ESTRUCTURA CANÓNICA DEL CAMPO DE YANG-MILLS LIBRE Y CON INTERACCIÓN

ANDRES DAVID PEÑA UNIGARRO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FISICA

SAN JUAN DE PASTO, NARIÑO, COLOMBIA

2019

ESTRUCTURA CANÓNICA DEL CAMPO DE YANG-MILLS LIBRE Y CON INTERACCIÓN

ANDRES DAVID PEÑA UNIGARRO

TRABAJO DE GRADO PARCIAL PARA OPTAR POR EL TITULO DE FISICO

Director:

GERMAN ENRIQUE RAMOS ZAMBRANO

PhD. EN CIENCIAS FISICAS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FISICA

SAN JUAN DE PASTO, NARIÑO, COLOMBIA

2019

NOTA DE RESPONSABILIDAD

"Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores"

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1996, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

German Enrique Ramos Zambrano

Director

Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado 1

Yithsbey Giraldo Usuga

Jurado 2

San Juan de Pasto, 25 de Septiembre, 2019

Agradecimientos

Agradezco a mi familia por su apoyo incondicional a lo largo de mi carrera. Especialmente a mi padre Edgar, mi madre Sandra, y a mi hermano Diego por impulsarme a cumplir mis metas, por brindarme su confianza y respaldo en cada instante de mi vida.

Le agradezco al director de mi trabajo de Grado el Ph.D Germán Ramos por su valiosa colaboración y dedicación durante todo el proceso que me ha permitido alcanzar esta meta.

Resumen

El presente trabajo se realiza el estudio de la estructura canónica del campo de Yang-Mills libre y con interacción. Dicho estudio se desarrollará en base a la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana en teoría de campos para sistemas que poseen vínculos usando el método propuesto por Dirac, y se lo extenderá al caso de teorías de gauge no abelianas.

Palabras clave: Lagrangiano, Hamiltoniano, Método de Dirac, Transformacion de gauge.

Abstract

This work develops the study of the yang-mills field canonical structure, free and with interaction. The study is developed based on Lagrangian and Hamiltonian formulations in field theory for systems which have constraints with the Dirac proposed method. In addition it is possible to encompass the non abelian gauge scenario.

Keywords: Lagrangian, Hamiltonian, Dirac Method , Gauge Transformation.

Índice general

Glosario:

Funcional: integral definida sobre un contorno cerrado, de manera que el dominio de la funcional es un espacio de funciones, y su rango es el conjunto de números reales.

Coordenadas generalizadas: conjunto de N coordenadas curvilineas linealmente independientes que determinan el estado de un sistema físico con un número finito de grados de libertad.

Lagrangiano: para un sistema físico conservativo con un número finito de grados de libertad, es una función que describe la dinámica del sistema físico. Se define como la diferencia entre la energía cinetica y la energía potencial expresadas en términos de las coordenadas generalizadas.

Acción: funcional definida en un intervalo de tiempo y construida a partir del Lagrangiano. La acción determina la dinámica de un sistema físico.

Campo: un campo describe un sistema físico definido en el espacio-tiempo.

Espacio-Tiempo: espacio de cuatro dimensiones usado para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. Un pun o un evento del espacio-tiempo, esta determinado por un conjunto de cuatro coordenadas: tres espaciales y una temporal.

Introducción

En los últimos años las teorías de gauge han sido exitosamente aplicadas a la descripción de las fuerzas fundamentales, dichas teorías se basan en la invarianza de la Acción cuando se aplican a los campos, transformaciones que dependen del punto en el espacio-tiempo, conocidas como transformaciones de gauge. Además, las transformaciones de gauge cumplen la propiedad de formar un grupo de simetría [1]. Los diferentes modelos obtenidos para la representación de las fuerzas fundamentales dependen del grupo de simetría al cual pertenecen las transformaciones de gauge, por ejemplo: las ecuaciones de movimiento asociadas al campo electromagnético se obtienen a partir de una densidad Lagrangiana invariante bajo transformaciones de gauge que pertenecen al grupo de simetría U(1), de igual manera teorías como la cromodinámica cuántica o la unificación de la interacción electro-débil, se obtienen a partir de un sistema invariante bajo transformaciones pertenecientes al grupo de simetría SU(3) y $U(1) \otimes SU(2)$ respectivamente. Cuando los generadores de las transformaciones no conmutan se dice que el grupo de simetría es no abeliano y a las teorías invariantes bajo dicho tipo de transformaciones de gauge son denominadas teorías de Yang-Mills.

Las teorías de Yang-Mills fueron introducidas por Chen Ning Yang y Robert L. Mills en un artículo [2] publicado en 1954 donde se considera una densidad Lagrangiana invariante bajo el grupo de simetría SU(2). Sin embargo, la relevancia física de dichas teorías se hizo evidente en 1960, ya que se pudo concluir que todas las interacciones elementales entre partículas son generadas por teorías de gauge [3]. En 1967 Faddeev, Popov y de Witt, fueron capaces de construir un esquema consistente para la quantización del campo de Yang-Mills sin masa, además, en el mismo año fue propuesto de manera independiente por Weinberg y Salam un modelo basado en teorías de gauge en donde fue posible unificar las interacciones débil y electromagnética [3]. Para el año 1972 gracias a los numerosos trabajos tanto teóricos como experimentales [4; 5], la construcción de las teorías cuánticas de gauge estaban casi completas, y fue posible reconocer la importancia que tienen las teorías de Yang-Mills en la fisica de particulas. Con dichas teorías es posible describir interacciones como lo son la interacción nuclear débil [6; 11] responsable de algunos tipos de radiación, y la interaccion nuclear fuerte [12; 13], fuerza que mantiene unidos a los nucleones y la cual esta descrita por la cromodinámica cuántica [14]. Por lo tanto, las teorías de Yang-Mills resultan fundamentales para el desarrollo de la física de partículas ya que permite la descripcion de las interacciones nucleares, y la construción de una de las teorias mas exitosas de los ultimos años como el Modelo Estándar.

Las teorías invariantes bajo transformaciones de gauge tienen la propiedad de ser descritas a partir de un un Lagrangiano singular, es decir, un Lagrangiano que tiene una matriz Hessiana con determinante igual a cero, en caso contrario se dice que la teoría es regular [15]. Se procede a estudiar clasicamente la teoría Electromagnética y la teoría de Yang-Mills, inicialmente son consideradas las teorías libres y posteriormente en interacción con un campo fermiónico. Debido a la naturaleza singular de los sistemas, se debe analizar la existencia de vínculos dentro de las teorías. Los vínculos pueden ser clasificados como siendo de primera clase si el paréntesis de Poisson con los demás vínculos de la teoría y con sigo mismo es igual o débilmente igual a cero. Por otro lado, los vínculos que tengan al menos un corchete de Poisson diferente de cero con los demás vínculos se denominan vínculos de segunda clase. Para los vínculos de primera clase es necesario implementar condiciones de gauge de manera que pasen a ser vínculos de segunda clase, de modo que sea posible usar el método de Dirac para sistemas singulares y eliminar los vínculos presentes. El método de Dirac consiste en la construcción de una matriz que tiene como componentes los corchetes de Poisson entre los vínculos de segunda clase. Posteriormente será posible definir un conjunto de corchetes de Dirac, los cuales servirán para el cálculo de las ecuaciones de movimiento definidas en términos de las variables independientes escogidas despues de que los vínculos hayan sido eliminados.

En el capítulo 2 se estudia la densidad Lagrangiana asociada al campo Electromagnético, de la cual se pueden derivar las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange en el espacio de configuración $(A_\mu, \dot{A}_\mu)$. Por otro lado, se procede a estudiar el campo electromagnetico desde la formulación Hamiltoniana, la cual permite evidenciar a partir de la definición de momento canónico la existencia de vínculos en la teoría. Al clasificar dichos vínculos, se determina que son de primera clase, por ende, es necesario implementar condiciones adicionales denominadas condiciones de gauge, de manera que los vínculos de primera clase se conviertan en vínculos de segunda clase y sea posible implementar el método de Dirac para sistemas singulares.

A diferencia del capítulo 2, donde el campo electromagnetico es una teoría invariante bajo el grupo de símetria abeliano U(1), en el capítulo 3 es considerada una densidad Lagrangiana invariante bajo transformaciones de gauge no abelianas, particularmente se considera la invarianza bajo el grupo de símetria SU(2). Haciendo uso del procedimiento descrito anteriormente se analiza la formulación canónica de la teoría de Yang-Mills libre. En los capítulo 4 y 5 se estudia clásicamente las teorías electromagneticas y de Yang-Mills en interacción con un campo fermiónico haciendo uso del procedimiento utilizado en los capitulos 2 y 3. Se destaca la existencia de dos vínculos de segunda clase adicionales asociados a las variables fermiónicas.

