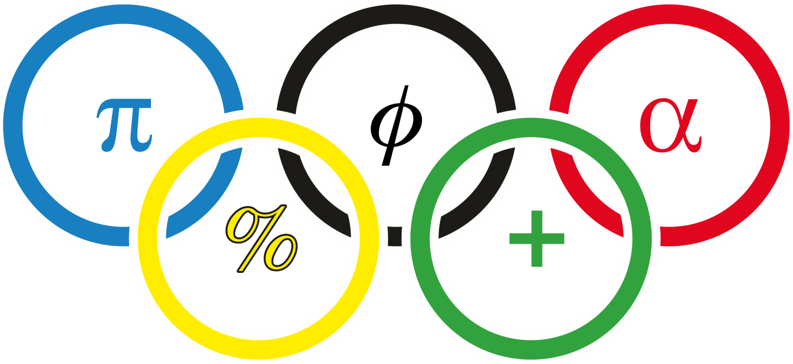
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un medio para la formación matemática

JOHN H. CASTILLO GÓMEZ
CATALINA M. RÚA ALVAREZ

Resolución de Problemas:

Un medio para la formación matemática



John H. Castillo

Catalina M. Rúa

Olimpiadas Regionales de Matemáticas
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño
San Juan de Pasto

Castillo Gómez, John Hermes

Resolución de problemas: un medio para la formación matemática / John H. Castillo, Catalina M. Rúa.-1 ed.- San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2018. SIRED URL sired.udenar.edu.co.

99 p.: incluye bibliografía.
ISBN 978-958-8958-71-2

1. Metodología – enseñanza – matemáticas. 2. Método – enseñanza – matemáticas. 3. Formación profesional – matemáticas. 4. Mejoramiento – Formación matemáticas.

510.7 C352 – SCDD – 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Universidad de Nariño
EDITORIAL UNIVERSITARIA

©
Autores: John Hermes Castillo Gómez y Catalina María Rúa Alvarez
ISBN: 978-958-8958-71-2
Primera edición: Octubre de 2018
Corrección de estilo: Fernando Andrés Benavides Agredo
Diagramación: John Hermes Castillo Gómez y Catalina María Rúa Alvarez
Grupo de investigación: Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM
Impresión: Centro de Publicaciones Universidad de Nariño
Impreso y hecho en Colombia / Printed and made in Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de los autores.

Índice general

Índice de figuras

Índice de tablas

Prefacio

Este texto corresponde a un balance “final” de la Primera Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño (1^{ra} ORM-UDENAR). El lector se preguntará por qué final entre comillas, y la respuesta debería ser clara; para nosotros más que un final es el comienzo de un largo camino que empezó ya hace dos años y que soñamos continúe.

Este proyecto nació a finales de 2013 durante el Primer Seminario Regional de Teoría de Números, que tuvimos la oportunidad de coordinar en diciembre de ese año. En el marco de esta reunión del grupo de investigación, Álgebra, Teoría de Números y Aplicaciones: ERM (ALTENUA), surgió la idea de tener como área invitada en ALTENCOA6-2014 a la *Resolución de Problemas*, evento que se desarrollaría al año siguiente. Este evento tiene como temas centrales: Álgebra, Teoría de Números, Combinatoria y sus Aplicaciones, de ahí su nombre. En ALTENUA, reconocemos la importancia y el rol protagónico que debería jugar la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas, especialmente en nuestro país. Por eso cuando se planteó la idea de tener esta nueva área aceptamos unánimemente la idea y decidimos sacarla adelante. En realidad ese es el nacimiento de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño (ORM-UDENAR), a partir de ese momento empezamos a nutrirnos de los consejos e ideas de diferentes amigos de varias universidades que ya tienen reconocida trayectoria en la organización de certámenes matemáticos como este. Es así como invitamos a amigos de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de las universidades de Antioquia (Mg. Gabriel Uribe), del Valle (Dr. Juan Miguel Velásquez) e Industrial de Santander (Mg. Carlos Arturo Rodríguez); y por supuesto con los consejos de tres grandes profesores y aún mejores personas como son: Mg. Gilberto García Pulgarín, Dr. Carlos Alberto Trujillo Solarte y Dr. Francisco Enríquez, quienes han venido impulsando diferentes olimpiadas matemáticas en el país.

Es así como junto al profesor Omar Andrés Lasso Solis, empezamos a madurar la idea de tener nuestras propias olimpiadas. Utilizamos la palabra NUESTRAS sin el ánimo de querer decir que sean de los tres, por el contrario, el uso de este pronombre posesivo es una invitación a que este proyecto sea de TODOS. Después de meditarlo mucho y sopesar los pros y los contras (por increíble que pueda parecer los contras existen aunque no es el momento de contarlos, después de todo ya se nos han olvidado algunos de ellos), arrancamos presentando el proyecto de investigación *Resolución de Problemas: un medio para la formación matemática*, el cual fue finalmente financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de nuestra institución, mediante el Acuerdo 090 del 20 de noviembre de 2014. Este proyecto arrancó su marcha en febrero de 2015. Vale la pena resaltar que el mismo fue presentado con el aval de los grupos de investigación ALTENUA y GESCAS, y además de nuestra participación, contó con el apoyo del investigador externo Gilberto García Pulgarín.

Como dicen por ahí, mucha agua ha corrido debajo del puente desde ese momento. Inicialmente nos capacitamos, tanto nosotros como nuestros estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Junto a ellos creamos el *Seminario de Resolución de Problemas*, un espacio en el que nos reunimos dos veces a la semana a hablar sobre problemas matemáticos y las estrategias para resolverlos. Este paso fue fundamental para el posterior establecimiento de las ORM-UDENAR. Para nosotros era y sigue siendo fundamental contar con un equipo convencido y que trabaje en pro del desarrollo del proyecto y no podríamos encontrar mejores aliados que nuestros estudiantes y futuros docentes de la región.

Luego de todas las reuniones durante el 2015 y todo lo aprendido (y lo mucho que nos faltaría por aprender y todo lo que aún nos falta) decidimos dar el puntapié inicial. Comenzamos convocando instituciones educativas de toda la región: incluyendo por supuesto Nariño, Cauca y Putumayo. Para eso en el marco del XIII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y con la financiación de nuestro proyecto, ofrecimos una primera capacitación para docentes, estudiantes y por supuesto para nosotros mismos. Ahí contamos con la valiosa participación de Gabriel Uribe Guerra (UDEA) y Francisco Enríquez (UNICAUCA), especialistas en el tema. Además, tuvimos la arriesgada idea de invitar a los Coordinadores de las Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico (OMPR). En realidad en ALTENCOA6-2014 ya habíamos contado con la visita del Dr. Arturo Portnoy, y pensábamos que podríamos contar con al menos uno de los dos coordinadores. Sin embargo, para nuestra sorpresa fue el Dr. Luis Fernando Cáceres quien nos respondió diciendo que no solamente aceptaban venir, sino que la OMPR financiaría la visita de uno de ellos. ¡Qué felicidad!

Así en mayo del 2016 contamos con su participación; actividad que nos dejó grandes enseñanzas y un impulso aún mayor para continuar hacia la primera versión de nuestro certamen. Como resultado agregado a esta capacitación, resultaron más instituciones interesadas en participar: pasamos a tener 26 instituciones educativas y cerca de 950 estudiantes inscritos. Ahora la expectativa era mayor. Aunque no debemos olvidar el escepticismo que algunas veces escuchamos en nuestro trasegar, y es que oíamos decir ¿qué piensan hacer?, ¿olimpiada de matemáticas?, ¿qué es eso?, ¿quién participará, pues a nadie le gusta la matemática? Nuestra respuesta no podría ser mejor: trabajar más fuerte para dar a conocer el proyecto.

Junto a cada institución educativa aparece una figura muy importante en todo este proceso como lo es la del *Profesor Coordinador*, no solo porque es quien realiza el proceso de inscripción de los estudiantes (que ya por si solo sería un valioso aporte), sino por su importante influencia en todo el trabajo posterior para estar pendientes de la logística en sus instituciones y sobre todo mantener el entusiasmo académico en sus estudiantes. A ellos una vez más muestro reconocimiento, ver Tabla 1.

La Primera Fase estaba planeada para el 8 de junio, pero la misma tuvo que ser aplazada, pues como recordará el lector por esos días enfrentábamos un paro campesino, que nos trajo incertidumbre. Pero respondimos, pienso ahora, con la firmeza que necesitaba la situación. Entramos en contacto con los profesores coordinadores de cada institución educativa, explicamos la situación y de paso conocimos un poquito más de nuestra región y del impacto social alrededor del paro. Finalmente, la primera fase se llevó a cabo el día jueves 16 de junio.

Sin mayores inconvenientes siguieron la segunda fase y la fase final. A la par entre estas fases se realizaron capacitaciones en los municipios de Pasto, Túquerres, Ipiales y Olaya Herrera, y fueron una oportunidad sin igual, para conocer de viva voz el impacto que estaban causando las ORM-UDENAR. Nos dimos cuenta que pasaron a transformar el ambiente educativo de los participantes. Escuchamos diversas historias sobre superación personal de nuestros estudiantes y profesores, y de cómo los estudiantes eran los principales impulsores de nuestra olimpiada, no solamente participando sino mostrando las actividades a sus compañeritos e incentivándolos a resolverlas.

Tal vez deberíamos terminar este escrito dando un resumen de los resultados y los ganadores de medallas, ver tablas 3 y 4, sin embargo preferimos dedicar a resaltar que NUESTROS GANADORES son todos los participantes: estudiantes y profesores de las instituciones educativas, principalmente por haber asumido el reto de competir. Para nosotros esta fue una excusa para aproximarnos a ellos y de paso mostrarles una cara tal vez más amena de la matemática, esperamos que así haya sido. Le dejamos al lector de paso la invitación para la 2da ORM-UDENAR y a que visite nuestra página `http://orm.udenar.edu.co/`, así de paso se entera un poco más del proyecto y tal vez se anime a resolver algunos de los problemas ahí planteados.

John H. Castillo y Catalina M. Rúa
Comité Organizador ORM-UDENAR
San Juan de Pasto, octubre de 2016.

Introducción

En la educación básica primaria y secundaria es todo un reto para los profesores y directores de las instituciones educativas, fomentar y desarrollar el placer de los estudiantes por el estudio de las matemáticas. Siendo esta materia tan importante en la vida cotidiana, que ayuda a desarrollar destrezas y habilidades de pensamiento lógico, no se encuentra en el estatus de aceptación que pueden a llegar a tener las otras áreas del conocimiento, tales como literatura, arte, ciencias sociales, informática, entre otras. Es por eso, que se están desarrollando diferentes proyectos pedagógicos que buscan estimular el estudio de las matemáticas.

Consideramos de gran importancia, fomentar y apoyar el interés de estudiantes de secundaria que estén atraídos en profundizar y desarrollar destrezas matemáticas en la resolución de problemas. Así es necesario presentar metodologías diferentes para mostrar otro aspecto más creativo de la matemática en los salones de clase, y en consecuencia incentivar a los estudiantes por su estudio. Por esto se ve la necesidad de motivar a docentes de secundaria y estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Nariño como futuros docentes, a innovar en nuevas metodologías de enseñanza de las matemáticas basadas en la resolución de problemas como los presentados en olimpiadas matemáticas, pruebas saber y en otras tales como las realizadas en las pruebas del Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA).

La resolución de problemas pone a prueba la capacidad intelectual, curiosidad, creatividad y ayuda a desarrollar y potenciar las habilidades de razonamiento de las personas. Al resolver un problema matemático por merito propio, se puede experimentar satisfacción y la sensación de triunfo, además se tiene la posibilidad de solucionar y crear problemas diferentes a partir del problema ya resuelto. Esto nos motivó a investigar técnicas y metodologías para la resolución de problemas que serán compartidas con docentes de matemática del nivel de básica secundaria y por medio de ellos a los estudiantes.

La resolución de problemas, como el matemático G.H. Wheatley lo definió, "es lo que haces cuando no sabes qué hacer". Cuando se habla como tal de la resolución de problemas matemáticos se hace referencia al empleo de estrategias y habilidades que combinadas encuentran una forma de llegar a una posible solución. En el caso de problemas matemáticos como los que se presentan en olimpiadas matemáticas, los estudiantes experimentan la sensación de fortaleza y satisfacción al determinar una solución; además esta clase de problemas pueden despertar el gusto por el pensamiento independiente y proporcionar una visión más amplia de aplicación de las matemáticas.

Las propuestas para resolución de problemas dadas por G. Pólya en su libro *How to solve it*, Pólya (1945), hoy en día continúan siendo una referencia importante en esta área. Además influyen en una forma diferente que puede ser empleada con los estudiantes, donde se estimula al pensamiento y raciocinio propio de cada uno de ellos, dejando atrás la antigua metodología de memorización.

Con la idea de poner en práctica las metodologías estudiadas en el proyecto nacen las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño (ORM-UDENAR), como un espacio de sana competencia, donde los estudiantes y profesores de la región disfruten y aprendan resolviendo problemas matemáticos. Este evento tiene como objetivos:

- Contribuir al mejoramiento de la formación matemática en la región de influencia de la Universidad de Nariño.
- Promover un espacio de sana competencia, donde los estudiantes y profesores de la región disfruten y aprendan resolviendo problemas matemáticos.
- Motivar a los estudiantes de básica secundaria de la región a participar en olimpiadas matemáticas regionales, nacionales e internacionales.
- Mejorar el nivel académico en el área de matemática de los integrantes de los Clubes de Matemáticas.

En esta primera versión de las ORM-UDENAR se dividieron los participantes en dos niveles: **Nivel I**, estudiantes de sexto y séptimo grado de bachillerato y **Nivel II**, estudiantes de octavo y noveno grado de bachillerato. Esta olimpiada contó con la participación de aproximadamente 950 estudiantes de diferentes instituciones educativas del departamento de Nariño y del departamento de Putumayo; en la Tabla 1 presentamos un resumen de las instituciones participantes y el nombre del Profesor Coordinador de cada una de ellas.

No	Institución Educativa	Profesor Coordinador	Municipio
1	I.E. Litoral Pacífico	Erki Saya	Olaya Herrera
2	I.E.M. Ciudadela de Pasto	Gloria del Carmen Médicis	Pasto
3	I.E. Agropecuaria Inga de Aponte	Marino Arturo Adarme	El Tablón de Gómez
4	I.E. Agropecuaria Bomboná	Loreyn Gabriela Erazo	Consacá
5	I.E. Instituto Teresiano	Elizabeth Mera Cuaces	Túquerres
6	I.E. Los Arrayanes	María Elsa Zúñiga Chapuel	Córdoba
7	Instituto Bet-El de Pasto	Oscar Mauricio Chilanguad	Pasto
8	I.E. Tomás Arturo Sánchez	Claudia Stephania Naranjo	Pasto
9	I.E. Colegio Técnico Sucre	Jairo Cabrera	Colón, Putumayo
10	I.E.M. Ciudad de Pasto - Tarde	Andrea Revelo Ceballos	Pasto
11	I.E. Sucre	Elena Ortega Grijalba	Ipiales
12	I.E. Nuestra Señora del Carmen	Jaime Oswaldo Enríquez	Tangua
13	I.E. San Bartolomé	Elianeth Guerrero Cárdenas	Córdoba
14	I.E. Luis Eduardo Mora Osejo	Arnovia Manduvy Gómez	Pasto
15	I.E.M. Ciudad de Pasto - Mañana	Yaneth Milena Mora	Pasto
16	Instituto Jorge Eliecer Gaitán	Javier García Ordóñez	Pasto
17	Liceo de la Universidad de Nariño	Fernando Coral	Pasto
18	I.E. Luis Carlos Galán	Johana Lorena Ordóñez	Linares
19	Instituto Champagnat	Laura Karola Salazar Paz	Pasto
20	I.E. Sagrado Corazón de Jesús	José Eduardo Benavides	San Lorenzo
21	I.E. Filipense	Edgar Caicedo Hernández	Ipiales
22	I.E. Instituto Técnico Girardot	Gema del Carmen Ortega	Túquerres
23	I.E. Puenes	Patricia Aux Narváez	Ipiales
24	I.E. Policarpa Salavarrieta	Luis Armando Andrade	Samaniego
25	I.E.M. Técnico Industrial	Luis Felipe Martínez	Pasto

Tabla 1: Instituciones Educativas participantes 1ra ORM-UDENAR.

El cronograma con el que se realizó la 1ra ORM-UDENAR se presenta en la Tabla 2 y cabe resaltar que las dos primeras fases de esta olimpiada se desarrollaron de manera virtual en cada una de las instituciones participantes a través de la página web http://orm.udenar.edu.co/

Durante los días 14 y 15 de octubre se desarrollaron la FASE FINAL y la PREMIACIÓN, actividad que contó con la participación de los estudiantes que clasificaron a la fase final de este certamen. Inicialmente, en la mañana del día 14 se realizó la bienvenida institucional y presentaciones a cargo del Seminario de Resolución de Problemas en los auditorios del Bloque Tecnológico y de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. En la tarde del día 14 de octubre entre las 2 y 5 pm, en la sede central de la Universidad de Nariño, se llevó a cabo el examen final con la participación de 70 estudiantes de nivel I y 89 estudiantes de nivel II, procedentes de las 25 Instituciones Educativas participantes. El sábado se realizó la premiación de los ganadores en el Paraninfo de la Universidad de Nariño con una masiva participación de estudiantes, docentes y padres de familia.

Los nombres de los medallistas en esta primera versión se presentan en las tablas 3 y 4, una vez más les enviamos nuestras felicitaciones.

Este libro se divide en tres partes. En la primera se explica lo que se entiende por resolución de problemas y se presenta la metodología de George Pólya. Luego la segunda se destina a la presentación por nivel de los problemas que se presentaron en el desarrollo de la 1ra ORM-UDENAR, mientras que en la tercera se dan las soluciones de cada problema. Recalcamos que las soluciones que presentamos, no necesariamente son las únicas, y por este motivo invitamos al lector a intentar resolver primero el problema.

Este texto hace parte de los resultados del proyecto de investigación “Resolución de problemas: un medio para la formación matemática”, aprobado mediante el Acuerdo 090 de noviembre 20 de 2014 y financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño.

Fase	Fecha
Inscripciones	1 de marzo al 1 de mayo de 2016
Capacitación profesores	18 al 20 de mayo de 2016
Primera fase	8 de junio de 2016
Segunda fase	7 de septiembre de 2016
Examen fase final	14 de octubre de 2016
Premiación	15 de octubre de 2016

Tabla 2: Cronograma 1^{ra} ORM-UDENAR.

Distinción	Nombres	Institución Educativa	Municipio
Medalla de oro	Sebastian Tibanta Rodríguez	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
	Karen V. Carrera Paz	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
Medalla de plata	Cristhian A. Zambrano Yela	Policarpa Salavarrieta	Samaniego
	Sergio M. Alvarez García	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
Medalla de bronce	Laura S. Buesaquillo Montilla	Liceo UDENAR	Pasto
	Santiago Gómez Romero	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto
Diploma	Julieth D. Figueroa Cerón	I.E.M. Ciudad de Pasto	Pasto

Tabla 3: Medallistas Nivel I, 1^{ra} ORM-UDENAR.

Distinción	Nombres	Institución Educativa	Municipio
Medalla de oro	Rosa M. Cifuentes Ramírez	I.E. Comercial Litoral Pacífico	Olaya Herrera
	Stiven C. Solano Caez	I.E. Agropecuaria Bomboná	Consacá
Medalla de plata	David E. Mendoza Yacelga	I.E. Sucre	Ipiales
	Marlon A. Bedoya Londoño	I.E. San Bartolomé	Córdoba
Medalla de bronce	Isabela Cuayal Pineda	Liceo UDENAR	Pasto
	Johana Muñoz Guerrero	I.E. Nuestra Señora del Carmen	Tangua
Diploma	Sarah M. Huertas Camacho	Instituto Bet-El de Pasto	Pasto

Tabla 4: Medallistas Nivel II, 1^{ra} ORM-UDENAR.

I Resolución de problemas

1. ¿Por qué solucionar problemas matemáticos?

Resolver problemas es una tarea a la que nos enfrentamos casi todos los días tanto en nuestra vida personal como profesional. Pero vale la pena definir que entenderemos por problema. En el diccionario de la Real Academia Española (RAE) un problema se define de la siguiente manera.

Del lat. *problēma*, y este del gr. $\pi\rho\acute{o}\beta\lambda\nu\mu\alpha$ *próblēma*.

1. m. Cuestión que se trata de aclarar.
2. m. Proposición o dificultad de solución dudosa.
3. m. Conjunto de hechos o circunstancias que dificultan la consecución de algún fin.
4. m. Disgusto, preocupación.
5. m. Planteamiento de una situación cuya respuesta desconocida debe obtenerse a través de métodos científicos.

