

# Universidad de Nariño

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física



## Estabilidad del Potencial Escalar en el Modelo Económico como una Extensión del Modelo Estándar

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:  
Físico

**Larry S. Burbano Pantoja**

San Juan de Pasto

Nariño Colombia

Mayo 2018.

---

# Universidad de Nariño

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Física

## Estabilidad del Potencial Escalar en el Modelo Económico como una Extensión del Modelo Estándar

Larry S. Burbano Pantoja

TRABAJO DE GRADO

Director:

**Yithsbey Giraldo**

PhD en Física

San Juan de Pasto

Nariño Colombia

Mayo 2018.

---

**©2018- LARRY SEGUNDO BURBANO PANTOJA**

Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores  
Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la  
Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

---

Nota de aceptación

---

---

---

---

---

---

**Yithsbey Giraldo**

---

Director

**Germán Ramos**

---

Jurado

**Johana Herrera**

---

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo 2018

---

## *Agradecimientos*

A la Universidad de Nariño, al Departamento de Física y a cada uno de mis profesores, muchas gracias por compartir sus conocimientos y abrirme las puertas del fascinante mundo de la ciencia.

Mis más sinceros agradecimientos al Ph.D. Yitsbey Giraldo, por su dirección y constante apoyo durante la realización del presente trabajo de grado.

---

*Las matemáticas nos ayudan a descubrir la lógica que subyace  
al mundo tan complejo y caótico en el que vivimos.*  
Marcus du Sautoy.

---

# Estabilidad del Potencial Escalar en el Modelo Económico como una Extensión del Modelo Estándar

## Resumen

*En este trabajo de grado se hace un estudio del campo escalar clásico, con el propósito de familiarizarnos con los conceptos de las simetrías de la naturaleza descritas en el lenguaje matemático. También hacemos un estudio de la estructura del Modelo Estándar y basados en extensiones hechas al modelo, hacemos un análisis de las condiciones suficientes para que el potencial escalar sea estable. De esta manera garantizamos una teoría consistente.*

---

# Stability of the Scalar Potential in the Economic Model as an Extension of the Standard Model

## Abstract

*In this work we study the classical scalar field, with the purpose of familiarizing ourselves with the concepts of the symmetries of nature described in the mathematical language. We also make a study of the structure of the Standard Model and based on its extensions, we make an analysis of the conditions sufficient to have a stable scalar potential. In this way we guarantee a consistent theory.*

---

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>El campo escalar clásico</b>	<b>12</b>
2.1	El campo escalar real . . . . .	13
2.2	El campo escalar complejo. . . . .	13
2.3	Simetrías globales en el modelo del campo escalar . . . . .	13
2.4	El rompimiento espontáneo de simetría . . . . .	14
2.5	Rompimiento espontáneo de simetrías continuas . . . . .	16
2.6	El mecanismo de Higgs . . . . .	19
2.7	Rompimiento espontáneo de simetría no abeliana . . . . .	21
<b>3</b>	<b>El sector escalar en el Modelo Estándar</b>	<b>23</b>
3.1	Estructura del Modelo Estándar . . . . .	23
3.1.1	Interacciones y partículas elementales . . . . .	23
3.2	La matemática del Modelo Estándar . . . . .	28
3.2.1	El sector electrodébil . . . . .	28
3.3	El sector escalar . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Estabilidad del potencial escalar en extensiones del Modelo Estándar</b>	<b>33</b>
4.1	El modelo con dos dobletes de Higgs . . . . .	33
4.1.1	Parámetros que definen el potencial escalar . . . . .	35
4.1.2	Estabilidad del potencial escalar en el modelo THDM . . . . .	38
4.1.3	Revisión de los criterios de estabilidad . . . . .	42
4.1.4	El potencial del modelo de Gunion et al . . . . .	44
4.2	El modelo económico 3-3-1 . . . . .	46
4.2.1	El sector escalar en el modelo económico 3-3-1 . . . . .	47
4.2.2	Parámetros que definen el potencial escalar . . . . .	47
4.2.3	Estabilidad del potencial escalar . . . . .	48
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Teoría de grupos</b>	<b>51</b>
A.1	Composición interna . . . . .	51
A.1.1	Grupo . . . . .	52
A.1.2	Homomorfismo . . . . .	53
A.1.3	Representación de Grupos . . . . .	53
A.1.4	Grupos de Lie . . . . .	53
A.1.5	Generadores . . . . .	54

A.1.6	Los grupos Unitarios $U(n)$ , $SU(n)$ , . . . . .	55
A.1.7	El grupo $U(1)$ . . . . .	56
A.1.8	El grupo $SU(2)$ . . . . .	56
<b>B</b>	<b>Teoría clásica de campos</b>	<b>57</b>
B.1	Ecuación del movimiento . . . . .	57
B.2	Simetrías en campos clásicos . . . . .	59
B.3	Teorema de Noether . . . . .	59
<b>C</b>	<b>Teoría de campos gauge</b>	<b>63</b>
C.1	Simetria Gauge Abeliana $U(1)$ . . . . .	63
C.2	Simetria Gauge No abeliana . . . . .	65
<b>D</b>	<b>La ecuación de Klein Gordon</b>	<b>67</b>
<b>E</b>	<b>Álgebra de matrices</b>	<b>69</b>
E.1	Matriz . . . . .	69
E.2	Operaciones en Matrices . . . . .	69
E.2.1	la transpuesta . . . . .	69
E.2.2	Mtariz simetrica y antisimetrica . . . . .	70
E.2.3	Matriz Ortogonal . . . . .	70
E.2.4	Conjugacion compleja . . . . .	70
E.2.5	Conjugacion hermitica . . . . .	70
E.2.6	Matriz Hermitica . . . . .	70
E.2.7	Matriz Unitaria . . . . .	71
E.2.8	Matriz diagonal . . . . .	71
E.2.9	Matrices de Pauli . . . . .	71
E.2.10	La traza de una matriz . . . . .	71
E.2.11	El determinante de una matriz . . . . .	72
E.2.12	Inverza de una matriz . . . . .	72
E.2.13	Auntovalores y autovectores . . . . .	72
E.2.14	Matriz definida positiva . . . . .	73
E.2.15	Teorema de la descomposicion espectral . . . . .	73
<b>F</b>	<b>Cálculos</b>	<b>74</b>
F.1	El campo clásico escalar . . . . .	74
F.1.1	Lagrangiana del campo escalar complejo . . . . .	74
F.2	El sector escalar en el modelo estándar . . . . .	75
F.2.1	Masa de los bosones gauge . . . . .	75
F.3	Estabilidad del potencial escalar en el modelo 2HDM . . . . .	78
F.3.1	Componentes de la matriz $\mathbf{K}$ . . . . .	78
F.3.2	Transformación de los parametros $K_0$ y $K_a$ . . . . .	78
F.3.3	La matriz $\mathbf{R}$ . . . . .	80

# Capítulo 1

## Introducción

El Modelo Estándar de la física de partículas es teóricamente consistente y experimentalmente exitoso hasta la fecha. Sin embargo el Modelo Estándar posee limitaciones, como la no explicación de las tres familias de fermiones, la oscilación de neutrinos, problemas relacionados con la asimetría de materia y antimateria observada en el universo, entre otros.

Este trabajo se centra en el estudio del sector escalar. Iniciamos en el capítulo 2 con un tratamiento matemático de la teoría del campo clásico escalar para ver su comportamiento ante las transformaciones de simetrías globales y locales. Además, consideramos el mecanismo de Higgs como respuesta a la generación de masas que logra unificar la teoría con el fenómeno del rompimiento espontáneo de simetría presente en la naturaleza.

En el capítulo 3 nos familiarizamos con el Modelo Estándar repasando sus propiedades físicas y su estructura matemática. Además, resaltamos el papel del sector escalar en la generación de masas de los fermiones y bosones. En el último capítulo se analiza las extensiones del Modelo Estándar, y nos centramos en el sector escalar de cada uno de estos modelos y proponemos condiciones de estabilidad para el potencial escalar. Este es un trabajo cien por ciento teórico usando un novedoso método para analizar en detalle el sector escalar en el modelo con dos dobletes de Higgs (THDM) y el modelo económico 3-3-1 basado en el grupo de simetría  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes U(1)$ . Sabemos que si en una teoría el sector escalar no es estable, sería imposible seguir tratando de imponer el rompimiento espontáneo de simetría pues la teoría sería inconsistente al no tener un potencial que garantice la existencia de un mínimo global. Esa es nuestra motivación de estudiar el sector escalar, pues daremos las condiciones para tener una teoría consistente.

# Capítulo 2

## El campo escalar clásico

El concepto de campo escalar data del siglo XIX y su aplicación está orientada a la descripción de fenómenos, ya sea en el área de la matemáticas o la física. Un campo escalar representa la distribución espacial de una magnitud que asocia un valor en cada punto del espacio. En matemáticas, el valor asociado es un número, mientras que en física será una magnitud física.

El campo escalar se usa generalmente para representar:

- La distribución de la temperatura sobre un cuerpo.
- La presión de un gas en el espacio o dentro de un cuerpo.
- Las presiones en el interior de un fluido.
- El potencial electrostático.
- La energía potencial en un sistema gravitacional, etc.

En otras áreas del conocimiento el campo escalar representa densidades de carga o de cualquier magnitud cuya naturaleza pueda aproximarse a una distribución continua.

Como expresión matemática, un campo escalar es una función  $\Phi(\mathbf{x})$  de  $R^n \rightarrow R$ , esto quiere decir que asocia a cada punto de un espacio vectorial  $R^n$  un número o escalar.

En física relativista [1], un campo escalar es aquel para el cual los valores medidos por dos observadores diferentes son invariantes bajo transformaciones de Lorentz, es decir, que el campo escalar sería un objeto de una componente que depende del espacio tiempo y bajo una transformación de Lorentz se comportaría como:

$$\Phi'(\mathbf{x}') = \Phi(\mathbf{x}). \quad (2.1)$$

Las partículas se clasifican de acuerdo a su espín<sup>1</sup>. Las que tienen espín semientero ( $1/2, 3/2, \dots$ ) se llaman fermiones, mientras las que tienen espín entero ( $0, 1, 2, \dots$ ) son llamadas bosones y se describen mediante el campo bosónico (los bosones de espín cero se conocen como bosones escalares, el bosón de Higgs es un ejemplo de un campo escalar de espín cero).

En este capítulo haremos un repaso de los conceptos fundamentales de la teoría del campo escalar, pues las temáticas analizadas tendrán una relación directa con la teoría del Modelo Estándar que es el objeto de nuestra investigación.

---

<sup>1</sup>El espín (palabra del inglés que traduce giro o girar) es una propiedad física de las partículas elementales por el cual tienen un momento angular intrínseco de valor fijo.

## 2.1. El campo escalar real

El campo escalar real es un campo relativista de variable real ( $\Phi(x) = \Phi^*(x)$ ) que describe partículas de espín 0. Dicho campo es invariante bajo transformaciones de Lorentz (2.1), además, satisface la ecuación de Klein Gordon para una partícula libre.

$$(\square + m^2)\Phi(x) = 0 \quad (2.2)$$

donde  $\square = \partial^\mu \partial_\mu$  es el operador D'Alambertiano y  $m$  es la masa de la partícula <sup>2</sup>. La dinámica del campo escalar real se describe mediante la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 \quad (2.3)$$

pues de las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenemos la ecuación de Klein-Gordon (2.2). Si bien, la ecuación de Klein Gordon describe el campo escalar en ausencia de interacciones, sabemos que estos campos pueden interactuar con otros e incluso consigo mismos. Sin embargo nuestro interés principal es tener una idea que facilite nuestra comprensión de la dinámica del campo escalar.

## 2.2. El campo escalar complejo.

Consideremos ahora el campo escalar complejo  $\Phi(x)$ , que puede ser expresado en términos de dos campos escalares reales de la siguiente manera:

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (2.4)$$

Este campo también satisface la ecuación de Klein-Gordon (2.2), y su densidad Lagrangiana se expresa como:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi \Phi^*, \quad (2.5)$$

el cual es un resultado útil para estudiar el sector de campos escalares en la física de partículas <sup>3</sup>.

## 2.3. Simetrías globales en el modelo del campo escalar

Un sistema físico puede sufrir transformaciones en sus propiedades quedando invariante el Lagrangiano de dicho sistema.

Las transformaciones que un sistema físico experimenta pueden ser de tipo local (cuando depende de las coordenadas) o global (cuando se hace sobre las propiedades internas del sistema y dicha transformación no depende de las coordenadas). Ahora, si bajo cualquier transformación que un sistema físico experimente y éste permanece invariante, decimos que se ha realizado una transformación de simetría, sin embargo esto no siempre sucede, en algunos casos cuando se hace una transformación local sobre un sistema puede que este no sea invariante, por lo que necesitamos extender el concepto de simetría global a simetría local utilizando los campos gauge <sup>4</sup> que logran hacer que una simetría global sea también local.

<sup>2</sup> Repasamos la ecuación de Klein-Gordon en el apéndice (D)

<sup>3</sup> La forma de obtener este Lagrangiano se expone en el apéndice E sección (F.1.1)

<sup>4</sup> Hemos un repaso de esta teoría en el apéndice (C)

Para explicar este hecho, tomemos un sistema descrito por el campo escalar expresado por la Lagrangiana (2.5), ahora realicemos una transformación de simetría global  $U(1)$ <sup>5</sup> de tal forma que:

$$\Phi'(x) = e^{-iq\theta}\Phi(x), \quad (2.6)$$

y para su conjugado complejo, usamos la transformación

$$\Phi'^*(x) = e^{iq\theta}\Phi^*(x). \quad (2.7)$$

Es claro ver que el Lagrangiano (2.5) es invariante bajo la transformación  $U(1)$  indicada en (2.6) y (2.7). Sin embargo, si el estado base del sistema físico no conserva la simetría decimos que hay un rompimiento espontáneo de simetría.

## 2.4. El rompimiento espontáneo de simetría

A menudo sucede que los sistemas perfectamente simétricos son inestables, es decir basta una pequeña modificación o perturbación en el entorno para que la simetría perfecta se rompa, a este proceso se denomina ruptura espontánea de simetría y es muy común en la naturaleza. En primer lugar observemos cómo surge el rompimiento espontáneo de simetría de un modelo desde el punto de vista matemático, para ello consideremos la Lagrangiana que describe un campo escalar real  $\Phi$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi)(\partial^\mu\Phi) - V(\Phi), \quad (2.8)$$

donde el primer término es la energía cinética y el segundo se relaciona con la energía potencial  $V(\Phi)$  del sistema y se expresa como:

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2 + \frac{1}{4}|\lambda|\Phi^4, \quad (2.9)$$

donde  $\mu$  está relacionado con el término de masa del campo escalar. Además, aseguramos que el coeficiente del término cuártico sea positivo  $|\lambda| > 0$  con el propósito de garantizar la estabilidad del potencial<sup>6</sup> y que bajo estas condiciones el potencial también sea renormalizable<sup>7</sup>.

Vemos que la Lagrangiana (2.8) es invariante bajo la transformación de paridad

$$\Phi = -\Phi, \quad (2.10)$$

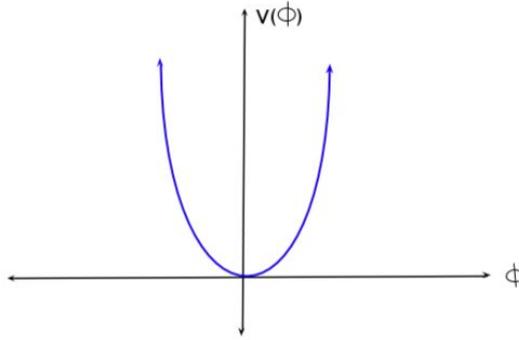
y teniendo en cuenta la estructura del potencial (2.9) el estado de más baja energía es aquel donde el potencial es mínimo. A dicho estado lo denominamos  $\langle\Phi\rangle_0$  y será el valor esperado del vacío del campo  $\Phi$ .

Si calculamos el mínimo del potencial, considerando que  $\mu^2 > 0$ , vemos que cuando  $\Phi = 0$  el potencial toma el mínimo valor y la gráfica de la situación sería la siguiente:

<sup>5</sup>Ver apéndice (A.1.7)

<sup>6</sup>Para que el potencial sea estable, es decir que tenga un mínimo global, se necesita que esté acotado por debajo, es decir, que no haya una dirección en el espacio en la que el potencial tienda a menos infinito. En toda teoría se requiere la existencia de un mínimo estable, alrededor del cual se puede hacer cálculos perturbativos.

<sup>7</sup>La renormalización se refiere a un conjunto de técnicas usadas para obtener términos finitos en un desarrollo perturbativo que representen pequeñas alteraciones al sistema.

Figura 2.1: Considerando  $\mu^2 > 0$ 

El punto  $\Phi = 0$  corresponde al estado base, es decir al vacío, y si consideramos pequeñas oscilaciones alrededor del vacío del sistema, representado por el Lagrangiano (2.8) con el potencial definido en (2.9) haciendo una aproximación a segundo orden, obtenemos:

$$\mathcal{L}_{s.o} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^2], \quad (2.11)$$

que describe un campo escalar con masa  $|\mu|$ .

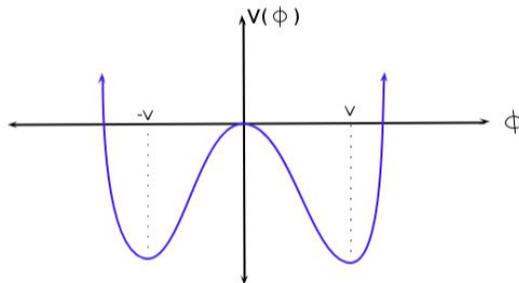
Lo interesante ocurre cuando hacemos la consideración  $\mu^2 < 0$ , entonces el potencial será:

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}|\mu^2|\Phi^2 + \frac{1}{4}|\lambda|\Phi^4. \quad (2.12)$$

Ahora, el mínimo de la expresión anterior (derivando respecto a  $\Phi$  e igualando a cero) tiene dos valores; La ecuación (2.12) toma su valor mínimo en:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \pm \sqrt{\frac{|\mu^2|}{|\lambda|}} = \pm v. \quad (2.13)$$

La situación se representa en la siguiente gráfica

Figura 2.2: Considerando  $\mu^2 < 0$ 

Vemos que hay una degeneración del vacío, pues hay dos valores que pueden ser elegidos como el estado base; lo que significa que las consecuencias físicas deben ser independientes del valor que se elija para el vacío.

Entonces cuando un Lagrangiano es invariante bajo un grupo de transformaciones, pero el estado

base no lo es, decimos que tenemos un rompimiento espontáneo de simetría. El paso a seguir es elegir uno de los dos valores para el vacío; en nuestro caso escogemos:

$$\langle \Phi \rangle_0 = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}$$

en donde  $v$  es el valor positivo de la expresión (2.13). Realizando un desplazamiento del campo escalar alrededor del vacío:

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0 = \Phi - v \Rightarrow \Phi = \Phi' + v,$$

y sustituyendo este valor en el Lagrangiano (2.8) tenemos que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu(\Phi' + v))(\partial^\mu(\Phi' + v)) + \frac{1}{2}|\mu^2|(\Phi' + v)^2 - \frac{1}{4}|\lambda|(\Phi' + v)^4. \quad (2.14)$$

Destruyendo el paréntesis, resolviendo las potencias y tomando en cuenta que  $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}$  entonces  $|\lambda| = \frac{-\mu^2}{v^2}$ , obtenemos:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\Phi')(\partial^\mu\Phi') + \mu^2 \left( \frac{\Phi'^4}{4v^2} + \frac{\Phi'^3}{v} + \Phi'^2 - \frac{v^2}{4} \right), \quad (2.15)$$

que para pequeñas oscilaciones alrededor del vacío con  $\mu^2 < 0$  el Lagrangiano aproximado a segundo orden es:

$$\mathcal{L}_{s.o} = \frac{1}{2} \left\{ (\partial_\mu\Phi')(\partial^\mu\Phi') - 2|\mu^2|\Phi'^2 \right\}, \quad (2.16)$$

donde hemos omitido la constante por no ser significativa en nuestro análisis. Vemos que  $2|\mu^2|$  es el término de masa de la partícula escalar que oscila.

Lo anterior nos ayuda a ver cómo ocurre el rompimiento espontáneo de simetría para una transformación discreta  $\Phi \rightarrow -\Phi$  (conocida como simetría de paridad). Sin embargo, miremos lo que sucede con las transformaciones para grupos de simetría continuas.

## 2.5. Rompimiento espontáneo de simetrías continuas

Para el análisis tomemos el Lagrangiano para dos campos escalares reales  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$ , de la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu\Phi_1)(\partial^\mu\Phi_1) + (\partial_\mu\Phi_2)(\partial^\mu\Phi_2)] - V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2). \quad (2.17)$$

Este lagrangiano es invariante bajo el grupo  $SO(2)$  de rotaciones en el plano,

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

donde los campos  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  los hemos expresado como un doblete

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Ahora, como en la sección anterior consideremos el potencial hasta orden cuártico

$$V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) = V(\Phi^2) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2 + \frac{1}{4}|\lambda|(\Phi^2)^2, \quad (2.20)$$

aclarando que si  $\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$  entonces  $\Phi^2 = \Phi^t\Phi = \Phi_1^2 + \Phi_2^2$ .

Ahora, si consideramos en primer lugar  $\mu^2 > 0$  el potencial toma el valor mínimo (derivando respecto a  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  e igualando a cero) en  $\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \Phi \rangle_0$  y la gráfica de la situación es la siguiente:

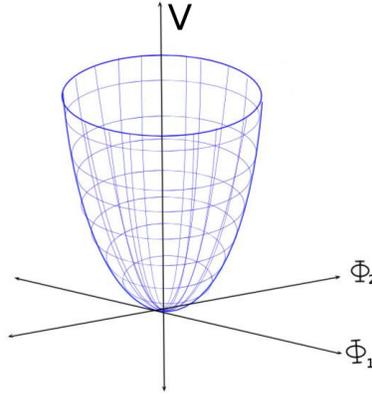


Figura 2.3: Considerando  $\mu^2 > 0$

y para pequeñas oscilaciones de los campos escalares alrededor del vacío el Lagrangiano (2.17) toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}[\{(\partial_\mu\Phi_1)(\partial^\mu\Phi_1) - \mu^2\Phi_1^2\} + \{(\partial_\mu\Phi_2)(\partial^\mu\Phi_2) - \mu^2\Phi_2^2\}], \quad (2.21)$$

donde observamos que las partículas escalares  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  tienen la misma masa  $|\mu^2|$ .

