 4y = 0; \;\; x = 2y.$$

Al reemplazar este último valor en la ecuación (1), se obtiene :

$$(2y)^2 + 2(2y) - 2y^2 = 0,$$

$$y^2 + 2y = 0; \; y = 0\,; \; y = \,-2.$$

Esto significa que $P(0\,,0)$ y $Q(\,-4,\,-2)$ son puntos críticos.

3) Las segundas derivadas parciales son:

$$Z_{xx} \, = \, e^{x-y}\,(x^2 + 4x - 2y^2 + 2)\;;$$

$$Z_{yy} \, = e^{x-y}\,(x^2 + 8y - 2y^2 - 4)\,;$$

$$Z_{xy} = e^{x-y}\,(\,-x^2 - 2x - 4y + 2y^2).$$

4) Las Matrices Hessianas calculadas en cada punto crítico son:

- En el punto $P(\,0,0\,)$:

$$H_{_1}^P = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}; \quad H_{_2}^P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix};$$

- En el punto $Q(-4,\,-2)$:

$$H_{1}^{Q} = \left(2e^{-2}\right); \quad H_{2}^{Q} = \begin{pmatrix} 6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}.$$

5) Decisión:

$\left|H_{2}^{P}\right| = -8 < 0.$ Entonces, el punto $P(0,0)$ define un PUNTO DE SILLA .

$z_{silla} = Z(0\,,0) = 0,$ en el punto $(0\,,0)$.

$\left|H_{2}^{Q}\right| = 8e^{-4} > 0$ y $\left|H_{1}^{Q}\right| = 2e^{-2} > 0.$ Entonces, el punto $Q(-4,\,-2)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

$Z_{max} = Z(-4\,,\,-2) = 8e^{-2}$ en el punto $(-4,\,-2)$.

En conclusión:

$Z_{max} = 8e^{-2}$, en el punto $(-4,\,-2)$;

$Z_{silla} = 0$, en el punto (0 , 0).

PROBLEMA 5.7

Optimizar la función

$$Z = \frac{1+x-y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$$

SOLUCIÓN

1) Las primeras derivadas de Z respecto de x y y son :

$$Z_x = \frac{1+y^2-x+xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad Z_y = \frac{-1-x^2-y-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}}.$$

2) Al igualar cada derivada a cero se origina el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dfrac{1+y^2-x+xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = 0 \\[2ex] \dfrac{-1-x^2-y-xy}{(1+x^2+y^2)^{3/2}} = 0 \end{cases}$$

Este sistema es equivalente a :

$$\begin{cases} 1+y^2-x+xy = 0 & (1) \\ -1-x^2-y-xy = 0 & (2) \end{cases}$$

Al sumar miembro a miembro las ecuaciones (1) y (2), se llega a :

$$y^2-x^2-x-y = 0,$$
$$(y^2-x^2)-(x+y) = 0,$$

$$(y-x)(y+x)-(x+y)=0,$$
$$(y+x)(y-x-1)=0;$$
$$y=\,-x;\; y=x+1.$$

Si $y=\,-x,$ entonces al reemplazar en la ecuación (1), se obtiene $x=1.$

En consecuencia, el punto $(1,\,-1)$ es crítico.

Si $y=x+1,$ al sustituir en la relación (1), se llega a $x^2+1=0,$ ecuación que no tiene solución en los reales.

Así, pues, el único punto crítico es $(1,\,-1)$.

3) Las segundas derivadas parciales son:

$$Z_{xx}\;=\;-\;\frac{1-2x^2+y^2-y+2x^2y-y^3+3x+3xy^2}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}\;;$$

$$Z_{yy}\;=\;-\;\frac{1+x^2-2y^2+x+x^3-2xy^2-3y-3x^2y}{(1+x^2+y^2)^{5/2}};$$

$$Z_{xy}=\frac{-\,y+2x^2y-y^3+x+x^3-2xy^2+3yx}{(1+x^2+y^2)^{5/2}}.$$

4) Las segundas derivadas parciales, calculadas en el punto crítico $(1,\,-1)$, dan como resultado :

$$Z_{xx}(1,\,-1)=\,-\,\frac{6}{3^{5/2}};\qquad Z_{yy}(1,\,-1)=\,-\,\frac{6}{3^{5/2}};\qquad Z_{xy}(1,\,-1)=\,-\,\frac{3}{3^{5/2}}.$$

5) Las Matrices Hessianas calculadas en el punto crítico son :

$$H_1^*=\left(-\,\tfrac{6}{3^{5/2}}\right);\;\; H_2^*=\begin{pmatrix}-\,\frac{6}{3^{5/2}} & -\,\frac{3}{3^{5/2}}\\ -\,\frac{3}{3^{5/2}} & -\,\frac{6}{3^{5/2}}\end{pmatrix}.$$

5) Decisión:

$\left|H_2^*\right|=\dfrac{27}{3^5}>0$ y $\left|H_1^*\right|=\,-\,\dfrac{6}{3^{5/2}}<0.$ Entonces, el punto $P(1,\,-1)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

$Z_{max}=Z(1\,,\,-1)=\dfrac{3}{\sqrt{3}}\;=\sqrt{3}$ en el punto $(1,\,-1\,).$

En conclusión, $Z_{max}=$ en el punto $(1,\,-1\,).$

PROBLEMA 5.8

Hallar los números positivos $x,\,y,\,z$ tales que $x+y+z=18$ y xyz sea máximo.

SOLUCIÓN

Sea $Z = xyz$. Como $x + y + z = 18$, entonces $z = 18 - x - y$. Al reemplazar en la expresión para Z, se tiene :

$$Z = xy(18 - x - y),$$
$$Z = 18xy - x^2y - xy^2.$$

Por consiguiente la función a optimizar es :

$$Z = 18xy - x^2y - xy^2 \qquad (1)$$

1) Las primeras derivadas parciales de Z, son :

$$Z_x = 18y - 2xy - y^2; \qquad Z_y = 18x - 2xy - x^2.$$

2) Al igualar cada derivada a cero se origina el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 18y - 2xy - y^2 = 0 & (2) \\ 18x - 2xy - x^2 = 0. & (3) \end{cases}$$

Al efectuar miembro a miembro (2) – (3), se obtiene :

$$18(y - x) - (y^2 - x^2) = 0,$$
$$(y - x)(18 - y - x) = 0,$$
$$y = x; \; y = x - 18.$$

Si $y = x$, AL sustituir en (2) se llega a :

$$18x - 2x^2 - x^2 = 0; \; 18x - 3x^2 = 0$$
$$3x(6 - x) = 0;$$

$x = 0$, (inadmisible) pues los números deben ser positivos,

$x = 6$; entonces $y = 6$. Por tanto $(6, 6)$ es un punto crítico.

Si $y = 18 - x$, al reemplazar en (2), se tiene que :

$$18(x - 18) - 2x(x - 18) - (x - 18)^2 = 0,$$
$$(x - 18)(x - 12) = 0.$$

Para $x = 18$, $y = 18 - 18 = 0$. Inadmisible, ya que los números deben ser positivos.

Para $x = 12$, $y = 6$, valor ya obtenido.

En conclusión, el punto $(6\,,6)$ es el único punto crítico que podría maximizar la función Z.

3) Las segundas derivadas parciales de Z son :

$$Z_{xx} = -2y; \;\; Z_{xx} = -2x; \;\; Z_{xy} = 18x - 2x - 2y.$$

4) Los valores de las segundas derivadas en el punto crítico $(6\,,6)$, dan como resultado

$$Z_{xx}(6\,,\,6) = -12; \qquad Z_{xx}(6\,,\,6) = -12; \quad Z_{xy}(6\,,\,6) = -6.$$

5) Las Matrices Hessianas se definen como :

$$H_1^*(6\,,\,6) = \begin{pmatrix} -12 \end{pmatrix}; \quad H_2^* = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix}.$$

6) Decisión :

Como $\left|H_2^*\right| = 108 > 0$ y $\left|H_1^*\right| = -12 < 0$, entonces el punto $P(6,6)$ define un MÁXIMO RELATIVO para Z.

Ahora bien, como $x + y + z = 18$, entonces $z = 6$.

Finalmente, los números positivos buscados son $x = y = z = 6$, y el producto máximo es $6(6)(6) = 216$.

PROBLEMA 5.9

Se desea construir una caja rectangular sin tapa, de volumen 108 unidades cúbicas. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la caja, para que su área total sea mínima?

SOLUCIÓN

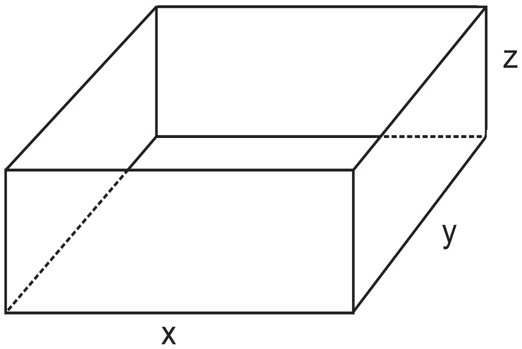

Fig. 5.1.

Sean $x,\ y,\ z$ las dimensiones de la caja. Según los datos del problema

$$xyz = 108. \tag{1}$$

Ahora bien, el área total de la caja es :

$$A = xy + 2xz + 2yz. \tag{2}$$

De la relación (1), se tiene que $z = \dfrac{108}{xy}$. Al reemplazar en la ecuación (2) :

$$A = xy + 2x\left[\frac{108}{xy}\right] + 2y\left[\frac{108}{xy}\right],$$

$$A = xy + \frac{216}{y} + \frac{216}{x}.$$

Por consiguiente, la función a minimizar es $A = xy + \dfrac{216}{y} + \dfrac{216}{x}$.

1) Las primeras derivadas parciales de A son :

$$A_x = y - \frac{216}{x^2}; \qquad A_y = x - \frac{216}{y^2}.$$

2) El sistema de ecuaciones formado por las primeras derivadas, igualadas a cero es :

$$\begin{cases} y - \dfrac{216}{x^2} = 0 & (3) \\ x - \dfrac{216}{y^2} = 0\,. & (4) \end{cases}$$

De (3) : $x^2y = 216$, y de (4): $xy^2 = 216$; entonces,

$$x^2y = xy^2; \quad xy(x-y) = 0;$$

$x = 0,\ y = 0$, inadmisibles; $x = y$.

Al sustituir el valor de x en (3) se obtiene :

$$x - \frac{216}{x^2} = 0; \quad x^3 = 216; \quad x = 6 \text{ y } y = 6.$$

En consecuencia, el punto $(6\,,6)$ es el único punto crítico que podría minimizar a la función A.

3) Las segundas derivadas parciales de A son :

$$A_{xx} = \frac{432}{x^3}; \quad A_{yy} = \frac{432}{y^3}; \quad A_{xy} = 1.$$

4) Los valores de las segundas derivadas en el punto crítico son :

$$A_{xx}(6\,,6) = \frac{432}{216} = 2; \; A_{yy}(6\,,6) = \frac{432}{216} = 2; \; A_{xy} = 1.$$

5) Las Matrices Hessianas se definen como :

$$H_1^*(6\,,\,6) = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}; \quad H_2^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) Decisión :

Como $\left|H_2^*\right| = 3 > 0$ y $\left|H_1^*\right| = 2 > 0$, entonces el punto $P(6,6)$ define un MÍNIMO RELATIVO para A.

Por otra parte, de la relación (2) se tiene que :

$$z = \frac{108}{6(6)} = 3.$$

De esta manera, las dimensiones de la caja que definen un área mínima son $x = 6,\ y = 6,\ z = 3$.

PROBLEMA 5.10

3.1 Optimizar la función de tres variables:

$$F(x, y, z) = -5\,x^2 + 10\,x + x\,z - 2\,y^2 + 4\,y + 2\,yz - 4\,z^2.$$

SOLUCIÓN

1) Las primeras derivadas de F respecto de x, y, z son :

$$F_x = -10\,x + 10 + z,$$

$$F_y = -4\,y + 4 + 2\,z,$$

$$F_z = x + 2\,y - 8z.$$

2) Se resuelve, para $x,\ y\ , z$ el sistema de ecuaciones lineales 3x3 no homogéneo :

$$\begin{cases} -10\,x + 10 + z = -10 \\ 0\,x - 4\,y + 4 + 2\,z = -4 \\ x + 2\,y - 8z = 0\,. \end{cases}$$

de donde se obtiene el único punto crítico $(\ x^*, y^*, z^*) = \left(\dfrac{24}{23}, \dfrac{28}{23}, \dfrac{10}{23}\right).$

3) Se calculan las segundas derivadas parciales de F así :

$$F_{xx} = -10; \qquad F_{xy} = 0; \qquad F_{xz} = 1;$$

$$F_{yx} = 0; \qquad F_{yy} = -4; \qquad F_{yz} = 2;$$

$$Fz_x = 1; \qquad F_{zy} = 2; \qquad F_{zz} = -8.$$

4) Se determinan las Matrices Hessianas:

$$H_1 = \begin{pmatrix} -10 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

5) La evaluación de las Matrices Hessianas en cada punto crítico conduce a :

$$H_1^* = \begin{pmatrix} -10 \end{pmatrix}, \ H_2^* = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$H_3^* = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

6) Decisión :

Como $\left|H_1^*\right| = -10 < 0$, $\left|H_2^*\right| = 40 > 0$ y $\left|H_3^*\right| = -276 < 0$ entonces el punto crítico $(x^*, y^*, z^*) = \left(\frac{24}{23}, \frac{28}{23}, \frac{10}{23}\right)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

Además,

$$F_{max} = F\left(\frac{24}{23}, \frac{28}{23}, \frac{10}{23}\right) = \frac{4088}{529}, \text{ en el punto } \left(\frac{24}{23}, \frac{28}{23}, \frac{10}{23}\right).$$

PROBLEMA 5.11

Optimizar la función de tres variables:

$$F(x, y, z) = -2x^3 + 6xz + 2y - y^2 - 6z^2 + 5.$$

SOLUCIÓN

1) Las primeras derivadas parciales de F con respecto a x, y, z son :

$$F_x = -6x^2 + 6z; \qquad F_y = 2 - 2y; \qquad F_z = 6x - 12z.$$

2) Se soluciona el sistema no lineal de ecuaciones, para x_1, x_2, x_3 originado de la igualación a cero de las derivadas parciales anteriores :

$$\begin{cases} -6x^2 + 6z = 0 & (1) \\ 2 - 2y = 0 & (2) \\ 6x - 12z = 0. & (3) \end{cases}$$

De la ecuación (2) : $y = 1$; y de (3) : $x = 2z$ (4)

Al reemplazar (4) en (1) :

$$-6(2z)^2 + 6z = 0; \qquad -24z^2 + 6z = 0; \qquad (5)$$

$$6z(-4z + 1) = 0; \; z = 0 \text{ o } z = \frac{1}{4}.$$

Con $z = 0$, en (4) se obtiene $x = 0$.

Luego, el punto $P(0, 1, 0)$ es un punto crítico.

Con $z = \frac{1}{4}$, en (4) se obtiene: $x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, el punto $Q(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4})$ también es crítico.

3) Cálculo de las segundas derivadas :

$$F_{xx} = -12\,x; \qquad F_{xy} = 0; \qquad F_{xz} = 0;$$

$$F_{yx} = 0; \qquad F_{yy} = -2; \qquad F_{yz} = 0;$$

$$Fzx = 6; \qquad F_{zy} = 0; \qquad F_{zz} = -12.$$

4) Determinación de las Matrices Hessianas:

$$H_1 = \begin{pmatrix} -12\,x \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} -12\,x & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} -12\,x & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

5) Evaluación de las Matrices Hessianas en cada punto crítico:

• En el punto $P(0,\,1,\,0)$, se tiene que:

$$H_1^P = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad H_2^P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$H_2^P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

• En el punto $Q(\frac{1}{2},\,1,\,\frac{1}{4})$ se tiene :

$$H_1^Q = \begin{pmatrix} -6 \end{pmatrix}, \quad H_2^Q = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$H_3^Q = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 0 & -12 \end{pmatrix}.$$

6) Decisión:

• Puesto que $\left|H_2^P\right| = 0$ no se puede concluir nada acerca de la naturaleza del punto crítico $P\,(0,\,1,\,0)$.

• Como $\left|H_3^Q\right| = -72 < 0,$ $\left|H_2^Q\right| = 12 > 0$ y $\left|H_1^Q\right| = -6 < 0,$ entonces se concluye que el punto $(\frac{1}{2},\,1,\,\frac{1}{4})$ maximiza la función F.

Y, por supuesto, $F_{max} = F\,(\frac{1}{2},\,1,\,\frac{1}{4}) = \frac{41}{8}$, en el punto $Q(\frac{1}{2},\,1,\,\frac{1}{4})$.

PROBLEMA 5.12

Optimizar la función bivariable $Z = f(x,y) = 25 - x^2 - y^2$, sujeta a la restricción $2x + y = 4$.

SOLUCIÓN

1) La función de Lagrange se define como :

$$L(x\,,y,\lambda) = 25 - x^2 - y^2 + \lambda\big[2x + y - 4\,\big].$$

2) Las primeras derivadas parciales de L :

$$L_x = -2\,x - 2\lambda\ , \quad L_y = -2\,y - \lambda \ \text{ y } \quad L_\lambda = 2\,x + y - 4.$$

3) Resolver, para $x\,,y$ y λ, el sistema :

$$\begin{cases} -2\,x - 2\lambda = 0 \\ -2\,y - \lambda = 0 \\ 2\,x + y - 4 = 0\,. \end{cases}$$

Para resolver este tipo de sistemas, conviene en principio, eliminar λ. De esta manera se obtiene el único punto crítico :

$$(\ x^*,\ y^*,\ \lambda^*) = \left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right).$$

4) Calcular $L_{x\,x}\,,\ L_{x\,y},\, L_{y\,x}\,,\ L_{y\,y},\ g_x$ y $g_{y.}$ Entonces;

$$L_{x\,x} = -2\,, \quad L_{x\,y} = 0, \quad L_{y\,x} = 0,$$

$$L_{y\,y} = -2, \quad g_x = 2, \quad g_y = 1.$$

5) Determinación de la Matriz Hessiana Acotada :

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

6) Evaluación de la Matriz Hessiana Acotada en el punto crítico :

$$H_B^* = H_B(\ x^*,\ y^*,\ \lambda^*) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

7) Decisión:

Como $\left|H_B^*\right| = 10 > 0$, entonces $\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

Además, $Z_{max} = Z\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right) = \frac{109}{5}$ en el punto $\left(\frac{8}{5},\ \frac{4}{5}\right)$.

PROBLEMA 5.13

Optimizar la función $Z = f(x,y) = x^2 + y^2$ sujeta a la restricción $x^2 + 8xy + 7y^2 = 225.$

SOLUCIÓN

1) La función de Lagrange se define como :

$$L(x,\, y, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left[x^2 + 8xy + 7y^2 - 225\right].$$

2) Las primeras derivadas parciales de L son :

$$L_x = 2\,x + 2\lambda\, x + 8\lambda \mathrm{y}\,,$$

$$L_{\mathrm{y}} = 2\,y + 8\lambda x + 14\lambda y\,,$$

$$L_\lambda = x^2 + 8xy + 7y^2 - 225.$$

3) Resolver, para $x,\, y\,, \lambda,$ el sistema :

$$\begin{cases} 2\,x + 2\lambda\, x + 8\lambda \mathrm{y} = 0 \\ 2\,y + 8\lambda x + 14\lambda y\; = 0 \\ x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0\,. \end{cases}$$

Este sistema no es lineal, por lo que requiere otro tipo de tratamiento. Después de algunas simplificaciones, se obtiene un sistema de ecuaciones equivalente al anterior, que se escribe como:

$$\begin{cases} (1+\lambda)\,x + 4\lambda\, y = 0 & (1) \\ 4\lambda\, x_{_1} + (1+7\lambda)\,y = 0 & (2) \qquad (A) \\ x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0\,. & (3) \end{cases}$$

Para resolver este último sistema, se procede así :

Con las ecuaciones (1) y (2) se forma el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} (1+\lambda)\,x + 4\lambda\, y = 0 \\ 4\lambda\, x + (1+7\lambda)\,y = 0\,. \end{cases} \qquad (B)$$

Este último sistema tiene solución, siempre que el determinante formado por los coeficientes de las incógnitas x y y sea igual a cero; o sea,

$$\begin{vmatrix} (1+\lambda) & 4\lambda \\ 4\lambda & (1+7\lambda) \end{vmatrix} = 0.$$

De donde

$$3\,\lambda^2 - 8\lambda - 1 = 0.$$

Al resolver la cuadrática, se obtiene que $\lambda_1 = 1$ o $\lambda_2 = -\,\dfrac{1}{9}.$

- Si $\lambda_1 = 1 \Rightarrow$ al sustituir en el sistema (B) se tiene el sistema 2 x 2 siguiente :

$$\begin{cases} 2\,x + 4y = 0 \\ 4\,x + 8y = 0\,. \end{cases}$$

Este último sistema no tiene solución.

• Si $\lambda_2 = -\dfrac{1}{9}$, al reemplazar en el sistema (B), se tiene que : $x = -2y$. Finalmente, al reemplazar esta última relación en el sistema (A), se obtienen dos puntos críticos: $P\left(\sqrt{5}\,, 2\sqrt{5}\,, -1/9\right)$ y $Q\left(-\sqrt{5}\,, -2\sqrt{5}\,, -1/9\right)$.

4) Calcular $L_{xx}\,,\ L_{xy}, L_{yx}\,,\ L_{yy}\,,\ g_x$ y $g_{y.}$ Entonces :

$$L_{xx} = 2 + 2\lambda, \qquad L_{xy} = 8\lambda, \qquad L_{yx} = 8\lambda,$$

$$L_{yy} = 2 + 14\lambda, \qquad g_x = 2\,x + 8y, \qquad g_y = 8x + 14\,y.$$

5) Determinación de la Matriz Hessiana Acotada :

$$H_B = \begin{pmatrix} 0 & 2\,x + 8y & 8x + 14\,y \\ 2\,x + 8y & 2 + 2\lambda & 8\lambda, \\ 8x + 14\,y & 8\lambda, & 2 + 14\lambda \end{pmatrix}.$$

6) Evaluación de la Matriz Hessiana Acotada en el punto crítico:

• En el punto $P\left(\sqrt{5}\,, 2\sqrt{5}\,, -1/9\right)$:

$$H_B^P = \begin{pmatrix} 0 & 18\sqrt{5} & 36\sqrt{5} \\ 18\sqrt{5} & 16/9 & -8/9 \\ 36\sqrt{5} & -8/9 & -4/9 \end{pmatrix}.$$

• En el punto $Q\left(-\sqrt{5}\,, -2\sqrt{5}\,, -1/9\right)$:

$$H_B^Q = \begin{pmatrix} 0 & -18\sqrt{5} & -36\sqrt{5} \\ -18\sqrt{5} & -16/9 & 8/9 \\ -36\sqrt{5} & 8/9 & 4/9 \end{pmatrix}.$$

7) Decisión:

• Como $\left|\, H_B^P \right| = -18000 < 0$, entonces $P\left(\sqrt{5}\,, 2\sqrt{5}\,, -1/9\right)$ define un MÍNIMO RELATIVO.

Además, $Z_{min} = Z\left(\sqrt{5}\,, 2\sqrt{5}\right) = 25$ en el punto $\left(\sqrt{5}\,, 2\sqrt{5}\right)$.

• Como $\left|\, H_B^Q \right| = 18000 > 0$, entonces $Q\left(-\sqrt{5}\,, -2\sqrt{5}\,, -1/9\right)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

Además, $Z_{max} = Z\left(-\sqrt{5}\,, -2\sqrt{5}\right) = 25,$

en el punto $\left(-\sqrt{5}\,, -2\sqrt{5}\right)$.

PROBLEMA 5.14

Optimizar la función de tres variables $Z = f(x, y, z) = 5\,xy\,z$ sujeta, a la restricción $x + 2\,y + 3\,z = 24.$

SOLUCIÓN

1) La función de Lagrange correspondiente es :

$$L(x, y, z, \lambda) = 5\,xy\,z + \lambda\big[\; x + 2\,y + 3\,z - 24\big].$$

2) Las primeras derivadas parciales de L :

$$L_x = 5\,yz + \lambda, \;\; L_y = 5\,x\,z + 2\lambda, \;\; L_z = 5\,xy + 3\lambda,$$

$$L_\lambda = \;\; x + 2\,y + 3\,z - 24.$$

3) Resolver para $x,\ y\ ,\ z$ y λ el sistema :

$$\begin{cases} 5\,yz + \lambda = 0 & (1)\\ 5\,x\,z + 2\lambda = 0 & (2)\\ 5\,xy + 3\lambda = 0 & (3)\\ x + 2\,y + 3\,z - 24 = 0\,. & (4)\end{cases}$$

Al dividir la ecuación (1) entre la ecuación (2), se obtiene :

$$\frac{y}{x} = \frac{1}{2}, \text{ de donde } \;\; y = \frac{1}{2}x\,. \qquad (5)$$

De manera análoga al dividir (1) entre (3), se obtiene :

$$z = \frac{1}{3}x\,. \qquad (6)$$

Al sustituir (5) y (6) en (4) :

$$x + 2\left[\frac{1}{2}x\right] + 3\left[\frac{1}{3}x\right] - 24 = 0,$$

Al simplificar, se tiene $x = 8,$ y al sustituir en (5) y (6) : $y = 4\ ;\ z\ = \dfrac{8}{3};$

y $\lambda = -\dfrac{160}{3}$. De esta manera el único punto crítico es :

$$(x^*,\ y^*, z^*, \lambda^*) = \Big(8,\ 4\,, \frac{8}{3}\,,\ -\frac{160}{3}\Big).$$

4) Calcular $L_{xx}\,,\ L_{yy},\, L_{zz},\, L_{xy},\ L_{xz},\ L_{yz},\, g_x\,,\, g_y$ y $g_z.$ Entonces :

$$L_{xx} = \;0\,, \qquad L_{xy} = \;5\,z, \qquad L_{yx} = 5\,z,$$

$$L_{yy} = 0, \qquad L_{xz} = 5\,y, \qquad L_{zx} = 5\,y,$$

$$L_{yz} = 5\,x, \qquad L_{zy} = 5\,x, \qquad L_{zz} = 0,$$

$$g_x = 1, \qquad g_y = 2\,, \qquad g_z = 3.$$

5) Determinación de las Matrices Hessianas Acotadas :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 5\,z & 5\,y \\ 2 & 5\,z & 0 & 5\,x \\ 3 & 5\,y & 5\,x & 0 \end{pmatrix};$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 5\,z \\ 2 & 5\,z & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Evaluación de las Matrices Hessianas Acotadas en el punto crítico :

$$H_4^* = H_4\Big(8,\ 4\,,\frac{8}{3}\,,\ -\frac{160}{3}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 40/3 & 20 \\ 2 & 40/3 & 0 & 40 \\ 3 & 20 & 40 & 0 \end{pmatrix};$$

$$H_3^* = H_3\Big(8,\ 4\,,\frac{8}{3}\,,\ -\frac{160}{3}\Big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 40/3 \\ 2 & 40/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) Decisión:

Como $\left|H_4^*\right| = -4800 < 0$ y $\left|H_3^*\right| = \dfrac{160}{3} > 0$, entonces el punto $\Big(8,\ 4\,,\dfrac{8}{3}\,,\ -\dfrac{160}{3}\Big)$ define un MÁXIMO RELATIVO.