Cada una de estas definiciones puede aplicarse, por supuesto dependiendo de la situación en la que estemos; y es que un problema puede ser algo molesto como lo dice la cuarta definición, pero aquí en este texto lo veremos como una oportunidad para aprender algo nuevo, en general este es el enfoque que se le da a este concepto en matemáticas. De esta manera es necesario que establezcamos que entenderemos por problema matemáticamente, y vale la pena que citemos las definiciones dadas por algunos de entre los muchos autores que se han aproximado a este tema. Según (Cai & Lester, 2010, p. 1) un problema es considerado como una tarea que tiene el potencial para proporcionar los retos intelectuales que pueden mejorar el desarrollo matemático de los estudiantes. Es decir, es una actividad que no sabemos a simple vista como resolver, pero que al enfrentarse a ella el estudiante tendrá la posibilidad de mejorar su entendimiento de la matemática. Por tal motivo ante un problema matemático debemos realizar un análisis cuidadoso, el cual en la mayoría de los casos conduce a su solución. Así mismo, Callejo (1998) afirma:

> El término problema se suele reservar a veces para designar actividades en el curso de las cuales el alumno debe buscar, hacer frente a situaciones nuevas y establecer relaciones, y en las que el profesor trata de suscitar la curiosidad del estudiante y de motivarle para que persevere en la investigación. (p. 23)

Tal vez esta concepción esté más cerca de la quinta definición dada por la RAE, pero puede llegar a confundirnos; así que debe aclararse que “problemas” no son solo aquellos a los que se enfrentan los matemáticos profesionales, sino también cuestiones más “sencillas” que se proponen fuera del ámbito de la investigación.

Muchas veces confundimos el concepto de problema con el de ejercicio, quizás es necesario aclarar esta diferencia. Esta se puede clarificar haciendo la distinción entre ejercicio (problema rutinario) y problema (problema no rutinario) atendiendo a distintos aspectos: el comportamiento que debe seguir el alumno para llegar a la solución, el objetivo que persigue el profesor, el tiempo a emplear y la dimensión afectiva (Callejo, 1998). En cuanto al primer aspecto, Callejo (1998) resalta “cuando se trata de un ejercicio basta que aplique mecánicamente conocimientos ya adquiridos; en cambio, si se trata de un problema es necesario que se familiarice con la situación, busque, relacione, etc., hasta elaborar una estrategia que le conduzca a la solución” (p. 23-24).

Es necesario resaltar que finalmente la diferencia entre ejercicio y problema es muy subjetiva y depende en gran parte de las experiencias anteriores de quien está buscando la solución del ejercicio o del problema; esto es, lo que es un ejercicio para alguien puede ser para otra persona un problema y viceversa. En este sentido por supuesto juega mucho la experiencia que se tenga resolviendo problemas matemáticos. Cabe resaltar que tanto los problemas como los ejercicios son importantes en la formación matemática de un estudiante, la aplicación de unos u otros depende de cual sea nuestro objetivo. Si se pretende que el estudiante practique una técnica recientemente aprendida deberíamos decantarnos por escoger ejercicios, mientras que si se desea que el estudiante reflexione, piense, analice críticamente, investigue etc., nuestra escogencia deberían ser los problemas.

Vale la pena resaltar que estas dos actividades deben jugar su propio rol y podemos combinarlas en el aula de clases, pero definitivamente deberíamos darle el papel protagónico a la resolución de problemas si lo que buscamos es llamar la atención de nuestros estudiantes y despertar en ellos el amor por las matemáticas. Es tan importante el papel que desempeña la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que es el primero de los cinco procesos generales que se contemplan en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional (MEN), quien afirma que:

> Este es un proceso presente a lo largo de todas las actividades curriculares de matemáticas y no una actividad aislada y esporádica; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problema proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Estos problemas pueden surgir del mundo cotidiano cercano o lejano, pero también de otras ciencias y de las mismas matemáticas, convirtiéndose en ricas redes de interconexión e interdisciplinariedad. (Ministerio de Educación Nacional, 2006, p. 52)

Incluso en estos estándares se sugiere que se debería privilegiar la resolución de problemas en lugar de ejercicios, al manifestar que:

> Más bien que la resolución de multitud de problemas tomados de los textos escolares, que suelen ser sólo ejercicios de rutina, el estudio y análisis de situaciones problema suficientemente complejas y atractivas, en las que los estudiantes mismos inventen, formulen y resuelvan problemas matemáticos, es clave para el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas. (MEN 2006, p. 52)

Es necesario agregar que no necesariamente todos los problemas son buenos para alcanzar nuestro propósito. Esto es algo casi natural, puesto que se debe tener en cuenta el nivel educativo del estudiante, los temas que conoce previamente y principalmente sus habilidades e intereses. Entonces, ¿cómo es un problema bueno? o ¿qué características debe tener un problema interesante? Según Lappan & Phillips (1998), un problema debe dirigir a los estudiantes a investigar ideas matemáticas importantes y maneras de pensamiento encaminadas a alcanzar las metas de aprendizaje, además de satisfacer algunos de los siguientes criterios:

1. El problema involucra matemática útil e importante.
2. El problema requiere un pensamiento de más alto nivel y el uso de estrategias de resolución de problemas.
3. El problema contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes.
4. El problema crea una oportunidad para que el profesor evalúe lo que sus estudiantes están aprendiendo y descubra donde están experimentando dificultades.
5. El problema puede ser abordado por los estudiantes en varias formas utilizando diferentes estrategias de solución.
6. El problema tiene varias soluciones o permite diferentes decisiones o posiciones que deben tomarse y defenderse.
7. El problema fomenta la participación del estudiante y el discurso.
8. El problema se conecta a otras ideas matemáticas importantes.
9. El problema promueve el uso hábil de las matemáticas.
10. El problema ofrece la oportunidad de practicar habilidades importantes.

No es razonable esperar que todos los problemas que elige un maestro deban satisfacer todos los diez criterios; es mejor que el problema aplicado por el profesor tenga los criterios que el maestro desee transmitir a sus estudiantes. Claro está que esto dependerá de los objetivos que el maestro tenga para su clase. Sin embargo, Lappan & Phillips (1998) afirman que los primeros cuatro criterios deberían ser considerados esenciales en la selección de todos los problemas, y que el valor real de estos criterios es que proporcionan a los maestros pautas para tomar decisiones sobre cómo lograr que la resolución de problemas sea un aspecto central de su enseñanza.

Uno de los objetivos de este libro es precisamente ser un banco de problemas y servirle a los profesores y estudiantes de nuestra región interesados en encontrar buenos problemas. Los problemas que se presentarán aquí hacen parte de la Primera Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño. En la próxima sección damos una rápida descripción de la metodología propuesta por George Pólya. Afortunadamente, existen muchas investigaciones en las cuales el lector interesado podrá encontrar mayor información y profundizar más en este interesante tema. Entre las muchas que se pueden consultar en la literatura destacamos las siguientes: Andreescu *et al.* (2007), Cai & Lester (2010), D' Angelo & West (2000), Dromey (1982), Durand-Guerrier *et al.* (2010), Gúsiev *et al.* (1989), Lappan & Phillips (1998), Larson (1983), Pólya (1965a), Rassias (2010), Schoenfeld (1985, 2013), Silver (1985), Solow (2014), Zeitz (2007).

1.1 La metodología de George Pólya

En su libro *Cómo plantear y resolver problemas*, versión en español de *How to solve it: a new aspect of mathematical method*, G. Pólya sugiere los siguientes pasos para resolver problemas matemáticos.

- **Entender el problema**: ¿cuál es la incógnita?, ¿cuáles son los datos?
- **Concebir un plan**: ¿se ha enfrentado a un problema similar?, si no puede resolver el problema original ¿podría resolver uno más sencillo?, ¿podría resolver un problema más general?, ¿podría enunciar el problema de otra forma?, ¿puede resolver una parte del problema?, ¿está utilizando todos los datos dados en el problema? Haga una lluvia de ideas, tal vez sea bueno colaborar con otros compañeros.
- **Ejecutar el plan**: al ejecutar su plan de solución compruebe cada uno de los pasos.
- **Examinar la solución obtenida**: ¿puede verificar el razonamiento realizado?, ¿puede obtener el resultado en forma diferente?

Estas fases pueden ser acompañadas de preguntas que ayuden en el proceso de buscar la solución de un problema. No es posible afirmar que aplicar estas fases siempre lleven a una solución precisa de cualquier problema, pero seguramente al aplicarlas lograremos familiarizarnos con el problema, con los datos que nos proporciona y especialmente con lo que nos pregunta.

1.2 Biografía de George Pólya

George Pólya nació en Budapest, Hungría, el 13 de diciembre de 1887 y murió en Palo Alto, California, Estados Unidos el 7 de septiembre de 1985. Como estudiante asistió a una escuela pública y tuvo un buen desempeño académico. Era físicamente fuerte y en su juventud participó en varios deportes. Su escuela tenía un fuerte énfasis en el aprendizaje memorístico, una técnica que encontró tediosa en ese momento, pero que después encontraría útil. En su juventud no estaba interesado en matemáticas, hecho que se resalta por no haber querido participar en la *Eötvös Competition*[1] como muchos de los matemáticos húngaros contemporáneos.

Se graduó de la Markó Street Gymnasium en 1905, entre los cuatro mejores estudiantes de su clase y ganó una beca para estudiar en la Unviersidad de Budapest. Comenzó estudiando leyes, siguiendo el camino de su padre, pero lo encontró aburrido y pasó a estudiar lenguaje y literatura. Especialmente, se interesó en Latín y Húngaro, donde habría conocido muy buenos profesores. Su profesor de esta última, el Prof. Alexander, le sugirió que siguiera cursos de física y de matemáticas para mejorar su formación filosófica. Este consejo marcó para siempre su carrera. Las magníficas lecciones de Física de Loránd Eötvös, y las no menos excelentes de Matemáticas de Leopold (Lipót) Fejér influyeron decisivamente en la vida y obra de Pólya. Su crecimiento académico fue fuertemente influenciado por el legendario matemático L. Fejér, quien poseía un especial sentido del humor, y además fue profesor de Frigyes Riesz, Vera Sós, Paul Erdös, Pál Turán y John (Janos) von Neumann, entre otros. Cuando se le preguntaba cómo había llegado a ser matemático, solía decir, medio en broma, medio en serio: “No era lo suficientemente inteligente para ser físico, y demasiado para ser filósofo, así que elegí matemáticas, que es una cosa intermedia” (Albers & Alexanderson, 2008, p. 253).

Rápidamente, Pólya pasó a concentrarse en sus estudios en matemáticas y en 1910 terminó con los cursos del doctorado, solamente restando presentar su tesis. Pasó un año en Viena, Austria y retornó a Budapest entre 1911 y 1912 para sustentar su disertación doctoral, donde conoció a Gábor Szegö, uno de sus mayores colaboradores. Fue profesor de matemáticas desde 1914 a 1940 en la Escuela Politécnica Federal de Zurich, Suiza. En 1940, G. Pólya y su familia dejaron Suiza para trabajar inicialmente en la Universidad de Brown y luego de una corta estadía en el Smith College se unió en 1942 a la Universidad de Stanford todo esto en Estados Unidos. Se retiró en 1954, pero continuó enseñando hasta 1978. Fue elegido dos veces como becario de la Fundación Rockefeller, la primera en 1924 por recomendación de Godfrey H. Hardy y la segunda en 1933 pasando una temporada en Princeton. Publicó mas de 250 artículos de investigación en varios idiomas, así como libros muy importantes. Hizo contribuciones en combinatoria,

[1] La competición matemática más antigua del mundo, ahora conocida como la *Kürschák Mathematical Competition* fundada en el año de 1894.

teoría de números, análisis numérico y probabilidad, pero también es reconocido por su dedicación a la heurística[2] y la educación matemática.

Al parecer su interés acerca de la resolución de problemas se vio inicialmente reflejada en su libro *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I*, el cual fue posteriormente actualizado y traducido a una versión en inglés llamada *Problems and Theorems in Analysis I* (Pólya & Szegő, 1978). La importancia de este trabajo no solamente radica en que inspiró a otros matemáticos a estudiar los problemas planteados en él, construyendo a partir de ellos nuevas teorías, sino en que fue innovador en su época porque propone una serie de problemas organizados principalmente por método de solución.

Entre sus libros más reconocidos, se resalta su serie de trabajos relacionados con la resolución de problemas, la cual listamos a continuación.

- ***Cómo plantear y resolver problemas***: publicado originalmente en inglés en 1945 como *How to solve it: a new aspect of mathematical method* (Pólya, 1945). Es considerado por los especialistas en la resolución de problemas como el texto guía en el área, ya que muchos de los trabajos que surgieron posteriormente están influenciados directa o indirectamente por él. La primera traducción al español fue hecha por la Editorial Trillas de México en 1965. Tiene múltiples ediciones y ha sido traducido a más de 15 idiomas.

- ***Matemáticas y razonamiento plausible***: este libro fue publicado en 1954 y está dividido en dos partes a saber: inducción y analogía en matemáticas la primera y la segunda patrones de inferencia plausible (Pólya, 1954a,b). En estos trabajos G. Pólya reconoce la matemática como un ciencia soportada por las demostraciones formales, pero que sus conjeturas están sustentadas en el razonamiento plausible, esto es el razonamiento resultante de las buenas sospechas o adivinanzas. Así Pólya (1954a) afirma que:

    > Las matemáticas son miradas como una ciencia demostrativa. Aunque este es únicamente uno de sus aspectos. Las matemáticas se presentan finalmente puramente demostrativas, consistente únicamente de pruebas matemáticas. Sin embargo las matemáticas se asemejan en su construcción a cualquier otra rama del conocimiento humano. Tienes que adivinar un teorema antes de demostrarlo, debes adivinar la idea de la prueba antes de escribirla detalladamente. Debes combinar observaciones y

[2] En algunas ciencias, manera de buscar la solución de un problema mediante métodos no rigurosos, como por tanteo, reglas empíricas, etc.

seguir analogías; tienes que tratar una y otra vez. El resultado del trabajo creativo de un matemático es razonamiento demostrativo, pero la prueba se descubre por medio de razonamiento plausible, por medio de intuición. (p. vi).

- ***Mathematical discovery: on understanding, learning and teaching problem solving***: publicado en 1962 en una edición compuesta por dos volúmenes (Pólya, 1962, 1965b). Lastimosamente, parece no haber sido publicado en español pero si ha sido traducido a otros idiomas como por ejemplo francés, alemán, húngaro, italiano, japonés, polaco, rumano y ruso. En su prefacio G. Pólya afirma que: "resolver problemas es una arte práctica, como nadar o esquiar, o tocar el piano: solamente puedes aprenderlo por imitación y práctica. Este libro no puede ofrecerte una llave mágica para abrir todas las puertas y resolver todos los problemas, pero puede ofrecerte buenos ejemplos para imitar y muchas oportunidades para practicar: si deseas aprender a nadar tienes que entrar al agua, y si quieres aprender a resolver problemas tienes que resolver problemas". Además en él, G. Pólya sugiere los diez mandamientos para los profesores, los cuales enumeramos a continuación:

  1. Interésese en su materia.
  2. Conozca su tema.
  3. Conozca acerca de las maneras de aprender: la mejor manera de aprender cualquier cosa es descubrirlo por usted mismo.
  4. Intente leer las caras de sus estudiantes, trate de ver sus expectativas y dificultades, póngase en su lugar.
  5. Dé a sus estudiantes no solo información, sino el conocimiento de cómo hacerlo, promueva actitudes mentales y el hábito del trabajo metódico.
  6. Permítales aprender a conjeturar.
  7. Permítales aprender a comprobar.
  8. Advierta que los rasgos del problema que tiene a la mano pueden ser útiles en la solución de problemas futuros: trate de sacar a flote el patrón general que yace bajo la presente situación concreta.
  9. No muestre todo el secreto a la primera: deje que sus estudiantes hagan sus conjeturas antes; déjelos encontrar por ellos mismos tanto como sea posible.
  10. Sugiérales; no haga que se lo traguen a la fuerza.

Una biografía más amplía incluyendo un listado más completo de la bibliografía de George Pólya puede encontrarse en Alexanderson (2000), Chung *et al.* (1987).

II

Problemas
1ra ORM-UDENAR

2. Problemas Nivel I (Sexto y Séptimo)

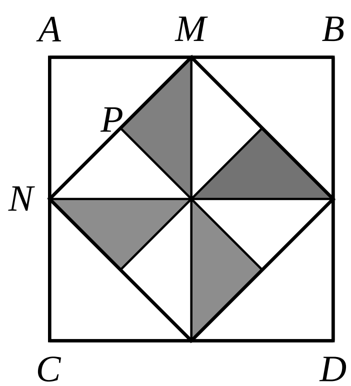
2.1 Primera fase

Preguntas de selección múltiple

1. En una clase de 29 alumnos, hay 3 niñas más que niños. ¿Cuántas niñas hay en la clase?

   a) 6 b) 13 c) 16 d) 19 e) 29

2. En la siguiente figura $ABCD$ es un cuadrado de 10 cm de lado, M, N y P son los puntos medios de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{MN}$, respectivamente. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



   a) 50 cm^2 b) 25 cm^2 c) 12.5 cm^2 d) 7.25 cm^2 e) 8 cm^2

3. Si del calendario de Marzo tacho todas las fechas en las que aparezcan cifras pares, ¿cuántas fechas quedan?

   a) 10 b) 11 c) 12 d) 15 e) 16

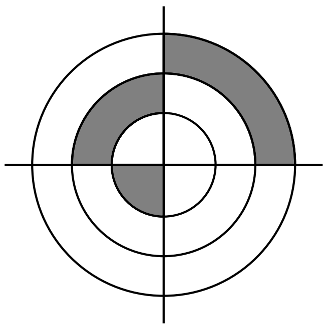
4. Daniel y Laura estudian en el mismo colegio. En las mañanas para ir a estudiar, Daniel puede tomar dos caminos recorriendo $\frac{7}{8}$ km por uno o por el otro $\frac{13}{15}$ km. A su vez, Laura puede caminar $\frac{3}{7}$ km por el bosque o $\frac{2}{9}$ km por la carretera. Si cada uno toma el camino de menor distancia, ¿cuánto recorren entre los dos?

   a) $\frac{13}{15}$ km b) $\frac{49}{45}$ km c) $\frac{17}{9}$ km d) $\frac{2}{9}$ km e) $\frac{75}{56}$ km

5. En un salón de clase se conformaron dos clubes: el club de matemáticas y el club de inglés. Si el 30 % de los estudiantes del club de matemáticas está en el club de inglés y de 15 estudiantes que están en el club de inglés 3 no asisten al club de matemáticas, ¿cuántos estudiantes hay en el club de matemáticas?

   a) 80 b) 20 c) 12 d) 40 e) 30

6. En la siguiente figura se tienen tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si el radio del círculo más pequeño es 1 y las tres regiones sombreadas tienen la misma área, ¿qué valor se obtiene si sumamos el área de las tres circunferencias?

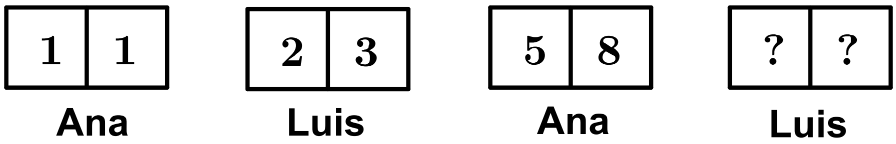


   a) 3π b) 5π c) 6π d) 12π e) π

7. Lucía y su madre nacieron en enero. El 8 de junio de 2016, Lucía suma su año de nacimiento, el de su madre, su edad y la de su madre. ¿Qué resultado obtiene?

   a) 2016 b) 4029 c) 4030 d) 2017 e) 4032

8. Ana y Luis juegan un dominó especial como se muestra abajo.



¿Qué ficha debe poner Luis para continuar el juego?

a) 20 | 8 b) 13 | 21 c) 15 | 10

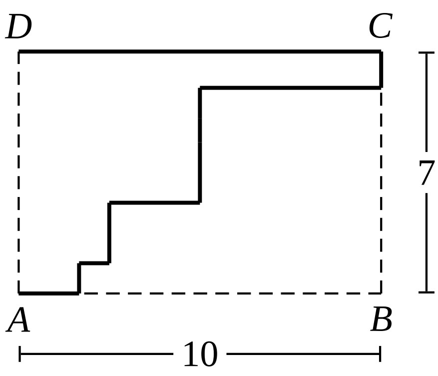
d) 11 | 9 e) 5 | 13

9. Juan, Pablo y Carlos son deportistas. Uno de ellos juega baloncesto, otro fútbol y el tercero voleibol, pero no necesariamente en ese orden. El futbolista no tiene hermanos ni hermanas, y es el más joven de los tres. Carlos es mayor que el jugador de baloncesto y es amigo de la hermana de Juan. ¿Cómo se llama el jugador de baloncesto?

a) Juan b) Pablo c) Carlos

d) Pablo o Carlos e) No se puede saber

10. Un rectángulo *ABCD* tiene sus lados de longitudes 10 m y 7 m. Un cuy va desde *A* hasta *D* siguiendo el camino marcado con trazo grueso en la figura. ¿Cuál es la longitud que recorrió el cuy?



a) 44 m b) 27 m c) 34 m d) 50 m e) 17 m

11. Tenemos tres cajas y tres objetos; una moneda, un botón y un dado. Cada caja contiene un objeto. Se sabe que:

- La caja verde está a la izquierda de la caja azul.
- La caja que tiene la moneda está a la izquierda de la caja que tiene el dado.
- La caja roja está a la derecha de la caja que tiene el botón.
- La caja que tiene el dado está a la derecha de la caja roja.