2 Estudio Clásico del Campo Electromagnético

La teoría de Maxwell para el campo electromagnético en el vacío puede ser derivada de la densidad Lagrangiana [20; 44]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}(x)F_{\mu\nu}(x), \tag{2.1}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es un tensor antisimétrico denominado tensor de campo electromagnético, definido en términos del cuadrivector potencial $A_\mu(t, \mathbf{x})$ como:

$$F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(\mathbf{x}, t) - \partial_\nu A_\mu(\mathbf{x}, t), \tag{2.2}$$

con las siguientes componentes:

$$F_{i0}(\mathbf{x}, t) = E_i(\mathbf{x}, t) \tag{2.3}$$

$$F_{ij}(\mathbf{x}, t) = -\epsilon_{ijk}B_k(\mathbf{x}, t), \tag{2.4}$$

Donde que $E_i(\mathbf{x}, t)$ (i=1,2,3) y $B_k(\mathbf{x}, t)$ (k=1,2,3) representan el campo eléctrico y el campo magnético respectivamente. Utilizando el principio variacional [43] para la acción correspondiente de la teoría se mostrará que efectivamente la densidad Lagrangiana planteada en (2.1) conduce a las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Es importante tener en cuenta que la teoría electromagnética se deriva a partir de un Lagrangiano el cual se dice que es singular, ya que posee una matriz Hessiana con determinante igual a cero, en consecuencia surgirán relaciones denominadas vínculos [20; 29; 41; 42] y por lo tanto para efectuar el estúdio clásico de teorías singulares se hace uso del método formulado por Dirac [18]. La notación usada para el desarrollo del este trabajo, así como las propiedades tensoriales en el espacio de Minkowski se estudian en el **Apéndice A**.

2.1. Invarianza de Gauge

Si se consideras transformaciones sobre el cuadripotencial de la forma:

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x), \tag{2.5}$$

donde $\alpha(x)$ es una función arbitraria que depende de las coordenadas espacio-temporales, se puede observar que:

$$\begin{aligned} F_{\mu\upsilon}(x) \to F'_{\mu\upsilon}(x) &= \partial_\mu(A_\upsilon(x) + \partial_\upsilon \alpha(x)) - \partial_\upsilon(A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)) \\ &= \partial_\mu A_\upsilon(x) + \partial_\mu \partial_\upsilon \alpha(x) - \partial_\upsilon A_\mu(x) - \partial_\upsilon \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Como las derivadas parciales conmutan entre si, se deduce que:

$$F'_{\mu\upsilon}(x) = \partial_\mu A_\upsilon(x) - \partial_\upsilon A_\mu(x) = F_{\mu\upsilon}(x), \tag{2.7}$$

por lo tanto, el tensor de segundo orden $F_{\mu\upsilon}$ es invariante bajo transformaciones de la forma (2.5) y debido a que la densidad Lagrangiana solo depende del tensor $F_{\mu\upsilon}$ entonces esta también permanecerá invariante, igualmente la acción correspondiente de la teoría y las ecuaciones de campo.

A las transformaciones de campo cuyos párametros dependen de una manera arbitraria del espacio-tiempo son llamadas transformaciones de gauge y el principal postulado de las teorías de gauge es que todas las cantidades físicas observables, la acción y las ecuaciones de movimiento deben ser invariantes bajo este tipo de transformaciones [29]. Ya que este principio se cumple en la teoría electromagnética bajo (2.5) se considera a dicha teoría como el ejemplo más simple de una teoría invariante gauge.

2.2. Formulación Lagrangiana

Debido a la forma de $F_{\mu\upsilon}$, la densidad Lagrangiana (2.1) es función del campo A_μ y sus derivadas espacio-temporales, de manera que la acción correspondiente de la teoría electromagnética es definida por:

$$\mathcal{A}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu]. \tag{2.8}$$

Ahora, al considerar la variación de la acción (2.6), teniendo en cuenta cambios independientes y arbitrarias del campo A_μ implica que:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu] = \delta \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu] = \int d^4x \delta\mathcal{L}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu], \tag{2.9}$$

La derivada funcional δ actua en la trayectoria que describen los campos entre dos condiciones de frontera fijas y no en los parametros de los cuales dependen. De la relación (2.9) se puede determinar que:

$$\delta\mathcal{L}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta(\partial_\upsilon A_\mu), \tag{2.10}$$

reemplazando en (2.9) se obtiene:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu] = \int d^4x[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}\delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta(\partial_\upsilon A_\mu)]. \tag{2.11}$$

Como se consideran variaciones en los campos A_μ y no en las coordenadas:

$$\delta(\partial_\upsilon A_\mu) = \delta\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta A_\mu = \partial_\upsilon(\delta A_\mu), \tag{2.12}$$

entonces, se puede escribir:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta(\partial_\upsilon A_\mu) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\partial_\upsilon(\delta A_\mu) = \partial_\upsilon[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta A_\mu] - \partial_\upsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta A_\mu, \tag{2.13}$$

que al sustituir en (2.11) resulta que:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu, \partial_\upsilon A_\mu] = \int d^4x[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}\delta A_\mu - \partial_\upsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta A_\mu] + \int d^4x\partial_\upsilon[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\delta A_\mu] \tag{2.14}$$

Los campos deben satisfacer las condiciones de frontera [37]:

$$\delta A_\mu(\mathbf{x}, t_1) = \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_2) = 0 \tag{2.15}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} A_\mu(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{2.16}$$

de manera que el segundo termino en (2.14) se anula debido al comportamiento asintótico de los campos, con lo cual:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu,\partial_\upsilon A_\mu]=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\partial_\upsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\right]\delta A_\mu. \tag{2.17}$$

.El principio de Hamilton establece que la trayectoria real que sigue el sistema es la que toma estacionaria la acción de la teoría [36; 37; 43], es decir :

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu,\partial_\upsilon A_\mu]=\int d^4x\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\partial_\upsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}\right]\delta A_\mu=0. \tag{2.18}$$

Como la integración se realiza en un volumen arbitrario y haciendo hincapié en el hecho que variaciones en A_μ se consideran de manera que son completamente arbitrarias e independientes, la igualdad se satisface si se cumple que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}-\partial_\upsilon\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}=0. \tag{2.19}$$

El resultado anterior se conoce como las ecuaciones de Euler-Lagrange y la forma explícita de dichas ecuaciones para el campo electromagnético implica que:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu}=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial A_\mu}[F^{\mu\upsilon}(x)F_{\mu\upsilon}(x)]=-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial A_\mu}((\partial^\mu A^\upsilon(x)-\partial^\upsilon A^\mu(x))(\partial_\mu A_\upsilon(x)-\partial_\upsilon A_\mu(x)))=0. \tag{2.20}$$

Por otro lado (véase **Apéndice B**):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu(x))}=F^{\mu\upsilon}(x), \tag{2.21}$$

sustituyendo (2.20) y (2.21) en (2.19) se determina que:

$$\partial_\upsilon F^{\mu\upsilon}(x)=0 \tag{2.22}$$

Como se mencionó anteriormente, la expresión que resulta de las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo electromagnético representan las ecuaciones de Maxwell en el vacío, lo cual procedemos a mostrar. Si $\mu = 0$

$$\partial_i F^{0\upsilon}(x) = \partial_0 F^{00}(x) + \partial_i F^{0i}(x) = -\partial_i E^i = \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{2.23}$$

Si $\mu = i$

$$\begin{aligned} \partial_\upsilon F^{i\upsilon}(x) &= \partial_0 F^{i0}(x) + \partial_k F^{ik}(x) \\ &= \partial_0 E^i(x) - \epsilon_{ikj}\partial_k B_j(x) = 0\cdot \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E(x)} &= \nabla \times \mathbf{B(x)} \end{aligned} \tag{2.24}$$

Ya que para el desarrollo de este trabajo se tienen en cuenta las unidades naturales, el término que multipica a $\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E(x)}$, cumple que "$\varepsilon_0 \mu_0 = 1$". Las ecuaciones restantes llamadas ecuaciones homogeneas de Maxwell, se obtienen a partir de las identidades de Bianchi, las cuales debido a que el tensor $F^{\mu\upsilon}$ es invariante bajo transformaciones de gauge, se pueden escribir como [45; 46]:

$$\partial_\upsilon F^{\mu\rho}(x) + \partial_\mu F^{\rho\upsilon}(x) + \partial_\rho F^{\upsilon\mu}(x) = 0, \tag{2.25}$$

Se sabe que las teorías invariantes bajo transformaciones de gauge están asociadas a Lagrangianos singulares, esto también puede ser evidenciado calculando la matriz Hessiana asociada a la densidad Lagrangiana (2.1), la cual se define como [20; 38]:

$$W^{\mu\upsilon} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)\partial(\partial_0 A_\upsilon)} = \frac{\partial}{\partial(\partial_0 A_\mu)}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\upsilon)} \tag{2.26}$$

Usando el resultado que se obtuvo en (2.20) se deduce que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\beta A_\upsilon)} = F^{\upsilon\beta} = \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\upsilon}F_{\alpha\theta} = \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\upsilon}(\partial_\alpha A_\theta - \partial_\theta A_\alpha), \tag{2.27}$$

Ahora, la segunda derivada implica:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_\sigma A_\mu)\partial(\partial_\beta A_\upsilon)} =& \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\upsilon}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\mu)}(\partial_\alpha A_\theta) - \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\upsilon}\frac{\partial}{\partial(\partial_\sigma A_\mu)}(\partial_\theta A_\alpha)\\ =& \eta^{\theta\beta}\eta^{\alpha\upsilon}(\delta^\theta_\mu\delta^\alpha_\sigma - \delta^\alpha_\mu\delta^\theta_\sigma)\\ =& (\eta^{\mu\beta}\eta^{\sigma\upsilon} - \eta^{\sigma\beta}\eta^{\mu\upsilon}).\end{aligned} \tag{2.28}$$

Si $\sigma = \beta = 0$ resulta:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)\partial(\partial_0 A_\upsilon)} = (\eta^{\mu 0}\eta^{0\upsilon} - \eta^{00}\eta^{\mu\upsilon}) = (\eta^{\mu 0}\eta^{0\upsilon} - \eta^{\mu\upsilon}). \tag{2.29}$$

Entonces, la matriz Hessiana de la teoría electromagnética esta dada por la siguiente matriz:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2.30}$$

La matriz W(x,y) se caracteriza por que su determinante es nulo, entonces, la teoría electromagnética está descrita por una densidad Lagrangiana singular [20]. La naturaleza singular de la teoría es consecuencia de que no todos los momentos canónicos pueden ser interpretados como variables independientes y por lo tanto, no todas las “velocidades” podrán ser expresadas en términos de los momentos independientes [41], en otras palabras, existen relaciones o vínculos entre las variables dinámicas y como consecuencia el espacio de fase asociado a la teoría tendrá que ser reducido.

