

CÁLCULO DEL LÍMITE Y DE LA ZONA DE ROCHE LOBES PARA UN SISTEMA
DE ESTRELLAS BINARIAS DEL TIPO ECLIPSANTE DE CORTO PERÍODO

JAVIER ANTONIO NARVÁEZ SOLARTE

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA
2008

CÁLCULO DEL LÍMITE Y DE LA ZONA DE ROCHE LOBES PARA UN SISTEMA
DE ESTRELLAS BINARIAS DEL TIPO ECLIPSANTE DE CORTO PERÍODO

JAVIER ANTONIO NARVÁEZ SOLARTE

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de Físico

Director

MSc. ALBERTO QUIJANO VODNIZA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
PROGRAMA DE FÍSICA
2008

“Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo Primero del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Junio de 2008

DEDICATORIA

Este trabajo va dedicado a la memoria de *José Antonio Solarte*, mi abuelo, quien hace unos cuantos años partió a otro universo que Dios diseñó para él.

AGRADECIMIENTOS

Es muy difícil hacer un agradecimiento, porque se puede nombrar a muchas personas, pero, siempre se deja por fuera a alguien a quien no se tenía que dejar por fuera. Así que para evitar esto, el agradecimiento va a todos y cada uno de los seres que han intervenido en mi formación, haciendo un especial énfasis en mi madre quien ha luchado, sufrido y ha estado en las buenas y en las malas conmigo. A ella y a todos los que han dado algo en pro de mi formación.

TABLA DE CONTENIDO

	Pag.
INTRODUCCIÓN	22
1. OBJETIVOS	24
1.1. OBJETIVO GENERAL	24
1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS	24
2. ESTRELLAS VARIABLES	25
2.1. CLASIFICACIÓN DE ESTRELLAS VARIABLES	25
2.1.1. Variables pulsantes	25
2.1.2. Variables eruptivas	26
2.1.3. Variables eclipsantes	27
2.1.4. Variables de rotación	28
2.2. NOTACIÓN DE ESTRELLAS VARIABLES	28
2.3. CURVAS DE LUZ	29
3. PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS	30
3.1. ECUACIONES DE MOVIMIENTO	30
3.2. INTEGRAL DE JACOBI	33
3.3. SUPERFICIES DE HILL	36
3.4. PUNTOS DE EQUILIBRIO DE LAGRANGE	36
3.5. LOCALIZACIÓN DE LOS PUNTOS LAGRANGIANOS	39
3.5.1. Localización de los puntos triangulares	40
3.5.2. Localización de los puntos colineales	40
4. FUERZAS DE MAREA	43

4.1. DEFORMACIÓN POR FUERZAS DE MAREA	43
5. LÍMITE DE ROCHE Y ZONA DE ROCHE LOBES	48
5.1. ZONA DE ROCHE LOBES	48
5.2. LÍMITE DE ROCHE	53
6. MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO ALGEBRAICAS	54
6.1. METODOS GRÁFICOS	54
6.2. MÉTODOS ITERATIVOS	56
6.2.1. Método de Newton-Raphson	56
6.3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON AL CÁLCULO DEL LÍMITE DE ROCHE Y A LA ZONA DE ROCHE LOBES	57
6.3.1. Aplicación a la zona de Roche lobes	57
6.3.2. Aplicación al límite de Roche	59
7. PROGRAMA DESARROLLADO PARA EL CÁLCULO DEL LÍMITE DE ROCHE Y LA ZONA DE ROCHE LOBES	60
7.1. DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE	60
7.1.1. Interfaz	60
7.1.2. Funcionamiento del software	61
8. RESULTADOS	67
9. CONCLUSIONES	70
10. RECOMENDACIONES	71
BIBLIOGRAFÍA	72
ANEXOS	74

LISTA DE FIGURAS

	Pag.
1. Curvas de luz de <i>S Sextante</i>	29
2. Rotación de las coordenadas ξ y η alrededor del eje ζ , definiendo el nuevo sistema de coordenadas	32
3. Superficie de Hill para un sistema en que la relación de masa es 3:1 para valores de C_j de 4.0, 3.8, 3.2, 2.8	36
4. Fuerzas por unidad de masa que experimenta una partícula en el punto P debido a la presencia de dos masas m_1 y m_2	37
5. Balance geométrico de fuerzas sobre una partícula P ubicada en un punto de equilibrio	38
6. Localización de los puntos lagrangianos	42
7. Ubicación del vector centro de masa	44
8. Relación entre la distancia de las masas al centro de masas	44
9. Movimiento de los puntos P_1 y P_2 sobre el centro de masa y sobre el punto C_2 respectivamente	45
10. Geometría del problema	46
11. Coordenadas del problema	49
12. Representación de la forma de un sistema binario	52
13. Gráfica de la función $f(E) = E - M + e \sin E$ para $M = 2$ y $e = 0,9$ con el acercamiento en el lado derecho. La gráfica se realizo con el programa "KmPlot"	54
14. Gráficas de las funciones $f(E) = E - M$ y $g(E) = -e \sin E$, tomando los mismos valores de la gráfica anterior. El punto de corte el programa "KmPlot" muestra el punto $x = 1,17$ y $y = -0,83$	55
15. Gráfica que muestra la forma de aplicar el método de Newton-Raphson	56
16. Gráfica que ilustra la interfaz del software desarrollado.	60

17. Zona de Roche lobes para los valores del cuadro 4		67
18. Zona de Roche lobes para <i>RT And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5441996	76
19. Zona de Roche lobes para <i>TT And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5523426	76
20. Zona de Roche lobes para <i>TW And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,6585557	77
21. Zona de Roche lobes para <i>UU And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,6380759	77
22. Zona de Roche lobes para <i>WZ And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5540481	78
23. Zona de Roche lobes para <i>XZ And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5381045	78
24. Zona de Roche lobes para <i>AA And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,6208667	79
25. Zona de Roche lobes para <i>AB And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5490108	79
26. Zona de Roche lobes para <i>AD And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5229503	80
27. Zona de Roche lobes para <i>BD And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5309462	80
28. Zona de Roche lobes para <i>BL And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,6208667	81
29. Zona de Roche lobes para <i>BO And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5707516	81
30. Zona de Roche lobes para <i>BX And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,6839199	82
31. Zona de Roche lobes para <i>CN And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5473829	82
32. Zona de Roche lobes para <i>CO And.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5381045	83
33. Zona de Roche lobes para <i>SS Ari.</i>	El límite de Roche de este sistema es 0,5506637	83

LISTA DE CUADROS

	Pag.
1. Clasificación espectral. Las magnitudes Masa, Radio y Luminosidad, en proporción respecto al Sol (Sol=1)	19
2. Valores de los ángulos θ y ϕ que se tomarán	58
3. Relación entre variables de la teoría y del software	63
4. Límite de Roche para diferentes valores de q con los cuales se desarrollaron algunas gráficas con el programa	68
5. Datos de Sistemas estelares binarios de corto período.	75

LISTA DE ANEXOS

	Pag.
1. Método de inversión de series de Lagrange	74
2. Zona de Roche lobes y Límite de Roche de sistemas estelares binarios de corto período	75

GLOSARIO

ACELERACIÓN DE CORIOLIS: aceleración causada por la rotación de un cuerpo sobre su eje.

CEFEIDAS: tipo de estrella variable cuyo período de cambio de brillo es extremadamente regular y varía con la distancia de la estrella.

ECLIPSE: paso de un cuerpo por la línea de visión de otro cuerpo celeste disminuyendo el brillo del segundo cuerpo.

ÉDUARD ALBERT ROCHE: (1820-1883) científico francés, quien fue mejor conocido por sus trabajos en el campo de la mecánica celeste. Roche es conocido por su teoría de los anillos de Saturno y el estudio matemático de la hipótesis nebular de Laplace.

EFEECTO DOPPLER: cambio en la frecuencia de una onda producido por el movimiento relativo entre el observador y la fuente de ondas.

ESTRELLAS BINARIAS: sistemas estelares compuestos por dos estrellas las cuales tomadas cada una por aparte, serian consideradas como no variables.

ESTRELLAS BINARIAS DE CORTO PERÍODO: estrellas cuyo período en el cambio de brillo está en el orden de un día. Al ser el período muy corto la distancia entre ellas también es pequeña, la distancia es del orden del tamaño de la estrella más grande.

ESTRELLAS VARIABLES: estrellas que presentan un cambio su brillo.

FUERZAS DE MAREA: efecto de la fuerza gravitacional sobre un elemento de masa de un cuerpo.

LEONHARD EULER: Matemático, físico y astrónomo. Introdujo gran parte de la moderna terminología y anotación matemática, particularmente para el área del análisis matemático, como por ejemplo la noción de función matemática. También se le conoce por sus trabajo en los campos de la mecánica, óptica y astronomía.

LEYES DE KEPLER: las leyes de Kepler muestran como es el movimiento de los planetas alrededor del sol (aunque se pueden aplicar a sistemas con una masa dominante y cuerpos alrededor de ella). Las leyes de Kepler son tres:

- Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas alrededor del sol.
- Los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales.
- El período de rotación de un planeta alrededor del sol al cuadrado, es proporcional a la tercera potencia de la distancia promedio de este planeta al sol.

LÍMITE DE ROCHE: distancia mínima a la cual debe estar un cuerpo de otro para que este otro no lo destruya por efectos de la gravedad.

MAGNITUD: medida en el brillo de una estrella. La magnitud tiene una escala logarítmica.

MOMENTO ANGULAR POR UNIDAD DE MASA: cantidad física la cual es el producto de multiplicar la masa de un cuerpo por su momento angular.

ÓRBITAS: modo en que un cuerpo se mueve alrededor de otro. Estas órbitas en el caso de dos cuerpos pueden ser: circulares, elípticas, parabólicas o hiperbólicas.

POTENCIAL GRAVITACIONAL: potencial producido por la presencia de una masa. Este potencial varía inversamente con la distancia a la que está situada la masa.

PUNTOS LAGRANGIANOS: puntos de equilibrio que son solución estática al problema restringido de los tres cuerpos.

TIPO ESPECTRAL: Clasificación de las estrellas utilizada en astronomía. Las diferentes clases de estrellas se enumeran de las más cálidas a frías y son resumidas en la siguiente tabla.

Cuadro 1: Clasificación espectral. Las magnitudes Masa, Radio y Luminosidad, en proporción respecto al Sol (Sol=1).

Clase	Temperatura	Color	Masa	Radio	Luminosidad
O	28000 – 50000°C	Azul	60	15	1400000
B	9600 – 28000°C	Blanco azulado	18	7	20000
A	7100 – 9600°C	Blanco	3.1	2.1	80
F	5700 – 7100°C	Blanco amarillento	1.7	1.3	6
G	4600 – 5700°C	Amarillo	1.1	1.1	1.2
K	3200 – 4600°C	Naranja	0.8	0.9	0.4
M	1700 – 3200°C	Rojo	0.3	0.4	0.04

Las diferentes clases se dividen posteriormente siguiendo números arábigos del 0 al 9. A0 especifica las estrellas más calientes de la clase A, mientras que A9 se refiere a las más frías. Por ejemplo, el Sol es una estrella de tipo G2. Esta clasificación se completa con los tipos R, N y S.

ZONA DE ROCHE LOBES: se traduce como *lóbulo de Roche*, y es una zona en un sistema binario a través de la cual se transfiere masa de una estrella a otra.

RESUMEN

El siguiente trabajo muestra como en un sistema de estrellas binario de corto período, se genera una zona en la cual orbita materia estelar, debido a las fuerzas de marea que se producen entre las estrellas. A través de la zona de Roche lobes una de las estrellas cede masa a la otra. El límite de Roche brinda una idea de la posible formación de discos de acreción alrededor de una de las estrellas. El problema amerita un estudio de la solución del problema restringido de los tres cuerpos, la solución de ecuaciones no algebraicas y la aplicación de las fuerzas de marea. Para la solución del problema se desarrolló un software que reproduce la zona de Roche lobes.

ABSTRACT

The following research paper shows how, in a system of short period binary stars, it is generated a zone on which it orbits stellar material, due to the tide's forces occurring between the stars. Through the zone of Roche lobes one of the stars transfers mass to the other. The Roches limit provides an idea of the possible formation of accretion disks around one of the stars. The case deserves a study of the solution of the three bodies' restricted problem, the solution of non-algebraic equations and the application of the tide's forces. To solve the problem it was developed a software which reproduces the Roche lobes zone.

INTRODUCCIÓN

Los grandes físicos del siglo XVII como Newton, Galileo, Kepler, entre otros; dieron origen a la física a partir de la astronomía, la cual se presenta entonces como la madre de una de las ciencias más completas que existe.

Aplicando las bases que la Física nos otorga, se ha preparado un recuento sobre las estrellas variables y en especial sobre el tipo eclipsantes de corto período. Las estrellas variables son aquellas que cambian su brillo, tal vez cuando miramos el cielo no nos demos cuenta de eso, pero en realidad ocurre, incluso el mismo sol cambia de brillo aunque nosotros no nos demos cuenta de este fenómeno. Como se verá más adelante, el brillo de una estrella cambia debido a muchos factores, es por esto que se ha hecho una clasificación de estas estrellas según el factor que produzca el cambio en su brillo, el período del cambio de brillo, la regularidad del período, etc.

Las estrellas binarias de corto período, son sistemas de dos estrellas muy cercanos entre si, tan cercanos que su distancia es del orden del tamaño de las estrellas que conforman el sistema. Debido a la cercanía entre las estrellas se observa la formación de una zona de materia estelar y un intercambio de materia, es por esto que este tipo de estrellas son clasificadas como eruptivas.

El intercambio de materia se realiza a través de una zona llamada la *Zona de Roche lobes*, la cual tiene este nombre en honor del científico francés *Édouard Albert Roche* (1820-1883). Además de la zona de Roche lobes, el científico nacido en Montpellier da el nombre al límite de Roche, por ser el primero en calcular este valor, este límite no es más que la distancia mínima en la cual el material alrededor de un planeta podría formar un satélite¹. En el caso de un sistema estelar este límite coincide con el punto lagrangiano L_1 , y será la distancia crítica a la cual puede estar una partícula de una de las estrellas, si se sobrepasa este límite la partícula pasará a formar parte de la otra estrella.

Tanto el límite de Roche como la zona de Roche lobes, son consecuencia de las denominadas fuerzas de marea, un tipo de fuerza que como su nombre lo dice es semejante a la que produce las mareas terrestres.

Las binarias de corto período, y la materia que se desprende de una de las estrellas para pasar a la otra, son un ejemplo práctico en el que se puede aplicar el problema

¹Por ejemplo en el caso del anillo de Saturno, éste se encuentra en el límite de Roche y no puede formar un satélite

restringido de los tres cuerpos. Como es ya conocido el problema de los tres cuerpos, es un problema que no tiene una solución analítica, sin embargo tiene una solución cuando; uno de los cuerpos es de masa muchísimo menor a la masa de los otros dos y además los otros cuerpos orbitan de manera circular alrededor del centro de masa.

Las ecuaciones finales que permitan graficar la zona de Roche lobes y calcular el límite de Roche, serán ecuaciones no algebraicas, por lo cual se deberá aplicar métodos numéricos y desarrollar un software que permita un cálculo de los valores necesarios para realizar la gráfica de la zona de Roche lobes.

1. OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL

Calcular el límite de Roche y graficar la zona de Roche lobes para un sistema estelar binario de corto período.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar el problema restringido de los tres cuerpos y los puntos de equilibrio de Lagrange.
- Estudiar las fuerzas de marea que genera la zona de Roche lobes y el límite de Roche.
- Estudiar métodos numéricos que brinden solución a ecuaciones no algebraicas.
- Desarrollar un Software con el que se pueda desarrollar las operaciones necesarias de una manera más fácil y que permita graficar la zona de Roche lobes dar el límite de Roche.
- Aplicar el software desarrollado a algunos sistemas binarios de corto período.

2. ESTRELLAS VARIABLES

Las estrellas variables son estrellas que presentan un cambio en su brillo. Existe una clasificación de estrellas variables, las cuales se dividen de acuerdo a la causa que genere el cambio de brillo de la estrella, al período del cambio de brillo y a la regularidad del período entre otras. La notación de las estrellas variables es diferente a la notación de las estrellas normales.

2.1. CLASIFICACIÓN DE ESTRELLAS VARIABLES

Las estrellas variables se dividen en dos tipos: las que su cambio es intrínseco (cambios en el interior de la estrella), las que a su vez se subdividen en pulsantes y eruptivas, y las que su cambio es extrínseco (cambios en el exterior de la estrella), las cuales también se subdividen en eclipsantes y del tipo rotacional. Para encontrar el tipo de estrellas y algunas propiedades físicas de estas estrellas, es necesario analizar las curvas de luz de los sistemas a estudiar.²

2.1.1. Variables pulsantes: la causa del cambio de brillo de las estrellas variables pulsantes no tiene una explicación exacta, sin embargo, aparentemente este cambio en el brillo se debe a algunas irregularidades en la producción de energía en el interior de la estrella. Además algunas mediciones utilizando efecto Doppler en los espectros de estas estrellas, muestran una expansión y compresión en las mismas por lo que podría existir un cambio en el tamaño de la estrella.

- Cefeidas: Variables que pulsan con períodos entre 1 a 70 días con cambio de magnitud entre 0.1 a 2 ordenes. Su tipo espectral se encuentra entre un máximo G y un mínimo K.

En una cefeida clásica, el aumento de brillo es más rápido que su descenso. Su ciclo sucesivo es precisamente igual al anterior hasta en las más mínimas irregularidades.

En 1908 Henrietta Leavitt, después de estudiar un grupo de cefeidas en la nube de Magallanes, encontró que el período de una cefeida se relacionaba directamente con el brillo de la misma, lo cual sirvió a los astrónomos como una medida de distancia.

- Estrellas tipo *RR Lyrae*: Son estrellas pulsantes de corto período, él cual se encuentra

²PERCY, John. *The study of the variables star using small telescopes.*

entre los 0.05 a 1.2 días. Presentan cambio de magnitud entre los 0.3 a 2 ordenes. Por lo general son gigantes blancas del tipo espectral A.

- Estrellas tipo *RV Tauri*: Presentan mayor cambio en su magnitud con cambios de 3 ordenes. Sus períodos de se encuentran entre los 30 a 150 días. Son Gigantes Amarillas del tipo espectral G a K.

Los ciclos de brillo no son tan regulares como en las cefeidas observándose mínimos poco marcados y otros muy profundos.

- Pulsantes de largo periodo o tipo Mira: Son gigantes rojas que varían con períodos entre los 80 y los 1000 días. Presentan cambios de magnitud entre los 2.5 y los 5 ordenes. Son del tipo espectral M, C o S.

- Variables Semirregulares: Son gigantes y supergigantes con una variación irregular de la luz. Sus períodos oscilan entre los 30 y los 1000 días.

2.1.2. Variables eruptivas: Son estrellas que presentan un desprendimiento de materia, *erupciones*, causado por procesos internos en la estrella o por la presencia de una estrella compañera que le roba material, se subdividen en:

- Supernovas: Son las que presentan el mayor cambio en el brillo incrementando su brillo en valores superiores a los 20 ordenes de magnitud, este cambio de brillo se debe a una gigantesca explosión. Si en algún momento se presenta una supernova en alguna galaxia, el brillo de la supernova es mayor que el brillo de toda la galaxia.

Las supernovas se dividen en dos tipos: tipo I y tipo II (Con un menor brillo que las tipo I). Las tipo I tienen como origen un sistema binario, el que una de las estrellas ha robado tanta masa, que la estrella colapsa produciendo la explosión que cambia el brillo del sistema. Las tipo II son estrellas que en su naturaleza surgieron con una gran cantidad de masa (≈ 60 masas solares), la cual en el momento de la muerte de la estrella, colapsa produciendo la explosión.