La moneda está en la caja:

a) Roja b) Verde c) Azul

d) Por fuera de las cajas e) No se puede saber

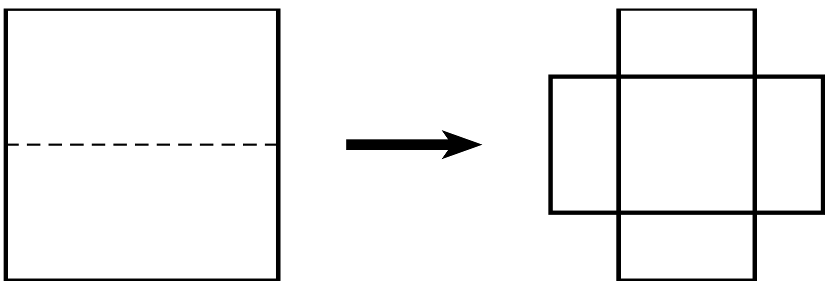
12. La cabina de pasajeros de un avión tiene 108 asientos. Hay un asiento vacío por cada dos asientos ocupados. ¿Cuántos pasajeros hay en el avión?

a) 36 b) 42 c) 56 d) 72 e) 74

13. Si tres martes de un mes caen en fechas pares, ¿qué día de la semana será el día 21 de ese mes?

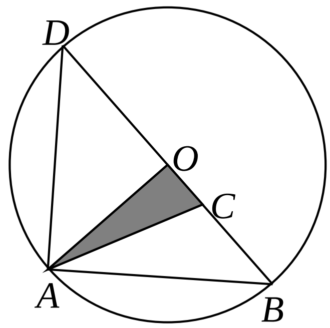
a) Miércoles b) Jueves c) Viernes
d) Sábado e) Domingo

14. Un cuadrado de perímetro 48 cm se corta en dos rectángulos iguales, que al sobreponerlos forman una cruz, como se ve en la figura. ¿Cuál es el perímetro de la cruz?



a) 24 cm b) 30 cm c) 48 cm d) 60 cm e) 72 cm

15. En la figura el triángulo $\triangle ABC$ está dentro de la circunferencia con centro en O y radio 3 cm, $\overline{BC}$ es un tercio del diámetro y además el segmento $\overline{OA}$ es perpendicular al segmento $\overline{BD}$.



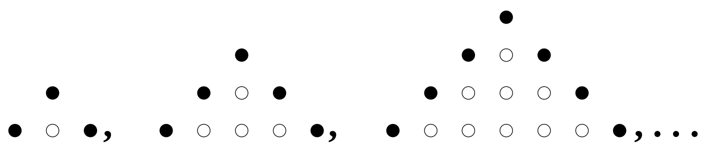
El área del triángulo $\triangle AOC$ es:

a) 1.5 cm^2 b) 4.5 cm^2 c) 5 cm^2 d) 2 cm^2 e) 3 cm^2

2.2 Segunda fase

Preguntas de selección múltiple

1. Considere la siguiente sucesión de figuras:



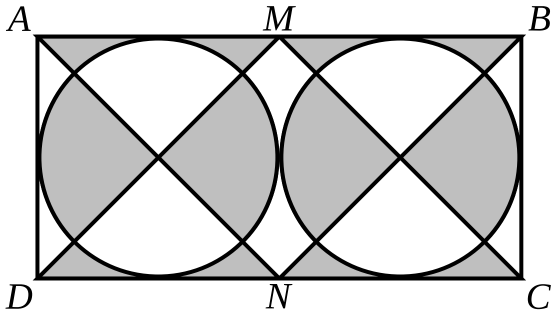
¿Cuántos círculos negros tendrá la figura 2016 en la sucesión?

a) 4033 b) 4031 c) 4037 d) 2016 e) 2017

2. En un parqueadero hay 20 carros. Todos los carros son rojos o blancos, y también todos son de dos puertas o de cuatro puertas. 12 de ellos son rojos, 15 son de cuatro puertas, y 4 son blancos de dos puertas. ¿Cuántos carros son rojos de cuatro puertas?

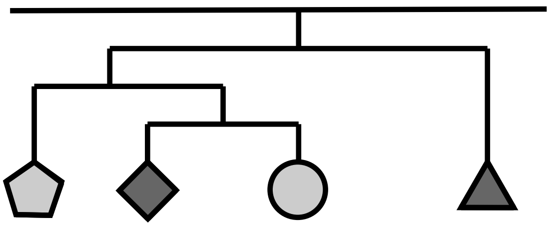
a) 10 b) 11 c) 20 d) 18 e) 12

3. $ABCD$ es un rectángulo y M y N son los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente. Las circunferencias son tangentes a los lados del rectángulo y tangentes entre sí. Si $\overline{AB}$ es 10 cm, el área de la región sombreada es:



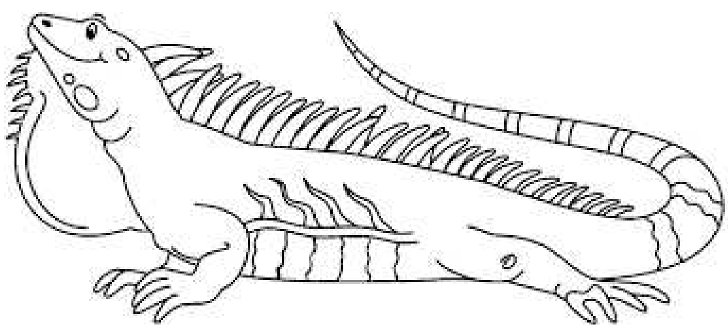
a) 30 cm^2 b) 5 cm^2 c) 20 cm^2 d) 50π cm^2 e) 25 cm^2

4. Considere la balanza en la figura. Si se sabe que el triángulo pesa 88 gms, que la balanza está completamente equilibrada y que no se tiene en cuenta el peso de las cuerdas, ¿cuánto pesa el círculo?



a) 88 gms b) 11 gms c) 22 gms d) 132 gms e) 44 gms

5. La profesora de biología trajo una iguana al colegio. Nos dijo que la longitud de su cola es un tercio de su longitud total, la cabeza tiene 13 cm de largo y es la cuarta parte de la longitud de la iguana sin contar la cola. ¿Cuál es la longitud de la iguana?



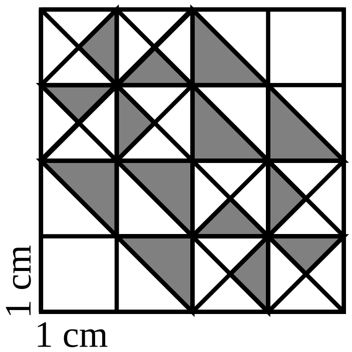
a) 26 cm b) 13 cm c) 52 cm d) 39 cm e) 78 cm

6. Sea S el conjunto de los enteros que son cuadrados perfectos (es decir, S consta de $1, 4, 9, 16, \ldots$, etc.). ¿Cuál de las siguientes operaciones, realizada sobre dos elementos de S, da siempre como resultado un elemento del conjunto S?

a) Suma b) Resta c) Producto

d) División e) Ninguna de las anteriores

7. ¿Cuál es el área de la región sombreada de la siguiente figura?



a) $\frac{1}{4}$ cm^2 b) $\frac{8}{5}$ cm^2 c) $\frac{14}{16}$ cm^2 d) 5 cm^2 e) 10 cm^2

8. Pedro y su hijo, y Juan y su hijo salieron ayer a pescar. Pedro pescó tantos peces como su hijo y Juan pescó tres veces más peces que su hijo. Si en total pescaron 35 peces y el hijo de Pedro es Lucas, ¿cómo se llama el hijo de Juan?

a) Pedro b) Lucas c) Juan

d) La situación es imposible e) No hay suficientes datos para saberlo

Preguntas para completar la respuesta

9. Katerine lanza un dado común sobre una mesa y resulta que el producto de los números que muestran las cinco caras visibles del dado es 180. ¿Cuál es el número que se encuentra oculto en la cara del dado sobre la mesa?

Respuesta: ______

10. Mi madre me regaló un conejito muy glotón, le encantan las lechugas y las zanahorias. En un día come 2 lechugas, o 9 zanahorias, o 1 lechuga y 4 zanahorias. Si durante una semana, mi conejito, comió 30 zanahorias, ¿cuántas lechugas comió esa semana?

Respuesta: ______

11. Laura y Mónica juegan una adivinanza. Laura le pide a su amiga que piense un número, que luego lo multiplique por 10, que al resultado le sume 40 y que

por último divida el resultado final entre 100. Si Mónica dice que el resultado final que obtuvo es 202, ¿cuánto es la suma de los dígitos del número que pensó Mónica?

Respuesta: ______

12. Tío Rico le regaló un reloj a cada uno de sus sobrinos Hugo, Paco y Luis. En el momento de la entrega los tres relojes marcaban las 10 a.m. El reloj de Hugo siempre daba la hora exacta, pero lastimosamente el reloj de Paco se adelantaba 10 minutos por día y el de Luis se atrasaba 15 minutos por día. ¿Cuántos días pasarán para que los tres relojes vuelvan a dar las 10 a.m. en el mismo momento?

    Respuesta: ______

2.3 Fase final

Preguntas de selección múltiple

1. Mario, Pedro, Ignacio, Jorge y Angélica están formados en una fila. Mario está después de Ignacio, Angélica está antes de Mario y justo después de Jorge. Jorge está antes de Ignacio pero Jorge no es el primero de la fila. ¿Cuál es el lugar de Pedro en la fila?

    a) Primero b) Segundo c) Tercero d) Cuarto e) Quinto

2. En la cafetería de mi colegio se cumple la siguiente curiosidad:
    La cantidad de agua que se puede almacenar conjuntamente en una botella y en un vaso es igual a la capacidad que almacena una jarra. Una botella sola tiene la misma capacidad que un vaso y un tazón. Además, tres tazones juntos tienen la misma capacidad que dos jarras. ¿A cuántos vasos equivale un tazón?

    a) 3 vasos b) 4 vasos c) 5 vasos d) 6 vasos e) 7 vasos

3. Se tiene un número de cuatro cifras que cumple que el segundo dígito, de izquierda a derecha, es siete veces el primer dígito y el cuarto dígito es el doble del tercer dígito. ¿Cuál es el residuo de dividir este número entre seis?

    a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 5

4. En la noche del 31 de octubre, Caterine y Mariana recibieron muchos bombones. Para divertirse decidieron lanzar una moneda al aire. Si salía cara, ganaba Mariana y Caterine tenía que darle dos bombones. Si salía sello, entonces ganaba Caterine y Mariana le tenía que dar tres bombones. Luego de lanzar la moneda 30 veces, ambas tenían la misma cantidad de bombones que al comenzar el juego. ¿Cuántas veces ganó Caterine?

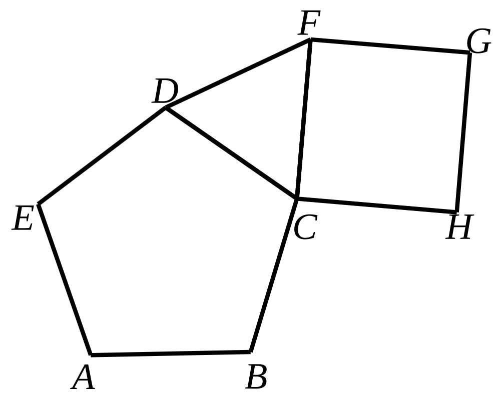
   a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 30

Preguntas para completar la respuesta

5. Carlos comenzó a bajar una escalera de 24 escalas al mismo tiempo en que Lucy comenzó a subirla. Cuando Carlos había bajado $3/4$ de la escalera se cruzó con Lucy. ¿Cuántas escalas le faltan por subir a Lucy en el momento que Carlos termina de bajar la escalera?

   Respuesta: ______

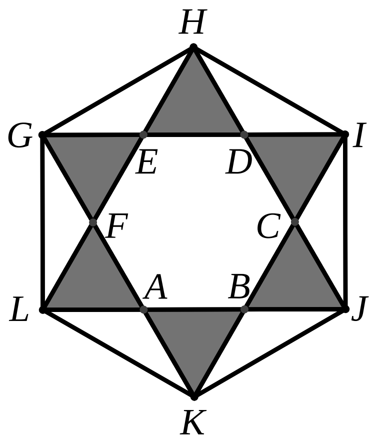
6. En la figura $ABCDE$ es un pentágono regular. CDF es un triángulo equilátero y $CFGH$ es un cuadrado. La medida en grados del ángulo $\measuredangle BCH$ es:



   Respuesta: ______

Preguntas para justificar la respuesta

7. El polígono $ABCDEF$ es un hexágono regular, cada uno de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EF}$ y $\overline{FA}$ son un lado del hexágono y también de un triángulo equilátero como se muestra en la figura. El polígono $GHIJKL$ se construye uniendo los puntos G, H, I, J, K y L. Si el área del hexágono $ABCDEF$ es de 18 cm^2, ¿cuál es el área del polígono $GHIJKL$?



8. James, Falcao y Cuadrado tienen 30 balones de fútbol entre los tres. Si Cuadrado le da 5 balones a Falcao, Falcao le da 4 balones a James y James le da 2 balones a Cuadrado, todos quedan con la misma cantidad de balones. ¿Cuántos balones de fútbol tenía cada uno al principio?

3. Problemas Nivel II (Octavo y Noveno)

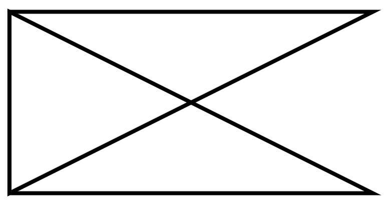
3.1 Primera fase

Preguntas de selección múltiple

1. La suma de tres enteros positivos es 6. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar la suma de los cuadrados de estos tres enteros?

   a) 6 b) 10 c) 11 d) 12 e) 14

2. Dos cartones iguales tienen la forma de un triángulo rectángulo de lados 5 cm, 12 cm y 13 cm. Ana juntó los dos cartones como muestra el dibujo. ¿Cuál es el perímetro de esta figura?



   a) 28 cm b) 35 cm c) 38 cm d) 41 cm e) 42 cm

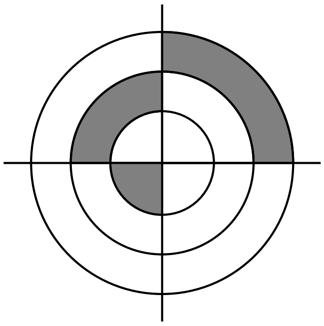
3. Si $2^{2016} - 2^{2015} - 2^{2014} = k \cdot 2^{2014}$, ¿cuál es el valor de k?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

4. En un grupo de 5 personas hay embusteros, que siempre mienten, y veraces, que siempre dicen la verdad. A cada uno de ellos se le pregunta: ¿Cuántos embusteros hay en el grupo? Se obtienen las respuestas: Uno, dos, tres, cuatro, cinco. ¿Cuántos embusteros hay en el grupo?

   a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

5. En la siguiente figura se tienen tres círculos concéntricos y dos diámetros perpendiculares. Si el radio del círculo más pequeño es 1 y las tres regiones sombreadas tienen la misma área, ¿cuánto vale el producto de los tres radios?



   a) $\sqrt{6}$ b) 3 c) $3\frac{\sqrt{3}}{2}$ d) $2\sqrt{2}$ e) 6

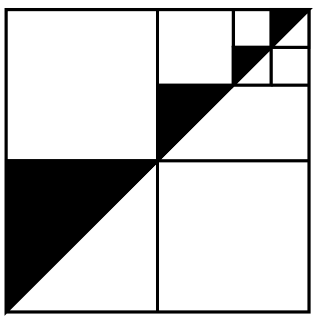
6. La Universidad de Nariño tiene 111 años de existencia. ¿Cuántos pares ordenados de enteros (x, y) satisfacen la siguiente ecuación: $xy - x - 111 = 0$?

   a) 2 b) 6 c) 8 d) 0 e) 111

7. De una reunión se retiraron 20 participantes y quedaron más de la tercera parte del total. Si se hubieran retirado 5 más, quedarían menos de 7 participantes. El número de participantes que había al inicio de la reunión era:

   a) 30 b) 31 c) 32 d) 33 e) 34

8. ¿Qué fracción del área del cuadrado más grande representa la parte sombreada?



a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{11}{64}$ c) $\frac{7}{32}$ d) $\frac{11}{16}$ e) $\frac{3}{8}$

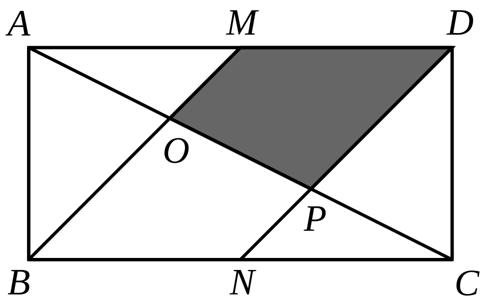
9. James descubre que alguien se comió su quimbolito y sospecha de cuatro de sus vecinos: Falcao, Cuadrado, Bacca y Neymar. Falcao dice que fue Cuadrado, Cuadrado dice que fue Neymar, Bacca y Neymar niegan haber tenido algo que ver en el asunto. ¿Quién se comió el quimbolito, si solo uno de ellos dijo la verdad?

a) Falcao b) Cuadrado c) Bacca d) Neymar e) Nadie

10. En una finca se tienen algunos cuyes y algunas cajas. Si se colocan de a 5 cuyes por caja al final sobran 15 cuyes. Si se ubican de a 8 por caja sobran 3 cajas, ¿cuántas son las cajas?

a) 5 b) 7 c) 10 d) 13 e) 20

11. Sea $ABCD$ un rectángulo cuyo largo es el doble del ancho. Si el ancho es 4 unidades y M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. ¿Cuál es el área en unidades cuadradas del polígono $MOPD$?



a) 4 b) 6 c) 8 d) 16 e) 32

12. Se tienen los dígitos 3, 4, 7 y 8. ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas se pueden formar con estos dígitos, de tal manera que al dividirlos por cinco el residuo sea 3?

a) 0 b) 4 c) 5 d) 12 e) 24

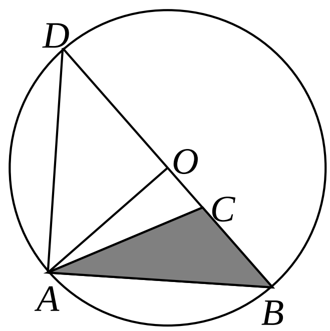
13. A Rosario le dieron un número secreto de cuatro dígitos como clave de su nueva tarjeta de crédito; ella observó que la suma de los dígitos es nueve y que ninguno de ellos es cero. Además, que el número es múltiplo de cinco y mayor que 2016. ¿Cuál es el dígito de las centenas de la clave de Rosario?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

14. María publicó el lunes una foto en facebook de sus vacaciones en Tumaco. Imagina que durante cada día que la foto esté publicada, por cada persona que le de *me gusta*, 5 personas harán lo mismo. Si el lunes la foto recibió 100 *me gusta*, ¿cuántos *me gusta* tendrá la foto el jueves?

a) 300 b) $2,500$ c) $12,500$ d) 500 e) $21,600$

15. En la figura el triángulo $\triangle ABC$ está dentro de la circunferencia con centro en O y radio 3 cm, $\overline{BC}$ es un tercio del diámetro y además el segmento $\overline{OA}$ es perpendicular al segmento $\overline{BD}$. El área del triángulo $\triangle ABC$ es:



a) 3 cm^2 b) 5 cm^2 c) 3.5 cm^2 d) 4.5 cm^2 e) 2 cm^2

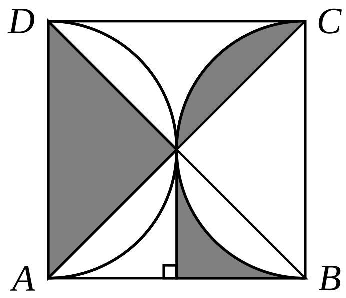
3.2 Segunda fase

Preguntas de selección múltiple

1. Hay 60 pájaros en tres árboles. Después de escuchar un disparo vuelan 6 pájaros del primer árbol, 8 pájaros del segundo y 4 pájaros del tercero. Si ahora hay el doble de pájaros en el segundo árbol más que en el primero, y el doble más en el tercer árbol respecto al segundo, ¿cuántos pájaros había originalmente en el segundo árbol?

a) 7 b) 11 c) 15 d) 20 e) 24

2. Calcule el área de la región sombreada, teniendo en cuenta que *ABCD* es un cuadrado de área 25 cm^2, y que se tienen dos semicircunferencias de diámetro el lado del cuadrado, como se muestra en la figura.