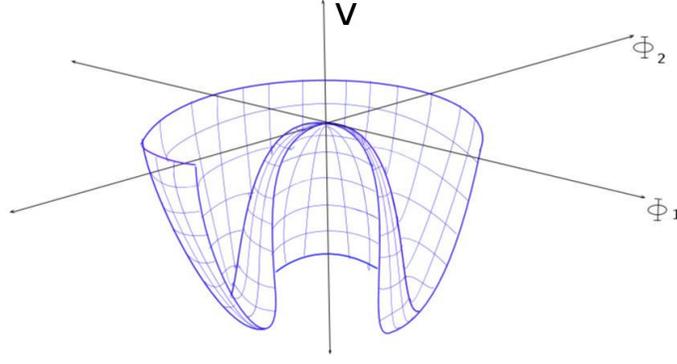
Si ahora consideramos  $\mu^2 < 0$  ocurre un rompimiento espontáneo de simetría, ya que el valor mínimo del potencial se encuentra en dos puntos

$$\langle \Phi | \Phi \rangle_0 = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}},$$

o lo que es lo mismo:

$$\langle \Phi \rangle_0^2 = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{|\lambda|}, \quad (2.22)$$

el gráfico que muestra la situación es el siguiente:

Figura 2.4: Considerando  $\mu^2 < 0$ 

Vemos que el vacío se ha degenerado, pues el estado base puede tomar cualquier valor comprendido en la circunferencia de radio  $\frac{-\mu^2}{|\lambda|}$ . Como en el caso anterior elegimos un valor para el vacío, por ejemplo, sea  $\Phi_2^2 = 0$  y  $\Phi_1^2 = \frac{-\mu^2}{|\lambda|}$  entonces:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde  $v = \langle \Phi \rangle_0 = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}$ . Haciendo un desplazamiento del campo

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0, \quad (2.23)$$

donde el campo  $\Phi' = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$  es el campo desplazado hacia el vacío escogido, de lo cual

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

por lo que tenemos el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta + v \\ \xi \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Este resultado lo sustituimos en el Lagrangiano (2.17) y desarrollando los pasos intermedios obtenemos el Lagrangiano para pequeñas oscilaciones del campo escalar alrededor del vacío

$$\mathcal{L}_{s.o} = \frac{1}{2} \{ (\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2 + (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) \}, \quad (2.26)$$

y aparecen dos partículas en el espectro, la primera es  $\eta$  que tiene masa igual a  $2|\mu^2|$  y la otra partícula es  $\xi$  que no tiene masa. Así que podemos generalizar el resultado anterior dado en el teorema de Goldstone:

*“Si una teoría de campos tiene una simetría global en el Lagrangiano, que a su vez no es simetría para el vacío, entonces debe existir un bosón escalar o pseudoescalar sin masa, asociado a cada generador que no anule el vacío, y que tiene sus mismos números cuánticos. Estas partículas se identifican como bosones de Goldstone” [16].*

## 2.6. El mecanismo de Higgs

Si tomamos un Lagrangiano invariante bajo una transformación gauge local <sup>8</sup> que dé lugar a un rompimiento espontáneo de simetría, surge en forma inesperada una cooperación entre los campos gauge no masivos y los bosones de Goldstone que surgen como consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría, como se analizó en la sección anterior. A dicha interacción se le conoce como el mecanismo de Higgs, ideado por Peter Higgs, que es ligeramente distinto al modelo de Goldstone, dado que lo que se rompe en este caso es una simetría local.

Para comprender su funcionamiento consideremos el caso más sencillo de la simetría gauge abeliana en el sector de Higgs descrito a continuación:

Tomemos el Lagrangiano del campo escalar complejo escrito de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2 |\Phi|^2 - |\lambda| (\Phi \Phi^*)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} \quad (2.27)$$

donde la derivada covariante es

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$$

y el tensor invariante gauge está dado por:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

El Lagrangiano (2.27) es invariante bajo el grupo Abeliano  $U(1)$  de rotaciones <sup>9</sup>.

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\theta} \Phi$$

y bajo la transformación gauge abeliana local

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x) = e^{iq\alpha(x)} \Phi(x),$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x).$$

Como de costumbre, consideramos las dos posibilidades para el parámetro  $\mu^2$  en el potencial

$$V(\Phi \Phi^*) = |\mu^2| |\Phi|^2 - |\lambda| (\Phi \Phi^*)^2. \quad (2.28)$$

Para  $\mu^2 > 0$  el potencial tiene un único mínimo en  $\Phi = 0$  y la simetría del Lagrangiano se conserva y, como resultado se obtiene la teoría de la electrodinámica cuántica (QED) de campos escalares cargados, con un solo bosón no masivo correspondiente al fotón  $A_\mu$  y dos partículas escalares  $\Phi$  y  $\Phi^*$  con la misma masa  $|\mu|$ .

Ahora si consideramos  $\mu^2 < 0$  surge el rompimiento espontáneo de simetría que requiere un análisis más detallado, pues el potencial tiene infinitos valores para el estado base, lo que indica una degeneración del vacío.

Tomemos el siguiente valor para el vacío:

$$\langle |\Phi|^2 \rangle_0 = -\frac{\mu^2}{2|\lambda|} = \frac{v^2}{2}. \quad (2.29)$$

Así que el campo desplazado alrededor del vacío es:

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0. \quad (2.30)$$

<sup>8</sup>El estudio de la simetría gauge la puede ver en el epéndice (C)

<sup>9</sup>ver apéndice A sección (A.1.7)

Es conveniente trabajar con la siguiente parametrización del campo escalar complejo:

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\xi}{v}} (v + \eta). \quad (2.31)$$

Si trabajamos con pequeñas oscilaciones del campo alrededor del vacío escogido, basta con expandir en serie de potencia la representación exponencial del campo  $\Phi'$  de tal forma que

$$\Phi' \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi) \quad (2.32)$$

que al sustituir en el Lagrangiano (2.27) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial^\mu + iqA^\mu)(v + \eta + i\xi)][(\partial_\mu - iqA_\mu)(v + \eta - i\xi)] - \frac{\mu^2}{2} [(v + \eta + i\xi)(v + \eta - i\xi)] \\ + \frac{\mu^2}{2v^2} [(v + \eta + i\xi)(v + \eta - i\xi)]^2 - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Si resolvemos los productos y hacemos una aproximación a la segunda potencia con el propósito de no escribir todos los términos sino aquellos más significativos, tenemos:

$$\mathcal{L}_{s.o} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + qv A_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + \dots \quad (2.34)$$

Como esperábamos del teorema de Goldstone, el campo  $\eta$  que corresponde a una oscilación radial tiene una masa igual a  $2|\mu^2|$ . El campo  $A_\mu$  aparentemente tiene masa pero en el penúltimo término está mezclado con el campo  $\xi$  que no es masivo, de ahí hacemos un truco matemático tomando por separado la expresión del Lagrangiano que involucra los campos  $A_\mu$  y  $\xi$  de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} [(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + qv A_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu] \quad (2.35)$$

factorizando, tenemos:

$$\frac{q^2 v^2}{2} \left( A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi \right) \left( A^\mu + \frac{1}{qv} \partial^\mu \xi \right), \quad (2.36)$$

de lo cual se sugiere la siguiente transformación gauge del campo  $A_\mu$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi. \quad (2.37)$$

Por lo tanto el Lagrangiano (2.34) se reduce a lo siguiente:

$$\mathcal{L}_{s.o} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu \quad (2.38)$$

donde hemos obviado una constante que no es significativa en nuestro análisis. Podemos ver que aparte del espectro de la partícula oscilando alrededor del vacío dado por el campo  $\eta$  con masa, tenemos un campo vectorial  $A'_\mu$  que también es masivo y, ya no está el campo  $\xi$ , que ha sido absorbido dentro del campo gauge  $A_\mu$ .

Lo anteriormente expuesto lo llamaremos el mecanismo de Higgs para el caso Abelian, y a las partículas descritas por los campos escalares  $\eta$  se les llama bosones Higgs y a las descritas por  $A_\mu$  bosones vectoriales.

Algo que podemos notar es que se mantiene los cuatro grados de libertad. Antes del rompimiento espontáneo de simetría tenemos dos escalares y un bosón vectorial no masivo ( $1 \times 2 + 1 \times 2 = 4$ ) y después del rompimiento tenemos un escalar y un boson vectorial masivo ( $1 \times 1 + 1 \times 3 = 4$ ).

## 2.7. Rompimiento espontáneo de simetría no abeliana

Para abordar las complicaciones adicionales que conlleva la ruptura espontánea de simetría no abeliana, elegimos una teoría gauge  $SU(2)$ <sup>10</sup> y estudiamos los campos escalares en la representación del triplete escalar (o isovector)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (2.39)$$

que da lugar al Lagrangiano invariante gauge  $SU(2)$  del sector escalar

$$\mathcal{L} = |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2 |\Phi|^2 - |\lambda| (\Phi \Phi^*)^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (2.40)$$

donde la derivada covariante es:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig T_j b_\mu^j, \quad j = 1, 2, 3 \quad (2.41)$$

y los  $T_j$ ,  $b_\mu^j$  son los generadores del grupo  $SU(2)$  y los campos gauge respectivamente. La transformación gauge  $SU(2)$  consiste en lo siguiente:

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \Phi,$$

donde el factor exponencial es una matriz  $3 \times 3$ . El operador  $\mathbf{T}$  representa los generadores del grupo  $SU(2)$  y satisface el algebra:

$$[T^j, T^k] = i\varepsilon_{jkl} T^l,$$

donde la representación adjunta del generador  $\mathbf{T}$  es:

$$(T^j)_{kl} = -i\varepsilon_{jkl}.$$

Antes del rompimiento espontáneo de simetría para el caso del parámetro  $\mu^2 > 0$  el potencial tiene un mínimo en  $\Phi = 0$ , dicho resultado corresponde a las teorías de campos de Yang Mills donde tenemos tres bosones escalares con la misma masa y tres bosones gauge sin masa para un total de 9 grados de libertad de las partículas.

Ahora, considerando  $\mu^2 < 0$  se genera el rompimiento espontáneo de simetría y en consecuencia encontramos una degeneración del vacío. Como lo hemos venido haciendo, tomamos el valor esperado del vacío en una componente neutra del triplete escalar:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

donde  $v = -\frac{\mu^2}{|\lambda|}$ . Desplazando el campo escalar, obtenemos:

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0. \quad (2.43)$$

Entonces:

$$\Phi = \Phi' + \langle \Phi \rangle_0. \quad (2.44)$$

<sup>10</sup>Apéndice A sección (A.1.8)

Si escogemos una parametrización adecuada para el campo escalar

$$\Phi = e^{\frac{i}{v}(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

y definimos la transformación gauge local

$$\Phi \rightarrow \Phi' = e^{\frac{-i}{v}(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2)} \Phi, \quad (2.46)$$

implica que  $\Phi$  se reduce a:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}. \quad (2.47)$$

Sustituyendo este valor en el Lagrangino (2.27), obtenemos para pequeñas oscilaciones alrededor del vacío el siguiente resultado:

$$\mathcal{L}_{s.o} = \frac{1}{2}[(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{g^2 v^2}{2} (b_\mu^1 b^{1\mu} + b_\mu^2 b^{2\mu}) + \dots \quad (2.48)$$

Este lagrangiano revela que:

- $\eta$  tiene masa de valor  $-2\mu^2 > 0$
- los bosones  $b_\mu^1$  y  $b_\mu^2$  asociados a los generadores  $T_1$  y  $T_2$  que rompen la simetría del vacío, adquieren una masa común de valor  $gv$ .
- los bosones escalares  $\xi_1$  y  $\xi_2$ , como consecuencia del teorema de Goldstone, han desaparecido por completo del Lagrangiano.
- y el bosón gauge  $b_\mu^3$ , que no aparece en la expresión, no tiene masa y corresponde al generador  $T_3$  que deja el vacío invariante

y nuevamente notamos que antes y después del rompimiento espontáneo de simetría, el número de grados de libertad de las partículas se conserva, pues sigue siendo 9, un campo escalar, dos bosones vectoriales masivos y un bosón sin masa ( $1 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 9$ ).

Una vez visto el proceso del rompimiento espontáneo de simetría y el papel que desempeña el mecanismo de Higgs desde un punto de vista matemático ya podemos ver las implicaciones físicas que hace del Modelo Estándar una teoría de gran elegancia matemática que logra describir de manera muy precisa los resultados experimentales. Es por eso que en el siguiente capítulo nos centraremos en conocer de manera mas detallada el sector escalar del Modelo Estándar.

# Capítulo 3

## El sector escalar en el Modelo Estándar

La búsqueda de los constituyentes fundamentales de la materia y de las interacciones que rigen su dinámica ha impulsado el desarrollo de la física de altas energías, y con ello se ha generado modelos teóricos que explican las observaciones experimentales. Particularmente, la teoría que ha tenido mayor éxito hasta el momento, es el Modelo Estándar (ME) de la física de partículas elementales, que consiste en una teoría que describe las interacciones electrodébiles y fuertes. El ME no sólo describe extremadamente bien los resultados experimentales, también algunas de sus predicciones, como la existencia de los bosones mediadores de las interacciones débiles y la relación entre sus masas fueron corroboradas incluso con una precisión de varias cifras significativas (como el caso del boson de Higgs en el 2012).

El propósito del presente capítulo es realizar una introducción breve de la dinámica del ME, en especial de su sector escalar que es nuestro tema de mayor interés.

### 3.1. Estructura del Modelo Estándar

El ME de la física de partículas es una teoría relativista de campos cuánticos desarrollada entre 1970 y 1973, basada en la idea de la unificación de las interacciones presentes en la naturaleza. Además, considera a las partículas elementales como entes irreducibles cuya cinemática está regida por las cuatro interacciones conocidas.

Hasta la fecha, casi todas las pruebas experimentales de las tres fuerzas descritas por el ME están de acuerdo con sus predicciones. Sin embargo, dicho modelo no alcanza a ser una teoría completa por cuestiones que aun están sin resolver [11]. A pesar de todo no deja de ser aceptada y reconocida como una de las teorías mas importante y mejor desarrolladas del siglo.

#### 3.1.1. Interacciones y partículas elementales

En la naturaleza hay cuatro fuerzas que son responsables de todos los fenómenos en el Universo:

- **Interacción gravitacional.** Esta es una interacción solo atractiva, ya que dos cuerpos con masa siempre tienden a atraerse por la fuerza de gravedad, esta interacción afecta a todas las partículas masivas, en comparación con el resto de interacciones es la más débil de todas.
- **Interacción electromagnética.** Se manifiesta a corta escala, por ejemplo entre protones y

electrones, y a largas distancias, en la propagación de la luz, ondas de radio, etc. Es mucho más fuerte que la gravitacional y su alcance es infinito

- **Interacción nuclear débil.** Es la responsable de la desintegración de partículas y núcleos atómicos en los fenómenos radioactivos. De acuerdo a su nombre, es menos débil que la anterior, y con un alcance muy limitado, de millonésimas de milímetro y es unos diez mil millones de veces más débil que la electromagnética.
- **Interacción nuclear fuerte.** Es la responsable de que los quarks se unan para formar protones y neutrones, y de que éstos se acoplen en el núcleo atómico. Es la más fuerte de las cuatro, su intensidad es unas 1000 veces mayor que la fuerza de repulsión electromagnética.

El ME logra demostrar que la fuerza electromagnética y la fuerza débil son en realidad la manifestación de una única fuerza llamada electrodébil y junto con la interacción fuerte forman un único conjunto de interacciones, sin embargo, la interacción gravitacional no se considera en el Modelo Estándar<sup>1</sup>.

En sus inicios la física de partículas consistía en estudiar el comportamiento del electrón, del protón y del neutrón, las únicas partículas conocidas hasta el año 1932. Sin embargo, con la llegada de los detectores se fueron descubriendo más y más partículas subatómicas hasta formar lo que se llamó *el zoo de partículas* [14] por lo que no era muy ventajoso hablar de muchas partículas elementales. Un gran avance se dió cuando se logró clasificarlas en dos grupos basándose en el espín de cada partícula. Se llamó bosones aquellos que tienen spín entero y fermiones si tienen spín semientero. A su vez, los fermiones se clasifican según el tipo de interacción. Las partículas fermiónicas que tienen interacción fuerte se llaman *hadrones*. Entre ellas están, el protón, el neutrón, y el pión ( $\pi$ ). Estas partículas también interactúan a través de la fuerza débil y electromagnética. Los hadrones se clasifican en bariones y mesones, la razón de subclasificarlos es que los mesones pueden destruirse, pueden aparecer y desaparecer y ser creados a voluntad mientras que el número de bariones en el universo se conserva. Si un barión desaparece tiene que aparecer otro barión que lo reemplace, así se mantiene el número total de bariones constante.

Algo importante es que los bariones y mesones no son partículas elementales, pues están hechas de *Quarks*: up (arriba), down (abajo), charm (encanto), strange (extraño), top (cima o verdad), bottom (fondo o belleza). Sus propiedades se describen en la figura (3.1)

3 MeV $\frac{2}{3}$ <b>u</b> up	1.24 GeV $\frac{2}{3}$ <b>c</b> charm	172.5 GeV $\frac{2}{3}$ <b>t</b> top
6 MeV $-\frac{1}{3}$ <b>d</b> down	95 MeV $-\frac{1}{3}$ <b>s</b> strange	4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ <b>b</b> bottom

Figura 3.1: los quarks que componen los hadrones.

Por otro lado, las partículas que no tienen interacción fuerte, se llaman *Leptones*, que a su vez se clasifican en cargados como el electrón ( $e$ ), el muón ( $\mu$ ) y el tauón ( $\tau$ ) y los no cargados

<sup>1</sup>Una meta importante de la física de partículas es encontrar la unificación de todas estas interacciones en una sola teoría del todo.

conocidos como neutrinos (el neutrino electrónico ( $\nu_e$ ), el muónico ( $\nu_\mu$ ) y el tauónico ( $\nu_\tau$ )). La figura (3.2) describe las propiedades de los leptones

$<2 \text{ eV}$ $0$ $\frac{1}{2}$ <b><math>\nu_e</math></b> electron neutrino	$<0.19 \text{ MeV}$ $0$ $\frac{1}{2}$ <b><math>\nu_\mu</math></b> muon neutrino	$<18.2 \text{ MeV}$ $0$ $\frac{1}{2}$ <b><math>\nu_\tau</math></b> tau neutrino
$0.511 \text{ MeV}$ $-1$ $\frac{1}{2}$ <b><math>e</math></b> electron	$106 \text{ MeV}$ $-1$ $\frac{1}{2}$ <b><math>\mu</math></b> muon	$1.78 \text{ GeV}$ $-1$ $\frac{1}{2}$ <b><math>\tau</math></b> tau

Figura 3.2: Los leptones neutros en la parte superior y cargados en la parte inferior.

Las partículas elementales también se clasifican en familias o generaciones. La primera familia se compone de cuatro partículas elementales: dos quarks y dos leptones; ver figura (3.3).

	I
masa →	3 MeV
carga →	$\frac{2}{3}$
spin →	$\frac{1}{2}$
nombre →	up
	<b>u</b>
	6 MeV
	$-\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{2}$
	down
Quarks	<b>d</b>
	$<2 \text{ eV}$
	0
	$\frac{1}{2}$
	<b><math>\nu_e</math></b>
	electron neutrino
	0.511 MeV
	-1
	$\frac{1}{2}$
	<b>e</b>
Leptones	electron

Figura 3.3: Primera familia de partículas fermiónicas.

La segunda familia se compone de cuatro partículas elementales que son una versión más pasada de la primera familia, tienen las mismas características físicas solo que con mayores masas; ver figura (3.4).

II

1.24 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>C</b> charm
95 MeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>S</b> strange
<0.19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ <b><math>\nu_\mu</math></b> muon neutrino
106 MeV -1 $\frac{1}{2}$ <b><math>\mu</math></b> muon

Figura 3.4: Segunda familia de partículas fermiónicas.

y la tercera familia con las mismas características físicas solo que en una versión aún más pesadas de las anteriores dos familias; ver figura (3.5).

III

172.5 GeV $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>t</b> top
4.2 GeV $-\frac{1}{3}$ $\frac{1}{2}$ <b>b</b> bottom
<18.2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ <b><math>\nu_T</math></b> tau neutrino
1.78 GeV -1 $\frac{1}{2}$ <b>T</b> tau

Figura 3.5: Tercera familia de partículas fermiónicas.

Se obtienen así un total de doce partículas fermiónicas elementales.

Con respecto a los bosones podemos decir que son los responsables de las interacciones entre las partículas fermiónicas, o sea que en una interacción hay un intercambio de bosones, por ejemplo: Si el bosón que se intercambia en la interacción es:

El fotón ( $\gamma$ ), decimos que se trata de una interacción electromagnética.

Si se intercambia el gluón ( $g$ ) decimos que hay interacción fuerte.

Si hay intercambio del bosón  $W^\pm$  o  $Z^0$  decimos que es interacción débil.

En el ME las propiedades físicas de los bosones se describen en la figura (3.6)



Figura 3.6: Partículas bosónicas de spín entero.

La figura (3.7) resume la estructura de la materia y sus interacciones dentro del Modelo Estándar:

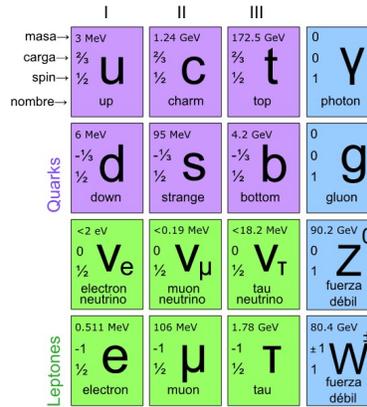


Figura 3.7: El Modelo Estándar de la física de partículas.

Con el descubrimiento del bosón de Higgs en el 2012, el ME queda completo, pues era la única partícula que no había sido detectada.

Lo que hace del ME una teoría muy interesante es que logra unificar las tres interacciones usando las teorías gauge basadas en grupos de simetrías, como lo podemos ver en la siguiente tabla:

Tabla 3.1: Simetrías del Modelo Estándar

Interacción	Grupo gauge	Bosón	Simbolo
Electromagnética (QED)	$U(1)$	Fotón	$\gamma$
Débil	$SU(2)$	bosones intermedarios	$W^\pm, Z^0$
Fuerte (QCD)	$SU(3)$	gluones	g

Una interacción en donde solo se tiene una carga (la carga del electrón) se conoce como la electrodinámica cuántica (QED), si consideramos dos cargas tenemos la teoría débil, y la extensión a tres cargas es lo que llamamos la cromodinámica cuántica (QCD).

El Modelo Estándar unifica las tres teorías en una sola mediante el grupo de simetría  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$ , de lo que hablaremos a continuación.

## 3.2. La matemática del Modelo Estándar

El ME está basado en el principio de invarianza de norma <sup>2</sup> en el cual las fuerzas fundamentales de la naturaleza son descritas mediante la teoría de grupos <sup>3</sup>, más precisamente los llamados grupos gauge. El Lagrangiano que describe el Modelo Estándar se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{M.E} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_Y. \quad (3.1)$$

donde:

- $\mathcal{L}_f$  se refiere al Lagrangiano fermiónico.
- $\mathcal{L}_H$  se refiere al Lagrangiano del sector escalar.
- $\mathcal{L}_g$  se refiere al Lagrangiano de los campos gauge adicionados para asegurar la invarianza de norma.
- $\mathcal{L}_Y$  se refiere al Lagrangiano de Yukawa o del acoplamiento entre campos.

El Lagrangiano (3.1) es inavariante bajo el grupo de simetría  $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ , donde los subíndices  $C, L, Y$ , se refieren al sector de color, al sector leptónico y al sector de Yukawa respectivamente.

### 3.2.1. El sector electrodébil

En primer lugar construyamos el Lagrangiano del sector electrodébil asociado con la simetría

$$SU(2) \otimes U(1). \quad (3.2)$$

Los fermiones son descritos en términos de campos de Dirac, donde los dobletes izquierdos  $L$  se representan por espinores de cuatro componentes sujetos a la simetría gauge  $SU(2)$  y los singletes derechos  $R$  bajo el grupo  $U(1)$  de simetría. En esta teoría los neutrinos son considerados no masivos por lo que no tienen representación derecha. Así que:

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L \\ \left( \begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right)_L \\ \left( \begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right)_L \end{array} \right. \quad R = \left\{ \begin{array}{ll} e_R. & \text{Primera familia.} \\ \mu_R. & \text{Segunda familia.} \\ \tau_R. & \text{Tercera familia.} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Empecemos con el Lagrangiano de Dirac del sector fermiónico para una partícula libre

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi. \quad (3.4)$$

<sup>2</sup>Invarianza de norma significa que la física no depende de la forma en que describamos los parámetros internos de un sistema. También se conoce como invarianza bajo transformaciones gauge.