- Novas: Presentan este nombre porque aparecían de pronto en el cielo, y se pensaba que eran estrellas nuevas. Son sistemas binarios de corto período en los cuales se presenta un intercambio de materia. Las novas son formadas por una enana blanca y una estrella normal, el incremento de brillo en una nova está entre 7 a 16 ordenes de magnitud. Después de llegar a su máximo brillo, el brillo de la estrella decae hasta llegar a su brillo original.

- Novas recurrentes: Son semejantes a las novas, con la diferencia que presentan más de una pico de brillo.

- Estrellas del tipo *U Geminorum*: Son sistemas binarios de corto período, se presentan erupciones entre 10 a 1000 días. La magnitud de las estrellas cambia entre dos a seis ordenes de magnitud.
- Estrellas del tipo *R Corona Boreales*: Son estrellas ricas en carbono y pobres en hidrógeno, su magnitud disminuye en nueve ordenes de magnitud, recuperando su brillo original después de meses. Se cree que el cambio en la magnitud se debe a la presencia de carbono en la superficie.
- Variables simbióticas: Son sistemas binarios de corto período, en ellas una de las estrellas es una gigante roja y la otra estrella una estrella azul. Presentan similitud con las novae solo que el incremento en la magnitud es de tres ordenes.

2.1.3. Variable eclipsantes: Este tipo de estrellas variables, son sistemas estelares múltiples, en los cuales si se toma cada estrella por separado, estas no presentan cambios significativos en su brillo, entonces el cambio en el brillo se produce por los movimientos orbitales de las estrellas que componen el sistema.

Se estima que el setenta por ciento de las estrellas que existen en el universo son múltiples, es decir que las estrellas parecidas al sol son *escasas* en el universo³.

El cambio en el brillo en un sistema binario, depende de la forma en que se generen los eclipses en el sistema. Es así como pueden existir eclipses anulares, totales o parciales. Además se presentan dos tipos de eclipses en el mismo sistema, uno en el que la estrella menos brillante pasa en frente de la más brillante y otro en el cual se presenta lo contrario.

Los sistemas estelares con más de dos estrellas, presentan cambios en su brillo muy irregulares, un ejemplo de un sistema múltiple es α -Centauri la cual está formada por un conjunto de tres estrellas. Las variables eclipsantes se dividen en⁴:

- EA: Eclipsantes que presentan mínimos de luz bien marcados y durante el máximo de brillo (cuando vemos la luz de ambas estrellas combinada) la magnitud permanece prácticamente constante debido a que las estrellas tienen forma casi esférica. Puede haber gran diferencia de luminosidad entre las componentes y por lo tanto el eclipse secundario puede ser casi invisible. La *A* de EA viene de *Algol* nombre de la estrella beta Persei, la primer eclipsante de este tipo conocida. Los períodos pueden ir desde 0,2 días hasta muchos años.
- EB: Eclipsantes con componentes elipsoidales y cambios constantes en el brillo debido a que con el movimiento orbital vemos a las estrellas de punta o de costado, lo

³GUEDINI, Silvano. *Software for Photometric Astronomy*

⁴www.surastronomico.com/variable200411.htm

cual influye en el brillo percibido. Siempre hay eclipse secundario (la diferencia entre las componentes no es tan grande) y suele ser de mucha menor amplitud que el primario. La "B" de EB viene de beta Lyrae, el prototipo de esta clase. Los períodos en ella son mayores a 0,4 días.

- EW: Eclipsantes de períodos cortos (en general entre 0,25 y 1 día) cuyas componentes se encuentran prácticamente en contacto y son de similar luminosidad, lo cual genera mínimos muy parecidos. Suele tratarse de enanas, en los tipos EA y EB puede ser cualquier tipo de estrella. La "W" procede de W Ursae Majoris, la estrella prototipo.

2.1.4. Variables por rotación: Las variables por rotación, son variables que tienen irregularidades en su superficie, con lo que al rotar se observara un cambio en el brillo de la estrella.

2.2. NOTACIÓN DE ESTRELLAS VARIABLES

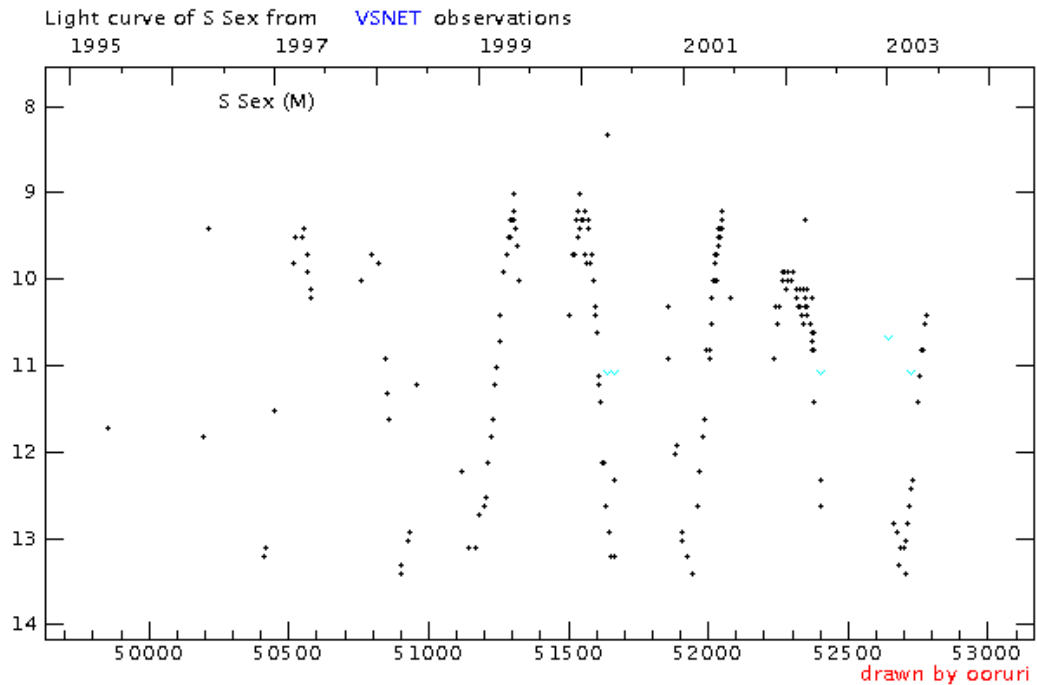
Para designar el nombre de una estrella variable se debe tener en cuenta las siguientes reglas:

- Si la estrella tiene nombre propio, está lo retiene. Por ejemplo: η -Carina.
- Caso contrario se designa con el conjunto de letras R, S, T, ... Z. Luego con las combinaciones RR, RS, RT, ... RZ, SS, ST, ... SZ; así hasta llegar a la combinación ZZ. Después de esto se utilizan las combinaciones AA, AB, ... AZ, BB, BC, ... BZ; así hasta llegar a la combinación QZ, solo que no se tiene en cuenta la letra J. Por Ejemplo: RR lyrae.
- Una vez gastadas todas las combinaciones se utiliza la letra V seguida del número de su descubrimiento. Por ejemplo: V362 Vela.

2.3. CURVAS DE LUZ

Para saber si una estrella es variable y cómo se comporta, lo primero que hay que hacer es confeccionar su curva de luz. La curva de luz será siempre la herramienta de trabajo fundamental y habrá que saber cómo manipularla para extraer de ella la máxima información posible.

Figura 1: Curvas de luz de *S Sextante*



Una curva de luz sencilla, es una representación gráfica del brillo de la estrella en función del tiempo (Figura 1⁵). A una curva de luz se le es posible sacar mucha información como el movimiento que tienen las estrellas respecto a su centro de masa, la distancia de las estrellas al centro de masa, la masa de las estrellas, y otras características. Esto aplicando métodos como el análisis de Fourier.

⁵www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/vsnet/LCs/index/index.html

3. PROBLEMA RESTRINGIDO DE LOS TRES CUERPOS

Kepler demostró que en un sistema de dos cuerpos influenciados exclusivamente por una interacción gravitacional, el problema del movimiento de los cuerpos alrededor de su centro de masa tiene una solución analítica y esta solución brinda cuatro tipos de órbitas: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. Además no solo se puede encontrar una solución para un potencial gravitacional, si no que se puede encontrar una solución para cualquier potencial de la forma $V = ar^n$.⁶

Cuando tres cuerpos interactúan, en el sistema resultan ecuaciones muy complejas, y en general un sistema de tres cuerpos no tiene solución analítica. Si se imponen condiciones que permitan reducir la complejidad de las ecuaciones el problema tiene una solución numérica. Estas condiciones son:

- Que la masa de dos de los cuerpos sean muchísimo más grandes que la masa del tercer cuerpo.
- Que los cuerpos con masas mayores, orbiten de manera circular alrededor de su centro de masa, en un solo plano.

Estas condiciones originan el *Problema restringido de los tres cuerpos*. Esta solución fue trabajada por Euler quien esperaba que el tratamiento hecho para un sistema de dos cuerpos sirva para solucionar un sistema de tres cuerpos.

La primera condición implica que los cuerpos de masa mayor no se vean afectados por el potencial gravitacional del cuerpo de masa menor, por lo cual el potencial gravitacional del tercer cuerpo no es considerado en primer aproximación. La segunda condición hace entender que la solución será vista en un solo plano y por ende tendrá dos coordenadas en las cuales se enfatizará el estudio.

3.1 ECUACIONES DE MOVIMIENTO

Indudablemente el tipo de interacción a tener en cuenta es la interacción gravitacional, para encontrar las ecuaciones de movimiento se tomara m_1 y m_2 las masas de los cuerpos más grandes del sistema, la masa del tercer cuerpo es despreciable, comparado con las masas m_1 y m_2 , y por ende no se escribirá en el sistema de ecuaciones. Además, se

⁶GOLDSTEIN, Herbert. *Classical Mechanics*

tendrá en cuenta la consideración de que $m_1 > m_2$.

Se tomaran los ejes ξ , η y ζ como ejes de un sistema inercial en donde el centro del sistema coincide con el centro de masa. Se considera el eje ξ como la continuación infinita de la línea que va desde m_1 hasta m_2 en un tiempo $t = 0$. Las posiciones de los cuerpos serán (ξ_1, η_1, ζ_1) y (ξ_2, η_2, ζ_2) para los cuerpos uno y dos respectivamente. Las dos masas tienen la misma separación la una de la otra y la misma velocidad angular respecto al centro de masa. Tomando G la constante de gravitación universal se tendrá un sistema de unidades en que $\mu = G(m_1 + m_2) = 1$. De esta manera se define:

$$\bar{\mu} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (1)$$

En este sistema de unidades, se tomará la convención de que las dos masas sean: $\mu_1 = Gm_1 = 1 - \bar{\mu}$ y $\mu_2 = Gm_2 = \bar{\mu}$. Y la distancia entre los dos cuerpos será la unidad.

El movimiento de una partícula que se encuentre sometida a la interacción de estos dos cuerpos será:

$$\ddot{\xi} = \mu_1 \frac{\xi_1 - \xi}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\xi_2 - \xi}{r_2^3} \quad (2)$$

$$\ddot{\eta} = \mu_1 \frac{\eta_1 - \eta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\eta_2 - \eta}{r_2^3} \quad (3)$$

$$\ddot{\zeta} = \mu_1 \frac{\zeta_1 - \zeta}{r_1^3} + \mu_2 \frac{\zeta_2 - \zeta}{r_2^3} \quad (4)$$

En donde

$$r_1^2 = (\xi_1 - \xi)^2 + (\eta_1 - \eta)^2 + (\zeta_1 - \zeta)^2 \quad (5)$$

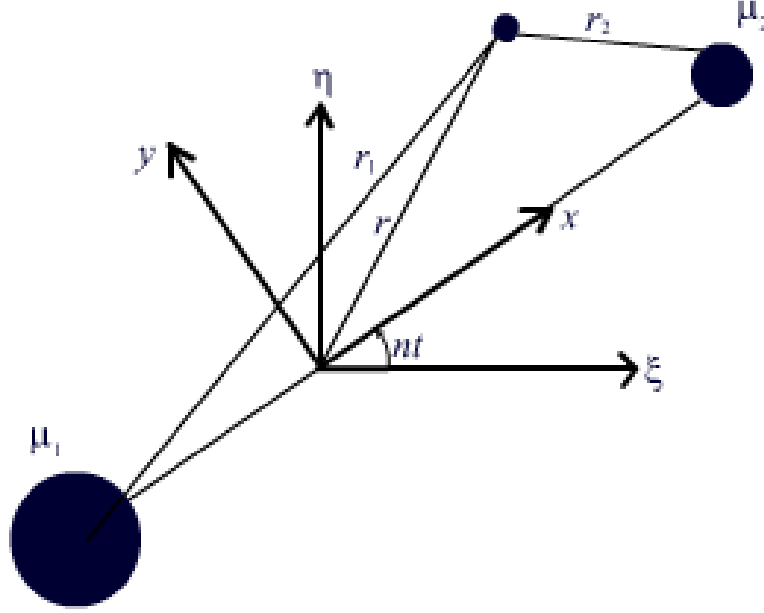
$$r_2^2 = (\xi_2 - \xi)^2 + (\eta_2 - \eta)^2 + (\zeta_2 - \zeta)^2 \quad (6)$$

Estas ecuaciones se pasaran a un sistema x, y, z , este sistema coincide en el centro con el sistema de coordenadas anterior, con la diferencia de que el nuevo sistema rota un ángulo nt alrededor del eje ζ . La posición de las masas serán $(x_1, y_1, z_1) = (-\mu_1, 0, 0)$ y $(x_2, y_2, z_2) = (\mu_1, 0, 0)$. Si dos masas se mueven en un movimiento circular, las distancias entre ellas son las mismas entonces se tendrá:

$$r_1^2 = (x + \mu_2)^2 + y^2 + z^2 \quad (7)$$

$$r_2^2 = (x - \mu_1)^2 + y^2 + z^2 \quad (8)$$

Figura 2: Rotación de las coordenadas ξ y η alrededor del eje ζ , definiendo el nuevo sistema de coordenadas.



Al sistema formado por las coordenadas (x, y, z) se lo llama *sistema sinódico*. Observando la gráfica la posición en el nuevo sistema y la velocidad queda:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(nt) & -\sin(nt) & 0 \\ \sin(nt) & \cos(nt) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (9)$$

Se escribirá: $\cos nt = C$ y $\sin(nt) = S$

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -nS & -nC & 0 \\ nC & -nS & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Aplicando propiedades de matrices esta última ecuación toma la forma:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} - ny \\ \dot{y} + nx \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (11)$$

De la misma forma la aceleración es:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{\eta} \\ \ddot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} - 2ny - n^2x \\ \ddot{y} + 2nx - n^2y \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

Hay que anotar que los términos $n\dot{y}$ y $n\dot{x}$ representan la aceleración de coriolis y los términos n^2x y n^2y se relacionan con las aceleraciones centrífugas. Comparando las ecuaciones (2), (3) y (4) con las ecuación (12), se puede obtener tres expresiones para la aceleración en términos del nuevo sistema de coordenadas.

$$[\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x]C - [\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y]S = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] C + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] yS \quad (13)$$

$$[\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x]S - [\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y]C = \left[\mu_1 \frac{x_1 - x}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x_2 - x}{r_2^3} \right] S + \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] yC \quad (14)$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z \quad (15)$$

Si se multiplica la ecuación (13) por $\cos(nt)$ y la ecuación (14) por $\sin(nt)$ y se suma los resultados y por otro lado se multiplica (13) por $\sin(nt)$, y (14) por $\cos(nt)$ y se resta los resultados. Entonces las ecuaciones tomara la siguiente forma:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2x = - \left[\mu_1 \frac{x + \mu_2}{r_1^3} + \mu_2 \frac{x - \mu_1}{r_2^3} \right] x \quad (16)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2y = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] y \quad (17)$$

$$\ddot{z} = - \left[\frac{\mu_1}{r_1^3} + \frac{\mu_2}{r_2^3} \right] z \quad (18)$$

Se definirá la función:

$$U = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \quad (19)$$

Con lo que las ecuaciones de movimiento se convierten en:

$$\ddot{x} - 2n\dot{y} = \frac{\partial U}{\partial x} \quad (20)$$

$$\ddot{y} + 2n\dot{x} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (21)$$

$$\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} \quad (22)$$

Las ecuaciones (20), (21) y (22) son las ecuaciones de movimiento para una partícula de masa despreciable que está sometida a la acción de dos cuerpos. Con este sistema de ecuaciones se encontrará una solución para el problema restringido de los tres cuerpos.⁷

⁷En BEUTLER, Gerhard. *Methods of Celestial Mechanics*, y en MURRAY, Carl y DERTMONTT, Stanley. *Solar System Dynamics*, principalmente en éste último

3.2. INTEGRAL DE JACOBI

Se transformará las ecuaciones (20), (21) y (22) de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales a una ecuación diferencial ordinaria, para esto se multiplicará por \dot{x} , \dot{y} y \dot{z} respectivamente y luego se sumaran las ecuaciones. Así la nueva ecuación será:

$$\ddot{x}\dot{x} + \ddot{y}\dot{y} + \ddot{z}\dot{z} = \frac{\partial U}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial U}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial U}{\partial z}\dot{z} = \frac{dU}{dt} \quad (23)$$

Esta ecuación se integrará en el tiempo y el resultado obtenido es:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U - C_j \quad (24)$$

El término de la izquierda representa la velocidad de una partícula rotando en un sistema de referencia $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = v^2$. El término C_j es una constante de integración, con lo que la ecuación (24) transforma a:

$$v^2 = 2U - C_j \quad (25)$$

$$v^2 = 2 \left[\frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right] - C_j \quad (26)$$

$$C_j = n^2(x^2 + y^2) + 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) - \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 \quad (27)$$

C_j es constante de movimiento llamada la constante de Jacobi, la integral de Jacobi o integral de energía relativa. La constante de Jacobi también puede ser escrita en términos de las coordenadas siderales para esto se retomará la ecuación (10) escrita como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} S & C & 0 \\ -C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (28)$$

Sea A^T la matriz transpuesta de A escrita como:

$$A = \begin{pmatrix} C & -S & 0 \\ S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Además sea B^T la matriz transpuesta de B escrita de la forma:

$$B = \begin{pmatrix} S & -C & 0 \\ C & S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B^T = \begin{pmatrix} S & C & 0 \\ -C & S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomando estas matrices la ecuación (28) puede ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (29)$$

Si se reemplazando la ecuación (9) se llega a:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -n \begin{pmatrix} S & -C & 0 \\ C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & S & 0 \\ -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} \quad (30)$$

Con las consideraciones anteriores se escribirá el término de velocidad de la siguiente forma:

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = (\dot{x} \quad \dot{y} \quad \dot{z}) \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2 + n^2(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2) + 2n(\dot{\xi}\dot{\eta} - \dot{\eta}\dot{\xi}) \quad (32)$$

La constante de Jacobi será entonces:

$$C_j = 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) + 2n(\dot{\eta}\dot{\xi} - \dot{\eta}\dot{\xi}) - \dot{\xi}^2 - \dot{\eta}^2 - \dot{\zeta}^2 \quad (33)$$

La cual toma la forma:

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 + \dot{\zeta}^2) - \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) = \vec{h} \cdot \vec{n} - \frac{1}{2}C_j \quad (34)$$

\vec{h} es el momento angular por unidad de masa, y \vec{n} es el vector $(0, 0, n)$. $\vec{h} \cdot \vec{n}$ no es una constante, por lo que la energía no se conserva en el problema restringido de los tres cuerpos. En el problema de los dos cuerpos, la conservación del momento lineal y de la energía producía una solución orbital al problema. En el problema restringido de los tres cuerpos C_j es la única constante que existe por lo que no se puede dar una solución orbital exacta al movimiento.