2.3. Formulación Hamiltoniana de la teoría de Maxwell

A continuación se procederá a estudiar la formulación Hamiltoniana de la teoria electromagnética [17; 20; 42], para esto se debe definir el momento canónico asociado al campo A_μ de la siguiente manera:

$$\Pi^\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu(\mathbf{x}, t))}. \tag{2.31}$$

Usando la ecuación (2.21), se deduce que:

$$\Pi^\mu(x) = F^{\mu 0} \tag{2.32}$$

Si de la relación anterior se considera el valor $\mu = 0$ se obtiene:

$$\Pi^0(x) = F^{00} = 0, \tag{2.33}$$

En tanto que para $\mu = i$ resulta:

$$\Pi^i(x) = F^{i0} = -F_{i0} = F_{0i} = \partial_0 A_i(x) - \partial_i A_0(x) \tag{2.34}$$

Para sistemas regulares (2.31) representa una transformación entre el espacio de configuración $(A_\mu, \dot{A}_\mu)$ y el espacio de fase (A_μ, Π^μ) con una correspondencia uno a uno. Debido a que en la expresión (2.33) no hay términos en los que esté presente la velocidad de A_0 no se puede efectuar la transformación para esta componente del campo, por lo tanto, se denomina a dicha ecuación un vínculo primario [20; 41] y será denotado como:

$$\Phi_1 \equiv \Pi^0(x) \approx 0 \tag{2.35}$$

Donde el símbolo $\approx$ se identifica como igualdad débil ya que la anterior relación solo se cumple en el espacio de fase reducido de la teoría [20; 38; 42]. Aun con la presencia de vínculos es posible construir, bajo una transformación de Legendre [37; 43] la densidad Hamiltoniana canónica asociada de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_c \equiv \Pi^\mu \partial_0 A_\mu(x) - \mathcal{L}(x). \tag{2.36}$$

De la densidad Lagrangiana (2.1), y de la definición del momento canónico (2.31) se deduce que la densidad Hamiltoniana canónica será de la forma (Veáse **Apéndice C**):

$$\mathcal{H}_c \equiv \frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x). \tag{2.37}$$

Entonces, se concluye que el Hamiltoniano de la teoría es:

$$H_c = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x)\right]. \tag{2.38}$$

El Hamiltoniano expresado en (2.38) solo está bien definido en el espacio de fase reducido debido a la presencia de los vínculos, este puede ser extendido fuera de este subespacio al adicionarle una combinación lineal del vínculo primario Φ_1 [20; 41]. Se define así el Hamiltoniano primario de la teoría:

$$H_p \equiv H_c + \int d^3x \lambda_1 \Phi_1 = \int d^3x [\frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \lambda_1\Phi_1] \tag{2.39}$$

donde λ_1 es una funcion arbitraria del punto en el espacio-tiempo y se identifica como el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo Φ_1 [42]. Ahora, es necesario definir los corchetes de Poisson a tiempos iguales entre dos variables dinámicas $B(\mathbf{x}, t)$ y $C(\mathbf{x}, t)$ en el espacio de fase definido por el par canónico (A_μ, Π^μ) en la forma:

$$\{B(\mathbf{x}, t), C(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3z[\frac{\delta B(\mathbf{x}, t)}{\delta A_\mu(\mathbf{z}, t)}\frac{\delta C(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta B(\mathbf{x}, t)}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{z}, t)}\frac{\delta C(\mathbf{y}, t)}{\delta A_\mu(\mathbf{z}, t)}]. \tag{2.40}$$

Donde δ representa una derivada funcional. A partir de la expresión (2.40), se determina que los corchetes de Poisson fundamentales evaluados en tiempos iguales entre los pares canónicos son:

$$\begin{aligned}\{A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\upsilon(\mathbf{y}, t)\} =& \int d^3z[\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta \Pi^\upsilon(y)}{\delta \Pi^\nu(z)} - \frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \Pi^\nu(z)}\frac{\delta \Pi^\upsilon(y)}{\delta A_\nu(z)}] \\ =& \int d^3z[\delta^\mu_\nu \delta^\upsilon_\nu \delta(\mathbf{x}-\mathbf{z})\delta(\mathbf{y}-\mathbf{z})] \\ =& \delta^\upsilon_\mu \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\{A_\mu(\mathbf{x}, t), A_\upsilon(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3z[\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta A_\upsilon(y)}{\delta \Pi^\nu(z)} - \frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \Pi^\nu(z)}\frac{\delta A_\upsilon(y)}{\delta A_\nu(z)}] = 0 \tag{2.42}$$

$$\{\Pi^\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\upsilon(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3z[\frac{\delta \Pi^\mu(x)}{\delta A_\nu(z)}\frac{\delta \Pi^\upsilon(y)}{\delta \Pi^\nu(z)} - \frac{\delta \Pi^\mu(x)}{\delta \Pi^\nu(z)}\frac{\delta \Pi^\upsilon(y)}{\delta A_\nu(z)}] = 0 \tag{2.43}$$

Las derivadas funcionales $\frac{\delta A_\mu(x)}{\delta \Pi^\nu(z)}$ y $\frac{\delta \Pi^\upsilon(y)}{\delta A_\nu(z)}$ de anulan ya que se considera inicialmente a los campos $(A_\mu, \Pi^{upsilon})$ como siendo campos independientes. Se puede observar que el corchete de Poisson definido en (2.41) para el par (A_0, Π^0) no es consistente con la expresión obtenida en (2.33), entonces, la expresión Φ_1 será débilmente igual a cero hasta que los corchetes de Poisson sean definidos correctamente [20; 42].

2.3.1. Consistencia de vínculos

La consistencia de los vínculos hace referencia a que la derivada temporal de estos debe anularse [20], es decir, los vínculos se deben conservar durante la evolución dinámica del sistema. La ecuación de movimiento para cualquier variable $F(\mathbf{x},t)$ en el espacio de fase definido por (A_μ, Π^μ) esta dada por:

$$\dot{F} \approx \{F, H_p\} = \{F, H_c + \int d^3x \lambda_1 \Phi_1\} \tag{2.44}$$

Al analizar la consistencia del vínculo Φ_1, se tiene que:

$$\dot{\Phi}_1(x) \approx \{\Phi_1(x), H_p(\mathbf{y},t)\} = \{\Phi_1(x), H_c(y)\} + \int d^4y \{\Phi_1(x), \lambda_1(y)\Phi_1(y)\} \approx 0. \tag{2.45}$$

De la expresión anterior se pueden distinguir 3 casos posibles [20]:

- $\{\Phi_1, H_c\} \neq 0$ y $\{\Phi_1, \Phi_1\} \neq 0$

  Entonces, (2.45) constituye un sistema lineal no homogéneo para λ_1, y por lo tanto, se puede fijar (débilmente) el valor del multiplicador de Lagrange. Adicionalmente, si $\{F, H_c\} = 0$ se obtiene una solución trivial donde se cumple que $\lambda_1 = 0$

- $\{\Phi_1, H_c\} \neq 0$ y $\{\Phi_1, \Phi_1\} = 0$

  De (2.45) resultan relaciones entre las los campos A_μ y los momentos canónicos Π^μ, entonces se tiene como resultado un nuevo vínculo al cual se lo identifica como un vínculo secundario. Para dicho vínculo se debe analizar igualmente su condición de consistencia con el fin de establecer el conjunto completo de vínculos que posee la teoría.

- $\{\Phi_1, H_c\} = 0$ y $\{\Phi_1, \Phi_1\} = 0$

En este caso se dice que Φ_1 es consistente y no se obtienen mas vínculos adicionales.