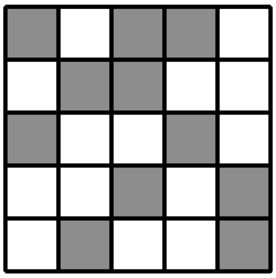
a) $\frac{75}{8}$ cm^2 b) $\frac{3}{2}$ cm^2 c) 111 cm^2 d) 75 cm^2 e) 100 cm^2

3. Pedro y su hijo, y Juan y su hijo salieron ayer a pescar. Pedro pescó tantos peces como su hijo y Juan pescó tres veces más peces que su hijo. Si en total pescaron 35 peces y el hijo de Pedro es Lucas, ¿cuántos peces pescó el hijo de Juan?

   a) 35 b) 7 c) 21

   d) La situación es imposible e) No hay suficientes datos para saberlo

4. El número mínimo de cuadritos grises en la figura que deben ser pintados de blanco para que cada fila y cada columna tenga exactamente un cuadrito gris es:

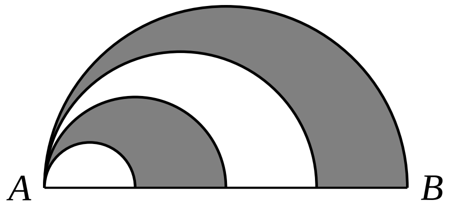


   a) 1 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

5. En mi salón de clase, 45 alumnos tienen al menos dos mascotas, lo que representa el 60 % de mis compañeros. Solamente el 12 % no tienen mascota. ¿Cuántos alumnos de mi salón tienen exactamente una mascota?

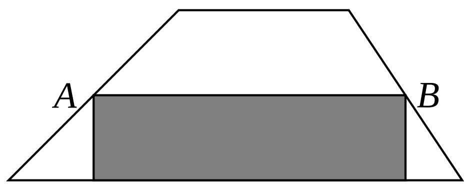
   a) 9 b) 21 c) 25 d) 30 e) 50

6. El segmento $\overline{AB}$ mide 8 cm y se divide en cuatro partes iguales, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



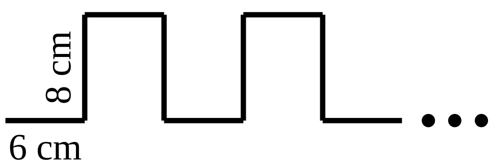
a) 20π b) 4π c) 8π d) 5π e) $\frac{18\pi}{5}$

7. El rectángulo sombreado tiene área 13 cm^2; A y B son los puntos medios de dos de los lados del trapezoide, como se indica en la figura. ¿Cuál es el área del trapezoide?



a) 22 cm^2 b) 23 cm^2 c) 24 cm^2 d) 25 cm^2 e) 26 cm^2

8. Las líneas horizontales miden 6 cm y las verticales 8 cm. La suma de las longitudes de todos los segmentos de la figura es 2016 cm. ¿Cuántos segmentos horizontales tiene la figura?



a) 100 b) 140 c) 144 d) 200 e) 2016

Preguntas para completar la respuesta

9. Si las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 36 = 0$, son números enteros, entonces la cantidad de valores enteros positivos que b puede tomar es:

   Respuesta: ______

10. ¿Cuántos números de tres cifras (es decir, mayores que 99 y menores que 1000) hay que tengan su cifra central mayor que las otras dos?

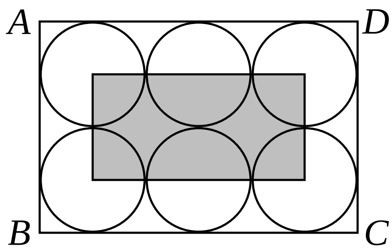
   Respuesta: ______

11. Colombia, Ecuador, Venezuela y Perú disputaron un campeonato de fútbol en el que cada equipo jugó una vez con cada uno de sus rivales. En el torneo a cada equipo ganador de un partido se le otorgaban 3 puntos y 0 puntos al perdedor. Además, si el partido terminaba empatado se otorgaba 1 punto a cada equipo. La siguiente tabla muestra la puntuación al final del torneo. ¿Cuántos partidos terminaron empatados?

Equipo	**Puntos**
Colombia	5
Ecuador	3
Perú	3
Venezuela	2

Respuesta: ______

12. En la figura hay seis círculos iguales tangentes a los lados del rectángulo *ABCD* y tangentes entre sí. Los vértices del rectángulo sombreado son los centros de cuatro de los círculos. Si el rectángulo sombreado tiene área 2016 cm^2, ¿cuál es el perímetro del rectángulo *ABCD*?



Respuesta: ______

3.3 Fase final

Preguntas de selección múltiple

1. Se tienen 9 monedas que lucen idénticas, pero una de ellas es falsa; por lo que es más liviana que las demás. Usando una balanza como la que se muestra a continuación, ¿cuál es el mínimo número de pesajes que se necesitan para ENCONTRAR la moneda falsa?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

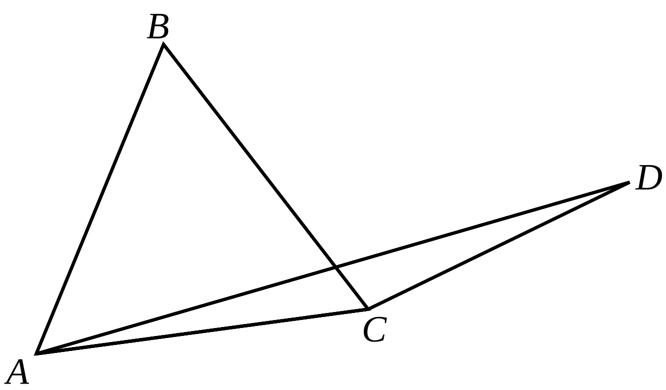
2. En la noche del 31 de octubre, Caterine y Mariana recibieron muchos bombones. Para divertirse decidieron lanzar una moneda al aire. Si salía cara, ganaba Mariana y Caterine tenía que darle dos bombones. Si salía sello, entonces ganaba Caterine y Mariana le tenía que dar tres bombones. Luego de lanzar la moneda 30 veces, ambas tenían la misma cantidad de bombones que al comenzar el juego. ¿Cuál fue la diferencia de triunfos entre Caterine y Mariana?

   a) 1 b) 3 c) 6 d) 12 e) 18

3. La cifra de las unidades del número que se obtiene al multiplicar todos los números impares comprendidos entre 1 y 2016 es:

   a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

4. En la figura el $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{CB} = \overline{CD}$. Si la medida del $\measuredangle BCD$ es 100°, entonces la medida del ángulo $\measuredangle BAD$ es:



   a) 10° b) 20° c) 30° d) 40° e) 50°

Preguntas para completar la respuesta

5. Si a y b son números positivos distintos y sin factores en común tales que:
$$\frac{a}{b}+\frac{a+10b}{b+10a}=2.$$
¿Cuánto vale $a+b$?

   Respuesta: ______

6. En una reunión con 13 personas, los invitados se sientan en una mesa circular. Las mujeres han decidido decir la verdad entre ellas y mentirle a los hombres. Los hombres han decidido decir la verdad entre ellos y mentirle a las mujeres. La primera persona le dice a quien está a su derecha: “en nuestro grupo la mayoría son hombres”, esta le dice a quien está a la derecha: “en nuestro grupo la mayoría son mujeres”, y siguen así hasta que la última persona le dice a la primera: “en nuestro grupo la mayoría son hombres”.

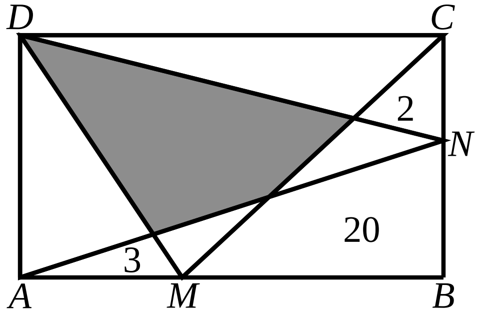
   Si se sabe que la primera persona le habla a una persona del mismo sexo, la cantidad de mujeres en la reunión es:

   Respuesta: ______

Preguntas para justificar la respuesta

7. El señor López tiene tres hijos: Andrés, Luis y Esteban. Si se multiplica la edad de Andrés y la de Luis, el resultado es 14. Si se multiplica la edad de Luis por la de Esteban, se obtiene 10. Si se multiplican las edades de Esteban y Andrés, se obtiene 35. ¿Cuál es la suma de las edades de los tres hijos?

8. Sean M y N dos puntos en los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ del rectángulo $ABCD$, respectivamente. Luego el rectángulo se divide en varias partes, tal como se indica en la figura. Se conocen las áreas de tres de esas partes, marcadas como se muestra en la figura. El área del cuadrilátero sombreado es:



III

Soluciones

4. Soluciones Nivel I (Sexto y Séptimo)

4.1 Primera fase

1. Debemos buscar dos números cuya diferencia sea 3 y su suma sea 29, siendo los únicos números que cumplen estas condiciones 13 y 16. Por lo tanto, al haber 3 niñas más que niños, concluimos que en total hay **16 niñas** en la clase.

2. Observe que podemos transformar la figura del problema como sigue.

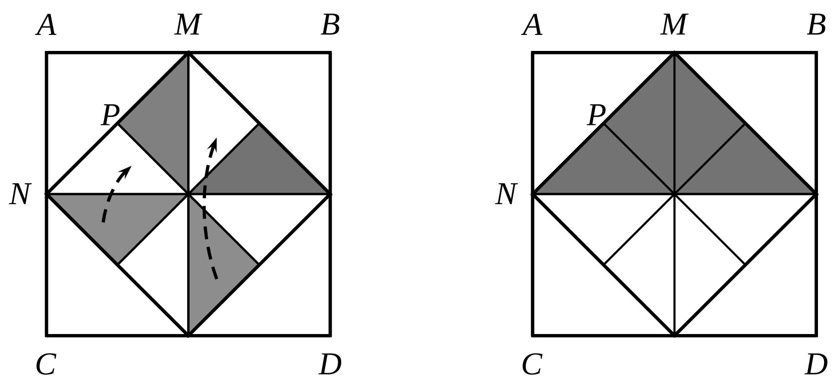


Figura 4.1: Transformación de la figura del problema.

De esta manera, el área de la región sombreada es igual al área de un triángulo de base 10 cm y altura 5 cm; es decir la respuesta es $\frac{10\times 5}{2} = \mathbf{25\ cm^2}$.

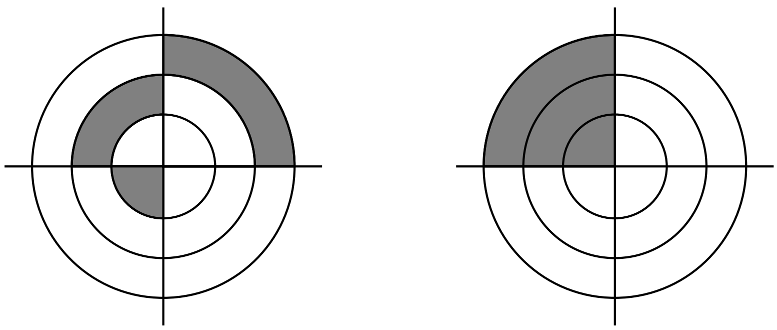
3. El calendario de Marzo tiene 31 días o fechas, luego si tachamos todas las fechas donde aparezcan números pares, observamos que hay 15 números pares, así quedan $31-15=$ **16 fechas** sin tachar en el calendario.

4. Teniendo en cuenta que la menor distancia que puede recorrer Daniel es $\frac{13}{15}$ km y la de Laura es $\frac{2}{9}$ km .

   Luego, la suma es
$$\frac{13}{15}+\frac{2}{9}=\frac{117+30}{135}=\frac{147}{135}=\frac{49}{45}.$$
   Por lo tanto, entre los dos recorren $\mathbf{\frac{49}{45}}$ **km**.

5. De la información suministrada tenemos que son 12 los estudiantes que asisten a los dos clubes; es decir este número corresponde al 30 % de los estudiantes de matemáticas que está en el club de inglés. Luego, como el 10 % es 4, entonces en el club de matemáticas participan en total **40 estudiantes**.

6. El problema nos presenta la Figura 4.2a.



(a) (b)

Figura 4.2: Círculos concéntricos.

   Recordemos que la fórmula para el área de un círculo es πr^2, donde r es el radio. Como sabemos que el radio del círculo más pequeño es 1, entonces su área es $\pi(1)^2=\pi$.

   Como las dos rectas son perpendiculares con intersección en el centro de los círculos, el área sombreada en el círculo más pequeño es la cuarta parte de él, es decir $\frac{\pi}{4}$.

   Además, dado que todas las regiones sombreadas tienen igual área, uniendo las partes sombreadas en el primer y segundo círculo, podemos ver que el área que está sombreada en el círculo intermedio de la Figura 4.2b es $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, y que esta corresponde a la cuarta parte del círculo. Así el círculo intermedio tiene área 2π.

Similarmente, podemos verificar que el círculo mayor tiene área 3π. Esto implica que la suma de las tres áreas de cada círculo es $\pi + 2\pi + 3\pi = \mathbf{6}\boldsymbol{\pi}$.

7. Para solucionar este problema podemos partir de un ejemplo en particular para poder generalizarlo y llegar a la respuesta correcta. Supongamos lo siguiente: Lucía tiene 10 años en 2016, es decir que ella nació en 2006. ¿Cómo obtenemos esto? Simplemente, restando a 2016 la edad de Lucía.

   Ahora, ¿qué pasa si Lucía suma su edad y su año de nacimiento? Si hace esto obtendrá nuevamente el numero 2016. ¡Hágalo usted mismo con su edad y su año de nacimiento! Entonces, ¿qué podemos concluir de este ejemplo en particular? Podemos decir que sin importar que edad tenga Lucía siempre que ella sume su edad más su año de nacimiento el resultado será 2016 y lo mismo sucederá con la edad y fecha de nacimiento de su madre.

   Entonces el resultado de la suma es $2016 + 2016 = \mathbf{4032}$.

8. Luego de observar las tres primeras fichas detalladamente podemos hacer lo siguiente.

Primera ficha $\quad \boxed{\mathbf{1}}\boxed{\mathbf{1}}$

Segunda ficha $\quad \boxed{1+1}\boxed{2+1} \rightarrow \boxed{\mathbf{2}}\boxed{\mathbf{3}}$

Tercera ficha $\quad \boxed{2+3}\boxed{5+3} \rightarrow \boxed{\mathbf{5}}\boxed{\mathbf{8}}$

Figura 4.3: Las tres primeras fichas del dominó.

   De esta manera observamos que la regla para colocar la siguiente ficha es: la primera posición es la suma de los dos valores de la ficha anterior y la segunda es la suma del resultado obtenido más el valor en la segunda posición de la ficha anterior.

   Por lo anterior, concluimos que la ficha que debe colocar Luis es

Cuarta ficha $\boxed{5+8 \mid 13+8} \rightarrow \boxed{\mathbf{13} \mid \mathbf{21}}$

Figura 4.4: Ficha correspondiente a Luis.

La sucesión que se está generando es conocida como la *sucesión de Fibonnaci*. Invitamos al lector a investigar un poco sobre ella.

9. Hacemos un análisis con todos los datos de la siguiente manera. Si Carlos es amigo de la hermana de Juan, entonces como el futbolista no tiene hermanos ni hermanas concluimos que Juan no es el futbolista. Carlos es mayor que el jugador de baloncesto entonces Carlos no es el jugador de baloncesto y además Carlos no es el futbolista porque el futbolista es el menor de los tres y él es mayor que el jugador de baloncesto, entonces Carlos es el jugador de voleibol.

   Ahora como Juan no es ni el futbolista ni el jugador de voleibol, entonces **Juan** es el jugador de baloncesto.

10. Como los movimientos del cuy van primero en sentido horizontal hacia la derecha y verticalmente hacia arriba, para ir desde A hasta llegar a C y desde C hasta D en sentido horizontal; en realidad el cuy está recorriendo la misma distancia que si lo hiciera por los lados del rectángulo, ver Figura 4.5.

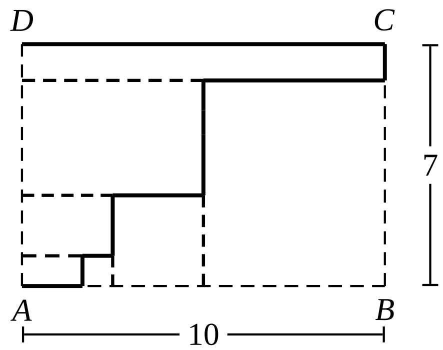


Figura 4.5: Recorrido del cuy.

Luego podemos ver que para ir desde A hasta C el cuy recorrió el lado $\overline{AB}$ y el lado $\overline{AD}$, y para ir desde C hasta D se desplazó por el lado $\overline{DC}$. Así el recorrido total del cuy es

$$\begin{aligned}\overline{AB}+\overline{AD}+\overline{CD} &= 10\text{ m}+7\text{ m}+10\text{ m}\\ &= \mathbf{27\ m}.\end{aligned}$$

11. Del enunciado del problema podemos organizar las tres cajas de la siguiente manera.

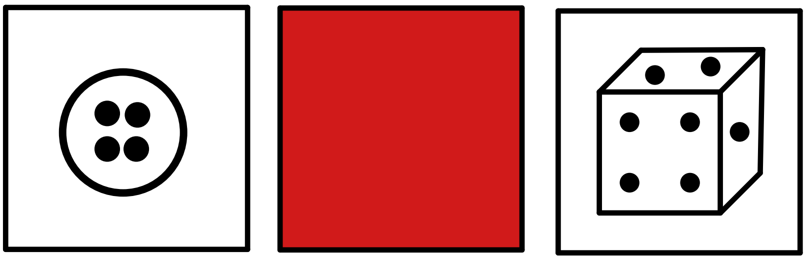


Figura 4.6: Descripción gráfica del enunciado del problema.

Adicionalmente, como se establece que cada caja contiene uno de los objetos, deducimos que la moneda está en la **caja roja**.

12. Por las condiciones del problema, tenemos que por cada dos asientos ocupados hay un asiento vacío. Teniendo en cuenta que el avión tiene 108 puestos, entonces el número de asientos vacíos es $\frac{108}{3} = 36$.

    Luego hay $108 - 36 =$ **72 pasajeros** en el avión.

13. Si tomamos una fecha cualquiera para un día de la semana, notemos que la fecha correspondiente al mismo día pero de la semana siguiente será la fecha del día actual más 7, esto porque son 7 días de la semana. Entonces si un martes tiene una fecha impar, al martes de la siguiente semana le corresponde una fecha par y de igual forma si un martes tiene fecha par, al martes de la siguiente semana le corresponde una fecha impar, es decir, si un martes es de fecha par, dentro de dos semana tendremos otra vez un martes de fecha par.

    El problema nos dice que en el mes hay tres martes que caen en fechas pares, esto quiere decir que por lo menos hay cinco martes en el mes porque los martes de fechas pares se dan cada dos semanas como se explicó anteriormente y de hecho no puede haber más de 5 martes, porque un mes tiene a lo más 31 días.

    Ahora bien, si tenemos cinco martes en un mes y tres de ellos caen en fechas pares, el primer martes del mes debe caer en fecha par de lo contrario no alcanzaría a tener tres martes en fechas pares. Por la misma razón, ese primer martes del mes debe caer exactamente en la fecha 2 del mes, puesto que si ya es mayor de 2, por ejemplo en la fecha 4, para que alcance los tres martes en fechas pares deberían haber $4+7+7+7+7=32$ días en el mes, lo cual no puede ser.