Es útil tomar la constante de Jacobi en los puntos en los que la velocidad es cero, lugares donde esta constate tomara el siguiente valor:

$$C_j = 2U \quad (35)$$

$$C_j = 2 \left(\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} \right) + n^2(x^2 + y^2) \quad (36)$$

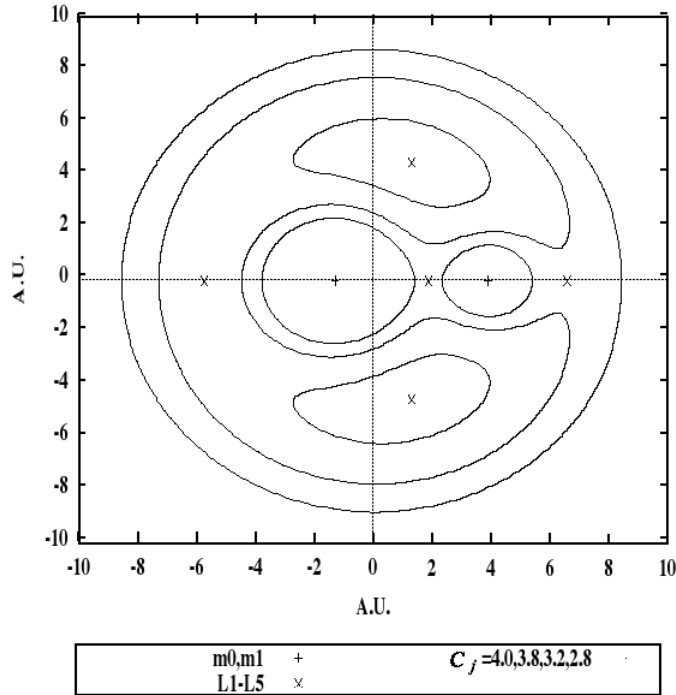
La constante de Jacobi es un invariante bajo la transformación de coordenadas que se ha venido trabajando⁸.

⁸MURRAY, Carl y DERTMONTT, Stanley. *Solar System Dynamics*

3.3. SUPERFICIES DE HILL

La ecuación (36) define un conjunto de superficies para los valores particulares de C_j (figura 3), estas superficies son conocidas como *superficies en velocidad cero* o *Superficies de Hill*. Este tipo de superficies fueron estudiadas por el astrónomo americano Hill⁹.

Figura 3: Superficie de Hill para un sistema en que la relación de masa es 3:1 para valores de C_j de 4.0, 3.8, 3.2, 2.8



3.4. PUNTOS DE EQUILIBRIO DE LAGRANGE

Los puntos de Lagrange serán solución estacionaria al problema restringido de los tres cuerpos. Se ha mostrado que en un sistema en que dos masas m_1 y m_2 se mueven en órbitas circulares alrededor de su centro de masa, las posiciones son estacionarias en un sistema rotante, con velocidad angular n , a la cual se la llama *movimiento medio*.

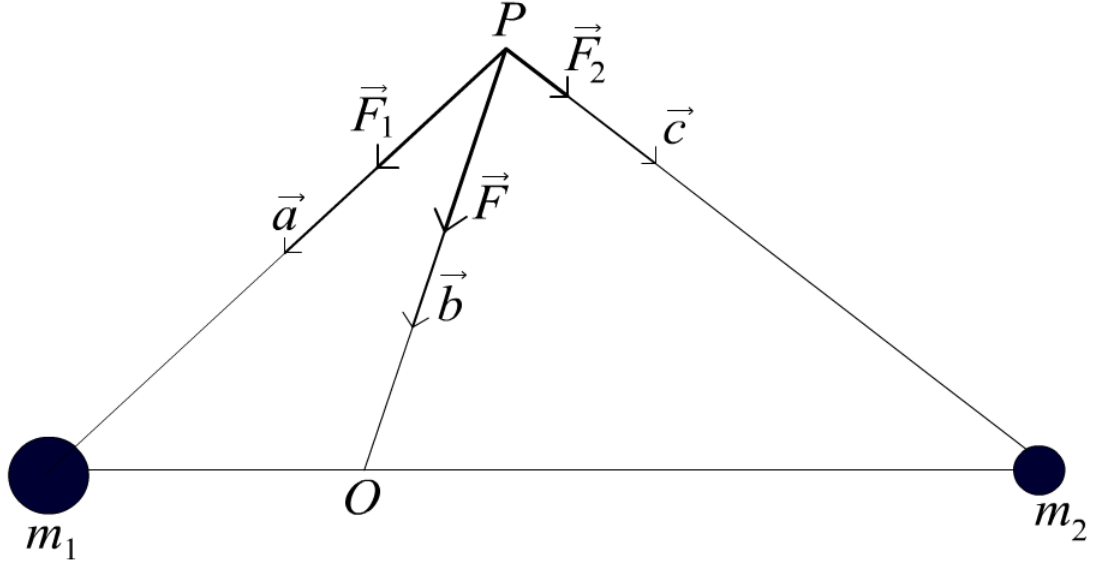
El problema ahora será encontrar la posición de los puntos de equilibrio en el sistema. Estos puntos sufrirán los efectos de la acción de las fuerzas por unidad de masa \vec{F}_1 y \vec{F}_2 producidas por la presencia de las masas m_1 y m_2 respectivamente. Se cumple que:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \quad (37)$$

⁹BEUTLER, Gerhard. *Methods of Celestial Mechanics*

Donde \vec{F} estará dirigido al centro de masa y se equilibra con la acción de la fuerza centrífuga. Hay que anotar que no existirá aceleración de Coriolis debido a que la partícula se encuentra en estado estacionario. Sean \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} los vectores de posición dirigidos desde P hacia m_1 , el centro de masa y m_2 respectivamente.

Figura 4. Fuerzas por unidad de masa que experimenta una partícula en el punto P debido a la presencia de dos masas m_1 y m_2 .



El vector \vec{b} está escrito como:

$$\vec{b} = \frac{m_1 \vec{a} + m_2 \vec{c}}{m_1 + m_2} \quad (38)$$

$$m_1(\vec{a} - \vec{b}) = m_2(\vec{b} - \vec{c}) \quad (39)$$

Se multiplicará vectorialmente la ecuación (39) por \vec{F} consiguiendo:

$$m_2(\vec{F}_1 \times \vec{c}) + m_1(\vec{F}_2 \times \vec{a}) = 0 \quad (40)$$

El ángulo entre \vec{F}_1 y \vec{c} es el mismo entre \vec{F}_2 y \vec{a} , por lo que la última ecuación se la puede escribir como:

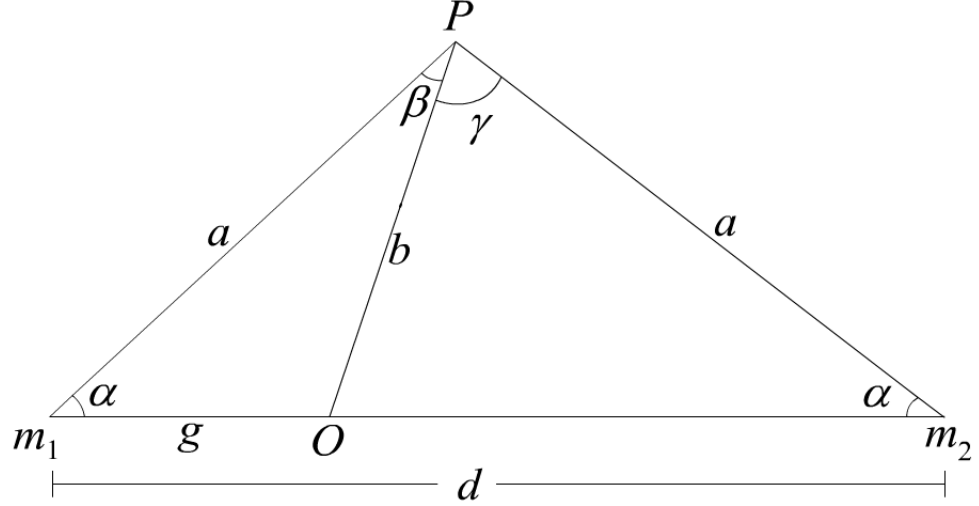
$$m_2 F_1 c = m_1 F_2 a \quad (41)$$

Al tratarse de fuerzas gravitacionales F_1 y F_2 pueden ser escritas como:

$$F_1 = \frac{Gm_1}{a^2} \quad F_2 = \frac{Gm_2}{c^2}$$

Lo que trae como consecuencia que $a = c$ lo que implica que el triángulo formado entre las masas m_1 y m_2 y la partícula ubicada en P debe ser un triángulo isósceles.

Figura 5. Balance geométrico de fuerzas sobre una partícula P ubicada en un punto de equilibrio.



El balance entre la fuerza centrífuga y la fuerza gravitacional es escrito como:

$$n^2 b = F_1 \cos \beta + F_2 \cos \gamma \quad (42)$$

Donde los ángulos β y γ son ilustrados en la figura 5. Reemplazando el valor de F_1 y F_2 la ecuación se convierte en:

$$n^2 = \frac{G}{a^2 b^2} (m_1 b \cos \beta + m_2 b \cos \gamma) \quad (43)$$

Se observa que los triángulos de la figura 5 cumplen las siguientes relaciones trigonométricas:

$$a^2 = d^2 + a^2 - 2ad \cos \alpha \quad (44)$$

$$\cos \alpha = \frac{d}{2a} \quad (45)$$

$$g^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \beta \quad (46)$$

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos \alpha \quad (47)$$

$$b \cos \beta = a - g \cos \alpha \quad (48)$$

De igual forma se puede escribir:

$$b \cos \gamma = a - (d - g) \cos \alpha \quad (49)$$

Aplicando las relaciones trigonométricas anteriores, la ecuación (43) es escrita de la forma:

$$n^2 = \frac{G}{a^2 b^2} \left[m_1 \left(a - \frac{gd}{2a} \right) + m_2 \left(a - \frac{(d-g)d}{2a} \right) \right] \quad (50)$$

De la definición de centro de masa es posible escribir:

$$g = \frac{m_2}{m_1 + m_2}d \quad (51)$$

$$d - g = \frac{m_1}{m_1 + m_2}d \quad (52)$$

Reemplazando en la ecuación (50) se llega a:

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3 b^2} \left(a^2 - \frac{d^2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} \right) \quad (53)$$

Se tomará nuevamente la ley del coseno

$$b^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos \alpha = a^2 + g^2 - gd = a^2 - g(d - g) \quad (54)$$

$$b^2 = a^2 - \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} d^2 \quad (55)$$

Con lo que se llega a la expresión:

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{a^3} \quad (56)$$

Sin embargo la tercer ley de Kepler es escrita como:

$$n^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{d^3} \quad (57)$$

Por lo que $a = d$. Así se puede afirmar que uno de los puntos de equilibrio del sistema es tal que el punto P forma un triángulo equilátero con las masas m_1 y m_2 . Simultáneamente y simétricamente debe existir un punto en la parte inferior a este triángulo. A estos puntos se los llama los puntos lagrangianos L_4 y L_5 . Clásicamente existen otros tres puntos de equilibrio¹⁰.

3.5. LOCALIZACIÓN DE LOS PUNTOS LAGRANGIANOS

Los puntos lagrangianos se dividen en dos tipos los triangulares y los colineales también llamados puntos de Euler. Para encontrar los puntos de Lagrange se debe buscar zonas donde la velocidad y la aceleración sea cero; en un sistema rotante, se asumirá un movimiento en el plano $x - y$, también se supone un sistema en que las distancias sean constantes y finalmente se tomara $n = 1$.

Aplicando la consideración $\mu_1 + \mu_2 = 1$ en las ecuaciones (7) y (8) se tendrá:

$$\mu_1 r_1^2 + \mu_2 r_2^2 = x^2 + y^2 + \mu_1 \mu_2 \quad (58)$$

¹⁰MURRAY, Carl y DERTMONTT, Stanley. *Solar System Dynamics*

Y reemplazando en el valor de la función U esta función se escribirá ahora como:

$$U = \mu_1 \left(\frac{1}{r_1} + \frac{r_1^2}{2} \right) + \mu_2 \left(\frac{1}{r_2} + \frac{r_2^2}{2} \right) - \frac{\mu_1 \mu_2}{2} \quad (59)$$

Se buscará los puntos que cumplan simultáneamente $\dot{x} = \dot{y} = \ddot{x} = \ddot{y} = 0$ por lo que para encontrar estos puntos se debe resolver simultáneamente las ecuaciones:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial x} = 0 \quad (60)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r_1} \frac{\partial r_1}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial r_2} \frac{\partial r_2}{\partial y} = 0 \quad (61)$$

3.5.1. Localización de los puntos triangulares: Usando la ecuación (59) y evaluando las derivadas parciales se tendrá:

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{x + \mu_2}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{x + \mu_1}{r_2} = 0 \quad (62)$$

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{r_1^2} + r_1 \right) \frac{y}{r_1} + \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) \frac{y}{r_2} = 0 \quad (63)$$

Se observa que existe una solución trivial para $r_1 = r_2 = 1$ lo que implica que:

$$(x + \mu_2)^2 + y^2 = 1 \quad (64)$$

$$(x - \mu_1)^2 + y^2 = 1 \quad (65)$$

Con solución en los puntos:

$$x = \frac{1}{2} - \mu_2, \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (66)$$

Estos son los puntos triangulares que se representan con L_4 y L_5 .

3.5.2. Localización de los puntos colineales: Los puntos colineales o puntos de Euler se encuentran observando como en la ecuación (63) existe una solución en $y = 0$, por lo que estos puntos existirán a lo largo del eje x y satisfacen la ecuación (62). Estos puntos se escriben como L_1 , L_2 y L_3 .

El punto L_1 se encuentra entre las masas m_1 y m_2 , para este punto se tendrá en cuenta que:

$$r_1 + r_2 = 1, \quad r_1 = x + \mu_2, \quad r_2 = -x + \mu_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = 1 \quad (67)$$

Al sustituir en la ecuación (64) se tiene:

$$\mu_1 \left(-\frac{1}{(1 - r_2)^2} + 1 - r_2 \right) - \mu_2 \left(-\frac{1}{r_2^2} + r_2 \right) = 0 \quad (68)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = 3r_2^3 \frac{(1 - r_2 + r_2^2/3)}{(1 + r_2 + r_2^2)(1 - r_2)^3} \quad (69)$$

Se define:

$$\alpha = \left(\frac{\mu_2}{3\mu_1} \right)^{1/3} \quad (70)$$

$$\alpha = 3^{1/3} r_2 \frac{(1 - r_2 + r_2^2/3)^{1/3}}{(1 + r_2 + r_2^2)^{1/3}(1 - r_2)} \quad (71)$$

Para r_2 muy pequeño existe una solución en $r_2 = \alpha$. Si se aplica series α se escribirá como:

$$\alpha = r_2 + \frac{r_2^2}{2} + \frac{r_2^3}{3} + \frac{53r_2^4}{81} + \dots \quad (72)$$

Se utilizara el método de inversión de series de Lagrange para invertir la serie anterior y encontrar r_2 .

$$r_2 = \alpha - \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{9} - \frac{23\alpha^4}{81} + \dots \quad (73)$$

Al estar expresado x en función de r_2 , se encuentra la posición del L_1 simplemente conociendo el valor de las masas del sistema.

El punto L_2 se encuentra atrás de la masa m_2 y tendrá las siguientes condiciones:

$$r_1 - r_2 = 1, \quad r_1 = x + \mu_2, \quad r_2 = x - \mu_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = 1 \quad (74)$$

Se aplicarán estas condiciones en la ecuación (65), este desarrollo es similar al presentado con L_1 , encontrando:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = 3r_2^3 \frac{1 + r_2 + r_2^2/3}{(1 + r_2)^2(1 - r_2^3)} \quad (75)$$

De igual forma se tendrá en cuenta la función α . Para el caso de L_2 el valor que tomará r_2 es:

$$r_2 = \alpha + \frac{\alpha^2}{3} - \frac{\alpha^3}{9} - \frac{31\alpha^4}{81} + \dots \quad (76)$$

Igualmente al conocer r_2 se conoce la ubicación del L_2

El punto L_3 se encuentra en el eje x negativo. Cumple las siguientes condiciones:

$$r_2 - r_1 = 1, \quad r_1 = -x - \mu_2, \quad r_2 = -x + \mu_1, \quad \frac{\partial r_1}{\partial x} = \frac{\partial r_2}{\partial x} = -1 \quad (77)$$

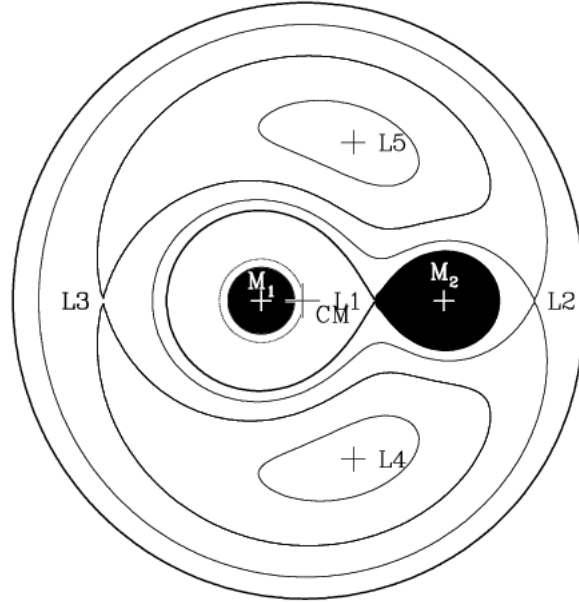
Para este caso la relación entre las masas está escrita por:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \frac{(1 - r_1)^3(1 + r_1)^2}{r_1^3(r_1^2 + 3r_1 + 3)} \quad (78)$$

Sea $r_1 = 1 + \beta$ por lo que $r_2 = 2 + \beta$ y aplicando series:

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = -\frac{12\beta}{7} + \frac{144\beta^2}{49} - \frac{1567\beta^3}{343} + \dots \quad (79)$$

Figura 6: Localización de los puntos lagrangianos.



y aplicando la inversión de series de Lagrange se obtiene finalmente:

$$\beta = -\frac{7}{12} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \frac{49}{144} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^2 - \frac{13223}{20736} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)^3 + \dots \quad (80)$$

4. FUERZAS DE MAREA

Muchos de los problemas que se trabajan en física se presentan en sistemas ideales con cuerpos cuya densidad de masa es uniforme o incluso con masas consideradas como puntuales, esto se debe a que se hace un estudio del comportamiento del cuerpo de forma macroscópica, sin embargo, si se estudia la parte microscópica, se puede llegar a entender otra clase de fenómenos que afectaran el sistema.

Cuando se trabaja con n cuerpos, la única interacción que se tiene en cuenta es la interacción gravitacional. En este tipo de problemas se considera que las masas son puntuales y buscar una solución a estos problemas, es encontrar como un cuerpo se mueve cuando está en la presencia de un cierto número de masas. Mas sin embargo, ésta no es la única forma en que la gravedad afecta los cuerpos, además de causar un efecto en la manera en que ellos se mueven, la gravedad afecta la forma de los cuerpos, a este efecto se lo conoce como las *fuerzas de marea* la cual es el efecto que tiene la gravedad sobre cada elemento de masa que compone el cuerpo.

Las fuerzas de marea tienen este nombre debido a que las mareas producidas en los océanos, se generan por estos efectos.¹¹

4.1. DEFORMACIÓN POR FUERZAS DE MAREA

Se tomarán dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , definiendo los vectores \vec{r}_1 y \vec{r}_2 como los vectores de posición de estas masas respecto al centro de masa.