<sup>3</sup>la teoría de grupos se repasa en el apéndice (A)

Para que sea invariante bajo la transformación (3.2) necesitamos introducir cuatro campos gauge ( $A_\mu, b_\mu^l$  con  $l = 1, 2, 3.$ ) correspondientes a las siguientes simetrías:

$$SU(2) \rightarrow F_{\mu\nu}^l = \partial_\mu b_\nu^l - \partial_\nu b_\mu^l + g\epsilon_{jkl}b_\mu^j b_\nu^k, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

$$U(1) \rightarrow f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.6)$$

Por lo que el Lagrangiano invariante del sector electrodébil se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \bar{R}i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu \right) R + \bar{L}i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}\sigma_l b_\mu^l \right) L - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^l F^{l\mu\nu} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad (3.7)$$

donde hemos usado las letras  $R$  para indicar el Lagrangiano del sector fermiónico derecho y  $L$  para el sector izquierdo, donde  $\sigma_l$  son los generadores del grupo  $SU(2)$ , las matrices de Pauli. La constante de acople del grupo  $SU(2)$  la llamamos  $g$  y la constante de acople del grupo  $U(1)$  es  $g'/2$  donde el factor  $1/2$  nos ayuda a simplificar la expresión (3.7).

La teoría de las interacciones débiles y electromagnéticas descrita por el Lagrangiano (3.7) no es satisfactorio, por dos razones obvias. Contiene cuatro bosones gauge sin masa  $A_\mu, b_\mu^l$  con  $l = 1, 2, 3.$  mientras que en la naturaleza sólo hay un bosón no masivo, el fotón. Además, la invariancia  $SU(2)$  prohíbe un término de masa para el electrón. Nuestra tarea es modificar la teoría para que sólo quede una única cantidad conservada (la carga eléctrica) correspondiente a un bosón de gauge sin masa (el fotón), y que el electrón adquiera masa. Para lograrlo introduciremos un campo escalar complejo. Así que estudiemos el Lagrangiano del sector escalar.

### 3.3. El sector escalar

En el ME el Lagrangiano del sector escalar se describe de laguiente manera:

$$\mathcal{L}_{Escalar} = |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda|(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (3.8)$$

donde  $\Phi$  es un doblete escalar complejo,  $\mu$  es el término relacionado con la masa y  $|\lambda|$  es el término de autointeracción. Además, la derivada covariante

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'Y}{2}\mathcal{A}_\mu + \frac{ig}{2}\sigma_l b_\mu^l, \quad (3.9)$$

donde  $Y$  es la hipercarga y los  $\sigma_l$  son las tres matrices de Pauli generadores del grupo  $SU(2)$ . La derivada covariante (3.9) asegura que el Lagrangiano (3.8) es invariante bajo el grupo de simetría (3.2).

Para describir la interacción entre campos fermiónicos y campos escalares, adicionamos el Lagrangiano de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -G_e[\bar{\mathbf{R}}(\Phi^\dagger \mathbf{L}) + (\bar{\mathbf{L}}\Phi)\mathbf{R}], \quad (3.10)$$

invariante bajo el grupo (3.2), donde  $G_e$  es la constante de acople de la interacción.

Así que el Lagrangiano más general hasta el momento es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{R}i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu \right) R + \bar{L}i\gamma^\mu \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}\sigma_l b_\mu^l \right) L - \frac{1}{4} \{ F_{\mu\nu}^l F^{l\mu\nu} + f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} \} \\ & + |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda|(\Phi^\dagger \Phi)^2 - G_e[\bar{\mathbf{R}}(\Phi^\dagger \mathbf{L}) + (\bar{\mathbf{L}}\Phi)\mathbf{R}]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Trabajemos ahora el Lagrangiano del sector escalar (3.8) y consideremos  $\mu^2 < 0$  para obtener un rompimiento espontáneo de simetría (ver sección 1.4). Sabemos que bajo esta consideración el vacío se ha degenerado al adquirir infinitud de valores alrededor del círculo de radio  $-\mu^2/|\lambda|$ , por lo tanto escogemos el siguiente valor para el vacío sobre la componente neutra del doblete escalar:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

donde  $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}$ .

Este valor esperado rompe la simetría  $SU(2) \otimes U(1)$ , y por el teorema de Goldstone aparece un campo bosónico no masivo por cada generador roto del grupo  $SU(2) \otimes U(1)$ .

Un generador se rompe si no deja invariante el vacío, en nuestro caso tenemos como generadores del grupo (3.2) las matrices de Pauli para el grupo  $SU(2)$ , el generador  $\mathbf{Y}$  para el grupo  $U(1)$  y debido a la relación de Gell-Mann Nishijima

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_3 + \mathbf{Y}),$$

tenemos el generador de carga  $\mathbf{Q}$ . Entonces al aplicar estos generadores al vacío escogido obtenemos lo siguiente:

$$\sigma_1 \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.13)$$

$$\sigma_2 \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv\frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.14)$$

$$\sigma_3 \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \neq 0 \quad (3.15)$$

$$\mathbf{Y} \langle \Phi \rangle_0 = +1 \langle \Phi \rangle_0 \neq 0$$

$$\mathbf{Q} \langle \Phi \rangle_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{I}_3 + \mathbf{Y}) \langle \Phi \rangle_0 = 0. \quad (3.16)$$

Mientras que los cuatro primeros generadores rompen la simetría, el último término relacionado con la carga eléctrica no lo hace. Físicamente significa que el fotón permanece sin masa.

Ahora con el propósito de aplicar el mecanismo de Higgs parametrizamos el campo escalar complejo en forma exponencial de la siguiente manera:

$$\Phi = e^{\frac{i\xi \cdot \sigma}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

y realicemos las siguientes transformaciones gauge

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = e^{\frac{-i\xi \cdot \tau}{2v}} \Phi \\ \sigma_l b_\mu^l &\rightarrow \sigma_l b_\mu^{\prime l} \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu \\ R &\rightarrow R \\ L &\rightarrow L' = e^{\frac{-i\xi \cdot \tau}{2v}} L \end{aligned} \quad (3.18)$$

que al sustituir en el Lagrangiano (3.11), se ve reflejado en el sector escalar, pues el Lagrangiano del sector fermiónico sigue siendo invariante gauge. Así que el Lagrangiano del sector escalar (3.8) se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{Escalar} = \left| \left( \partial_\mu + \frac{ig'Y}{2} A_\mu + \frac{ig}{2} \boldsymbol{\sigma}_l b_\mu^l \right) \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2 - \left[ \mu^2 \left( \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \right)^2 + |\lambda| \left( \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \right)^4 \right]. \quad (3.19)$$

Los términos de masa para los bosones gauge surgen de la derivada covariante del primer término del anterior Lagrangiano, y podemos expresar la derivada covariante de la siguiente manera:

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_\mu^3/\sqrt{2} & \mathbf{W}_\mu^+ \\ \mathbf{W}_\mu^- & -b_\mu^3/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right) \right|^2, \quad (3.20)$$

donde <sup>4</sup>

$$\mathbf{W}^\pm = \frac{b_\mu^1 \pm b_\mu^2}{\sqrt{2}}. \quad (3.21)$$

Haciendo los cálculos correspondientes sobre la expresión (3.20) y dejando sólo los términos más significativos para nuestro análisis, obtenemos lo siguiente:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) + \frac{1}{8} v^2 g^2 \mathbf{W}_\mu^+ \mathbf{W}^{-\mu} + \frac{v^2}{8} (b_\mu^3, A_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{3\mu} \\ A^\mu \end{pmatrix} + \dots \quad (3.22)$$

Calculando los autovalores y autovectores de la matriz en el último término nos permite diagonalizarla. De ahí encontramos los siguientes campos físicos <sup>5</sup>

$$\mathbf{Z}_\mu = \frac{-g' A_\mu + g b_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad \mathbf{A}_\mu = \frac{g A_\mu + g' b_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad (3.23)$$

y el Lagrangiano escalar queda de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{esc} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) - \mu^2 \eta^2 + \frac{1}{8} v^2 g^2 \mathbf{W}_\mu^+ \mathbf{W}^{-\mu} + \frac{g^2 + g'^2}{8} Z_\mu Z^\mu + \dots, \quad (3.24)$$

de donde se puede ver los términos de masa de los bosones gauge:

- Masa del bosón  $\mathbf{W}_\mu^\pm = \frac{gv}{2}$ .
- Masa del bosón  $\mathbf{Z}_\mu = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2} v$ .
- Masa del bosón  $\mathbf{A}_\mu = 0$  por lo que no aparece en la expresión anterior.

Además, notamos que el campo  $\eta$  tiene masa igual a  $2|\mu^2| > 0$  y se lo conoce como el bosón de Higgs que es el responsable de que los bosones  $\mathbf{W}$  y  $\mathbf{Z}$  adquieran masa como consecuencia del rompimiento espontáneo de la simetría.

Por otro lado, los fermiones consiguen su masa a través de los acoplamientos de Yukawa. De ahí, si sustituimos el valor de  $\Phi$  en el lagrangiano de Yukawa (3.10), tenemos que:

$$\mathcal{L}_Y = -G_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e}_R e_L - G_e \frac{\eta}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R. \quad (3.25)$$

<sup>4</sup> Los cálculos se realizan en el apéndice F sección (F.2.1)

<sup>5</sup> Ver apéndice F sección (F.2.1)

por lo que el electrón adquiere una masa igual a:

$$m_e = G_e \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (3.26)$$

Por último, consideremos la simetría  $SU(3)$  que nos permite completar el Lagrangiano. Esta parte corresponde a la interacción fuerte, conocida también como la cromodinámica cuántica. Entonces para  $SU(3)$  solo tenemos que adicionar en la Lagrangiana el siguiente término:

$$-\frac{1}{4}|G_{\mu\nu}^a|^2, \quad \text{con } a = 1, 2, \dots, 8. \quad (3.27)$$

con

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_c f_{ajk} G_\mu^j G_\nu^k \quad (3.28)$$

en donde  $g_c$  es la constante de acople del sector fuerte, y  $f_{ajk}$  es la constante de estructura. El subíndice  $a$  se refiere a los 8 gluones y  $T_a$  son las 8 matrices de Gell-Mann <sup>6</sup>, generadoras del grupo  $SU(3)$ . Además, la derivada covariante es:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_c T_a G_\mu^a. \quad (3.30)$$

Aclaremos que esta teoría la hemos desarrollado basados en la primera familia de fermiones, pero sabemos que el Modelo Estándar tiene tres familias fermiónicas. No abarcaremos en detalle el Lagrangiano teniendo en cuenta todas las familias fermiónicas porque no es el propósito de este trabajo. Finalmente, este modelo ha tenido mucha aceptación, pero tiene limitaciones:

- El modelo contiene 19 parámetros “libres”.
- No explica por qué hay tres generaciones de familias.
- No explica la jerarquía de las masas.
- Tiene problemas de unificación de las fuerzas.
- y no considera masa para los neutrinos.

por tal razón no se ha consolidado como la teoría final de la física de partículas, y es necesario extender la teoría e ir más allá del Modelo Estándar.

---

<sup>6</sup> Las matrices de Gell-Man son 8:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

# Capítulo 4

## Estabilidad del potencial escalar en extensiones del Modelo Estándar

El Modelo Estándar ha tenido éxito describiendo la dinámica de las partículas elementales. Sin embargo tiene limitaciones que no deben pasarse por alto, como las mencionadas en el capítulo anterior. De ahí, que es necesario extender la teoría del Modelo Estándar, utilizando para ello diversas maneras, por ejemplo:

- Adicionando nuevos campos fermiónicos (lo más simple sería adicionar el campo del neutrino de quiralidad derecha, lo cual conduciría a la obtención de masa para el neutrino).
- Aumentando el sector escalar a más de una representación de Higgs.
- Ampliando el grupo local gauge.

En este capítulo trabajaremos dos extensiones del ME. En primer lugar ampliaremos la representación del sector escalar a dos dobletes de Higgs. A dicha extensión simplificada y compatible con la invarianza local gauge, se le suele llamar el modelo con dos dobletes de Higgs ( THDM ). En segundo lugar, ampliaremos el grupo gauge local, trabajando en el modelo económico que posee la simetría gauge  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes U(1)$ . En ambos casos pondremos atención especial al sector escalar de cada modelo.

### 4.1. El modelo con dos dobletes de Higgs

El THDM es la mínima extensión del sector electrodébil y es posible hacerla, pues no hay ninguna razón fundamental para asumir que el sector de Higgs deba ser de un solo doblete. En este modelo se introducen dos campos escalares complejos de la forma:

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 + i\varphi_2 \\ \varphi_3 + i\varphi_4 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_2^+ \\ \varphi_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_5 + i\varphi_6 \\ \varphi_7 + i\varphi_8 \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

donde notamos que contienen 8 campos escalares reales. El Lagrangiano más general para este modelo, lo escribimos como:

$$\mathcal{L}_{THDM} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{Yuk} + \mathcal{L}' \quad (4.2)$$

y es invariante bajo el grupo

$$SU(2) \otimes U(1). \quad (4.3)$$

Para el desarrollo de este trabajo no es necesario analizar cada término del Lagrangiano (4.2), pero si podemos repasar en forma general el significado de cada uno:

- *El Lagrangiano  $\mathcal{L}'$ .*  
Contiene los términos que no son de tipo escalar o de Higgs. Este Lagrangiano contiene al sector leptónico.
- *El Lagrangiano de Yukawa  $\mathcal{L}_{Yuk}$ .*  
Este término contiene los acoplamientos de Yukawa, que genera la masa de los fermiones. La expresión para dicho Lagrangiano puede variar según el tipo de acoplamiento que tengamos o que deseemos trabajar, por ejemplo:

- *Tipo 1:* solo cuando  $\Phi_2$  se acopla a todos los fermiones

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum_{i,j} (g_{ij}^u \bar{\psi}_{Li} \Phi_2^c u_{Rj} + g_{ij}^d \bar{\psi}_{Li} \Phi_2 d_{Rj}) \quad (4.4)$$

- *Tipo 2:*  $\Phi_2$  se acopla a los quarks up y  $\Phi_1$  a los quarks down y leptones cargados.

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum_{i,j} (g_{ij}^u \bar{\psi}_{Li} \Phi_2^c u_{Rj} + g_{ij}^d \bar{\psi}_{Li} \Phi_1 d_{Rj}) \quad (4.5)$$

- *Tipo 3:* se consideran todos los fermiones en la Lagrangiana.

$$\mathcal{L}_{Yuk} = \sum_{i,j} (g_{1ij}^u \bar{\psi}_{Li} \Phi_1^c u_{Rj} + g_{1ij}^d \bar{\psi}_{Li} \Phi_1 d_{Rj} + g_{2ij}^u \bar{\psi}_{Li} \Phi_2^c u_{Rj} + g_{2ij}^d \bar{\psi}_{Li} \Phi_2 d_{Rj}) \quad (4.6)$$

donde  $g_{ij}^{u,d}$  representa las constantes de acople de Yukawa.

- *El lagrangiano escalar  $\mathcal{L}_\varphi$ .*  
Contiene la derivada covariante asociada con el sector escalar responsable de generar la masa de los bosones gauge y lo expresamos de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^2 (\mathcal{D}_\mu \varphi_i)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \varphi_i) - V(\varphi_1, \varphi_2). \quad (4.7)$$

donde la derivada covariante es:

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igb_\mu^a \mathbf{T}_a + ig' A_\mu \mathbf{Y}, \quad (4.8)$$

donde  $\mathbf{T}_a$  son los generadores del grupo  $SU(2)$ , y  $Y$  es la hipercarga. Identificamos también:

$$\mathbf{T}_a = \frac{\boldsymbol{\sigma}_a}{2}$$

donde  $\boldsymbol{\sigma}_a$  (con  $a = 1, 2, 3$ .) son las matrices de Paulí. Y asumimos que ambos dobletes tienen  $1/2$  como valor de la hipercarga ( $Y = 1/2$ ).

El potencial de Higgs mas general e invariante gauge,  $V(\varphi_1, \varphi_2)$  está dado por:

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) = & \mu_1^2(\varphi_1^\dagger\varphi_1) + |\lambda_1|(\varphi_1^\dagger\varphi_1)^2 + \mu_2^2(\varphi_2^\dagger\varphi_2) + |\lambda_2|(\varphi_2^\dagger\varphi_2)^2 + \mu_3^2(\varphi_1^\dagger\varphi_1)(\varphi_2^\dagger\varphi_2) \\ & + \mu_4^2(\varphi_1^\dagger\varphi_2)(\varphi_2^\dagger\varphi_1) + \mu_5^2(\varphi_1^\dagger\varphi_2) + |\lambda_3|(\varphi_1^\dagger\varphi_2)^2 + \mu_6^2(\varphi_2^\dagger\varphi_1) + |\lambda_4|(\varphi_2^\dagger\varphi_1)^2 + \mu_7^2(\varphi_1^\dagger\varphi_1)(\varphi_1^\dagger\varphi_2) \\ & + \mu_8^2(\varphi_1^\dagger\varphi_2)(\varphi_2^\dagger\varphi_2) + \mu_9^2(\varphi_2^\dagger\varphi_1)(\varphi_2^\dagger\varphi_2) + \mu_{10}^2(\varphi_2^\dagger\varphi_2) + (\varphi_1^\dagger\varphi_2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

donde los dobletes escalares fueron definidos en (4.1). Este potencial contiene 14 parámetros reales e independientes  $(\mu_1, \dots, \mu_{10}, \lambda_1, \dots, \lambda_4)$ .

Como podemos ver este potencial tiene una estructura mucho más compleja que las consideradas en las secciones anteriores, lo que hace difícil garantizar que cumpla la condición de estabilidad considerada en la seccion (2.4) para posteriormente imponer el rompimiento espontáneo de simetría. El objetivo de este capítulo es analizar el potencial (4.9) y expresarlo en términos de parámetros que facilite establecer sobre ellos las condiciones que garanticen la estabilidad del potencial escalar.

### 4.1.1. Parámetros que definen el potencial escalar

El potencial (4.9) que es el más general e invariante gauge y renormalizable para el modelo THDM lo podemos escribir como una combinación lineal de los siguientes términos:

$$\varphi_i^\dagger\varphi_j, \quad (\varphi_i^\dagger\varphi_j)(\varphi_k^\dagger\varphi_l), \quad (4.10)$$

con  $i, j, k, l = 1, 2$ . Es conveniente discutir la propiedad de estabilidad del potencial escalar en términos de expresiones invariantes gauge. Para este propósito organizamos los términos del potencial en forma de una matriz hermitica  $2 \times 2$  de la siguiente manera:

$$\underline{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger\varphi_1 & \varphi_2^\dagger\varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger\varphi_2 & \varphi_2^\dagger\varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Esta matriz la podemos descomponer en términos de una base formada por matrices hermiticas  $2 \times 2$ . De este modo es escrita como la combinación lineal:

$$\underline{\mathbf{K}}_{ij} = \frac{1}{2}[K_0\delta_{ij} + K_a\sigma_{ij}^a], \quad (4.12)$$

donde los cuatro coeficientes reales definidos en (4.12) están dados por:

$$K_0 = \varphi_i^\dagger\varphi_i, \quad K_a = (\varphi_i^\dagger\varphi_j)\sigma_{ij}^a, \quad (a = 1, 2, 3). \quad (4.13)$$

Teniendo en cuenta (4.12) podemos ver que las componetes de la matriz (4.11) son :

$$\begin{aligned} \varphi_1^\dagger\varphi_1 &= \frac{1}{2}(K_0 + K_3), & \varphi_1^\dagger\varphi_2 &= \frac{1}{2}(K_1 + iK_2), \\ \varphi_2^\dagger\varphi_2 &= \frac{1}{2}(K_0 - K_3), & \varphi_2^\dagger\varphi_1 &= \frac{1}{2}(K_1 - iK_2). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sustituyendo los resultados (4.14) en el potencial (4.9) tenemos la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
V = & -\frac{\mu_5}{4}K_3^2 + \frac{\lambda_4}{4}K_3^2 + \frac{\lambda_2}{4}K_3^2 - \frac{i\mu_{14}}{4}k_2K_3 + \frac{i\mu_{13}}{4}K_2K_3 - \frac{i\mu_{12}}{4}K_2K_3 + \frac{i\mu_{11}}{4}K_2K_3 \\
& - \frac{\mu_{14}}{4}K_1K_3 - \frac{\mu_{13}}{4}K_1K_3 - \frac{\mu_{12}}{4}K_1K_3 + \frac{\mu_{11}}{4}K_1K_3 - \frac{\lambda_4}{2}K_0K_3 + \frac{\lambda_2}{2}K_0K_3 - \frac{\mu_3}{2}K_3 \\
& + \frac{\mu_1}{2}K_3 - \frac{\lambda_8\mu_7}{4}K_2^2 + \frac{\mu_6}{4}K_2^2 - \frac{\lambda_{10}}{4}K_2^2 + \frac{i\lambda_8\mu_7}{2}K_1K_2 - \frac{i\lambda_{10}}{2}K_1K_2 + \frac{i\mu_{14}}{4}K_0K_2 \\
& - \frac{i\mu_{13}}{4}K_0K_2 + \frac{i\mu_{12}}{4}K_0K_2 + \frac{i\mu_{11}}{4}K_0K_2 - \frac{i\mu_7\mu_9}{2}K_2 + \frac{i\mu_7}{2}K_2 + \frac{\lambda_8\mu_7}{4}K_1^2 + \frac{\mu_6}{4}K_1^2 \\
& + \frac{\lambda_{10}}{4}k_1^2 + \frac{\mu_{14}}{4}K_0K_1 + \frac{\mu_{13}}{4}K_0K_1 + \frac{\mu_{12}}{4}K_0K_1 + \frac{\mu_{11}}{4}K_0K_1 + \frac{\mu_7\mu_9}{2}K_1 + \frac{\mu_7}{2}K_1 \\
& + \frac{\mu_5}{4}K_0^2 + \frac{\lambda_4}{4}K_0^2 + \frac{\lambda_2}{4}K_0^2 + \frac{\mu_3}{2}K_0 + \frac{\mu_1}{2}K_0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$

que es una expresión muy extensa, con 40 términos que difícilmente podríamos trabajar para encontrar los valores mínimos del potencial. Pero si definimos las siguientes estructuras:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= \frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_1}{2}, \\
\varepsilon_a &= \left( \frac{\mu_7\mu_3}{2} + \frac{\mu_7}{2}, \frac{i\mu_7}{2} - \frac{i\mu_7\mu_9}{2}, -\frac{\mu_3}{2} + \frac{\mu_1}{2} \right), \\
\eta_{00} &= \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_4}{4} + \frac{\lambda_5}{4}, \\
\eta_a &= \left( \frac{\mu_{12}}{4} + \frac{\mu_{13}}{4} + \frac{\mu_{14}}{4}, \frac{i\mu_{11}}{4} + \frac{i\mu_{12}}{4} - \frac{i\lambda_{13}}{4} + \frac{i\lambda_{14}}{4}, \frac{\lambda_2}{2} - \frac{\lambda_4}{2} \right), \\
\eta_{ab} &= \begin{pmatrix} \frac{\lambda_8\mu_7}{4} - \frac{\mu_6}{4} + \frac{\lambda_{10}}{4} & \frac{i\lambda_8\mu_7}{2} - \frac{i\lambda_{10}}{2} & \frac{\mu_{11}}{4} - \frac{\mu_{12}}{4} - \frac{\mu_{13}}{4} - \frac{\mu_{14}}{4} \\ 0 & \frac{\mu_6}{4} - \frac{\lambda_8\mu_7}{4} - \frac{\lambda_{10}}{4} & \frac{i\mu_{11}}{4} - \frac{i\mu_{12}}{4} + \frac{i\mu_{13}}{4} - \frac{i\mu_{14}}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{\mu_5}{4} + \frac{\lambda_4}{4} + \frac{\lambda_2}{4} \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{4.16}$$

vemos que el potencial (4.9) lo podemos escribir como

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = V_2 + V_4, \tag{4.17}$$

en donde  $V_2$  y  $V_4$  son los términos cuadráticos y cuárticos respectivamente del potencial y, si los expresamos en términos de los parámetros definidos en (4.16) tenemos que:

$$\begin{aligned}
V_2 &= \varepsilon_0 K_0 + \varepsilon_a K_a \\
V_4 &= \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b,
\end{aligned}$$

el cual mantiene los 14 parámetros reales  $(\varepsilon_0), (\varepsilon_a, a = 1, 2, 3), (\eta_a, a = 1, 2, 3), (\eta_{00}), (\eta_{ab}, a, b = 1, 2, 3)$ .