Entonces si tenemos que el primer martes cae en la fecha 2 del mes, las fechas de los siguientes martes son 9, 16, 23 y 30. Vemos que en efecto hay cinco martes en el mes y que tres de ellos caen en fechas pares (2, 16 y 30). En consecuencia, tenemos que un martes cae el 23 de este mes y por lo tanto el 21 de este mes en cuestión corresponde al día **domingo**.

14. Notemos que el perímetro del cuadrado es 48 cm, por lo tanto cada lado del cuadrado mide 12 cm. Al ser cortado en dos rectángulos iguales el lado más largo de cada rectángulo sigue midiendo 12 cm, mientras que el lado más corto se reduce a la mitad que es 6 cm.
    Al sobreponer los rectángulos y formar una cruz tenemos que hay 4 lados más largos que miden 6 cm cada uno y 8 lados más pequeños que miden 3 cm, es decir 4×6 cm $=24$ cm y 8×3 cm $=24$ cm.

    Finalmente al sumar todos los lados tenemos que el perímetro de la cruz es 24 cm $+\,24$ cm $=$ **48 cm**.

15. Para calcular el área de un triángulo lo podemos hacer conociendo su base b y su altura h, y por medio de la fórmula $A=\frac{b\times h}{2}$.

    Dado que el segmento $\overline{OA}$ es perpendicular al segmento $\overline{DB}$ que contiene a una base del triángulo, en este caso tomaremos como altura el segmento $\overline{OA}$ y como base el segmento $b=\overline{OC}$, así $h=\overline{OA}=3$ cm, por ser $\overline{OA}$ radio de la circunferencia.

    Adicionalmente, tenemos que $\overline{BC}=\frac{1}{3}\overline{BD}=\frac{1}{3}\times 6$ cm $=2$ cm, pero necesitamos calcular la medida del segmento $\overline{OC}$.

    Como $\overline{OB}$ mide 3 cm por ser radio de la circunferencia, restamos esta medida a la medida del segmento $\overline{BC}$, obteniendo que $\overline{OB}-\overline{BC}=1$ cm, de modo que el segmento $\overline{OC}=1$ cm.

    Así el área del ΔAOC es

$$A=\frac{1\text{ cm}\times 3\text{ cm}}{2}=\mathbf{1.5\ cm^2}.$$

4.2 Segunda fase

1. Observemos que podemos establecer la siguiente relación.

$$\begin{aligned} \text{Primera figura} &\to 3 = 2\times 1+1 \text{ círculos negros.}\\ \text{Segunda figura} &\to 5 = 2\times 2+1 \text{ círculos negros.}\\ \text{Tercera figura} &\to 7 = 2\times 3+1 \text{ círculos negros.}\\ \text{Cuarta figura} &\to 9 = 2\times 4+1 \text{ círculos negros.}\\ &\vdots \end{aligned}$$

   De esta manera, continuando así, la figura que está en la posición 2016 tiene $2\times 2016+1=$ **4033 círculos negros**.

2. Dado que en total hay 20 carros y ya sabemos que 12 de ellos son rojos, esto significa que 8 son blancos. Además, el problema nos dice que de los 8 blancos hay 4 que son de dos puertas, luego también hay 4 carros blancos de cuatro puertas.

   Del mismo modo, como sabemos que hay 15 carros de cuatro puertas, entonces tenemos $15-4=$ **11 carros rojos de cuatro puertas**.

3. Observemos que podemos rotar las regiones sombreadas en la figura dada, como en la Figura 4.7.

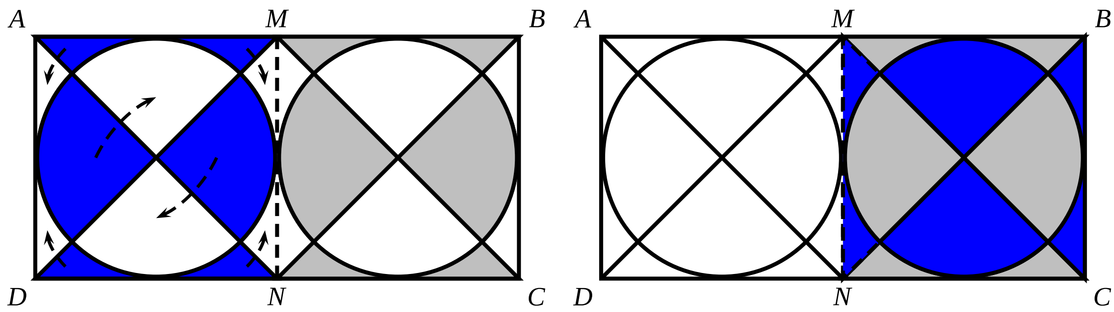


Figura 4.7: Rotación de las regiones sombreadas.

   En consecuencia el área de la región sombreada corresponde al área del cuadrado $NCBM$, y como $\overline{AB}=10$ cm, entonces $\overline{MB}=5$ cm, y por lo tanto el área buscada es **25 cm²**.

4. Como la balanza está en equilibrio y el triángulo pesa 88 gms, entonces el pentágono, el rombo y el círculo juntos pesan 88 gms, como resumimos en la Figura 4.8.

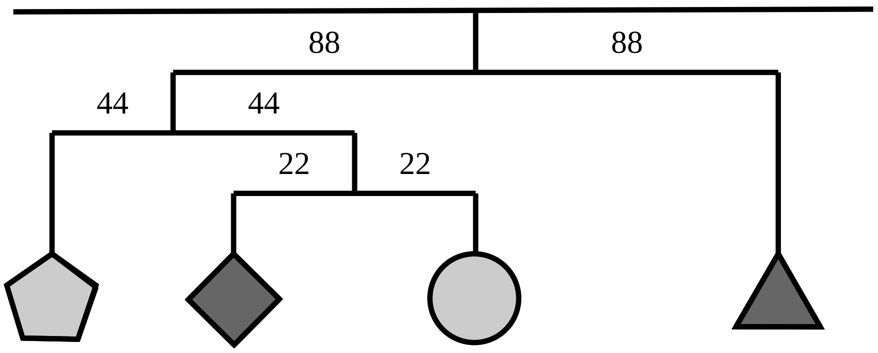


Figura 4.8: Pesos en la balanza.

Siguiendo este análisis concluimos que el peso del círculo es **22 gms**.

5. Representamos algunos de los datos dados en la Figura 4.9. La cabeza mide 13 cm y es la cuarta parte de la longitud total de la cabeza y el cuerpo, es decir que esta última mide 4×13 cm $= 52$ cm.

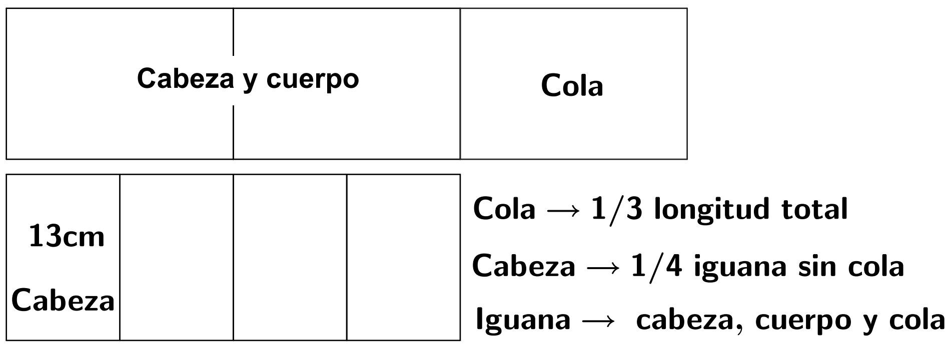


Figura 4.9: Representación de los datos de la iguana.

Ahora como la cola representa la tercera parte del cuerpo, esto significa que la cabeza y el cuerpo corresponden a dos tercios de la longitud del cuerpo de la iguana. De esta manera, la cola mide $\frac{52}{2} = 26$ cm. Así la longitud de la iguana es 52 cm $+ 26$ cm $=$ **78 cm**.

6. En este problema podemos dar algunos contraejemplos para concluir que algunas de las operaciones no dan como resultado un elemento del conjunto de los cuadrados perfectos, S.

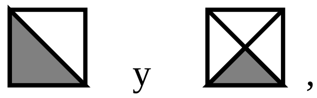
Suma: Dado que $1^2 + 2^2 = 5$ no es un cuadrado perfecto esta operación no cumple con lo solicitado.

Resta: Dado que $1^2 - 2^2 = -3$ no es un cuadrado perfecto esta operación tampoco cumple con lo solicitado.

División: Dado que $\dfrac{5^2}{2^2} = \dfrac{25}{4}$ no es un cuadrado perfecto esta operación tampoco cumple con lo solicitado.

Analizemos el caso del producto. Sean m y n elementos del conjunto S; es decir $m = a^2$ y $n = b^2$, para algunos enteros a y b. En consecuencia, $mn = a^2b^2 = (ab)^2$. Esta última igualdad nos muestra que la operación **producto** es la respuesta buscada.

7. En la gráfica las regiones sombreadas



son representativas, pues se repiten varias veces, algunas de ellas rotadas. De esta manera para calcular el área de la región sombreada solicitada, bastará con calcular el área de cada una de ellas y luego encontrar el número de veces que cada una de ellas se repite. La primera tiene área $\frac{1}{2}$ cm^2 y aparece 6 veces, mientras que la segunda tiene área $\frac{1}{4}$ cm^2 y se repite 8 veces. Por lo tanto, el área de la región sombreada es igual a

$$6 \times \frac{1}{2}\text{ cm}^2 + 8 \times \frac{1}{4}\text{ cm}^2 = 3 + 2 = \mathbf{5\ cm^2}.$$

8. Primero suponemos que el problema se refiere a cuatro personas. Además, podemos representar la cantidad de peces con figuras.

   Supongamos que la cantidad pescada por Pedro se representa en un rectángulo y la del hijo de Juan con un círculo. En este caso la representación del enunciado se tiene en la siguiente figura.

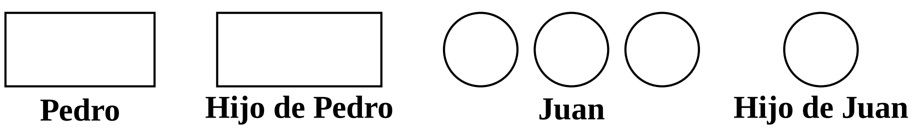
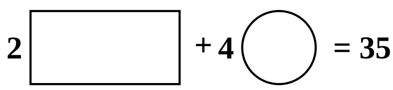


Figura 4.10: Representación gráfica del enunciado del problema.

De aquí,



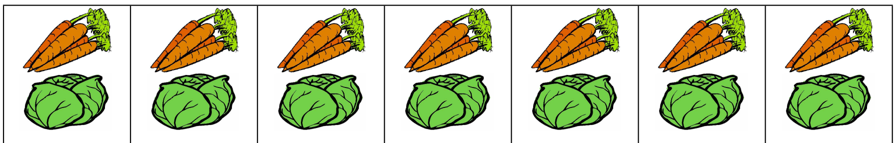
lo cual no es posible porque sin importar cuales sean las cantidades de peces de Pedro y del hijo de Juan, en la representación anterior, el lado izquierdo es un número par, mientras que en el lado derecho tenemos un número impar. De esta manera, concluimos que en el problema están involucradas en lugar de cuatro personas, únicamente tres personas.

En consecuencia, como ya sabemos que el hijo de Pedro es Lucas, entonces el hijo de Juan debe ser **Pedro**.

9. Recordemos que en un dado común las seis caras están marcadas con los números del 1 hasta el 6. Además $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

   Como 9 y 15 no están entre las posibilidades para marcar las caras del dado, tenemos que la única manera de representar la situación dada es $180 = 1 \times 2 \times 3 \times 5 \times 6$, lo que implica que la cara oculta es la marcada con el **número 4**.

10. En un día el conejito come 2 lechugas, o 9 zanahorias, o 1 lechuga y 4 zanahorias. Esto quiere decir que el conejo solo escoge una de estas opciones por día. Vamos a distribuir por cada uno de los 7 días de la semana estas opciones e intentar completar las 30 zanahorias.
    Caso 1. Todos los días comió 4 zanahorias y 1 lechuga.



4	4	4	4	4	4	4
1	1	1	1	1	1	1

Figura 4.11: En total come 28 zanahorias.

Observamos en la Figura 4.11, que en este caso obtenemos menos zanahorias de las que sabemos que comió el conejo, por lo cual es necesario cambiar la distribución de la alimentación del conejo con más zanahorias por día.
Caso 2. Por lo menos un día comió 9 zanahorias.

En la Figura 4.12, mostramos algunos ejemplos de cómo el conejo podría haberse alimentado, pero en estos casos observamos que la cantidad de zanahorias es mayor que 30. Por otro lado, en la Figura 4.13 presentamos un ejemplo en el cual el conejo come las zanahorias deseadas.

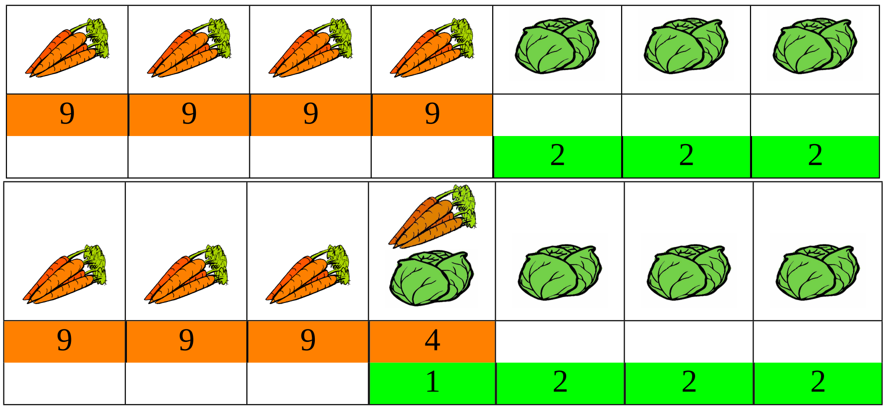


Figura 4.12: Cantidad mayor a 30 zanahorias.

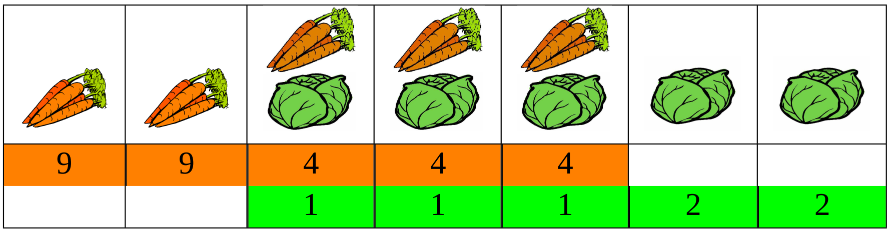


Figura 4.13: Distribución con 30 zanahorias y 7 lechugas.

Aunque ya encontramos una distribución de la comida del conejo en una semana en la que comió 30 zanahorias, con lo que también debió comer 7 lechugas, debemos estar seguros de que no hay otra opción y para esto intentamos el último caso posible, ver Figura 4.14.

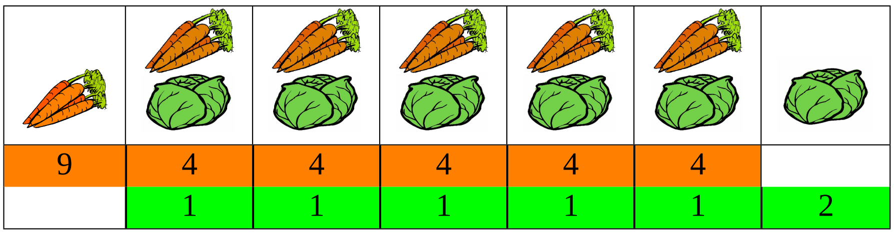


Figura 4.14: Opción con 29 zanahorias.

Por lo tanto, esa semana el conejo comió **7 lechugas**.

Observemos que podemos simplificar el anterior proceso, pues a partir del primer caso nos damos cuenta que por lo menos un día el conejo come 9 zanahorias. Pero como la cantidad total de zanahorias es par, el conejo debe comer bien 2 o 4 días 9 zanahorias, sin embargo si hubiera comido 4 días de a 9 zanahorias se pasa del total, llevando por otro camino al resultado.

11. El proceso planteado lo podemos representar mediante el siguiente diagrama.

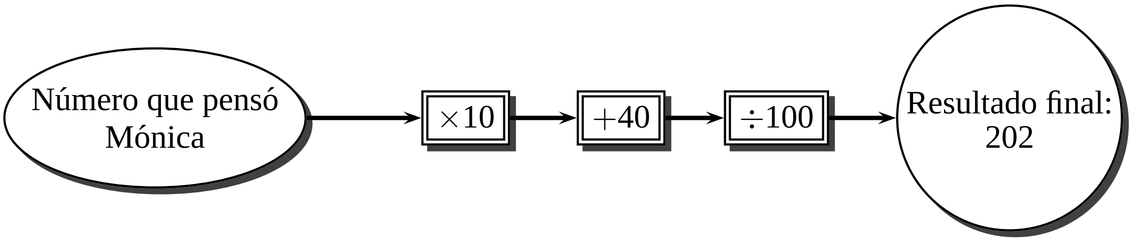


Figura 4.15: Diagrama de las operaciones realizadas con el número pensado.

De esta manera, si recordamos que la operación inversa para la división es la multiplicación y para la suma es la resta, podemos determinar el número pensado por Mónica siguiendo el diagrama que mostramos a continuación.

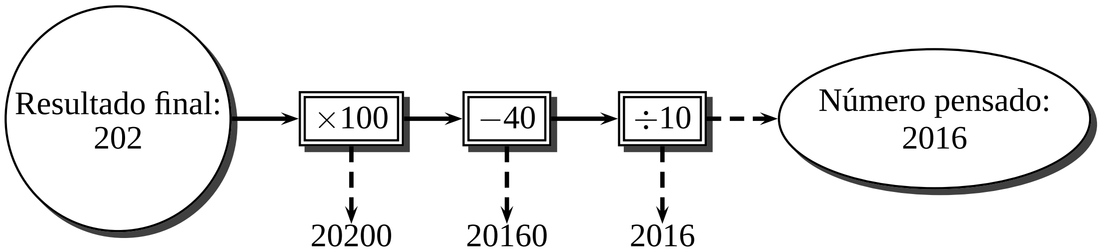


Figura 4.16: Proceso inverso para encontrar el número pensado.

De lo anterior concluimos que el número pensado por Mónica fue **2016**.

12. Observe que como el reloj de Paco se adelanta 10 minutos por día, entonces cada 6 días se adelantará una hora. De esta manera, para que los relojes de Hugo y Paco coincidan a las 10 a.m. deberán pasar $6 \times 24 = 144$ días. En consecuencia, sus relojes coincidirán cada

$$144 \text{ días}, 288 \text{ días}, 432 \text{ días}, 576 \text{ días}, \ldots$$

Hacemos el mismo análisis para el reloj de Luis. Su reloj cada 4 días se retrasará una hora y así necesitará $4 \times 24 = 96$ días para concordar con el de Hugo. De esta manera, los relojes de Hugo y Luis marcarán las 10 a.m. simultáneamente cada

$$96 \text{ días}, 192 \text{ días}, 288 \text{ días}, 384 \text{ días}, \ldots$$

Por lo tanto, para que los tres relojes vuelvan a marcar las 10 a.m. serán necesarios **288 días**.

4.3 Fase final

1. Ubicamos de izquierda a derecha a los cinco integrantes del problema, siendo el primero quien aparezca más a la izquierda en la fila. En consecuencia podemos interpretar cada una de las frases del problema de la siguiente manera.

   Mario está después de Ignacio → Ignacio . . . Mario,
   Angélica está antes de Mario → Angélica . . . Mario,
   y justo después de Jorge → Jorge, Angélica,
   Jorge está antes de Ignacio → Jorge . . . Ignacio,

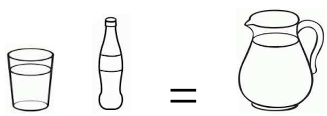
   donde los tres puntos dan la posibilidad de que haya personas entre los dos sujetos en cuestión y con la coma decimos que están juntos.

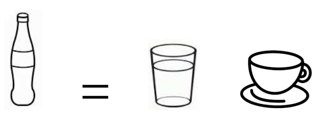
   Luego de la tercera afirmación tenemos que Jorge y Angélica están en ese orden en la fila y en lugares consecutivos. Como Jorge está antes de Ignacio e Ignacio está antes de Mario, entonces debemos tener que

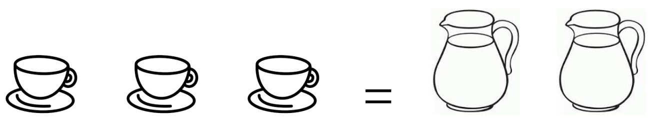
   Jorge, Angélica . . . Ignacio . . . Mario.