Así el vector centro de masa \vec{R} se escribe como:

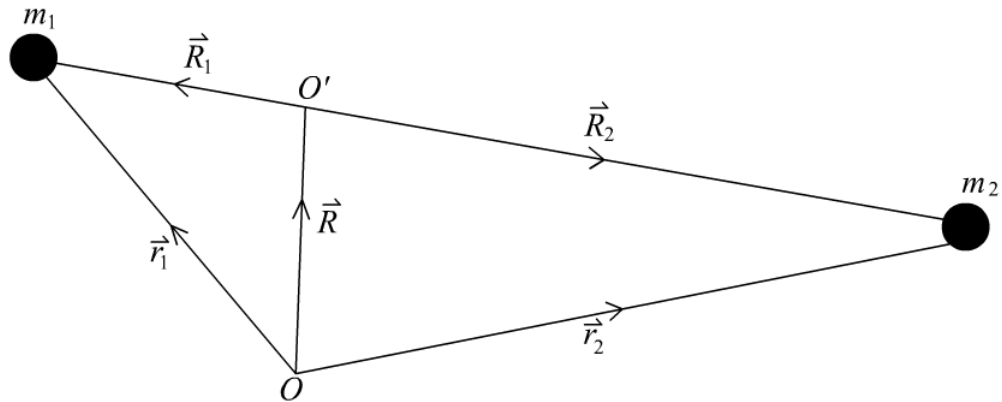
$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (81)$$

Definiendo los vectores \vec{R}_1 y \vec{R}_2 como los vectores de posición de las masas respecto al centro de masa de la siguiente forma.

$$\vec{R}_1 = \vec{r}_1 - \vec{R} \quad \vec{R}_2 = \vec{r}_2 - \vec{R} \quad (82)$$

¹¹OHANIAN, Hans. *Gravitation and Spacetime*

Figura 7. Ubicación del vector centro de masa.



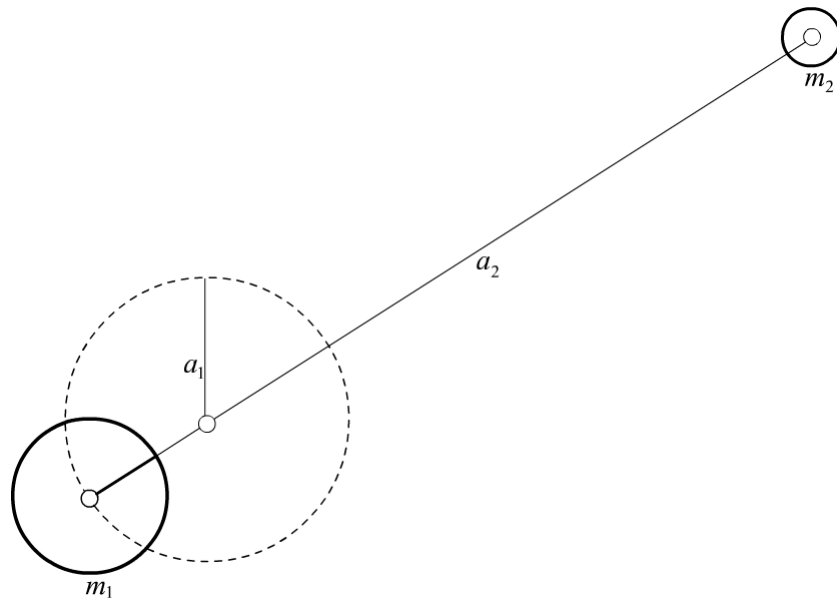
Con esto se deduce que

$$m_1 \vec{R}_1 + m_2 \vec{R}_2 = 0 \quad (83)$$

Llamando a_1 la distancia de m_1 al centro de masa y a_2 la distancia de m_2 al centro de masa, la última relación se escribe como:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{m_1}{m_2} \quad (84)$$

Figura 8: Relación entre la distancia de las masas al centro de masas.



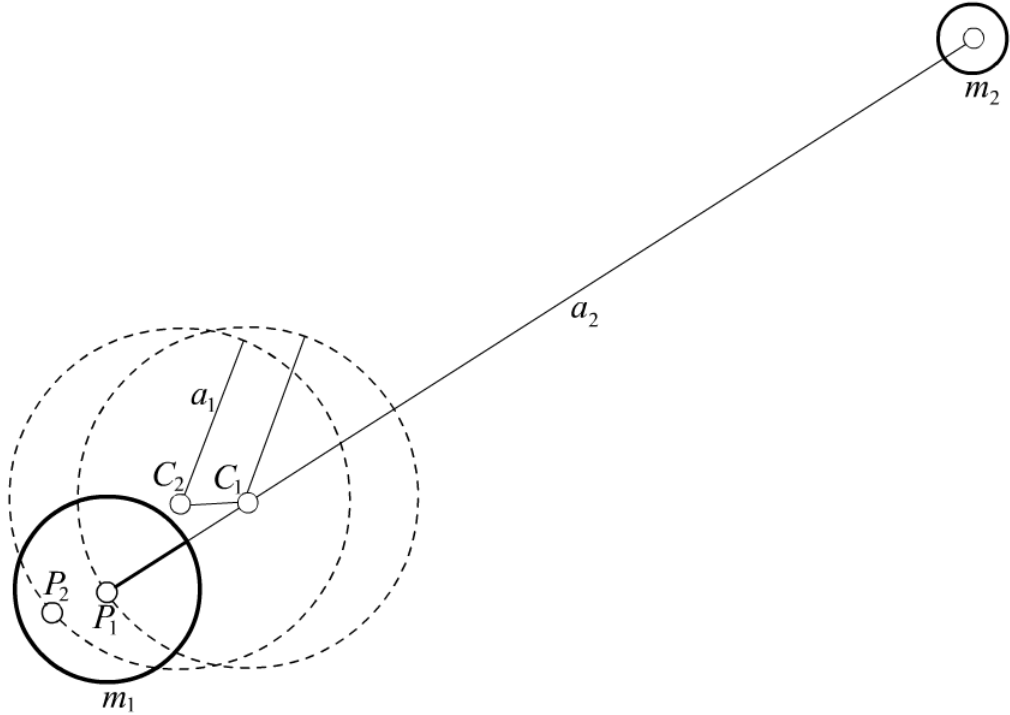
La interacción gravitacional entre las masas es descrita por la ley de la gravitación universal de Newton de la siguiente manera:

$$\langle F \rangle = \frac{Gm_1m_2}{a^2} \quad (85)$$

Donde $a = a_1 + a_2$ es la separación entre los centros de las masas m_1 y m_2 . En la ecuación anterior se ha tomado la magnitud de la fuerza, vectorialmente la fuerza tendrá dirección central. La fuerza de gravedad se equilibra con la fuerza centrífuga con lo cual está última tendrá el mismo valor en magnitud que la fuerza de gravedad, pero, vectorialmente tendrá sentido contrario.

El movimiento de un punto P_1 con respecto al centro de masa, C_1 , traza una circunferencia de radio a_1 y centro en C_1 , en el problema no se tendrá en cuenta la rotación del cuerpo sobre su propio eje. Si se toma otro punto P_2 sobre el cuerpo de masa m_1 , este punto realizará una circunferencia semejante en radio pero con centro en el punto C_2 . La distancia entre los puntos C_1 y C_2 es la misma distancia existente entre los puntos P_1 y P_2 como se puede observar en la figura 9.

Figura 9: Movimiento de los puntos P_1 y P_2 sobre el centro de masa y sobre el punto C_2 respectivamente.



Todas las partículas que forman el cuerpo 1, sufren la misma fuerza centrífuga, tanto en dirección como en magnitud, no sucede lo mismo con la fuerza gravitacional. La fuerza de marea causante de la deformación en la masa m_1 se escribe como:

$$\vec{F}_{marea} = \vec{F} - \langle \vec{F} \rangle \quad (86)$$

La fuerza \vec{F} es la fuerza gravitacional sobre cada una de las partículas, mientras $\langle \vec{F} \rangle$ es la fuerza centrífuga la cual es igual en magnitud a la fuerza de atracción gravitacional entre las masas m_1 y m_2 .

Para encontrar el efecto de la segunda masa sobre el cuerpo de masa m_1 se encontrará el potencial producido por el cuerpo de masa m_2 , sobre un punto P ubicado en el primer cuerpo. Este potencial es escrito como:

$$V = -G \frac{m_2}{\Delta} \quad (87)$$

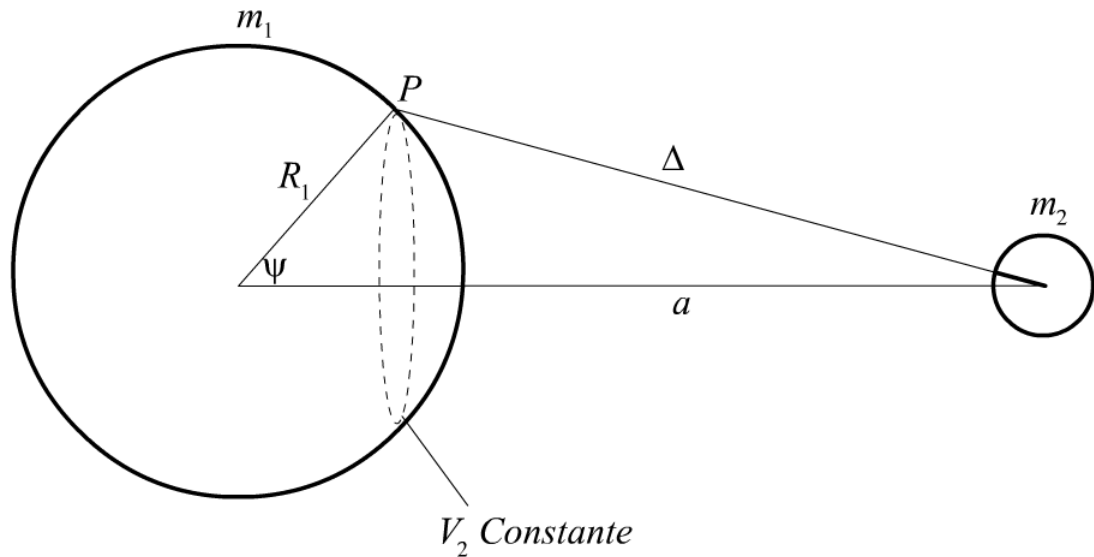
Donde Δ es la distancia entre el centro de masa del segundo cuerpo y el punto P (ver figura 10). Aplicando el teorema del coseno, Δ se escribe como:

$$\Delta^2 = R_1^2 + a^2 - 2aR_1 \cos \psi \quad (88)$$

$$\Delta = a \sqrt{1 + \left(\frac{R_1}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{R_1}{a}\right) \cos \psi} \quad (89)$$

Con R_1 el radio del primer cuerpo, ψ el ángulo formado entre la línea que une el punto P y el centro del primer cuerpo y la línea que une los centros de las masas m_1 y m_2 .

Figura 10. Geometría del problema.



Esta última expresión se la puede expandir binomialmente para los casos en que $R \ll a$, obteniendo:

$$V = -\frac{Gm_2}{a} \left[1 + \left(\frac{R_1}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{R_1}{a}\right) \cos \psi \right]^{-1/2} \quad (90)$$

$$V = -\frac{Gm_2}{a} \left[1 + \frac{R_1}{a} \cos \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{R_1}{a} \right)^2 (3 \cos^2 \psi - 1) + \dots \right] \quad (91)$$

De donde se puede tomar un potencial $V = V_1 + V_2 + V_3$, los demás términos serán despreciados ya que los términos de potencias cuarta en adelante son muy pequeños. El potencial V_1 no varia con el ángulo, es un potencial constante de la forma:

$$\frac{\vec{F}}{m_1} = -\vec{\nabla} V \quad (92)$$

El potencial V_2 da lugar a la fuerza en el punto P necesario para que este punto se mueva en círculos. La fuerza causada por este potencial tendrá dirección perpendicular a la línea que conecta los centros de gravedad de las dos masas, para el caso será escrito como:

$$-\frac{\partial V}{\partial(R_1 \cos \psi)} = G \frac{m_2}{a^2} = \frac{\langle F \rangle}{m_1} \quad (93)$$

El tercer potencial, es el potencial de marea el cual es escrito como:

$$V_3(\psi) = -G \frac{m_2 R_1^2}{2a^3} (3 \cos^2 \psi - 1) \quad (94)$$

Se observa que el potencial V_3 tiene valores máximos en $\psi = 0$ y $\psi = \pi$ y valores mínimos en $\psi = \pi/2$ y $\psi = 3\pi/2$ lo que explica el porque en la Tierra existen dos momentos de mareas altas y dos momentos de mareas bajas¹².

¹²MURRAY, Carl y DERTMONTT, Stanley. *Solar System Dynamics*

5. LÍMITE DE ROCHE Y ZONA DE ROCHE LOBES

Anteriormente se habló de las estrellas variables, del problema de los tres cuerpos y de las fuerzas de marea. Estos tres temas son introducción del fenómeno de la zona de Roche lobes y del límite físico llamado límite de Roche en un sistema binario de estrellas de corto período.

Se debe aclarar que el estudio que se realizará es desde el punto de vista de la mecánica clásica, también es posible estudiar estos fenómenos utilizando mecánica post-newtoniana ya sea con la primer aproximación o con la segunda aproximación¹³.

La importancia de estudiar el límite de Roche y la zona de Roche lobes radica en que estos fenómenos físicos explican la forma en que en un sistema binario de corto período se presenta la transferencia de masa de una estrella a otra. Los sistemas estelares binarios de corto período son sistemas en los que la distancia entre las estrellas son muy pequeñas, tan pequeñas que la distancia es del orden del tamaño de una de las estrellas. Esto se explica a través de la tercer ley de Kepler, la cual relaciona la tercera potencia de la distancia promedio de los cuerpos con la segunda potencia del período de rotación. Al estar tan cerca, la fuerza de gravedad y en especial la fuerza de marea entre estas estrellas es muy grande lo que origina erupciones y protuberancias en las estrellas.

5.1. ZONA DE ROCHE LOBES

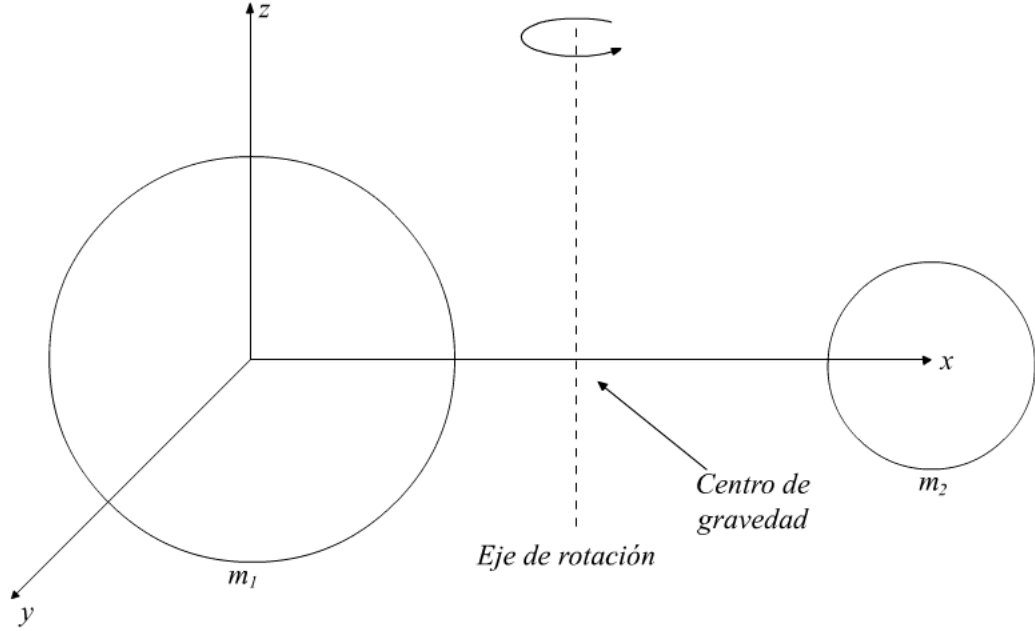
Como se dijo anteriormente la zona de Roche lobes es un efecto de las fuerzas de marea que se presentan en un sistema estelar binario. El método a utilizar es propuesto por Dan Bruton del Observatorio Astronómico de la Universidad *Stephen F. Austin State*¹⁴.

Para encontrar la morfología de zona de Roche lobes en las estrellas, se toma un equilibrio hidrostático en las estrellas, y el objetivo será encontrar la coordenada esférica r en función de las coordenadas angulares esféricas θ y ϕ . Se tomará entonces un sistema con dos estrellas de masas m_1 y m_2 separadas una distancia R las cuales giran alrededor de su centro de gravedad con velocidad angular ω . Se tomará el eje z de tal forma que sea paralelo al eje de giro de las dos estrellas, el eje de giro pasará por el centro de masa de las dos estrellas.

¹³Ver RATKOVIC, Sasa, et al, *Roche Lobes in the Second Post-Newtonian Approximation*

¹⁴BRUTON, Dan. *Roche Lobes and the Morphologies of Close Binary Stars*

Figura 11. Coordenadas del problema.



La zona de Roche lobes en la estrella es analizada, encontrando las fuerzas sobre los elementos de masa m ,

$$\sum \vec{F} = m \vec{a} \quad (95)$$

$$\vec{F}_p + \vec{F}_g = m\omega^2 \vec{R}_1 \quad (96)$$

F_p es la fuerza producida por la presión de la estrella, F_g es la fuerza de gravedad entre las estrellas, R_1 es la distancia del elemento de masa m al centro de la primer estrella.

La fuerza asociada a la presión en la estrella es escrita como:

$$\vec{F}_p = -V \vec{\nabla} P = -\frac{m}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (97)$$

Donde V es el volumen de la estrella, ρ es la densidad de la estrella y P es la presión que soporta la estrella. Entonces se escribirá las fuerzas de gravedad y la fuerza resultante en términos de un nuevo potencial Ψ de la siguiente forma:

$$\vec{F}_g + m\omega^2 \vec{R}_1 = -\frac{Gm_1 m \vec{r}_1}{r_1^3} - \frac{Gm_2 m \vec{r}_2}{r_2^3} + m\omega^2 \vec{R}_1 = m \vec{\nabla} \Psi \quad (98)$$

En esta ecuación r_1 y r_2 son las distancias del elemento m a cada una de las dos estrellas. Igualando las ecuaciones (98) y (96) y reemplazando los valores obtenidos en la ecuación (97) se encuentra que:

$$\vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla} \Psi \quad (99)$$

Esto implica que la dirección de $\vec{\nabla}P$ y $\vec{\nabla}\Psi$ son las mismas. Si se aplica el rotacional al gradiente de presión, según el calculo vectorial, debe dar cero por lo que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}P = -\vec{\nabla} \times \rho \vec{\nabla}\Psi = -\rho \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Psi - \vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\Psi = 0 \quad (100)$$

Por lo que:

$$\vec{\nabla}\rho \times \vec{\nabla}\Psi = 0 \quad (101)$$

Lo que da ha entender que $\vec{\nabla}\rho$, $\vec{\nabla}P$ y $\vec{\nabla}\Psi$ son vectores paralelos. Se conoce que la forma de los objetos está descrita por el gradiente de la densidad, al ser el gradiente de densidad paralelo al gradiente de la función Ψ se puede encontrar la forma de la zona de Roche lobes en las estrellas a partir de esta función, para lograr esto se debe encontrar una superficie en la cual la función Ψ sea constante o sea una superficie equipotencial de Ψ .

Integrando sobre r la ecuación (98) se definirá la función Ψ de la siguiente forma:

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r_1} - \frac{Gm_2}{r_2} + \frac{\omega R_1^2}{2} \quad (102)$$

En esta última ecuación se realizará un traslado de coordenadas, en donde se pasara la ecuación anterior de un sistema de coordenadas cartesiano a un sistema de coordenadas esféricas con igual origen de coordenadas, tomando las siguientes consideraciones:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad y = r \sin \theta \sin \phi \quad z = r \cos \theta \quad (103)$$

Además se definirá la variable:

$$R_1' = \sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \theta \quad (104)$$

La distancia de la primer estrella al centro de masa es:

$$\bar{x} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_2 R}{m_1 + m_2} = \frac{qR}{1+q} \quad (105)$$

con $q = m_2/m_1$ la cual representa la relación entre las masas de las estrellas, en este caso se está estudiando la morfología de la primer estrella, para la morfología de la segunda estrella es necesario invertir esta cantidad.