Sin embargo podemos reducir esta cantidad de parámetros realizando un cambio de base en los campos de Higgs de la siguiente manera:

$$\varphi_i \rightarrow \varphi'_i$$

tal que

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

donde  $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$ , es una transformación unitaria

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}. \quad (4.19)$$

Bajo esta transformación unitaria, los coeficientes (4.13) se comportan de la siguiente manera<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} K_0 &= K'_0 \\ K'_a &= R_{ab}(U) K_b, \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde la matriz  $\mathbf{R}$  se define como:

$$\mathbf{U} \boldsymbol{\sigma}^a \mathbf{U} = R_{ab} \boldsymbol{\sigma}^b,$$

y cumple las siguientes propiedades<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} R^*(U) &= R(U) \\ R^t(U) R(U) &= \mathbf{1} \\ \det R(U) &= 1. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Esta matriz  $R(U)$  pertenece al grupo  $SO(3)$ , pues sus componentes son reales.

Ahora, el potencial escrito en la forma (4.17) con las definiciones (4.18) es invariante bajo las transformaciones de  $K_0$  y  $K_a$  definidas en (4.20). Siempre y cuando realicemos una transformación adecuada sobre los parámetros. Dichas transformaciones las definimos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \xi_0, \\ \eta'_{00} &= \eta_{00}, \\ \boldsymbol{\xi}' &= R(U) \boldsymbol{\xi}, \\ \boldsymbol{\eta}' &= R(U) \boldsymbol{\eta} \\ E' &= R(U) E R^T(u). \end{aligned} \quad (4.22)$$

La transformación aplicada a la matriz  $E$  muestra que la podemos diagonalizar y de esta manera reducimos en 3 el número de parámetros independientes dejando así un total de 11 parámetros reales e independientes para el potencial de Higgs.

Si observamos la matriz  $\underline{K}$  en (4.11) vemos que es una matriz semipositiva<sup>3</sup> porque al ser  $K_0 = \text{tr} \underline{K}$  y  $K_0^2 - \mathbf{K}^2 = 4 \det \underline{K}$ , implica que:

$$K_0 \geq 0, \quad K_0^2 - \mathbf{K}^2 \geq 0. \quad (4.23)$$

Por otro lado, para cualquier  $K_0$  y  $\mathbf{K}$  que cumplan (4.23) es posible encontrar los campos  $\varphi_i$  que obedezcan (4.13). Además, todos los campos que obedecen (4.13) para algún  $K_0$  y  $\mathbf{K}$  dado, forman lo que llamaremos un orbital gauge. Por lo tanto, las funciones  $K_0$  y  $\mathbf{K}$  parametrizan los orbitales

<sup>1</sup>ver apéndice F sección (F.3.2)

<sup>2</sup>ver apéndice F sección (F.3.3)

<sup>3</sup>ver apéndice (E.2.14)

gauge y no una única configuración del campo de Higgs.

Especificar el dominio de las funciones  $K_0$  y  $\mathbf{K}$  correspondientes a las órbitas gauge permite discutir el potencial directamente en la forma (4.18) con todos los grados de libertad eliminados.

Es curioso notar que los orbitales gauge del campos Higgs del modelos THDM son parametrizados por un cuadvivector  $(K_0, \mathbf{K})$  de tipo Minkowski que está sobre o dentro de la superficie del cono de luz.

En la siguiente sección determinaremos los límites de los parámetros que definen el potencial y como resultado obtendremos las condiciones para que el potencial escalar sea estable.

### 4.1.2. Estabilidad del potencial escalar en el modelo THDM

Como demostramos en la sección anterior nosotros podemos analizar las propiedades del potencial (4.17) con las definiciones (4.18) como una función de  $(K_0$  y  $\mathbf{K})$  en el dominio determinado por  $K_0 \geq 0$  y  $K_0^2 \geq \mathbf{K}^2$  de acuerdo a (4.23). Para  $K_0 > 0$  hacemos la siguiente definición:

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{K}}{K_0} \Rightarrow |\mathbf{k}| \leq 1.. \quad (4.24)$$

En efecto, para  $K_0 = 0$  entonces  $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ , en este caso el potencial será  $V = 0$ . De (4.18) y (4.24) obtenemos para  $K_0 > 0$  las siguientes funciones

$$\begin{aligned} V_2 &= K_0 J_2(\mathbf{k}), & J_2(\mathbf{k}) &= \varepsilon_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{k}. \\ V_4 &= K_0^2 J_4(\mathbf{k}), & J_4(\mathbf{k}) &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E \mathbf{k}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

donde hemos introducido las funciones  $J_2(\mathbf{k})$  y  $J_4(\mathbf{k})$  en el dominio  $|\mathbf{k}| \leq 1$ <sup>4</sup>.

Para que el potencial sea estable, tiene que estar acotado por abajo. La estabilidad es determinada por el comportamiento del potencial  $V$  en el limite cuando  $K_0 \rightarrow \infty$  o sea por el signo de la funciones  $J_2(\mathbf{k})$  y  $J_4(\mathbf{k})$  Entonces, para que el potencial sea marginalmente estable es suficiente y necesario que:

$$\left. \begin{array}{l} J_4(\mathbf{k}) > 0 \\ J_4(\mathbf{k}) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} o \\ y \end{array} \left. \begin{array}{l} J_2(\mathbf{k}) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } |\mathbf{k}| \leq 1. \quad (4.26)$$

Esta condición equivale a decir que  $V \geq 0$  cuando  $K_0 \rightarrow \infty$  en todas las posibles direcciones de  $\mathbf{k}$ . La estabiidad del potencial es más segura cuando  $V \rightarrow \infty$  para  $K_0 \rightarrow \infty$  y algun  $\mathbf{k}$  puede ser garantizada por:

$$\left. \begin{array}{l} J_4(\mathbf{k}) > 0 \\ J_4(\mathbf{k}) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} o \\ y \end{array} \left. \begin{array}{l} J_2(\mathbf{k}) > 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } |\mathbf{k}| \leq 1, \quad (4.27)$$

y así la estabilidad es garantizada en un sentido débil, o si tenemos la condición:

$$J_4(\mathbf{k}) > 0 \quad \text{para todo } |\mathbf{k}| \leq 1 \quad (4.28)$$

decimos que, es estable en un sentido fuerte. Entonces, la estabilidad fuerte se obtiene solo del término cuártico del potencial (4.17).

Para asegurar que  $J_4(\mathbf{k})$  sea positiva, es suficiente considerar su valor para todos los puntos estacionarios en el dominio  $|\mathbf{k}| < 1$ , y para todos los puntos estacionarios en la frontera  $|\mathbf{k}| = 1$ . Esto

<sup>4</sup>Como  $K_0^2 \geq \mathbf{K}^2$  al dividir por  $K_0^2$  llegamos a  $|\mathbf{k}| \leq 1$ .

es válido, porque el mínimo global de la función continua  $J_4(\mathbf{k})$  se alcanza en el dominio compacto  $|k| \leq 1$ , y está entre esos puntos estacionarios. Entonces, cuando  $|\mathbf{k}| < 1$  los puntos estacionarios de la función  $J_4(\mathbf{k})$  se obtienen derivando respecto a  $\mathbf{k}$  e igualando a cero, por lo tanto obtenemos:

$$E\mathbf{k} = -\boldsymbol{\eta} \quad \text{con} \quad |\mathbf{k}| < 1. \quad (4.29)$$

Para despejar  $\mathbf{k}$  debemos tener en cuenta que  $E$  es una matriz que puede tener o no inversa. De ahí que esos dos casos deben considerarse.

Cuando la matriz es invertible, satisface que  $\det E \neq 0$  así que obtenemos lo siguiente:

$$\mathbf{k} = -E^{-1}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.30)$$

siendo  $\mathbf{k}$  un punto estacionario que al sustituir en  $J_4(\mathbf{k})$  da como resultado:

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k})|_{est} &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T(-E^{-1}\boldsymbol{\eta}) + (-E^{-1}\boldsymbol{\eta})^T E(-E^{-1}\boldsymbol{\eta}) \\ &= \eta_{00} + [-2\boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta}] + \boldsymbol{\eta}^T (E^{-1}E)E^{-1}\boldsymbol{\eta} \\ &= \eta_{00} - 2\boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta} \\ &= \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Este resultado está sujeto a la condición

$$|\mathbf{k}| < 1$$

que la expresamos de la forma:

$$1 - \mathbf{k}^t \mathbf{k} > 0. \quad (4.32)$$

Si consideramos el valor de  $\mathbf{k}$  de acuerdo a (4.30) nos da que:

$$\begin{aligned} 1 - (-E^{-1}\boldsymbol{\eta})^T(-E^{-1}\boldsymbol{\eta}) &> 0 \\ 1 - \boldsymbol{\eta}^T E^{-1}E^{-1}\boldsymbol{\eta} &> 0 \\ 1 - \boldsymbol{\eta}^T E^{-2}\boldsymbol{\eta} &> 0. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Entonces, cuando  $\det E \neq 0$  se cumple que:

$$J_4(\mathbf{k})|_{est} = \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta} \quad \text{sí} \quad 1 - \boldsymbol{\eta}^T E^{-2}\boldsymbol{\eta} > 0. \quad (4.34)$$

Si consideramos el caso  $\det E = 0$ , la matriz  $E$  no es invertible y decimos que puede existir una o mas soluciones excepcionales en (4.29) en el dominio  $|\mathbf{k}| < 1$ . De ese tipo de soluciones hablaremos luego.

Ahora, cuando  $|\mathbf{k}| = 1$  podemos encontrar los puntos estacionarios de  $J_4(\mathbf{k})$  utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange. Para ello encontramos los puntos estacionarios de la siguiente función:

$$F_4(\mathbf{k}, u) = J_4(\mathbf{k}) + u(1 - \mathbf{k}^2), \quad (4.35)$$

donde  $u$  es un multiplicador de Lagrange [17]. De ahí que los puntos estacionarios son dados por:

$$(E - u)\mathbf{k} = -\boldsymbol{\eta} \quad \text{con} \quad |\mathbf{k}| = 1. \quad (4.36)$$

Para valores regulares de  $u$  tales que  $\det(E - u) \neq 0$  los puntos estacionarios están dados por

$$\mathbf{k}(u) = -(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.37)$$

y el multiplicador de Lagrange se obtiene de la condición  $|\mathbf{k}| = 1$ , que puede ser escrito como  $\mathbf{k}^t \mathbf{k} = 1$  y según (4.37) se tiene que:

$$\begin{aligned} -(E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}^T (-(E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}) &= 1 \\ 1 - \boldsymbol{\eta}^T (E - u)^{-2} \boldsymbol{\eta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Así obtenemos la solución.

$$J_4(\mathbf{k})|_{est} = u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T (E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}, \quad (4.39)$$

donde  $u$  es una solución de (4.38). También para  $|\mathbf{k}| = 1$ , dependiendo de los parámetros  $\eta_a$  y  $\eta_{ab}$ , pueden haber soluciones excepcionales  $(\mathbf{k}, u)$  de (4.36) donde  $\det(E - u) = 0$ , por lo que  $u$  es un autovalor de  $E$ .

Las soluciones regulares para los dos casos  $|\mathbf{k}| < 1$  y  $|\mathbf{k}| = 1$  se puede describir usando una sola función. Considerando (4.35) y (4.37) definimos

$$f(u) \equiv F_4(\mathbf{k}(u), u), \quad (4.40)$$

con  $\mathbf{k}(u)$  dado por (4.37). Esto conduce a:

$$f(u) = u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^t (E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}. \quad (4.41)$$

$$f'(u) = 1 - \boldsymbol{\eta}^t (E - u)^{-2} \boldsymbol{\eta}. \quad (4.42)$$

De modo que todos los puntos estacionarios regulares  $\mathbf{k}$  de  $J_4(\mathbf{k})$  se obtiene de la función  $f(u)$  de la forma:

$$f(u) = J_4(\mathbf{k})|_{est} \quad (4.43)$$

$$f'(u) = 1 - \mathbf{k}^2. \quad (4.44)$$

Si trabajamos en el dominio  $|\mathbf{k}| < 1$  basta con tomar el valor  $u = 0$ . Existen puntos estacionarios de  $J_4(\mathbf{k})$  en  $|\mathbf{k}| < 1$  y en  $|\mathbf{k}| = 1$  si  $f(0)$  y  $f'(0)$ , respectivamente. Entonces los valores de  $J_4(\mathbf{k})$  son dados por  $f(u)$ .

Ahora, si en una base diagonal  $E = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ , las funciones  $f$  y  $f'$  se reducen a:

$$f(u) = u + \eta_{00} - \sum_{a=1}^3 \frac{\eta_a^2}{\mu_a - u}, \quad (4.45)$$

y

$$f'(u) = 1 - \sum_{a=1}^3 \frac{\eta_a^2}{(\mu_a - u)^2}. \quad (4.46)$$

Notamos que la derivada  $f'(u)$  tiene como máximo seis ceros. Además, si en esta base las tres componentes de  $\boldsymbol{\eta}$  son diferentes de cero, no tendremos soluciones excepcionales.

La función  $f(u)$  dada en (4.41) nos permite discutir las soluciones excepcionales de (4.29) y (4.36). Consideremos primero para  $|\mathbf{k}| < 1$  y suponemos  $\det E = 0$ . En la base donde  $E$  es una matriz diagonal tenemos:

$$\det(E) = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0, \quad (4.47)$$

y teniendo en cuenta (4.29):

$$\begin{aligned}\mu_1 k_1 &= -\eta_1 \\ \mu_2 k_2 &= -\eta_2 \\ \mu_3 k_3 &= -\eta_3.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Claramente una solución de (4.48) es solo posible con  $\mu_a = 0$  si también  $\eta_a = 0$  con  $|\mathbf{k}| < 1$ . Por lo tanto, vemos en (4.45) que las soluciones excepcionales con  $|\mathbf{k}| < 1$  son posibles si  $f(u)$  permanece finito cuando  $u = 0$ , es decir, el polo que correspondería a  $\mu_a = 0$  debe tener residuo cero. Supongamos ahora que efectivamente  $\eta_a = 0$  para todo  $a$  donde  $\mu_a = 0$ . Tomemos como ejemplo  $\mu_1 = \mu_2 = 0$  y  $\eta_1 = \eta_2 = 0$  pero  $\mu_3 \neq 0$ . Entonces obtenemos la solución general de (4.48) de la siguiente forma:

$$k_3 = -\frac{\eta_3}{\mu_3},\tag{4.49}$$

con  $k_1, k_2$  arbitrarios pero que satisfagan  $|\mathbf{k}| < 1$ , o sea que debe cumplir

$$\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\eta_3}{\mu_3}\right)^2 < 1.\tag{4.50}$$

Lo anterior podemos escribirlo como:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp},\tag{4.51}$$

donde

$$\mathbf{k}_{\parallel} = \frac{1}{\mu_3} \boldsymbol{\eta}, \quad E \mathbf{k}_{\perp} = 0.\tag{4.52}$$

$$\mathbf{k}_{\perp}^2 < 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 = 1 - \left(\frac{\eta_3}{\mu_3}\right)^2.\tag{4.53}$$

Entonces, para las funciones (4.45) y (4.46) tenemos:

$$f(u) = u + \eta_{00} - \frac{\eta_3^2}{\mu_3 - u},\tag{4.54}$$

y

$$f'(u) = 1 - \frac{\eta_3^2}{(\mu_3 - u)^2}.\tag{4.55}$$

Insertando la solución  $\mathbf{k}$  de acuerdo con (4.51) y (4.53) obtenemos:

$$f(0) = J_4(\mathbf{k})|_{est}.\tag{4.56}$$

$$f'(0) = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 > \mathbf{k}_{\perp}^2 \geq 0.\tag{4.57}$$

Los argumentos considerados, funcionan de manera similar, si solo uno de los  $\mu_a$  es igual a cero o los tres  $\mu_a$  son cero. En todos los casos (4.56) se mantiene aún para soluciones excepcionales con  $|\mathbf{k}| < 1$ , que solo puede existir si  $f(u)$  no tiene polos en  $u = 0$ . Puesto que (4.56) implica solo cantidades escalares, se mantiene en cualquier base.

Ahora, consideremos el caso de soluciones excepcionales para  $|\mathbf{k}| = 1$ , estas pueden ser tratados de manera análoga. Una solución excepcional de (4.36) con  $u = \mu_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) solo puede existir si

el correspondiente  $\eta_a = 0$ . Entonces  $f(u)$  no tiene polo para  $u = \mu_a$  y las soluciones excepcionales de (4.36) cumplen lo siguiente:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel}^t \mathbf{k}_{\perp}, \quad (4.58)$$

con lo que

$$\mathbf{k}_{\parallel} = -(E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}|_{u=\mu_a}, \quad \text{y} \quad (E - u) \mathbf{k}_{\perp} = 0 \quad (4.59)$$

y

$$f(\mu_a) = J_4(\mathbf{k})|_{est}. \quad (4.60)$$

$$f'(\mu_a) = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 = \mathbf{k}_{\perp}^2 \geq 0. \quad (4.61)$$

Debemos tener en cuenta en que si una solución es posible,  $\mathbf{k}_{\perp}$  puede ser cualquier combinación lineal de los vectores propios con los valores propios  $\mu_a$  de  $E$ , donde la norma es  $|\mathbf{k}_{\perp}| = \sqrt{f'(\mu_a)}$ . Así podemos ver que la función  $f(u)$  es muy útil para discutir la estabilidad del potencial en el modelo THDM. Lo que hemos mostrado puede formularse de la siguiente manera: consideramos las funciones  $f(u)$  y  $f'(u)$ . Denotemos por  $I$ ,

$$I = \{u_1, \dots, u_n\}, \quad (4.62)$$

al siguiente conjunto de valores de  $u$ . Incluimos en el conjunto  $I$  a todos  $u$  que hagan  $f'(u) = 0$ . Añadimos  $u = 0$  en  $I$  si  $f'(0) > 0$ . Luego, consideramos los autovalores  $\mu_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) de  $E$ . Incluimos en el conjunto  $I$  a los  $\mu_a$  cuando  $f(\mu_a)$  sea finito y  $f'(\mu_a) > 0$ . Tenemos  $n \leq 10$ . Entonces, los valores de la función  $J_4(\mathbf{k})$  en los puntos estacionarios están dados por:

$$J_4(\mathbf{k})|_{est} = f(u_i), \quad (4.63)$$

donde  $u_i \in I$ . El potencial es estable si tenemos  $f(u_i) > 0$  para todo  $u_i \in I$ . Luego la estabilidad del potencial es determinada solo por el término cuártico del potencial. El potencial es inestable si  $f(u_i) < 0$  por lo menos para un  $u_i \in I$ . Si tenemos  $f(u_i) \geq 0$  para todo  $u_i \in I$  y  $f(u_i) = 0$  para al menos un  $u_i \in I$ , deberíamos considerar el término cuadrático  $J_2(\mathbf{k})$  del potencial para poder analizar su estabilidad. Pero el análisis del potencial basados en la función  $J_2(\mathbf{k})$  no la consideraremos en este trabajo. Más bien, a modo de resumen hagamos una breve revisión del método expuesto en este capítulo y posteriormente lo aplicamos a un potencial particular del modelo THDM.

### 4.1.3. Revisión de los criterios de estabilidad

Revisemos el método para determinar las condiciones necesarias y suficientes que los parámetros deben satisfacer para tener un potencial escalar estable en el modelo THDM. Daremos un procedimiento que facilite encontrar las condiciones para la estabilidad de un potencial escalar. Nos interesa hacerlo pues, la estabilidad garantiza que el potencial escalar tenga un mínimo global, es decir, que el potencial esté acotado por abajo, lo cual es una condición necesaria para implementar la ruptura espontánea de simetría gauge en los modelos [21].

En primer lugar tenemos que los puntos estacionarios de  $J_4(\mathbf{k})$  se calculan usando (4.36)

$$(E - u) \mathbf{k} = -\boldsymbol{\eta} \quad \text{con} \quad |\mathbf{k}| = 1, \quad (4.64)$$

donde  $u = 0$  para  $|\mathbf{k}| < 1$ . Ahora suponemos que hemos encontrado dos soluciones  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  con sus respectivos multiplicadores de Lagrange  $u_p$  y  $u_q$  tal que:

$$\begin{aligned} (E - u_p) \mathbf{p} &= -\boldsymbol{\eta}, \\ (E - u_q) \mathbf{q} &= -\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

donde

$$|\mathbf{p}| = 1, \quad |\mathbf{q}| = 1 \quad \text{y} \quad u_p \neq u_q. \quad (4.66)$$

Evaluando la función  $J_4(\mathbf{k})$  en estos puntos estacionarios usando (4.41) y (4.43), tenemos:

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{p}) &= u_p + \eta_{00} + \boldsymbol{\eta}^t \mathbf{p}. \\ J_4(\mathbf{q}) &= u_q + \eta_{00} + \boldsymbol{\eta}^t \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Restando  $J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q})$

$$J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q}) = u_p - u_q + \boldsymbol{\eta}^t (\mathbf{p} - \mathbf{q}). \quad (4.68)$$

Ahora, recordando que la matriz  $E$  es simétrica, entonces  $(E - u_p)^t = E - u_q$ , por lo que tomando la transpuesta de (4.65) tenemos:

$$\mathbf{p}^t (E - u_p) = -\boldsymbol{\eta}^t, \quad \mathbf{q}^t (E - u_q) = -\boldsymbol{\eta}^t, \quad (4.69)$$

Multiplicando por  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$

$$\mathbf{p}^t (E - u_p) = -\boldsymbol{\eta}^t \mathbf{q}, \quad (4.70)$$

$$\mathbf{q}^t (E - u_q) = -\boldsymbol{\eta}^t \mathbf{p}. \quad (4.71)$$

Restando (4.70) y (4.71)

$$(u_q - u_p) \mathbf{p}^t \mathbf{q} = \boldsymbol{\eta}^t (\mathbf{p} - \mathbf{q}), \quad (4.72)$$

si reemplazamos este resultado en (4.68), tenemos la siguiente expresión:

$$J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q}) = (u_p - u_q)(1 - \mathbf{p}^t \mathbf{q}). \quad (4.73)$$

El producto  $\mathbf{p}^t \mathbf{q} = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta = \cos \theta < 1$ . Notamos que que el  $\cos \theta$  no puede ser 1, porque  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{q}$  no pueden ser paralelos. Si asumimos que son paralelos significaría que según (4.65)

$$(u_p - u_q) \mathbf{p} = 0, \quad \text{y luego} \quad u_p = u_q, \quad (4.74)$$

pero esto contradice lo que se asumimos en (4.66). Entonces, en todo caso tendríamos que

$$(1 - \mathbf{p}^t \mathbf{q}) > 0, \quad (4.75)$$

la desigualdad se satisface inmediatamente si  $|\mathbf{p}| < 1$  y en consecuencia, a partir de (4.73), concluimos que

$$u_p < u_q \Leftrightarrow J_4(\mathbf{p}) < J_4(\mathbf{q}). \quad (4.76)$$

El resultado (4.76) es útil, porque hace más fácil encontrar las condiciones de los parámetros para tener un potencial escalar estable. El proceso sería el siguiente: calculamos todos los multiplicadores regulares de Lagrange  $u_i$  ( $i \leq 6$ ), resolviendo la ecuación (4.42). Incluimos en este conjunto las soluciones excepcionales  $\mu_j$  ( $j \leq 3$ ), resolviendo la ecuación  $\det(E - u) = 0$ , omitiendo los valores  $\mu_j$ , para los cuales la correspondiente  $\eta_j \neq 0$ , en la base que  $E$  es diagonal (como se puede ver (4.64)). Finalmente, consideremos  $u = 0$  para las soluciones dentro de la esfera  $|\mathbf{k}| < 1$ , y con estos valores, formamos el conjunto  $S$ , que tiene por mucho diez elementos.