Además, $Z_{max} = Z\Big(8,\ 4\,,\dfrac{8}{3}\Big) = \dfrac{1280}{3}$, en el punto $\Big(8,\ 4\,,\dfrac{8}{3}\Big)$.

PROBLEMA 5.15

Resolver el Problema 4.7 utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange.

SOLUCIÓN

Según los datos del problema, se trata de minimizar la función :

$$Z = f(x\,,y\,,z) = x\,y + 2\,xz + 2\,yz,$$

sujeta a la restricción $xyz = 108.$

1) La función de Lagrange correspondiente es :

$$L(x\,,y\,,z,\lambda) = x\,y + 2\,xz + 2\,yz + \lambda\big[xyz - 108\big].$$

2) Las primeras derivadas parciales de L :

$$L_x = y + 2\,z + \lambda\,yz, \quad L_y = x + 2\,z + \lambda xz,$$

$$L_z = 2\,x + 2\,y + \lambda xy \quad \text{y} \quad L_\lambda = xyz - 108.$$

3) Resolver, para x, y, z y λ el sistema

$$\begin{cases} y + 2\,z + \lambda\,yz = 0 & (1) \\ x + 2\,z + \lambda xz = 0 & (2) \\ 2\,x + 2\,y + \lambda xy = 0 & (3) \\ xyz - 108 = 0\,. & (4) \end{cases}$$

Al efectuar (1) $-$ (2) se obtiene :

$$y - x + \lambda yz - \lambda xz = 0;$$

$$(\,y - x\,)(1 + \lambda z) = 0.$$

De donde se obtiene : $\quad y = x\,; \qquad (5)$

$$\lambda = -1/z\,. \qquad (6)$$

Al sustituir (5) en (3) :

$$2\,x + 2\,x + \lambda\,x^2 = 0; \;\; x\,(4 + \lambda x\,) = 0,$$

$x = 0$, inadmisible ; $\qquad \lambda = -4/x \qquad (7)$

El reemplazo de (7) en (2) conduce a :

$$x + 2\,z - 4\,z = 0 \quad , \quad z = (1/2)\,x\,. \qquad (8)$$

Al sustitur (5) y (8) en (4) se obtiene :

$$x\,.\,x\,.(1/2)\,x - 108 = 0, \;\; x^3 = 216, \quad x = 6.$$

De esta manera, $y = 6,\; z = 3, \;\; \lambda = -\dfrac{2}{3}.$

En consecuencia, el único punto crítico es :

$$(x^*,\; y^*, z^*, \lambda^*) = (6,\; 6\,, 3\,,\, -\frac{2}{3}\,).$$

4) Calcular L_{xx}, L_{yy}, L_{zz}, L_{xy}, L_{xz}, L_{yz}, g_x, g_y y g_z. Entonces:

$$L_{xx} = 0\,, \qquad L_{xy} = 1 + \lambda\,x_3, \qquad L_{yx} = 1 + \lambda\,x_3,$$

$$L_{yy} = 0, \qquad L_{xz} = 2 + \lambda\,x_2, \qquad L_{zx} = 2 + \lambda\,x_2,$$

$$L_{yz} = 2 + \lambda\,x_1, \qquad L_{zy} = 2 + \lambda\,x_1, \qquad Lzz = 0,$$

$$g_x = yz, \qquad g_y = xz, \qquad g_z = xy.$$

5) Determinación de las Matrices Hessianas Acotadas :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & yz & xz & xy \\ yz & 0 & 1+\lambda\, z & 2+\lambda\, y \\ xz & 1+\lambda\, z & 0 & 2+\lambda\, x \\ xy & 2+\lambda\, y & 2+\lambda\, x & 0 \end{pmatrix};$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & yz & xz \\ yz & 0 & 1+\lambda\, z \\ xz & 1+\lambda\, z & 0 \end{pmatrix}.$$

6) Evaluación de las Matrices Hessianas Acotadas en el punto crítico:

$$H_4^* = H_4(\,6,\ 6\,,3\,,\ -\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 & 16 \\ 8 & 0 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 0 & -2 \\ 16 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$H_3^* = H_3\,(6,\ 6\,,6\,,\ -\frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & -1 \\ 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7) Decisión:

Como $\left| H_4^* \right| = -1152 < 0$ y $\left| H_3^* \right| = -128 < 0$, entonces el punto $(\,6,\ 6\,,3\,,\ -\frac{2}{3})$ define un MÍNIMO RELATIVO.

En consecuencia, las dimensiones de la caja que permiten obtener área minima son : $x = y = 6,\ z = 3.$

Como se puede apreciar, la solución obtenida es igual a la obtenida en el Problema 4.7.

PROBLEMA 5.16

Encontrar el punto del plano $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ más cercano al origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

La distancia del punto $P(x\,, y,\ z)$ al origen de coordenadas la determina la relación $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Entonces, $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Sea $Z = f(x\,, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ la función objetivo.

La restricción consiste en que el punto $P(x\,, y,\ z)$ pertenece al plano $2x + 3y + 4z - 12 = 0$. En estas condiciones, se ha originado un problema de optimización forzada, que se plantea en los siguientes términos :

Minimizar $Z = f(x\,, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

sujeta a $2x+3y+4z-12=0$.

1) La función de Lagrange correspondiente es :

$$L(x\,,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda\big[2x+3y+4z-12=0\big].$$

2) Las primeras derivadas parciales de L :

$$L_x=2x+2\lambda\,,\quad L_y=2y+3\lambda,$$

$$L_z=2z+4\lambda \quad \text{y} \quad L_\lambda=\ 2x+3y+4z-12=0.$$

3) Resolver, para $x\,,y,z$ y λ el sistema

$$\begin{cases} 2x+2\lambda=0 & (1)\\ 2y+3\lambda=0 & (2)\\ 2z+4\lambda=0 & (3)\\ 2x+3y+4z-12=0\,. & (4)\end{cases}$$

De la ecuación (1) se obtiene $\lambda=\ -x,$ y de la ecuación (2) $\lambda=\ -\dfrac{2}{3}y$.

Por tanto,

$$x=\frac{2}{3}y\cdot \tag{5}$$

De la ecuación (3) se llega a $\lambda=\ -\dfrac{1}{2}z,$ y de la ecuación (2), $\lambda=\ -\dfrac{2}{3}y$.

Por consiguiente,

$$z=\frac{4}{3}y\cdot \tag{6}$$

Al reemplazar (5) y (6) en (4) se obtiene :

$$2\Big(\frac{4}{3}y\Big)+3y+4\Big(\frac{4}{3}y\Big)=12,$$

$$y=\frac{36}{29}.$$

Al sustituir en (5) y (6) se tiene que :

$$x=\frac{24}{29}\,;\ \ z=\frac{48}{29}\,;\lambda=\ -\ \frac{24}{29}\,.$$

Así, pues, el punto $\Big(\dfrac{24}{29},\ \dfrac{36}{29},\ \dfrac{48}{29},\ -\ \dfrac{24}{29}\Big)$ es el único punto crítico.

4) Calcular $L_{xx}\,,\ L_{yy},\,L_{zz},\,L_{xy},\ L_{xz},\ L_{yz},\,g_x\,,\,g_y$ y $g_{z.}$ Entonces:

$$L_{xx}=2\,,\qquad L_{xy}=\ 0,\qquad L_{yx}=0,$$

$$L_{yy}=2,\qquad L_{xz}=0,\qquad L_{zx}=0,$$

$$L_{yz}=0,\qquad L_{zy}=0,\qquad Lzz=2,$$

$$g_x = 2, \qquad g_y = 3, \qquad g_z = 4.$$

5) Determinación de las Matrices Hessianas Acotadas :

$$H_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

6) La evaluación de las Matrices Hessianas Acotadas en el punto crítico produce las mismas matrices del punto 5):

$$H_4^* = H_4\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}, -\frac{24}{29}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$H_3^* = H_3\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}, -\frac{24}{29}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

7) Decisión:

Como $\left| H_4^* \right| = -102 < 0$ y $\left| H_3^* \right| = -26 < 0$, entonces el punto $P\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ define un MÍNIMO RELATIVO.

En consecuencia, el punto $P\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ perteneciente al plano $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, es el más cercano al origen.

Para corroborar esta afirmación, basta encontrar la distancia entre el punto $P\left(\frac{24}{29}, \frac{36}{29}, \frac{48}{29}\right)$ y el origen de coordenadas:

$$D = \sqrt{\left(\frac{24}{29}\right)^2 + \left(\frac{36}{29}\right)^2 + \left(\frac{48}{29}\right)^2} \approx 2,228.$$

Además la distancia del plano $2x + 3y + 4z - 12 = 0$ al origen de coordenadas es :

$$D = \frac{\left| -12 \right|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{12}{\sqrt{29}} \approx 2,228.$$

NOTA

Este problema pudo resolverse de otra forma. Si $D = x^2 + y^2 + z^2$ es el cuadrado de la distancia entre el punto $P(x, y, z)$ y el origen, y dado que este punto pertenece al plano $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, entonces, al despejar z de esta última relación se tiene que $z = \frac{1}{4}(12 - 2x - 3y)$.

Al sustituir en la expresión del cuadrado de la distancia, se obtiene :

$$D = x^2 + y^2 + \frac{1}{16}(12 - 2x - 3y)^2.$$

Esta función es de dos variables y se pueden aplicar las técnicas de optimización explicadas en los Problemas 5.1 a 5.9.

6. DERIVADAS DIRECCIONALES, INCREMENTOS Y APROXIMACIONES

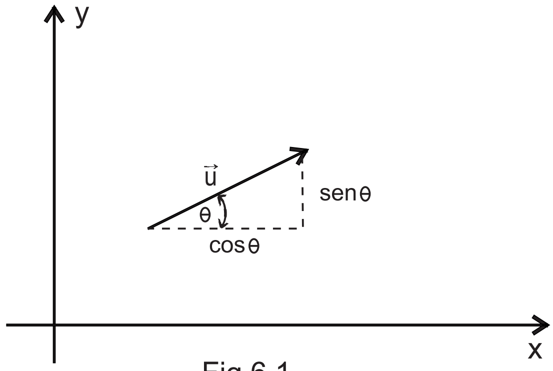

Fig.6.1.

6.1 Sea F una función de dos variables independientes x, y. Si el vector $\vec{u} = \langle cos\,\theta, sen\,\theta \rangle$ es unitario en $\mathbb{R}^2$, entonces la derivada direccional de F en la dirección del vector $\vec{u}$ se denota y define como :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\,cos\,\theta, y + hsen\,\theta) - F(x,y)}{h} , \tag{6.1}$$

si el límite existe.

6.2 Si F es diferenciable por x, y y $\vec{u} = \langle cos\,\theta, sen\,\theta \rangle$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^2$, entonces,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial F}{\partial x} cos\,\theta + \frac{\partial F}{\partial y} sen\,\theta , \tag{6.2}$$

o bien,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle \cdot \langle cos\,\theta, sen\,\theta \rangle, \tag{6.3}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F \cdot \vec{u}\,. \tag{6.4}$$

6.3 Si F es una función en tres varibles indepenientes x, y, z y $\vec{u}$ es un vector unitario definido como $\vec{u} = \langle cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\delta \rangle$ en $\mathbb{R}^3$, entonces la derivada direccional de F en la dirección del vector $\vec{u}$ se denota y define como

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \lim_{h \to 0} \frac{F(x + h\,cos\,\alpha, y + h\,cos\,\beta, z + h\,cos\,\delta\,) - F(x,y,z)}{h} , \tag{6.5}$$

si el límite existe.

6.4 Si F es diferenciable por x, y, z y $\vec{u} = \langle cos\,\alpha, cos\,\beta, cos\,\delta \rangle$ es un vector unitario en $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \frac{\partial F}{\partial x} cos\,\alpha + \frac{\partial F}{\partial y} cos\,\beta + \frac{\partial F}{\partial y} cos\,\delta, \tag{6.6}$$

o bien,

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right\rangle \cdot \left\langle cos\,\alpha\,, cos\,\beta\,, cos\,\delta \right\rangle, \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F \cdot \vec{u}\,.$$

6.5 Si F es una función de dos variables independientes x, y, entonces el **incremento** de F en el punto (x_0, y_0), se denota y define por :

$$\Delta F\,(x_0, y_0) = F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y). \tag{6.8}$$

6.6 La función F de dos variables independientes x, y es **diferenciable** en el punto (x_0, y_0) si y solo si

$$\Delta F\,(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y\,, \tag{6.9}$$

donde ϵ_1 y ϵ_2 son funciones de Δx y Δy tales que $\epsilon_1 \to 0$ y $\epsilon_2 \to 0$ cuando $(\Delta x,\ \Delta y) \to (0\,,\,0\,)$.

6.7 Si F es una función de dos variables x, y y diferenciable en (x, y), entonces la **diferencial total** de F se denota y define como :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\,. \tag{6.10}$$

6.8 Si F es una función de n variables independientes $x_1, x_2..., x_n$, y el punto $\overline{P}\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2..., \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces el **incremento** de F en el punto $\overline{P}$ se denota y define por :

$$\Delta F = F(\overline{x}_1 + \Delta x_1,\ \overline{x}_2 + \Delta x_2, ...,\ \overline{x}_n + \Delta x_2) - \ F(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n). \tag{6.11}$$

6.9 La función F de n variables independientes $x_1, x_2..., x_n$ es **diferenciable** en punto $\overline{P}\,(\overline{x}_1, \overline{x}_2..., \overline{x}_n) \in \mathbb{R}^n$, si y solo si

$$\Delta F(\overline{x}_1, \overline{x}_2..., \overline{x}_n) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(\overline{P})\Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}(\overline{P})\Delta x_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}(\overline{P})\Delta x_n$$
$$+ \epsilon_1 \Delta x_1 + \epsilon_2 \Delta x_2 + ... + \epsilon_n \Delta x_n, \tag{6.12}$$

donde $\epsilon_1 \to 0$, $\epsilon_2 \to 0, ..., \epsilon_n \to 0$, cuando $(\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n) \to (0\,,\,0\,, ..., 0\,)$.

6.10 Si F es una función de n variables $x_1, x_2..., x_n$ y diferenciable en $P(x_1, x_2..., x_n)$, entonces la **diferencial total** de F en P se denota y define como

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial F}{\partial x_n}dx_n. \tag{6.13}$$

PROBLEMA 6.1

Dada la función $F(x,y)=x^2-3y^2$ y $\vec{u}$ un vector unitario que forma un ángulo de $\pi/6$ con la parte positiva del eje x, hallar la derivada direccional de F según la dirección $\vec{u}$, por medio de la definición.

SOLUCIÓN

El vector unitario es $\vec{u}=\left\langle \cos\pi/6, \operatorname{sen}\pi/6\right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} &= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+\frac{\sqrt{3}}{2}, y+\frac{1}{2})-F(x,y)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left[\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-3\left(y+\frac{1}{2}\right)^2\right]-\left[x^2-3y^2\right]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+\sqrt{3}xh+\frac{3}{4}h^2-3y^2-3yh-\frac{3}{4}h^2-x^2+3y^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3}xh-3yh}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(\sqrt{3}x-3y)}{h} = \sqrt{3}x-3y.
\end{aligned}$$

De esta manera, la derivada de $F(x,y)=x^2-3y^2$, en la dirección del vector unitario $\vec{u}=\left\langle \cos\pi/6, \operatorname{sen}\pi/6\right\rangle$, es $\sqrt{3}x-3y$.

PROBLEMA 6.2

Resolver el Problema 6.1, aplicando la Fórmula 6.4.

SOLUCIÓN

Se encontró que $\vec{u}=\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle$. Además, $F(x,y)=x^2-3y^2$, entonces,

$$\nabla F=\left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right\rangle = \left\langle 2x, -6y\right\rangle.$$

Según la relación 6.4, se obtiene :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F\cdot\vec{u} = \left\langle 2x, -6y\right\rangle\cdot\left\langle \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right\rangle;$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = 2x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+(-6y)\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}x-3y.$$

PROBLEMA 6.3

Hallar la derivada de la función $F(x,y)=x^3-3x^2y+3xy^2+1$, en el punto $P(3,1)$ en la dirección que va desde este punto al punto $Q(6,5)$.

SOLUCIÓN

El vector unitario $\vec{u}$ se obtiene así :

$$\overrightarrow{PQ} = \langle 3, 4 \rangle; \; \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Luego, $\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \dfrac{1}{5}\langle 3, 4 \rangle = \Big\langle \dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5} \Big\rangle.$

Ahora bien, el gradiente de F en el punto (x, y) es :

$$\nabla F = \Big\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \Big\rangle = \langle 3x^2 - 6xy + 3y^2, \, -3x^2 + 6xy \rangle.$$

El gradiente de F en el punto $P(3, 1)$ es :

$$\nabla F(3, 1) = \langle 3(1)^2 - 6(3)(1) + 3(1)^2, \, -3(3)^2 + 6(3)(1) \rangle$$

$$\nabla F(3, 1) = \langle 12, \, -9 \rangle.$$

Por consiguiente, la derivada de F, en la dirección que va desde $P(3, 1)$ a $Q(6, 5)$, en el punto $P(3, 1)$, es :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(3, 1) \cdot \vec{u} = \langle 12, \, -9 \rangle \cdot \Big\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \Big\rangle,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \frac{36}{5} - \frac{36}{5} = 0.$$

PROBLEMA 6.4

Hallar la derivada de la función $F(x, y) = arctg(xy)$ en el punto $P(1, 1)$, en la dirección de la bisectriz del primer ángulo coordenado.

SOLUCIÓN

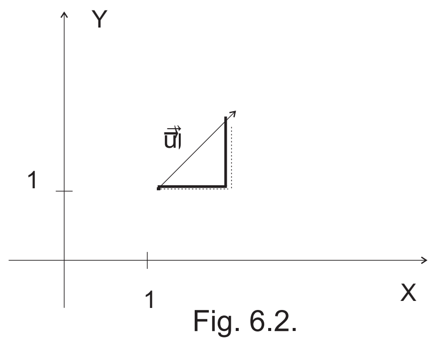

Fig. 6.2.

El vector unitario es $\vec{u} = \langle cos\,\pi/4, sen\,\pi/4 \rangle = \Big\langle \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Big\rangle.$

El gradiente de F es :

$$\nabla F = \Big\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \Big\rangle = \Big\langle \frac{y}{1 + x^2y^2}, \frac{x}{1 + x^2y^2} \Big\rangle.$$

El gradiente de F calculado en el punto $P(1, 1)$, es el vector :

$$\nabla F(1, 1) = \Big\langle \frac{1}{1 + 1}, \frac{1}{1 + 1} \Big\rangle = \Big\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \Big\rangle.$$

Por tanto, la derivada de $F(x,y) = arctg(xy)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$, en el punto $P(1,1)$, es :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(1,1) \cdot \vec{u} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

PROBLEMA 6.5

Hallar la derivada de la función $F(x,y) = ln\,(e^x + e^y)$ en el origen de coordenadas, en la dirección del rayo que forma un ángulo α con el eje de las abcisas.

SOLUCIÓN

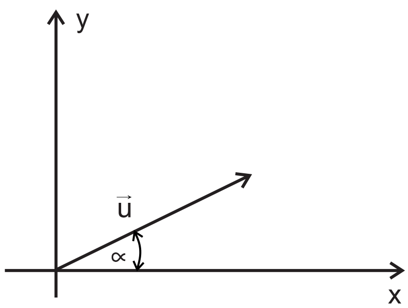

Fig. 6.3.

El gradiente de la función $F(x,y)$ es :

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{e^x}{e^x + e^y}, \frac{e^y}{e^x + e^y} \right\rangle.$$

El gradiente de F, calculado en el punto $O(0,0)$ es el vector :

$$\nabla F(1,1) = \left\langle \frac{1}{1+1}, \frac{1}{1+1} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Por tanto, la derivada de $F(x,y) = ln\,(e^x + e^y)$ en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \langle cos\,\alpha, sen\,\alpha \rangle$, en el punto $O(0,0)$, es :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(0,0) \cdot \vec{u} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle \cdot \langle cos\,\alpha, sen\,\alpha \rangle = \frac{cos\,\alpha + sen\,\alpha}{2}.$$

PROBLEMA 6.6

Hallar la derivada de la función $F(x,y) = ln\,(x+y)$ en el punto $P(1\,,2)$ perteneciente a la parábola $y^2 = 4x$, en la dirección de ésta.

SOLUCIÓN

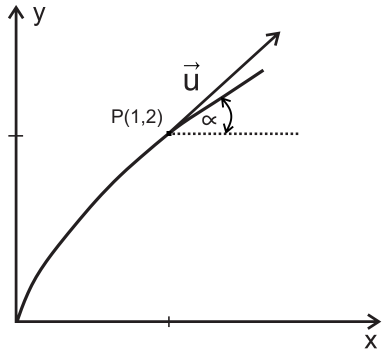

Fig. 6.4.

La dirección de la parábola $y^2 = 4x$, en el punto $P(1\,,2)$ la determina la derivada de la función calculada en ese punto. En efecto,

$$2yy' = 4; \qquad y' = \frac{2}{y}; \qquad y'(1,2) = \frac{2}{2} = 1.$$

Por tanto, $tg\,\alpha = 1$; es decir, $\alpha = \pi/4$.

Entonces, el vector unitario es:

$$\vec{u} = \left\langle cos\,\pi/4, sen\,\pi/4 \right\rangle = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle.$$

Ahora bien,

$$\nabla F = \left\langle \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{x+y}, \frac{1}{x+y} \right\rangle,$$

$$\nabla F(1,2) = \left\langle \frac{1}{1+2}, \frac{1}{1+2} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle.$$

En consecuencia, la derivada de $F(x,y) = ln\,(x+y\,)$, en el punto $P(1\,,2)$, en la dirección $\vec{u} = \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$, es:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(1,2) \cdot \vec{u} = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle \cdot \left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \frac{\sqrt{2}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

PROBLEMA 6.7

Hallar la derivada de la función de tres variables $F(x,y\,,z) = xy^2 + z^3 - xyz$, en el punto $P(1\,,1,2)$, en la dirección que forma ángulos de $60^o, 45^o$ y 60^o, respectivamente, con los ejes coordenados.

SOLUCIÓN

El vector unitario, según los datos del problema se define como :

$$\vec{u} = \left\langle cos\,60^o, cos\,45^o\,, cos\,60^o \right\rangle = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle.$$

Por otra parte,

$$\nabla F = \langle y^2 - yz,\ 2xy - xz,\ 3z^2 - xy \rangle,$$
$$\nabla F(1,1,2) = \langle 1^2 - 1(2),\ 2(1)(1) - 1(2),\ 3(1)^2 - 1(1) \rangle,$$
$$\nabla F(1,1,2) = \langle -1,\ 0,\ -11 \rangle.$$

Por consiguiente, la derivada de la función $F(x, y, z) = xy^2 + z^3 - xyz,$ en el punto $P(1, 1, 2)$, en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$, es :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(1,1,2) \cdot \vec{u} = \langle -1,\ 0,\ -11 \rangle \cdot \left\langle \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$

PROBLEMA 6.8

Hallar la derivada de la función de tres variables $F(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ en el punto $P(1, -1, 3)$, en la dirección que va desde este punto al punto $P(0, 1, 1)$.

SOLUCIÓN

El vector $\overrightarrow{PQ}$ se define como :

$$\overrightarrow{PQ} = \langle -1, 2, -2 \rangle. \text{ Entonces,}$$
$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Luego, el vector unitario en la dirección del vector $\overrightarrow{PQ}$, es :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = \frac{1}{3}\langle -1, 2, -2 \rangle = \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle.$$

Por otra parte,

$$\nabla F = \langle 2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z \rangle,$$
$$\nabla F(1, -1, 3) = \langle 2(1)(-1)^2(3)^2, 2(1)^2(-1)(3)^2, 2(1)^2(-1)^2(3) \rangle,$$
$$\nabla F(1, -1, 3) = \langle 18, -18, 6 \rangle.$$

Por tanto, la derivada de $F(x, y, z) = x^2y^2z^2$ en el punto $P(1, -1, 3)$, en la dirección que va desde este punto al punto $P(0, 1, 1)$ es

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(1, -1, 3) \cdot \vec{u} = \langle 18, -18, 6 \rangle \cdot \left\langle -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right\rangle$$
$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = -6 - 12 - 4 = -22.$$

PROBLEMA 6.9

La temperatura en cualquier punto (x, y, z) del espacio tridimensional, la determina la función $T(x, y, z) = \dfrac{60}{x^2 + y^2 + z^2 + 3}$, donde la distancia se mide en pulgadas.

a) Encontrar la rapidez de cambio de la temperatura en el punto $P(3, -2, 2)$, en la dirección del vector $\vec{A} = \langle -2, 3, -6 \rangle$.

b) Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio de T en $P(3, -2, 2)$.