Entonces se escribirán las variables r_1 , r_2 y R_1 en términos de las nuevas coordenadas, así:

$$r_1 = r \quad (106)$$

$$r_2 = \sqrt{(x - R)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r^2 - 2xR + R^2} \quad (107)$$

$$R_1 = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + y^2} = \sqrt{R_1'^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2} \quad (108)$$

De esta manera la función Ψ en coordenadas esféricas queda escrita de la siguiente forma:

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{\sqrt{r^2 - 2rR \sin \theta \cos \phi + R^2}} + \frac{\omega^2 (r^2 \sin^2 \theta - 2r\bar{x} \sin \theta \cos \phi + \bar{x}^2)}{2} \quad (109)$$

Sea $\lambda = \sin \theta \cos \phi$ y $\nu = \cos \theta$, la función ahora es:

$$\Psi = -\frac{Gm_1}{r} - \frac{Gm_2}{\sqrt{r^2 - 2rR\lambda + R^2}} + \frac{1}{2}\omega^2 \left[r^2(1 - \nu^2) - 2r\lambda \left(\frac{qR}{1+q} \right) + \left(\frac{qR}{1+q} \right)^2 \right] \quad (110)$$

Ahora la tercer ley de Kepler es escrita como:

$$\omega^2 = \frac{G(m_1 + m_2)}{R^3} \quad (111)$$

Remplazando y realizando las operaciones algebraicas correspondientes, la función Ψ es escrita como:

$$\Psi = -K_g - \frac{Gm_2}{\sqrt{r^2 - 2rR\lambda + R^2}} + \frac{G(m_1 + m_2)}{2R^3} \left[r^2(1 - \nu^2) - \frac{2r\lambda qR}{1+q} + \left[\frac{qR}{1+q} \right]^2 \right] \quad (112)$$

$$\Psi = -K_g \left[\frac{R}{r} + \frac{Rq}{\sqrt{r^2 - 2rR\lambda + R^2}} + \frac{(1+q)}{2R^2} \left[r^2(1 - \nu^2) - \frac{2r\lambda qR}{1+q} + \left[\frac{qR}{1+q} \right]^2 \right] \right] \quad (113)$$

$$\Psi = -K_g \left[\frac{R}{r} + \frac{Rq}{\sqrt{r^2 - 2rR\lambda + R^2}} + \frac{r^2(1+q)(1 - \nu^2)}{2R^2} - \frac{qr\lambda}{R} + \frac{q^2}{2(1+q)} \right] \quad (114)$$

$$\Psi = -K_g \left[\frac{R}{r} + q \left[\frac{R}{\sqrt{r^2 - 2rR\lambda + R^2}} - \frac{r\lambda}{R} \right] + \frac{r^2(1+q)(1 - \nu^2)}{2R^2} + \frac{q^2}{2(1+q)} \right] \quad (115)$$

Se ha llamado $K_g = \frac{Gm_1}{r}$. Esta última ecuación se puede escribir como:

$$-\frac{\Psi R}{Gm_1} - \frac{q^2}{2(1+q)} = \frac{R}{r} + q \left[\frac{R}{\sqrt{r^2 - 2rR\lambda + R^2}} - \frac{r\lambda}{R} \right] + \frac{r^2(1+q)(1 - \nu^2)}{2R^2} \quad (116)$$

El término de la izquierda se conoce como el potencial de Kopal (Ω).¹⁵

$$\Omega = -\frac{\Psi R}{Gm_1} - \frac{q^2}{2(1+q)} \quad (117)$$

$$\Omega = \frac{1}{r'} + q \left[\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r'\lambda + 1}} - r'\lambda \right] + \frac{r'^2(1+q)(1 - \nu^2)}{2} \quad (118)$$

Con $r' = r/R$. Se está buscando una superficie equipotencial, por lo que es necesario saber el valor de la función en un punto, el punto escogido es en $\theta = 0$ donde $\lambda = 0$ y $\nu = 1$, en estos valores la función de Kopal valdrá:

$$\Omega = \frac{1}{r'_p} + \frac{q}{\sqrt{r'^2_p + 1}} \quad (119)$$

¹⁵Zdeněk Kopal fue un científico Checo que realizo trabajos sobre la luna, desarrollo un estudio general de las estrellas variables y de la zona de Roche lobes en 1959 financiado por la fuerza aérea de los Estados Unidos

Donde r'_p es un valor conocido y es la relación entre el radio de la estrella y la distancia entre las estrellas. Se está buscando una superficie equipotencial, esta superficie pasará por el polo y será el valor del potencial de Kopal en dicho punto, para encontrar todos los puntos se igualará la ecuación (119) con la ecuación (118) obteniendo:

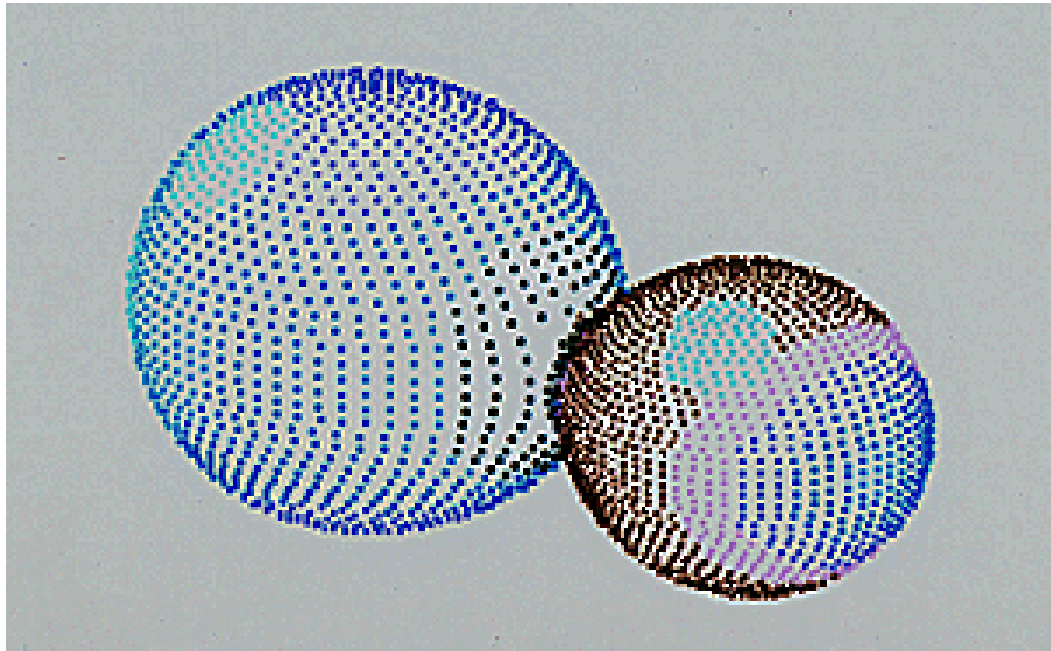
$$\frac{1}{r'_p} + \frac{q}{\sqrt{r'^2_p + 1}} = \frac{1}{r'} + q \left[\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r'\lambda + 1}} - r'\lambda \right] + \frac{r'^2(1+q)(1-\nu^2)}{2} \quad (120)$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r'_p} + \frac{q}{\sqrt{r'^2_p + 1}} - q \left[\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r'\lambda + 1}} - r'\lambda \right] - \frac{(1+q)(1-\nu^2)r'^2}{2} \quad (121)$$

Al igualar las ecuaciones encontraremos los puntos r' donde la función de Kopal tendrá los mismos valores o sea una superficie equipotencial. En otras palabras, para encontrar la forma de la zona de Roche lobes en una de las estrellas es necesario solucionar la ecuación (121) para r' , de esta manera se podrá conocer la forma de la estrella.

Para la otra estrella es necesario solucionar la misma ecuación solo que cambiara el valor de q por un valor $q' = 1/q$. Teniendo las dos soluciones en dos las estrellas se ha encontrado la zona de Roche lobes para dicho sistema binario de estrellas. En la figura 12 se muestra una representación de la zona de Roche lobes.¹⁶

Figura 12. Representación de la forma de un sistema binario.



¹⁶www.solstation.com/stars2/44bootis.htm

5.2. LÍMITE DE ROCHE

El origen de la luna siempre ha significado materia de debate entre los científicos. La primera explicación sobre de dónde viene la luna fue escrita por el científico francés Édouard Albert Roche, quien postuló que la luna y la tierra tenían el mismo origen en una gran nube de polvo. Según Roche parte de la nube de polvo se precipitó para formar la tierra y otra parte formaría la luna, esta hipótesis ha sido reemplazada por varias hipótesis sin encontrar hasta ahora una verdadera explicación de la formación de la luna.

Roche realizó su estudio imaginando cuánta fuerza de marea podría soportar un cuerpo de la masa de la luna en un supuesto origen en el polvo. Fue así como este estudio dio origen al Límite de Roche, el cual es simplemente la distancia crítica a la cual debe estar un cuerpo de otro para que la fuerza de marea no lo destruya.

En el caso de un sistema de estrellas binarias el Límite de Roche es la distancia mínima a la cual las partículas de la estrella de menor masa se pueden ubicar¹⁷, en el caso en que se sobrepase esta distancia la hipotética partícula pasará a formar parte de la otra estrella.

Para el caso de la zona de Roche lobes se utilizó el análisis propuesto por el astrónomo Dan Bruton. Para el límite de Roche se utilizará el análisis anteriormente propuesto.

Se sabe que el límite de Roche será la distancia a la cual se puede ubicar una partícula en medio de las dos estrellas, por lo que $\theta = 90^\circ$ y $\phi = 0^\circ$, además $\lambda = 1$ y $\nu = 0$ así la función de Kopal quedará escrita como:

$$\Omega = \frac{1}{r'} + q \left[\frac{1}{\sqrt{r'^2 - 2r' + 1}} - r' \right] + \frac{r'^2(1+q)}{2} \quad (122)$$

Además se conoce del cálculo diferencial que un punto mínimo o máximo es encontrado a partir de derivar una función respecto a la cantidad de la cual se busca el mínimo, e igualar esta función a cero, para el caso de un sistema estelar binario, la función que se va a derivar e igualar a cero será la función de Kopal, al derivar esta función respecto a r' se tiene:

$$\frac{d\Omega}{dr'} = -\frac{1}{r'^2} - q \left[\frac{r' - 1}{(r'^2 - 2r' + 1)^{3/2}} + 1 \right] + r'(1+q) = 0 \quad (123)$$

Al resolver esta ecuación para r' se encontrará el límite de Roche para este sistema estelar.

¹⁷Afirmación de GUEDINI, Silvano. *Software for Photometric Astronomy*

6. MÉTODOS DE SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO ALGEBRAICAS

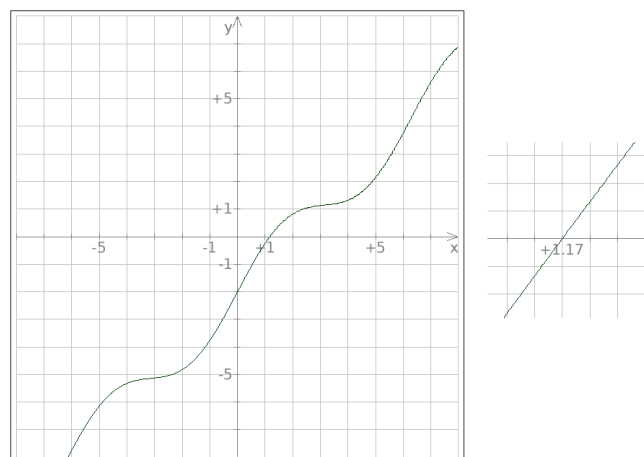
Muchas veces la solución de un problema radica en despejar alguna variable de una ecuación, reemplazar los valores necesarios y encontrar el valor de la variable cuyo resultado brinda la solución al problema. Sin embargo existen algunas ecuaciones en donde es realmente imposible despejar una variable específica, a este tipo de ecuaciones se las conoce como ecuaciones no algebraicas.

La búsqueda del límite de Roche y la zona de Roche lobes implica una solución de las ecuaciones (123) y (121) en función de la variable r' , lo cual no es posible analíticamente. Es por esto necesario estudiar algún método para solucionar este tipo de ecuaciones.

6.1. MÉTODOS GRÁFICOS

Los métodos gráficos son métodos poco exactos en los cuales la solución de determinada ecuación la brinda una gráfica. Para poder encontrar una solución es necesario un software graficador como: Derive, Maple, Mat Lab, entre otros; con el fin de encontrar el punto de solución.

Figura 13. Gráfica de la función $f(E) = E - M + e \sin E$ para $M = 2$ y $e = 0,9$ con el acercamiento en el lado derecho. La gráfica se realizó con el programa "KmPlot".



Para utilizar el método gráfico se pueden utilizar dos opciones:

- la primera es igualar la ecuación a cero, definir una función tal que la función sea igual

a la ecuación igualada a cero, graficar esta función y buscar los puntos en los cuales la función vale cero en la gráfica.

Ejemplo: Sea la ecuación:

$$E = M - e \sin E \quad (124)$$

La función a graficar quedará definida como $f(E) = E - M + e \sin E$ esta es la función a graficar.

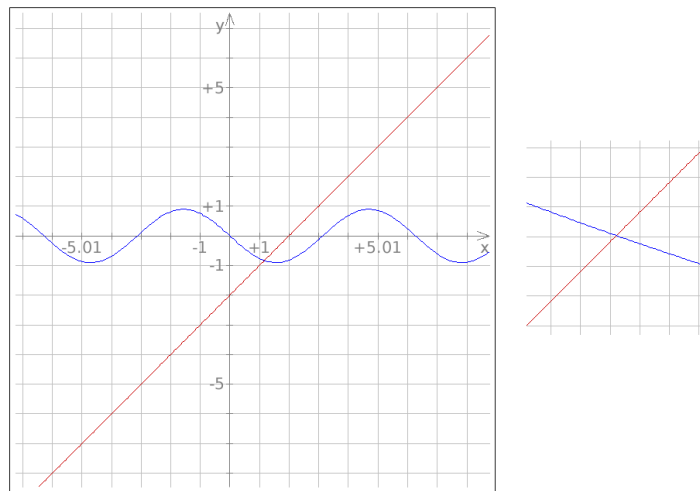
- la segunda opción es partir la ecuación en dos funciones de tal manera que las dos funciones queden igualadas, en este caso los puntos en los cuales las gráficas de las dos funciones se cruzan, serán solución de la ecuación.

Ejemplo: Sea la ecuación del ejemplo anterior, se definirán las funciones

$$f(E) = E - M \quad g(E) = -e \sin E \quad (125)$$

Los puntos en los cuales las gráficas de las funciones $f(E)$ y $g(E)$ se cruzan, son las soluciones de la ecuación (124).

Figura 14. Gráficas de las funciones $f(E) = E - M$ y $g(E) = -e \sin E$, tomando los mismos valores de la gráfica anterior. El punto de corte el programa "KmPlot" muestra el punto $x = 1,17$ y $y = -0,83$.



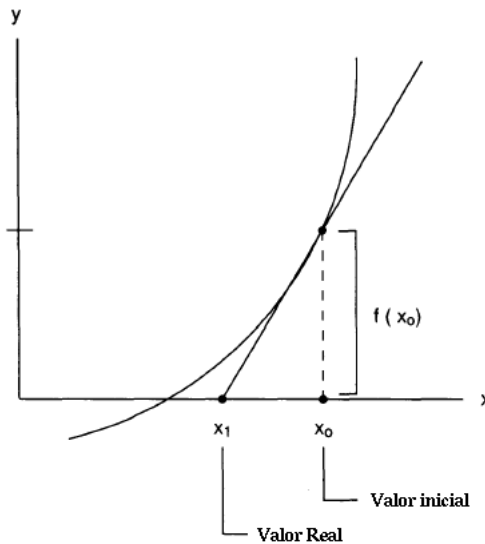
A pesar que existen ayudas sistemáticas para poder desarrollar este método, éste presenta muchas dificultades para solucionar la ecuación (121), ya que, se debe encontrar una solución para diferentes valores de θ y ϕ con lo que este método gastaría mucho tiempo. Por esta razón este método no será utilizado para encontrar la zona de Roche lobes.

6.2. MÉTODOS ITERATIVOS

Los métodos iterativos utilizan pasos repetitivos con el fin de buscar una mayor proximidad a una posible solución. Los métodos iterativos son útiles para resolver problemas que involucran un número grande de variables (a veces del orden de millones) y problemas donde no hay forma de aplicar un despeje directo.

6.2.1. Método de Newton - Raphson: Uno de los métodos numéricos de iteración más famosos de la historia de la Matemática es el de Newton-Raphson. El método consiste en buscar las raíces de una función apelando al criterio de la primera derivada, procurando encontrar a partir de un cierto valor inicial cómo cambian los valores de la función en el entorno de ese valor inicial. Cuando hay un cambio de signo en los valores, entonces se tiene en ese entorno una raíz. Finalmente, repitiendo este proceso un número de veces adecuado con la precisión deseada, se obtiene la raíz buscada.

Figura 15. Gráfica que muestra la forma de aplicar el método de Newton-Raphson.



Para la demostración y la deducción del algoritmo en el método utiliza el hecho de que la derivada en una función es la pendiente de una recta tangente a un punto de una curva (ver figura 15). Por lo que la tangente a esta curva será:

$$\tan \theta = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} = f'(x_0) \quad (126)$$

Cambiando los subíndices, y despejando el valor que se está buscando, se deduce que el algoritmo para aplicar el método de Newton-Raphson es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (127)$$

El método de Newton-Raphson es un método, cuya efectividad depende estrictamente del número de iteraciones que se realicen, donde entre mayor sea el número de iteraciones mayor exactitud se encontrará en el resultado. El método de Newton-Raphson se acomoda a una programación en computador, razón por la cual este método será utilizado para la solución de las ecuaciones (121) y (123) en el problema del cálculo del límite de Roche y la zona de Roche lobes¹⁸.

6.3. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON AL CÁLCULO DEL LÍMITE DE ROCHE Y LA ZONA DE ROCHE LOBES

Se aplicará el método de Newton - Raphson a las ecuaciones (121) y (123) esto por dos motivos fundamentales: el primero es la rápida convergencia y efectividad del método. La segunda razón es la fácil aplicación de un software a dicho método.

A continuación se mostrará como se utiliza el método de Newton - Raphson en las ecuaciones (121) y (123), con lo que se encontrará la zona de Roche lobes y el límite de Roche.

6.3.1. Aplicación a la zona de Roche lobes: Como se miró en la teoría de la zona de Roche lobes, si se encuentra la variable r , se puede encontrar la zona de Roche lobes, las formulas matemáticas se facilitaron realizando un cambio de la variable $r' = r/R$. Se observa que la variable r' es no tiene unidades de medida, por lo que para estimar un valor real de la zona de Roche lobes, se tiene que multiplicar el resultado que se obtendrá de solucionar la ecuación (121) en función de r' , por la distancia a la cual están las estrellas.

Cuando se aplica el método de Newton-Raphson se necesita definir una función matemática igualada a cero, en este caso la función será $f(r')$, la cual es:

$$f(r') = \frac{r'}{r'_p} + \frac{qr'}{\sqrt{r'^2_p + 1}} - \frac{qr'}{\sqrt{r'^2 - 2r'\lambda + 1}} - r'^2 q \lambda - \frac{(1+q)(1-\nu^2)r'^3}{2} - 1 = 0 \quad (128)$$

En el método de Newton-Raphson se utiliza la primera derivada de la función anteriormente definida, con respecto a la variable que se está buscando (en este caso r'), la cual se escribirá como $\dot{f}(r') = \frac{df(r')}{dr'}$. La derivada de esta función está escrita a continuación:

$$\dot{f}(r') = \frac{1}{r'_p} + \frac{q}{\sqrt{r'^2_p + 1}} - q \left[\frac{1 - r'(r' - \lambda)}{\sqrt{r'^2 - 2r'\lambda + 1}} - 2r'\lambda \right] - \frac{3(1+q)(1-\nu^2)r'^2}{2} \quad (129)$$

Tomando los valores de la función y de la derivada de la función respecto a r' y aplicán-

¹⁸KNABNER, Peter y ANGERMANN, Lutz, *Numerical methods for elliptic and parabolic partial equations*

dolos en la ecuación (127), el valor de r' es:

$$r'_{n+1} = r'_n - \frac{\frac{r'_n}{r'_p} + \frac{qr'_n}{\sqrt{r'^2_p+1}} - q \left[\frac{r'_n}{\sqrt{r'^2_n-2r'_n\lambda+1}} - r'^2_n\lambda \right] - \frac{(1+q)(1-\nu^2)r'^3_n}{2} - 1}{\frac{1}{r'_p} + \frac{q}{\sqrt{r'^2_p+1}} - q \left[\frac{1-r'_n(r'_n-\lambda)}{\sqrt{r'^2_n-2r'_n\lambda+1}} - 2r'_n\lambda \right] - \frac{3(1+q)(1-\nu^2)r'^2_n}{2}} \quad (130)$$

La ecuación (130) entrega un valor para r' , para encontrar la zona de Roche lobes es necesario calculara todos los valores que tomará r' para todos los ángulos.