El resultado (4.76) sugiere tomar el valor más pequeño de  $S$  para establecer un potencial escalar estable. Dado que los valores de  $S$  son en general parámetros libres, asumimos que cada uno de ellos es el valor más bajo.

Si el valor más pequeño es una solución regular  $u_i$ , se impone inmediatamente la condición  $J_4(\mathbf{k}) > 0$ , es decir,  $f(u_i) > 0$  (ecuación (51) en la referencia [6]), lo que, según el resultado (4.76), garantizaría la estabilidad del potencial escalar. Las condiciones que vienen de las soluciones regulares son necesarias. Por lo tanto se mantendrán en el conjunto  $S$ .

Si el valor más pequeños es una solución excepcional,  $\mu_j$ , primero debemos comprobar que el punto estacionario sea válido, es decir,  $f'(\mu_j) > 0$ . Si este punto no es válido, se puede descartar del conjunto  $S$ . En el caso de satisfacerse se impone la condición  $f(\mu_j) > 0$ , que garantizaría la estabilidad del potencial según el resultado (4.76). Las condiciones derivadas de las soluciones excepcionales no son necesarias puesto que no siempre se cumple la desigualdad  $f'(\mu_j) \geq 0$ . Del mismo modo, si el valor más pequeño de  $S$  es 0, debemos comprobar primero que  $f'(0) > 0$ , si no, se descarta este valor del conjunto  $S$ . pero si se cumple, fijamos la condición  $f(0) > 0$  para asegurar la estabilidad del potencial escalar.

Los valores de  $S$  que, dada su estructura, no pueden ser los más pequeños, se descartan si los valores más bajos dan un punto estacionario válido según (4.76). De lo contrario, deben ser analizados. Hasta ahora, las condiciones anteriores dan estabilidad en un sentido fuerte. Si para uno de los casos anteriores tenemos  $f(u) = 0$  procedemos a considerar  $J_2(\mathbf{k})$ , lo que garantizaría la estabilidad del potencial escalar en el sentido débil o marginal. Para los puntos estacionarios restantes, se deduce que  $J_4(\mathbf{k}) > 0$ , como se indica en (4.76). Finalmente, construimos el conjunto

$$I = \{\text{valores no descartados de } S\}, \quad (4.77)$$

de la que obtenemos las condiciones suficientes para garantizar la estabilidad del potencial escalar. A continuación apliquemos los resultados anteriores a un modelo en particular.

#### 4.1.4. El potencial del modelo de Gunion et al

Vamos a analizar el potencial escalar del modelo THDM de Gunion et al [18]. El potencial es el siguiente:

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = \lambda_1(\varphi_1^\dagger \varphi_1 - v_1^2)^2 + \lambda_2(\varphi_2^\dagger \varphi_2 - v_2^2)^2 \quad (4.78)$$

$$+ \lambda_3(\varphi_1^\dagger \varphi_1 - v_1^2 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 - v_2^2)^2 \quad (4.79)$$

$$+ \lambda_4 \left( (\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) - (\varphi_1^\dagger \varphi_2)(\varphi_2^\dagger \varphi_1) \right) \quad (4.80)$$

$$+ \lambda_5 \left( \text{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \cos \xi \right)^2 \quad (4.81)$$

$$+ \lambda_6 \left( \text{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2 - v_1 v_2 \sin \xi) \right)^2 \quad (4.82)$$

$$+ \lambda_7 \left( \text{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \cos \xi \right) \quad (4.83)$$

$$\times \left( \text{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \sin \xi \right), \quad (4.84)$$

vemos que contiene nueve parámetros reales (sin contar la constante). Este potencial rompe en forma suave la simetría discreta

$$\varphi_1 \longrightarrow -\varphi_1, \quad \varphi_2 \longrightarrow -\varphi_2, \quad (4.85)$$

suprimiendo grandes corrientes neutras que cambiarían el sabor [19]. dejando a un lado las constantes, expresamos el potencial (4.84) en la forma (4.17) en términos de los parámetros dados en

(4.18). Siguiendo el procedimiento de la sección (4.1.1) obtenemos

$$\eta_{00} = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4), \quad (4.86)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

$$E = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2(\lambda_5 - \lambda_4) & \lambda_7 & 0 \\ \lambda_7 & 2(\lambda_6 - \lambda_4) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

De (4.41) y (4.42) se obtiene:

$$f(u) = u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)}, \quad (4.89)$$

$$f'(u) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)^2}. \quad (4.90)$$

Los correspondientes multiplicadores de Lagrange, incluido el cero, que podrían dar lugar a posibles condiciones de estabilidad, forman parte del siguiente conjunto  $S$ :

$$S = \left\{ u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_4), u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_4), u_3 = 0, \mu_4 = \frac{1}{4}(\kappa - \lambda_4), \right. \\ \left. \mu_5 = \frac{1}{8} \left( -2\lambda_4 + \lambda_5 + \lambda_6 + \sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + \lambda_7^2} \right) \right\} \quad (4.91)$$

donde

$$\kappa = \frac{1}{2} \left( \lambda_5 + \lambda_6 - \sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + \lambda_7^2} \right).$$

Los primeros dos parámetros son los multiplicadores de Lagrange, y los dos últimos son las soluciones excepcionales apropiadas en  $S$ . Notamos que  $\mu_4 < \mu_5$ , pero aún así no podemos descartar  $\mu_5$  ya que primero debemos comprobar si  $f'(\mu_4) \geq 0$ . El mínimo global de  $J_4(\mathbf{k})$  ocurre donde el valor mínimo válido de  $S$  esté:

1. Si  $u_1$  es el valor mas pequeño de  $S$ , entonces:

$$f(u_1) > 0 \implies \lambda_1 + \lambda_3 > 0. \quad (4.92)$$

2. Si  $u_2$  es el valor mas pequeño de  $S$ , entonces:

$$f(u_2) > 0 \implies \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \quad (4.93)$$

Ya que  $u_1$  y  $u_2$  son soluciones regulares, las desigualdades (4.92) y (4.93) son necesarias.

3. Si

$$u_3 = 0 < u_1, u_2, \mu_4, \mu_5, \quad (4.94)$$

podemos ver que

$$f'(u_3) = \frac{4u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2} > 0, \quad (4.95)$$

entonces  $u_3$  no se descarta. Teniendo en cuenta las desigualdades (4.92) y (4.93) en  $f(u_3)$ , tenemos

$$f(u_3) = \frac{[-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}][\lambda_4 + 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}]}{8(u_1 + u_2)} > 0, \quad (4.96)$$

y de (4.94) se puede demostrar que los factores  $u_1 + u_2 > 0$  y  $-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$ ; por lo tanto

$$\lambda_4 > -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}. \quad (4.97)$$

4. Si

$$\mu_4 < u_1, u_2, u_3, \mu_5, \quad (4.98)$$

entonces

$$f'(\mu_4) = \frac{[-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}][\kappa + 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}]}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)} > 0, \quad (4.99)$$

y usando (4.98) podemos demostrar que los factores  $(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa) > 0$  y  $-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$ ; por lo tanto

$$\kappa > -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}. \quad (4.100)$$

Entonces, el multiplicador de Lagrange  $\mu_5$  no se considera ya que  $\mu_5 > \mu_4$ .

En resumen, para que el THDM sea estable, las siguientes condiciones sobre los parámetros son suficientes

$$\lambda_1 + \lambda_3 > 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 > 0, \quad \lambda_4, \kappa > -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}, \quad (4.101)$$

## 4.2. El modelo económico 3-3-1

Es una extensión al Modelo Estándar basado en el grupo de simetría local gauge  $SU(3) \otimes SU(3) \otimes U(1)$ . Para este tipo de modelos, se utilizan en general tres tripletes de Higgs y contiene un sector escalar bastante complicado para ser analizado en detalle [20]. En particular el modelo  $3 - 3 - 1$  que contiene una mínima representación de campos escalares de Higgs se le llama el modelo económico 3-3-1. Existen un total de ocho modelos económicos  $3 - 3 - 1$  diferentes sin cargas eléctricas exóticas, cada uno con una estructura fermiónica diferente pero con el mismo sector escalar (dos tripletes de Higgs). El modelo económico  $3 - 3 - 1$  que vamos a analizar tiene las siguientes representaciones de fermiones libre de anomalías:

$$\begin{aligned} \Psi_L^a &= (l^a, \nu^a, N^{0a})_L^T \sim (1, 3^*, -1/3), \\ l_L^{+a} &\sim (1, 1, 1), \\ Q_L^i &= (u^i, d^i, D^i)_L^T \sim (3, 3, 0), \\ Q_L^1 &= (d^1, u^1, U)_L^T \sim (3, 3^*, 1/3), \\ u_L^{ca} &\sim (3^*, 1, -2/3), \quad d_L^{ca} \sim (3^*, 1, 1/3), \\ U_L^c &\sim (3^*, 1, -2/3), \quad D_L^{ci} \sim (3^*, 1, 1/3), \end{aligned} \quad (4.102)$$

donde los números dentro de los paréntesis indican los números cuánticos de  $SU(3)$ ,  $SU(3)$ ,  $U(1)$ , donde  $a = 1, 2, 3$  indica las familias o generaciones,  $i = 1, 2$  se refiere a la segunda y tercera familia respectivamente. Y  $D^i$  y  $U$  son tres quarks exóticos con cargas eléctricas  $1/3, -1/3, 2/3$ , respectivamente.

### 4.2.1. El sector escalar en el modelo económico 3-3-1

Si pretendemos usar las representaciones más simple de  $SU(3)$  para romper la simetría, se requieren al menos dos tripletes escalares complejos, equivalentes a doce campos escalares reales. Los dos escalares de Higgs (junto con sus complejos conjugados) que pueden generar valores esperados para el vacío distintos de cero <sup>5</sup> son:

$$\Phi_1 \left( 1, 3^*, -\frac{1}{3} \right) = \begin{pmatrix} \Phi_1^- \\ \Phi_1^0 \\ \Phi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2 \left( 1, 3^*, \frac{2}{3} \right) = \begin{pmatrix} \Phi_2^0 \\ \Phi_2^+ \\ \Phi_2^+ \end{pmatrix}, \quad (4.103)$$

donde los números entre paréntesis indican que son singletes de color (1), se encuentran en la representación adjunta ( $3^*$ ) y por último el valor de su hipercarga. Notemos que, a diferencia del modelo THDM, estos dos campos escalares tienen diferentes hipercargas  $Y$ . Por esta razón, un cambio de base de los campos Higgs en este modelo no tiene ninguna significado físico.

El potencial escalar más general, renormalizable e invariante gauge 3-3-1 se escribe como:

$$\begin{aligned} V(\Phi_1, \Phi_2) = & \mu_1^2 \Phi_1^\dagger \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2^\dagger \Phi_2 + \lambda_1 (\Phi_1^\dagger \Phi_1)^2 + \lambda_2 (\Phi_2^\dagger \Phi_2)^2 \\ & + \lambda_3 (\Phi_1^\dagger \Phi_1) (\Phi_2^\dagger \Phi_2) + \lambda_4 (\Phi_1^\dagger \Phi_2) (\Phi_2^\dagger \Phi_1). \end{aligned} \quad (4.104)$$

Vemos que el número de parámetros libres es seis.

### 4.2.2. Parámetros que definen el potencial escalar

De la misma forma como hicimos en la sección 4.1.1, podemos expresar el potencial (4.104) en términos de orbitales gauge  $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2$  y  $\mathbf{K}_3$  que en nuestro caso se asocian con los siguientes parámetros que definen al potencial (4.104)

$$\begin{aligned} \xi_0 = \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2), \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(\mu_1^2 + \mu_2^2) \end{pmatrix} \\ \eta_{00} = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \\ \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix}, \\ E = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_4}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_4}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.105)$$

<sup>5</sup>Si se comprueba que sólo un triplete escalar adquiere un valor esperado en el vacío diferente de cero, decimos que el modelo económico 3-3-1 es inconsistente

### 4.2.3. Estabilidad del potencial escalar

Notamos que la matriz  $E$  es diagonal. De ahí que calculamos las funciones  $f(u)$  y  $f'(u)$  directamente de (4.45) y (4.46), obteniéndose:

$$\begin{aligned} f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - 16u}, \\ f'(u) &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 4u)^2}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Para  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , las soluciones de  $f'(u) = 0$ , que determinan los puntos estacionarios de  $J_4(\mathbf{k})$  en el límite  $|\mathbf{k}| = 1$ , nos llevan a los multiplicadores de Lagrange:

$$u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3), \quad u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_3). \quad (4.107)$$

Podemos adicionar los puntos

$$u_3 = 0 \quad u_4 = \frac{\lambda_4}{4}, \quad (4.108)$$

que corresponden a los puntos estacionarios dentro de la esfera ( $|\mathbf{k}| < 1$ ) y a una solución excepcional, respectivamente. Así que, tenemos el conjunto  $I$

$$I = \left\{ u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3), u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_3), u_3 = 0, u_4 = \frac{\lambda_4}{4} \right\}. \quad (4.109)$$

que contiene todas las posibles soluciones válidas. Entre las soluciones, el valor más pequeño corresponde al mínimo global (como lo demostramos en la sección 4.1.3). Ahora, consideremos las diferentes posibilidades

1. Si  $u_1 < u_2, u_3, u_4$ : es decir, que el mínimo global ocurre en  $u_1$ . Para tener un potencial estable, en el sentido fuerte, imponemos la condición:

$$f(u_1) > 0 \Rightarrow \lambda_1 > 0. \quad (4.110)$$

2.  $u_2 < u_1, u_3, u_4$ : en este caso la estabilidad en sentido fuerte nos lleva a:

$$f(u_2) > 0 \Rightarrow \lambda_2 > 0. \quad (4.111)$$

3. Si  $u_3 < u_1, u_2, u_4$  (recordemos que  $u_3 = 0$ ): una solución válida requiere un valor positivo para la función  $f'(u)$ , que verificamos a continuación:

$$f' = \frac{16u_1u_2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2} = \frac{4u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2} > 0, \quad (4.112)$$

Imponemos the condición para la estabilidad fuerte

$$f(0) = \frac{\lambda_3^2 - 4\lambda_1\lambda_2}{4(\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1)} \quad (4.113)$$

$$= \frac{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}{8(u_1 + u_2)} = \frac{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}{8(u_1 + u_2)} > 0, \quad (4.114)$$

donde  $\lambda_3 - \lambda_2 - \lambda_1 = 2(u_1 + u_2) > 0$  obtenemos:

$$4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 > 0 \quad \text{o} \quad 4\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2. \quad (4.115)$$

4. Si  $u_4 < u_3, u_1, u_2$  (de nuevo con  $u_3 = 0$ ): una vez mas  $f'(u_4)$  debe ser positiva. Dado que cada uno de los factores  $(u_1 - u_4), (u_2 - u_4), (u_1 + u_2 - 2u_4)$  son positivos, entonces tenemos

$$f'(u_4) = \frac{4(u_1 - u_4)(u_2 - u_4)}{u_1 + u_2 - 2u_4} > 0. \quad (4.116)$$

La estabilidad fuerte implica la condición

$$f(u_4) = \frac{4\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2}{8(u_1 + u_2 - 2u_4)} > 0, \quad (4.117)$$

de donde

$$4\lambda_1\lambda_2 > (\lambda_3 + \lambda_4)^2. \quad (4.118)$$

En resumen, las siguientes son condiciones suficientes (pero no necesarias) para garantizar una la estabilidad fuerte del potencial, para todos los valores posibles de los parámetros, incluyendo el caso especial  $\lambda_1 = \lambda_2$ :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> 0, \\ \lambda_2 &> 0, \\ 4\lambda_1\lambda_2 &> \lambda_3^2, \end{aligned} \quad (4.119)$$

donde las primeras dos desigualdades son también condiciones necesarias para que el potencial escalar sea estable.

# Capítulo 5

## Conclusiones

Hemos analizado el potencial escalar del modelo general con dos dobletes de Higgs (THDM). Para tener una teoría consistente, este potencial debe satisfacer ciertos criterios. El potencial debe ser estable, que esté acotado por abajo, que conduzca y conduzca al rompimiento de simetría electrodébil observado en la naturaleza. Las condiciones encontradas para la estabilidad del potencial escalar son consistentes y compactas si el potencial se expresa en términos de las funciones de campo invariantes gauge (4.12). Estos permiten una implementación sencilla para el análisis de la estabilidad del THDM.

Aplicamos nuestro método a dos ejemplos. En primer lugar analizamos el potencial de THDM introducido por Gunion et al (4.1.4), donde podemos ver que la aplicación del resultado (4.76) es esencial para obtener un modelo consistente y poder derivar condiciones suficientes para tener un potencial escalar estable. Esto nos permite identificar ya sea las condiciones necesarias (para soluciones regulares) o las condiciones que pueden no ser necesarias, viniendo de soluciones excepcionales (incluyendo 0). Pero las condiciones generan suficientes desigualdades que garantizan la estabilidad de un potencial. A modo de ejemplo, podemos apreciarlo, en la expresión 152 de la referencia [6], donde  $u_2 < u_1$  que para las condiciones de estabilidad solo se considera  $u_2$ . En este sentido, puede ocurrir que algunos multiplicadores de Lagrange, aunque no sean los valores más pequeños, deban tenerse en cuenta para las condiciones de estabilidad. Se puede apreciar desde en el potencial de Gunion et al (4.1.4), ya que si  $\mu_4$  no fuera un punto estacionario válido, tendríamos que haber analizado  $\mu_5$ . De esta forma, podemos reducir el número de condiciones suficientes derivadas de soluciones excepcionales (incluyendo 0) siempre que  $f'(\mu_j) < 0$  (o  $f'(0) \leq 0$ ).

Como segundo ejemplo, tomamos el potencial escalar para el modelo económico 3-3-1 sección (4.2.3). Se llevó a cabo un estudio detallado del potencial escalar para el modelo económico 3-3-1. Con el fin de obtener una teoría aceptable, como lo indicamos al principio.

Para el potencial escalar como se presenta en la ecuación (4.104), las siguientes son las condiciones que garantizan una estabilidad fuerte:

1. Condiciones necesarias y suficientes:

$$\lambda_1 > 0 \quad \text{y} \quad \lambda_2 > 0$$

2. Condiciones suficientes (pero no necesarias):

$$4\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2 \quad \text{y} \quad 4\lambda_1\lambda_2 > (\lambda_3 + \lambda_4)^2.$$

El método que hemos presentado también puede ser ampliado a modelos generales de múltiples Higgses (MDHM) [7]. En un estudio más detallado es obligatorio tomar en cuenta correcciones cuánticas al potencial de Higgs.

# Apéndice A

## Teoría de grupos

Las raíces históricas de la teoría de grupos son la teoría de las ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Euler, Gauss, Lagrange, Abel y Galois fueron los creadores que ponen los cimientos de esta rama del álgebra abstracta.

Galois es reconocido como el primer matemático que relacionó esta teoría con la teoría de cuerpos, de lo que surgió la teoría de Galois. Además, usó la denominación de grupo o inventó el término [...]”según E.T.Bell. Otros importantes matemáticos que contribuyen son Cayley, Emil Artin, Emmy Noether, Peter Ludwig Mejdell Sylow, A.G. Kurosch, Iwasawa entre muchos otros. Fue Walter Dick quien en 1882, dio la moderna definición de grupo y fue el primero en definir el grupo libre engendrado por un número finito de generadores, según Nicolás Bourbaki. A fines del siglo XIX, Frobenius definió grupo abstracto con un sistema de axiomas.

La teoría de grupos proporciona el lenguaje adecuado para formular y desarrollar los principios de simetría inherentes a la física. Gran parte de la estructura que aparece en la resolución de un sistema, tanto en la física clásica como en la física cuántica, es consecuencia de la simetría subyacente a dicho sistema. La teoría de grupos trata de desarrollar esos aspectos universales que presentan todos los sistemas que contienen simetrías de naturaleza análoga.

Se trata, por tanto, de un conocimiento fundamental para poder resolver un enorme conjunto de problemas de la física. En el marco de la teoría de grupos juega un rol fundamental la llamada teoría de representaciones, la que permite clasificar los objetos físicos según la simetría que subyace al sistema de interés.

La teoría de grupos es un campo muy amplio pero para nuestro objetivo vamos a hacer un repaso a nivel introductorio que serán temas suficientes para comprender la aplicación directa en el campo de la física.

### A.1. Composición interna

Cuando nosotros definimos una operación matemática basta con describir lo que deseamos hacer con los elementos de un determinado conjunto y esperamos que los resultados nos conduzcan a un desarrollo teórico de interés, a dicho proceso le llamamos **composición** y la denotamos por el símbolo  $*$ , entonces decimos que la ley de composición es un tipo de operación binaria que da lugar a distintas estructuras algebraicas. La ley de composición interna «mantiene» el mismo conjunto, tanto en el par de conjuntos de partida, como en el de llegada.

Por lo tanto podemos escribir la ley de composición interna de la siguiente manera:

Sea  $A$  un conjunto y  $a, b$  elementos cualquiera de  $A$ , entonces:

$$A \times A \rightarrow A(a, b) \implies c = a * b \in A \quad (\text{A.1})$$

Nuestro interés se centra en la ley composición interna la cual no es más que una regla que relaciona cada pareja  $(a, b)$  de elementos del conjunto  $A$  con un único elemento del mismo conjunto denotado como  $a * b$

las leyes de composición interna pueden cumplir las siguientes propiedades:

- Una ley de composición interna  $*$  definida en un conjunto  $A$ , se dice asociativa si y solo si, para los elementos  $a, b, c$  de  $A$ ,

$$(a * b) * c = a * (b * c). \quad (\text{A.2})$$

- Una ley de composición interna  $*$  definida en un conjunto  $A$ , se dice conmutativa si y solo si, para los elementos  $a, b$  de  $A$ ,

$$a * b = b * a. \quad (\text{A.3})$$

- Una ley de composición interna  $*$  definida en un conjunto  $A$  puede poseer un elemento de identidad o neutro, si existe un  $e$  en  $A$  tal que para todo elemento  $a$  de  $A$

$$a * e = e * a = a \quad (\text{A.4})$$

- Una ley de composición interna  $*$  con elemento de identidad  $e$  se denomina invertible con respecto a  $e$ , si para todo  $a$  de  $A$ , existe  $a'$  en  $A$  tal que

$$a * a' = a' * a = e \quad (\text{A.5})$$

Osea qué  $a'$  será el inverso de  $a$

### A.1.1. Grupo

Podemos decir que un grupo es un conjunto  $\mathbf{G}$  no vacío con una ley de composición interna bien definida, binaria, asociativa, generalmente denotada como  $*$  que satisface las siguientes propiedades:

- Debe existir un único elemento  $e$  llamado identidad que pertenece a  $\mathbf{G}$  tal que

$$e * g = g * e = g, \forall g \in \mathbf{G}. \quad (\text{A.6})$$

- Cada elemento  $g \in \mathbf{G}$  tiene un elemento  $g^{-1}$  llamado inverso de  $g$  tal que

$$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e. \quad (\text{A.7})$$

- Decir que el conjunto  $\mathbf{G}$  tiene una ley de composición binaria interna asociativa significa que

$$(g_1 * g_2) * g_3 = g_1 * (g_2 * g_3), \forall g_1, g_2, g_3 \in \mathbf{G}. \quad (\text{A.8})$$

Además la ley de composición interna definida en el conjunto  $\mathbf{G}$  la llamamos también operación binaria del grupo y la denotamos como  $(\mathbf{G}, *)$

Si el conjunto  $\mathbf{G}$  tiene un número finito de elementos se trata de un grupo finito y el número de elementos de  $\mathbf{G}$  denotado por  $|\mathbf{G}|$  define el orden del grupo. Además si en el grupo  $(\mathbf{G}, *)$  la operación  $*$  es conmutativa

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in \mathbf{G}. \quad (\text{A.9})$$

decimos que es un **grupo Abelian** [2]

### A.1.2. Homomorfismo

Sea  $(\mathbf{G}, *)$  y  $(\mathbf{H}, \bullet)$  dos grupos, la relación  $f: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{H}$  es un homomorfismo si

$$f(a * b) = f(a) \bullet f(b) \quad \forall a, b \in \mathbf{G}. \quad (\text{A.10})$$

A la relación que define el homomorfismo la llamamos también función.