De $(2{,}40)$ se obtiene que (Véase **Apéndice C**):

$$\dot{\Phi}_1(x) = \partial_i \Pi^i(x) \approx 0, \tag{2.46}$$

por lo tanto, debido a que no impone una condición sobre λ_1 la expresión anterior representa un vínculo secundario. Se denomina secundario, ya que a diferencia del vínculo primario el cual es consecuencia de la definición de momento canónico (2.31), surge de la evolución temporal del vínculo $\Phi_1(x)$ [41]. Entonces, se define el vínculo secundario como:

$$\Phi_2(x) = \partial_i \Pi^i(x) \approx 0. \tag{2.47}$$

Al igual que el vínculo Φ_1, se deben imponer nuevas condiciones de consistencia, de manera que :

$$\dot{\Phi}_2(x) \approx \{\Phi_2(x), H_p(y)\} = \{\Phi_1(x), H_c(y)\} + \int d^4y \{\Phi_1(x), \lambda_1(y)\Phi_1(y)\} \approx 0, \tag{2.48}$$

obteniendo como resultado (Vease **Apéndice C**):

$$\dot{\Phi}_2(x) = 0. \tag{2.49}$$

El último resultado establece que el conjunto completo de vínculos de la teoría electromagnética está compuesto por:

$$\Phi_1(x) \equiv \Pi^0(x) \approx 0 \tag{2.50}$$

$$\Phi_2(x) = \partial_i \Pi^i(x) \approx 0 \tag{2.51}$$

2.3.2. Clasificación de vínculos

Hasta ahora se ha separado a los vínculos como primarios o secundarios, sin embargo, hay una diferente clasificación de los mismos que tiene una mayor importancia para el estudio del formalismo Hamiltoniano. Se dice que un vínculo es de primera clase si el paréntesis de Poisson con los demás vínculos de la teoría y con sigo mismo es igual o débilmente igual a cero. Por otro lado los vínculos que tengan al menos un corchete de Poisson diferente de cero con los demás vínculos se denominan vínculos de segunda clase . Un aspecto que cabe resaltar de los vínculos de primera clase es que estos son generadores de transformaciones de gauge [20; 41; 42]. Para la teoría electromagética se tiene que:

$$\{\Phi_1(x,t), \Phi_1(y,t)\} = \{\Pi^0(x,t), \Pi^0(y,t)\} = 0 \tag{2.52}$$

$$\{\Phi_2(x,t), \Phi_2(y,t)\} = \{\partial_i^x \Pi^i(x,t), \partial_k^y \Pi^k(y,t)\} = 0 \tag{2.53}$$

$$\{\Phi_1(x,t), \Phi_2(y,t)\} = \{\Pi^0(x,t), \partial_i^y \Pi^i(y,t)\} = 0. \tag{2.54}$$

Los resultados obtenidos anteriormente permiten concluir que los vínculos son de primera clase. Como ya se mencionó anteriormente, los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones de gauge, es decir transformaciones en (A_μ, Π^μ) que no alteran el estado físico en el que se encuentra el sistema. Ya que el el Hamiltoniano primario dado por (2.40) solo considera al generador de primario Φ_1 es necesario generalizar el resultado y agregarle los generadores secundarios, por lo tanto se define el Hamiltoniano extendido para la teoría electromagnética como [18; 20; 42]:

$$H_E \equiv H_p + \int d^3x \lambda_2 \Phi_2 = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2 \right]. \tag{2.55}$$

Siendo ahora la evolución temporal de una variable dinámica $F(\mathbf{x}, t) \equiv F[A_\mu, \Pi^\mu]$ estará dada por:

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\} = \{F, H_p + \int d^3x \lambda_2 \Phi_2\}. \tag{2.56}$$

Si se considera un conjunto inicial de variables canónicas $(A_\mu(x), \Pi^\mu(x))$ en un tiempo t_1 es posible definir un estado físico en dicho tiempo, entonces, se espera ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de (2.56) con las que se pueda determinar el estado fisico en otro tiempo t_2. Ahora, los multiplicadores de Lagrange λ_i $(i = 1, 2)$ son funciones arbitrarias del punto en el espacio tiempo, lo que significa, que el valor de las variables canónicas dependeran de la escogencia de λ_i en $t_1 \leq t \leq t_2$, como se hace evidente en el siguiente resultado (véase **Apéndice C**):

$$\begin{aligned} \dot{A}_\mu =& \Pi^\mu(x) + \delta^i_\mu \partial_i A_0(x) + \delta^0_\mu \lambda_1(x) - \delta^i_\mu \partial^x_i \lambda_2(x) \\ \dot{\Pi^\mu} =& \partial_\mu F^{\mu\nu}(x) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Por lo tanto, es necesario introducir vínculos adicionales que permitan fijar los valores de los multiplicadores de Lagrange sin afectar a los observables físicos (invariantes de gauge) [41], para lograr esto, dichos vínculos adicionales deben convertir a Φ_1 y Φ_2 en vínculos de segunda clase de modo que sea posible eliminarlos usando el método de Dirac para sistemas singulares [18].

2.4. Gauge de Radiación

Como se mencionó anteriormente para continuar con el estudio de la teoría electromagnética, se deben implementar condiciones adicionales o *condiciones de gauge* [42], la existencia de dos vínculos de primera clase hace necesario imponer dos condiciones de gauge las cuales se escogen de tal manera que $(2{,}50)$ y $(2{,}51)$ pasen a ser vínculos de segunda clase. Ya que $\Pi^0(x) \approx 0$, sugiere que su variable conjugada cumpla:

$$A_0 \approx 0. \tag{2.58}$$

Considerando el valor $\nu = 0$ de la evolución temporal obtenida para Π^μ a partir del corchete de Poisson $\{\Pi^\mu, H_E\}$, se deduce:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0}(x) \approx& 0 \\ \partial_\mu(\partial_\mu A_0(x) - \partial_0 A_\mu(x)) \approx& 0 \\ \partial_0 \partial_\mu A_\mu(x) \approx& 0 \\ \partial_0(\partial_i A_i(x)) \approx& 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Por lo tanto, el conjunto de vínculos pertenecientes al gauge de radiación es [19]:

$$\begin{aligned} \phi_1 =& \Pi^0(x) \approx 0 \\ \phi_2 =& \partial_i \Pi^i(x) \approx 0 \\ \phi_3 =& A_0(x) \approx 0 \\ \phi_4 =& \partial_i A^i(x) \approx 0. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Adicionalmente, los vínculos que componen el gauge de radiación deben cumplir la condición de consistencia, al realizar el cálculo correspondiente se determina lo siguiente (véase **Apéndice D**):

$$\lambda_1(x) \approx 0 \tag{2.61}$$

$$-\partial_k \Pi^k(x) - \partial_k \partial_k A_o(x) + \partial_k \partial_k \lambda_2(x) \approx 0 \tag{2.62}$$

Por lo tanto, las condiciones de consistencia para ϕ_3 y ϕ_4 permiten fijar los valores de los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos ϕ_1 y ϕ_2. Con el fin de identificar el mínimo número de grados de libertad que posee la teoría se procede a eliminar los vínculos de segunda clase haciendo uso del método de Dirac [18], para esto se construye la matriz formada por los corchetes de Poisson entre los vínculos y que es definida por los siguientes elementos:

$$C_{\mu\upsilon}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\phi_\mu(\mathbf{x}, t), \phi_\upsilon(\mathbf{x}, t)\}, \tag{2.63}$$

además, Dirac demostró que ésta matriz tiene determinante diferente de cero y es invertible [18]. La matriz $C_{\mu\upsilon}$ en el gauge de radiación está dada por [17]:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x \partial_i^x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_i^x \partial_i^x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x - y), \tag{2.64}$$

siendo que su inversa se puede calcular considerando una matriz $C^{-1}(x, y)$ de manera que se cumpla que:

$$\int d^3 z C(x,z) C^{-1}(z,y) = I\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \tag{2.65}$$

Entonces para el campo electromagnético se determina que [17]:

$$C^{-1}_{\mu\upsilon}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \delta(x-y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \\ -\delta(x-y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.66}$$

A partir de $C^{-1}_{\mu\upsilon}(x,y)$ es posible eliminar los vínculos de segunda clase bajo la introducción los corchetes de Dirac, los cuales en el caso de las variables dinámicas $F(\mathbf{x},t)$ y $G(\mathbf{x},t)$ son definidos como [18; 42]:

$$\{F(x),G(y)\}_D = \{F(x),G(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x),\phi_\mu(u)\} C^{-1}_{\mu\upsilon}(u,v)\{\phi_\upsilon(v),G(y)\}. \tag{2.67}$$