Cuadro 2. Valores de los ángulos θ y ϕ que se tomarán.

ϕ (grados)	θ (grados)
0	0
0	3
0	6
0	...
0	-3
0	-6
0	...
180	0
180	3
180	6
180	...
180	-3
180	-6
180	...

Los valores de ϕ que se van a tomar son solo 0° y 180° por lo que la representación de la zona de Roche lobes será en el plano. Si se quisiera hacer una representación tridimensional se tomarían todos los valores posibles de ϕ . Para este caso se necesita un programa especializado en gráficas tridimensionales, aclarando que el lenguaje de programación que se va a utilizar en la elaboración del software es **Visual Basic 6.0**.

Tomando los valores de ϕ y θ vistos en el cuadro 2, se realizarán los cálculos de r' para cada valor presentado en dicho cuadro, la zona de Roche lobes estará dibujada en el plano $x - y$, para esto es necesario que se utilice las ecuaciones:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (131)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (132)$$

Así se tendrá los puntos (x, y) , los cuales serán coordenadas de la zona de Roche lobes. Se tiene que aclarar que al estar trabajando con un sistema binario de estrellas, se tiene

que trabajar independientemente con cada estrella para esto se tomara q para la primer estrella y $q' = q^{-1}$ para la segunda estrella, además si se gráfica los puntos (x, y) en la segunda estrella, las gráficas estarán superpuestas, motivo por el cual no se puede graficar de esta manera. Recordando que la distancia entre las estrellas es R y que se ha escogido un sistema adimensional, se puede tomar $R = 1$, por lo que la posición de la segunda estrella sera determinada por los puntos $(1 - x, y)$ esto debido al sistema de unidades que se ha tomado en el problema.

6.3.2. Aplicación al límite de Roche: Para encontrar el límite de Roche en un sistema binario de corto período se tiene que solucionar la ecuación (123), ecuación que como se mira no es algebraica respecto a la variable r' .

Se aplicara el método de Newton-Raphson a la ecuación (123), por lo que se necesita definir una función $g(r') = 0$ a partir de la ecuación (123) esta función es la que se tendrá en cuenta para aplicar el método, la función es:

$$g(r') = -\frac{1}{r'^2} - q \left[\frac{r' - 1}{(r'^2 - 2r' + 1)^{3/2}} + 1 \right] + r'(1 + q) = 0 \quad (133)$$

Como se hizo en la aplicación a la zona de Roche lobes, se derivará esta función respecto a la variable r' , la derivada sera escrita como:

$$\dot{g}(r') = \frac{dg(r')}{dr'}$$

Y para el caso se escribe como:

$$\dot{g}(r') = \frac{2}{r'^3} - \frac{2q}{(r'^2 - 2r' + 1)^{3/2}} + (1 + q) \quad (134)$$

Aplicando estas ecuaciones en la ecuación (127), el límite de Roche será el resultado de desarrollar la siguiente ecuación:

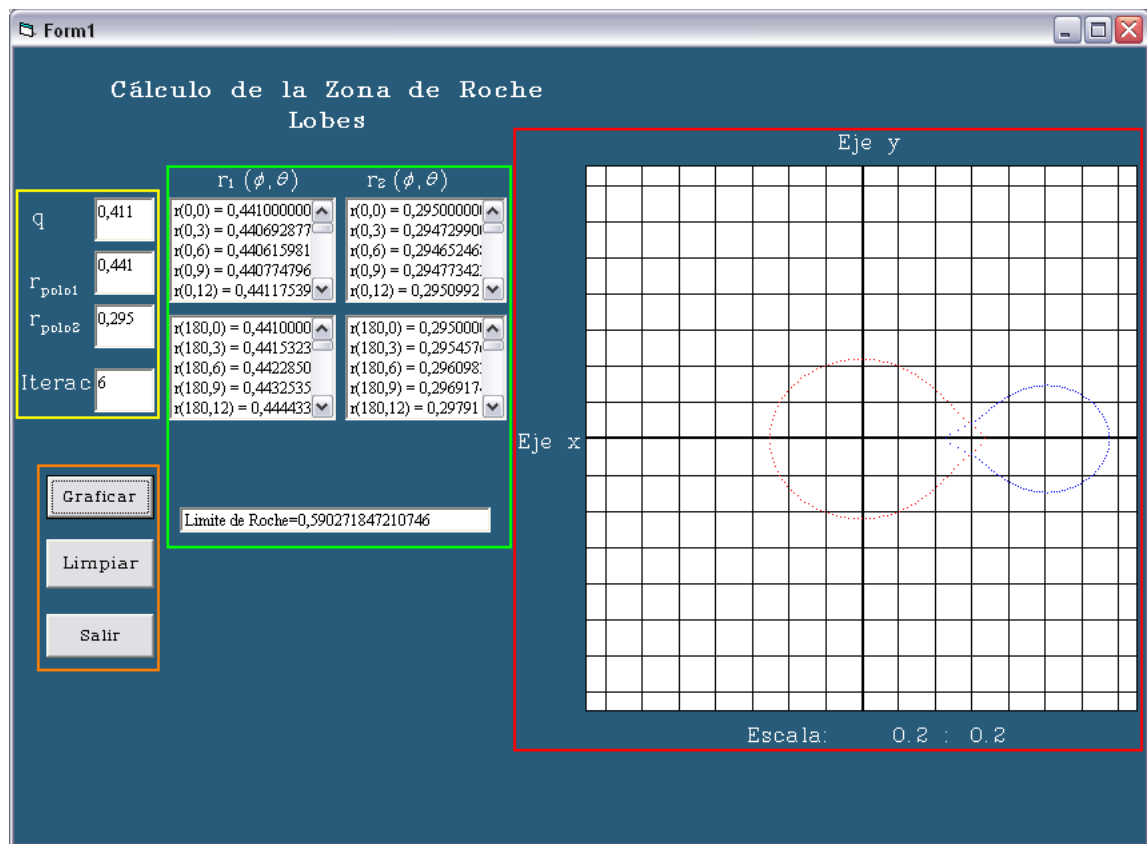
$$r'_{n+1} = r'_n - \frac{-\frac{1}{r'^2} - q \left[\frac{r'-1}{(r'^2-2r'+1)^{3/2}} + 1 \right] + r'(1+q)}{\frac{2}{r'^3} - \frac{2q}{(r'^2-2r'+1)^{3/2}} + (1+q)} \quad (135)$$

Se observa que el límite de Roche depende estrictamente del factor q , lo cual implica que la posición de este punto está relacionado con el valor de las masas de las estrellas. Aquí no es necesario calcular este límite para cada estrella puesto que el límite de Roche será una distancia la cual estará medida desde la estrella que se considera de mayor masa a la estrella que se considera de menor masa, recordando que en el caso de que algún punto de los calculados en la zona de Roche lobes sobrepase este límite físico, entonces las estrellas intercambiaran masa, además, si se intercambia masa, el límite de Roche será el radio de un posible disco de acreción que se formaría en es sistema.

7. PROGRAMA DESARROLLADO PARA EL CÁLCULO DEL LÍMITE DE ROCHE Y LA ZONA DE ROCHE LOBES

Los resultados que se indicarán son gráficas obtenidas mediante el software que se ha desarrollado en el lenguaje Visual Basic 6.0, con el fin de encontrar la zona de Roche lobes y el límite de Roche.

Figura 16. Interfaz del software desarrollado.



7.1. DESCRIPCIÓN DEL SOFTWARE

A continuación se describirá detalladamente el software que se desarrollo, su interfaz, su funcionamiento y la forma en que se debe utilizar.

7.1.1. Interfaz: En la figura 16. se muestra la interfaz del software, la cual se divide en

cuatro partes distinguidas por los colores amarillo, verde, naranja y rojo. Estas partes son:

- Primera parte (sobresale en la figura 16 con el color amarillo), ingreso de datos, en el software se solicitan los datos de las variables q relación entre las masas de las estrellas, r'_{1p} relación entre el radio de la primer estrella y la distancia entre las estrellas, r'_{2p} relación entre el radio de la segunda estrella y la distancia entre las estrellas y se solicita el número de iteraciones o sea el número de veces que se repite el proceso de las ecuaciones (130) y (135) este dato entre más grande sea más exactos serán los resultados y la gráfica.
- Segunda parte (sobresale en la figura 16 con el color verde), resultados numéricos, los resultados que se muestran en esta parte son de $r'_1(\phi, \theta)$, de $r'_2(\phi, \theta)$ y del límite de Roche. Los valores de $r'_1(\phi, \theta)$ y $r'_2(\phi, \theta)$ describen la zona de Roche lobes numéricamente y son los valores que se transformaran en la gráfica de dicha zona.
- Tercera parte (sobresale en la figura 16 con el color naranja), parte de los botones, se encuentran tres botones que son los que dan el funcionamiento al software y permiten la interacción entre el usuario y el software, los botones son:
 - El primer botón se denomina *Graficar* y es el botón con el cual una vez ingresado los datos, se da inicio a los cálculos internos del programa que permiten ver los valores de $r'_1(\phi, \theta)$, $r'_2(\phi, \theta)$, el límite de Roche y la gráfica de la zona de Roche lobes.
 - El segundo botón se llama *Limpiar*, botón con el cual se limpia la gráfica, permitiendo que se tomen otros valores para otro sistema y otra gráfica.
 - El tercer botón se llama *Salir* y es el botón que permite salir del programa.
- Cuarta parte (sobresale en la figura 16 con el color rojo), parte gráfica, en esta parte de la interfaz se muestra la gráfica de la zona de Roche lobes en el plano $x - y$ que se obtuvo con los valores de $r'_1(\phi, \theta)$ y $r'_2(\phi, \theta)$, se realizó una cuadrícula cuya escala es $0,2 : 0,2$, lo que quiere decir que con cinco cuadro se llega a la distancia entre las estrellas. También se ha tomado el color rojo para la primer estrella y el color azul para la segunda estrella.

7.1.2. Funcionamiento del Software: Se utilizó el lenguaje *Visual Basic 6.0* para desarrollar este software, en dicho lenguaje se programó sobre cada botón, a continuación se mostrarán los comandos utilizados en el software en cada botón.

Botón Graficar

Es el botón sobre el cual se desarrollo la programación principal y todas las operaciones

necesarias para la búsqueda del límite de Roche y la zona de Roche lobes, el código de este botón se muestra a partir del comando:

```
Private Sub Command1_Click()
```

Lo primero que se hizo fue definir las variables que se van a utilizar. Algunas variables se relacionan con la teoría, otras facilitan el desarrollo algebraico y otras son de carácter entero utilizadas para procesos iterativos, las variables se definieron con el siguiente código:

```
Dim q As Double, rp1 As Double, rp2 As Double, qp As Double,
Om1 As Double, Om2 As Double, lam As Double, nu As Double,
th As Integer, phi As Integer, pi As Double,
r1(1000, 1000) As Double, r2(1000, 1000) As Double,
x1b(n, th) as Double, x2b(n, th) as Double, y1b(n, th) as Double,
y2b(n, th) as Double, x1(1000, 1000) As Double,
y1(1000, 1000) As Double, x2(1000, 1000) As Double,
y2(1000, 1000) As Double, y2b(1000, 1000) As Double,
LR(1000) As Double, i As Integer, n As Integer, j As Integer,
m As Integer
```

Las variables definidas como `Double` pueden tomar cualquier tipo de valor, las variables definidas como `Integer` solo tomarán valores enteros.

En el cuadro 3 se muestra la relación entre las variables teóricas y las variables que se utilizaron en el software.

La variable Ω'_1 y Ω'_2 son variables que se las utilizaron para facilitar las ecuaciones en el programa, estas variables se escriben como:

$$\Omega'_1 = \frac{1}{r'_{p1}} + \frac{q}{\sqrt{r'_{p1}{}^2 + 1}} \quad \Omega'_2 = \frac{1}{r'_{p2}} + \frac{q'}{\sqrt{r'_{p2}{}^2 + 1}} \quad (136)$$

Esta cantidad Ω'_1 no se debe confundir con la función de Kopal Ω que se miro en la teoría. Las cantidades $r'_1 = \mathbf{r1}(1000,1000)$, $r'_2 = \mathbf{r2}(1000,1000)$, $x_1 = \mathbf{x1}(1000,1000)$, $x_2 = \mathbf{x2}(1000,1000)$, $y_1 = \mathbf{y1}(1000,1000)$, $y_2 = \mathbf{y2}(1000,1000)$ tienen entre paréntesis las cantidades (1000,1000) debido a que estas variables deben estar en función de las coordenadas θ y ϕ , además son usadas para la iteraciones en el método de Newton - Raphson.

Después de definir las variables se continua asignando valores a las variables que se necesitan para el desarrollo del programa, esto se realizó con el siguiente código:

```
q = CDb1(txtq.Text)
rp1 = CDb1(txtrp1.Text)
rp2 = CDb1(txtrp2.Text)
n = CInt(txtn.Text)
```

Cuadro 3. Relación entre variables de la teoría y del software.

En la teoría	En el software	Descripción
q	q	Relación entre masas m_1/m_2
q'	qp	Relación entre masas m_2/m_1
r'_{1p}	rp1	Radio de la primer estrella
r'_{2p}	rp2	Radio de la segunda estrella
Ω'_1	Om1	Término para proceso algebraico
Ω'_2	Om2	Término para proceso algebraico
λ	lam	$\lambda = \sin \theta \cos \phi$
ν	nu	$\nu = \cos \theta$
θ	th	Coordenada esférica
ϕ	phi	Coordenada esférica
π	pi	Número π
r'_1	r1(1000,1000)	r' de la primer estrella
r'_2	r2(1000,1000)	r' de la segunda estrella
x_1	x1(1000,1000)	Coord. cartesiana de la primer estrella
x_2	x2(1000,1000)	Coord. cartesiana de la segunda estrella
y_1	y1(1000,1000)	Coord. cartesiana de la primer estrella
y_2	y2(1000,1000)	Coord. cartesiana de la segunda estrella
Lim. de Roche	LR(1000)	Límite de Roche calculado
	i, n, m, j	Términos enteros

Estos cuatro valores son los cuatro cuadros que se observan en el recuadro amarillo de la interfaz.

Algunas constantes que se tienen que tener en cuenta serán escritas en la siguiente parte del código.

```
qp = 1 / q
pi = 3.1415926535897
Om1 = (1 / rp1) + (q / Sqr(rp1 ^ 2 + 1))
Om2 = (1 / rp2) + (qp / Sqr(rp2 ^ 2 + 1))
```

Ahora el programa genera la cuadrícula que se mira en la gráfica, con lo que además se define la escala de la gráfica.

```
AutoRedraw = -1
Picture1.Scale (-1.5, 1.5)-(-1.5, -1.5)
Picture1.Line (-2, 0.01)-(-2, 0.01)
Picture1.Line (0.005, 2)-(0.005, -2)
Picture1.Line (-2, 0)-(-2, 0)
Picture1.Line (0, 2)-(0, -2)
```

```

For m = 1 To 20
Picture1.Line (-2, 0.2 * m)-(-2, 0.2 * m)
Picture1.Line (-2, -0.2 * m)-(-2, -0.2 * m)
Picture1.Line (0.2 * m, -2)-(0.2 * m, 2)
Picture1.Line (-0.2 * m, -2)-(-0.2 * m, 2)
Next m

```

La opción `Picture1.Scale` define la escala de la gráfica. Las cuatro líneas siguientes generan las líneas gruesas o sea los ejes de la gráfica y líneas siguientes generan el resto de la cuadrícula.

A continuación se desarrolla la solución mediante el método de Newton - Raphson, primero desarrollando una rutina sobre el valor entero de θ :

```

For th = 0 To 90
phi = 0
r1(0, th) = 0
r2(0, th) = 0
LR(0) = 0.5
lam = Cos(phi * pi / 180) * Sin(th * pi / 180)
nu = Cos(th * pi / 180)

```

Aquí se definió los valores iniciales que tomarán r'_1 , r'_2 , y r' (Límite de Roche), a los dos primeros se les asignó el valor 0 (aunque se les pudo asignar cualquier valor entre 0 y 1), al límite de Roche inicial se le dio el valor 0,5 por que se espera que este valor esté en un punto intermedio entre 0 y 1. También se encontraron los valores de λ y ν . Esta parte del programa se desarrolló para $\phi = 0$ y θ correrá por los valores enteros hasta 90° .

Dentro de la rutina anterior se escribió una subrutina que es la encargada de aplicar el método de Newton - Raphson, para la zona de Roche de la primer estrella, la segunda estrella y el limite de Roche en el sistema.

```

For i = 0 To n
r1(i + 1, th) = r1(i, th) - (r1(i, th) * Om1 - q * ((r1(i, th) / Sqr(r1(i, th) ^ 2 -
2 * r1(i, th) * lam + 1)) - lam * r1(i, th) ^ 2) - ((r1(i, th) ^ 3) * (1 + q) *
(1 - nu ^ 2) / 2) - 1) / (Om1 - q * (((1 - r1(i, th) * (r1(i, th) - lam)) /
Sqr(r1(i, th) ^ 2 - 2 * r1(i, th) * lam + 1)) - 2 * r1(i, th) * lam) - (3 * (1 + q) *
(1 - nu ^ 2) * (r1(i, th) ^ 2) / 2))

r2(i + 1, th) = r2(i, th) - (r2(i, th) * Om2 - qp * ((r2(i, th) / Sqr(r2(i, th) ^ 2 -
2 * r2(i, th) * lam + 1)) - lam * r2(i, th) ^ 2) - ((r2(i, th) ^ 3) * (1 + qp) *
(1 - nu ^ 2) / 2) - 1) / (Om2 - qp * (((1 - r2(i, th) * (r2(i, th) - lam)) /
Sqr(r2(i, th) ^ 2 - 2 * r2(i, th) * lam + 1)) - 2 * r2(i, th) * lam) - (3 * (1 + qp) *
(1 - nu ^ 2) * (r2(i, th) ^ 2) / 2))

LR(i + 1) = LR(i) - (-(1 / (LR(i) ^ 2)) - q * (((LR(i) - 1) / ((LR(i) ^ 2) - 2 *
LR(i) + 1) ^ (3 / 2)) + 1) + (1 + q) * LR(i)) / ((2 / LR(i) ^ 3) + ((2 * q) /
((LR(i) ^ 2) - 2 * LR(i) + 1) ^ (3 / 2)) + (1 + q))

Next i

```

Hasta este momento, se ha resuelto el valor de r'_1 y r'_2 para un solo valor de θ cuando termine la rutina de θ se tendrán todos los valores de estas variables.