SOLUCIÓN

La longitud del vector $\vec{A}$ es :

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

El vector unitario $\vec{u}$, en la dirección del vector $\vec{A}$, es :

$$\vec{u} = \frac{\vec{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{7}\langle -2, 3, -6 \rangle = \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7} \right\rangle.$$

Ahora bien, el gradiente de T es :

$$\nabla T(x, y, z) = \frac{-120}{(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2}\langle x, y, z \rangle.$$

El gradiente de T, calculado en el punto $P(3, -2, 2)$, es el vector

$$\nabla T(3, -2, 2) = \frac{-120}{(20)^2}\langle 3, -2, 2 \rangle = -\frac{3}{10}\langle 3, -2, 2 \rangle.$$

Por lo tanto,

a) La rapidez de cambio de T en el punto $P(3, -2, 2)$, en la dirección del vector $\vec{u}$, es :

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = \nabla T(3, -2, 2) \cdot \vec{u} = -\frac{3}{10}\langle 3, -2, 2 \rangle \cdot \left\langle -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{6}{7} \right\rangle,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{u}} = -\frac{3}{10}(6 - 6 - 12) = \frac{72}{10} = \frac{36}{5}.$$

b) La mayor rapidez de cambio de T, en el punto $P(3, -2, 2)$, la determina $\|\nabla T(3, -2, 2)\|$; esto es :

$$\|\nabla T(3, -2, 2)\| = \frac{3}{10}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 2^2} = \frac{3}{10}\sqrt{17}.$$

La dirección de mayor rapidez de cambio de T en el punto $P(3, -2, 2)$, es :

$$\vec{w} = \frac{\nabla T(3,\,-2,2)}{\|\nabla T(3,\,-2,2)\|} = \frac{-\frac{3}{10}\langle 3,\,-2,2\rangle}{\frac{3}{10}\sqrt{17}} =$$

$$\vec{w} = \Big\langle -\frac{3}{\sqrt{17}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{17}},\,-\frac{2}{\sqrt{17}}\Big\rangle.$$

PROBLEMA 6.10

Demostrar que derivada de la función $F(x,y\,,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ en cualquier punto $P(x\,,y\,,z)$, en la dirección que va desde este punto al origen de coordenadas, es :

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = -\frac{2F}{r},\ \text{donde}\ r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

SOLUCIÓN

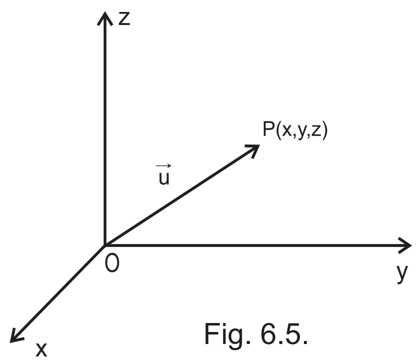

Fig. 6.5.

El vector originado en $P(x,y,z)$ y con punto final en $O(0,0,0)$ está definido por

$$\overrightarrow{PO} = \langle -x,\,-y,\,-z\rangle = -\langle x,\,y,\,z\rangle.$$

La longitud del vector $\overrightarrow{PO}$ es :

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2 + (-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Por tanto, el vector unitario en esa dirección es :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{PQ}}{\|\overrightarrow{PQ}\|} = -\frac{\langle x,\,y,\,z\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Por otra parte, el gradiente de F en cualquier punto $P(x\,,y\,,z)$ es :

$$\nabla F(x,y,z) = \Big\langle \frac{2x}{a^2}\,,\,\frac{2y}{b^2},\,\frac{2z}{c^2}\Big\rangle.$$

En consecuencia, la derivada de $F(x,y\,,z) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2}$ en cualquier punto $P(x\,,y\,,z)$, en la dirección que va desde este punto al origen de coordenadas es

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \nabla F(x,y,z)\cdot\vec{u} = \Big\langle \frac{2x}{a^2}\,,\,\frac{2y}{b^2},\,\frac{2z}{c^2}\Big\rangle\cdot\frac{-\langle x,\,y,\,z\rangle}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big(\frac{2x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} + \frac{2z^2}{c^2}\Big).$$

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{u}} = -\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\Big) = -\frac{2F}{r}.$$

PROBLEMA 6.11

El potencial eléctrico es V voltios en cualquier punto (x, y) del plano xy. Si el potencial se define por $V = e^{-2x} cos\, 2y$ y la distancia se mide en pies,

a) Calcular la rapidez de cambio del potencial en el punto $P(0, \pi/4)$, en la dirección del vector unitario $\vec{u} = \langle cos\, \pi/6, sen\, \pi/6\rangle$.

b) Encontrar la dirección y la magnitud de la máxima rapidez de cambio del potencial en el punto $P(0, \pi/4)$.

SOLUCIÓN

a) El gradiente de V en cualquier punto (x, y) es :

$$\nabla V(x,y) = \big\langle -2e^{-2x}\, cos 2y,\ -e^{-2x} sen\, 2y\big\rangle.$$

El gradiente calculado en el punto $P(0, \pi/4)$ es :

$$\nabla V(0, \pi/4) = \big\langle -2e^{0}\, cos\, \pi/2,\ -e^{0} sen\, \pi/2\big\rangle = \big\langle 0\,,\ -2\big\rangle.$$

Por tanto, la rapidez de cambio de V en la dirección del vector unitario $\vec{u}$ es :

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{u}} = \nabla V(0, \pi/4)\cdot \vec{u} = \big\langle 0\,,\ -2\big\rangle\cdot\big\langle cos\, \pi/6, sen\, \pi/6\big\rangle,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \vec{u}} = \big\langle 0\,,\ -2\big\rangle\cdot\big\langle \sqrt{3}/2,\ 1/2\big\rangle = -1.$$

b) La magnitud de la mayor rapidez de cambio en el punto $P(0, \pi/4)$ es :

$$\big\|\nabla V(0, \pi/4)\big\| = \big\|\big\langle 0\,,\ -2\big\rangle\big\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2.$$

Y la dirección de la mayor rapidez de cambio de V en el punto $P(0, \pi/4)$ es :

$$\frac{\nabla V(0, \pi/4)}{\big\|\nabla V(0, \pi/4)\big\|} = \frac{1}{2}\big\langle 0\,,\ -2\big\rangle = \big\langle 0\,,\ -1\big\rangle.$$

PROBLEMA 6.12

Si $F(x,y) = xy - 3y^2$, hallar :

a) ΔF c) ΔF y dF si $x = 3,\ y = 2,\ C = -0,01$ y $\Delta F = 0,02$

b) dF d) $F(4,12\,,\ 6,91)$

SOLUCIÓN

a) $\Delta F = F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x\,, y)$

$$= \left[(x+\Delta x)(y+\Delta y)-3(y+\Delta y)^2\right]-\left[xy-3y^2\right]$$

$$= xy+y\Delta x+x\Delta y+\Delta x\Delta y-3y^2-6y\Delta y-3(\Delta y)^2-xy+3y^2$$

$$= y\Delta x+(x-6y)\Delta y+\Delta x\Delta y-3(\Delta y)^2.$$

b) $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy=y\,dx+(x-6y)dy.$

c) $\Delta F=F(3-0,01\,,\,2+0,2)-F(3,2)$

$$= F(2,99\,,3,02)-F(3,2)$$

$$= (2,99)(2,02)-3(2,02)^2-(3)(2)+3(2)^2$$

$$= 6,0398-12,2412-6+12$$

$$= \,-0,2014.$$

Como $dx\approx\Delta x$ y $dy\approx\Delta y$, entonces, al reemplazar en la expresión obtenida en b), se tiene :

$$dF=2(\,-0,01)+(3-12)(0,02)$$

$$= \,-0,02-0,18=\,-0,2.$$

Nótese que ΔF y dF son aproximadamente iguales, debido a que $dx\approx\Delta x$ y $dy\approx\Delta y$.

d) $F(4,12\,,\,6,91)=F(4+0,12\,,7-0,09)$.

Por tanto, $x=4$, $\Delta x=0,12$, $y=7$, $\Delta y=\,-0,09$. Como $\Delta x\to 0$ y $\Delta y\to 0$ (son pequeños), entonces,

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)=F(x,y)+\Delta F\,;$$

o bien,

$$F(x+\Delta x,y+\Delta y)=F(x,y)+dF.$$

Puesto que $dy=y\,dx+(x-6y)\,dy$, entonces,

$$dF=7(0,12)+(4-42)(\,-0,09)$$

$$= 4,26.$$

Por otra parte,

$$F(4,7)=4(7)-3(7)^2$$

$$= 28-147=\,-119.$$

De esta manera,

$$F(4,12\,,\,6,91)=F(4,7)+dF(4,7)$$

$$= \,-119+4,12=\,-114,74.$$

El cálculo directo da como resultado :

$$F(4,12\,,\,6,91) = (4,12)(6,91) - 3(6,91)^2$$
$$= 28,462 - 143,2443 = \,-\,114,7751.$$

Conviene observar que los resultados obtenidos por medio de diferenciales son bastante "buenos", comparados con los obtenidos por medio de calculadora.

PROBLEMA 6.13

Calcular aproximadamente $ln\,(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$.

SOLUCIÓN

La función bivariable $F(x,y) = ln(\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{y} - 1)$ permite efectuar el cálculo aproximado, de esta manera :

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy\,,$$
$$= \frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}dx}{x^{1/3}+x^{1/4}-1} + \frac{\frac{1}{4}y^{-3/4}dy}{x^{1/3}+x^{1/4}-1}\,,$$
$$= \frac{dx}{3x^{2/3}(x^{1/3}+x^{1/4}-1)} + \frac{dy}{4y^{3/4}(x^{1/3}+x^{1/4}-1)}.$$

Para $x = 1,\ y = 1,\ \Delta x \approx dx = 0,03,\ \Delta y \approx dy = \,-\,0,02,$ se obtiene :

$$dF = \frac{0,03}{3(1)^{2/3}\left[1^{1/3}+1^{1/4}-1\right]} + \frac{-\,0,02}{4(1)^{3/4}\left[1^{1/3}+1^{1/4}-1\right]}\,,$$

$$dF = \frac{1}{100} - \frac{1}{200} = 0,01 - 0,005 = 0,005.$$

Por otra parte,

$$F(1,1) = ln(1^{1/3} + 1^{1/4} - 1) = ln\,1 = 0.$$

En consecuencia, el valor aproximado de $ln\,(\sqrt[3]{1,03} + \sqrt[4]{0,98} - 1)$ es :

$$F\,(1+0,03\,,\,1-0,02) = F(1,1) + dF$$
$$= 0 + 0,005 = 0,005.$$

PROBLEMA 6.14

a) Por medio de diferenciales, calcular el valor de $\left[\sqrt{15} + \sqrt{99}\right]^2$.

b) Calcular, además, el error cometido entre los valores obtenidos por calculadora y diferenciales.

SOLUCIÓN

a) Considérese la función $F(x,y) = \left[\sqrt{x} + \sqrt{y}\right]^2$

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy,$$

$$dF = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}}dx + \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}}dy.$$

Al reemplazar los valores de $x = 16,\ y = 100,\ dx = -1,\ dy = -1,$ en la expresión del diferencial de F, se obtiene :

$$dF = \frac{4 + 10}{4}(-1) + \frac{4 + 10}{10}(-1)$$

$$dF = -\frac{7}{2} - \frac{7}{5} = -\frac{49}{10} = -4,9.$$

Por otra parte,

$$F(16,100) = \left[\sqrt{16} + \sqrt{100}\right]^2 = (4 + 10)^2 = 14^2 = 196.$$

En consecuencia, el cálculo aproximado es :

$$\left[\sqrt{15} + \sqrt{99}\right]^2 = F(16,100) + dF$$

$$= 196 - 4,9 = 191,1.$$

b) El valor estimado por calculadora es :

$$\left[\sqrt{15} + \sqrt{99}\right]^2 = 191,0713955.$$

Entonces, el error cometido entre los cálculos obtenidos por calculadora y por diferenciales es :

$$E\% = \frac{191,1 - 191,0713955}{191,1} * 100\% = \ = 0,0149\%.$$

PROBLEMA 6.15

Al medir un bloque de madera, han resultado para sus dimensiones los valores de $15,\ 18$ y 24 cms, con un error probable de $0,01$.

a) Hallar aproximadamente el error cometido al calcular el volumen total del bloque.

b) Calcular el error relativo del volumen como consecuencia de los errores cometidos en las medidas individuales.

SOLUCIÓN

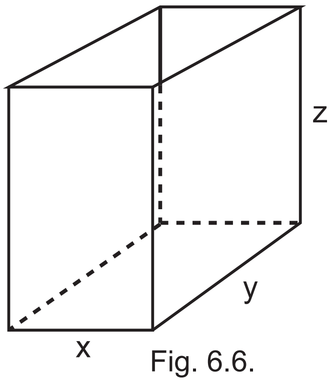

Fig. 6.6.

Sean x, y, z las dimensiones del bloque de madera en cms. Entonces, su volumes es :

$$V = xyz \ \ cm^3. \tag{1}$$

El volumen aproximado del error se calcula mediante ΔV y dado que $\Delta V \approx dV$, entonces,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz,$$

$$dV = yz\,dx + xz\,dy + \ xy\,dz\,. \tag{2}$$

Al tomar $x = 15\ cm,\ y = 18\,cm$ y $z = 24\,cm$ y asumiendo que los errores son del mismo signo (positivos por ejemplo), es decir $dx = dy = dz = \ 0,01\,cm$ y al reemplazar en (2), se tiene :

$$dV = (18)(24)(0,01) + (15)(24)(0,01) + \ (15)(18)(0,01),$$

$$dV = 4,32 + 3,6 + 2,7 = 10,62\,cm^3.$$

Esto significa que el máximo error cometido con esas medidas es de $10,62\,cm^3$.

b) El error relativo, porcentualmente, se expresa como :

$$E\% = \frac{dV}{V}*100\% = \frac{10,62}{(15)(18)(24)}*100\% = 0,16388\%.$$

PROBLEMA 6.16

Hallar aproximadamente la variación que experimenta la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y $4\ pg,$ cuando el cateto más corto se alarga en $1/4\ pg$ y el otro se acorta en $1/4\ pg.$ Calcular además, la variación exacta y el error en la variación por diferenciales y de manera exacta.

SOLUCIÓN

Sean x pulgadas la longitud del cateto más corto y y pulgadas la del otro cateto. PorTeorema de Pitágoras, se tiene :

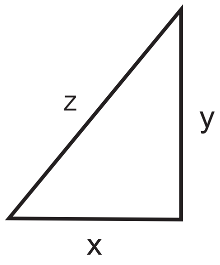

Fig. 6.7.

$$z = x^2 + y^2;$$
$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$
$$dz = \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Al reemplazar $x = 3,\ y = 4,\ dx = 1/4 = 0,25,\ dy = -1/8 = -0,125,$ en la expresión de $dz,$ se llega a :

$$dz = \frac{3(0,25) + 4(-0,125)}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{0,25}{5} = 0,05 \text{ pulgadas.}$$

Esto significa que la hipotenusa se "alarga" en $0,05$ pulgadas y, entonces, su longitud es de $z_d = 5 + 0,05 = 5,05$ pulgadas.

Ahora bien, la longitud exacta de la hipotenusa es :

$$z_e = \sqrt{(3 + 1/4)^2 + (4 - 1/8)^2},$$
$$z_e = \sqrt{(3 + 1/4)^2 + (4 - 1/8)^2},$$
$$z_e = 5,050748 \text{ pulgadas.}$$

Finalmente, el error cometido entre el cálculo aproximado y el exacto es :

$$E\% = \frac{z_e - z_d}{z_e} * 100\% = \frac{5,050748 - 5,05}{5,050748} * 100\% = 1,138\%.$$

PROBLEMA 6.17

Una lata metálica en forma de cilindro circular recto tiene una altura interior de 15 cm, un radio interior de 5 cm y un espesor de 1/10 cm.

a) Calcular, por medio de aproximaciones, el volumen del metal para fabricación de la lata.

b) Hallar el volumen exacto del metal de fabricación.

c) Determinar el error cometido entre el cálculo aproximado y el exacto.

SOLUCIÓN

El volumen del cilindro circular recto de radio x y altura y se calcula mediante la expresión :

$$V = \pi x^2 y \text{ cm}^3.$$

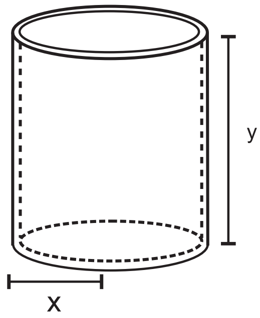

Fig. 6.8.

El volumen del material para manufacturar la lata se calcula mediante la diferencial del volumen; esto es,

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy,$$

$$dV = 2\pi\, xy\, dx + \pi\, x^2 dy.$$

Al reemplazar $x = 5,\ y = 15,\ dx = 0,01,\ dy = 0,02,$ en la expresión de la diferencial del volumen, se obtiene :

$$dV = 2\pi\,(5)(10)(0,1) + \pi\,(5)(0,2)$$

$$dV = 15\pi + 5\pi = 20\pi \text{ cm}^3.$$

b) Para calcular el valor exacto del volumen de material de manufactura de la lata, se calcula su volumen externo y, luego, el volumen interno. La diferencia de los volúmenes es el valor exacto buscado.

Sean V_e el volumen externo y V_i el volumen interno. Entonces,

$$V_e = \pi(5,1)^2(15,2) = 395,35\pi \text{ cm}^3.$$

$$V_i = \pi(5)^2(15) = 375\pi \text{ cm}^3.$$

Por tanto, el volumen exacto del material de manufactura es :

$$V = V_e - V_i = 395,35\pi - 375\pi = 20,352\pi \text{ cm}^3.$$

c) El error cometido entre el cálculo aproximado y el exacto es :

$$E\% = \frac{V - dV}{V} * 100\% = \frac{20,352\pi - 20\pi}{20,352\pi} * 100\% = 1,729\%.$$

7. INTEGRALES MÚLTIPLES

7.1 INTEGRAL DOBLE

Sea $z = f(x, y)$ una función continua en una región finita $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$. Divídase esta región $\mathcal{R}$ (Figura. 7.1) en n subregiones $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, ..., \mathcal{R}_n$, cada una de ellas de área $\Delta_1 A, \Delta_2 A, ..., \Delta_n A,$ respectivamente.

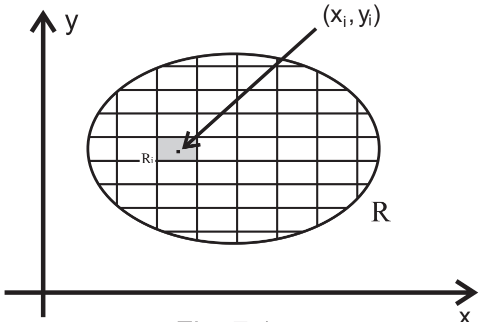

Fig. 7.1.

En cada subregión $\mathcal{R}_i$, tómese un punto $P_i(x_i, y_i)$ y fórmese la suma :

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k, y_k)\Delta_k A = f_1(x_1, y_1)\Delta_1 A + f_2(x_2, y_2)\Delta_2 A + ... + f_n(x_n, y_n)\Delta_n A . \qquad (7.1)$$

Defínase el diámetro λ_i de cada subregión $\mathcal{R}_i$, como la mayor distancia entre dos puntos cualesquiera interiores a la subregión $\mathcal{R}_i$, y sea λ_n el máximo diámetro de las subregiones.

Si se supone que el número de subregiones crece de manera que $\lambda_n \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces se define la integral doble de la función f sobre la región $\mathcal{R}$ como :

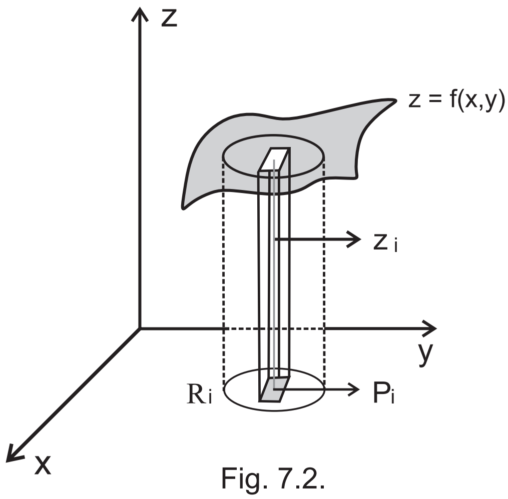

Fig. 7.2.

$$\int\int_{\mathcal{R}} f(x, y)\, dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k, y_k)\Delta_k A . \qquad (7.2)$$

Si $z = f(x, y)$ no se hace negativa en ningún punto de $\mathcal{R}$, la integral doble (7.2) se puede interpretar como el volumen del sólido limitado por $\mathcal{R}$ y por la superficie cuya ecuación es $z = f(x, y)$.

Conviene anotar que si el límite que aparece en la expresión (7.2) existe, entonces se dice que la función $f(x, y)$ es integrable en $\mathcal{R}$.

Un término cualquiera $f_i(x_i, y_i)\Delta_i A$ de (7.1) representa el volumen de una columna vertical levantada desde la región elegida $\mathcal{R}_i$ hasta la superficie $z = f(x, y)$. Para el caso en que $f(x, y) = 1$, la integral

$$\iint_{\mathcal{R}} dA.$$

calcula el área de la región $\mathcal{R}$.

7.1.1 Propiedades de la integral doble

Al igual que la integral de una función de una variable definida sobre un intervalo de números reales, la integral doble sobre una región $\mathcal{R}$ del plano tiene propiedades similares.

Si las funciones $f(x, y)$ y $g(x, y)$ son integrables sobre la región $\mathcal{R}$, y α es una constante, son válidas las siguientes propiedades :

a) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \Big[f(x, y) + g(x, y)\Big] dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA + \iint_{\mathcal{R}} g(x, y) dA.$

b) $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \alpha f(x, y) dA = \alpha \iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA.$

c) Si $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y) dA = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x, y) dA + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x, y) dA.$$

7.2 INTEGRAL DOBLE ITERADA

7.2.1 Sea $z = f(x, y)$ una función integrable en una región rectangular $\mathcal{R}$ limitada por $a \le x \le b$, $c \le y \le d$.

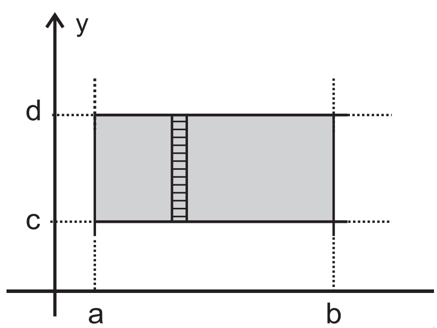

Fig. 7.3.1.

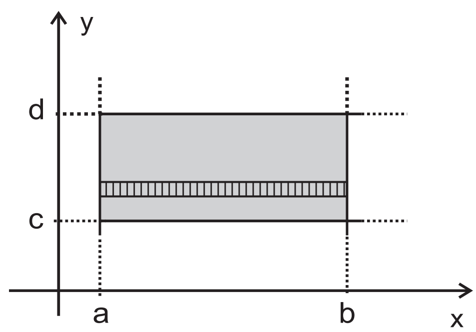

Fig. 7.3.2.

Entonces la integral doble sobre $\mathcal{R}$ se puede escribir como:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy\,dx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx\,dy. \qquad (7.3)$$

Las integrales que aparecen en la expresión (7.3) con límites superiores a y b, e inferiores c y d se llaman **integrales dobles iteradas** y son válidas siempre y cuando $z = f(x,y)$ sea continua en la región rectangular $\mathcal{R}$.

Por otra parte, en la Figura 7.3.1 se observa un elemento diferencial de área correspondiente a la integral doble iterada $\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$, y en la Figura 7.3.2 se observa un elemento diferencial de área horizontal correspondiente a la integral doble iterada $\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$.

7.2.2 Sea $z = f(x,y)$ una función integrable en una región $\mathcal{R}$ limitada por $a \leq x \leq b$, $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, donde $\phi_1(x)$ y $\phi_2(x)$ son funciones continuas en todo punto del intervalo $[\,a\,,b\,]$. (Figura 7.4).

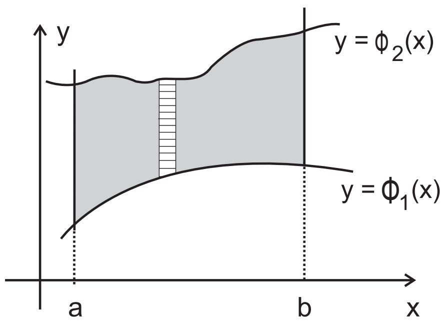

Fig. 7.4.

Entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dy\,dx. \qquad (7.4)$$

7.2.3 Sea $z = f(x,y)$ una función integrable en una región $\mathcal{R}$ limitada por $c \leq x \leq d$, $\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$, donde $\psi_1(y)$ y $\psi_2(y)$ son funciones continuas en todo punto del intervalo $[\,c\,,d\,]$. (Figura 7.5).

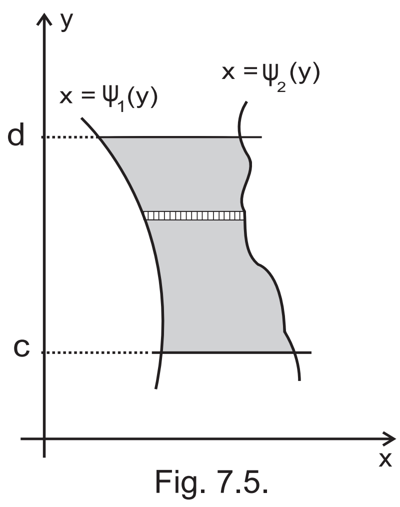

Fig. 7.5.