   Observe que aún existe la posibilidad de que Pedro esté entre Angélica e Ignacio o entre Ignacio y Mario. De lo anterior, podemos concluir que ni Angélica, ni Ignacio y ni Mario son el primero en la fila y como se nos dice que Jorge tampoco lo es, y nos falta Pedro por ser ubicado, entonces Pedro es el **primero**.

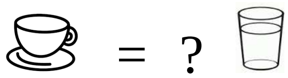
2. Representemos de forma gráfica la información que nos proporciona el problema.


(4.1)

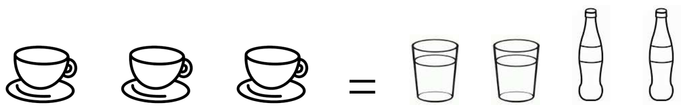

(4.2)


(4.3)

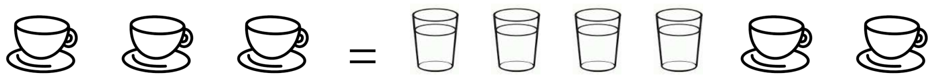
Deseamos identificar a cuántos vasos equivale un tazón, lo que equivalente gráficamente a



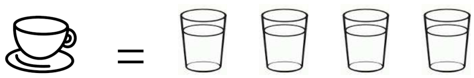
De (4.3) tenemos que la cantidad que almacenan tres tazones equivale a dos jarras, pero de (4.1) tenemos que una jarra almacena lo mismo que un vaso y una botella, por lo cual concluimos que



Luego, como de (4.2) sabemos que una botella equivale a un tazón y un vaso, entonces al sustituir en la anterior relación vemos que



Es decir,



De aquí, concluimos que la cantidad de agua que almacena un tazón es la misma que pueden contener **4 vasos**.

3. Tenemos un número de cuatro cifras, el cual representaremos como $ABCD$, siendo A, B, C y D los dígitos del número. Nuestro objetivo es saber cual es el residuo que deja este número cuando se divide por 6, esto no significa que debamos encontrar exactamente el número.

   Recordemos que un dígito es un número mayor o igual que 0 y menor o igual que 9. Como el número es de cuatro dígitos, A no puede ser cero. Ahora como B es 7 veces A, entonces A debe ser igual a 1 y así B es igual a 7. Además, se nos dice que el cuarto dígito, es decir D, es 2 veces el tercero. Dado que C no puede ser mayor o igual que 5, porque si lo fuera D no sería un dígito, en consecuencia consideramos las siguientes posibilidades:

   - Si $C = 0$, entonces $D = 0$.
   - Si $C = 1$, entonces $D = 2$.
   - Si $C = 2$, entonces $D = 4$.
   - Si $C = 3$, entonces $D = 6$.
   - Si $C = 4$, entonces $D = 8$.

Puede verificarse que al dividir cualquiera de estos números por 6 el **residuo es 2**. A continuación presentamos la división de tres de las posibilidades obtenidas.

$$\begin{array}{r|l} 1700 & 6 \\ \cline{2-2} 50 & 283 \\ 20 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1712 & 6 \\ \cline{2-2} 51 & 285 \\ 32 & \\ 2 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1724 & 6 \\ \cline{2-2} 52 & 287 \\ 44 & \\ 2 & \end{array}$$

Figura 4.17: División entre 6 de algunas de las posibilidades.

4. Representaremos con $\square$ y con $\bigcirc$ el número de veces que ganó Mariana y en las que la ganadora fue Caterine, respectivamente. Del enunciado del problema tenemos que

$$\square + \bigcirc = 30$$

Además, como las dos terminaron con el mismo número de bombones que tenían antes de empezar a jugar, y cada vez que Mariana ganaba Caterine le tenía que dar 2 bombones y cuando Caterine ganaba Mariana le daba 3 bombones a Mariana, tenemos que

$$2\square = 3\bigcirc$$

De la anterior relación, concluimos que $\bigcirc$ debe ser par y $\square$ múltiplo de tres.

Ahora, como la suma de $\bigcirc$ y $\square$ es un número par, concluimos que $\square$ también es par. Esto significa que el número de veces que ganó Mariana es un múltiplo de 6.

En la siguiente tabla damos las opciones para el número de veces que ganó cada una.

Número de victorias de Mariana	Número de victorias de Caterine
0	30
0	30
6	24
12	18
18	12
24	6
30	0

Tabla 4.1: Opciones para la cantidad de victorias de cada una.

Por lo tanto, podemos comprobar que la única opción que cumple las condiciones previamente establecidas es cuando

$$\square = 18 \text{ y } \bigcirc = 12$$

En consecuencia, Caterine ganó **12 veces**.

5. Puesto que Carlos avanzó $\frac{3}{4} \times 24 = 18$ escalas cuando se cruzó con Lucy, entonces Lucy hasta ese momento ha subido 6 escalas. Esto último nos da la siguiente relación: por cada escala que Lucy sube, Carlos baja tres.

   De esta manera, cuando Carlos termina de bajar las últimas 6 escalas que le faltan, debemos tener que Lucy ha avanzado solamente 2 escalas más. Para lo que en el momento que Carlos termina el recorrido, a Lucy le faltan $24 - 8 =$ **16 escalas** por subir.

6. Recordemos que cada ángulo interior en un pentágono regular, en un triángulo equilátero y en un cuadrado es igual a 108, 60 y 90 grados, respectivamente. En la Figura 4.18, representamos algunos de estos ángulos para ayudar a resolver el problema.

   De esta manera dado que

   $$m(\measuredangle BCH) + m(\measuredangle FCH) + m(\measuredangle FCD) + m(\measuredangle DCB) = 360^\circ,$$

   es decir

   $$m(\measuredangle BCH) + 90^\circ + 60^\circ + 108^\circ = 360^\circ,$$

   obtenemos que $m(\measuredangle BCH) = \mathbf{102}^\circ$.

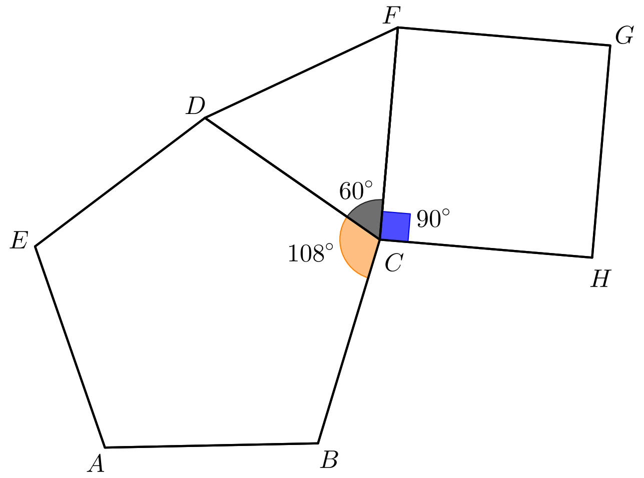


Figura 4.18: Ángulos de interés en la figura del problema.

7. Notemos que el área del polígono $GHIJKL$ es la suma del área del hexágono $ABCDEF$, más la suma de las áreas de los seis triángulos equiláteros de color gris oscuro y de los seis triángulos isósceles blancos. Además, observemos que si reflejamos el triángulo $\triangle EDH$ hacia el centro del hexágono, obtenemos en la gráfica del problema la simetría que mostramos en la Figura 4.19a.

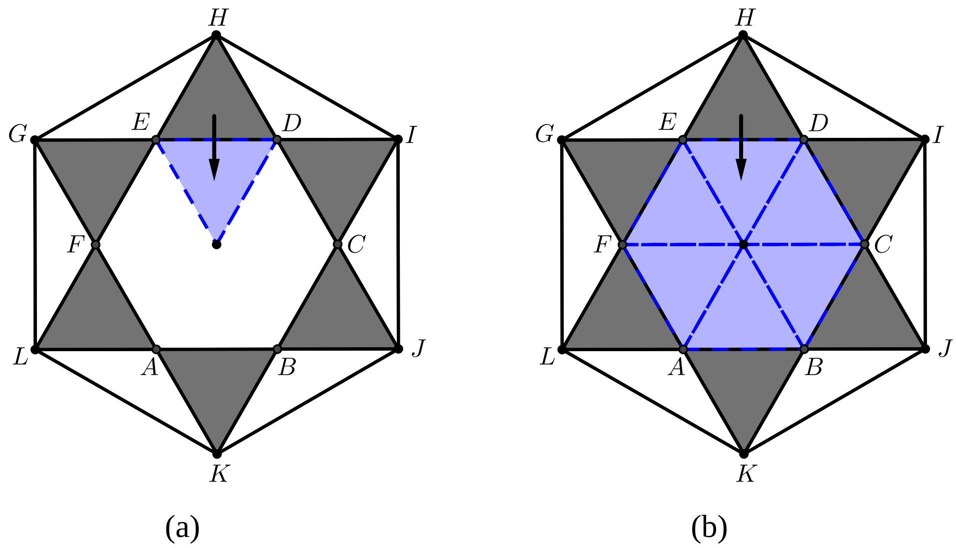


Figura 4.19: Simetría con el hexágono interior.

Repitiendo el anterior movimiento obtenemos la Figura 4.19b. De donde concluimos que la suma del área de los seis triángulos equiláteros de color gris oscuro es igual al área del hexágono interior, esto es 18 cm^2.

Adicionalmente cada triángulo isósceles tiene igual base e igual altura que cualquiera de los triángulos equiláteros, como vemos mediante la figura a continuación.

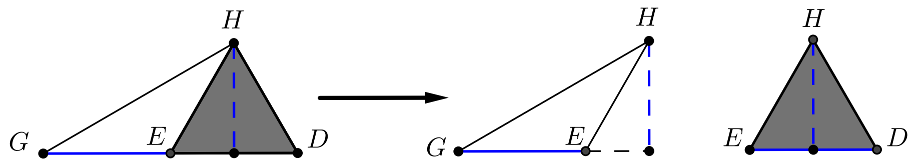
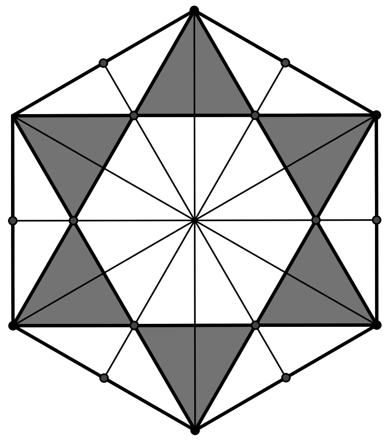


Figura 4.20: Igualdad del área entre triángulos isósceles y equiláteros.

En consecuencia, el área de cada triángulo isósceles es igual a la de cada triángulo equilátero, por lo tanto la suma de las áreas de estos seis triángulos también es 18 cm^2. De ahí que el área del polígono $GHIJKL$ es 18 cm^2 + 18 cm^2 + 18 cm^2 = **54 cm^2**.

Observemos que existen otras formas de fragmentar la figura de este problema. La figura a continuación muestra una de estas posibilidades, a partir de la cual también podemos obtener el resultado e incluso ayuda a identificar la igualdad del área entre cada triángulo isósceles y equilátero.



8. Dado que al final los tres tienen el mismo número de balones, esto significa que cada uno tiene 10 balones. Con el objetivo de obtener el número de balones con el que cada uno empezó, iremos recorriendo cada una de las afirmaciones del enunciado en sentido contrario, es decir desde la última hasta la primera.

   Naturalmente, cuando le damos un número de balones a alguien este número lo debemos restar de nuestra cantidad y sumarlo a la de quien los recibe.

Pero como aquí haremos el proceso contrario, si alguien le da una cantidad de balones a otro personaje, esto implicará que esta cantidad la sumaremos al número de balones que tiene el primero y la restaremos a quien los recibe.

- James le da 2 balones a Cuadrado.
  Esto significa que James tenía 12 balones y Cuadrado 8.
- Falcao le da 4 balones a James.
  Esto implica que Falcao tenía 14 balones y James 8.
- Cuadrado le da 5 balones a Falcao.
  De esta manera, Cuadrado y Falcao tenían 13 y 9 balones, respectivamente.

Por lo tanto, al principio **James tenía 8 balones, Falcao 9 balones y Cuadrado 13 balones**.

5. Soluciones Nivel II (Octavo y Noveno)

5.1 Primera fase

1. Las únicas posibilidades de enteros positivos que suman 6 son

$$1+1+4=6,$$
$$1+2+3=6,$$
$$2+2+2=6.$$

   Al verificar la suma de los cuadrados en cada una de estas posibilidades, observamos que la que tiene la menor suma es la tercera posibilidad; es decir $2^2+2^2+2^2=\mathbf{12}$.

2. Para hallar el perímetro de la figura ubicamos los valores de cada uno de los lados conocidos y trazamos el segmento a, como mostramos en la Figura 5.1. Así obtenemos un rectángulo de lados 5 cm y 12 cm.

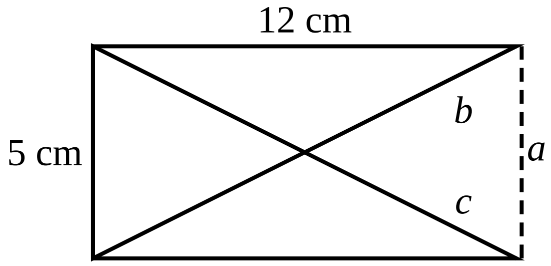


Figura 5.1: Marcación de los segmentos en la figura.

En consecuencia el perímetro es igual a $5+12+b+c+12$. Basta observar que los segmentos marcados con b y c son iguales a la mitad de la diagonal que ya sabemos que mide 13 cm. De esta manera, $b=c=\frac{13}{2}$ cm. Por lo tanto, el perímetro de la figura es

$$\text{Perímetro} = 5\text{ cm} + 12\text{ cm} + \frac{13}{2}\text{ cm} + \frac{13}{2}\text{ cm} + 12\text{ cm} = \mathbf{42\text{ cm}}.$$

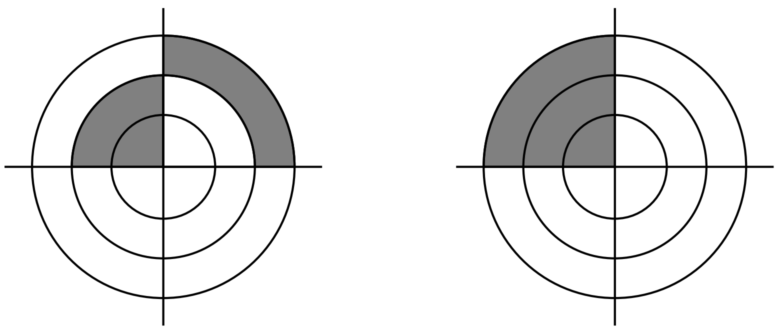
3. Dado que el número que acompaña a k es 2^{2014}, factorizamos el lado izquierdo de la igualdad dada de la siguiente forma

$$\begin{aligned} 2^{2016} - 2^{2015} - 2^{2014} &= 2^2 \cdot 2^{2014} - 2 \cdot 2^{2014} - 2^{2014} \\ &= (2^2 - 2 - 1)2^{2014} \\ &= (1)2^{2014}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el **valor de k es 1**.

4. Como ninguna de las respuestas se repite, esto implica que nada más uno de ellos está diciendo la verdad. Así por ejemplo, no pueden haber cinco embusteros porque entonces todos estarían mintiendo, pero el que respondió cinco estaría diciendo la verdad. Similarmente, si hubieran dos embusteros entonces la respuesta correcta debería repetirse tres veces, porque habría tres veraces. Los demás casos pueden analizarse en forma análoga. En conclusión, en el grupo hay **cuatro embusteros**.

5. Como el primer círculo tiene radio 1, entonces el área sombreada es $\frac{\pi}{4}$. Como las regiones sombreadas tienen la misma área, concluimos que al unir las regiones sombreadas del primer y segundo círculo, como mostramos en la Figura 5.2a, la nueva región sombreada tiene área igual a $2\frac{\pi}{4}$. Como esta es la cuarta parte del área del segundo círculo, tenemos que su radio es $\sqrt{2}$.



(a) (b)

Figura 5.2: Movimiento de las regiones sombreadas.

Al repetir este procedimiento con el tercer círculo, ver Figura 5.2b, obtenemos que su radio es $\sqrt{3}$. Así el producto de los tres radios es $1\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{\mathbf{6}}$.

6. Al factorizar la ecuación $xy-x-111=0$, obtenemos la igualdad

$$x(y-1)=111. \tag{5.1}$$

Ahora debemos encontrar las parejas ordenadas (x,y) de números enteros que satisfagan la igualdad (5.1). Esto lo podemos conseguir al saber que los divisores de 111 son los números ±1, ±3, ±37 y ±111. Por lo tanto, al remplazar estos valores en x y $y-1$, obtenemos **8 pares ordenados**: $(1,112)$, $(3,38)$, $(37,4)$, $(111,2)$, $(-1,-110)$, $(-3,-36)$, $(-37,-2)$ y $(-111,0)$.

7. Sea P el número de participantes al inicio de la reunión. Como se dice que se retiraron 20 participantes de la reunión y quedaron más de la tercera parte del total, tenemos la desigualdad

$$P-20>\frac{P}{3}. \tag{5.2}$$

Igualmente, de la afirmación que dice que si se hubieran retirado 5 más, quedarían menos de 7 participantes, obtenemos la desigualdad

$$P-25<7. \tag{5.3}$$

Así de las desigualdades (5.2) y (5.3), concluimos que $30<P$ y $P<32$, respectivamente. Por lo tanto, el número de participantes que había al inicio de la reunión era $P=\mathbf{31}$.

8. Sea A el área sombreada y x el área del cuadrado. En la Figura 5.3 nombramos el área de cada una de las regiones sombreadas del problema.

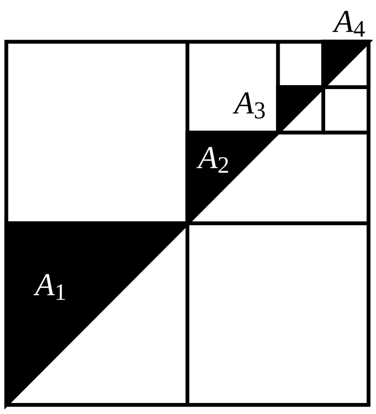


Figura 5.3: Identificación de regiones sombreadas.

El cuadrado más grande está dividido en 4 partes, y la región sombreada A_1 corresponde a la mitad de uno de esos cuartos, en consecuencia

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{8}x.$$

Ahora centramos la atención en la región sombreada A_2. Observe que haciendo un análisis similar concluimos que esta región corresponde a la octava parte del cuadrado superior derecho del cuadrado mayor, y como esta parte del cuadro superior derecho es la cuarta parte del cuadrado mayor tenemos que

$$A_2 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}x\right) = \frac{1}{32}x.$$

Dado que las áreas sombreadas más pequeñas son del mismo tamaño, simplemente se requiere encontrar qué fracción del área total del cuadrado más grande representa una de ellas y multiplicarla por 2.

Para este caso, es suficiente observar que la región A_3 es la octava parte del cuadrado pequeño que contiene a las regiones A_3 y A_4, el cual es la dieciseisava parte del cuadrado mayor. Esto implica que

$$A_3 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{16}x\right) = \frac{1}{128}x.$$

A partir de los resultados anteriores, basta con sumar A_1, A_2, A_3 y A_4. Es decir,

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \\ &= \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}x + 2 \cdot \frac{1}{128}x \\ &= \frac{8}{64}x + \frac{2}{64}x + \frac{1}{64}x \\ &= \frac{11}{64}x. \end{aligned}$$

Luego el área sombreada corresponde a $\mathbf{\frac{11}{64}}$ del área total del cuadrado.

Para solucionar este problema también es posible fraccionar la figura con relación a los cuadrados y triángulos más pequeños e identificar del total, cuántos están sombreados. Invitamos al lector a intentar este proceso.

9. Para resolver este problema podemos considerar los casos posibles y tratar de encontrar alguna contradicción o algún argumento válido para determinar la respuesta correcta. De esta manera, tenemos en cuenta los siguientes casos.

Caso 1. Falcao dice la verdad.

Entonces el culpable sería Cuadrado, pero esto implicaría que Bacca y Neymar estarían diciendo la verdad también. Esto contradice que solo uno de ellos dice la verdad, así que este caso no puede darse. Adicionalmente, podemos concluir que Cuadrado no fue el culpable.

Caso 2. Cuadrado dice la verdad.

En este caso Neymar es culpable, pero esto implicaría que Bacca también estaría diciendo la verdad, por lo tanto esto es una contradicción porque dos personas estarían diciendo la verdad, nuevamente este caso no puede ser. Por lo tanto, Neymar es inocente.