Dentro de la rutina θ pero fuera de la rutina i se calcularan las coordenadas cartesianas para los valores anteriormente encontrados.

```
x1(n, th) = r1(n, th) * lam
y1(n, th) = r1(n, th) * nu
x2(n, th) = 1 - r2(n, th) * lam
y2(n, th) = r2(n, th) * nu
x1b(n, th) = r1(n, th) * lam
y1b(n, th) = -r1(n, th) * nu
x2b(n, th) = r2(n, th) * lam
y2b(n, th) = -r2(n, th) * nu
```

$x1b(n, th)$, $x2b(n, th)$, $y1b(n, th)$ y $y2b(n, th)$ son los valores simétricos que completaran la curva. La gráfica y los resultados se entregan mediante los siguientes códigos:

```
Picture1.PSet (x2(n, th), y2(n, th)), vbBlue
Picture1.PSet (x1b(n, th), y1b(n, th)), vbRed
Picture1.PSet (x2(n, th), -y2(n, th)), vbBlue
Picture1.PSet (x1b(n, th), -y1b(n, th)), vbRed
```

```
List1.AddItem ("r" & "(" & "0" & "," & th & ")" & " = " &
r1(n, th) & "")
List2.AddItem ("r" & "(" & "0" & "," & th & ")" & " = " &
r2(n, th) & "")
```

Aquí se ha solucionado la ecuación (130) para $\phi = 0^\circ$ y se ha gráficado el resultado por lo que se repite el proceso pero para un ángulo $\phi = 180^\circ$. También se ha solucionado la ecuación (135), hay que recordar que esta ecuación no depende de los ángulos. El siguiente es el proceso repetido para $\phi = 180^\circ$.

```
For j = 0 To n
lam = Cos(phi * pi / 180) * Sin(th * pi / 180)
nu = Cos(th * pi / 180)
```

```
r1(j + 1, th) = r1(j, th) - (r1(j, th) * Om1 - q * ((r1(j, th) / Sqr(r1(j, th) ^ 2 -
2 * r1(j, th) * lam + 1)) - lam * r1(j, th) ^ 2) - ((r1(j, th) ^ 3) * (1 + q) *
(1 - nu ^ 2) / 2) - 1) / (Om1 - q * (((1 - r1(j, th) * (r1(j, th) - lam)) /
Sqr(r1(j, th) ^ 2 - 2 * r1(j, th) * lam + 1)) - 2 * r1(j, th) * lam) - (3 * (1 + q) *
(1 - nu ^ 2) * (r1(j, th) ^ 2) / 2))
```

```
r2(j + 1, th) = r2(j, th) - (r2(j, th) * Om2 - qp * ((r2(j, th) / Sqr(r2(j, th) ^ 2 -
2 * r2(j, th) * lam + 1)) - lam * r2(j, th) ^ 2) - ((r2(j, th) ^ 3) * (1 + qp) *
(1 - nu ^ 2) / 2) - 1) / (Om2 - qp * (((1 - r2(j, th) * (r2(j, th) - lam)) /
Sqr(r2(j, th) ^ 2 - 2 * r2(j, th) * lam + 1)) - 2 * r2(j, th) * lam) - (3 * (1 + qp) *
(1 - nu ^ 2) * (r2(j, th) ^ 2) / 2))
```

```
Next j
```

```

x1(m, th) = r1(m, th) * lam
y1(m, th) = r1(m, th) * nu
x2(m, th) = 1 - r2(m, th) * lam
y2(m, th) = r2(m, th) * nu
x1b(m, th) = r1(m, th) * lam
y1b(m, th) = -r1(m, th) * nu
x2b(m, th) = 1 - r2(m, th) * lam
y2b(m, th) = -r2(m, th) * nu

Picture1.PSet (x2(m, th), y2(m, th)), vbBlue
Picture1.PSet (x1b(m, th), y1b(m, th)), vbRed
Picture1.PSet (x2(m, th), -y2(m, th)), vbBlue
Picture1.PSet (x1b(m, th), -y1b(m, th)), vbRed

```

```

List3.AddItem ("r" & "(" & "180" & "," & th & ")" & " = " &
r1(m, th) & "")
List4.AddItem ("r" & "(" & "180" & "," & th & ")" & " = " &
r2(m, th) & "")

```

Para terminar esta parte de la programación, se aplicará un código para buscar que θ tome valores en múltiplos de tres y se publica el valor del límite de Roche.

```

th = th + 2
Next th
List5.AddItem ("Limite de Roche" & "=" & LR(n) & "")

```

End Sub

Las últimas dos palabras, indican la finalización del proceso en este botón. La programación en los próximos dos botones es corta y es de carácter estético.

Botón Limpiar

Este botón cumple estrictamente lo que su nombre dice, el código que se aplica es muy corto y es el siguiente.

```

Private Sub Command3_Click()
Picture1.Cls
End Sub

```

Botón Salir

Al igual que el anterior botón su código es muy corto y realiza una sola acción, el código es:

```

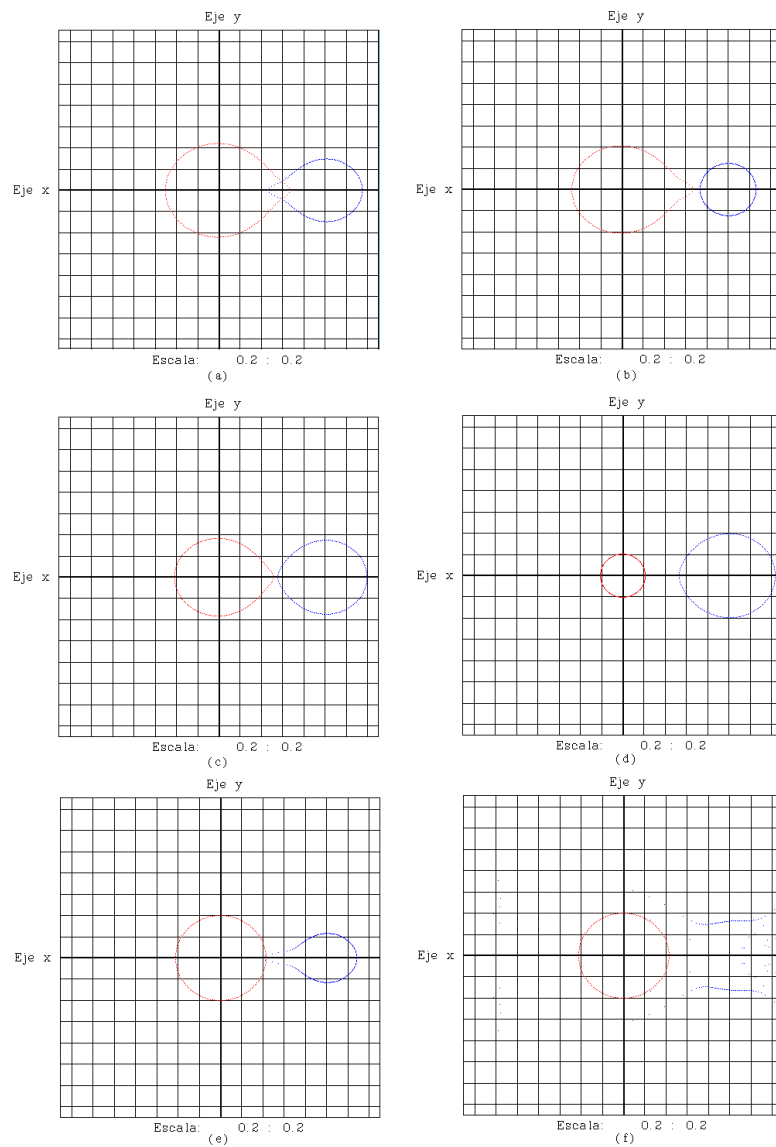
Private Sub Command2_Click()
End
End Sub

```

8. RESULTADOS

Utilizando el software desarrollado se calculó el límite de Roche y se graficó la zona de Roche lobes para diferentes relaciones de masa y distancia, estos valores se encuentran consignados en el cuadro 4.

Figura 17. Zona de Roche lobes para los valores del cuadro 4.



Cuadro 4. Límite de Roche para diferentes valores de q con los cuales se desarrollaron algunas gráficas con el programa.

Imagen	q	r'_{p1}	r'_{p2}	Límite de Roche
Figura 18a.	0.411	0.441	0.295	0.590271847210746
Figura 18b.	0.600	0.411	0.246	0.552342629507492
Figura 18c.	0.955	0.365	0.348	0.504739638414970
Figura 18d.	2.000	0.203	0.394	0.429248428481473
Figura 18e.	0.167	0.400	0.231	0.674597255543253
Figura 18f.	0.153	0.400	0.324	0.682213446445172

Figura 17a.

En esta figura se observa como el material que se encuentra en la superficie de cada estrellas forma la zona de Roche lobes y sobrepasan el límite de Roche, produciéndose un intercambio de masa.

Figura 17b.

En esta figura se observa como el material que se encuentra en la superficie de la primer estrella sobrepasa el límite de Roche y se dirige a la segunda estrella, mientras que el material de la superficie de la segunda estrella mantiene normal.

Figura 17c.

En esta figura se observa como el material que se encuentra en la superficie de cada estrella se ve afectado por las fuerzas de marea, pero, no se presenta un intercambio de masa, ya que en ninguno de los casos el material alcanza el límite de Roche.

Figura 17d.

En esta figura se observa el efecto de la fuerza de marea solamente en el material de la segunda estrella, sin embargo esta estrella no cede masa ya que el material no alcanza el límite de Roche.

Figura 17e.

En esta figura se observa como la segunda estrella cede masa.

Figura 17f.

En esta figura se observa como la segunda estrella no resistirá las fuerzas de marea, transfiriendo su masa a la otra estrella.¹⁹

¹⁹Los datos tomados en la parte superior no corresponden a un sistema binario real, se trabajo con estos datos, para mostrar los diferentes casos que se pueden presentar de la zona de Roche lobes en sistemas binarios. En el anexo se muestran resultados para algunos sistemas binarios reales.

9. CONCLUSIONES

- Se ha calculado el límite de Roche de un sistema binario de corto período, con lo que se puede decir que en el caso que se forme un disco de acreción, este disco tendrá un radio igual al límite de Roche.
- La zona de Roche lobes es un efecto producido por un valor excesivo de las fuerzas de marea, y como se observa en las gráficas los efectos son variados y dependen de los parámetros de cada sistema.
- El punto de Lagrange L_1 coincide con el límite de Roche para un sistema binario estelar, ya que este es un punto inestable y al sobrepasar este punto se puede intercambiar masa entre las estrellas.
- El software desarrollado presentó problemas cuando se tomó el ángulo θ en intervalos de un grado, el problema fue causado por que se utilizaron varias iteraciones, presentando un error en el sistema. Este problema afecta la calidad de las gráficas, mas no afecta su forma.
- El lenguaje de programación no permitía calcular las funciones trigonométricas para ángulos negativos, por lo que fue necesario, utilizar el hecho de que los valores para estos puntos eran simétricos.

10. RECOMENDACIONES

Las siguientes recomendaciones son algunas adiciones que se pueden hacer a este trabajo con el fin de tener una mejor idea del comportamiento que tienen las estrellas que forman los sistemas binarios estelares de corto período.

- Calcular los parámetros de movimiento de los sistemas binarios, para así mostrar la forma en que el sistema se mueve.
- Buscar la forma tridimensional de la zona de Roche lobes en un sistema binario estelar de corto período para luego realizar una simulación de la curva de luz teórica para un sistema binario estelar de corto período y ver la forma en que la zona de Roche lobes afecta esta curva.

BIBLIOGRAFÍA

BEUTLER, Gerhard. *Methods of Celestial Mechanics*, Volumen I, Ed. Springer, Berlin (Alemania), 2005.

BRUTON, Dan. *Roche Lobes and the Morphologies of Close Binary Stars*, SFA Observatory, Stephen F. Austin State University, <http://www.physics.sfasu.edu/astro/binstar.html>, 2004.

CORNELL, Garry. *Visual Basic Manual de Referencia*, Ed. MacGraw - Hill, Madrid (España), 1999.

GUEDINI, Silvano. *Software for Photometric Astronomy*, Ed. William-Bell, Inc, Virginia (USA), 1982.

GOLDSTEIN, Herbert. *Classical Mechanics*, 3ª edición, Ed Addyson Wesley, San Francisco (USA), 2001.

KARTTUNEN, Hannu. *Fundamental Astronomy*, 5ª edición, Ed Springer, Berlin (Alemania), 2007.

KNABNER, Peter y ANGERMANN, Lutz, *Numerical methods for elliptic and parabolic partial equations*, Ed Springer, Berlin, 2003.

MEEUS, Jean. *Astronomical Algorithms*, Ed. William - Bell, Virginia (USA), 1991.

MURRAY, Carl y DERTMONTT, Stanley. *Solar System Dynamics*. Cambridge University Press, New York (USA), 2006

OHANIAN, Hans. *Gravitation and Spacetime*. NORTON COMPANY, Estados Unidos, 1976

PAVLEC, M. *Tables for the Roche model of close binary sistem*, House of the Checoslovak academy of Sciences, Provided by Nasa ADS, 1964BAICz..15..165p, 1964.

PADMANABHAN, Thanu. *Astrophysics* Volúmenes I y II, Ed. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

PERCY, John. *The study of the variables star using small telescopes*, Ed. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

PORTILLA, José Gregorio, et al, *Astronomía para todos*, UNIBIBLOS, Bogotá, 2001.

RATKOVIC, Sasa, et al, *Roche Lobes in the Second Post-Newtoniana Approximation*, arXiv:astro-ph/0512133v1 5 Dec 2005.

VALIENTE, Gabriel. *Composición de textos científicos con LaTeX*, Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, España, 1997.

www.mpa-garching.mpg.de/Binary/ukolb/relob.list

www.kusastro.kyoto-u.ac.jp/vsnet/LCs/index/index.html

www.surastronomico.com/variable200411.htm

ANEXOS

Anexo A. Método de inversión de series de Lagrange

Sean las variables x y y , las cuales se relacionan de la forma:

$$f(x) = y \tag{137}$$

Si $f(a) = b \neq 0$ se puede realizar una inversión de las variables para encontrar una función tal que:

$$g(y) = x \tag{138}$$

La inversión se la realiza de la siguiente forma:

$$g(y) = a + \sum_{n=0} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x-a}{f(x)-b} \right)_{x=a}^n \frac{(y-b)^n}{n!} \tag{139}$$

Anexo B. Zona de Roche lobes y Límite de Roche de sistemas estelares binarios de corto período

Se aplicó el software a los sistemas estelares binarios cuyos datos se encuentran en el cuadro 5.²⁰

Cuadro 5. Datos de Sistemas estelares binarios de corto período.

Nombre	Período (días)	R (R. Sol)	R_1 (R. Sol)	R_2 (R. Sol)	R'_1	R'_2	q
RT And	0,628931	4,19	1,45	1,00	0,346	0,239	0,65
TT And	2,765160	14,36	2,44	3,59	0,170	0,250	0,60
TW And	4,122750	13,87	2,00	3,37	0,144	0,243	0,20
UU And	1,486290	7,23	2,31	2,89	0,320	0,400	0,25
WZ And	0,695662	4,55	2,09	1,59	0,459	0,349	0,59
XZ And	1,357300	9,11	2,77	2,89	0,304	0,317	0,69
AA And	0,935100	5,46	2,35	1,2	0,430	0,220	0,30
AB And	0,331886	2,81	1,24	0,95	0,441	0,328	0,62
AD And	0,986196	6,33	2,15	1,83	0,340	0,289	0,80
BD And	0,462902	3,42	1,40	1,28	0,409	0,374	0,74
BL And	0,722378	5,43	2,93	1,47	0,540	0,271	0,30
BO And	5,797250	27,30	5,21	6,98	0,191	0,256	0,50
BX And	0,611012	3,75	1,61	1,16	0,429	0,309	0,15
CN And	0,462798	3,42	1,50	1,10	0,439	0,322	0,63
CO And	1,827660	8,50	1,28	2,54	0,151	0,299	0,69
SS Ari	0,405997	3,13	1,41	1,1	0,450	0,351	0,61

A continuación se presenta las gráficas de las zonas de Roche lobes y el límite de Roche, para los sistemas del cuadro 5.

²⁰<http://www.mpa-garching.mpg.de/Binary/ukolb/relob.list>

Figura 18: Zona de Roche lobes para *RT And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5441996

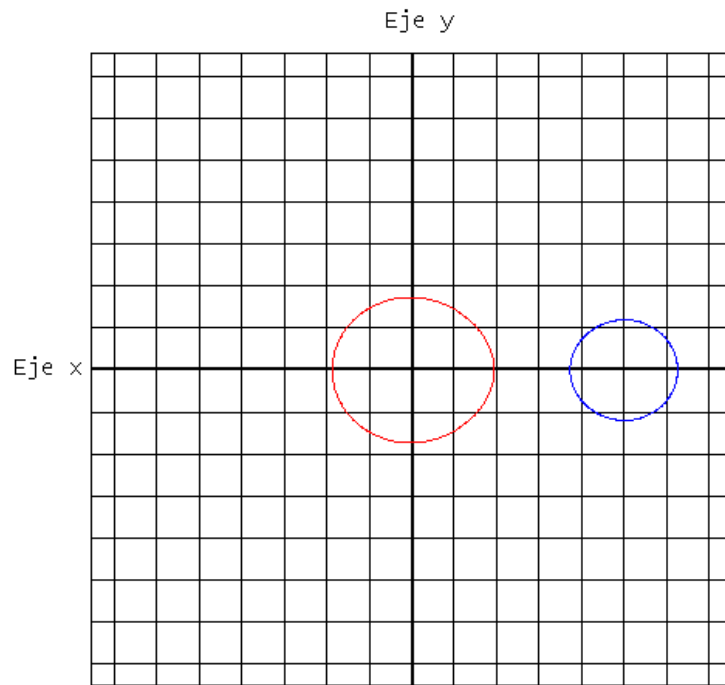


Figura 19: Zona de Roche lobes para *TT And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5523426

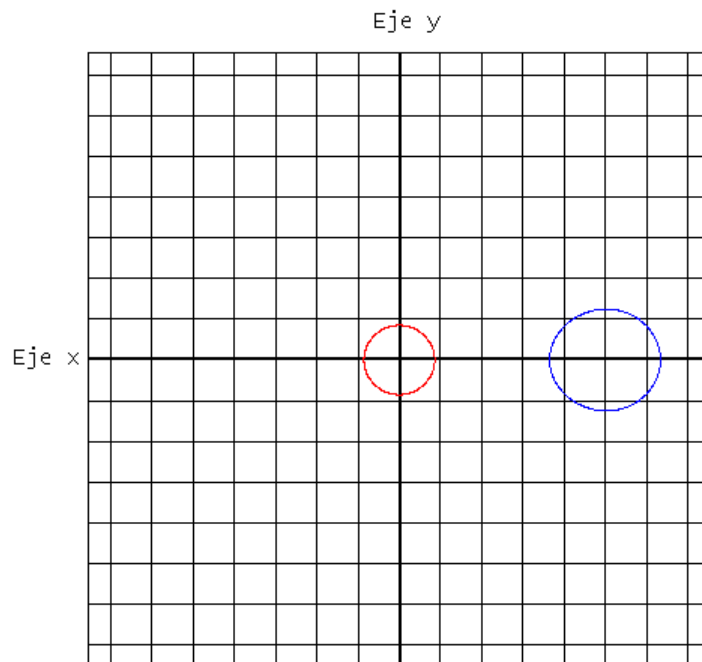


Figura 20: Zona de Roche lobes para *TW And*. El límite de Roche de este sistema es 0,6585557

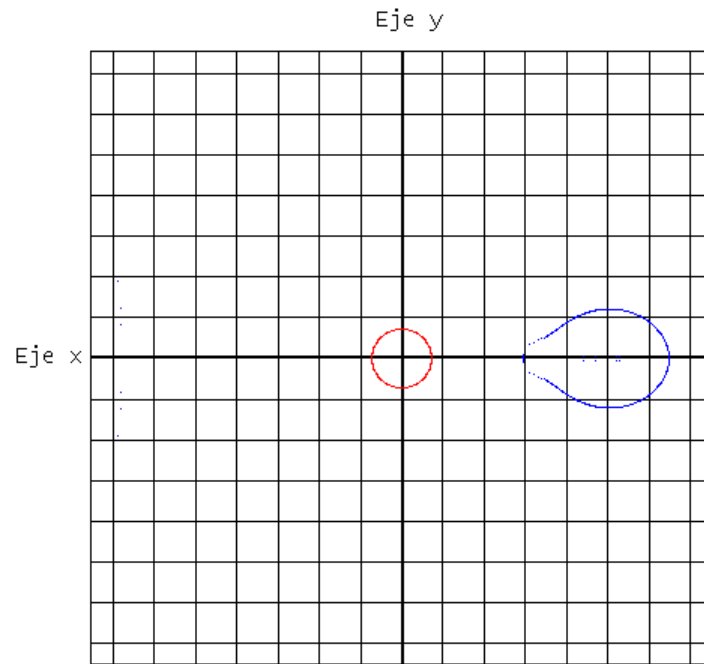


Figura 21: Zona de Roche lobes para *UU And*. El límite de Roche de este sistema es 0,6380759