La expresión (2.67) permite imponer la condición de que $\phi_\mu = 0$ ya que bajo la definicíon de los corchetes de Dirac se cumple:

$$\begin{aligned} \{F(x),\phi_\mu\}_D =& \{F(x),\phi_\mu(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x),\phi_\alpha(u)\} C^{-1}_{\alpha\beta}(u,v)\{\phi_\beta(v),\phi_\mu\} \\ =& \{F(x),\phi_\mu(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x),\phi_i(u)\} C^{-1}_{\alpha\beta}(u,v) C_{\beta\mu}(v,y) \\ =& \{F(x),\phi_\mu(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x),\phi_i(u)\} (\delta(u-v)\delta(v-y)\delta_{\alpha\mu}) \\ =& \{F(x),\phi_\mu(y)\} - \{F(x),\phi_\mu(y)\} \\ \{F(x),\phi_\mu\}_D =& 0. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Lo cual no se cumplía con los corchetes de Poisson, entonces ahora podemos considerar las siguientes identidades:

$$\phi_1 = \Pi^0(x) = 0 \tag{2.69}$$

$$\phi_2 = \partial_i \Pi^i(x) = 0 \tag{2.70}$$

$$\phi_3 = A_0(x) = 0 \tag{2.71}$$

$$\phi_4 = \partial_i A^i(x) = 0. \tag{2.72}$$

Las relaciones anteriores permiten reconocer que $\Pi^0(x) = A_0(x) = 0$, además, las expresion (2.70) puede ser resuelta de manera que solo dos de las tres componentes del momento canónico Π^i sean totalmente independientes, de igual manera con (2.72) se pueden determinar las componentes independientes asociadas al campo $A^i(x)$. Ya que la elección de las variables independientes es arbitraria se escoge como grado de libertad a los campos $(A_i(x), \Pi^j(y))$ (i,j=1,2) y se calcula los corchetes de Dirac entre dichas variables. Entonces, en la teoría electromagńetica para el gauge de radiación se tiene que los corchetes fundamentales de Dirac son [17]:

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_D = 0 \tag{2.73}$$

$$\{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}_D = 0 \tag{2.74}$$

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \delta_i^j \delta(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \tag{2.75}$$

$$\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D = -\delta^i_j \delta(x-y) + \partial^x_i \partial^y_j \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \tag{2.76}$$

Los superíndices que aparecen en las derivadas parciales hacen referencia a las variables respecto a la cual se esta realizando la derivación. Cabe resaltar que las expresiones obtenidas anteriormente así como los valores de λ_1 y λ_2 dependen de la condición de gauge que se imponga. Ahora, teniendo en cuenta las ecuaciones (2.69), (2.70), (2.71) y (2.72) es posible reescribir el Hamiltoniano como:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{4}F_{ki}(x)F^{ki}(x) \right]. \tag{2.77}$$

2.4.1. Ecuaciones de Movimiento

Ahora, la evolución temporal de una variable dinámica esta dada por el Hamiltoniano reescrito en términos de las variables independientes, por lo tanto, para una variable dinámica $F(x,t) = F(A_i, \Pi^i)$ con $i = 1, 2$ se tiene que:

$$\dot{F} = \{F, H\}_D, \tag{2.78}$$

donde H esta dado por (2.77). Entonces para el campo A_i:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) &= \{A_i(x), H\}_D \\
&= \int d^3y \Pi^j(y) \{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D \\
&= \int d^3y \Pi^j(y) (\delta^j_i \delta(x-y) - \partial^x_i \partial^y_j \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}) \\
&= \Pi^i(x) - \partial^x_i \int d^3y \Pi^j(y) \partial^y_j \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \\
&= \Pi^i(x) - \partial^x_i \int d^3y \partial^y_j (\Pi^j(y) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}) + \partial^x_i \int d^3y \partial^y_j \Pi^j(y) \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Como $\partial_j \Pi^j = 0$, y haciendo uso de la ley de Gauss para el segundo sumando, se tiene que:

$$\dot{A}_i(x) = \Pi^i(x) - \oint_S \boldsymbol{dA} \cdot (\boldsymbol{\Pi(y)} \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|})), \tag{2.80}$$

como S es una superficie que tiende al infinito y por la propiedad asintótica de los campos se concluye que:

$$\dot{A}_i(x) = \Pi^i(x) \tag{2.81}$$

Igualmente para el momento Π^i :

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i(x) =& \{\Pi^i(x), H\}_D \\
=& \{\Pi^i(x), \int d^3y (\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y) + \frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y))\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2} F^{kl}(y) \{\Pi^i(x), F_{kl}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2} F^{kl}(y) \{\Pi^i(x), \partial_k^y A_l(y) - \partial_l^y A_k(y)\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2} F^{kl}(y) \partial_k^y (-\delta_l^i \delta(x-y) + \partial_i^x \partial_l^y \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}) - \int d^3y \frac{1}{2} F^{kl}(y) \partial_l^y (-\delta_k^i \delta(x-y) \\
&+ \partial_i^x \partial_k^y \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}) \\
=& \partial_k^x \int d^3y \frac{1}{2} F^{ki}(y)\delta(x-y) - \partial_l^x \int d^3y \frac{1}{2} F^{il}(y)\delta(x-y) \\
=& \partial_k F^{ki}(x)
\end{aligned} \tag{2.82}$$

Reemplazando la ecuación (2.30) en (2.74):

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i(x) = \partial_0 F^{i0}(x) = \partial_k F^{ki}(x) \\
0 = \partial_0 F^{0i}(x) + \partial_k F^{ki}(x)
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Obteniendo como resultado las ecuaciónes de Euler-Lagrange, pero ahora definidas en el espacio de fase generado por las variables independientes que resultan despues de implementar el gauge de radiación.

2.5. Gauge Axial

Otro gauge que puede ser tratado en el formalismo canónico es el gauge axial [17]. Se considera inicialmente que la componente A_3 del campo satisface:

$$A_3(x) \approx 0, \tag{2.84}$$

de la definición de momento canónico se tiene que:

$$\begin{aligned} \Pi^3(x) =& \partial_0 A_3(x) - \partial_3 A_0(x) \\ \Pi^3(x) \approx& - \partial_3 A_0(x) \\ 0 \approx& \Pi^3(x) + \partial_3 A_0(x). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Por lo tanto, el conjunto de vínculos considerado en el gauge Axial será:

$$\begin{aligned} \phi_1 =& \Pi^0(x) \approx 0 \\ \phi_2 =& \partial_i^x \Pi^i(x) \approx 0 \\ \phi_3 =& A_3(x) \approx 0 \\ \phi_4 =& \Pi^3(x) + \partial_3^x A_0(x) \approx 0. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Ahora, al calcular las condiciones de consistencia (véase **Apéndice E**), resulta que:

$$\begin{aligned} \Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) - \partial_3^x \lambda_2(x) \approx& 0 \\ \partial_i F^{i3}(x) + \partial_3 \lambda_1(x) \approx& 0. \end{aligned} \tag{2.87}$$

Por lo tanto, la introducción el gauge Axial permite fijar el valor de las multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2, también se puede observar que ahora los vínculos ϕ_1 y ϕ_2 son de segunda clase, entonces, es posible calcular la matriz compuesta por los corchetes de Poisson entre el conjunto de vínculos correspondientes al gauge axial, esta se puede expresar como:

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_3^x \delta(x-y) \\ 0 & 0 & -\partial_3^x \delta(x-y) & 0 \\ 0 & -\partial_3^x \delta(x-y) & 0 & \delta(x-y) \\ \partial_3^x \delta(x-y) & 0 & -\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.88}$$

y $C^{-1}_{\mu\upsilon}$ será [17]:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -g(x,y) & 0 & f(x,y) \\ g(x,y) & 0 & -f(x,y) & 0 \\ 0 & -f(x,y) & 0 & 0 \\ f(x,y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.89}$$

Las funciones $g(x,y)$ y $f(x,y)$ estan dadas por:

$$g(x,y) = \frac{1}{2}\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)|x_3 - y_3| \tag{2.90}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2}\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)\epsilon(x_3 - y_3), \tag{2.91}$$

donde $\epsilon(x-y)$ representa a la función signo algebraico de $(x-y)$, además las funciones $g(x,y)$ y $f(x,y)$ cumplen que:

$$\partial_3^x \partial_3^x g(x,y) = \partial_3^x f(x,y) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \tag{2.92}$$

$$\partial_3^x g(x,y) = f(x,y). \tag{2.93}$$

Ahora, es posible eliminar a los vínculos de la teoría considerando las igualdades:

$$\phi_1 = \Pi^0(x) = 0 \tag{2.94}$$

$$\phi_2 = \partial_i^x \Pi^i(x) = 0 \tag{2.95}$$

$$\phi_3 = A_3(x) = 0 \tag{2.96}$$

$$\phi_4 = \Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) = 0, \tag{2.97}$$

Las igualdades (2.94) y (2.96) permiten identificar que la componente $\Pi^0(x)$ del momento canónico y la componente $A_3(x)$ del campo son iguales a cero. Por otro lado $\partial_i^x \Pi^i(x) = 0$ puede ser resuelto de manera que solo dos de las componentes restantes del momento sean independientes, y finalmente (2.97) establece una relacion entre la componentes A_o y Π^3. Escogiendo como grados de libertad a $(A_i(x), \Pi^j(y))$ (i,j=1,2) se tiene que los corchetes de Dirac fundamentales estan dados por [17]:

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_D = 0 \tag{2.98}$$

$$\{\Pi^\mu(x), \Pi^\upsilon(y)\}_D = 0 \tag{2.99}$$

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \delta_i^j \delta(x-y) \tag{2.100}$$

$$\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D = -\delta_j^i \delta(x-y). \tag{2.101}$$