La integral doble iterada correspondiente se escribe como

$$\int\!\!\int_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx\,dy\,. \tag{7.5}$$

7.3 ÁREA DE SUPERFICIE

Sea $z = f(x,y)$ una función bivariable. Si z, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ son continuas en una región $\mathcal{R}$ del plano xy, entonces el área de la superficie S, cuya ecuación es $z = f(x,y)$ limitada por $\mathcal{R}$, es :

$$A_S = \int\!\!\int_{\mathcal{R}} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\, dA\,. \tag{7.6}$$

Si $\mathcal{R}_1$ se proyecta sobre el plano xz, entonces el área de superficie es :

$$A_S = \int\!\!\int_{\mathcal{R}_1} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial y}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial y}{\partial z}\right]^2}\, dA\,. \tag{7.7}$$

Si $\mathcal{R}_2$ se proyecta sobre el plano zy, entonces el área de superficie es :

$$A_S = \int\!\!\int_{\mathcal{R}_2} \sqrt{1 + \left[\frac{\partial x}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial x}{\partial z}\right]^2}\, dA\,. \tag{7.8}$$

7.4 INTEGRAL TRIPLE

La integral triple de una función $w = f(x,y,z)$ sobre una región $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}^3$ no es más que una generalización de la integral doble y se escribe :

$$I = \iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,dV\,. \tag{7.9}$$

Si $f(x,y,z) = 1$, entonces la integral $\displaystyle\iiint_{\mathcal{R}} dV$ calcula el volumen de la región $\mathcal{R}$.

7.4.1 Integrales triples iteradas

Son integrales triples iteradas las siguientes :

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,dV = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx,$$

$$= \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dx\,dy, \text{ etc.}$$

Se toman los límites de integración de forma que cubran la totalidad de la región $\mathcal{R}$.

7.5 COORDENADAS CILÍNDRICAS Y ESFÉRICAS

7.5.1 Un punto P de $\mathbb{R}^3$ se determina por la triada (r, θ, z), donde :

r : distancia del origen al punto proyección de P sobre el plano xy,

θ : ángulo que forma r con la parte positiva del eje x,

z : distancia del punto al plano xy.

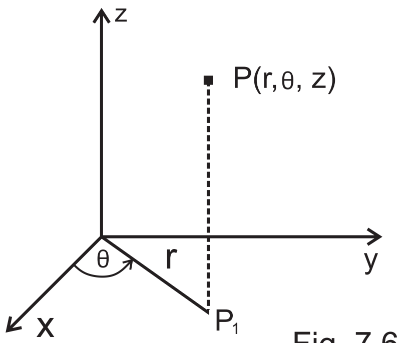

Fig. 7.6.

Las ecuaciones de transformación son :

$$x = rcos\,\theta, \quad y = rsen\,\theta, \quad z = z.$$

Para la función $f(x, y, z)$, la integral triple, en coordenadas cilíndricas, se escribe como :

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} f(x, y, z)\,dV = \iiint\limits_{\overline{\mathcal{R}}} f(rcos\,\theta, rsen\,\theta, z)\,r\,dr\,d\theta, \ r > 0,$$

donde $\overline{\mathcal{R}}$ es la región en coordenadas cilíndricas correspondiente a $\mathcal{R}$, y

$$r = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)}$$ se llama jacobiano de la transformación.

7.5.2 Un punto P de $\mathbb{R}^3$ está determinado por la terna $(\rho\,, \theta, \phi)$, donde :

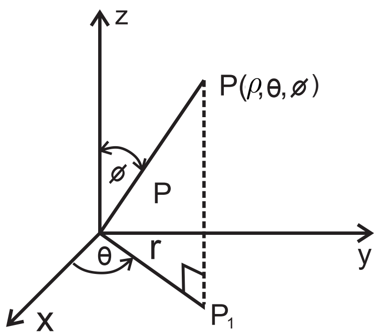

Fig. 7.7.

ρ : distancia del origen al punto P, $\rho > 0$,

θ : el mismo ángulo definido en coordenadas cilíndricas;

ϕ : ángulo que forma ρ con la parte positiva del eje z.

Las ecuaciones de transformación son :

$$x = \rho\ sen\phi\ cos\,\theta, \qquad y = \rho\ sen\phi\ sen\,\theta, \qquad z = \rho\ cos\,\phi.$$

Para la función $f(x, y, z)$, la integral triple, en coordenadas esféricas, se expresa como :

$$\iiint\limits_{\overline{\mathcal{R}}} f(\rho\ sen\phi\ cos\,\theta, \rho\ sen\phi\ sen\,\theta, \rho\ cos\,\phi)\, \rho^2 sen\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta,$$

donde $\overline{\mathcal{R}}$ es la región en coordenadas esféricas, correspondiente a $\mathcal{R}$ y

$$\rho^2 sen\phi = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho\,, \theta, \phi)}$$ es el jacobiano de la transformación.

PROBLEMA 7.1

Encontrar el valor aproximado de la integral doble de la función $f(x, y) = xy + 3y^2$ sobre la región rectangular $-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4.$

SOLUCIÓN

En la Figura 7.8 se observa la región $\mathcal{R}$, limitada por $-1 \leq x \leq 1$ y $0 \leq y \leq 4$.

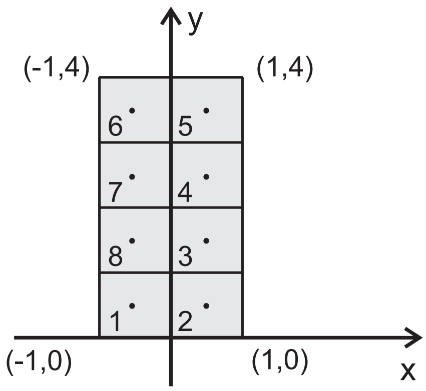

Fig. 7.8.

Se va a adoptar una partición consistente en dividir la región rectangular en ocho cuadrados, cada uno de ellos de lado uno, y, por consiguiente, de área 1 u^2. El punto $(x_i\,,\, y_i)$, perteneciente a cada cuadrado, es el centro geométrico de cada uno, aunque pudo tomarse otro punto cualquiera, a condición de que pertenezca al cuadrado considerado.

Con base en estos datos, se procede a conformar la siguiente tabla.

Conviene observar que los términos de la columna $f(x_i, y_i)\Delta A_i$ son los términos de la suma de Riemann, constituida por ocho sumandos; su suma es precisamente el valor aproximado de la integral doble de la función $f(x, y) = xy + 3y^2$ sobre la región rectangular $-1 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 4.$

$\mathcal{R}_i$	ΔA_i	(x_i, y_i)	$f(x_i, y_i)$	$f(x_i, y_i)\Delta A_i$
1	1	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	1	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	1	1
3	1	$(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	$\frac{15}{2}$	$\frac{15}{2}$
4	1	$(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	20	20
5	1	$(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$	$\frac{77}{2}$	$\frac{77}{2}$
6	1	$(-\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$	35	35
7	1	$(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$	$\frac{35}{2}$	$\frac{35}{2}$
8	1	$(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$	6	6
			$\sum$	126

Así, la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} (xy + 3y^2)\,dA$ tiene un valor aproximado de 126.

PROBLEMA 7.2

Calcular la integral doble del problema 7.1, como una integral doble iterada sobre la región $-1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 4$.

SOLUCIÓN

Al utilizar elementos de área verticales (Figura 7.9), la integral doble se calcula así:

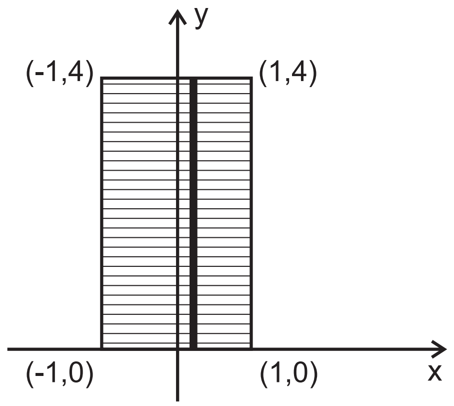

Fig. 7.9.

$$\iint_{\mathcal{R}} (xy + 3y^2)\,dA = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{4} (xy + 3y^2)\,dy\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\frac{1}{2}xy^2 + y^3\right]_0^4 = \int_{-1}^{1} (8x + 64)\,dx$$

$$= \left[4x^2 + 64x\right]_{-1}^{1} = 4 + 64 - 4 + 64 = 128.$$

Ahora, al utilizar elementos diferenciales de área horizontales (Figura 7.10), se tiene :

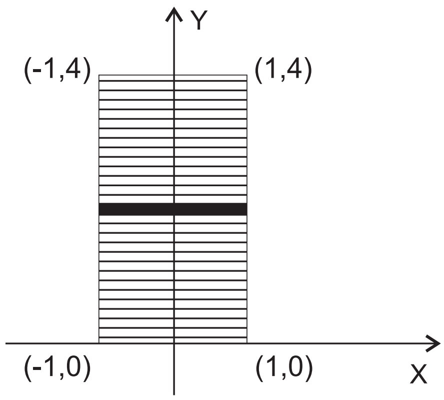

Fig. 7.10.

$$\int\!\!\int_{\mathcal{R}} (\,xy + 3y^2\,)dA = \int_0^4 \int_{-1}^1 (\,xy + 3y^2\,)\,dx\,dy,$$

$$= \int_0^4 \Big[\frac{1}{2}x^2y + 3y^2x\Big]_{-1}^1 = \int_0^4 6y^2\,dy,$$

$$= 2\Big[y^3\Big]_0^4 = 2(4^3) = 128.$$

PROBLEMA 7.3

Calcular la integral doble $\int\!\!\int_{\mathcal{R}} (\,2x + y)^4 dA$ donde $\mathcal{R}$ es el rectángulo cuyos vértices son los puntos $O(0,0),\ A(0,2),\ B(1,2)$ y $C(1,0)$.

SOLUCIÓN

Por medio de elementos de área verticales, se tiene (Figura 7.11) :

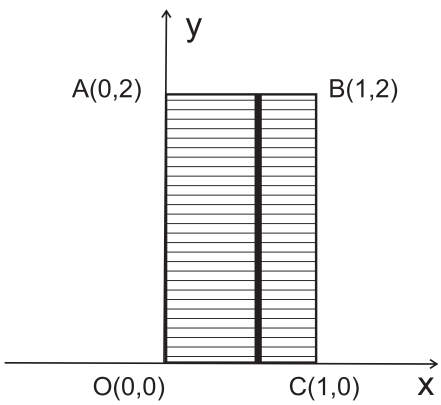

Fig. 7.11.

$$\int\!\!\int_{\mathcal{R}} (\,2x + y)^4 dA = \int_0^1 \int_0^2 (\,2x + y)^4\,dy\,dx\,,$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \Big[(\,2x + y)^5\Big]_0^2 dx\,,$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^1 \Big[(2x+2)^5 - (2x)^5\Big]_0^2 dx\,,$$

$$= \left[\frac{1}{60}(2x+2)^6 - \frac{32}{30}x^6\right]_0^1\,,$$

$$= \frac{4096}{60} - \frac{16}{15} - \frac{64}{60} = \frac{992}{15}.$$

Por medio de elementos diferenciales de área horizontales (Figura 7.12) se llega a :

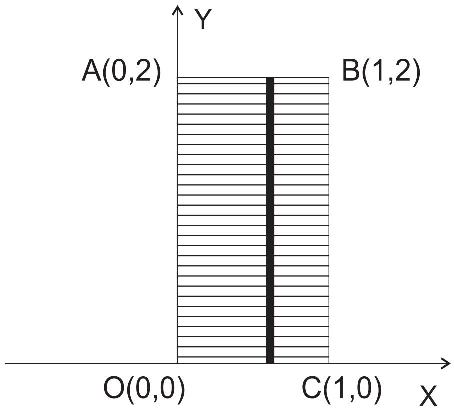

Fig. 7.12.

$$\iint_{\mathcal{R}} (2x+y)^4 dA = \int_0^2\int_0^1 (2x+y)^4\, dx\, dy,$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^2 \Big[(2x+y)^5\Big]_0^1 dy,$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^2 \Big[(2+y)^5 - y^5\Big] dy,$$

$$= \left[\frac{1}{60}(2+y)^6 - \frac{1}{60}y^6\right]_0^2,$$

$$= \frac{4096}{60} - \frac{32}{60} - \frac{64}{60} = \frac{992}{15}.$$

PROBLEMA 7.4

Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dA$, donde $\mathcal{R}$ es el rectángulo $1 \le x \le 4,\ 1 \le y \le 2$.

SOLUCIÓN

a) Por elementos de área verticales (Figura 7.13), se tiene :

$$\iint_{\mathcal{R}} \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dA = \int_1^4\int_1^2 \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) dy\, dx\,,$$

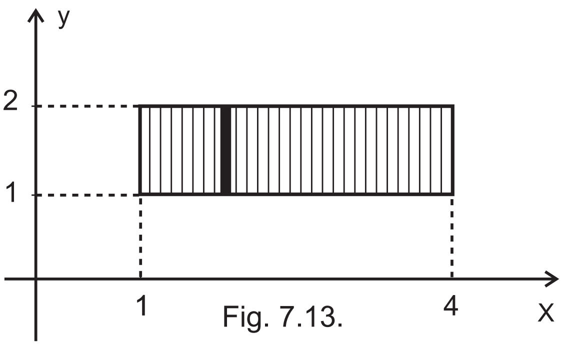

Fig. 7.13.

$$\int\!\!\int_{\mathcal{R}}\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)dA \;= \int_1^4 \Big[\Big(x\,ln\,y+\frac{1}{2x}y^2\Big]_1^2 dx,$$

$$= \int_1^4 \Big((ln\,2)\,x+\frac{2}{x}-\frac{1}{2x}\Big)\,dx,$$

$$= \Big[\Big(\frac{1}{2}ln\,2\Big)x^2-\frac{3}{2}ln\,x\Big]_1^4,$$

$$= 8\,ln\,2-3\,ln\,2-\frac{1}{2}ln\,2=\frac{9}{2}ln\,2.$$

b)La utilización de elementos de área horizontales (Figura 7.14), conduce a :

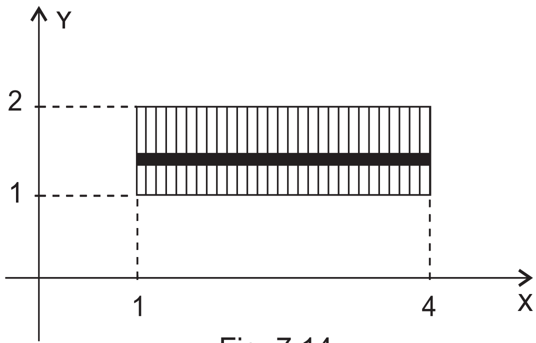

Fig. 7.14.

$$\int\!\!\int_{\mathcal{R}}\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)dA \;= \int_1^2\int_1^4\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)\,dx\,dy$$

$$= \int_1^2 \Big[\Big(\frac{1}{2y}x^2+y\,ln\,x\Big]_1^4 dy$$

$$= \int_1^2 \Big(\frac{8}{y}+(2\,ln\,2)y-\frac{1}{2y}\Big)\,dy$$

$$= \Big[\Big(\frac{15}{2}ln\,y-(ln\,2)\,y^2\Big]_1^2$$

$$= \frac{15}{2}ln\,2+4\,ln\,2-ln\,2$$

$$= \frac{9}{2}ln\,2.$$

PROBLEMA 7.5

Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{2x+y}\,dA$, donde $\mathcal{R}$ es el rectángulo limitado por $1 \leq x \leq ln5,\ 1 \leq y \leq ln\,2$.

SOLUCIÓN

a) Por elementos de área verticales (Figura 7.15), se tiene :

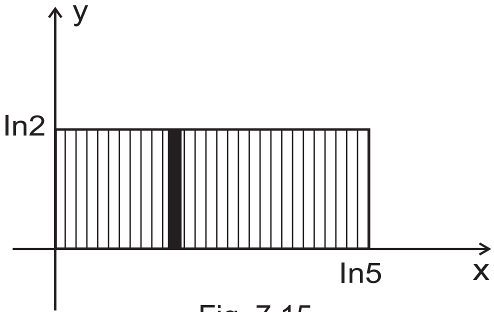

Fig. 7.15.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} e^{2x+y}\,dA &= \int_0^{ln\,5}\int_0^{ln\,2} e^{2x+y}\,dy\,dx,\\
&= \int_0^{ln\,5} e^{2x}\Big[e^{y}\Big]_0^{ln\,2} dx,\\
&= \int_0^{ln\,5} e^{2x}\Big(e^{ln\,2} - e^{0}\Big)dx,\\
&= \int_0^{ln\,5} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}\Big[e^{2x}\Big]_0^{ln\,5},\\
&= \frac{1}{2}\Big(e^{2ln5} - e^{0}\Big) = \frac{1}{2}(25-1) = 12.
\end{aligned}$$

a) Por elementos de área horizontales (Figura 7.16); se tiene :

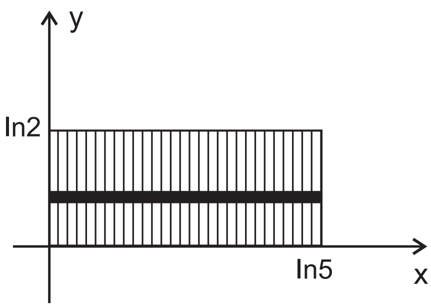

Fig. 7.16.

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{2x+y}\,dA = \int_0^{ln\,2}\int_0^{ln\,5} e^{2x+y}\,dy\,dx,$$

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{2x+y}\,dA = \frac{1}{2}\int_0^{ln\,5} e^{y}\Big[e^{2x}\Big]_0^{ln\,5} dy,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{ln2}\left(e^{2ln\,5} - e^0\right)e^y\,dy,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{ln\,2}(25-1)\,e^y\,dy = \frac{24}{2}\int_0^{ln\,2} e^y dy,$$

$$= 12\Big[e^y\Big]_0^{ln\,2} = 12(2-1) = 12.$$

PROBLEMA 7.6

Calcular la integral doble iterada $\displaystyle\int_{-3}^{3}\int_0^1 \frac{xy^2}{x^2+1}\,dx\,dy.$

SOLUCIÓN

Para calcular esta integral, tal como está planteada se deben utilizar elementos de área horizontales (Figura 7.17), así :

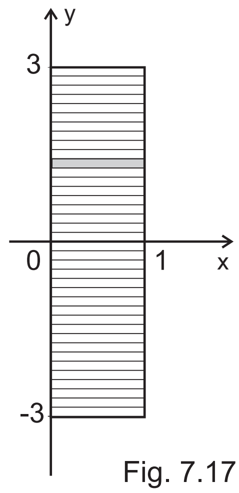

Fig. 7.17.

$$\int_{-3}^{3}\int_0^1 \frac{xy^2}{x^2+1}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_{-3}^{3} y^2\Big[ln(x^2+1)\Big]_0^1 dy,$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-3}^{3}(ln\,2 - ln\,1)\,y^2 dy,$$

$$= \frac{1}{2}ln\,2\int_{-3}^{3} y^2 dy = \frac{1}{6}ln\,2\Big[y^3\Big]_{-3}^{3},$$

$$= \frac{1}{6}(ln\,2)\,(27+27) = \frac{54}{6}\,ln\,2 = 9\,ln2.$$

Ahora, al cambiar el orden de integración, el cálculo se hace por medio de elementos de área verticales (Figura 7.18). En consecuencia :

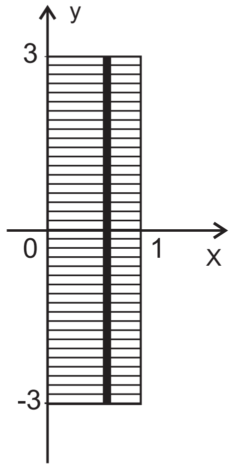

Fig. 7.18.

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_{-3}^3 \frac{xy^2}{x^2+1}\,dy\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\Big[y^3\Big]_{-3}^3 dx,\\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 (27+27)\frac{x}{x^2+1}dx,\\ &= \frac{54}{3}\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{18}{2}\Big[ln\,(x^2+1)\Big]_0^1,\\ &= 9\,(ln\,2 - ln\,1) = 9\,ln2.\end{aligned}$$

PROBLEMA 7.7

Calcular la integral doble iterada $\displaystyle\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\;dy\,dx.$

SOLUCIÓN

a) Por medio de elementos de área verticales (Figura 7.19), se tiene :

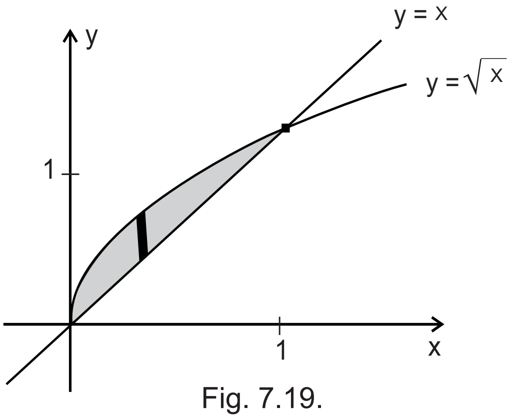

Fig. 7.19.

$$\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}} (y+y^3)\;dy\,dx = \int_0^1 \Big[\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}y^4\Big]_x^{\sqrt{x}} dx\,,$$

$$\int_0^1\int_x^{\sqrt{x}}(y+y^3)\;dy\,dx \;=\left[\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{20}x^5\right]_0^1 ,$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{20}=\frac{7}{60}.$$

b) Por medio de elementos de área horizontales (Figura 7.20), se debe invertir el orden de integración. En consecuencia la integral doble iterada se calcula así:

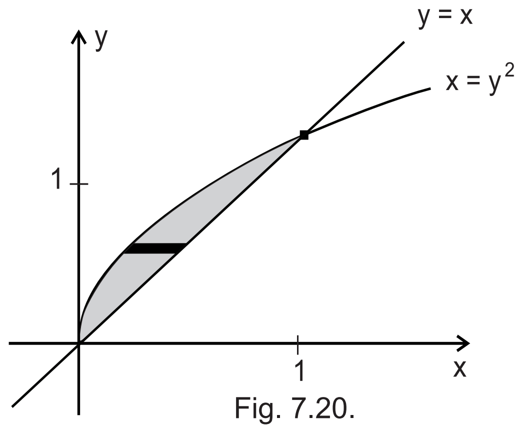

Fig. 7.20.

$$\int_0^1\int_{y^2}^{y}(y+y^3)\;dx\,dy \;=\int_0^1(y+y^3)\Big[x\Big]_{y^2}^{y}dy\,,$$
$$=\int_0^1(y+y^3)(y-y^2)\,dy\,,$$
$$=\int_0^1(\,-y^5+y^4-y^3+y^2)\,dy,$$
$$=\Big[-\frac{1}{6}y^6+\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{4}y^4+\frac{1}{3}y^3\Big]_0^1,$$
$$=-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}$$
$$=\frac{7}{60}.$$

PROBLEMA 7.8

Calcular la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2}dA$, donde $\mathcal{R}$ es la región del plano limitada por $y=\dfrac{1}{3}x,\; x=3,\; y=0.$

SOLUCIÓN

La región $\mathcal{R}$ es un triángulo rectánculo. (Figura 7.21). Al utilizar elementos de área verticales, se tiene :

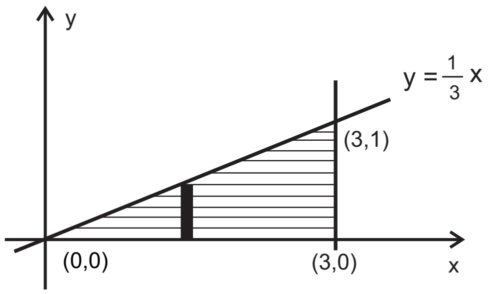

Fig. 7.21.

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2} dA = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{3}x} e^{x^2} dy\, dx\,,$$

$$= \int_0^1 e^{x^2} \Big[y\Big]_0^{\frac{1}{3}x} dx = \int_0^1 e^{x^2} \Big(\frac{1}{3}x - 0\Big) dx\,,$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{6}\int_0^1 2x e^{x^2} dx\,,$$

$$= \frac{1}{6}\Big[e^{x^2}\Big]_0^3 = \frac{1}{6}\Big(e^9 - e^0\Big) = \frac{1}{6}\Big(e^9 - 1\Big).$$

Ahora bien, al realizar el cálculo por medio de elementos diferenciales de área horizontales (Figura 7.22), se tiene :

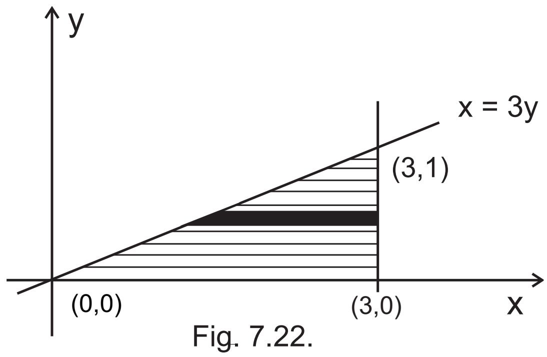

Fig. 7.22.

$$\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2} dA = \int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2} dx\, dy.$$

Esta última integral no se puede calcular, dado que $\int e^{x^2} dx$ no tiene primitiva finita. No obstante, la integral $\iint_{\mathcal{R}} e^{x^2} dA$ tiene un valor de $\frac{1}{6}\Big(e^9 - 1\Big)$.

PROBLEMA 7.9

Mediante la integral doble, calcular el área de la región plana limitada por $x^2 = 4y,\ 8y = x^2 + 16.$

SOLUCIÓN

Para encontrar el área pedida, resulta conveniente utilizar elementos de área dispuestos verticalmente. (Figura 7.23).

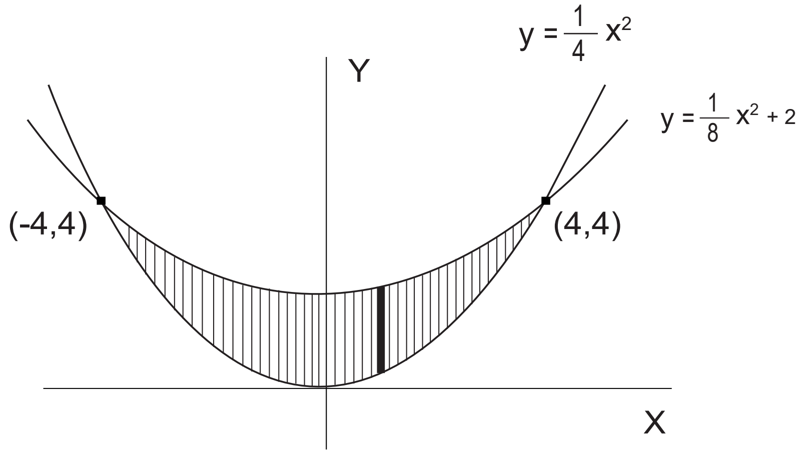

Fig. 7.23.