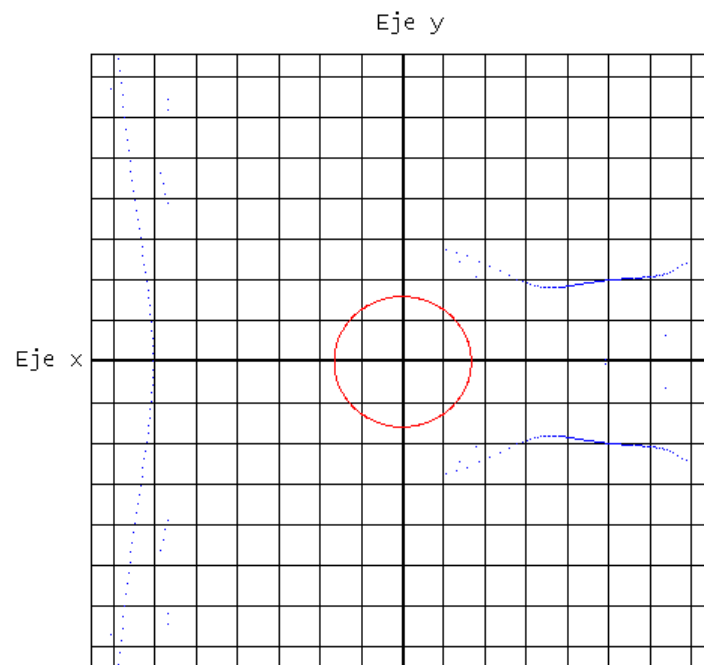


Figura 22: Zona de Roche lobes para *WZ And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5540481

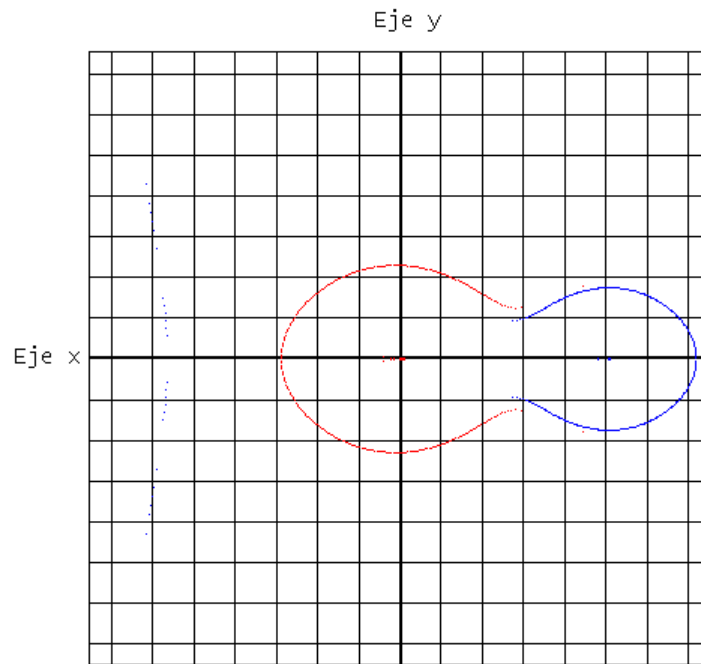


Figura 23: Zona de Roche lobes para *XZ And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5381045

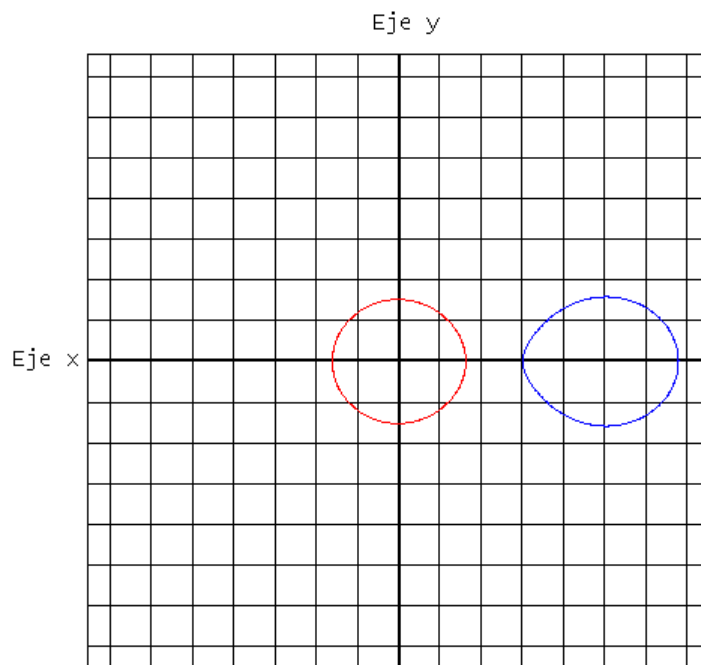


Figura 24: Zona de Roche lobes para *AA And*. El límite de Roche de este sistema es 0,6208667

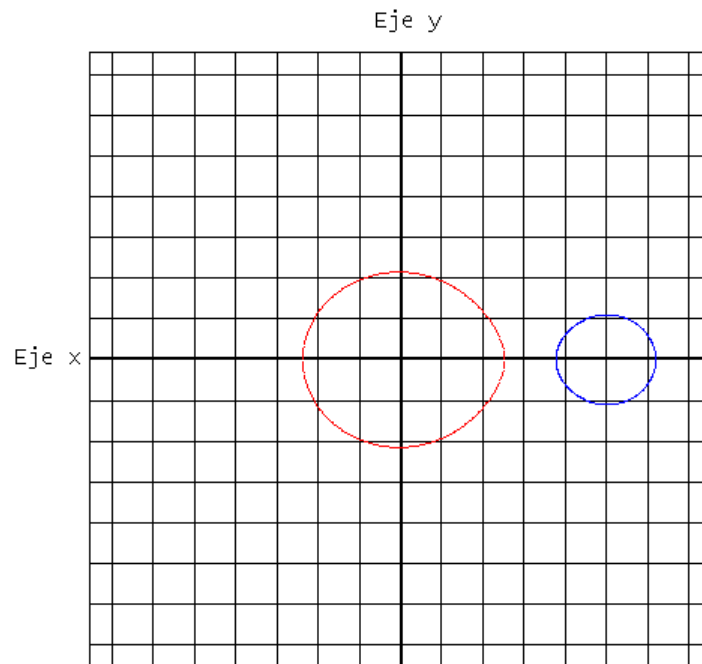


Figura 25: Zona de Roche lobes para *AB And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5490108

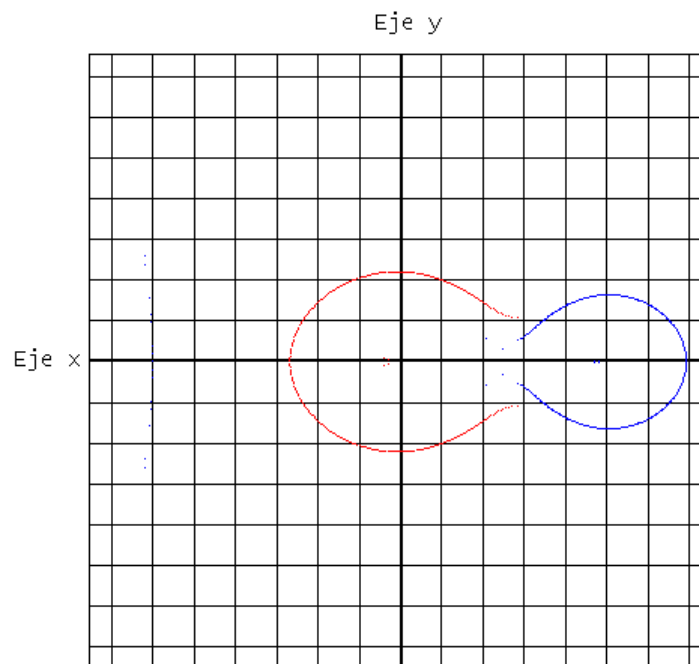


Figura 26: Zona de Roche lobes para *AD And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5229503

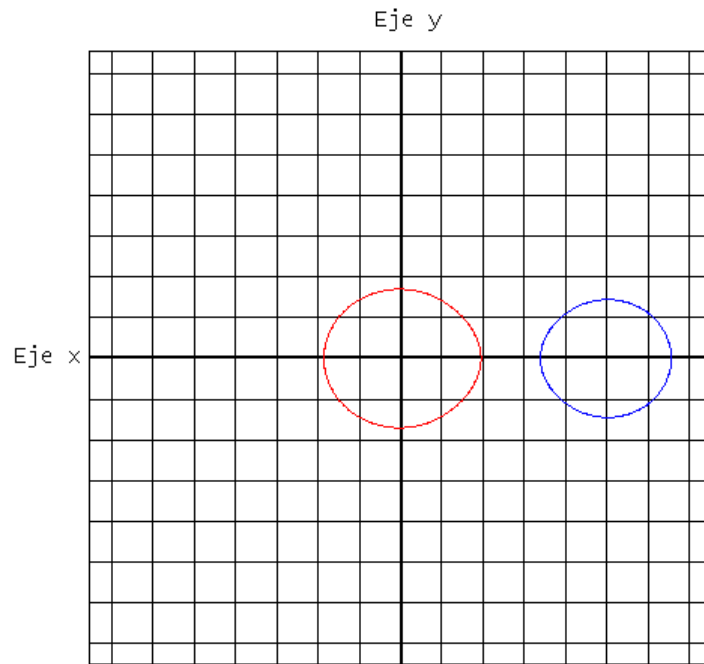


Figura 27: Zona de Roche lobes para *BD And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5309462

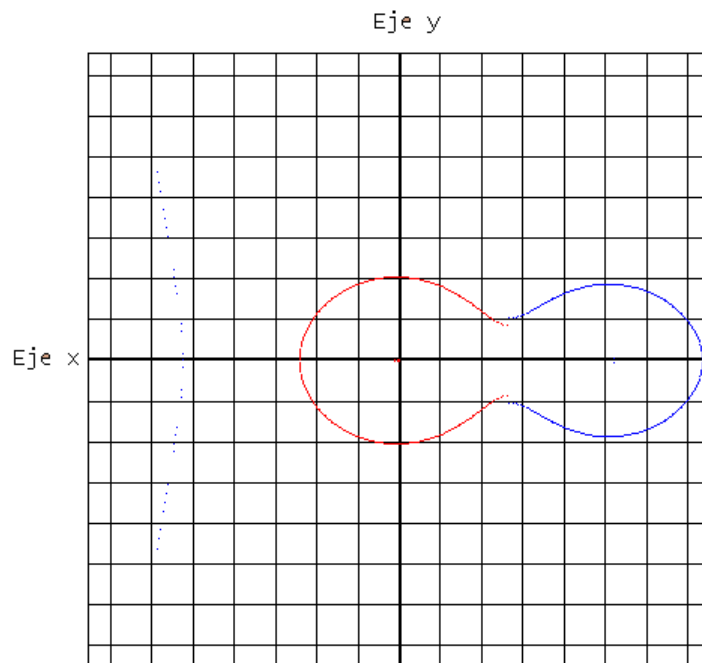


Figura 28: Zona de Roche lobes para *BL And*. El límite de Roche de este sistema es 0,6208667

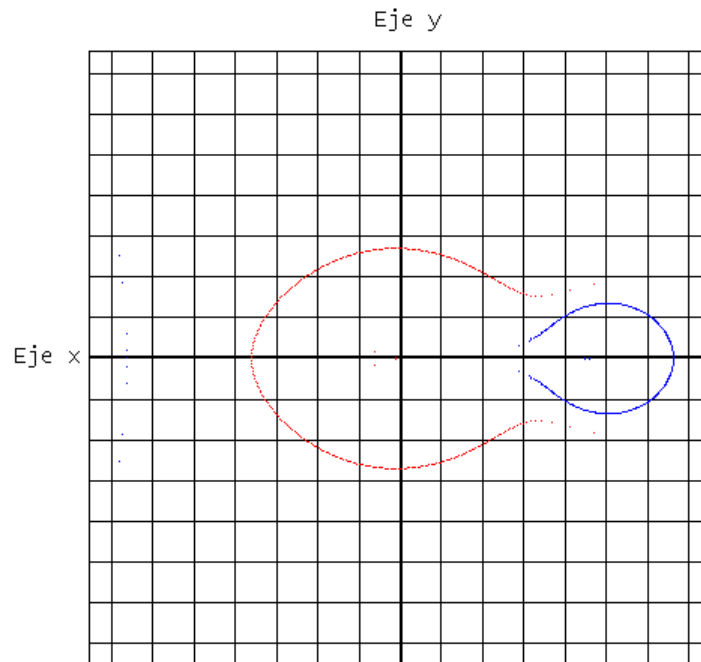


Figura 29: Zona de Roche lobes para *BO And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5707516

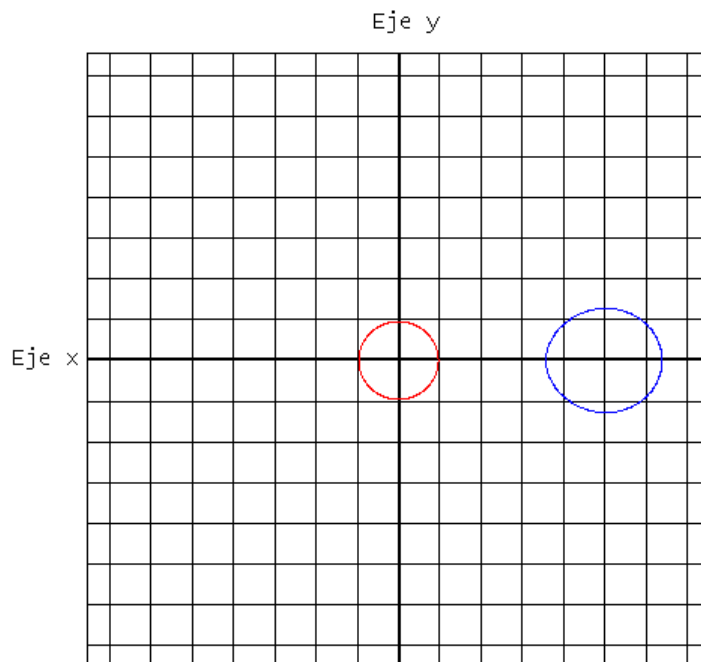


Figura 30: Zona de Roche lobes para *BX And*. El límite de Roche de este sistema es 0,6839199

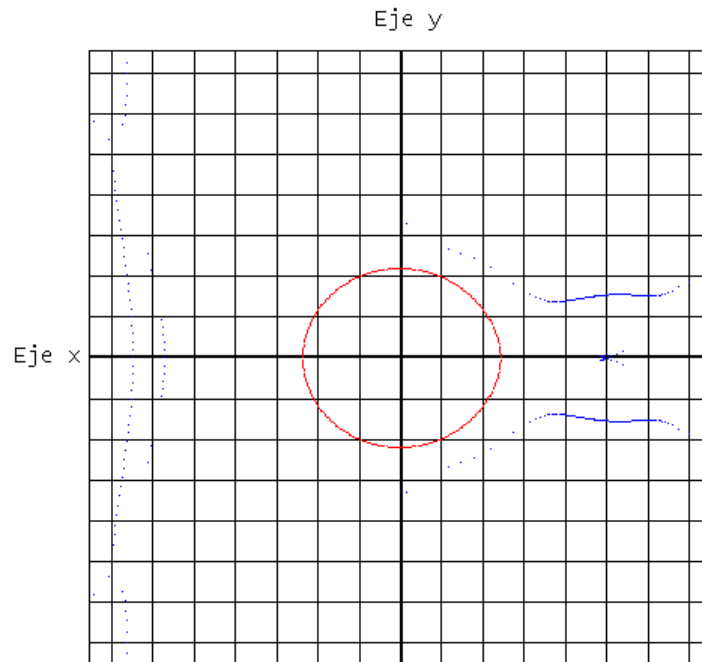


Figura 31: Zona de Roche lobes para *CN And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5473829

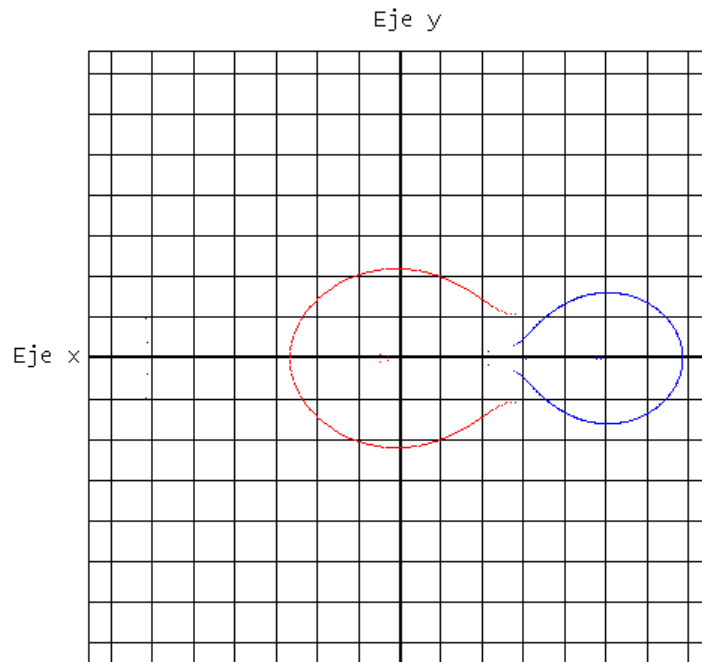


Figura 32: Zona de Roche lobes para *CO And*. El límite de Roche de este sistema es 0,5381045

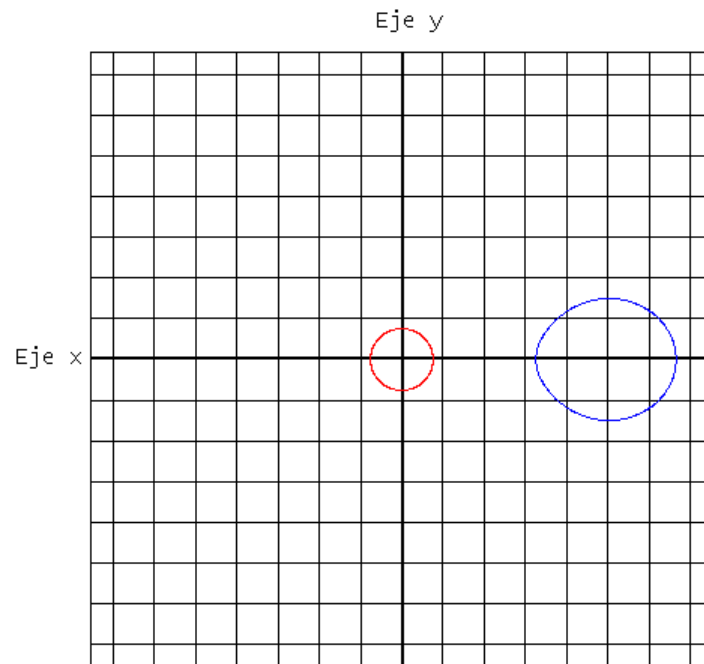


Figura 33: Zona de Roche lobes para *SS Ari*. El límite de Roche de este sistema es 0,5506637