2.5.1. Ecuaciones de Movimiento

Debido a que ahora $\phi_\mu = 0$ se puede reescribir el Hamiltoniano de la teoría en términos de las variables independientes. Entonces, la evolución temporal de una variable dinámica $F(x,t) = F(A_i, \Pi^i)$ (i=1,2) se puede determinar a partir de:

$$\dot{F} = \{F, H\}_D, \tag{2.102}$$

Donde

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \Pi^i(x)\partial_i^x A_0(x) + \frac{1}{4}F_{ki}(x)F^{ki}(x) \right] \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^1(x)\Pi^1(x) + \frac{1}{2}\Pi^2(x)\Pi^2(x) + \Pi^1(x)\partial_1^x A_0(x) + \Pi^2(x)\partial_2^x A_0(x) - \frac{1}{2}(\partial_3^x A_0(x))^2 + \frac{1}{4}F_{ki}(x)F^{ki}(x) \right] \end{aligned} \tag{2.103}$$

Finalmente se procede a calcular la evolución temporal de los campos considerando como variables independientes (A_i, Π^i) con $i = 1, 2$. Se determina que (véase **Apéndice F**):

$$\dot{A}_i(x) = \Pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x)\Pi^i(x) = \partial_0^x A_i(x) - \partial_i^x A_0(x) \tag{2.104}$$

$$\dot{\Pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) \tag{2.105}$$

Reemplazando la definición de momento canónico:

$$\Pi^i(x) = \partial_0^x A_i(x) - \partial_i^x A_0(x) = -F^{0i}, \tag{2.106}$$

en (1.94) :

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^i(x) &= -\partial_0 F^{0i} = \partial_k^x F^{ki}(x) \\ 0 &= \partial_0 F^{0i} + \partial_k^x F^{ki}(x) \end{aligned} \tag{2.107}$$

Resultando así las ecuaciones de Euler-Lagrange con las variables independientes en el gauge axial.

3 Estudio Clásico del Campo de Yang-Mills

La importancia del estudio de las teorias de gauge se debe a que las fuerzas fundamentales estan descritas por dichas teorías. En el capítulo anterior se estudio la teoría de Maxwell, la cual es una teoría invariante bajo el grupo de simetria abeliano U(1), sin embargo, existen teorías basadas en Lagrangianos invariantes bajo grupos de simetría mas generales donde los generadores de la transformacion no conmutan, dichas teorías son conocidas como teorías de Yang-Mills [42]. Sea t_a (a=1,2,3,...N) una base del algebra de Lie L (véase **Apéndice G**) que cumple con las relaciones de conmutación:

$$[t_a, t_b] = i f_{ab}^c t_c \text{ con a,b,c=1,2,...,N,} \tag{3.1}$$

donde $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$ toma valores reales y denota la constante de estructura del grupo. Entonces, ahora se considera al campo $A_{\mu a}(x)$, con $a = 1, 2, 3, ...N$ el cual tiene un índice $\mu = 0, 1, 2, 3$ que indica la componente vectorial y un índice de grupo a, además es una funcion real de las coordenadas espacio temporales $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ en el espacio de Minkowski. Se tiene para el campo A_μ [44]:

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) t_a, \tag{3.2}$$

de igual manera:

$$F_{\mu\upsilon} = F_{\mu\upsilon}^a t_a. \tag{3.3}$$

Las componentes del tensor $F_{\mu\upsilon}$ estan dadas por:

$$F_{\mu\upsilon} = \partial_\mu A_\upsilon(x) - \partial_\upsilon A_\mu(x) + ig[A_\mu, A_\upsilon], \tag{3.4}$$

como:

$$\begin{aligned} i[A^\mu, A^\upsilon] =& i[A^b_\mu(x)t_b, A^c_\upsilon(x)t_c] \\ =& iA^b_\mu(x)A^c_\upsilon(x)[t_b, t_c] \\ =& iA^b_\mu(x)A^c_\upsilon(x)(if^a_{bc}t_a) \\ =& iA^b_\mu(x)A^c_\upsilon(x)(if^a_{bc}t_a) \\ =& -(f^a_{bc}A^b_\mu(x)A^c_\upsilon(x))t_a, \end{aligned} \tag{3.5}$$

entonces se determina que:

$$F^{\mu\upsilon}_a = \partial^\mu A^\upsilon_a(x) - \partial^\upsilon A^\mu_a(x) - gf^a_{bc}A^b_\mu(x)A^c_\upsilon(x). \tag{3.6}$$

Se considera al Lagrangiano invariante bajo la transformación:

$$\delta A^\mu_a = A'^\mu_a - A^\mu_a = f^a_{bc}\alpha^b(x)A^{\mu c}(x) + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a(x). \tag{3.7}$$

como siendo :

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}_a F_{\mu\upsilon a}. \tag{3.8}$$

Para los cálculos realizados en este capítulo se tienen en cuenta transformaciones que pertenecen al grupo de simetria SU(2). En este grupo la constante de estructura f^a_{bc} será el tensor antisimétrico de levi-civita en tres dimensiones ε_{abc}, por lo tanto se define a $F^{\mu\upsilon}_a$ como:

$$F_a^{\mu\upsilon} = \partial^\mu A_a^\upsilon(x) - \partial^\upsilon A_a^\mu(x) - g\varepsilon_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\upsilon(x), \tag{3.9}$$

donde g se conoce como constante de acople para los campos $A_a^\mu(x)$ y $A_a^\upsilon(x)$. Entonces, el campo de Yang-Mills a diferencia de la teoría electromagnética, presenta un término en donde se evidencia la interacción entre los campos $A_a^\mu(x)$ y $A_a^\upsilon(x)$, por ende el campo de Yang-Mills interactúa consigo mismo [17].

3.1. Formulación Lagrangiana

La acción correspondiente a la teoría de Yang-Mills es definida como:

$$\mathcal{A}[A_{\mu a}, \partial_\upsilon A_{\mu a}] = -\frac{1}{4}\int d^4x F_a^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon a}. \tag{3.10}$$

Haciendo uso del principio de Hamilton [36; 37; 43] se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu a}(x)} - \partial_\upsilon\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_{\mu a}(x))}\right) = 0. \tag{3.11}$$

De manera que para la densidad Lagrangiana (3.8) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu a}(x)} &= \frac{1}{2}F_b^{\beta\alpha}\varepsilon_{bcd}\frac{\partial}{\partial A_{\mu a}(x)}(A_{\beta c}(x)A_{\alpha d}(x)) \\ &= -\frac{1}{2}F_b^{\mu\alpha}\varepsilon_{bad}A_{\alpha d}(x) + \frac{1}{2}F_b^{\beta\mu}\varepsilon_{bca}A_{\beta c}(x) \\ &= -\varepsilon_{abd}F_b^{\mu\alpha}A_{\alpha d}(x)\end{aligned} \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_{\mu a}(x))} = F_a^{\mu\upsilon} \tag{3.13}$$

De este modo, la forma explícita de las ecuaciones de Euler-Lagrange para la teoría de Yang-Mills será:

$$\partial_\upsilon F_a^{\mu\upsilon}(x) - \varepsilon_{abc} A_{\upsilon b}(x) F_c^{\mu\upsilon}(x) \equiv D_\upsilon F_a^{\mu\upsilon}(x) = 0, \tag{3.14}$$

donde $D_\upsilon = \partial_\upsilon - \varepsilon_{abc} A_{\upsilon b}(x)$ se define como la derivada covariante. Ahora, si se usa la expresión (2.26) y (3.13) es posible calcular la matriz Hessiana que para el campo de Yang-Mills se define como

$$W_{\upsilon\mu} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\upsilon a}(x))\partial(\partial_0 A_{\mu a}(y))} = (\eta^{0\mu}\eta^{\upsilon 0} - \eta^{\upsilon\mu}\eta^{00})\delta(x-y) = (\eta^{0\mu}\eta^{\upsilon 0} - \eta^{\upsilon\mu})\delta(x-y), \tag{3.15}$$

que en su forma matricial se expresa como:

$$W(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{3.16}$$

Es posible observar que ésta matriz al igual que la matriz Hessiana obtenida para el campo electromagnético tiene determinante nulo, de manera que el campo de Yang-Mills está descrito por una densidad Lagrangiana singular.