Los puntos de intersección entre las curvas son $(-4,4)$ y $(4,4)$. Por la simetría de la región, el área pedida se calcula así :

$$A=\int_0^4\int_{\frac{1}{4}x^2}^{\frac{1}{8}x^2+2}dy\,dx=2\int_0^4\Big[y\Big]_{\frac{1}{4}x^2}^{\frac{1}{8}x^2+2}dx,$$

$$=2\int_0^4\Big(\frac{1}{8}x^2+2-\frac{1}{2}x^2\Big)dx=2\int_0^4\Big(-\frac{1}{8}x^2+2\Big)dx,$$

$$=2\Big[-\frac{1}{24}x^3+2x\Big]_0^4=2\Big(-\frac{64}{24}+8\Big)=\frac{32}{3}\text{ u de área.}$$

PROBLEMA 7.10

Mediante la integral doble, calcular el área de la región plana limitada por las curvas $y=e^x$, $y=e^{2x}$, $y=4$.

SOLUCIÓN

a) El cálculo del área es más rápido si se efectúa por medio de elementos de área horizontales (Figura 7.24).

$$A=\int_1^4\int_{\frac{1}{2}lny}^{lny}dx\,dy=\int_1^4\Big[x\Big]_{\frac{1}{2}lny}^{lny}dy,$$

$$=\int_1^4\Big(ln\,y-\frac{1}{2}ln\,y\Big)dy,$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^4 ln\,y\,dy,$$

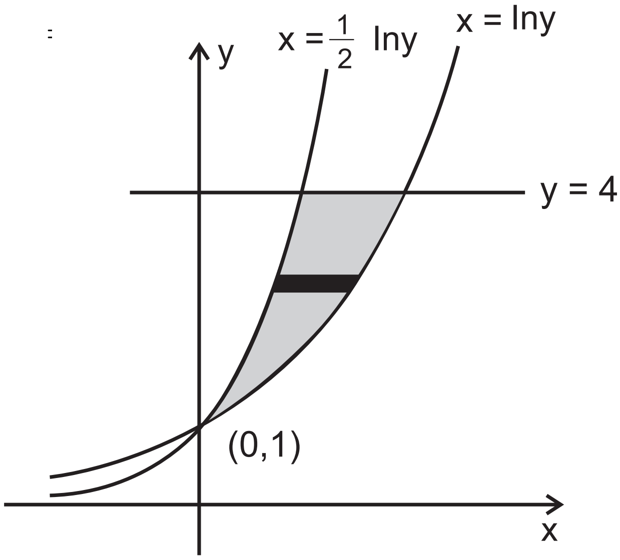

Fig. 7.24.

$$A = \frac{1}{2}(4\ ln4 - 4 + 1),$$

$$A = 4\ ln2 - \frac{3}{2} \simeq 1,27 \text{ unidades de área.}$$

PROBLEMA 7.11

Hallar el área de la región del Problema 7.10, por medio de elementos de área verticales.

SOLUCIÓN

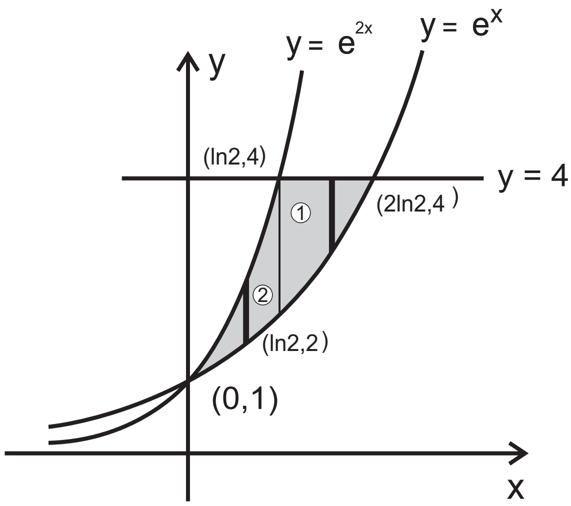

Fig. 7.25

Para efectuar el cálculo, se requiere dividir la región en dos subregiones, tal como se ilustra en la Figura 7.25. De esta manera, el área total A_t es la suma de las áreas A_1 y A_2; esto es,

$$A_t = A_1 + A_1.$$

El área A_1 se calcula así:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^{ln\,2}\int_{e^x}^{e^{2x}} dy\,dx = \int_0^{ln\,2}\Big[y\Big]_{e^x}^{e^{2x}} dx,\\
&= \int_0^{ln\,2}\Big[e^{2x}-e^x\Big]_0^{ln2} dx\,,\\
&= \Big[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\Big]_0^{ln2} = \frac{1}{2}e^{2ln\,2}-e^{ln\,2}-\frac{1}{2}+1\,,\\
&= \frac{1}{2}(4)-2+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Análogamente, el área A_2 se calcula como :

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_{ln\,2}^{2ln\,2}\int_{e^x}^{4} dy\,dx = \int_{ln\,2}^{2ln\,2}\Big[y\Big]_0^{ln2} dx,\\
&= \int_{ln\,2}^{2ln\,2}\Big[4-e^x\Big]dx = \Big[4x-e^x\Big]_{ln\,2}^{2ln2},\\
&= 4(2\,ln\,2)-e^{2ln\,2}-4\,ln\,2-2 = 4\,ln\,2-2.
\end{aligned}$$

Por consiguiente, el área total es :

$$A_t = \frac{1}{2}+4\,ln\,2-2 = 4\;ln2-\frac{3}{2} \simeq 1,27 \text{ unidades de área.}$$

PROBLEMA 7.12

Hallar el volumen del sólido limitado por el cilindro circular recto $x^2+y^2=4y$ y los planos $y+z=4,\ z=0.$

SOLUCIÓN

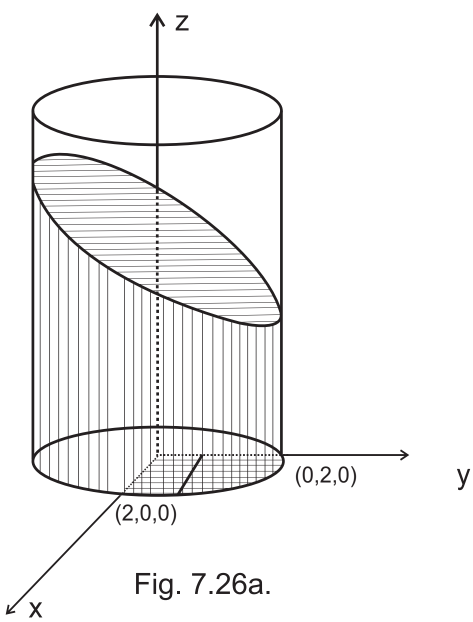

Fig. 7.26a.

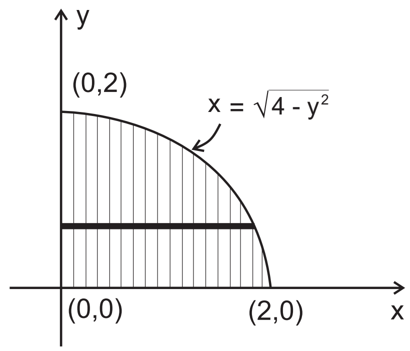

Fig. 7.26b.

El volumen buscado se obtiene mediante la integral doble iterada en la que se utilizan elementos de área horizontales, tal como se ilustran en las Figuras 7.26a y 726b.

$$V = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,dx\,dy,$$

$$= 2\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (4-y)\,dx\,dy,$$

$$= 2\int_{-2}^{2}(4-y)\Big[x\Big]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy\,,$$

$$= 2\int_{-2}^{2}(4-y)(\sqrt{4-y^2})\,dy,$$

$$= 8\int_{-2}^{2}\sqrt{4-y^2}\,dy + \int_{-2}^{2}(-2y)(\sqrt{4-y^2})\,dy,$$

$$= 8\Big[\frac{y\sqrt{4-y^2}}{2} + \frac{4}{2}arcsen\frac{y}{2}\Big]_{-2}^{2} + \Big[\frac{2\sqrt{(4-y^2)^3}}{3}\Big]_{-2}^{2},$$

$$= 16(arcsen1 - arcsen(-1)) = 16(\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2}\pi),$$

$= 16\pi$ unidades de volumen.

PROBLEMA 7.13

Hallar el volumen del sólido limitado por $9x^2+4y^2+36z=36$ y el plano $z=0$.

SOLUCIÓN

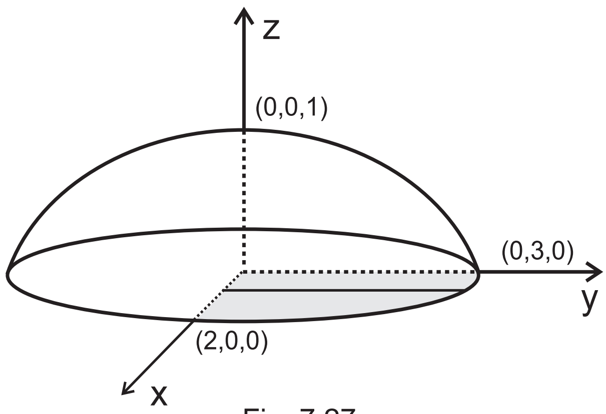

Fig. 7.27a

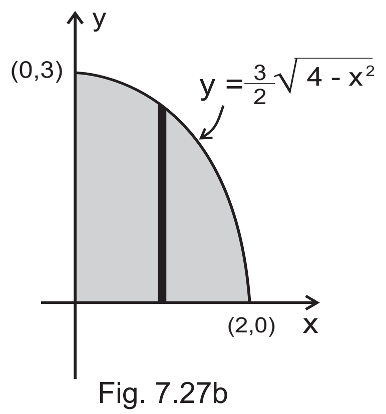

Fig. 7.27b

Se trata de encontrar el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico cuya ecuación es $9x^2+4y^2+36z=36$ y el plano xy (Figuras 7.27a y 7.27b).

Al tomar elementos de área verticales y aprovechar la simetría del sólido considerado, el volumen buscado es :

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} (1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{9}y^2)\, dy\, dx\,,$$

$$= 4\int_0^2 \int_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}} \Big(\frac{4-x^2}{4} - \frac{1}{9}y^2\Big)\, dy\, dx\,,$$

$$= 4\int_0^2 \Big[\Big(\frac{4-x^2}{4}\Big)y - \frac{1}{27}y^3\Big)\Big]_0^{\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}}\, dx\,,$$

$$= 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}dx - \int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2}dx,$$

$$= \Big[\frac{3}{2}\,x\sqrt{4-x^2} + 6arcsen\frac{x}{2} - \frac{1}{4}x\sqrt{(4-x^2)^3}\Big]_0^2,$$

$$= 0 + 6(\frac{\pi}{2}) - 0 = 3\pi \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 7.14

Hallar el volumen del tetraedro limitado por el plano $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ y los planos cartesianos en el primer octante.

SOLUCIÓN

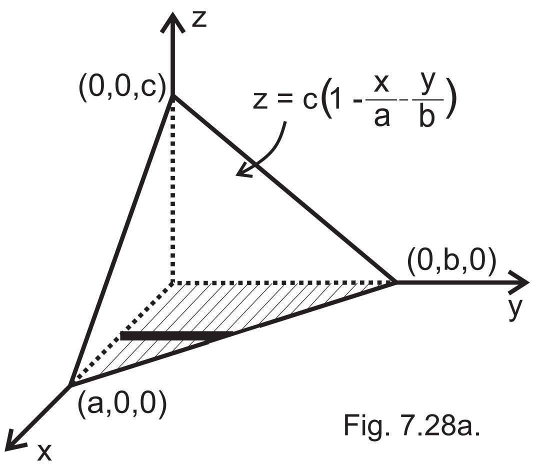

Fig. 7.28a.

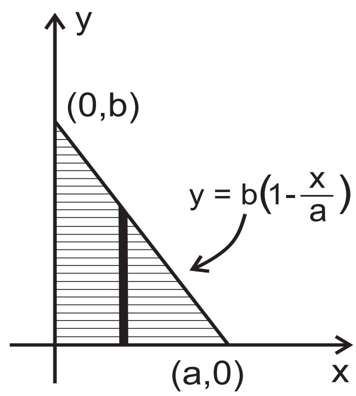

Fig. 7.28b.

En correspondencia con las Figuras 7.28a y 7.28b, el volumen del tetraedro se calcula tomando elementos de área verticales, así:

$$V = \int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} c(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b})\, dy\, dx,$$

$$= c\int_0^a \int_0^{b(1-\frac{x}{a})} \Big((1 - \frac{x}{a}) - \frac{y}{b}\Big)\, dy\, dx\,,$$

$$V = c\int_0^a \Big[(1 - \frac{x}{a})\, y - \frac{y^2}{2b}\Big]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx,$$

$$= c\int_0^a \left[(1-\frac{x}{a})\,y - \frac{y^2}{2b}\right]_0^{b(1-\frac{x}{a})} dx\,,$$

$$= c\int_0^a \left[b(1-\frac{x}{a})^2 - \frac{b}{2}(1-\frac{x}{a})^2\right] dx\,,$$

$$= \frac{bc}{2}\int_0^a (1-\frac{x}{a})^2 dx = -\frac{abc}{2}\left[\frac{1}{3}(1-\frac{x}{a})^3\right]_0^a,$$

$$= -\frac{abc}{6}(0-1) = \frac{abc}{6} \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 7.15

Demostrar que el volumen de la región esférica $x^2+y^2+z^2=R^2$ es $\frac{4}{3}\pi R^3$ unidades de volumen.

SOLUCIÓN

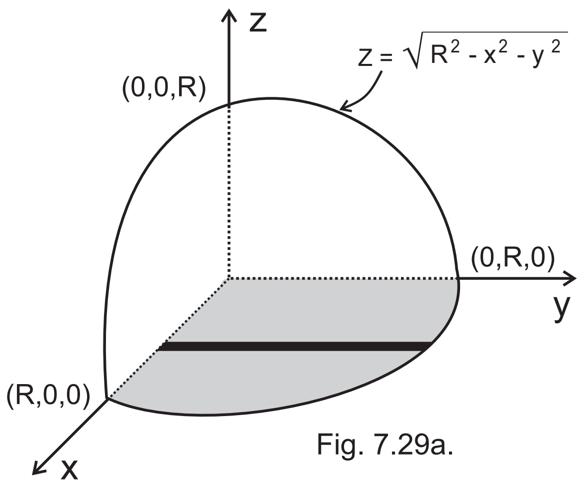

Fig. 7.29a.

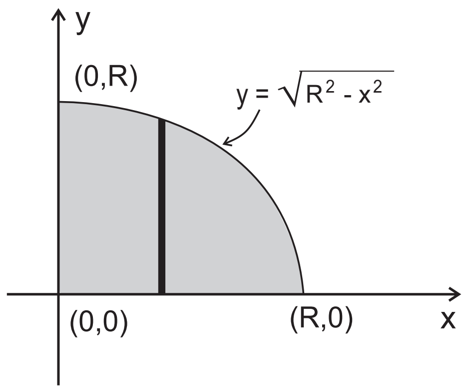

Fig. 7.29b.

En la Figura 7.29a, se ilustra una octava parte de la esfera de radio R cuyo centro está en el origen de coordenadas.

Por la simetría del sólido considerado y al considerar elementos diferenciales de área verticales, se obtiene :

$$V = 8\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{(R^2-x^2)-y^2}\,dy\,dx\,,$$

$$= 8\int_0^R \left[\frac{y\sqrt{(R^2-x^2)-y^2}}{2} + \frac{(R^2-x^2)}{2} arcsen\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}}\right]_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx\,,$$

$$= 8\int_0^R \left[\frac{(R^2-x^2)}{2} arcsen\frac{\sqrt{R^2-x^2}}{\sqrt{R^2-x^2}}\right] dx = \frac{8}{2}\int_0^R (R^2-x^2)\, arcsen 1 dx\,,$$

$$= 4(\frac{\pi}{2})\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = 2\pi\Big[R^2x - \frac{1}{3}x^3\Big]_0^R,$$

$$= \frac{4}{3}\pi R^3 \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 7.16

Hallar el área de la porción de plano $x + y + z = 2$ que está situada encima del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el el primer octante.

SOLUCIÓN

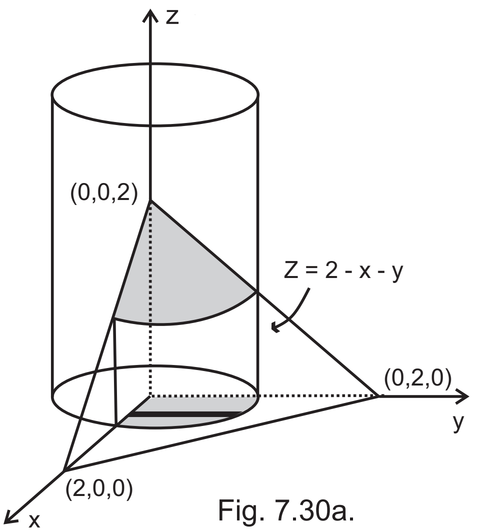

Fig. 7.30a.

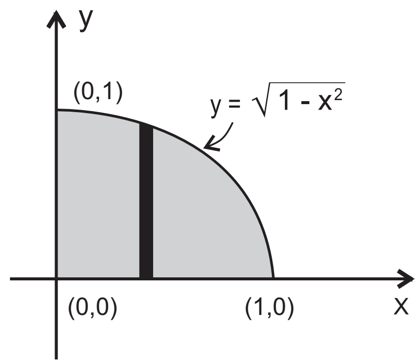

Fig. 7.30b.

El área de superficie de la función $z = f(x, y)$, limitada por la región $\mathcal{R}$ del plano xy, se calcula por medio de la integral :

$$A_s = \int_{\mathcal{R}}\int \sqrt{1 + \Big[\frac{\partial z}{\partial x}\Big]^2 + \Big[\frac{\partial z}{\partial y}\Big]^2}\, dA.$$

Para este problema,

$$z = 2 - x - y; \text{ entonces,}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -1,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -1.$$

En consecuencia,

$$\sqrt{1 + \Big[\frac{\partial z}{\partial x}\Big]^2 + \Big[\frac{\partial z}{\partial y}\Big]^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}.$$

Al considerar elementos diferenciales de área verticales (Figuras 7.30a y 7.30b), se tiene :

$$A_s = \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{3}\,dy\,dx = \sqrt{3}\int_0^1 \Big[y\Big]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$A_S = \sqrt{3}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{3}\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}arcsen\frac{x}{2}\right]_0^1,$$

$$= \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi \text{ unidades de superficie.}$$

PROBLEMA 7.17

Hallar el área de la porción de cono $x^2+y^2=3z^2$ situada por encima del plano xy, e interior al cilindro $x^2+y^2=4y$.

SOLUCIÓN

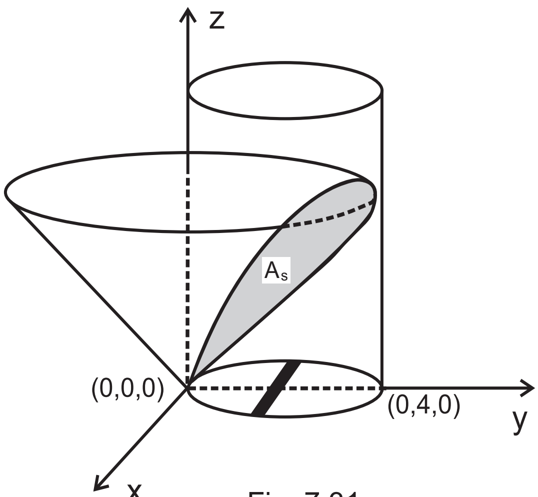

Fig. 7.31a.

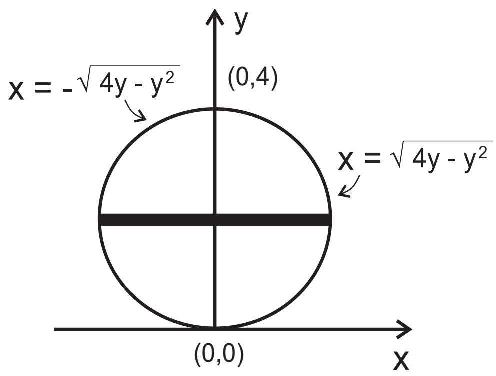

Fig. 7.31b.

Para calcular el área de superficie, se requiere hallar inicialmente $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ así:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2) = \frac{\partial}{\partial x}(3\,z^2); \quad 2x = 6z\frac{\partial z}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{3z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{3z}.$$

Entonces,

$$\sqrt{1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{9z^2}+\frac{y^2}{9z^2}} = \sqrt{\frac{9z^2+x^2+y^2}{9z^2}},$$

$$= \sqrt{\frac{9z^2+3z^2}{9z^2}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Por medio de elementos de área horizontales (Figuras 7.31a y 7.31b), el área de superficie se calcula así:

$$A_S = \frac{2\sqrt{3}}{3}\int_0^4\int_{-\sqrt{4y-y^2}}^{\sqrt{4y-y^2}} dx\,dy = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4\int_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx\,dy$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4\left[x\right]_0^{\sqrt{4y-y^2}} dx = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \sqrt{4y-y^2}\,dy$$

$$A_s = \frac{4\sqrt{3}}{3}\int_0^4 \sqrt{4-(y-2)^2}\,dy\,,$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}\left[\frac{y-2}{2}\sqrt{4-(y-2)^2} + 2arcsen\frac{y-2}{2}\right]_0^4,$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}*2\Big(arcsen1 - arcsen(-1)\Big) = \frac{8\sqrt{3}}{3}\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\Big),$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}\pi \text{ unidades de superficie.}$$

PROBLEMA 7.18

Demostrar que el área de superficie de la esfera $x^2+y^2+z^2=R^2$ es $4\pi R^2$ unidades de superficie.

SOLUCIÓN

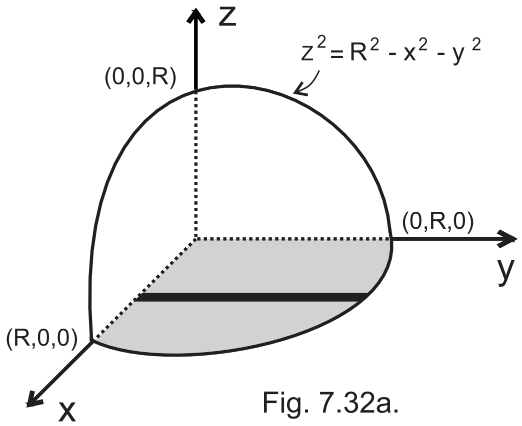

Fig. 7.32a.

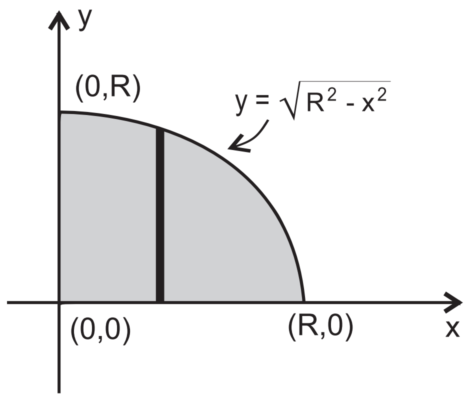

Fig. 7.32b.

Como en el Problema 7.17, se necesita obtener $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial(z^2)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\,(R^2-x^2-y^2); \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\,\frac{x}{z}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\,\frac{y}{z}.$$

Por tanto,

$$\sqrt{1+\left[\tfrac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\tfrac{\partial z}{\partial y}\right]^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{z^2+x^2+y^2}{z^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

Al utilizar elementos diferenciales de área verticales (Figuras 7.32a y 7.32b) y por la simetra de la esfera, el área de superficie se calcula así:

$$A_s = 8\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R\,dy\,dx}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\,,$$

$$= 8R\int_0^R \left[arcsen\frac{y}{2}\right]_{\sqrt{R^2-x^2}}^4 dx\,,$$

$$= 8R\int_0^R (arcsen\,1)dx = 8R(\frac{\pi}{2})\int_0^R dx\,,$$

$$= 4R\pi\Big[\,x\,\Big]_0^R = 4\pi R^2 \text{ unidades de superficie.}$$

PROBLEMA 7.19

Calcular la integral triple $I = \displaystyle\int_0^6\int_0^{12-2y}\int_0^{4-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}x} x\,dz\,dx\,dy.$

SOLUCIÓN

$$I = \int_0^6\int_0^{12-2y} x\Big[\,z\,\Big]_0^{4-\frac{2}{3}y-\frac{1}{3}x} dx\,dy\,,$$

$$= \int_0^6\int_0^{12-2y}\left[\left(4-\frac{2}{3}y\right)x - \frac{1}{3}x^2\right]dx\,dy,$$

$$= \int_0^6\left[\frac{1}{2}\left(4-\frac{2}{3}y\right)x^2 - \frac{1}{9}x^3\right]_0^{12-2y} dy\,,$$

$$= \int_0^6\left[\frac{1}{6}(12-2y)x^2 - \frac{1}{9}x^3\right]_0^{12-2y} dy\,,$$

$$= \int_0^6\left[\frac{1}{6}(12-2y)^3 - \frac{1}{9}(12-2y)^3\right]dy\,,$$

$$= \frac{1}{18}\int_0^6 (12-2y)^3 dy = -\frac{1}{36}*\frac{1}{4}\Big[(12-2y)^4\Big]_0^6,$$

$$= -\frac{1}{144}(0-12^4) = \frac{20736}{144} = 144.$$

PROBLEMA 7.20

Utilizar integrales triples para calcular el volumen del sólido limitado por el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$ y el cilindro $x^2 + 4y^2 = 4$.

SOLUCIÓN

En las Figuras 7.33a y 7.33b se detallan,respectivamente, el volumen que se quiere calcular y el dominio sobre el cual se debe integrar, con el fin de determinar los límites de integración .