Como un ejemplo consideramos los grupos:  $(\mathbf{R}^{2 \times 2}, +)$  formado por el conjunto de matrices  $2 \times 2$  con parámetros reales bajo la operación suma y  $(\mathbf{R}^2, +)$  formado por el conjunto de parejas ordenadas reales bajo la operación de la suma. Es fácil comprobar que la relación definida como:

$$f: \mathbf{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbf{R}^2 \text{ tal que } f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right] = (a + d, b - c) \quad (\text{A.11})$$

es un homomorfismo.

Si un homomorfismo es biyectivo (inyectivo y sobreyectivo a la vez) entonces decimos que se trata de un **isomorfismo**, por tanto los dos grupos son isomorfos denotados como  $\mathbf{G} \cong \mathbf{H}$ . Un isomorfismo de un grupo consigo mismo le llamamos **automorfismo**.

el grupo formado por los elementos de las transformaciones endomorfas  $(\mathbf{T}: V \rightarrow V)$  invertibles sobre un espacio vectorial  $V$ , se llama *el grupo lineal general* y lo denotamos como:  $\mathbf{GL}(V)$ . Cuando el espacio vectorial  $V = \mathbf{C}^n$  o  $\mathbf{R}^n$  usualmente lo escribimos como  $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$  o  $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$

Un subconjunto  $S$  de un grupo  $G$ , que satisface las propiedades de un grupo es un subgrupo de  $G$  *Subgrupo* de  $G$ .

Si tomamos del grupo lineal general el subconjunto cuyos elementos sean todas las transformaciones lineales endomorfas con determinante uno, forman el *subgrupo lineal especial*  $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$  Podemos encontrar otros subconjuntos por ejemplo las transformaciones unitarias que también será un subgrupo del grupo lineal general que lo denotamos por  $\mathbf{U}(n)$  y lo conoceremos como *el grupo unitario*. Más subgrupos del grupo  $\mathbf{GL}(n)$ , vamos a encontrarlos mas adelante.

### A.1.3. Representación de Grupos

Una representación, es un homomorfismo de un grupo al grupo lineal general.

Consideremos el grupo  $\mathbf{G}$ , asociemos sus elementos a los de la transformación lineal del grupo lineal general  $\mathbf{GL}$ . la función que será un homomorfismo de grupos, podemos escribir la representación de la siguiente manera:

sea  $\mathbf{G}$  un grupo y  $H$  un espacio vectorial, el homomorfismo  $\mathbf{T}: \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{GL}(H)$  satisface

$$\mathbf{T}(g_1 \cdot g_2) = \mathbf{T}(g_1) \cdot \mathbf{T}(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in \mathbf{G}$$

Por lo tanto  $\mathbf{T}$  es una representación del grupo.

Es normal escoger una base y representar  $\mathbf{T}$  en términos de matrices, por lo que el grupo  $\mathbf{G}$  tiene una representación matricial, un ejemplo es la representación matricial de el grupo  $S_n$  conocido como el grupo simétrico [4].

### A.1.4. Grupos de Lie

Sea  $g$  un elemento del grupo  $\mathbf{G}$ , dicho elemento  $g$  depende de un conjunto de parámetros  $\alpha$  de manera suave que transmite una idea de continuidad, es decir, que si dos elementos del grupo estan muy cerca tambien los parametros de cada uno estarán cerca. Geométricamente a este tipo

de estructuras matemáticas se les llama *variedades diferenciables* que cumple, las propiedades de grupo. Generalmente cuando un grupo tiene esta estructura, es un grupo de dimensión infinita. Establezcamos la siguiente definición:

Un grupo de Lie  $\mathbf{G}$  es una variedad diferenciable dotada que tiene la estructura de grupo donde la operación  $\mathbf{G} \times \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  y la relación de con un elemento de  $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  son diferenciables.

Hay varios grupos de Lie, que cumplen con esta definición. como ejemplos tenemos  $U(n)$ ,  $SL(n, C)$ ,  $SL(n, R)$ , entre otros.

### A.1.5. Generadores

En un grupo tenemos que el elemento identidad es muy importante y podemos parametrizarlo asumiendo que en alguna vecindad de la identidad los elementos del grupo pueden ser descritos por una función de  $N$  parametros.

$$g(\alpha)|_{\alpha=0} = \mathbf{e} \quad (\text{A.12})$$

Ahora si encontramos una representación de el grupo, el operador lineal de dicha representación es parametrizado de la misma manera:

$$D(\alpha)|_{\alpha=0} = \mathbf{1}. \quad (\text{A.13})$$

Luego, en alguna vecindad de la identidad podemos hacer una expansión de Teylor a primer orden por estar muy cerca.

$$D(d\alpha) = D(0) + d\alpha_a \left. \frac{\partial D}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha=0} + \dots \quad (\text{A.14})$$

Definimos la expresión

$$\mathbf{X}_a \equiv -i \left. \frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_a} \right|_{\alpha=0}. \quad (\text{A.15})$$

Si recordamos que  $D(0) = \mathbf{1}$ , entonces

$$D(d\alpha) = \mathbf{1} + id\alpha \mathbf{X}_\alpha + \dots, \quad (\text{A.16})$$

donde  $\mathbf{X}_a$  ( $a = 1 \dots N$ ), es *generador de el grupo*. Incluir el número  $i$  tiene que ver con el echo de que si hacemos la representación del grupo  $\mathbf{U}(n)$

$$D : g(\alpha) \rightarrow \mathbf{U}(n), \quad (\text{A.17})$$

es una representación unitaria tal que:

$$D^\dagger(g).D(g) = \mathbf{1}, \quad (\text{A.18})$$

implica que:

$$(\mathbf{1} - id\alpha_a \mathbf{X}_a) \cdot (\mathbf{1} + id\alpha_a \mathbf{X}_a) = \mathbf{1}. \quad (\text{A.19})$$

Desarrollando el producto

$$\mathbf{1} - id\alpha_a \mathbf{X}_a^\dagger + id\alpha_a \mathbf{X}_a + d\alpha_a \mathbf{X}_a d\alpha_b \mathbf{X}_b^\dagger = \mathbf{1} \quad (\text{A.20})$$

$$\mathbf{1} - id\alpha_a \mathbf{X}_a^\dagger + id\alpha_a \mathbf{X}_a + d\alpha_a \mathbf{X}_a d\alpha_b \mathbf{X}_b^\dagger - \mathbf{1} = 0, \quad (\text{A.21})$$

y simplificando a primer orden:

$$(\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_a^\dagger) d\alpha_a - \mathbf{1} = 0. \quad (\text{A.22})$$

Como los  $d\alpha_a$  son linealmente independiente, vemos que

$$\mathbf{X}_a^\dagger = \mathbf{X}_a$$

Ese resultado nos permite concluir que la matriz  $\mathbf{X}_a$  generadora es hermítica, o sea que cuando las representaciones son unitarias entonces los generadores son hermíticos.

Ahora vamos a parametrizar los demás elementos del grupo alejandonos en cualquier dirección de la identidad, esto nos da la libertad de parametrizar los demás elementos de cualquier forma, sin embargo escogemos una parametrización que no altere la ley de composición del grupo. entonces partimos de la identidad

$$D(d\alpha) = \mathbf{1} + id\alpha_a \mathbf{X}_a + \dots \tag{A.23}$$

si hacemos la comparación con la expansión de la función exponencial, a saber  $e^x = 1 + x + \dots$  así podemos hacer la parametrización:

$$D(d\alpha) = e^{id\alpha_a \mathbf{X}_a}. \tag{A.24}$$

Como estamos trabajando para  $d\alpha$  muy pequeños también puedo hacer la siguiente parametrización sin perder el sentido de la expresión:

$$D\left(\frac{\alpha}{k}\right) = e^{i\frac{\alpha}{k} \cdot \mathbf{X}_a} \tag{A.25}$$

Con  $k$  mucho mayor que  $\alpha$  como es un numero pequeño lo seguimos considerando como  $d\alpha_a$ . Ahora el producto de de esta expresión  $k$ -veces aún forma parte del grupo y seria:

$$e^{i\frac{\alpha}{k} \cdot \mathbf{X}_a} \cdot e^{i\frac{\alpha}{k} \cdot \mathbf{X}_a} \dots e^{i\frac{\alpha}{k} \cdot \mathbf{X}_a} \tag{A.26}$$

tendriamos que:

$$\left(e^{i\frac{\alpha}{k}}\right)^k = e^{i\alpha \cdot \mathbf{X}_a} \tag{A.27}$$

Es como si hubieramos deseado la parametrización de  $D(\alpha_a)$ , de ahí que

$$D(\alpha_a) = e^{i\alpha_a \cdot \mathbf{X}_a} \tag{A.28}$$

y es lo que llamamos *la parametrización exponencial*.

### A.1.6. Los grupos Unitarios $U(n)$ , $SU(n)$ ,

Son el conjunto de matrices complejas unitarias  $n \times n$ , que cumplen la condición

$$U^\dagger = U^{-1} \tag{A.29}$$

Se denomina grupo  $U(n)$  al conjunto de matrices unitarias de dimensión  $N$ .

Si imponemos la restricción de que el determinante sea 1 decimos que el grupo es especial  $SU(n)$ .

### A.1.7. El grupo $U(1)$

Es un subgrupo del grupo lineal general, cuyos elementos son matrices complejas unitarias  $n \times n$ , en el primer caso  $n = 1$ . Es caso más simple de grupo unitario es  $U(1)$ . La multiplicación de matrices  $1 \times 1$  es simplemente la multiplicación de números complejos, así que el grupo es abeliano. Además, para que las matrices sean unitarias, el número complejo tiene módulo 1. Así que el grupo  $U(1)$  es el conjunto de los puntos en el plano que forman una circunferencia de radio 1.

$$U(n) = \{e^{i\theta} / \theta \in \mathbf{R}\} \tag{A.30}$$

Cualquier matriz unitaria se puede expresar como la exponencial de una matriz hermítica multiplicada por  $i$   $U = \exp(iH)$ .

Una matriz hermítica es aquella que es igual a su adjunta

$$H^\dagger = H. \tag{A.31}$$

Por lo tanto, en una matriz hermítica los elementos de la diagonal son números reales, y los de fuera de la diagonal pueden ser complejos, pero con

$$h_{jk} = h_{kj}^*. \tag{A.32}$$

En consecuencia, para caracterizar una matriz hermítica (y también una unitaria) de dimensión  $n \times n$ , solo hay que especificar  $n^2$  números reales. (Esto se debe a que trabajamos con matriz hermítica en donde los elementos de la diagonal son numeros reales, de ahí que habría  $n$  parametros. Ahora, los elementos sobre la diagonal serían  $n(n - 1)$  pues se tratan de parametros complejos, no contamos los parametros bajo la diagonal ,pues dependerían de los que estan sobre la diagonal, por lo tanto el total de parametros independientes es:

$$n + n(n - 1) = n + n^2 - n = n^2 \tag{A.33}$$

Cualquier matriz unitaria se puede expresar como la exponencial de una matriz hermítica multiplicada por  $i$ ,

$$U = \exp(i\mathbf{H}) \tag{A.34}$$

Para el grupo  $U(1)$  se puede expresar como la exponencial imaginaria de una matriz hermítica en dimensión 1 ósea un número re

$$e^{i\theta} = \expo(i\theta\mathbf{1}) \tag{A.35}$$

A la matriz identidad  $\mathbf{1}$  en dimensión 1 la llamaremos generador infinitesimal del grupo. El origen de este nombre es que, si tomamos un valor de  $\theta$  pequeño  $d\theta$  la matriz de la transformación sería

$$e^{id\theta} = \mathbf{1} + d\theta\mathbf{1} \tag{A.36}$$

[2]

### A.1.8. El grupo $SU(2)$

Es un subgrupo del grupo lineal general, sus elementos son matríces complejas unitarias de dimension  $n = 2$  y de determinante 1. El número de parametros indepedientes es

$$n^2 - 1$$

# Apéndice B

## Teoría clásica de campos

El concepto de campo en física se refiere a una magnitud que presenta cierta variación sobre una región del espacio. En ocasiones campo se refiere a una abstracción matemática para estudiar la variación de una cierta magnitud física; en este sentido el campo puede ser un ente no visible pero sí medible. Históricamente fue introducido para explicar la acción a distancia de las fuerzas de gravedad, eléctrica y magnética, aunque con el tiempo su significado se ha ampliado substancialmente.

En física el concepto surge ante la necesidad de explicar la forma de interacción entre cuerpos en ausencia de contacto físico y sin medios de sustentación para las posibles interacciones.

La acción a distancia se explica, entonces, mediante efectos provocados por la entidad causante de la interacción, sobre el espacio mismo que la rodea, permitiendo asignar a dicho espacio propiedades medibles. Así, será posible hacer corresponder a cada punto del espacio valores que dependerán de la magnitud del cuerpo que provoca la interacción y de la ubicación del punto que se considera. Clásicamente las fuerzas son descritas por campos clásicos sobre las cuales se desarrolla una teoría utilizando para ello conceptos de mecánica clásica pues podemos entender a los campos como sistemas físicos con infinitos grados de libertad y la mejor forma de describir su dinámica es usando el principio de Hamilton, también conocido como *el principio de mínima acción*.

### B.1. Ecuación del movimiento

La ecuación del movimiento se describe por la acción:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V d^3x \mathcal{L}(\Phi(x), \partial_\mu \Phi(x)) \quad (\text{B.1})$$

Y el principio de Hamilton nos dice que la dinámica de un sistema evolucionando de un estado inicial  $\Phi(t_0, \mathbf{X})$  a un estado final  $\Phi(t_1, \mathbf{X})$  mantiene la acción constante

$$\delta S = 0 \quad (\text{B.2})$$

para cualquier variación en los campos  $\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) + \delta\Phi(x)$ . Además al construir la variación de la acción debemos considerar las condiciones de frontera, en nuestro caso consideramos que la variación de los campos en los extremos  $t_1, t_2$  debe ser nula, es decir  $\delta\Phi(x, t_1) = \delta\Phi(x, t_2) = 0$  al igual que consideramos que los campos tienen un comportamiento asintótico, es decir, para  $|x| \rightarrow \infty$  se debe cumplir que  $\Phi(x, t) = 0$ .

Entonces bajo esas condiciones la variación de la acción se escribe:

$$\delta S = \int_{\Omega} dx^4 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \Phi)} \delta (\partial_{\nu} \Phi) \right], \quad (\text{B.3})$$

donde  $\Omega$  nos indica que la integral se evalúa en un volumen que se extiende por todo el espacio. En el segundo término de la integral podemos ver que la variación en la derivada  $\delta (\partial_{\nu} \Phi)$  es una variación en los campos, o sea es igual a  $\partial_{\nu} (\delta \Phi)$  por lo tanto la expresión para la variación en la acción sería escrita como:

$$\delta S = \int_{\Omega} dx^4 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\nu} \Phi)} \partial_{\nu} (\delta \Phi) \right]. \quad (\text{B.4})$$

Nuevamente podemos centrarnos en el segundo término de la integral y podemos ver que:

$$\partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi \right) = \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right) \delta \Phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \partial_{\nu} (\delta \Phi). \quad (\text{B.5})$$

De tal manera que:

$$\partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi \right) - \left[ \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right) \right] \delta \Phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \partial_{\nu} (\delta \Phi), \quad (\text{B.6})$$

resultado que podemos escribir

$$\delta S = \int_{\Omega} dx^4 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi + \left[ \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right) \right] \delta \Phi - \partial_{\nu} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi \right) \right]. \quad (\text{B.7})$$

Al factorizar  $\delta \Phi$  y organizando, tenemos:

$$\delta S = \int_{\Omega} dx^4 \left\{ \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right] \delta \Phi + \partial_{\nu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi \right] \right\} = 0. \quad (\text{B.8})$$

Debido a que la variación se realiza en los campos  $\delta \Phi$  es completamente arbitraria, vemos que:

$$\delta S = \int_{\Omega} dx^4 \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \right] \delta \Phi + \int_{\Omega} dx^4 \partial_{\nu} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi \right] = 0, \quad (\text{B.9})$$

El segundo término se desvanece, pues al resolver la integral obtenemos:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi} \delta \Phi \right|_{x=\Omega} = 0$$

, en donde hemos aplicado la condición de frontera donde los campos son cero en el infinito por su comportamiento asintótico.

De (B.9) el primer término es cero, pues la variación  $\delta \Phi$  es arbitraria y se trata de la ecuación de Euler-Lagrange que es el teorema fundamental del cálculo variacional que a su vez corresponde a las ecuaciones de movimiento para la teoría clásica de campos que podemos generalizar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i^{\mu}} - \partial_{\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i^{\nu \mu}} = 0, \quad (\text{B.10})$$

en donde  $\nu, \mu = 0, 1, 2, 3$  representan las componentes espacio-temporales de los campos,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ , indica la clase de campo con que se trabaja, más adelante entenderemos la esencia de éste índice.

Cabe resaltar que la densidad Lagrangiana de un sistema físico no está bien definida, pues puede diferir por la derivada total de una función que depende del campo, así

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu \Lambda^\mu (\Phi). \quad (\text{B.11})$$

Dicha densidad lagrangiana tiene asociada la misma ecuación de movimiento puesto que la función se anula al evaluarse en las condiciones de frontera.

## B.2. Simetrías en campos clásicos

En muchos casos ocurre que un sistema físico descrito por una acción admite transformaciones que dejan dicha acción invariante, en otras palabras diríamos que la física que describe un determinado fenómeno debe ser independiente del observador, por ejemplo al estudiar el movimiento de una partícula cada observador tendrá su propio sistema de referencia y se espera que los resultados obtenidos obedezcan las mismas leyes físicas sin importar si un sistema respecto al otro este trasladado, rotado o esté siendo observado en distintos tiempos.

Decimos que si las características de un sistema físico que dependen del espacio tiempo permanecen inmutables frente a una transformación hecha a sus coordenadas espacio-temporales, estamos tratando con *simetrías locales*.

Sin embargo existen características de los sistemas físicos que no dependen de las coordenadas espaciotemporales como el espín, el isespín, la carga, la hipercarga, etc. sería absurdo representar dichas propiedades por funciones matemáticas dependientes de  $x, y, z, t$ . Para lograr nuestro objetivo iniciamos por entender que dichas características serán propiedades internas del sistema, o sea que son cosas que no dependen del punto en el que se encuentre la partícula ni del tiempo. Sin embargo podemos definir las tomando un punto del espaciotiempo y establecer un lugar donde las propiedades internas del sistema adquieran su valor, así el estado de la partícula estará definido por las coordenadas espaciotemporales y el valor de sus propiedades internas que adquiera en ese punto al hacer una misma transformación de las propiedades internas de un sistemas en todo el espacio tiempo las propiedades físicas del sistema no se alteran, por lo tanto hemos echo una *transformación global*, también conocida como transformación Gauge. Sin embargo habíamos dicho que la física de un sistema no depende del observador y cada uno puede tener un valor para las propiedades internas y cada uno podrá hacer transformaciones Gauge, a este proceso le llamamos *transformaciones gauge locales* y aún así exigimos que la física sea invariante bajo transformaciones gauge locales. El mecanismo que nos permite comparar los resultados de dichas tranformaciones lo repasaremos mas adelante.

## B.3. Teorema de Noether

Según Noether todo cambio continuo que deja invariantes las leyes físicas tiene asociada una cantidad conservada por ejemplo:

- La invariancia bajo traslaciones temporales tiene como cantidad conservada la Energía del sistema.

- La invariancia bajo traslaciones espaciales tiene como cantidad conservada el momento lineal del sistema.
- La invariancia bajo rotaciones tiene como cantidad conservada el momento angular del sistema.

Para definir el teorema en términos matemáticos tomamos como base una transformación gauge global actuando sobre las propiedades internas del campo  $\Phi$ .