Caso 3. Bacca dice la verdad.

Luego Bacca no es culpable, pero como ya sabemos que Neymar tampoco fue los dos estarían diciendo la verdad, una nueva discordancia. Esto implica que Bacca está mintiendo, y por lo tanto quien se comió el quimbolito fue **Bacca**.

10. Sean x y y el número de cajas y cuyes, respectivamente. El problema consiste en encontrar el valor de x. Para esto observamos que la primera afirmación nos lleva a establecer que el número de cuyes es igual a 5 veces el número de cajas más 15 cuyes que sobran, esto implica la siguiente ecuación

$$y = 5x + 15, \tag{5.4}$$

y de la segunda afirmación tenemos que

$$y = 8(x - 3). \tag{5.5}$$

De esta manera igualando las ecuaciones (5.4) y (5.5), obtenemos que el número de cajas es $x = \mathbf{13}$.

11. Note que los triángulos ABM y DNC son iguales puesto que M y N son los puntos medios, de los segmentos. Si unimos estos triángulos formaremos un cuadrado cuya área es 16 unidades cuadradas.

Como $\overline{AC}$ es la diagonal del rectángulo, el polígono $MBND$ se divide en dos partes de igual área, entonces, al restar el área del rectángulo al área del cuadrado, obtendremos el área del polígono $MBND$, es decir $32 - 16 = 16$ unidades cuadradas. Ahora como el área de $MOPD$ es la mitad de esto, tendremos que el área sombreada es **8 unidades cuadradas**.

12. Ahora recordemos que al dividir un número entre 5 obtenemos como residuo, el residuo que deje su último dígito al dividirlo entre 5. Observe que como

debemos escribir números con cuatro cifras, estos los podemos escribir como $ABCD$. De esta manera, como queremos que estos números dejen como residuo 3, D debe ser igual a 3 u 8. Así los números buscados tienen una de las dos formas siguientes: $ABC3$ o $ABC8$. Si el número termina en 3, existen tres posibilidades para A, dos posibilidades para B y una posibilidad para C. Por lo tanto, existen $3\times2\times1=6$ números que terminan en 3. Similarmente, tenemos 6 números que terminan en 8. En conclusión, con las condiciones dadas podemos formar **12 números**.

13. De los datos dados sabemos que el número debe ser múltiplo de 5, por lo que debe terminar en 0 o 5, pero como ninguno de sus dígitos puede ser 0, podemos concluir que el número debe terminar en 5.

    Además, la suma de los cuatro dígitos del número es 9. Como ya uno de ellos es 5, la suma de los tres restantes debe ser 4. Nuevamente, como ninguno de ellos puede ser 0, tenemos que los tres dígitos restantes son 1, 1 y 2, en algún orden. Pero la condición de que el número sea mayor que 2016, implica a que su primer dígito es 2. De esta manera los dígitos que quedan deben ser iguales a 1. Esto quiere decir que **el dígito de las centenas es 1**.

14. Dado que el lunes la foto recibió 100 *me gusta*, esto implica que para el martes 500 harán lo mismo. De este modo para el martes la foto habrá recibido $100+500=600$ *me gusta*. Similarmente, podemos organizar los datos de la siguiente manera para llevar la cuenta en los días miércoles y jueves.

$$\begin{aligned} \text{Miércoles} \quad &\to \quad 600+5\times600=3.600, \\ \text{Jueves} \quad &\to \quad 3.600+5\times3.600=21.600. \end{aligned}$$

    En conclusión, la foto habrá recibido para el jueves **21.600 *me gusta***.

15. Una forma para calcular el área de un triángulo es a partir de su base b, su altura h y por medio de la fórmula $A=\frac{b\times h}{2}$. Tomemos como altura la longitud del segmento $\overline{OA}$ y como base el segmento $\overline{BC}$. En consecuencia, tenemos que como la circunferencia tiene radio 3 cm y diámetro 6 cm, entonces $h=\overline{OA}=3$ cm, luego $b=\overline{BC}=\frac{1}{3}\overline{BD}=\frac{1}{3}\times6\text{ cm}=2\text{ cm}$. Por lo tanto, el área del ΔABC es $A=\frac{2\text{ cm}\times3\text{ cm}}{2}=\mathbf{3\ cm^2}$.

5.2 Segunda fase

1. Para este problema presentamos dos soluciones.

Primera solución

Sean A_1, A_2 y A_3 el número de pájaros que hay antes del disparo en el primer, segundo y tercer árbol, respectivamente. Dado que antes del disparo los 60 pájaros estaban distribuidos en los tres árboles, tenemos que

$$A_1 + A_2 + A_3 = 60. \tag{5.6}$$

Ahora, después del disparo continúan $A_1 - 6$, $A_2 - 8$ y $A_3 - 4$, en cada uno de los árboles. Luego como en el segundo árbol hay el doble de pájaros que en el primero y en el tercero quedan el doble más que en el tercero, esto significa que

$$\begin{aligned} A_2 - 8 &= 2(A_1 - 6), \\ A_3 - 4 &= 2(A_2 - 8). \end{aligned} \tag{5.7}$$

De esta manera, de las ecuaciones (5.6) y (5.7), se sigue que $A_1 = 12$, $A_2 = 20$ y $A_3 = 28$. Por lo tanto, en el segundo árbol había **20 pájaros**.

Segunda solución

Dado que después del disparo volaron 6, 8 y 4 pájaros, respectivamente de cada uno de los árboles, tenemos que en total volaron 18 pájaros y por tanto en los tres árboles quedaron 42 pájaros. Si ubicamos en una caja la cantidad de pájaros que quedaron en el primer árbol, entonces podemos establecer la siguiente representación.

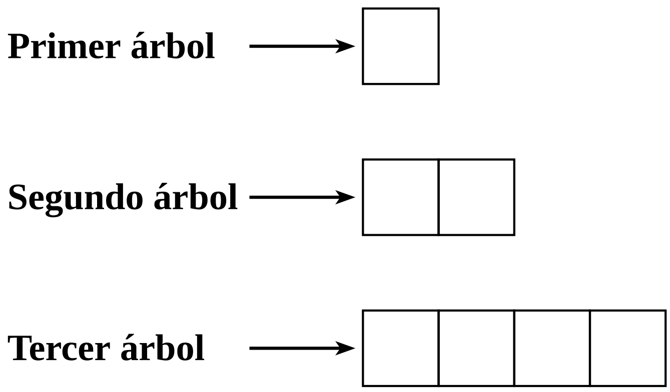


Figura 5.4: Representación de la cantidad de pájaros en cada árbol.

De esta manera, repartimos las 42 aves en cantidades iguales entre las 7 cajas. La única manera de conseguir esto es que en cada caja ubiquemos 6 pájaros, como mostramos a continuación.

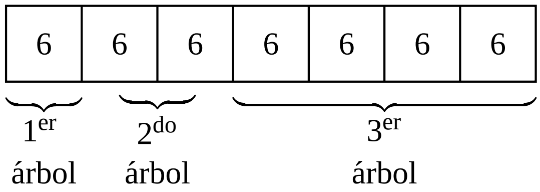


Figura 5.5: Distribución del total de aves en cada árbol.

En consecuencia, en el segundo árbol hay 12 pájaros y como se habían ido 8 pájaros, entonces originalmente había **20 pájaros**.

2. Observe que la Figura 5.6a, la podemos transformar en la Figura 5.6b, como mostramos a continuación.

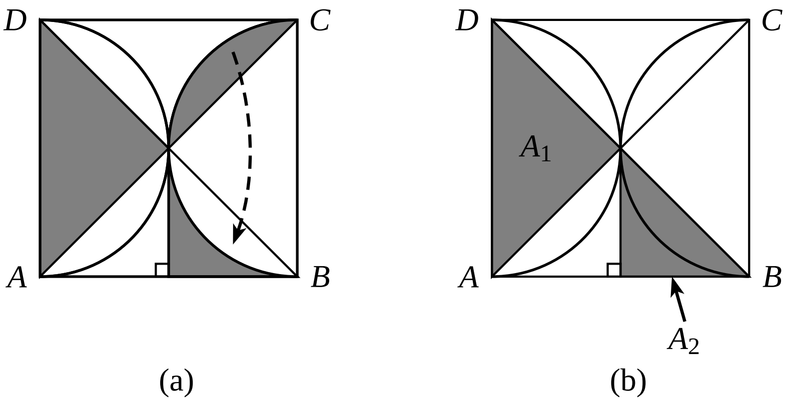


Figura 5.6: Transformación de las regiones sombreadas en la figura.

En consecuencia, para encontrar el área de la región sombreada inicialmente planteada basta con calcular las áreas A_1 y A_2, que aparecen representadas en la Figura 5.6b. Ahora, tenemos que

$$A_1 = \frac{5 \times 2.5}{2} = \frac{25}{4},$$
$$A_2 = \frac{2.5 \times 2.5}{2} = \frac{25}{8},$$

y así el área buscada es igual a $A_1 + A_2 = \frac{25}{4} + \frac{25}{8} = \boldsymbol{\frac{75}{8}}$ **cm²**.

Note que en este problema, luego de la transformación de la Figura 5.6b, por la simetría también es posible realizar un fraccionamiento y luego determinar del total de regiones cuántas están sombreadas. Invitamos al lector a realizar este proceso y comparar con la solución que presentamos.

3. Denotemos con P, L, J y J_1, la cantidad de peces que pescó Pedro, Lucas, Juan y el hijo de Juan. Entonces, como Pedro y su hijo pescaron el mismo número de peces, tenemos que $P = L$ y $J = 3J_1$, puesto que Juan pescó el triple de peces que su hijo. Como en total entre todos pescaron 35 peces, sabemos que

$$P + L + J + J_1 = 35,$$

es decir

$$2P + 4J_1 = 35.$$

Dado que P y J_1 deben ser números enteros, observamos que no podemos obtener la última expresión puesto que el lado izquierdo de ella es par, mientras que 35 es un número impar.

De esta manera hemos cometido un error al asumir que en la situación están involucradas cuatro personas. En consecuencia, Juan es el padre de Pedro o de Lucas. Pero el padre de Lucas es Pedro, y Juan y Pedro no son la misma persona, pues por una parte se dice que uno pescó la misma cantidad que su hijo mientras que el otro pescó el triple más que su hijo. Así que lo que debemos tener es que Juan es el padre de Pedro (y así es el abuelo de Lucas).

De este modo tenemos que

$$P + L + J = 35,$$

de donde como $P = L$ y $J = 3P$, concluimos que $P = 7$.

Por lo tanto, el hijo de Juan pescó **7 peces**.

4. Observe que en el diagrama presentado es necesario pintar el número de cuadritos como mostramos en la siguiente figura.

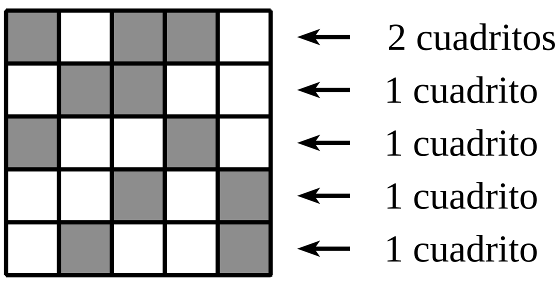


Figura 5.7: Número de cuadritos necesarios para pintar por fila.

Así el número mínimo de cuadritos que debemos pintar es **6**.

A continuación presentamos un ejemplo en el que conseguimos el objetivo planteado en el problema, en el cual marcamos con una X el cuadrito a pintar de blanco.

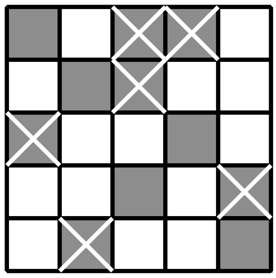


Figura 5.8: Ejemplo de objetivo planteado en el problema.

5. Si representamos con x el número de alumnos, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} 60\,\% & \leftarrow & \text{tiene dos o más mascotas,} \\ \underline{\quad 12\,\%} & \leftarrow & \text{no tiene mascotas.} \\ 72\,\% & & \end{array}$$

O sea que el $72\,\%$ tiene dos o más mascotas o no tiene mascotas, y así el $28\,\%$ tiene exactamente 1 mascota. De este modo, como de

$$(60\,\%)x = 45,$$

obtenemos que $x = 75$, esto implica que $(28\,\%)x = (28\,\%)75 =$ **21 alumnos** tienen exactamente una mascota.

6. En la Figura 5.9, marcamos con A_2 y A_4 las áreas de las regiones sombreadas.

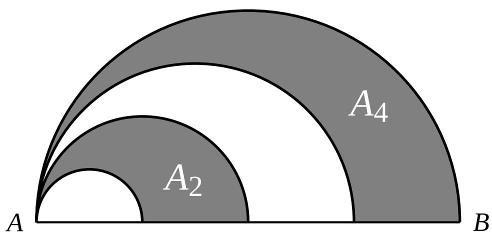


Figura 5.9: Áreas sombreadas marcadas.

Observe que como el segmento $\overline{AB}$ se divide en cuatro partes iguales, entonces los semicírculos S_1, S_2, S_3 y S_4 en la figura son de radios 1, 2, 3 y 4, respectivamente. Calculamos las áreas de estos semicírculos y procedemos a usar esto para encontrar las áreas A_2 y A_4.

Luego,

$$AS_1 = \frac{\pi(1\text{ cm})^2}{2} = \frac{\pi}{2}\text{ cm}^2, \qquad AS_3 = \frac{\pi(3\text{ cm})^2}{2} = \frac{9\pi}{2}\text{ cm}^2,$$
$$AS_2 = \frac{\pi(2\text{ cm})^2}{2} = 2\pi\text{ cm}^2, \qquad AS_4 = \frac{\pi(4\text{ cm})^2}{2} = 8\pi\text{ cm}^2.$$

De la Figura 5.9 establecemos que

$$A_2 = AS_2 - AS_1 = \frac{3\pi}{2}\text{ cm}^2 \quad \text{y} \quad A_4 = AS_4 - AS_3 = \frac{7\pi}{2}\text{ cm}^2.$$

Por lo tanto, el área de la región sombreada es $A_2 + A_4 = \mathbf{5\pi\ cm^2}$.

7. Transformamos la figura dada mediante un movimiento en el trapezoide como mostramos en la siguiente figura.

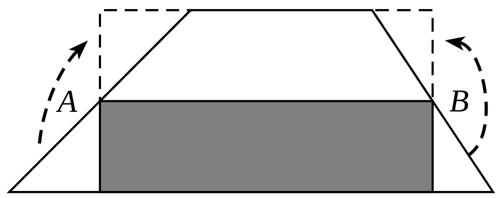


Figura 5.10: Movimiento en el trapecio para formar un rectángulo.

Observamos que el área del trapezoide es igual al área del rectángulo mayor que se forma en la Figura 5.10. Adicionalmente, este nuevo rectángulo tiene por área el doble del rectángulo sombreado; es decir que el área buscada es igual a **26 cm²**.

8. Primero observemos que en la figura se utilizan ciertas cantidades de segmentos verticales y horizontales, de donde cabe la pregunta ¿podríamos utilizar más segmentos de un tipo que del otro?

Dado que la figura empieza con un segmento horizontal, podemos darnos cuenta que no es posible utilizar más segmentos verticales que horizontales. Por otro lado si usáramos más segmentos horizontales que verticales, tendríamos simplemente un segmento horizontal más que la cantidad de segmentos verticales. Así, si utilizáramos n segmentos verticales, de la información suministrada obtendríamos la ecuación

$$6(n+1) + 8n = 2016,$$

es decir que

$$n = \frac{1005}{7}.$$

Lo cual no tiene sentido pues la cantidad encontrada en esta última expresión no es un entero. Esto significa que la cantidad de segmentos horizontales y verticales debe ser la misma.

Luego dado que al sumar la longitud de un segmento horizontal con uno vertical obtenemos 14 cm, entonces la figura dada tiene $\frac{2016\text{ cm}}{14\text{ cm}} =$ **144 segmentos horizontales**.

9. Como la ecuación dada tiene soluciones enteras, para encontrar los valores que puede tomar b, basta con factorizar la ecuación de la siguiente forma

$$x^2 + bx + 36 = (x+a)(x+c),$$

donde a y c son enteros positivos tales que $36 = ac$ y $b = a + c$. Así lo que resta es factorizar 36, lo que nos proporcionará los valores enteros que puede tomar b. Como

$$\begin{aligned} 36 &= 1 \times 36 = 2 \times 18, \\ &= 3 \times 12 = 4 \times 9 = 6 \times 6, \end{aligned}$$

entonces b puede tomar los valores 37, 20, 15, 13 y 12; y por lo tanto la cantidad de valores que puede tomar b es **5**.

10. Vamos a representar un número de tres cifras como mostramos en la Figura 5.11, donde A, B y C son dígitos.

A	B	C

Figura 5.11: Número de tres cifras.

Como el número debe ser de tres cifras, sabemos que $A > 0$. Por otro lado, como se exige que $B > A$ y $B > C$, entonces B debe ser mayor que 1.

Ahora lo que haremos es contar cuantos números podemos formar dependiendo del valor que tome B. Por ejemplo, si $B = 2$, entonces A puede ser 1, mientras que C puede ser 0 o 1; es decir que en este caso logramos formar $1 \times 2 = 2$ números con las condiciones exigidas.

Representamos todas las opciones en la Tabla 5.1, donde primero fijamos el valor que puede tomar B. Luego bajo las columnas encabezadas con A y C, están respectivamente los posibles valores que cada uno puede asumir y en la última columna, ubicamos el número de valores que podemos tomar en cada caso.

B	A	C	**Cantidad**
2	1	0,1	2
3	1,2	0,1,2	6
4	1,2,3	0,1,2,3	12
5	1,2,3,4	0,1,2,3,4	20
6	1,2,3,4,5	0,1,2,3,4,5	30
7	1,2,3,4,5,6	0,1,2,3,4,5,6	42
8	1,2,3,4,5,6,7	0,1,2,3,4,5,6,7	56
9	1,2,3,4,5,6,7,8	0,1,2,3,4,5,6,7,8	72

Tabla 5.1: Posibilidades para el número de tres cifras.

En consecuencia la cantidad de números que podemos formar es igual a la suma de las cantidades de la columna de la derecha, es decir **240**.

11. La puntuación final del campeonato nos dice que Venezuela empató dos partidos y perdió otro. Tendremos en cuenta esta situación en los siguientes casos, en los que supondremos con quién perdió Venezuela.

Caso 1. Venezuela perdió con Perú.

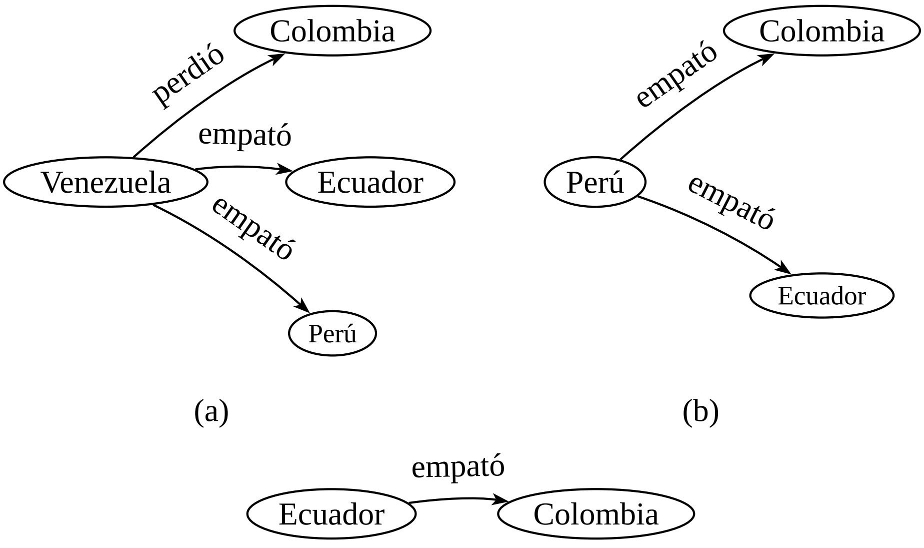
Esto significa que Venezuela empató con Ecuador, así para que Ecuador alcance los 3 puntos conseguidos al final del torneo, debió empatar todos sus partidos, en particular con Perú. Pero como estamos suponiendo que Perú le ganó a Venezuela, entonces Perú tendría por lo menos 4 puntos lo que no es posible porque según la clasificación final alcanzó 3 puntos.

Caso 2. Venezuela perdió con Ecuador.

Este caso lo podemos analizar similarmente al anterior. Tendríamos entonces que Perú empató todos sus partidos, en particular con Ecuador y así este último tendría como mínimo 4 puntos, lo que contradice el hecho de que en el campeonato logró tres puntos.