Los límites para z van de 0 a x^2+4y^2; los límites de y se establecen para $\frac{1}{4}$ de volumen desde 0 a $\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}$ y los de x varían de 0 a 2.

En consecuencia, el volumen pedido se calcula así:

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} \int_0^{x^2+4y^2} dz\, dy\, dx,$$

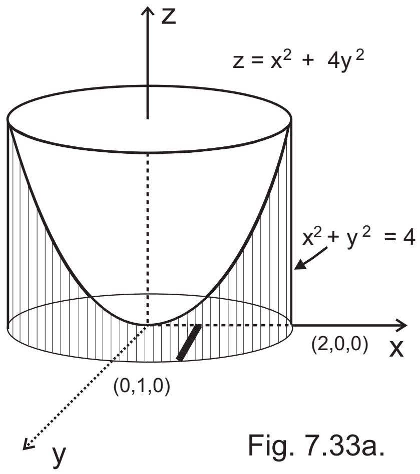

Fig. 7.33a.

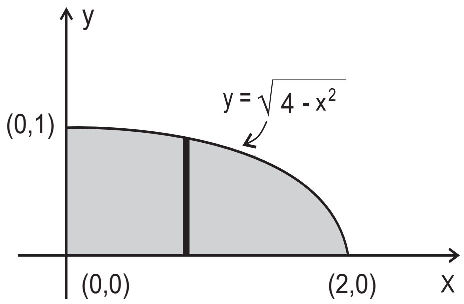

Fig. 7.33b.

$$V = 4\int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} \Big[z\Big]_0^{x^2+4y^2} dy\, dx\,,$$

$$= 4\int_0^2 \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} (x^2+4y^2)\, dy\, dx\,,$$

$$= 4\int_0^2 \Big[(x^2y+\frac{4}{3}y^3)\Big]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{4-y^2}} dx\,,$$

$$= 4\int_0^2 \Big[\frac{1}{2}x^2\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{6}\sqrt{(4-x^2)^3}\Big] dx\,,$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^2 (x^2+2)\sqrt{4-x^2}dx\,,$$

$$= \frac{4}{3}\int_0^2 x^2\sqrt{4-x^2} + \frac{8}{3}\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx,$$

$$= \frac{4}{3}\Big[-\frac{x\sqrt{(4-x^2)^3}}{4} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + 2\, arcsen\frac{x}{2}\Big]_0^2 +$$

$$\frac{8}{3}\Big[\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\, arcsen\frac{x}{2}\Big]_0^2,$$

$$= \frac{8}{3}*\frac{\pi}{2} + \frac{8}{3}*2*\frac{\pi}{2}\,,$$

$$= \frac{8}{6}\pi + \frac{8}{3}\pi = \frac{24}{6}\pi = 4\pi \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 7.21

Calcular el volumen del sólido limitado por el hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y por la región circular $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCIÓN

En este problema, conviene utilizar coordenadas cilíndricas así:

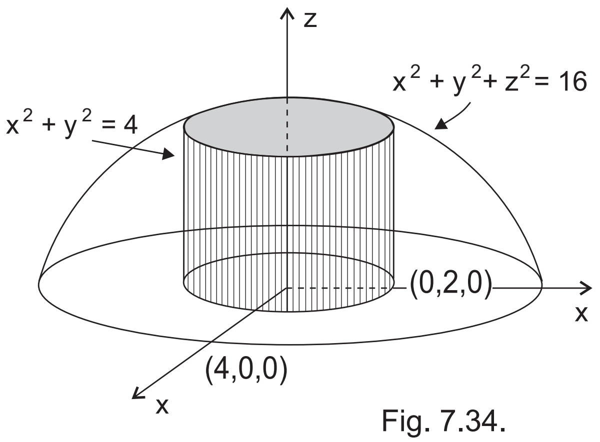

Fig. 7.34.

Puesto que $x = r\,cos\,\theta,\ y = r\,sen\theta,$ entonces

$$\sqrt{16 - x^2 - y^2} = \sqrt{16 - r^2cos^2\theta - r^2sen^2\theta} = \sqrt{16 - r^2}.$$

En este caso, la variación de $r,\ \theta\,,\ z$ es como sigue :

$$0 \le z \le \sqrt{16 - r^2}, \quad 0 \le r \le 2, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

El volumen requerido se calcula de la siguiente manera :

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \sqrt{16 - r^2}\, r\, dr\, d\theta,$$

$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2 (-2r)\sqrt{16 - r^2}\ dr\, d\theta,$$

$$= -\frac{1}{2} * \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\left[(16 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2 d\theta,$$

$$= -\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}(24\sqrt{3} - 64)\, d\theta = -\frac{1}{3}(24\sqrt{3} - 64)\,(2\pi),$$

$$= \frac{16\pi}{3}(\,8 - 3\sqrt{3}\,)$$ unidades de volumen.

PROBLEMA 7.22

Calcular el volumen de la región acotada por la hoja superior del cono $z = x^2 + y^2$ y por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9.$

SOLUCIÓN

La utilización de coordenadas esféricas facilita el cálculo del volumen requerido.

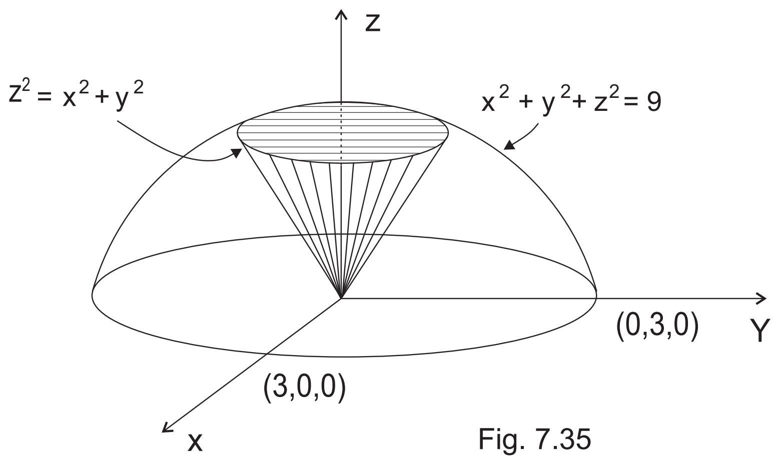

Fig. 7.35

Las ecuaciones de transformación :

$$x = \rho\ sen\phi\, cos\,\theta, \qquad y = \rho\ sen\phi\, sen\,\theta, \qquad z = \rho\ cos\,\phi$$

dan como resultado :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= (\rho\ sen\phi\, cos\,\theta)^2 + (\rho\ sen\phi\, sen\,\theta)^2 + (\rho\ cos\,\phi)^2 \\ &= \rho^2 sen^2\phi\, cos^2\theta + \rho^2 sen^2\phi\, sen^2\theta + \rho^2 cos^2\phi \\ &= \rho^2. \end{aligned}$$

Puesto que $x^2+y^2+z^2=9$, entonces, $\rho^2=9$, es decir $\rho=3$.

Ahora bien, la esfera y el cono se cortan cuando :

$$x^2+y^2+z^2 = z^2+z^2 = 9; \qquad 2z^2 = 9; \qquad z = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Como $z = \rho\ cos\,\phi$, entonces $cos\,\phi = \dfrac{z}{\rho} = \dfrac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

De esta manera, $cos\,\phi = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, y, entonces $\phi = \dfrac{\pi}{4}$.

Así, pues, la variación de ρ, θ y ϕ es :

$$0 \le \rho \le 3, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Por tanto, el volumen buscado es :

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^3 \rho^2 sen\phi\ d\rho\, d\phi\, d\theta,$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\phi \Big[\rho^3\Big]_0^3 d\phi\ d\theta,$$

$$= \frac{1}{3} * 27 \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\phi \, d\phi \;\, d\theta \,,$$

$$= \; -9 \int_0^{2\pi} \Big[cos\phi \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \,,$$

$$= \; -9 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) \int_0^{2\pi} d\theta,$$

$= 9(2 - \sqrt{2})\pi$ unidades de volumen.

8. INTEGRACIÓN VECTORIAL

8.1 INTEGRAL DE LÍNEA DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Sea Γ una curva regular definida vectorialmente por

$$\vec{r}(t) = \big\langle x(t),\, y(t), z(t)\,\big\rangle; \quad a \leq t \leq b$$

y $\Phi(x, y, z)$ una función escalar definida sobre la curva Γ.

La integral de línea o integral curvilínea de la función Φ sobre la curva Γ, se denota y define por

$$\int_\Gamma \Phi ds = \int_\Gamma \Phi(\,\vec{r}\,(t))\|\,\vec{r}\,'(t)\|dt\,. \tag{8.1}$$

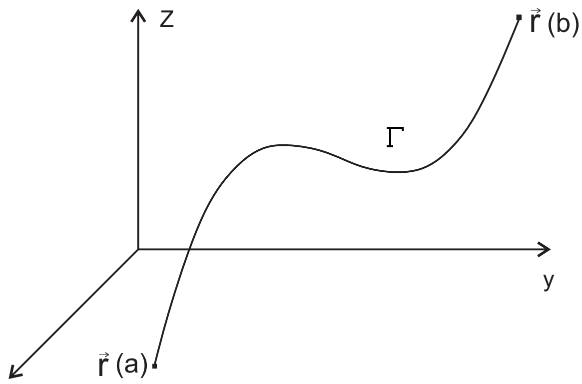

Fig. 8.1

Puesto que los extremos de la curva se definen en $t = a$ y $t = b$, entonces la integral de línea (8.1) se puede escribir como

$$\int_\Gamma \Phi ds = \int_a^b \Phi\big(x(t),\, y(t), z(t)\big)\sqrt{\big[x'(t)\big]^2 + \big[y'(t)\big]^2 + \big[z'(t)\big]^2}\, dt. \tag{8.2}$$

8.1 INTEGRAL DE LÍNEA DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Sean Γ una curva regular definida vectorialmente por

$$\vec{r}(t) = \big\langle x(t),\, y(t), z(t)\,\big\rangle; \quad a \leq t \leq b$$

y $\vec{f}(t) = \big\langle f_2(t),\, f_2(t), f_3(t)\,\big\rangle$ un campo vectorial continuo sobre los puntos de la curva Γ. La integral de línea o curvilínea del campo $\vec{f}$ a lo largo de Γ, se denota y define por

$$\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{f}\,(\,\vec{r}(t))\cdot\,\vec{r}\,'(t)\,dt. \tag{8.3}$$

Al desarrollar el producto escalar de la ecuación (8.3) se obtiene :

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b f_1 \frac{dx}{dt} + f_2 \frac{dy}{dt} + f_3 \frac{dz}{dt}, \tag{8.4}$$

en donde $f_i = f_i\big(x(t), y(t), z(t)\big)$, $i = 1, 2, 3.$

Al aplicar la regla de cadena a la relación (8.4), se llega a :

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_a^b f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz \tag{8.5}$$

NOTA

Para curvas en el plano, se puden utilizar a $\boldsymbol{x}$ o $\boldsymbol{y}$ como parámetros.

8.3 OTRAS INTEGRALES DE LÍNEA

Sean Γ una curva regular definida vectorialmente por

$$\vec{r}(t) = \big\langle x(t), y(t), z(t) \big\rangle; \quad a \le t \le b,$$

y $\vec{f}(t) = \big\langle f_2(t), f_2(t), f_3(t) \big\rangle$ un campo vectorial continuo sobre los puntos de la curva Γ y $\Phi(x, y, z)$ una función escalar definida también sobre la curva Γ, entonces,

1) $\displaystyle\int_{\Gamma} \vec{f}\, ds = \Big\langle \int_{\Gamma} f_1 ds, \int_{\Gamma} f_2 ds, \int_{\Gamma} f_3 ds \Big\rangle.$

2) $\displaystyle\int_{\Gamma} \Phi\, d\vec{r} = \Big\langle \int_{\Gamma} \Phi\, dx, \int_{\Gamma} \Phi\, dy, \int_{\Gamma} \Phi dz \Big\rangle.$

3) Cuando la curva Γ forma una trayectoria cerrada, se escribe

$$\oint_{\Gamma} \Phi ds; \qquad \oint_{\Gamma} \Phi\, d\vec{r}; \qquad \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r}\,; \qquad \oint_{\Gamma} \vec{f}\, ds.$$

8.4 GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL

8.4.1 Operador diferencial vectorial nabla (∇)

El operador diferencial ∇ se define y denota como

$$\nabla = \Big\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \Big\rangle.$$

8.4.2 Gradiente

Sea $\Phi = \Phi(x, y, z)$ una función escalar que tiene derivadas parciales continuas en alguna región de $\mathbb{R}^3$. El gradiente de Φ es un campo vectorial denotado y definido como

$$\nabla\Phi = \left\langle \frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right\rangle.$$

8.4.3 Divergencia

Sea $\vec{f} = \langle f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) \rangle$ un campo vectorial cuyas componentes poseen derivadas parciales continuas en alguna región de $\mathbb{R}^3$. La divergencia de $\vec{f}$ es un campo escalar denotado y definido como

$$\nabla\cdot \vec{f} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\rangle \cdot \langle f_1, f_2, f_3 \rangle,$$

$$\nabla\cdot \vec{f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

8.4.4 Rotacional (Rotor)

Sea $\vec{f} = \langle f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) \rangle$ un campo vectorial cuyas componentes poseen derivadas parciales continuas en alguna región de $\mathbb{R}^3$. El rotacional de $\vec{f}$ es un campo vectorial denotado y definido como

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix},$$

$$\nabla \times \vec{f} = \left\langle \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right\rangle.$$

8.5 CAMPO CONSERVATIVO

Sea $\vec{f}$ un campo vectorial, cuyas componentes son funciones continuas en alguna región de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{f} = \nabla\Phi$ para alguna función escalar Φ con derivadas parciales continuas en alguna región de $\mathbb{R}^3$. Se dice entonces, que $\vec{f}$ es un campo conservativo.

La condición necesaria y suficiente para que $\vec{f}$ sea conservativo es $\nabla \times \vec{f} = 0$. Con símbolos :

$$\vec{f} = \nabla\Phi \Leftrightarrow \nabla \times \vec{f} = 0.$$

Cuando $\vec{f} = \nabla\Phi$, se dice que Φ es una función potencial para $\vec{f}$; y, $\vec{f}$ es un campo de gradientes.

8.6 INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UNA FUNCIÓN VECTORIAL

Sea S una superficie y $\vec{n}$ un vector normal unitario a S. El elemento diferencial vectorial de área de superficie se define como

$$d\vec{A} = \vec{n}\, dA.$$

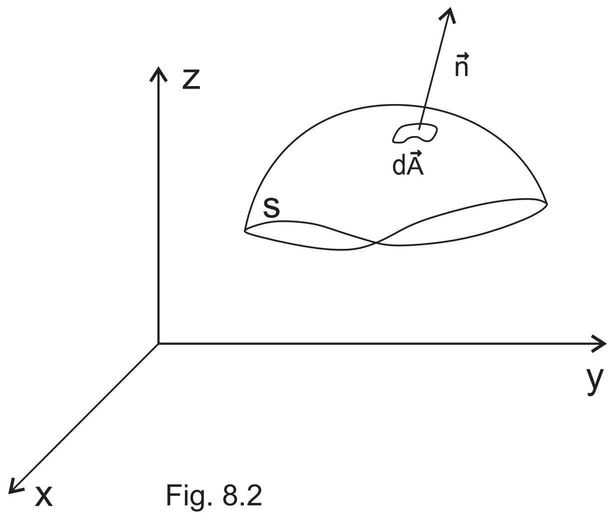

Fig. 8.2

Si $\vec{f}(x,y,z) = \left\langle f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) \right\rangle$ es una función vectorial cuyas componentes son continuas sobre S, entonces la integral de superficie sobre S se denota y define como

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_S \left(\vec{f} \cdot \vec{n} \right) dA. \tag{8.6}$$

La integral (8.6) se la suele llamar Flujo de $\vec{f}$ a través de la superficie S.

8.6 INTEGRAL DE SUPERFICIE DE UNA FUNCIÓN ESCALAR

Si la superficie S se define por la función continua $z = f(x,y)$, entonces la integral de superficie de $\Phi = \Phi(x,y,z)$ sobre S se define como

$$\iint_S \Phi \, dA = \iint_{\mathcal{R}} \Phi\big(x, y, f(x,y) \big) \sqrt{1 + \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2} \, dx \, dy, \tag{8.7}$$

donde $\mathcal{R}$ es la proyección de S sobre el plano xy.

8.7 OTRAS INTEGRALES DE SUPERFICIE

Pueden definirse otras integrales de superficie sobre S, donde $\Phi = \Phi(x,y,z)$ es función escalar y $\vec{f} = \vec{f}(x,y,z)$ campo vectorial así:

$$\iint_S \Phi \, d\vec{A}; \quad \iint_S \vec{f} \times d\vec{A}; \quad \iint_S \vec{f} dA.$$

Nótese que los resultados obtenidos después de calcular las integrales anteriores son vectores numéricos de $\mathbb{R}^3$.

8.8 INTEGRALES DE VOLUMEN

Si se considera una superficies cerrada S que contiene un volumen V, entonces, son integrales de volumen :

$$\iiint\limits_V \vec{f}\; dV \quad \text{y} \quad \iiint\limits_V \Phi dV;$$

en donde,

$\vec{f}(x,y,z) = \left\langle f_1(x,y,z),\ f_2(x,y,z), f_3(x,y,z) \right\rangle$ es función vectorial, y

$\Phi = \Phi(x,y,z)$ es función escalar.

8.9 TEOREMA DE GREEN EN EL PLANO

Según este teorema, el valor de una integral doble sobre una región del plano simplemente convexa se puede calcular por medio de una integral de línea a lo largo del contorno de la región. Conviene aclarar que una curva es simple si no se corta así misma. El Teorema de Green en el plano se plantea en los siguientes términos :

Sea $\mathcal{R}$ una región cerrada y simplemente convexa del plano xy, limitada por la curva simple cerrada Γ orientada en sentido antihorario y frontera de $\mathcal{R}$ y

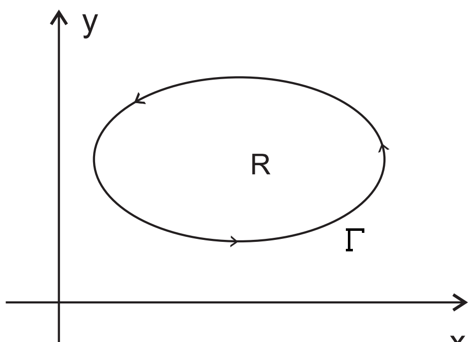

Fig. 8.3

además $\vec{f} = \left\langle f_1(x,y),\ f_2(x,y) \right\rangle$ campo vectorial definido sobre $\mathcal{R}$, cuyas componentes poseen derivadas parciales continuas, entonces,

$$\iint_{\mathcal{R}} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \Big) dx\, dy = \oint_{\Gamma} (f_1 dx + f_2 dy). \tag{8.8}$$

La formulación vectorial del Teorema de Green en el plano, se escribe así :

$$\iint_{\mathcal{R}} (\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r}. \tag{8.9}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} (\nabla \cdot \vec{f}\,) dx\, dy = \oint_{\Gamma} (\,\vec{f} \cdot \vec{n}) ds. \tag{8.10}$$

La integral (8.9) corresponde al denominado Teorema del rotor en el plano, en tanto que la integral (8.10) corresponde al Teorema de la divergencia en el plano.

8.9 TEOREMA DE STOKES (ROTOR)

Establece la relación entre la integral de superficie sobre una superficie orientada S y la integral de línea sobre una curva en el espacio cerrada Γ que constituye el borde de S. La dirección positiva de Γ es antihoraria respecto del vector normal $\vec{n}$.

La formulación del Teorema de Stokes es como sigue :

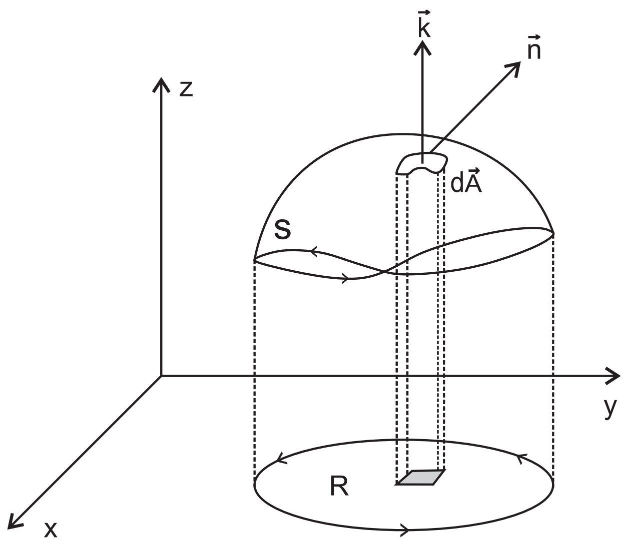

Fig. 8.4

Si S es la superficie abierta limitada por la curva Γ cerrada, orientada positivamente, y $\vec{f}$ función vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región que contiene a S y Γ, entonces,

$$\int_{\mathcal{R}}\int (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A} = \oint_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r}. \tag{8.9}$$

8.9 TEOREMA DE DIVERGENCIA (GAUSS - OSTROGRADSKI)

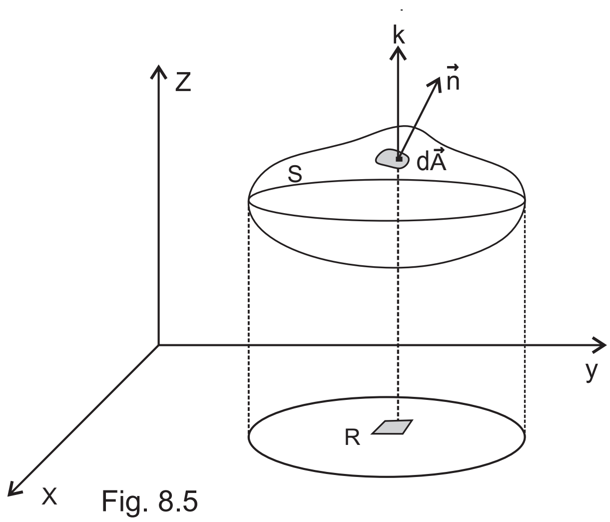

Fig. 8.5

Establece una relación entre una integral triple sobre una región V de $\mathbb{R}^3$, con una integral de superficie sobre la superficie de V. La superficie S es cerrada y por supuesto contituye el borde de la region $\boldsymbol{V}$ de $\mathbb{R}^3$.

El enunciado del teorema es el siguiente :

Sea $\boldsymbol{S}$ una superficie cerrada que encierra una región $\boldsymbol{V}$ de $\mathbb{R}^3$ y $\vec{f}=\langle f_1, f_2, f_3\rangle$ campo vectorial cuyas componentes y derivadas parciales son continuas sobre un conjunto abierto que contiene a V y a S, y $\vec{\boldsymbol{n}}$ vector unitario normal exterior a $\boldsymbol{S}$, entonces,

$$\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f}\,)dV=\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{A}=\iint_S \left(\vec{f}\cdot\vec{n}\right)dA. \tag{8.10}$$

Al desarrollar los integrandos se obtiene una expresión equivalente :

$$\iiint_V \left[\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right]dV=\iint_S f_1dydz+f_2dzdx+f_3dxdy. \tag{8.11}$$

Esto quiere decir que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada es igual a la integral triple de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen acotado por esa superficie.

PROBLEMA 8.1

Calcular la integral de línea de $\Phi(x,y)=x^2+y^2$, alrededor del triángulo cuyos vértices son los puntos $O(0,0)$, $A(1,0,0)$ y $B(0,0,1)$ en la secuencia O-A-B-O.