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi + \delta_0 \Phi, \quad (\text{B.12})$$

en donde  $\delta_0 \Phi$  será una transformación muy pequeña unitaria, inicialmente tendríamos una transformación gauge global sobre el campo así

$$\Phi' = e^{-i\theta^\alpha T^\alpha} \Phi \quad (\text{B.13})$$

y para una pequeña transformación infinitesimal con  $\theta^\alpha$  pequeño, tenemos:

$$\delta_0 \Phi = -i\theta^\alpha T^\alpha \Phi, \quad (\text{B.14})$$

bajo esta transformación gauge global la densidad Lagrangiana también sufrirá un cambio y lo expresamos como:

$$\mathcal{L}'(\Phi', \partial_\mu \Phi') = \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi), \quad (\text{B.15})$$

pues se trata de una transformación que deja invariante el sistema y por lo tanto la acción permanece sin cambios

$$\delta S = S' - S = \int_\Omega d^4x \left[ \mathcal{L}'(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \right] = 0 \quad (\text{B.16})$$

Decimos que la transformación  $\Phi \rightarrow \Phi'$  es una transformación de simetría para un sistema físico si las ecuaciones de movimiento permanecen de forma invariante para los campos transformados y como vemos la variación de la acción generada por una variación arbitraria en los campos  $\Phi$  tenemos que

$$\mathcal{L}'(\Phi', \partial_\mu \Phi') - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = 0, \quad (\text{B.17})$$

y sustituimos el valor de  $\Phi'$  según (B.13)

$$\mathcal{L}'(\Phi - i\theta_{ij}^a \Phi_j, \partial\Phi - i\theta_{ij}^a T_{ij}^a \partial_\mu \Phi_j) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) \quad (\text{B.18})$$

por tratarse de transformaciones diferenciables podemos hacer una expansión en serie de Taylor teniendo en cuenta que se trata de una función de dos variables, a primer orden tenemos:

$$f(x, y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \dots, \quad (\text{B.19})$$

para nuestro caso sería:

$$\mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} (i\theta_{ij}^a T_{ij}^a \Phi_j) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} (i\theta_{ij}^a T_{ij}^a \partial_\mu \Phi_j) - \mathcal{L}(\Phi, \partial_\mu \Phi) = 0, \quad (\text{B.20})$$

y simplificando

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} (i\theta_{ij}^a T_{ij}^a \Phi_j) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi)} (i\theta_{ij}^a T_{ij}^a \partial_\mu \Phi_j) = 0, \quad (\text{B.21})$$

hagamos un análisis del segundo término y resolvamos la derivada del siguiente producto,

$$\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} (-i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j) \right) = -\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) (i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} (-i\theta^a T_{ij}^a \partial_\mu \Phi_j) \quad (\text{B.22})$$

y podemos hacer:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} (i\theta^a T_{ij}^a \partial_\mu \Phi_j) = \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) (i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) (i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j), \quad (\text{B.23})$$

que al sustituir este resultado en (B.21)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} (i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j) + \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) (i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j) - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) (i\theta^a T_{ij}^a \Phi_j) = 0, \quad (\text{B.24})$$

haciendo algunos arreglos como quitar el número  $i$  y agrupar términos da como resultado

$$\underbrace{\left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_i} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) \right]}_0 \theta^a T_{ij}^a \Phi_j - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) \theta^a T_{ij}^a \Phi_j = 0, \quad (\text{B.25})$$

de la cual

$$-\partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) \theta^a T_{ij}^a \Phi_j = 0, \quad (\text{B.26})$$

identificando a  $\theta^a$  como parámetro libre, o sea que la expresión anterior se debe cumplir para todo  $\theta$ , por lo tanto

$$-\partial_\mu \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} \right) T_{ij}^a \Phi_j}_{f^\mu(x)} \quad (\text{B.27})$$

Sabemos que cuando tenemos  $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$  decimos que  $j^\mu(x)$  es una corriente conservada. En nuestro caso

$$\mathcal{J}_a^\mu = -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \quad (\text{B.28})$$

si integramos en todo el espacio dicha corriente vemos que:

$$\int_v d^3x \partial_\mu \left( -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right) = 0, \quad (\text{B.29})$$

donde

$$\frac{d}{dx_0} \int_v d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right) + \int_v d^3x \nabla \cdot \underbrace{\left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_i \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right)}_{f(x)} = 0 \quad (\text{B.30})$$

por lo tanto podemos escribir

$$\partial_0 \int_v d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right) + \int_{v \rightarrow \infty} d^3x \vec{\nabla} \cdot f(\vec{x}) = 0 \quad (\text{B.31})$$

si aplicamos el teorema de la divergencia en el segundo término vemos que para una superficie infinita

$$\partial_0 \int_v d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right) = - \underbrace{\oint d\vec{a} f(x)}_0 \quad (\text{B.32})$$

llegando a la expresión

$$\partial_0 \underbrace{\int_v d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right)}_{Q(t)^a} = 0 \quad (\text{B.33})$$

por tanto la cantidad

$$Q^a(t) = \int_v d^3x \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \Phi_j)} T_{ij}^a \Phi_j \right) \quad (\text{B.34})$$

se conserva. Esta carga conservada la podemos escribir como:

$$Q^a(t) = \int_v d^3x \mathcal{J}_0^a(t, \mathbf{x}). \quad (\text{B.35})$$

La dos últimas expresiones son la forma matemática de expresar el teorema de Noether para transformaciones globales. Dicho teorema lo enunciamos de la siguiente manera:

Sea un sistema dinámico descrito por una acción  $S$ , es invariante bajo un grupo de simetría con un número finito de generadores. Entonces, asociado con cada generador tenemos una corriente y una carga conservadas.

# Apéndice C

## Teoría de campos gauge

Sabemos que un sistema físico puede sufrir transformaciones en sus propiedades de tal manera que el lagrangiano que lo describe sea invariante ante dichas transformaciones que pueden ser de forma local (cuando depende de las coordenadas) o global (sobre las propiedades internas del sistema y no depende de las coordenadas) Ante cualquier transformación de un sistema físico que hace que dicho sistema permanezca invariante decimos que se ha realizado una transformación de simetría. Sin embargo podemos ver que cuando hacemos una transformación local de las propiedades internas de un sistema resulta que no hay invarianza en el sistema.

Ahora se trata extender el concepto de simetría global a local utilizando para ello unos campos Gauge que no son mas que propiedades del universo que logran hacer que una simetría global sea también local. Para comprender este hecho tomemos un sistema basado en la teoría del campo libre de Dirac para  $n$  partículas, su densidad lagrangiana es:

$$\sum_{i=1}^n \bar{\Psi}_i (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi_i \quad (\text{C.1})$$

Entonces hagamos la transformación en el sistema teniendo en cuenta los siguientes casos

### C.1. Simetría Gauge Abelian U(1)

Sea la transformación

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-iq\Theta(x)} \Psi(x) \quad (\text{C.2})$$

Y del mismo modo

$$\bar{\Psi}(x) \rightarrow \bar{\Psi}'(x) = e^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi}(x). \quad (\text{C.3})$$

Hemos hecho una transformación de fase local, pues vemos que el parámetro  $\Theta$  depende de  $x$ . Si aplicamos dicha transformación al lagrangiano (C.1) vemos qué para  $i=1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= e^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) e^{-iq\Theta(x)} \Psi(x) \\ \mathcal{L}' &= ie^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu (e^{-iq\Theta(x)} \Psi(x)) - me^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} e^{-iq\Theta(x)} \Psi(x) \\ \mathcal{L}' &= ie^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu (-ie^{-iq\Theta(x)} q \partial_\mu \Theta(x) \Psi(x) + e^{-iq\Theta(x)} \partial_\mu \Psi(x)) - m \bar{\Psi} \Psi \\ \mathcal{L}' &= -i^2 e^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-iq\Theta(x)} q \partial_\mu \Theta(x) \Psi(x) + ie^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-iq\Theta(x)} \partial_\mu \Psi(x) - m \bar{\Psi} \Psi \\ \mathcal{L}' &= -i^2 e^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-iq\Theta(x)} q \partial_\mu \Theta(x) \Psi(x) + \bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi(x) - m \bar{\Psi} \Psi \\ \mathcal{L}' &= -i^2 e^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-iq\Theta(x)} q \partial_\mu \Theta(x) \Psi(x) + \underbrace{\bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \Psi}_{\mathcal{L}} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

Así que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= -i^2 e^{iq\Theta(x)} \bar{\Psi} \gamma^\mu e^{-iq\Theta(x)} q \partial_\mu \Theta(x) \Psi(x) + \mathcal{L} \\ \mathcal{L}' &\neq \mathcal{L}\end{aligned}\tag{C.5}$$

Este lagrangiano resultante no es similar al lagrangiano antes de la transformación, pues hay un termino extra. Nuestro propósito es que sea invariante, para ello introducimos un campo vectorial adicional  $A_\mu(x)$  en la derivada de tal manera que compense el término sobrante, así que escribimos lo que conocemos como *La derivada covariante* denotada como  $D_\mu$

$$D_\mu \Psi(x) = [\partial_\mu + iqeA_\mu(x)\Psi]\tag{C.6}$$

Donde  $e$  es una constante positiva arbitraria, dicha derivada covariante transforma bajo  $U(1)$  como

$$D_\mu \Psi(x) \rightarrow (D_\mu \Psi(x))' = e^{-iq\Theta(x)} D_\mu \Psi(x)\tag{C.7}$$

Ademas el campo  $A_\mu$  llamado *Campo Gauge* transforma como:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu(x) + \frac{1}{e} \partial_\mu \Theta(x)\tag{C.8}$$

introducir la derivada covariante en la teoría nos permite encontrar un resultado interesante como el construir un nuevo objeto covariante como el resultado de aplicar repetidas veces la derivada covariante sobre un campo veamos lo que surge. tomemos dos derivadas covarianas en la forma

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \Psi\tag{C.9}$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}[D_\mu, D_\nu] \Psi &= (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \Psi \\ &= D_\mu (D_\nu \Psi) - D_\nu (D_\mu \Psi) \\ &= D_\mu (\partial_\nu + iqeA_\nu) \Psi - D_\nu (\partial_\mu + iqeA_\mu) \Psi \\ &= D_\mu \partial_\nu \Psi + iqe D_\mu A_\nu \Psi - D_\nu \partial_\mu \Psi - iqe D_\nu A_\mu \Psi \\ &= iqe (D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu) \Psi \\ &= iqe [(\partial_\mu + iqeA_\mu) A_\nu - (\partial_\nu + iqeA_\nu) A_\mu] \Psi \\ &= iqe (\partial_\mu A_\nu + iqe A_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - iqe A_\nu A_\mu) \Psi \\ &= iqe \underbrace{(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)}_{F_{\mu\nu}} \Psi\end{aligned}\tag{C.10}$$

Por lo tanto

$$[D_\mu, D_\nu] \Psi = iqe F_{\mu\nu} \Psi\tag{C.11}$$

Y por comparación de ambos lados de la ecuación aseguramos que el tensor  $F_{\mu\nu}$  es invariante Gauge, y podemos usarlo para completar el lagrangiano

Con todas estas consideraciones ya podemos escribir el lagrangiano invariante Gauge de nuestra teoría de campos fermiónicos (C.1)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\Psi} (i\gamma^\mu D_\mu - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 \\ \mathcal{L} &= \bar{\Psi} (i\not{D} - m) \Psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2\end{aligned}\tag{C.12}$$

Hemos definido  $\gamma^\mu D^\mu \equiv \not{D}$ . Es de esperar que ahora el lagrangiano sea invariante bajo la transformación  $U(1)$ .

## C.2. Simetria Gauge No abeliana

De el mismo modo anterior , tomamos el lagrangiano del campo libre de Dirac cuyo campo  $\Psi(x)$  transforma de acuerdo a la representación de algún grupo de Lie no abeliano de la siguiente manera:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-i\Theta^\alpha T^\alpha} \Psi(x) \quad (C.13)$$

Donde los  $T^\alpha$  son matrices hermíticas y son la representacion de los generadores de el grupo y satisfacen la relación:

$$[T^a, T^b] = i c^{abc} T^c. \quad Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (C.14)$$

Si tomamos la densidad agrangiana (C.1) notaremos que no es invariante si le aplicamos la transformación (C.13). En forma análoga al caso anterior construimos la derivada covariante

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu(x) \quad (C.15)$$

En donde  $A_\mu$  es un elemento del algebra de Lie de la forma  $A_\mu(x) = ig A_\mu^\alpha(x) T^\alpha$ , el índice  $\alpha$  nos dice el número de campos gauge que coinsidirá con el numero de generadores del grupo de transformación en cuestion, así se logra la invarianza bajo la transformación gauge no abeliana.

Ahora

$$[D_\mu \Psi(x)]' = U(x) D_\mu \Psi(x), \quad (C.16)$$

donde  $U(x) = e^{-i\Theta^\alpha(x) T^\alpha}$  se cumple solo sí el campo gauge  $A_\mu$  tiene la siguiente regla de transformación

$$A'_\mu = U(x) [A_\mu(x) + \partial_\mu] U^{-1}(x) \quad (C.17)$$

Y para transformaciones infinitesimales del campo gauge  $A_\mu$  sería.

$$\delta A_\mu^\alpha(x) = \left(\frac{1}{g}\right) \partial_\mu \Theta^\alpha(x) + c_{\alpha\beta\gamma} \Theta^\beta(x) A_\mu^\gamma(x). \quad (C.18)$$

Como en el caso anterior, podemos construir una nueva cantidad invariante utilizando la definición de derivada covariante aplicada varias veces, por ejemplo:

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] \Psi(x) &= (D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu) \Psi(x) \\ &= [(\partial_\mu + A_\mu)(\partial_\nu + A_\nu) - (\partial_\nu + A_\nu)(\partial_\mu + A_\mu)] \Psi(x) \end{aligned} \quad (C.19)$$

Resolviendo

$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$  al que lo denotaremos como el tensor  $G_{\mu\nu}$ . Dicho tensor bajo una transformación gauge obedecerá la siguiente regla:

$$G'_{\mu\nu}(x) = U(x) G_{\mu\nu} U^{-1}(x) \quad (C.20)$$

Y para el caso de una transformación gauge infinitesimal sería de la misma forma, solo que  $U(x) \approx (1 - \Theta(x))$  y por lo tanto  $U^{-1}(x) \approx (1 + \Theta(x))$ , obteniendo así la expresión:

$$\begin{aligned} \delta G_{\mu\nu} &= (1 - \Theta(x)) G_{\mu\nu} (1 + \Theta(x)) \\ &= G_{\mu\nu} + G_{\mu\nu} \Theta(x) - G_{\mu\nu} \\ G'_{\mu\nu} &= G_{\mu\nu} + [G_{\mu\nu}, \Theta(x)] \end{aligned} \quad (C.21)$$

Fácilmente distinguimos qué

$$\delta G_{\mu\nu} = [G_{\mu\nu}, \Theta(x)] \quad (\text{C.22})$$

Entonces el lagrangiano del campo libre de Dirac que sea invariante bajo transformación gauge no abeliana estará expresado en términos del campo  $G_{\mu\nu}$  de la forma:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi + \frac{1}{2g^2} \text{Tr}[G_{\mu\nu}, G^{\mu\nu}] \quad (\text{C.23})$$

Como pudimos ver en este repaso para obtener lagrangianos invariantes bajo transformaciones locales es muy importante la teoría de campos gauge. Nuestro objetivo se logra adicionando al lagrangiano campos que eliminen los términos que impidan la invarianza, así por cada generador del grupo introducimos un campo gauge el cual físicamente se relaciona con las interacciones, es decir a cada interacción le asociamos un grupo de simetría que lleva consigo un conjunto de campos gauge .

# Apéndice D

## La ecuación de Klein Gordon

La ecuación fue llamada así en honor a los físicos Oskar Klein y Walter Gordon, quienes en 1926 propusieron que ella describe a los electrones relativistas. Otros autores haciendo similares afirmaciones en ese mismo año fueron Vladimir Fock, Johann Kudar, Théophile de Donder y Frans-H. van den Dungen, y Louis de Broglie. Al contrario que la ecuación de Dirac, que describe partículas elementales de espín  $\frac{1}{2}$  como el electrón, la ecuación de Klein-Gordon describe correctamente a los piones y otras partículas de espín cero. Los piones son partículas compuestas, mientras que un ejemplo de partícula elemental de espín cero es el bosón de Higgs.

La ecuación de Klein-Gordon fue propuesta originalmente por Erwin Schrödinger como ecuación para la función de onda de una partícula cuántica. Sin embargo, puesto que la ecuación de Klein-Gordon no admitía una interpretación probabilista adecuada entre otros problemas, Schrödinger consideró más adecuado pasar a una versión no relativista de la ecuación que es la que actualmente se conoce como ecuación de Schrödinger.

Más tarde la función de onda que aparece en la ecuación de Klein-Gordon sería apropiadamente interpretada como la densidad de un campo bosónico cargado de espín cero. Así el hecho de que la "densidad de probabilidad" fuera negativa era interpretada como una densidad de carga negativa y los problemas de interpretación como probabilidades de presencia desaparecían, aunque persistían otros de los problemas mencionados más adelante. Sin embargo, dentro de la teoría cuántica de campos la ecuación de Klein-Gordon sí resultó útil. Nuestro proposito es repasar la deducción de la ecuación de Klein Gordon que nace como una necesidad de unificar la teoría de campos con la relatividad.

Iniciamos con la necesidad de describir el estado de un sistema, y eso está dado por las funciones de onda  $\Psi(x)$ . Pero también queremos decidir como evoluciona ese estado en el tiempo, para ello utilizamos la ecuación de Schrödinger escrita como

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + V(x)\Psi \quad (\text{D.1})$$

Sin embargo podemos ver que es de primer orden en el tiempo y de segundo orden en las derivadas espaciales y esto supone un problema para afrontar un estudio relativista donde las coordenadas espaciales y temporales deben ser tratadas de la misma manera, de ahí que tenemos que buscar una ecuación que trate igual las coordenadas temporales y espaciales, es decir, que aparezcan derivadas del mismo orden para tiempo y espacio. Esto nos asegura que la ecuación pueda ser consistente con los requerimientos de la relatividad especial. Para ello partimos de la relación relativista entre la masa, la energía y el momento:

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (\text{D.2})$$

ahora bajo consideraciones relativistaas sabemos que

$$\begin{aligned} E &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \\ P &= -i\hbar \nabla \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

y sustituimos dichas relaciones en (D.2) tenemos

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4 \quad (\text{D.4})$$

Esta ecuación ha de aplicarse sobre un campo que dependerá de las coordenadas espaciales y el tiempo:

$$\phi = \phi(\vec{x}, t) \quad (\text{D.5})$$

ademas, tomando  $\hbar = c = 1$  tenemos

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi + m^2 \phi = 0 \quad (\text{D.6})$$

recordemos que:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{D.7})$$

podemos hacer la siguiente agrupacion:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (\text{D.8})$$

a esta expresión la denotaremos:

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (\text{D.9})$$

lo llamaremos el D'Alambertiano y será una cantidad invariante bajo transformaciones de lorent así que estamos seguros de que todos los observadores inerciales coinciden en la forma de la misma:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (\text{D.10})$$

Esta ecuación es la ecuación de Klein-Gordon debe su nombre a Oskar Klein y Walter Gordon, y es la ecuación que describe un campo escalar libre en teoría cuántica de campos.

# Apéndice E

## Álgebra de matrices

El uso de matrices en física es muy común y práctico pues facilita y reduce cálculos además nos permite expresar las teorías en elegantes términos matemáticos que facilitan su comprensión, es por eso que dedicamos esta sección a hacer un repaso de la teoría de matrices, pues se ha usado en el desarrollo de este trabajo.

### E.1. Matriz

Una matriz es un conjunto de elementos de cualquier naturaleza aunque, en general, suelen ser números ordenados en filas y columnas; Se llama matriz de orden  $m \times n$  a un conjunto rectangular de elementos  $a_{ij}$  dispuestos en  $m$  filas y en  $n$  columnas. El orden de una matriz también se denomina dimensión o tamaño, siendo  $m$  y  $n$  números naturales [12], se denotan en letras negritas ( $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$ ) sus componentes serán expresados por los subíndices  $(i, j)$ , un ejemplo pudiera ser la matriz  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} \quad (\text{E.1})$$

cada elemento de la matriz  $\mathbf{A}$  se podría denotar por  $(\mathbf{A}_{ij})$ .

### E.2. Operaciones en Matrices

Aunque son varias las operaciones que se pueden realizar entre matrices como la suma, el producto escalar y el producto vectorial, nos centraremos en la que se usa con más frecuencia en física como es el caso de este trabajo.

#### E.2.1. la traspuesta

La traspuesta de una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $M \times N$  es una matriz  $N \times M$  escrita como  $\mathbf{A}^t$  que como vemos es intercambiar columnas por filas así

$$(\mathbf{A}^t)_{ij} = (\mathbf{A})_{ji} \text{ o } (a_{ij})^t = (a_{ji}) \quad (\text{E.2})$$

de esta definicion se cumple que si  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  son dos matrices cuadradas luego

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^t = \mathbf{A}^t + \mathbf{B}^t, \quad (\mathbf{AB})^t = \mathbf{B}^t \mathbf{A}^t, \quad (\mathbf{A}^t)^t = \mathbf{A}. \quad (\text{E.3})$$

### E.2.2. Matriz simétrica y antisimétrica

Una matriz simétrica es aquella que es iguala su transpuesta, osea

$$\mathbf{A}^t = \mathbf{A} \quad (\text{E.4})$$

y una matriz antisimétrica es aquella que cumple que

$$\mathbf{A}^t = -\mathbf{A} \quad (\text{E.5})$$

### E.2.3. Matriz Ortogonal

Una matriz ortogonal es aquella que tiene sus componentes reales y cumple

$$\mathbf{A}^t \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^t = \mathbf{1} \quad (\text{E.6})$$

### E.2.4. Conjugacion compleja

es una operación en la que se aplica el complejo conjugado a toda componente de la matriz, osea que se aplicaria a matrices con componentes complejas

$$(\mathbf{A}^*)_{ij} = (\mathbf{A})_{ij}^*, \quad o \quad (a_{ij}^*) = (a_{ij}^*) \quad (\text{E.7})$$

Si la matriz es real entonces  $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}$  y claramente  $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$

### E.2.5. Conjugacion hermitica

Tambien conocida como la operacion adjunta, y se simboliza con  $\dagger$  y consiste en combinar la conjugacion compleja y la transpuesta, osea que

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^\dagger &= (\mathbf{A}^t)^* = (\mathbf{A}^*)^t, \\ (\mathbf{A}^\dagger)_{ij} &= (\mathbf{A})_{ij}^* \quad o \quad (a_{ij})^\dagger = (a_{ij}^*). \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

### E.2.6. Matriz Hermitica

Una matriz es hermitica  $H$  si satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^\dagger &= \mathbf{H} \\ &= \eta_{ij}^* = \eta_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

### E.2.7. Matriz Unitaria

Una matriz es Unitaria  $U$  si satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} &= \mathbf{U} \mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1} \\ &= \sum_{k=1}^N \mu_{ik} \mu_{jk}^* = \sum_{k=1}^N \mu_{ki}^* \mu_{jk} = \delta_{ij}. \end{aligned} \tag{E.10}$$

de las anteriores definiciones podemos decir que

- Los elementos de la diagonal principal de una matriz hermítica son reales.
- Una matriz hermítica real es simétrica
- Una matriz unitaria real es ortogonal

### E.2.8. Matriz diagonal

Una matriz diagonal es una matriz cuadrada en que las entradas son todas nulas salvo en la diagonal principal, y estas pueden ser nulas o no.

Así, la matriz  $D = (d_{ij})$  es diagonal si:  $d_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ .

esta matriz se puede expresar en terminos de los elementos de la diagonal principal así

$$diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

Algunas de las propiedades de la matriz diagonal son

- $a \cdot diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = diag(a\lambda_1, a\lambda_2, \dots, a\lambda_n),$
- $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) + diag(w_1, w_2, \dots, w_n) = diag(\lambda_1 + w_1, \lambda_2 + w_2, \dots, \lambda_n + w_n),$
- $diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot diag(w_1, w_2, \dots, w_n) = diag(\lambda_1 w_1, \lambda_2 w_2, \dots, \lambda_n w_n).$

### E.2.9. Matrices de Pauli

Son el ejemplo mas claro de matrices hermiticas  $2 \times 2$  y aparecen mucho en física y son

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{E.11}$$

### E.2.10. La traza de una matriz

La traza de una matriz cuadrada  $\mathbf{A}$  de  $n \times n$  está definida como la suma de los elementos de la diagonal principal de  $\mathbf{A}$ . Es decir,

$$tr(\mathbf{A}) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} \tag{E.12}$$

donde  $a_{ij}$  representa el elemento que está en la fila  $i$ -ésima y en la columna  $j$ -ésima de  $\mathbf{A}$ . la traza se puede ver como una transformación lineal que actua sobre el espacio de las matrices y las relaciona a un numero complejo, es decir

$$tr : \mathcal{M}^{N \times N} \rightarrow \mathcal{C} \quad (\text{E.13})$$

aemas cumple las propiedades

$$\begin{aligned} tr \mathbf{A}^t &= tr \mathbf{A} \\ tr(\mathbf{AB}) &= tr(\mathbf{BA}) \end{aligned}$$

### E.2.11. El determinante de una matriz

Al igual que la traza decimos que el determinante es una transformación lineal aplicada a los elemetos  $a_{ij}$  de una matriz

$$det : \mathcal{M}^{N \times N} \rightarrow \mathcal{C} \quad (\text{E.14})$$

definida como

$$det \mathbf{A} = \sum_{i_1, \dots, i_N}^N \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_N} \alpha_{i_1 1} \dots \alpha_{i_N N} \quad (\text{E.15})$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} det \mathbf{A} &= det \mathbf{A}^t \\ det(\mathbf{AB}) &= det(\mathbf{A}) det(\mathbf{B}) \end{aligned}$$

### E.2.12. Inverza de una matriz

Una matriz  $\mathbf{A}$  tiene inverza si y solo si su determinante es diferente de cero, la inverza de una matriz es única y definida como

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{C_A^t}{det \mathbf{A}} \quad (\text{E.16})$$

en donde  $C_A^t$  es la matriz de cofactores de  $\mathbf{A}$  (definicion que se presenta en la referencia [4] pg 64-70).