3.2. Formulación Hamiltoniana

Ahora, para continuar con el estudio de la teoría de Yang-Mills se definen los momentos canónicos de la siguiente forma:

$$\Pi_a^\mu(\mathbf{x},t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\mu a}(\mathbf{x},t))}. \tag{3.17}$$

Utilizando (3.13), se deduce que el momento canónico asociado al campo $A_{\mu a}(x)$ tiene la forma:

$$\Pi_a^\mu(x) = F_a^{\mu 0} = \partial^\mu A_a^0(x) - \partial^0 A_a^\mu(x) - g\varepsilon_{abc} A_b^\mu(x) A_c^0(x), \tag{3.18}$$

de donde:

$$\Pi_a^0(x) = 0 \tag{3.19}$$

$$\Pi_a^i(x) = F_a^{i0} = -E_a^i(x) = \partial^i A_a^0(x) - \partial^0 A_a^i(x) - g\varepsilon_{abc} A_b^i(x) A_c^0(x). \tag{3.20}$$

Entonces, se establece un primer conjunto de vínculos primarios, el cual es definido como:

$$\Phi_{1a}(x) = \Pi_a^0(x) \approx 0 \tag{3.21}$$

Con las expresiones obtenidas para los momentos $\Pi_a^\mu(x)$, ahora es posible escribir el Hamiltoniano canónico:

$$\begin{aligned} H_c &\equiv \int d^3x [\Pi^\mu \partial_0 A_\mu(x) - \mathcal{L}(x)] \\ &= \int d^3x [\frac{1}{2}\Pi_a^k(x)\Pi_a^k(x) + \Pi_a^i(x)\partial_i A_{0a}(x) - g\varepsilon_{abc}\Pi_a^i(x) A_{ib}(x) A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_a^{ki}(x) F_{kia}(x)]. \end{aligned} \tag{3.22}$$

La dinámica en el espacio de fase de la teoría de Yang-Mills debido a la presencia del vínculos está determinada por el Hamiltoniano primario, el cual se define como:

$$H_p \equiv H_c + \int d^3x \lambda_1 \Phi_1$$
$$= \int d^3x[\frac{1}{2}\Pi_a^k(x)\Pi_a^k(x) + \Pi_a^i(x)\partial_i A_{0a}(x) - g\varepsilon_{abc}\Pi_a^i(x)A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_a^{ki}(x)F_{kia}(x) + \lambda_{1a}\Phi_{1a}(x)], \tag{3.23}$$

donde λ_{1a} representa el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo Φ_{1a} [20; 41].

3.2.1. Consistencia de vínculos

Ahora, con el fin de encontrar el conjunto completo de vínculos que posee la teoría, se deben imponer condiciones de consistencia para el vínculo Φ_{1a}, para esto, se definen los corchetes de Poisson a tiempos iguales entre dos variables dinámicas $B_a(\mathbf{x}, t)$ y $C_a(\mathbf{x}, t)$ en el espacio de fase definido por el par canónico $(A_{\mu a}, \Pi_a^{\mu})$ como:

$$\{B_a(\mathbf{x}, t), C_b(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3z[\frac{\delta B_a(\mathbf{x}, t)}{\delta A_{\mu c}(\mathbf{z}, t)}\frac{\delta C_b(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi_c^{\mu}(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta B_a(\mathbf{x}, t)}{\delta \Pi_c^{\mu}(\mathbf{z}, t)}\frac{\delta C_b(\mathbf{y}, t)}{\delta A_{\mu c}(\mathbf{z}, t)}], \tag{3.24}$$

por lo tanto, los corchetes de Poisson fundamentales serán [17; 20]:

$$\{A_{\mu a}(\mathbf{x}, t), \Pi_b^{\upsilon}(\mathbf{y}, t)\} = \delta_{\mu}^{\upsilon}\delta_{ab}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.25}$$

$$\{A_{\mu a}(\mathbf{x}, t), A_{\upsilon b}(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi_a^{\mu}(\mathbf{x}, t), \Pi_b^{\upsilon}(\mathbf{y}, t)\} = 0 \tag{3.26}$$

La condición de consistencia para el vínculo dado por (3.21) establece que:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{1a}(x) &\approx \{\Phi_{1a}(x), H_p\} = \{\Phi_{1a}(x), H_c + \int d^3y\lambda_{1b}(y)\Phi_{1b}(y)\} \\
&= \int d^3y\Pi_b^i(y)\partial_i^y\{\Pi_a^0(x), A_{0b}(y)\} - \int d^3y g\varepsilon_{bcd}\Pi_b^i(y)A_{ic}(y)\{\Pi_a^0(x), A_{od}(y)\} \\
&= -\int d^3y\Pi_b^i(y)\partial_i^y\delta_{ab}\delta(x-y) + \int d^3y g\varepsilon_{bcd}\Pi_b^i(y)A_{ic}(y)\delta_{ad}\delta(x-y) \\
&= \partial_i^y\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) \approx 0,
\end{aligned}
\tag{3.27}
$$

como (3.27) no impone condición alguna para λ_{1a}, la relación anterior representa un vínculo secundario que se definira en la forma:

$$
\Phi_{2a} = \partial_i^x\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) \approx 0 \tag{3.28}
$$

Ahora, se imponen las condiciones de consistencia para el vínculo Φ_{2a} (véase **Apéndice H**), y se obtiene que:

$$
\dot{\Phi}_{2a} \approx 0. \tag{3.29}
$$

La relación anterior permite concluir que el conjunto completo de vínculos de la teoría de Yang-Mills es:

$$
\Phi_{1a}(x) = \Pi_a^0(x) \approx 0 \tag{3.30}
$$

$$
\Phi_{2a} = \partial_i^x\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) \approx 0. \tag{3.31}
$$

Se observa también que haciendo uso de (3.25) y (3.26) que los vínculos Φ_{1a} y Φ_{2a} son de primera clase, lo que significa que es necesario imponer condiciones adicionales para eliminar la arbitrariedad presente en los estados físicos descritos por la teoría de Yang-Mills. Debido a que el Hamiltoniano primario dado por (3.23) solo considera a los generadores de transformaciones de gauge primarios Φ_{1a}, se generaliza el resultado y se agrega los generadores secundarios, por lo tanto se define el Hamiltoniano extendido como [17]:

$$
\begin{aligned}
H_E \equiv & H_p + \int d^3x \lambda_{2a} \Phi_{2a} \\
= & \int d^3x \left(\frac{1}{2}\Pi_a^k(x)\Pi_a^k(x) + \Pi_a^i(x)\partial_i A_{0a}(x) - g\varepsilon_{abc}\Pi_a^i(x)A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_a^{ki}(x)F_{kia}(x)\right) \\
& + \int d^3x (\lambda_{1a}\Phi_{1a}(x) + \lambda_2\Phi_2(x)).
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

Entonces, la variación respecto al tiempo de una variable dinámica $F_a(\mathbf{x}, t) \equiv F_a[A_{\mu a}, \Pi_a^\mu]$ ahora está dada por:

$$
\dot{F}_a \approx \{F_a, H_E\} \tag{3.33}
$$

3.3. Gauge de Radiación

Al igual que en el campo electromagnético, se escoge el equivalente gauge de radiación para el campo de Yang-Mills definido como [17]:

$$
\partial_i A_a^i(x) \approx 0. \tag{3.34}
$$

Si se busca simplificar el problema, o el numero de vínculos considerado es muy grande, es posible escoger un subconjunto formado por un numero par de vínculos para definir unos corchetes de Dirac preliminares, los cuales son usados para construir los corchetes de Dirac finales con los vínculos restantes [42], es decir el resultado obtenido al calcular los corchetes de Dirac de la teoría es independiente de si se elimina a todos los vínculos en un solo paso o si se elimina a los vínculos por separado. Entonces, Inicialmente se considera el conjunto de vínculos:

$$\varphi_{1a} = \partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) \approx 0 \tag{3.35}$$

$$\varphi_{2a} = \partial_i A_a^i(x) \approx 0. \tag{3.36}$$

Al calcular la condición de consistencia del vínculo adicional φ_{2a} se determina que (véase **Apéndice I**):

$$-\partial_i^x \Pi_a^i(x) - \partial_i^x \partial_i^x A_{0a}(y) + g\varepsilon_{aef}\partial_i^x A_{ie}(x)A_{0f}(x) + \partial_i^x \partial_i^x \lambda_{2a}(y) - g\varepsilon_{abc}\partial_i^x(\lambda_{2a}(x)A_{ic}(x)) \approx 0. \tag{3.37}$$

La ecuación anterior puede ser resuelta de manera que sea posible determinar el valor del multiplicador de Lagrange λ_{2a}. Adicionalmente se observa que al imponer (3.34) el vínculo φ_{1a} pasa a ser de segunda clase, hecho que permite la construcción de la matriz de vínculos de segunda clase $C_{ij}^{ab}(x,y) = \{\varphi_{ia}(x), \varphi_{jb}(y)\}$, la cual tiene la forma:

$$C_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & (\delta_{ab}\partial^{xk}\partial_k^x + g\varepsilon_{abd}A_{kd}(x)\partial^{xk})\delta(x-y) \\ -(\delta_{ab}\partial^{xk}\partial_k^x + g\varepsilon_{abd}A_{kd}(x)\partial^{xk})\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.38}$$

Ahora, considerando la ecuacion diferencial:

$$(\delta_{ab}\partial^{xk}\partial_k^x + g\varepsilon_{abd}A_{kd}(x)\partial^{xk})G_{ab}(x,y,A) = \delta(x-y), \tag{3.39}$$

donde su solución es dada por la función de Green [17]:

$$G_{ab}(x,y,A) = -\frac{\delta_{ab}}{4\pi|x-y|} - g\int d^3z \frac{1}{4\pi|x-y|}\varepsilon_{abc}A_{kc}(z)\partial^{zk}G_{db}(z,y,A) + ... \tag{3.40}$$

Se determina que la matriz inversa será [17]:

$$C_{ab}^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -G_{ab}(x,y,A) \\ G_{ab}(x,y,A) & 0 \end{pmatrix} \tag{3.41}$$