SOLUCIÓN

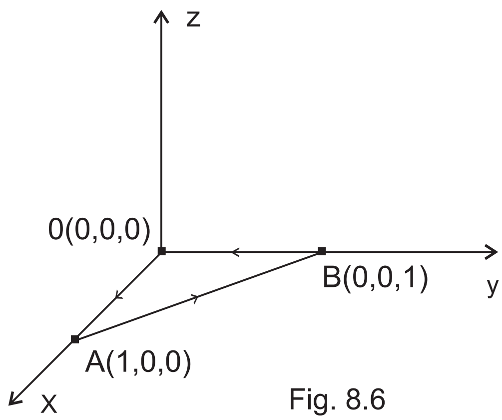

Fig. 8.6

Método 1. $$\int_\Gamma \Phi ds=\int_O^A \Phi ds+\int_A^B \Phi ds+\int_B^O \Phi ds. \tag{1}$$

Para calcular las integrales que aparecen en la ecuación (1) es necesario parametrizar cada trayecto (lado) del triángulo así :

Lado OA : La ecuación vectorial de la recta que une O con A es :

$$\langle x, y, z\rangle = \langle 0,0,0\rangle + t\langle 1,0,0\rangle \text{ o bien}$$

$$x = t;\ y = 0;\ z = 0;\ \ 0 \le t \le 1.$$

Por otra parte, $ds = \sqrt{\left[\frac{dx}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dz}{dt}\right]^2}\,dt; \quad ds = dt.$

Por tanto,

$$\int_O^A \Phi ds = \int_0^1 (t^2 + 0^2)dt = \frac{1}{3}t^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Lado AB : Las ecuaciones paramétricas de la recta que une A con B son

$$x = 1 - 0;\ \ y = t;\ z = 0; \qquad 0 \le t \le 1.$$

$$ds = \sqrt{(-1) + 1^2 +}\ dt; \quad ds = \sqrt{2}\,dt.$$

De esta manera,

$$\int_A^B \Phi ds = \int_0^1 \left[(1-t)^2 + t^2\right]\sqrt{2}\,dt,$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 \left[1 - 2t + 2t^2\right] dt,$$

$$= \sqrt{2}\Big[t - t^2 + \frac{2}{3}t^3\Big]_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Lado BO : Las ecuaciones paramétricas de la recta que une B con O son :

$$x = 0;\ \ y = -t + 1;\ z = 0; \qquad\qquad 0 \le t \le 1.$$

$$ds = \sqrt{(-1)^2}\,dt; \quad ds = dt.$$

En consecuencia,

$$\int_B^O \Phi\ ds = \int_0^1 \left[0^2 + (1-t)^2\right] dt,$$

$$= \int_0^1 \left[1 - 2t + t^2\right] dt,$$

$$= \sqrt{2}\Big[t - t^2 + \frac{1}{3}t^3\Big]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Al reemplazar estos valores en la relación (1), finalmente se obtiene :

$$\int_\Gamma \Phi ds = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3}.$$

Método 2. Como el triángulo está en el plano, es posible paramerizar de otra manera :

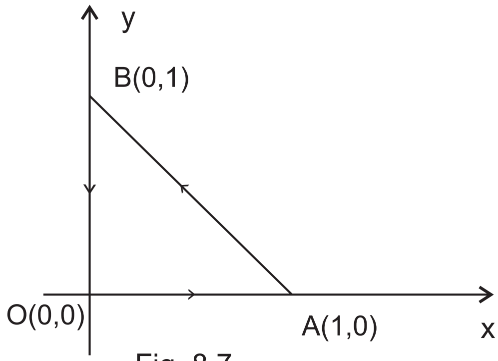

Fig. 8.7

Tramo OA : $y=0, \qquad 0 \leq x \leq 1.$

$$ds=\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}dx=\sqrt{1+0^2}\,dx;\; ds=dx.$$

Entonces,

$$\int_O^A \Phi ds=\int_0^1 (x^2+0^2)\,dx=\frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^1=\frac{1}{3}.$$

Tramo AB : $y=1-x, \qquad 0 \leq x \leq 1.$

$$ds=\sqrt{1+\left[\frac{dy}{dx}\right]^2}dx=\sqrt{1+(-1)^2}\,dx; \qquad ds=\sqrt{2}dx.$$

Luego,

$$\int_A^B \Phi ds=\int_0^1 \left[x^2+(1-x)^2\right]\sqrt{2}\;dx,$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 \left[1-2x+x^2\right]dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Tramo BA : $x=0, \;\; 0 \leq y \leq 1.$

$$ds=\sqrt{1+\left[\frac{dx}{dy}\right]^2}dy=dx;\;\; ds=dy.$$

Por tanto,

$$\int_B^O \Phi\;ds=\int_0^1 \left[0^2+y^2\right]dy,$$

$$=\;\frac{2}{3}\left[y^3\right]_0^1=\frac{2}{3}.$$

Finalmente,

$$\int_\Gamma \Phi ds = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3} = \frac{3+2\sqrt{2}}{3}.$$

PROBLEMA 8.2

Calcular la integral de línea $\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, donde Γ es la recta que une los puntos $O(0,0)$ y $A(1,2)$.

SOLUCIÓN

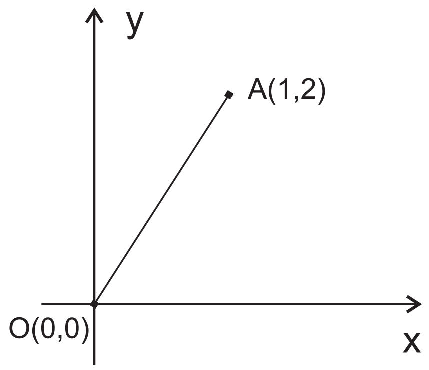

Fig. 8.8

La ecuación de la recta que pasa por O y A es $y = 2x$. Entonces,

$$ds = \sqrt{1 + \left[\frac{dy}{dx}\right]^2} dx = \sqrt{1+2^2}\, dx; \qquad ds = \sqrt{5}\, dx.$$

De esta manera,

$$\int_\Gamma \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}\, dx}{\sqrt{x^2+(2x)^2+4}} = \sqrt{5}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{5x^2+4}},$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+4/5}} = \left[ln\left| x^2 + \sqrt{x^2+4/5}\right|\right]_0^1,$$

$$= ln\left[1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right] - ln\left[\frac{2}{\sqrt{5}}\right] = ln\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right].$$

PROBLEMA 8.3

Calcular la integral de línea $\int_\Gamma xy\, ds$, donde Γ es la cuarta parte de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ situada en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN

La parametrización de la elipse en el primer cuadrante es :

$$x = a\,cos\,\theta; \quad y = bsen\theta; \;\; 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}.$$

Entonces,

$$ds = \sqrt{\left[\frac{dx}{d\theta}\right]^2 + \left[\frac{dy}{d\theta}\right]^2} d\theta = \sqrt{a^2 cos^2\theta + b^2 sen^2\theta}\, d\theta,$$

$$= \sqrt{(a^2 - b^2)\, sen^2\theta + b^2}\, d\theta.$$

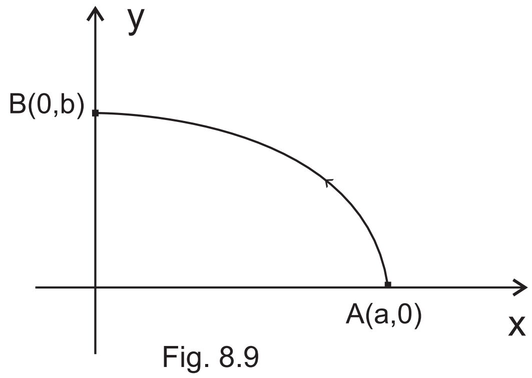

Fig. 8.9

Además,

$$xy = ab\, cos\, \theta sen\theta.$$

Por tanto,

$$\int_\Gamma xy\, ds = ab \int_0^{\pi/2} cos\, \theta sen\theta \sqrt{(a^2 - b^2)\, sen^2\theta + b^2}\, d\theta,$$

$$= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[\left[(a^2 - b^2)\, sen^2\theta + b^2 \right]^{3/2} \right]_0^{\pi/2},$$

$$= \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left[(a^2)^{3/2} - (b^2)^{3/2} \right],$$

$$= \frac{ab(a^3 - b^3)}{3(a^2 - b^2)} = \frac{ab\,(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}.$$

PROBLEMA 8.4

Si $\Phi(x, y) = xy$, calcular la integral de línea $\int_\Gamma \Phi\, d\vec{r}$, desde $O(0, 0, 0)$ a $P(1, 1, 0)$ a lo largo de :

$1)$ La recta que los puntos $O(0, 0, 0)$ y $P(1, 1, 0)$.

$2)$ La curva definida por $y = x^2$, $z = 0$.

SOLUCIÓN

$1)$ La ecuación de la recta que pasa por $O(0, 0, 0)$ y $P(1, 1, 0)$ está en el plano xy. Por tanto su ecuación es $y = x$. Figura $8.10.1$.

En consecuencia,

$$\int_\Gamma \Phi\, d\vec{r} = \int_\Gamma xy \,\langle dx, dy \rangle = \int_0^1 \langle x^2 dx, x^2 dx \rangle$$

$$\int_\Gamma \Phi\, d\vec{r} = \left\langle \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1, \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\rangle.$$

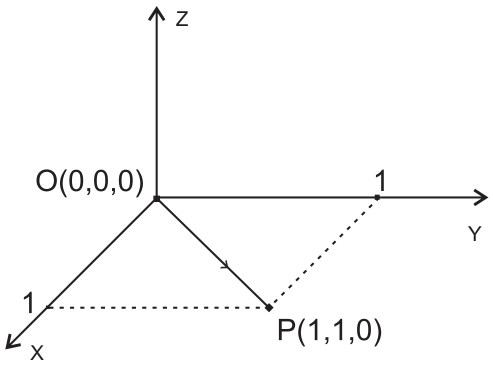

Fig. 8.10.1

$2)$ Como en el caso $1)$ la parábola está localizada en el plano xy. Entonces,

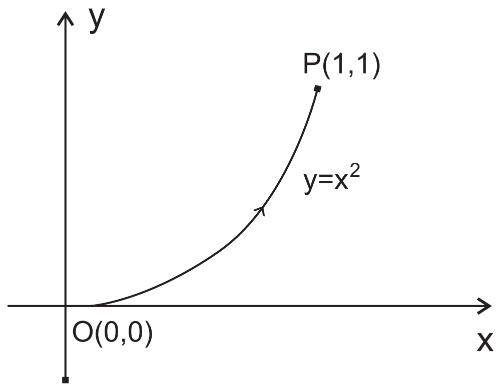

Fig. 8.10.2

$$d\vec{r} = \langle dx, dy \rangle = \langle dx, 2x\, dx \rangle.$$

De esta manera,

$$\int_\Gamma \Phi\, d\vec{r} = \int_0^1 x.x^2 \langle dx, 2x dx \rangle,$$

$$\int_\Gamma \Phi\, d\vec{r} = \int_0^1 \langle x^3, 2x^4 \rangle dx,$$

$$\int_\Gamma \Phi\, d\vec{r} = \left\langle \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1, \frac{2}{5}x^5\Big|_0^1 \right\rangle = \left\langle \frac{1}{4}, \frac{2}{5} \right\rangle.$$

PROBLEMA 8.5

Calcular $\int_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{f} = \langle 3x,\, 2xz - y,\, z \rangle$ y Γ es la curva definida como $x = 2t^2,\ y = t,\ z = 4t^2 - t,$ desde $O(0,0,0)$ a $P(2,1,3)$.

SOLUCIÓN

$$d\vec{r} = \langle dx, dy, dz \rangle = \langle 4t, 1, 8t - 1 \rangle dt.$$

$$\vec{f} = \langle 3(2t^2)\,,\, 2(2t^2)(4t^2 - t) - t,\, 4t^2 - t \rangle,$$

$$\vec{f} = \langle 6t^2\,,\ 16t^4 - 4t^3 - t,\ 4t^2 - t \rangle.$$

$$\vec{f}\cdot d\vec{r} = \left[6t^2(4t) + 16t^4 - 4t^3 - t + (4t^2 - t)(8t-1)\right] dt,$$

$$\vec{f}\cdot d\vec{r} = \left[16t^4 + 52t^3 - 12t^2 + t\right] dt.$$

Ahora bien, la parametrización de la curva es :

$$\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t \\ z = 4t^2 - t. \end{cases} \quad \text{Para } t = 0; \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{para } t = 1, \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 3. \end{cases}$$

En consecuencia, la variación de t está en el intervalo $[0,1]$.

Por tanto,

$$\int_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_0^1 \left[16t^4 + 52t^3 - 12t^2 + t\right] dt,$$

$$= \left[\frac{16}{5}t^5 + 13\,t^4 - 4t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{127}{10}.$$

PROBLEMA 8.6

Calcular la <u>circulación</u> del campo $\vec{f} = \langle x - 3y,\ y - 2x \rangle$ a lo largo de la elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, recorrida en sentido antihorario.

SOLUCIÓN

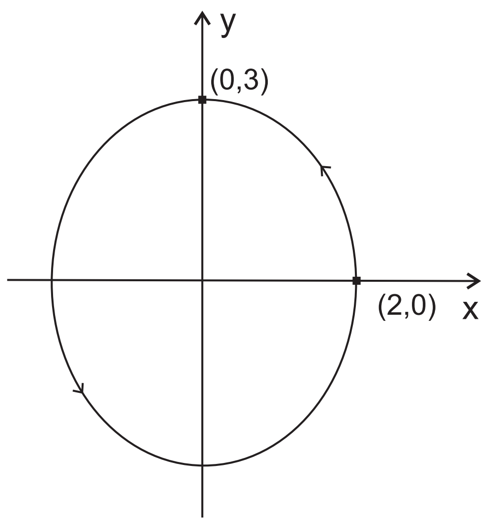

Fig. 8.11

Se llama <u>circulación</u> de un campo vectorial $\vec{f}$ sobre una curva cerrada Γ orientada en sentido positivo, a la integral

$$\oint_\Gamma \vec{f}\cdot d\vec{r}$$

donde $\vec{f}$ tiene componentes continuas sobre Γ.

Por tanto,

$$\begin{aligned}\vec{f}\cdot d\vec{r} &= \langle x-3y,\, y-2x\,\rangle\cdot\langle dx,\, dy\,\rangle,\\ &= (x-3y)\,dx + (y-2x)\,dy.\end{aligned}$$

Como la parametrización de la elipse es

$$x = 2\,cos\,t;\; y = 3\,sen\,t; \quad 0 \le t \le 2\pi,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\vec{f}\cdot d\vec{r} &= \big[(2\,cos\,t - 9sen\,t)(-2\,sen\,t) + (3sen\,t - 4cos\,t)(3\,cos\,t\big]\,dt,\\ &= \big[5\,cos\,t\,sen\,t - 30\,cos^2 t\, + 18\big]\,dt.\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma \vec{f}\cdot\, d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \big[5\,cos\,t\,sen\,t - 30\,cos^2 t\, + 18\big]\,dt,\\ &= \left[\frac{5}{2}\,sen^2 t - 15\,t - \frac{15}{2}\,sen 2t + 18\,t\right]_0^{2\pi},\\ &= -30\pi + 36\pi = 6\pi.\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.7

Considerar el campo vectorial $\vec{f} = \langle x^2 + y,\, x - y^2\,\rangle$.

$1)$ Demostrar que es conservativo.

$2)$ Hallar un potencial escalar para $\vec{f}$.

$3)$ Calcular la integral curvilínea desde $O(0,0)$ hasta $Q(2,1)$.

$4)$ Calcular la integral curvilínea que sigue el camino $O(0,0) - P(2,0) - Q(2,1)$.

SOLUCIÓN

$1)$ En correpondencia con el parágrafo 8.5, un campo vectorial $\vec{f}$ es conservativo si su rotacional es cero; esto es: ∇ x $\vec{f} = \vec{O}$.

En efecto,

$$\nabla \text{ x } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x^2 + y & x - y^2 & 0\end{vmatrix},$$

$$= \left\langle \frac{\partial\, 0}{\partial y} - \frac{\partial(x-y^2)}{\partial z},\, \frac{\partial(\,x^2+y)}{\partial z} - \frac{\partial\, 0}{\partial x},\, \frac{\partial(x-y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(\,x^2+y)}{\partial y}\right\rangle$$

$$= \langle 0,0,0\rangle = \vec{O}.$$

$2)$ Como $\vec{f}$ es conservativo, entonces $\nabla\Phi = \vec{f}$ para algún campo escalar Φ.

Entonces,

$$\left\langle \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\rangle = \left\langle x^2 + y,\, x - y^2 \right\rangle.$$

Por igualdad entre vectores, se obtiene :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = x^2 + y.$$

Al integrar con respecto a x y permanecer y constante, se llega a :

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy + g(y). \tag{1}$$

La derivada parcial de (1) con respecto a y es :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = x + g'(y). \text{ Pero } \frac{\partial \Phi}{\partial y} = x - y^2.$$

Al igualar las derivadas :

$$x + g'(y) = x - y^2; \quad g'(y) = -y^2.$$

La integración de esta última relación conduce a :

$$g(y) = -\frac{1}{3}y^3 + C \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1) :

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3 + C.$$

De esta manera la función bivariable $\Phi(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3 + C$ es un potencial escalar para $\vec{f}$.

3)

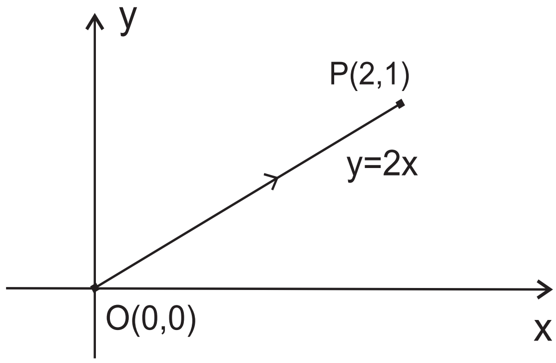

Fig. 8.12

Puesto que $\nabla \Phi = \vec{f}$, entonces,

$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} \nabla \Phi \cdot d\vec{r} = \int_{(0,0)}^{(2,1)} d\Phi,$$

$$= \Phi\Big|_{(0,0)}^{(2,1)} = \left[\frac{1}{3}x^3 + xy - \frac{1}{3}y^3 + C\right]_{(0,0)}^{(2,1)} = \frac{13}{3}.$$

4)

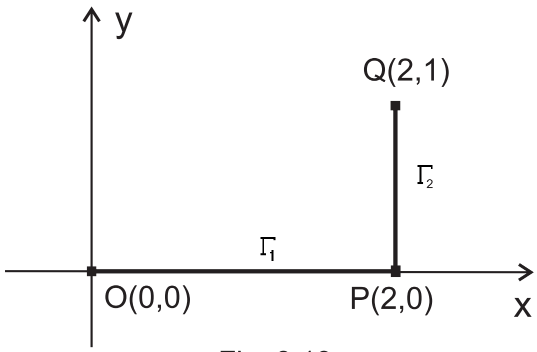

Fig. 8.13

En correspondencia con la Figura 8.13, se tiene :

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{r}\,. \qquad (3)$$

La parametrización del tramo OP es .

$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \le t \le 2.$$

Además, $\vec{f} \cdot d\vec{r} = \left\langle x^2 + y,\, x - y^2 \right\rangle \cdot \left\langle dx,\, dy \right\rangle = t^2 dt.$

Luego,

$$\int_{\Gamma_1} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 t^2\, dt = \frac{1}{3}\left[t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}. \qquad (4)$$

La parametrización del tramo PQ es :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \le t \le 1.$$

Entonces,

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = (2 - t^2)\, dt.$$

De esta manera,

$$\int_{\Gamma_2} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^2 (2 - t^2)\, dt,$$

$$= \left[2t - \frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{5}{3}. \qquad (5)$$

Finalmente, al reemplazar (4) y (5) en (3) se obtiene :

$$\int_{\Gamma} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \frac{8}{3} + \frac{5}{3} = \frac{13}{3}.$$

Nótese que los valores de las integrales curvilíneas que unen los puntos $O(0,0)$ y $P(2,1)$ son los mismos, no obstante que se han tomado caminos diferentes.

Esto ocurre cuando el campo vectorial es conservativo.

PROBLEMA 8.8

Sea $\Phi(x,y,z)=x^3y^2z^4$ una función escalar.

$1)$ Calcular la divergencia del gradiente de Φ.

$2)$ Demostrar $\nabla\cdot\nabla\Phi=\nabla^2\Phi$, donde $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ se llama Operador de Laplace (Laplaciano).

SOLUCIÓN

$$1)\qquad \nabla\Phi=\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\rangle=\left\langle 24x^2y^2z^4,\ 16x^3yz^4, 32x^3y^2z^3\right\rangle.$$

$$\nabla\cdot\nabla\Phi=\frac{\partial(24x^2y^2z^4)}{\partial x}+\frac{\partial(16x^3yz^4)}{\partial y}+\frac{\partial(32x^3y^2z^3)}{\partial z},$$

$$=48xy^2z^4+16x^3z^4+24x^3y^2z^2.$$

$$2)\ \nabla\cdot\nabla\Phi=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle\cdot\left\langle\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right\rangle,$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big),$$

$$=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\Big)\Phi=\nabla^2\Phi.$$

PROBLEMA 8.9

Para un vector arbitrario constante $\vec{A}$ demostrar que $\nabla(\vec{A}\cdot\vec{r}\,)=\vec{A}$.

SOLUCIÓN

Sea $\vec{A}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ y $\vec{r}=\langle x,y,z\rangle$.

Entonces,

$$\vec{A}\cdot\vec{r}\ =\langle a_1,a_2,a_3\rangle\cdot\langle x,y,z\rangle=a_1x+a_2y+a_3z.$$

Por tanto,

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{r}\,)=\nabla(a_1x+a_2y+a_3z),$$

$$=\left\langle\frac{\partial(a_1x+a_2y+a_3z)}{\partial x},\frac{\partial(a_1x+a_2y+a_3z)}{\partial y},\frac{\partial(a_1x+a_2y+a_3z)}{\partial z}\right\rangle,$$

$$=\langle a_1,a_2,a_3\rangle=\vec{A}.$$

PROBLEMA 8.10

Demostrar que la función escalar $\Phi(x,y,z)=\dfrac{1}{r}$, es <u>armónica</u>, donde $r=\|\,\vec{r}\,\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

SOLUCIÓN

Una función escalar es armónica si es continua, tiene segundas derivadas parciales continuas y satisface la ecuación de Laplace $\nabla^2\Phi=0$.

En este caso,

$$\nabla^2\Phi=\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right).$$

Ahora bien, la primera derivada de Φ respecto a $\boldsymbol{x}$, es :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=\frac{-\,x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$$

La segunda derivada de Φ respecto a $\boldsymbol{x}$, es :

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-\,x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right)=\frac{3x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}-\frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}},$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}.$$

Por analogía,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}\ \text{ y }\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}.$$

Puesto que $\nabla^2\Phi=\dfrac{\partial^2\Phi}{r^5}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$, entonces,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi&=\frac{3x^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3y^2}{r^5}-\frac{1}{r^3}+\frac{3z^2}{r^5}-\frac{1}{r^3},\\&=\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{r^5}-\frac{3}{r^3},\\&=\frac{3r^2}{r^5}-\frac{3}{r^3}=\frac{3}{r^3}-\frac{3}{r^3}=0.\end{aligned}$$

PROBLEMA 8.11

Calcular $\displaystyle\int_S\!\!\int(x^2+y^2)dA$ donde S es la frontera del cuerpo limitado por $z=12,\ z=\sqrt{x^2+y^2}$.

SOLUCIÓN

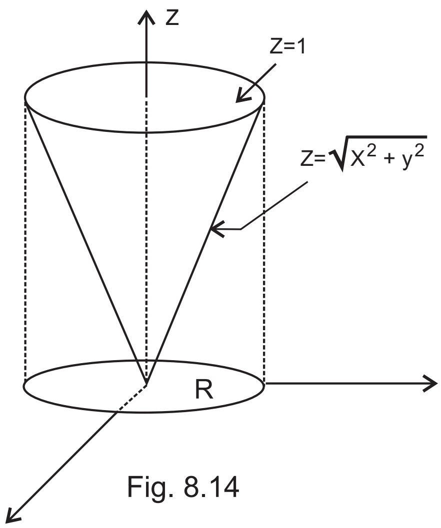

Fig. 8.14

$1)$ Integral sobre la cara lateral (S_1) : $z = \sqrt{x^2+y^2};\ 0 \le z \le 1.$

$$dA = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\, dx\, dy.$$

Como $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, entonces,

$$dA = \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\, dx\, dy,$$

$$= \sqrt{2}\, dx\, dy.$$

Por tanto,

$$\int_{S_1}\!\!\int (x^2+y^2) dA = \sqrt{2} \int_{\mathcal{R}}\!\!\int (x^2+y^2)\, dx\, dy,$$

donde $\mathcal{R}$ círculo $x^2+y^2=1.$

El cambio a coordenadas polares $x = r cos\,\theta,\ y = r sen\,\theta,\ \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r,$

donde $0 \le r \le 1;\quad 0 \le\ \theta \le 2\pi$, conduce a :

$$\int_{S_1}\!\!\int (x^2+y^2) dA = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r^2 r\, dr\, d\theta,$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_0^1 r^3 dr\, d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi}\Big[r^4\Big]_0^1 d\theta,$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\theta\Big]_0^{2\pi} d\theta = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2}.$$

$2)$ Integral sobre la cara superior (S_2) : $z=1;\ dA = dxdy.$ Entonces,

$$\int_{S_2}\!\!\int (x^2+y^2)dA = \int_{\mathcal{R}}\!\!\int (x^2+y^2)\,dx\,dy = \frac{\pi}{2}.$$

Finalmente,

$$\int_{S}\!\!\int (x^2+y^2)dA = \int_{S_1}\!\!\int (x^2+y^2)dA + \int_{S_2}\!\!\int (x^2+y^2)dA$$

$$= \frac{\sqrt{2}\,\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}(\sqrt{2}+1).$$

PROBLEMA 8.12

Calcular $\displaystyle\int_{S}\!\!\int \Phi(x,y,z)\,dA$ donde $\Phi(x,y,z) = x^2+2yz$ y S es la porción de plano $2x+y+z=4$, en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN

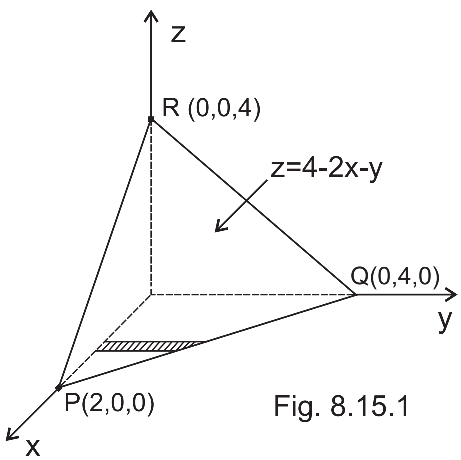

Fig. 8.15.1

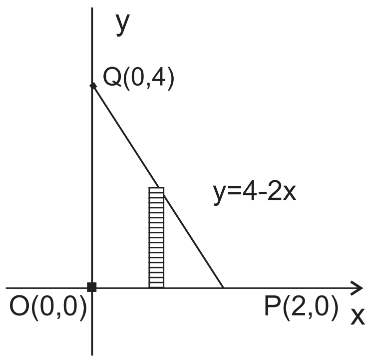

Fig. 8.15.2

La ecuación del plano del plano se puede escribir como $z = 4-2x-y$.
Entonces,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2;\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = -1;$$

$$dA = \sqrt{1+\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2+\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\,dx\,dy,$$

$$= \sqrt{1+(-2)^2+(-1)^2}\,dx\,dy \ = \sqrt{6}\,dxdy.$$

$$\Phi(x,y,z) = x^2+2y(4-2x-y) \ = x^2+(8-4x)y-2y^2.$$

Por tanto,

$$\int_{S}\!\!\int \Phi(x,y,z)\,dA = \sqrt{6}\int_0^2\int_0^{4-2x}\left[x^2+2(4-2x)y-2y^2\right]dy\,dx,$$

$$= \sqrt{6}\int_0^2\left[\frac{1}{2}x^3+(4-2x)y^2-\frac{2}{3}y^3\right]_0^{4-2x}dx,$$

$$= \sqrt{6}\int_0^2 \left[(4-2x)^3 - \frac{2}{3}(4-2x)^3\right]dx,$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{3}\int_0^2 (4-2x)^3 dx = -\frac{\sqrt{6}}{24}\left[(4-2x)^4\right]_0^2,$$

$$= \frac{32\sqrt{6}}{3}.$$

PROBLEMA 8.13

Calcular $\displaystyle\iint_S \vec{f}\cdot d\vec{A}$ si $\vec{f} = \langle x,\, y,\, -2z\rangle$ y S es el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+z^2=a^2$.