### E.2.13. Auntovalores y autovectores

Sea  $\mathbf{A}$  una matriz  $n \times n$ , decimos que el número  $\lambda$  se llama *autovalor* de  $\mathbf{A}$  si existe un vector diferente de cero en  $\mathcal{C}$  tal que

$$\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad (\text{E.17})$$

al vector  $\mathbf{v} \neq 0$  se llama *autovector* de  $\mathbf{A}$  correspondiente al autovalor  $\lambda$ .

lo anterior nos conduce a decir que si  $\lambda$  es un valor propio de  $\mathbf{A}$ . Entonces existe un vector diferente de cero

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0 \text{ tal que } \mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} = \lambda \mathbf{1} \mathbf{v} \text{ que al reescribir se tiene}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad (\text{E.18})$$

ahora si la matriz  $\mathbf{A}$  es  $n \times n$  la ecuación (E.18) corresponde a un sistema homogéneo de  $n$  ecuaciones con incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Como se ha supuesto que el sistema tiene soluciones no triviales, se concluye que  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0$ . Inversamente si  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0$  entonces la ecuación (E.18) tiene soluciones no triviales y  $\lambda$  es el valor propio de  $\mathbf{A}$ . Por lo tanto si  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \neq 0$  entonces la única solución de (E.18) es  $\mathbf{v} = 0$  de manera que  $\lambda$  no es valor propio de  $\mathbf{A}$ . Lo anterior podemos expresarlo mediante la siguiente ecuación:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad (\text{E.19})$$

a dicha ecuación la llamamos la ecuación característica de  $\mathbf{A}$ ;  $p(\lambda)$  se llama -el polinomio característico de  $\mathbf{A}$ .<sup>1</sup>

### E.2.14. Matriz definida positiva

Sea la matriz  $\mathbf{A}$  cuadrada de orden  $n \times n$  decimos que es definida positiva si, y sólo si todos sus autovalores son positivos. Además si su orden no es muy grande podemos decir que  $\mathbf{A}$  es positiva si su determinante es mayor que cero.

Ahora, si todos los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  son positivos o cero entonces decimos que se trata de una matriz - definida semipositiva- o si su determinante es  $\det(\mathbf{A}) \geq 0$ .

### E.2.15. Teorema de la descomposición espectral

Cualquier matriz simétrica  $\mathbf{A}$  puede expresarse como

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \mathbf{D} \mathbf{P}' \quad (\text{E.20})$$

donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal donde sus elementos son los autovalores de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{P}$  son matrices formado por los autovectores asociados a los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$ . Además, podemos mencionar que  $\text{rango}(\mathbf{A}) = n$ , donde  $n$  es el número de valores propios no nulos de  $\mathbf{A}$ .

<sup>1</sup>Podemos encontrar ejemplos y más detalle en la referencia [13]

# Apéndice F

## Cálculos

En el desarrollo de este trabajo hemos omitido algunos calculos que tal vez sean innesearios en el desarrollo de las diferentes temáticas, sin embargo en esta sección los presentamos en forma detallada que será como un material de apoya a futuras consultas consultas.

### F.1. El campo clásico escalar

#### F.1.1. Lagrangiana del campo escalar complejo

Para obtener la densidad lagrangiana (2.5) necesitamos definir los campos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \\ \Phi^*(x) &= \frac{\Phi_1(x) - i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}},\end{aligned}\tag{F.1}$$

de tal manera que al despejar  $\Phi_1$  y  $\Phi_2$  tenemos

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\Phi(x) + \Phi^*(x)), \\ \Phi_2 &= -i\frac{\sqrt{2}}{2}(\Phi(x) - \Phi^*(x)),\end{aligned}\tag{F.2}$$

obtenemos campos escalares reales, que si los introducimos en La densidad Lagrangiana2.3 para el campo escalar real tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_1\partial^\mu\Phi_1 - \frac{1}{2}m^2\Phi_1^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi_2\partial^\mu\Phi_2 - \frac{1}{2}m^2\Phi_2^2\tag{F.3}$$

y usando F.2,correspondiente a cada campo real seria

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\Phi + \Phi^*)\right]\partial^\mu\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\Phi + \Phi^*)\right] - \frac{m^2}{2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(\Phi + \Phi^*)\right]^2 \\ &+ \frac{1}{2}\partial_\mu\left[\frac{-i\sqrt{2}}{2}(\Phi - \Phi^*)\right]\partial^\mu\left[\frac{-i\sqrt{2}}{2}(\Phi - \Phi^*)\right] - \frac{m^2}{2}\left[\frac{-i\sqrt{2}}{2}(\Phi - \Phi^*)\right]^2\end{aligned}\tag{F.4}$$

que al resolver

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4}(\partial_\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\Phi + \partial^\mu\Phi^*) - \frac{m^2}{4}(\Phi^2 + \Phi^{*2} + 2\Phi\Phi^*) \\ & - \frac{1}{4}(\partial_\mu\Phi - \partial_\mu\Phi^*)(\partial^\mu\Phi - \partial^\mu\Phi^*) + \frac{m^2}{4}(\Phi^2 + \Phi^{*2} - 2\Phi\Phi^*) \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4}[\partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^* + \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi + \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi^* \\ & - \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi + \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^* + \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi - \partial_\mu\Phi^*\partial^\mu\Phi^*] \\ & - \frac{m^2}{4}(\Phi^2 + \Phi^{*2} + 2\Phi\Phi^* - \Phi^2 - \Phi^{*2} + 2\Phi\Phi^*), \end{aligned} \quad (\text{F.6})$$

y cancelando términos vemos que la Lagrangiana asociada al campo escalar complejo se expresa de la forma (2.5) a saber

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\Phi\partial^\mu\Phi^* - m^2\Phi\Phi^*. \quad (\text{F.7})$$

## F.2. El sector escalar en el modelo estándar

### F.2.1. Masa de los bosones gauge

Miremos los calculos necesarios para definir y calcular las masas de los bosones físicos  $W_\mu$ ,  $W_\mu$  y  $A_\mu$ .

El término mas significativo de la expresion lagrangiana (3.19) es:

$$\left| \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}\sigma_l \cdot b_\mu^l \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2$$

expandimos la expresión de la siguiente manera:

$$\left| \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu \mathbf{1} + \frac{ig}{2}\sigma_1 \cdot b_\mu^1 + \sigma_2 \cdot b_\mu^2 + \sigma_3 \cdot b_\mu^3 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2$$

y sustituimos las respectivas matrices de pauli

$$\left| \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} b_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} b_\mu^3 \right] \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2$$

desarrollamos las operaciones

$$\begin{aligned} & \left| \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & 0 \\ 0 & A_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \left[ \begin{pmatrix} 0 & b_\mu^1 \\ b_\mu^1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -ib_\mu^2 \\ ib_\mu^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_\mu^3 & 0 \\ 0 & -b_\mu^3 \end{pmatrix} \right] \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \\ & = \left| \left( \partial_\mu + \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} A_\mu & 0 \\ 0 & A_\mu \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} b_\mu^3 & b_\mu^1 - ib_\mu^2 \\ b_\mu^1 + ib_\mu^2 & -b_\mu^3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \left( \partial_\mu + \begin{pmatrix} \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}b_\mu^3 & \frac{ig}{2}(b_\mu^1 - ib_\mu^2) \\ \frac{ig}{2}(b_\mu^1 + ib_\mu^2) & \frac{ig'}{2}A_\mu - \frac{ig}{2}b_\mu^3 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(v+\eta) + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}b_\mu^3 & \frac{ig}{2}(b_\mu^1 - ib_\mu^2) \\ \frac{ig}{2}(b_\mu^1 + ib_\mu^2) & \frac{ig'}{2}A_\mu - \frac{ig}{2}b_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right|^2
 \end{aligned}$$

Aquí podemos encontrar el bosón físico  $\mathbf{W}_\mu$  definido como:

$$\mathbf{W}_\mu^\pm = \frac{b_\mu^1 \mp b_\mu^2}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu(v+\eta) + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{g'A_\mu + gb_\mu^3}{\sqrt{2}} & g\mathbf{W}_\mu^+ \\ g\mathbf{W}_\mu^- & \frac{g'A_\mu + gb_\mu^3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_\mu\eta + \frac{i\sqrt{2}}{4} \begin{pmatrix} g'A_\mu + gb_\mu^3 & g\sqrt{2}\mathbf{W}_\mu^+ \\ g\sqrt{2}\mathbf{W}_\mu^- & g'A_\mu - gb_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right|^2 \\
 &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{8} \left[ 2g^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + (g'A_\mu - gb_\mu^3)^2 \right] (v+\eta) + \dots \\
 &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{4}g^2v^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + \frac{1}{8}v^2(g'A_\mu - gb_\mu^3)^2 + \dots
 \end{aligned}$$

el último término que está elevado al cuadrado es fácil verificar que podemos escribirlo como:

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{4}g^2v^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + \frac{1}{8}v^2 \begin{pmatrix} b_\mu^3 & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{3\mu} \\ A^\mu \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{F.8})$$

la matriz  $2 \times 2$  del segundo término podemos diagonalizarla utilizando la forma :

$$A = PAP^t$$

siendo  $A$  la matriz que vamos a diagonalizar así calculamos autovalores y autovectores de dicha matriz

```

(%i1) A: matrix(
      [g^2, -g*gp],
      [-g*gp, gp^2]
);
(%o1)  $\begin{bmatrix} g^2 & -g gp \\ -g gp & gp^2 \end{bmatrix}$ 

(%i2) eigenvalues(%);
(%o2)  $[[gp^2+g^2, 0], [1, 1]]$ 

(%i3) eigenvectors(A);
(%o3)  $[[[gp^2+g^2, 0], [1, 1]], [[1, -\frac{gp}{g}], [1, \frac{g}{gp}]]]$ 

(%i4) uniteigenvectors(A);
(%o4)  $[[[gp^2+g^2, 0], [1, 1]], [[[\frac{|g|}{\sqrt{gp^2+g^2}}, -\frac{|g|gp}{g\sqrt{gp^2+g^2}}]], [[\frac{|gp|}{\sqrt{gp^2+g^2}}, \frac{g|gp|}{gp\sqrt{gp^2+g^2}}]]]$ 
    
```

Figura F.1: Cálculo de autovalores y autovectores utilizando el programa Maxima 15.08.2.

La matriz diagonal  $D$  sera construida por los autovalores de la matriz  $A$

$$D = \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{F.9})$$

asi podemos construir las matrices unitarias  $P$  y  $P^t$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{|g|}{\sqrt{g'^2 + g^2}} & \frac{|g'|}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \\ \frac{-|g|g'}{g\sqrt{g'^2 + g^2}} & \frac{g|g'|}{g'\sqrt{g'^2 + g^2}} \end{pmatrix} \quad P^t = \begin{pmatrix} \frac{|g|}{\sqrt{g'^2 + g^2}} & \frac{-|g|g'}{g\sqrt{g'^2 + g^2}} \\ \frac{|g'|}{\sqrt{g'^2 + g^2}} & \frac{g|g'|}{g'\sqrt{g'^2 + g^2}} \end{pmatrix} \quad (\text{F.10})$$

como las matrices  $P$  y  $P^t$  son unitarias podemos hacer en (F.2.1)

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{4}g^2v^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + \frac{1}{8}v^2 \begin{pmatrix} b_\mu^3 & A_\mu \end{pmatrix} P P^t \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} P P^t \begin{pmatrix} b^{3\mu} \\ A^\mu \end{pmatrix} + \dots$$

asi

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{4}g^2v^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + \frac{1}{8}v^2 \begin{pmatrix} b_\mu^3 & A_\mu \end{pmatrix} P \left[ P^t \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} P \right] P^t \begin{pmatrix} b^{3\mu} \\ A^\mu \end{pmatrix} + \dots$$

resolviendo los productos de los vectores con las matrices  $P$  y  $P^t$  respectivamente usando  $g > 0$  y  $g' > 0$  tenemos:

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{4}g^2v^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + \frac{1}{8}v^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_\mu & \mathbf{A}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}^\mu \\ \mathbf{A}^\mu \end{pmatrix} + \dots \quad (\text{F.11})$$

podemos ver los otros bosones físicos  $\mathbf{Z}_\mu$  y  $\mathbf{A}_\mu$  definidos como:

$$\mathbf{Z}_\mu = \frac{gb_\mu^3 - g'A_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}} \quad \mathbf{A}_\mu = \frac{g'b_\mu^3 - gA_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}$$

y resolviendo los productos vemos qué

$$= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta\partial^\mu\eta - \frac{1}{4}g^2v^2|\mathbf{W}_\mu^+|^2 + \frac{1}{8}(g'^2 + g^2)v^2|\mathbf{Z}_\mu|^2 + 0\mathbf{A}_\mu + \dots$$

ya son muy claro los términos de masa que los bosones físicos han ganado, entonces:

$$M_{\mathbf{W}_\mu} = \frac{1}{2}vg$$

$$M_{\mathbf{Z}_\mu} = \frac{1}{2}v\sqrt{g'^2 + g^2}$$

$$M_{\mathbf{A}_\mu} = 0$$

el boson  $\mathbf{A}_\mu$  se identifica como el fotón, pues debia esperarse que no tenga masa, resultados muy preciso con valores experimentales.

### F.3. Estabilidad del potencial escalar en el modelo 2HDM

#### F.3.1. Componentes de la matriz $\mathbf{K}$

Podemos calcular usando (4.11)

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \frac{1}{2} (K_0 \delta_{11} + K_1 \sigma_{11}^1 + K_2 \sigma_{11}^2 + K_3 \sigma_{11}^3) . \\
 \varphi_1^\dagger \varphi_2 &= \frac{1}{2} (K_0 \delta_{12} + K_1 \sigma_{12}^1 + K_2 \sigma_{12}^2 + K_3 \sigma_{12}^3) . \\
 \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \frac{1}{2} (K_0 \delta_{22} + K_1 \sigma_{22}^1 + K_2 \sigma_{22}^2 + K_3 \sigma_{22}^3) . \\
 \varphi_2^\dagger \varphi_1 &= \frac{1}{2} (K_0 \delta_{21} + K_1 \sigma_{21}^1 + K_2 \sigma_{21}^2 + K_3 \sigma_{21}^3) .
 \end{aligned}
 \tag{F.12}$$

De las matrices de Pauli vemos que

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11}^1 &= 0, & \sigma_{11}^2 &= 0, & \sigma_{11}^3 &= 1. \\
 \sigma_{12}^1 &= 1, & \sigma_{12}^2 &= i, & \sigma_{12}^3 &= 0. \\
 \sigma_{22}^1 &= 0, & \sigma_{22}^2 &= 0, & \sigma_{22}^3 &= -1. \\
 \sigma_{21}^1 &= 1, & \sigma_{21}^2 &= -i, & \sigma_{21}^3 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{F.13}$$

por lo tanto obtenemos los resultados:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \frac{1}{2} (K_0 + K_3) . \\
 \varphi_1^\dagger \varphi_2 &= \frac{1}{2} (K_1 + iK_2) . \\
 \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \frac{1}{2} (K_0 - K_3) . \\
 \varphi_2^\dagger \varphi_1 &= \frac{1}{2} (K_1 - iK_2) .
 \end{aligned}
 \tag{F.14}$$

que son las componenetes de la matriz  $\mathbf{K}$  (4.13).

#### F.3.2. Transformación de los parametros $K_0$ y $K_a$

En primer lugar tomemos la transformación de  $K_o$

$$\begin{aligned}
 K'_0 &= (\varphi'_i)^\dagger (\varphi'_i) \\
 &= (\varphi'_1)^\dagger (\varphi'_1) + (\varphi'_2)^\dagger (\varphi'_2) \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \varphi'_1 \\ \varphi'_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}
 \tag{F.15}$$

y según (4.18) y (4.18)

$$\begin{aligned}
 &= \left[ \mathbf{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right]^\dagger \mathbf{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^\dagger \mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \\
 &= K_0
 \end{aligned} \tag{F.16}$$

Así que

$$K'_0 = K_0 \tag{F.17}$$

Ahora la transformación de  $K_a$ , usando (4.12)

$$K_a = (\varphi_i^\dagger \varphi_j) \sigma_{ij}^a$$

y al efectuar la transformación

$$\begin{aligned}
 K'_a &= (\varphi_i'^\dagger \varphi_j') \sigma_{ij}^a \\
 K'_a &= \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} \sigma_{ij}^a \\
 K'_a &= \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix}^\dagger \sigma^a \begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} \\
 K'_a &= \left[ \mathbf{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right]^\dagger \sigma^a \left[ \mathbf{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \right] \\
 K'_a &= \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^\dagger \mathbf{U}^\dagger \sigma^a \mathbf{U} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

si llamamos  $\mathbf{U}^\dagger \sigma^a \mathbf{U} = R_{ab} \sigma^b$  entonces

$$K'_a = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^\dagger R_{ab} \sigma^b \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$$

y así

$$\begin{aligned}
 K'_a &= R_{ab} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}^\dagger \sigma^b \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \\
 K'_a &= R_{ab} \underbrace{(\varphi_i^\dagger \varphi_j) \sigma_{ij}^a}_{K_b}
 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$K'_a = R_{ab}(U) K_b. \tag{F.18}$$

### F.3.3. La matriz $\mathbf{R}$

Vale la pena centrarnos en la matriz  $\mathbf{R}$  y ver que sus componentes se construyen con solo tener una matriz unitaria arbitraria y usar las matrices de pauli. Para ilustrarlo tomemos como ejemplo la matriz:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix}$$

esta matriz es unitaria por cumplir que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\dagger = \mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{1}$$

entonces tomamos la expresion:

$$\mathbf{U}^\dagger \boldsymbol{\sigma}^a \mathbf{U} = R_{ab} \boldsymbol{\sigma}^b$$

la anterior expresión la podemos escribir como:

$$\mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\sigma}^a \mathbf{A} = R_{ab} \boldsymbol{\sigma}^b.$$

Asi que, podemos hacer:

$$\mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\sigma}^1 \mathbf{A} = R_{11} \boldsymbol{\sigma}^1 + R_{12} \boldsymbol{\sigma}^2 + R_{13} \boldsymbol{\sigma}^3$$

$$\mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\sigma}^2 \mathbf{A} = R_{21} \boldsymbol{\sigma}^1 + R_{22} \boldsymbol{\sigma}^2 + R_{23} \boldsymbol{\sigma}^3$$

$$\mathbf{A}^\dagger \boldsymbol{\sigma}^3 \mathbf{A} = R_{31} \boldsymbol{\sigma}^1 + R_{32} \boldsymbol{\sigma}^2 + R_{33} \boldsymbol{\sigma}^3$$

y hacemos los remplazos correspondientes

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} = R_{11} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + R_{12} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + R_{13} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} = R_{21} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + R_{22} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + R_{23} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1+i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ -1-i & 1 \end{pmatrix} = R_{31} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + R_{32} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + R_{33} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

realizamos los calculos en ambos lados

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & 2i+1 \\ 1-2i & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{13} & R_{11} - iR_{12} \\ R_{11} + iR_{12} & -R_{13} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -i+2 \\ i-2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{23} & R_{21} - iR_{22} \\ R_{21} + iR_{22} & -R_{23} \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2-2i \\ 2i+2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{33} & R_{31} - iR_{32} \\ R_{31} + iR_{32} & -R_{33} \end{pmatrix}$$

de la observación de cada una de las matrices podemos comparar las componentes e identificar a:

$$R_{13} = -\frac{2}{3}, \quad R_{23} = -\frac{2}{3}, \quad R_{33} = -\frac{1}{3}.$$

y para las demas componentes resolvemos:

el primer sistema:

$$R_{11} - iR_{12} = \frac{2i+1}{3}$$

$$R_{11} + iR_{12} = \frac{1 - 2i}{3}$$

así

$$R_{11} = \frac{1}{3}, \quad R_{12} = -\frac{2}{3}$$

el segundo sistema:

$$R_{21} - iR_{22} = \frac{2i + 1}{3}$$

$$R_{21} + iR_{22} = \frac{1 - 2i}{3}$$

así

$$R_{21} = -\frac{2}{3}, \quad R_{22} = \frac{1}{3}$$

y el tercer sistema:

$$R_{31} - iR_{32} = \frac{2 - 2i}{3}$$

$$R_{31} + iR_{32} = \frac{2i + 2}{3}$$

así

$$R_{31} = \frac{2}{3}, \quad R_{32} = \frac{2}{3}$$

así la matriz  $\mathbf{R}$  asociada a la matriz unitaria  $A$  será:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que esta matriz cumple las propiedades (4.20). Además sus componentes son reales lo que la hace pertenecer al grupo  $SO(3)$ .

# Bibliografía

- [1] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. Teoría clásica de campos, Vol.2. Curso de física teórica. Reverté. 1973.
- [2] Robinson Castro Puche. Álgebra moderna e introducción al álgebra geométrica. Ecoediciones.2013.
- [3] Sadri Hassani.Mathematical Physics A Modern Introduction to Its Foundations.Second Edition.Springer. 913-948. 2013.
- [4] Sandri Hassani. Mathematical physics: a modern introduction to its foundations. Springer. 2013.
- [5] Salcedo, LL. Física matemática, grupos de lie, rotaciones .Montecarlo. Universidad Granada. 25-38. 2018.
- [6] Maniatis M, von Manteuffel A, Nachtmann O and Nagel F 2006 Eur. Phys. J. C48 805-823 (Preprint hep-ph/0605184).
- [7] Maniatis M, Nachtmann O.Stability and symmetry breaking in the general n-Higgs-doublet model.Eur.Phys.j.C(2015)63:461-475.
- [8] Georgi, Howard. Lie algebras in particle physics: from isospin to unified theories. Vol.54. Westview press. 43-54. 1999.
- [9] Nagel F 2004 New aspects of gauge-boson couplings and the Higgs sector Ph.D. thesis Heidelberg U .URL <http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/4803>.
- [10] Bailin, David and Love, Alexander. Introduction to Gauge Field Theory Revised. Edition.2. CRC Press. 14-25. 1993.
- [11] Alberto Casas. El lado oscuro del universo. Libros de la Catarata. 70-80.2010.
- [12] Kolman, B. and Hill, D.R. and Mercado. Álgebra lineal Pearson Educación. 2006.
- [13] Grossman, S.I. Álgebra lineal. McGraw-Hill Interamericana de España S.L. 2008.
- [14] Gerard t Hooft. Partículas elementales, en busca de las estructuras mas pequeñas del universo. Planeta S.A 39-50. 2001.
- [15] Bartrom-Olsen, L. En busca del Quark: Una introducción para estudiantes de física de partículas. Xlibris. 2013.

- 
- [16] Alvaro Rojas. El principio de gauge y el teorema de goldstone. Universidad Tecnológica de Pereira.
- [17] Lois Leitod. El cálculo .OXFORD Univerity Press. pag 1004-1012. 2009.
- [18] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane and S. Dawson, “The Higgs Hunter’s Guide”, Addison-Wesley. “Errata for the Higgs Hunter’s Guide”. 1990.
- [19] R. A. Diaz, “Phenomenological Analysis of the Two-Higgs-Doublet Model”, Ph.D. thesis.
- [20] Yithsbey Giraldo, Willian A. Ponce, Luis A Sánchez.Stability of the potential and symetry breaking in the economical 3-3-1 model. Eur.Phys J.C.63: 461-475 (2009).
- [21] Yithsbey Giraldo, Larry Burbano. Revised Criteria for Stability in the general Two-Higgs Doublet Model. 2018. Este artículo está en revisión por el comité de selección del XXVII Congreso Nacional de Física (Cartagena 2017).