Caso 3. Venezuela perdió con Colombia.

Ya que los dos casos anteriores nos llevan a contradicciones, este caso debe ser el que nos lleve a la solución del problema y lo representaremos a través del siguiente diagrama.



(a) (b)

(c)

Figura 5.12: Diagrama del tercer caso.

En este diagrama simbolizamos que Venezuela perdió con Colombia y empató con Ecuador y Perú, ver Figura 5.12a. En las figuras 5.12b y 5.12c, presentamos las situaciones de los partidos restantes.

En consecuencia, al mirar el diagrama, hubo **cinco empates** en el torneo.

12. Consideremos a r como el radio de los círculos en la figura del problema, como mostramos a continuación.

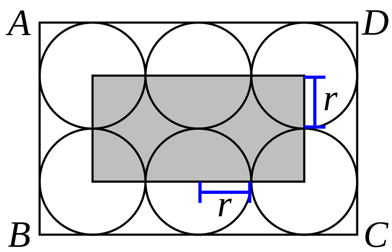


Figura 5.13: Círculos iguales y tangentes a los lados del rectángulo.

Así los lados verticales y horizontales del rectángulo sombreado tienen medida $2r$ y $4r$, respectivamente. Luego

$$2r \times 4r = 2016,$$

de donde obtenemos que $r = \sqrt{252} = 6\sqrt{7}$. Por lo tanto, el rectángulo $ABCD$

tiene perímetro

$$\begin{aligned} 2\overline{AD} + 2\overline{DC} &= 2(4r + 6r) \\ &= 20r = \mathbf{120\sqrt{7}\ cm}. \end{aligned}$$

5.3 Fase final

1. Dividimos las monedas en tres grupos, cada uno con tres monedas, y procedemos a pesar dos de los tres grupos. Si la balanza no está equilibrada, entonces la moneda falsa está en el grupo de monedas más liviano. Si por el contrario, la balanza está equilibrada entonces la moneda falsa está en el tercer grupo, es decir aquel que no pesamos. Así que ya hemos determinado en cual grupo de tres monedas está la moneda falsa, con un solo pesaje.

   En este grupo tomamos dos de las tres monedas. Si la balanza está equilibrada, la moneda falsa es aquella que no está siendo pesada. Sino es así la moneda estará entre las dos pesadas y será la más liviana. En conclusión, en cualquier caso **necesitaremos hacer como mínimo dos pesajes**.

2. Denotemos con c y m el número de veces que ganó Caterine y Mariana, respectivamente. Luego,
$$m + c = 30. \tag{5.8}$$
   Resaltamos que no es necesario saber con cuantos bombones comenzaron a jugar cada una, puesto que al final este número no cambia. Ahora, como cada vez que Caterine gane recibe tres bombones, entonces el número de bombones que gana durante el juego es $3c$. Sin embargo, como cada oportunidad que Mariana gane, Caterine le debe dar 2 bombones; esto significa que Caterine pierde $2m$ bombones durante el juego. Pero como se dice que al final Caterine termina con el mismo número de bombones que tenía al inicio del juego, la cantidad de bombones que gana es igual a la cantidad de bombones que pierde durante el juego.

   Así que podemos plantear la siguiente expresión
$$3c = 2m.$$
   Sustituyendo la ecuación (5.8) en la última expresión tenemos que $c = 12$. Luego $m = 30 - c = 18$ y por lo tanto **la diferencia de triunfos fue de 6**.

3. Observemos que el problema sería un poco más sencillo si el intervalo en el que se nos estuviera preguntando fuera más pequeño. Así por ejemplo, si se preguntara por el dígito de las unidades del producto de los números impares entre 1 y 10, podríamos hacer la multiplicación $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 = 945$, la cual es "sencilla" de hacer. Pero recordemos que únicamente se nos está preguntando por el último dígito de este número; es decir la respuesta aquí debería ser 5.

   Ahora si la pregunta fuera por el producto de los impares entre 1 y 20; la multiplicación parece no ser "tan fácil", aunque podríamos hacerla con mucha paciencia, debemos concentrarnos nuevamente en el dígito de las unidades. Este número lo conseguimos cuando multiplicamos los dígitos de las unidades de cada uno de los números involucrados, es decir aquellos que aparecen subrayados en la siguiente expresión

$$\underline{1} \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{7} \times \underline{9} \times 1\underline{1} \times 1\underline{3} \times 1\underline{5} \times 1\underline{7} \times 1\underline{9}.$$

   De nuevo, obtendremos a 5 como dígito de las unidades en este cálculo, esto porque entre los dígitos subrayados que tendremos en cuenta para multiplicar aparece el 5, y un número que se multiplica por 5 termina en 0 o 5; pero para que aparezca el 0 el 5 debemos multiplicar bien sea por 0 o por 2, y ninguno de los dos aparece, puesto que en la multiplicación están involucrados únicamente con los impares.

   Esto nos da una idea de lo que pasa en general, siguiendo el argumento anterior, podemos concluir que en la multiplicación

$$\underline{1} \times \underline{3} \times \underline{5} \times \underline{7} \times \underline{9} \times 1\underline{1} \times 1\underline{3} \times 1\underline{5} \times 1\underline{7} \times 1\underline{9} \times \cdots \times 201\underline{1} \times 201\underline{3} \times 201\underline{5},$$

   el dígito de las unidades es 5.

4. Ubicamos en la siguiente figura algunas de las informaciones dadas.

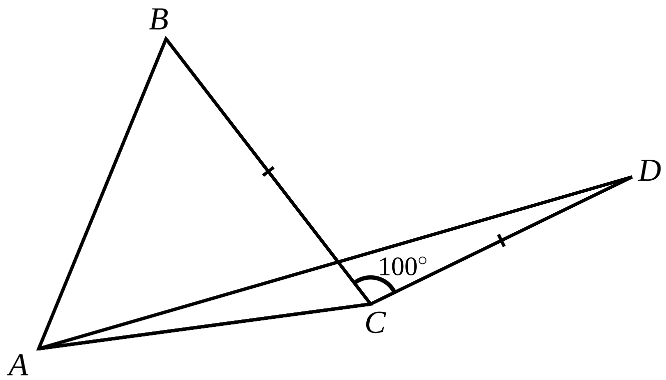


Figura 5.14: Datos del problema.

Como el $\triangle ABC$ es equilátero y $\overline{CB} = \overline{CD}$, entonces $\overline{CD} = \overline{CA}$. Así el $\triangle ACD$ es isósceles. Además como el $\triangle ABC$ es equilátero entonces $m(\measuredangle ACB) = 60^\circ$. De esta manera,

$$\begin{aligned} m(\measuredangle ACD) &= m(\measuredangle ACB) + m(\measuredangle BCD) \\ &= 60^\circ + 100^\circ \\ &= 160^\circ. \end{aligned}$$

En consecuencia, $m(\measuredangle CAD) = m(\measuredangle CDA) = 10^\circ$, y por lo tanto

$$m(\measuredangle BAD) = m(\measuredangle BAC) - m(\measuredangle CAD) = \mathbf{50}^\circ.$$

5. Primero dividimos entre b tanto el numerador como el denominador de la segunda fracción del lado derecho de la ecuación dada, es decir

$$\begin{aligned} \frac{a+10b}{b+10a} &= \frac{\frac{a+10b}{b}}{\frac{b+10a}{b}} \\ &= \frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}}. \end{aligned}$$

De aquí, si hacemos $x = \frac{a}{b}$, transformamos la ecuación del enunciado en

$$x + \frac{x+10}{1+10x} = 2,$$

la cual, siempre que $1+10x \neq 0$, es equivalente a

$$5x^2 - 9x + 4 = 0.$$

Esta última ecuación tiene como soluciones $x = 1$ o $x = \frac{4}{5}$. Pero como se estableció que a y b son distintos, entonces $x \neq 1$. Además como a y b no tienen factores en común, tenemos que $a = 4$ y $b = 5$. Por lo tanto, $a + b = 4 + 5 = \mathbf{9}$.

6. Pensemos en las 13 personas ubicadas en la mesa circular como mostramos en la Figura 5.15, donde representamos las personas con $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$ dependiendo del orden en el que cada uno habla; es decir P_1 es la primera persona en hablar, P_2 es la segunda, y así sucesivamente.

Vamos a considerar dos casos, dependiendo del sexo de la primera persona en hablar. En todo caso denotaremos con M y H si la persona es mujer u hombre, respectivamente, y con $+H$ y $+M$ dependiendo si la persona está afirmando que hay más hombres o más mujeres de forma respectiva, según el caso.

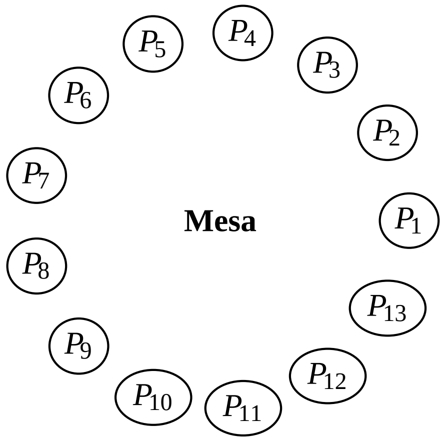
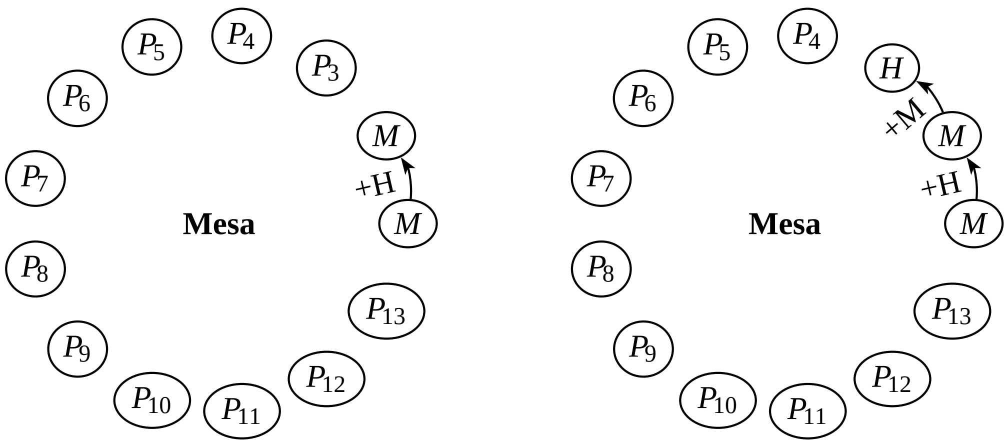


Figura 5.15: Ubicación de trece personas en la mesa.

Caso 1. La primera persona es una mujer.

De esta manera, reemplazaremos en la Figura 5.15 a P_1 con una letra M, como observamos en la Figura 5.16a. Dado que la primera persona le habla a alguien del mismo sexo, ubicamos una M en el lugar de P_2, ver Figura 5.16a. Además, como las mujeres no se mienten entre ellas, concluimos que hay más hombres que mujeres. Luego como la afirmación que sigue es que hay más mujeres, la cual es falsa, la siguiente persona sentada en la mesa debe ser un hombre, esto lo representamos en la Figura 5.16b.



(a) Primeras dos personas en hablar. (b) Tercera persona en hablar.

Figura 5.16: Primer caso.

Continuamos el proceso anterior hasta completar la situación que mostramos en la Figura 5.17. Así, podemos ver que en este caso hay 7 mujeres y 6 hombres, lo que contradice la afirmación inicial de que hay más hombres.

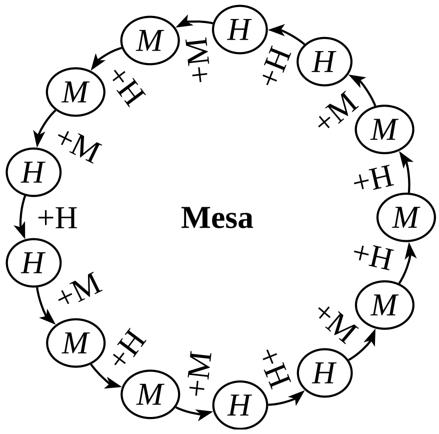


Figura 5.17: Situación final primer caso.

Caso 2. La primera persona es un hombre.

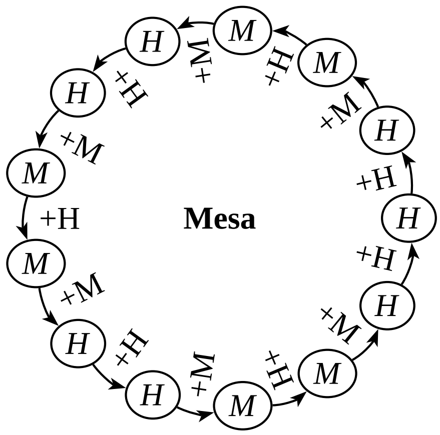


Figura 5.18: Situación final segundo caso.

Razonando como hicimos en el caso anterior conseguimos el diagrama en la Figura 5.18, lo que significa que hay 7 hombres y **6 mujeres** en la mesa.

7. Sean A, L y E las edades de Andrés, Luis y Esteban, correspondientemente. Luego

$$
\begin{aligned}
A \times L &= 14, \\
L \times E &= 10, \\
E \times A &= 35.
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

Así de la primera ecuación en (5.9) tenemos que $A = 1$ o $A = 2$ o $A = 7$ o $A = 14$. Es posible descartar algunas de las posibilidades anteriores. Por ejemplo, si $A = 1$ entonces tendríamos que $L = 14$ y luego no podemos obtener la segunda relación en (5.9).

Descartando las otras posibilidades llegamos a que $A = 7$, y de ahí que $L = 2$ y $E = 5$. Por lo tanto, la suma de las edades de los tres hijos es $A + L + E = \mathbf{14}$.

8. Denotaremos con $A_{\triangle DCM}$, $A_{\triangle DNA}$, $A_{\square}$ y $A_{\diamondsuit}$ las áreas de los triángulos $\triangle DCM$, $\triangle DNA$, del rectángulo $ABCD$ y del cuadrilátero sombreado, respectivamente. Adicionalmente, marcaremos dos áreas extras en la figura dada, como mostramos a continuación.

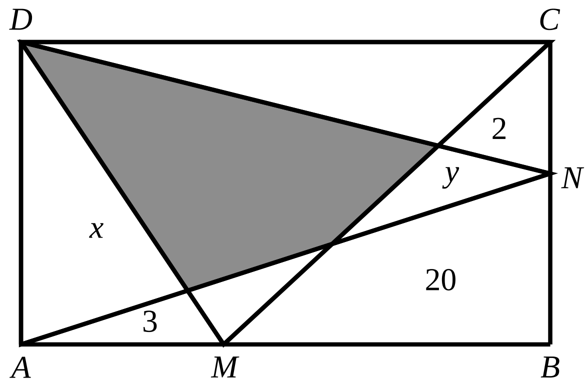


Figura 5.19: Marcación de las regiones en la figura.

Luego,

$$A_{\triangle DCM} = A_{\triangle DNA} = \frac{1}{2}\overline{DC} \times \overline{DA} = \frac{1}{2}A_{\square}.$$

De esta manera, el área del triángulo $\triangle DCM$ es igual al área de su parte complementaria dentro del rectángulo $ABCD$, esto es

$$A_{\triangle DCM} = x + y + 25. \tag{5.10}$$

Adicionalmente, podemos ver que

$$A_{\triangle DNA} = x + y + A_{\diamondsuit}. \tag{5.11}$$

Por lo tanto, sustituyendo la ecuación (5.11) en la ecuación (5.10), obtenemos que el área del cuadrilátero sombreado es $A_{\diamondsuit} = \mathbf{25}$.

6. Respuestas

Problema	Nivel I	Nivel II
1	c	d
2	b	e
3	e	a
4	b	d
5	d	a
6	c	c
7	e	b
8	b	b
9	a	c
10	b	d
11	a	c
12	d	d
13	e	a
14	c	e
15	a	a

Tabla 6.1: Respuestas primera fase, 1^{ra} ORM-UDENAR.

Problema	**Nivel I**	**Nivel II**
1	a	d
2	b	a
3	e	b
4	c	d
5	e	b
6	c	d
7	d	e
8	a	c
9	4	5
10	7	240
11	2016	5
12	288	$120\sqrt{7}$

Tabla 6.2: Respuestas segunda fase, 1^{ra} ORM-UDENAR.

Problema	**Nivel I**	**Nivel II**
1	a	b
2	b	c
3	c	c
4	b	e
5	16	9
6	138	6
7	54	14
8	8, 9 y 13	25

Tabla 6.3: Respuestas fase final, 1^{ra} ORM-UDENAR.

Bibliografía

Albers, D. J. & Alexanderson, G. L. (Eds.). (2008). *Mathematical people*. Wellesley, Estados Unidos: A K Peters, Ltd.

Alexanderson, G. L. (2000). *The random walks of George Pólya*. Washington, Estados Unidos: Mathematical Association of America.

Andreescu, T., Andrica, D., & Feng, Z. (2007). *104 number theory problems: from the training of the USA IMO team*. Boston, Estados Unidos: Birkhäuser.

Cai, J. & Lester, F. (2010). Why is teaching with problem solving important to student learning. *National Council of Teachers of Mathematics*. Recuperado de http://www.nctm.org.

Callejo, M. L. (1998). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid, España: Narcea.

Chung, K. L., Boas, R. P., Lehmer, D. H., Schattschneider, D., Read, R. C., Schiffer, M. M., & Schoenfeld, A. H. (1987). George Pólya. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 19(6):559–608.

D' Angelo, J. P. & West, D. B. (2000). *Mathematical thinking: problem solving and proofs*. New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall.

Dromey, R. G. (1982). *How to solve it by computer*. London, Inglaterra: Prentice-Hall Int., Inc.

Durand-Guerrier, V., Soury-Lavergne, S., & Arzarello, F. (Eds.). (2010). *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Institut National de Recherche Pédagogique, Lyon, Francia.

Gúsiev, V., Litvinenḱo, V., & Mordkóvich, A. (1989). *Prácticas para resolver problemas matemáticos: Geometría*. Moscú, Rusia: Editorial MIR.

Lappan, G. & Phillips, E. (1998). Teaching and learning in the connected mathematics project. En L. Leutzinger (Ed.) *Mathematics in the middle* (pp. 83–92). Resto, Estados Unidos: National Council of Mathematics.

Larson, L. C. (1983). *Problem-solving through problems*. New York, Estados Unidos: Springer-Verlag.

Ministerio de Educación Nacional (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas: guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Imprenta Nacional de Colombia.

Pólya, G. (1945). *How to solve it. A new aspect of mathematical method*. Princeton, Estados Unidos: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954a). *Induction and analogy in mathematics. Mathematics and plausible reasoning, vol. I*. Princeton, Estados Unidos: Princeton University Press.

Pólya, G. (1954b). *Patterns of plausible inference. Mathematics and plausible reasoning, vol. II*. Princeton, Estados Unidos: Princeton University Press.

Pólya, G. (1962). *Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Vol. I*. New York, Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Pólya, G. (1965a). *Cómo plantear y resolver problemas*. México, D.F., México: Trillas.

Pólya, G. (1965b). *Mathematical discovery. On understanding, learning, and teaching problem solving. Vol. II*. New York, Estados Unidos: John Wiley & Sons.

Pólya, G. & Szegő, G. (1978). *Problems and theorems in analysis I*. Berlin, Alemania: Springer-Verlag.

Rassias, M. T. (2010). *Problem-solving and selected topics in number theory: in the spirit of the mathematical olympiads*. New York, Estados Unidos: Springer Science & Business Media.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Estados Unidos: Academic Press Inc.

Schoenfeld, A. H. (2013). Reflections on problem solving theory and practice. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1):9–34.

Silver, E. A. (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: multiple research perspectives*. Hilsdale, Estados Unidos: Lawrence, Erlbaum Associates, Inc.

Solow, D. (2014). *How to read and do proofs: an introduction to mathematical thought processes*. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.

Zeitz, P. (2007). *The art and craft of problem solving*. New Jersey, Estados Unidos: John Wiley & Sons, Inc.

Este libro se divide en tres partes. En la primera se explica lo que se entiende por resolución de problemas y se presenta la metodología de George Pólya. Luego la segunda se destina a la presentación por nivel de los problemas que se presentaron en el desarrollo de la 1ra Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño, mientras que en la tercera se dan las soluciones de cada problema. Recalcamos que las soluciones que presentamos, no necesariamente son las únicas, y por este motivo invitamos al lector a intentar resolver primero el problema.

Este texto hace parte de los resultados del proyecto de investigación "Resolución de problemas: un medio para la formación matemática" financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño.

ISBN: 978-958-8958-70-5

9 789588 958705

Universidad de Nariño
EDITORIAL UNIVERSITARIA