SOLUCIÓN

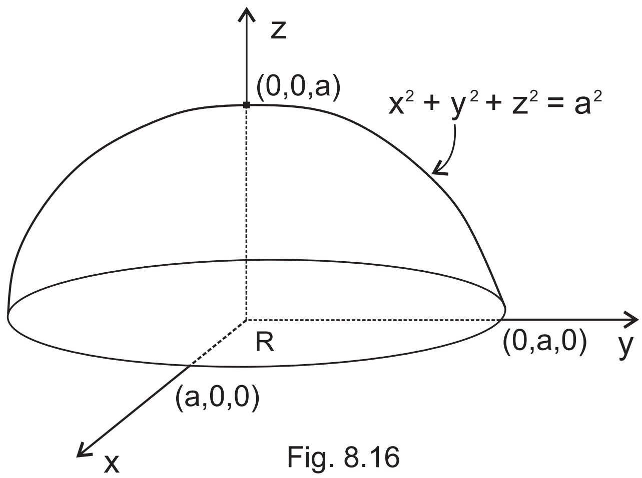

Fig. 8.16

Un vector normal unitario exterior al hemisferio superior a la esfera dada S, se obtiene por medio del gradiente de su ecuación así :

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{\langle 2x,\, 2y, 2z\rangle}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{2\langle x,\, y, z\rangle}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\langle x,\, y, z\rangle}{a}.$$

Entonces,

$$\vec{f}\cdot\vec{n} = \frac{1}{a}\langle x,\, y,\, -2z\rangle\cdot\langle x,\, y, z\rangle = \frac{1}{a}(x^2+y^2-2z^2).$$

Pero,

$$x^2+y^2+z^2 = a^2 - x^2 - y^2, \text{luego},$$

$$\vec{f}\cdot n = \frac{1}{a}\left[(x^2+y^2-2(a^2-x^2-y^2)\right] = \frac{3(x^2+y^2)-2a^2}{a}.$$

Como se trata del hemisferio superior de la esfera, entonces, se debe considerar la ecuación $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$; de donde,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}.$$

En consecuencia,

$$dA = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2} \, dx \, dy,$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{a^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy,$$

$$= \frac{a \, dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

De manera que,

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} = \iint_S \left(\vec{f} \cdot \vec{n}\right) dA = \iint_{\mathcal{R}} \frac{a\left[3(x^2 + y^2) - 2a^2\right]}{a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \, dxdy$$

en donde $\mathcal{R}$ es la proyección de S sobre el plano xy; esto es, la región de $\mathbb{R}^2$ limitada por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$.

El cambio a coordenadas polares $x = rcos\,\theta$, $y = rsen\,\theta$, $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r$,

donde $0 \leq r \leq a$; $0 \leq \theta \leq 2\pi$, conduce a :

$$\iint_S \vec{f} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \frac{3r^2 - 2a^2}{\sqrt{a^2 - r^2}} \, rdr\right] d\theta,$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \frac{3r^3 dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} - 2a^2 \int_0^a \frac{rdr}{\sqrt{a^2 - r^2}}\right] d\theta,$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[(a^2 - r^2)^{3/2} - 3a^2(a^2 - r^2)^{1/2} + 2(a^2 - r^2)^{3/2}\right]_0^a d\theta,$$

$$= \int_0^{2\pi} 0 \, d\theta = 0.$$

PROBLEMA 8.14

Calcular $\displaystyle\iint_S \Phi \, d\vec{A}$ si $\Phi(x, y, z) = \dfrac{3}{16} xyz$ y S es la superficie del cilindro $x^2 + y^2 = 16$ situado en le primer octante entre $z = 0$ y $z = 10$.

SOLUCIÓN

En este caso la proyección de la superficie se hace sobre el plano xz. Puesto que

$$d\vec{A} = \vec{n} \, dA,$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{\langle 2x,\, 2y, 0\rangle}{\sqrt{4x^2 + 4y^2}} = \frac{2\langle x,\, y, 0\rangle}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{4}\langle x,\, y, 0\rangle.$$

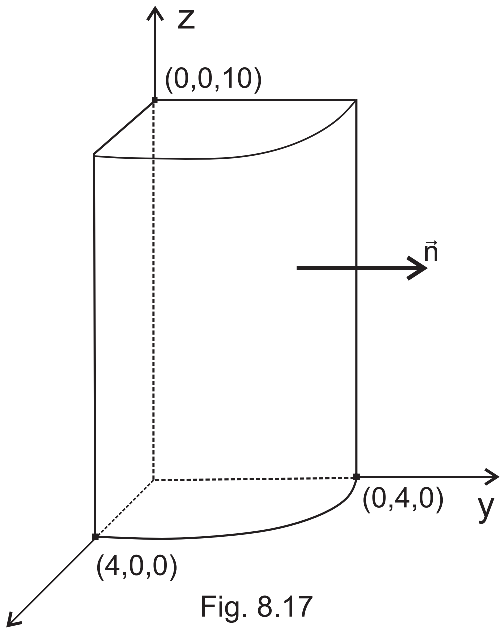

Fig. 8.17

Por otro lado,

$$dA = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\, dx\, dy,$$

$$= \sqrt{1 + \left[\frac{-x}{y}\right]^2}\; dxdy = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \frac{4}{y}.$$

Por tanto,

$$\int_S\!\!\int \Phi\, d\vec{A} \;= \int_S\!\!\int \Phi(\,\vec{n}dA) = \frac{3}{16}\int_{\mathcal{R}}\!\!\int xyz\, * \frac{1}{4}\langle x,\, y, 0\rangle * \frac{4}{y}\, dz\, dx,$$

$$\int_S\!\!\int \Phi\, d\vec{A} \;= \frac{3}{16}\int_0^{10}\!\!\int_0^{4} \left\langle x^2 z,\, xyz, 0\right\rangle dz\, dx,$$

$$\int_S\!\!\int \Phi\, d\vec{A} \;= \frac{3}{16}\int_0^{10}\!\!\int_0^{4} \left\langle x^2 z,\, xy\sqrt{16 - x^2}, 0\right\rangle dz\, dx. \tag{1}$$

Ahora bien,

$$\int_0^{10}\!\!\int_0^{4} x^2 z\, dzdx = \frac{1}{3}\int_0^{10} \left[x^3\right]_0^4 z\, dz = \frac{64}{3}\int_0^{10} zdz = \frac{64}{3} * \frac{1}{2} * (100) = \frac{3200}{3}\,. \tag{2}$$

$$\int_0^{10}\!\!\int_0^{4} xy\sqrt{16 - x^2}\, dz\, dx = \; -\frac{1}{2}\int_0^{10}\!\!\int_0^{4} (-2)xy\sqrt{16 - x^2}\, dz\, dx.$$

$$\int_0^{10}\int_0^{4} xy\sqrt{16-x^2}\,dz\,dx = -\frac{1}{2}*\frac{2}{3}*(-64)\int_0^{10} zdz = \frac{64}{3}\,\frac{1}{2}(100) = \frac{3200}{3} \qquad (3)$$

Al reemplazar (2) y (3) en (1), se llega a :

$$\iint_S \Phi\, d\vec{A} = \frac{3}{16}\left\langle \frac{3200}{3}, \frac{3200}{3}, 0\right\rangle = \langle 200,\, 200, 0\rangle .$$

PROBLEMA 8.15

Calcular $I = \iiint\limits_{\mathcal{R}} \Phi(x,y,z)\,dV$, si $\Phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ y $\mathcal{R}$ es el
.
el tetraedro limitado por el plano $x+y+z=1$ en el primer cuadrante.

SOLUCIÓN

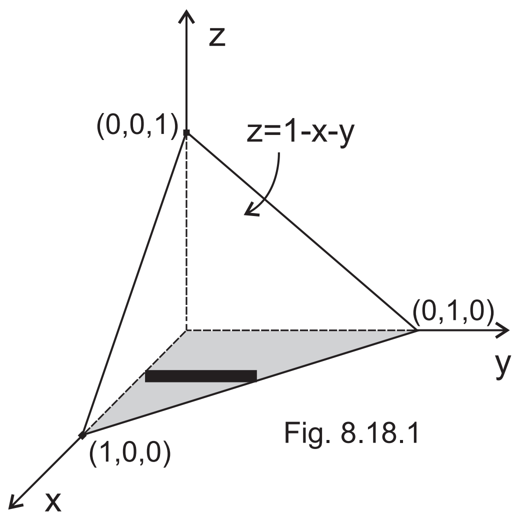

Fig. 8.18.1

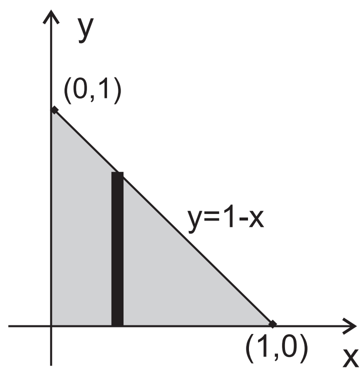

Fig. 8.18.2

La integral de volumen pedida se puede calcular por medio de una integral triple iterada, en la cual varía inicialmente z, luego y y finalmente x, así :

$$I = \iiint\limits_{\mathcal{R}} \Phi(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\mathcal{R}} (x^2+y^2+z^2)\,dV,$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} (x^2+y^2+z^2)\,dzdy\,dx,$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} \left[x^2+y^2)z+\frac{1}{3}z^3\right]_0^{1-x-y} dy\,dx,$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} \left[x^2(1-x)-x^2y+(1-x)y^2-y^3+\frac{1}{3}(1-x-y)^3\right]dy\,dx,$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(1-x)\,y - \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{3}(1-x)y^3 - \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{12}(1-x-y)^4 \right]_0^{1-x} dx,$$

$$= \int_0^1 \left[x^2(1-x)^2 - \frac{1}{2}x^2(1-x)^2 + \frac{1}{3}(1-x)^4 - \frac{1}{4}(1-x)^4 + \frac{1}{12}(1-x)^4 \right] dx,$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2(1-x)^2 + \frac{1}{6}(1-x)^4 \right] dx,$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right) dx + \frac{1}{6}\int_0^1 (1-x)^4\, dx, \right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{5}x^5 \right]_0^1 - \frac{1}{30}\left[(1-x)^5 \right]_0^1 = \frac{1}{2}*\frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{1}{20}.$$

PROBLEMA 8.16

Calcular $I = \iiint\limits_{\mathcal{R}} \Phi(x,y,z)\, dV$, si $\Phi(x,y,z) = x^2 + y^2$ y $\mathcal{R}$ es la región limitada por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ el cono $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0.$

SOLUCIÓN

En este caso conviene utilizar coordenadas esféricas para simplificar el proceso de cálculo : (Ver Problema 6.22)

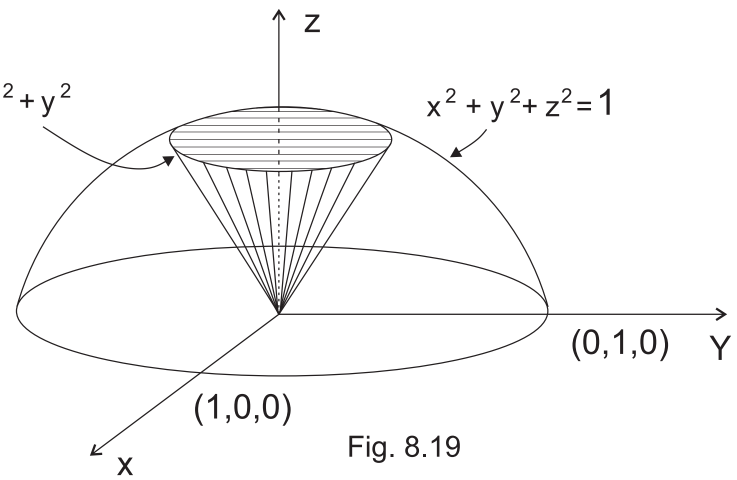

Fig. 8.19

$$x = \rho\; sen\phi \cos\theta, \quad y = \rho\; sen\phi\; sen\,\theta, \quad z = \rho\, \cos\phi.$$

$$x^2 + y^2 = (\rho\; sen\phi \cos\theta)^2 + (\rho\; sen\phi\; sen\,\theta),$$

$$= \rho^2 sen^2\phi\,(cos^2\theta + sen^2\theta) = \rho^2 sen^2\phi.$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho\,,\theta,\phi)} = \rho^2 sen\phi.$$

La variación de $\rho,\ \theta$ y ϕ es como sigue :

$$0 \le \rho \le 3, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}, \qquad 0 \le \theta \le 2\pi.$$

Por tanto,

$$\iiint\limits_{\mathcal{R}} \Phi(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)dV,$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{1} (\rho^4 sen^3\phi)\,d\rho\,d\phi\,d\theta,$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\Big[\rho^4\Big]_0^1 sen^3\phi\,d\phi,$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\int_0^{\pi/4} sen^3\phi\,d\phi\Big]\Big[\int_0^{2\pi} d\theta\Big],$$

$$= \frac{1}{5}\Big[\ \theta\ \Big]_0^{2\pi} * \Big[-\cos\phi + \frac{1}{3}cos^3\phi\Big]_0^{\pi/4},$$

$$= \frac{2\pi}{5}\Big[-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{2}{3}\Big] = \frac{\pi}{30}(8 - 5\sqrt{2}).$$

PROBLEMA 8.17

Comprobar el Teorema de Green en el plano para $\vec{f} = \langle x-y,\, x+y\rangle$ donde Γ es la figura limitada por las curvas $y = x^2$ y $x = y^2$.

SOLUCIÓN

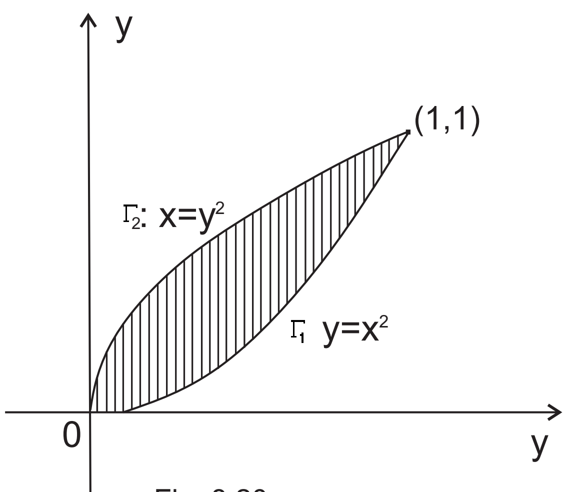

Fig. 8.20

a) La integral de línea a lo largo de la curva $y = x^2$ se calcula así :

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 (x - x^2)\, dx + (x + x^2) 2x\, dx, \\
&= \int_0^1 (2x^3 + x^2 + x)\, dx, \\
&= \Big[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x\Big]_0^1 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

La integral de línea a lo largo de la curva $x = y^2$ es :

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1 (y^2 - y) 2y\, dy + (y^2 + y)\, dy, \\
&= \int_0^1 (2y^3 - y^2 + y)\, dy, \\
&= \Big[\frac{1}{2}y^4 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y\Big]_0^1 = -\frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

Por tanto,

$$
\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r} &= \oint_\Gamma \big\langle x - y,\, x + y \big\rangle \cdot d\vec{r}, \\
&= \int_{\Gamma_1} \big\langle x - y,\, x + y \big\rangle \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \big\langle x - y,\, x + y \big\rangle \cdot d\vec{r}, \\
&= \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

b) Al aplicar el Teorema de Green en el plano, se obtiene :

$$
f_1 = x - y; \quad f_2 = x + y; \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1; \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 1.
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{R}} \Big[\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big] dx\, dy &= \iint_{\mathcal{R}} (1 + 1)\, dx\, dy, \\
&= 2\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy\, dx, \\
&= 2\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx, \\
&= 2\Big[\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{3}x^2\Big]_0^1 = 2\Big[\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\Big] = \frac{2}{3}.
\end{aligned}
$$

En consecuencia se ha verificado que :

$$\int\!\!\int_{\mathcal{R}} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dx\, dy = \oint_{\Gamma} (f_1 dx + f_2 dy).$$

PROBLEMA 8.18

$1)$ Demostrar que el área de una región $\mathcal{R}$ cuya frontera es la curva simple cerrada Γ puede calcularse por la expresión.

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\, dy - y\, dx.$$

$2)$ Hallar el área limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{a^2} = 1.$

SOLUCIÓN

$1)$ Al tomar $f_1 = -y;\ f_2 = x,$ por Teorema de Green en el plano se obtiene:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1;\quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = -1, \text{ entonces,}$$

$$\frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\, dy - y\, dx) = \frac{1}{2}\int\!\!\int_{\mathcal{R}} \Big(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\Big) dx\, dy,$$

$$= \frac{1}{2} * 2\int\!\!\int_{\mathcal{R}} dx\, dy = A.$$

En consecuencia, el área se calcula mediante la relación

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\, dy - y\, dx.$$

$2)$ La parametrización de la elipse es :

$$x = a\, cost;\ y = b\, sent;\ 0 \le t \le 2\pi.$$

En correspondencia con la parte $1)$ de este problema :

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\, dy - y\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \Big[(acos\, t)(bcost) - (bsent)(asent)\Big] dt,$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,(cos^2 t + sen^2 t)\Big] dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt,$$

$$= \frac{ab}{2} * 2\pi = \pi\, ab \text{ unidades de área.}$$

PROBLEMA 8.19

Comprobar el Teorema de Stokes si $\vec{f} = \big\langle 2x - y,\ -yz^2,\ -y^2 z\big\rangle$ y S es la semiesfera superior $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y Γ su contorno límite.

SOLUCIÓN

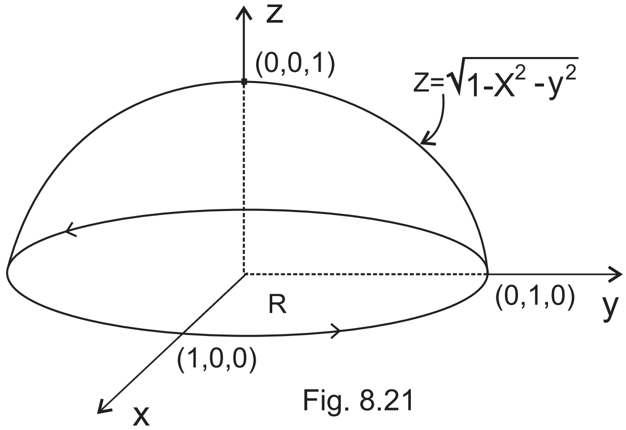

Fig. 8.21

1) La integral de línea se calcula así :

$$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r} = \oint_\Gamma (2x-y)\,dx - yz^2 dy - y^2 z\,dz.$$

En esta integral Γ es el círculo $x^2+y^2=1$ orientado positivamente y su parametrización es $x = cos\,t;\ y = sen\,t\,;\ 0 \le t \le 2\pi$. Entonces,

$$\oint_\Gamma \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \Big[(2cos\,t - sen\,t)\,(-sen\,t)\Big] dt,$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2cos\,t\,sen\,t + sen^2 t\,)\,dt,$$

$$= \Big[-sen^2 t + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{2}sen\,2t\Big]_0^{2\pi} = \pi.$$

2) Para calcular la integral de superficie, se debe calcular el rotor del campo vectorial y el vector normal unitario a la superficie, así:

$$\nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} = \langle 0,\,0,\,1\rangle.$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla S}{\|\nabla S\|} = \frac{\nabla(x^2+y^2+z^2-1)}{\|\nabla(x^2+y^2+z^2-1)\|},$$

$$= \frac{\langle 2x,\,2y,\,2z\rangle}{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}} = \frac{2\langle x,\,y,\,z\rangle}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \langle x,\,y,\,z\rangle.$$

Por otra parte,

$$(\nabla \times \vec{f}) \cdot \vec{n}\,dA = \langle 0,\,0,\,1\rangle \cdot \langle x,\,y,\,z\rangle dA = z\,dA.$$

Pero,

$$dA = \sqrt{1 + \left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]^2}\, dx\, dy,$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{1 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$

$$= \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \frac{dx\, dy}{z}.$$

En consecuencia,

$$\left(\nabla \times \vec{f}\right) \cdot \vec{n}\, dA = z * \frac{dx\, dy}{z} = dxdy.$$

Finalmente,

$$\int_{\mathcal{R}}\int \left(\nabla \times \vec{f}\right) \cdot \vec{n}\, dA = \int_{\mathcal{R}}\int dxdy = A,$$

donde A es el área del círculo $x^2 + y^2 = 1,$ la cual es igual a $\pi(1)^2 = \pi.$
Luego,

$$\int_{\mathcal{R}}\int \left(\nabla \times \vec{f}\right) \cdot \vec{n}\, dA = \pi.$$

PROBLEMA 8.20

Si $\vec{r} = \langle x,\, y,\, z \rangle$ es el vector de posición, demostrar que

$$\int_S\int \vec{r} \cdot d\vec{A} = 3V$$

donde V es el volumen de la región limitada por la superficie cerrada S.

SOLUCIÓN

Para calcular la integral $\int_{\mathcal{R}}\int \vec{r} \cdot d\vec{A}$ resulta conveniente utilizar el Teorema de la divergencia de Gauss, así :

$$\int_S\int \vec{r} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{r}\right) dV.$$

Pero, $\nabla \cdot \vec{r} = \nabla \cdot \langle x,\, y,\, z \rangle = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$ Por tanto,

$$\iiint_V \left(\nabla \cdot \vec{r}\right) dV = 3 \iiint_V dV = 3V.$$

En consecuencia,

$$\iint_S \vec{r}\cdot d\vec{A} = 3V.$$

PROBLEMA 8.21

Calcular la integral $\displaystyle\iint_S \vec{r}\cdot d\vec{A}$ donde $\vec{r}$ es el vector de posición y S es la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

SOLUCIÓN

El volumen de la esfera de radio 1 es $V = \frac{4}{3}\pi R^3.$

Como el radio de la esfera es $1,$ entonces,

$$V = \frac{4}{3}\pi(1)^3 = \frac{4}{3}\pi.$$

De acuerdo a los resultados obtenidos en el Problema $8.20,$ se tiene :

$$\iint_S \vec{r}\cdot d\vec{A} = 3V = 3\left[\frac{4}{3}\pi\right] = 4\pi.$$

PROBLEMA 8.22

Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{f} = \left\langle x^2,\, y^2,\, z^2 \right\rangle$ a través de la superficie cerrada $x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$

SOLUCIÓN

El Teorema de la divergencia de Gauss establece que

$$\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f}\,)dV = \iint_S \vec{f}\cdot d\vec{A} = \iint_S (\vec{f}\cdot\vec{n}\,)\, dA.$$

Para determinar el flujo del campo vectorial dado, es mejor aplicar el Teorema de la divergencia; esto es, calcular la integral triple en lugar de la integral doble, así :

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\vec{r} = \nabla\cdot\left\langle x^2,\, y^2,\, z^2\right\rangle &= \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2)}{\partial y} + \frac{\partial(z^2)}{\partial z},\\ &= 2(x+y+z).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\iiint_V (\nabla\cdot\vec{f}\,)dV = 2\iiint_V (x+y+z)dV.$$

El cambio a coordenadas esféricas conduce a :

$$x = \rho\ sen\phi\, cos\,\theta, \qquad y = \rho\ sen\phi\, sen\,\theta, \qquad z = \rho\ cos\,\phi.$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho\,, \theta, \phi)} = \rho^2 sen\phi\,;\ 0 \leq \rho \leq a;\ 0 \leq \theta \leq 2\pi;\ \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Entonces,

$$(x + y + z)dV = \rho^3\big[sen^2\phi\, cos\,\theta + sen^2\phi\, sen\,\theta + \ cos\,\phi sen\,\phi\big]d\rho\, d\phi\, d\theta.$$

De esta manera,

$$2\iiint\limits_V (x + y + z)dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^a \rho^3\big[sen^2\phi\, cos\,\theta + sen^2\phi\, sen\,\theta + cos\,\phi sen\,\phi\big]d\rho\, d\phi d\theta$$

$$= \left[2\int_0^a \rho^3 d\rho\right]\left[\int_0^{2\pi} d\theta\right]\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos\,\phi sen\,\phi\, d\phi\right],$$

$$= \left[\frac{1}{2}\rho^4\right]_0^a\left[\theta\right]_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}sen^2\phi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}a^4 {*} 2\pi {*} \frac{1}{2} = \frac{\pi a^4}{2}.$$

En consecuencia,

$$\iint\limits_S \vec{f} \cdot dA = \frac{\pi a^4}{2}.$$

BIBLIOGRAFÍA

BERMAN, G.N. Problemas y ejercicios de análisis matemático. Editorial Mir. Moscú, 1977.

BRONSHTEIN / SEMENDIAEV. Manual de matemáticas para ingenieros y Editorial Mir. Moscú, 1977.

BUDNICK, Frank. Matemáticas aplicadas para administración, economía y ciencias sociales. McGraw-Hill. México, 1990.

CURTIS, Phillip. Cálculo con una introducción a los vectores. Limusa. México, 1971.

DEMIDOVICH Y OTROS. Problemas y ejercicios de análisis matemático. Editorial Mir. Moscú, 1980.

EDWARDS / PENNEY. Cálculo con geometría analítica. Phh. México 1994.

LARSON / HOSTETLER / EDWARDS. Cálculo. Vol I y II. McGraw-Hill. Madrid, 1999.

LEHMANN, Charles. Geometría Analítica. McGraw-Hill. México, 1996.

PISKUNOV, N. Cálculo diferencial e integral. Editorial Mir. Moscú, 1969.

PURCELL / WARBERG. Cálculo con geometría analítica. Phh. México 1996.

SPIEGEL, Murray. Análisis vectorial. McGraw-Hill. México, 1989.

STEWART, James. Cálculo diferencial e integral. Thomson. México, 1999.