A partir de La expresión (3.41) es posible calcular los corchetes de Dirac preliminares compatibles con los vínculos φ_{1a} y φ_{2a} los cuales en el caso de las variables dinámicas $F(\mathbf{x},t) \equiv F[A_\mu, \Pi^\upsilon]$ y $G(\mathbf{x},t) \equiv G[A_\mu, \Pi^\upsilon]$ son definidos como:

$$\{F_a(x), G_b(y)\}_D = \{F_a(x), G_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{F(x)_a, \varphi_{id}(u)\} C_{ij}^{de^{-1}}(u,v)\{\varphi_{je}, G_b(y)\}. \tag{3.42}$$

Ahora, se procede a calcular los corchetes de Dirac preliminares y se determina que [17]:

$$
\begin{aligned}
&\{\Pi_a^\mu(x), \Pi_b^\nu(y)\}'_D = g\varepsilon_{acd}\Pi_c^\mu(x)\partial_\nu^y G_{db}(x,y,A) + g\partial_\mu^x G_{ad}(x,y,A)\varepsilon_{dcb}\Pi_c^\nu(x)\\
&\{A_{\mu a}(x), \Pi_b^\nu(y)\}'_D = \delta_{ab}\delta_\mu^\nu\delta(x-y) - [\delta_{ad}\partial_\mu^x + g\varepsilon_{adf}A_{\mu f}(x)]\partial_\nu^y G_{db}(x,y,A)\\
&\{\Pi_a^\mu(x), A_{vb}(y)\}'_D = -\delta_{ab}\delta_\nu^\mu\delta(x-y) + [\delta_{be}\partial_\nu^y + g\varepsilon_{bef}A_{\nu f}(y)]\partial_\mu^x G_{ae}(x,y,A)\\
&\{A_{\mu a}(x), A_{vb}(y)\}'_D = 0\\
&\{\Pi_a^\mu(x), \Pi_b^0(y)\}'_D = 0\\
&\{A_{\mu a}(x), \Pi_b^0(y)\}'_D = \delta_{ab}\delta_\mu^0\delta(x-y)\\
&\{A_{0a}(x), \Pi_b^\nu(y)\}'_D = \delta_{ab}\delta_0^\nu\delta(x-y).
\end{aligned}
\tag{3.43}
$$

La expresión (3.42) permite imponer la condición $\varphi_{ia} = 0$ (i=1,2), entonces, se determina como es la forma de la componente A_{0a} aplicando el operador gradiente a (3.20):

$$
\begin{aligned}
\partial_i\Pi_a^i(x) =& \partial^i\partial^i A_a^0(x) - \partial^i\partial^0 A_a^i(x) - g\varepsilon_{abc}\partial_i(A_b^i(x))A_c^0(x) - g\varepsilon_{abc}A_b^i(x)\partial_i(A_c^0(x))\\
-g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) =& \partial^i\partial^i A_a^0(x) - g\varepsilon_{abc}A_b^i(x)\partial^i(A_c^0(x))\\
0 =& \partial^i\partial^i A_a^0(x) - g\varepsilon_{abc}A_b^i(x)\partial^i(A_c^0(x)) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x),
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

resolviendo para A_{0a} se puede concluir que:

$$
\begin{aligned}
A_{0a}(x) &\approx -\int d^3y G_{ab}(x,y,A)g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y)\\
&\approx -\int d^3y G_{ab}(x,y,A)\partial_i^y\Pi_b^i(y).
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Por lo tanto, el siguiente conjunto de vínculos a considerar será

$$\chi_{1a}(x) = \Pi_a^0(x) \approx 0 \tag{3.46}$$

$$\chi_{2a}(x) = A_{0a}(x) - \int d^3y G_{ab}(x,y,A)\partial_i^y \Pi_b^i(y) = A_{0a}(x) + \int d^3y G_{ab}(x,y,A) g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y) \approx 0. \tag{3.47}$$

Dado que ahora $\varphi_{ia} = 0$ (i=1,2) se puede reescribir el Hamiltoniano extendido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H' = & \int d^3y[\frac{1}{2}\Pi_d^k(x)\Pi_d^k(x) + \Pi_a^i(x)\partial_i^x A_{0a}(x) - g\varepsilon_{ade}\Pi_d^i(x)A_{ie}(x)A_{0a}(x) + \frac{1}{4}F_d^{ki}(x)F_{kid}(x)] + \int d^3x\lambda_{1d}(x)\Pi_d^0(x) \\ & - \int d^3x\partial_i^x(\Pi_a^i(x)A_{0a}(x)). \end{aligned} \tag{3.48}$$

El último término puede ser despreciado haciendo uso de la ley de Gauss y resaltando la propiedad asintótica de los campos. Finalmente se tiene que:

$$\begin{aligned} H' = & \int d^3x[\frac{1}{2}\Pi_d^k(x)\Pi_d^k(x) - (\partial_i^x\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{ade}\Pi_d^i(x)A_{ie}(x))A_{0a}(y) + \frac{1}{4}F_d^{ki}(x)F_{kid}(x)] + \int d^3x\lambda_{1d}(x)\Pi_d^0(x) \\ = & \int d^3x[\frac{1}{2}\Pi_d^k(x)\Pi_d^k(x) + \frac{1}{4}F_d^{ki}(x)F_{kid}(x)] + \int d^3x\lambda_{1d}(x)\Pi_d^0(x). \end{aligned} \tag{3.49}$$

Se observa que el corchete de Dirac preliminar $\{\chi_{1a}, \chi_{2b}\} \neq 0$ [17], por lo tanto el vínculo χ_{2a} convierte a χ_{1a} en un vínculo de segunda clase. También se puede concluir que la condición de consistencia para $\chi_{2a}(x)$ establecerá una relación de la cual se puede calcular el valor del multiplicador de Lagrange λ_{1a}. Haciendo uso de las expresiones (3.43) obtenidas para el primer conjunto de vínculos se puede calcular la matriz $C_{ab}(x,y) = \{\chi_{ia}(x), \chi_{jb}(y)\}'_D$ con $i,j = 1,2$:

$$C_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ab}\delta(x-y) \\ \delta_{ab}\delta(x-y) & M_{ab}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.50}$$

y su inversa dada por [17]:

$$C_{ij}^{-1ab}(x,y) = \begin{pmatrix} M_{ab}(x,y) & \delta_{ab}\delta(x-y) \\ -\delta_{ab}\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

Donde M_{ab} puede ser expresada explicitamente en una serie de potencias en g. A partir de La expresión anterior es posible calcular los corchetes de Dirac finales compatibles con los vínculos χ_{1a} y χ_{2a}, los cuales para las variables dinámicas $F(\mathbf{x},t) \equiv F[A_\mu, \Pi^\upsilon]$ y $G(\mathbf{x},t) \equiv G[A_\mu, \Pi^\upsilon]$ son definidos como:

$$\{F_a(x), G_b(y)\}_D = \{F_a(x), G_b(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{F(x)_a, \chi_{id}(u)\}'_D C_{ij}^{de^{-1}}(u,v)\{\chi_{je}(v), G_b(y)\}'_D. \tag{3.52}$$

La definición de los corchetes de Dirac hace posible considerar que $\chi_{1a} = 0$, de donde se hace evidente que la componente asociada al momento canónico $\Pi_a^0(x) = 0$, además con la condición $\chi_{2a} = 0$ se puede establecer que la componente del campo $A_{0a}(x)$ tiene una dependencia de las componentes A_i del campo y Π^i del momento. La relación $\partial_i A_a^i(x) = 0$ puede ser resuelta de manera que solo dos de las tres componentes espaciales del campo sean independientes, de igual manera, con $\varphi_{1a} = 0$ se determina que de las componentes espaciales correspondientes al momento canónico solamente dos pueden ser consideradas como siendo independientes. Ya que la elección de los grados de libertad es totalmente arbitraria se escoge $(A_{ia}(x), \Pi_a^j(x))$ con $i,j = 1,2$. Por último, se procede a calcular los corchetes de Dirac finales entre las variables independientes escogidas, entonces, para el campo de Yang-Mills en el gauge de radiación se tiene que los corchetes de Dirac fundamentales están dados por [17]:

$$
\begin{aligned}
&\{A_{0a}(x), A_{0b}(y)\}_D = M_{ab}(x,y) \\
&\{A_{ia}(x), A_{jb}(y)\}_D = 0 \\
&\{A_{ia}(x), A_{0b}(y)\}_D = g\varepsilon_{ace}A_{ie}(x)G_{bc}(y,x,A) + g\int d^3z G_{bc}(y,z,A)\varepsilon_{cge}A_{ke}(z)\partial_k^z(\partial_i^x\delta_{ad} + g\varepsilon_{adf}A_{if}(x))G_{dg}(x,z,A) \\
&\{A_{ia}(x), \Pi_b^j(y)\}_D = \{A_{ia}(x), \Pi_b^j(y)\}'_D = \delta_i^j\delta_{ab}\delta^3(x-y) - [\delta_{ac}\partial_i^x + g\varepsilon_{acd}A_{id}(x)]\,\partial_j^y G_{cb}(x,y,A) \\
&\{\Pi_a^i(x), A_{jb}(y)\}_D = \{\Pi_a^i(x), A_{jb}(y)\}'_D = -\delta_{ab}\delta_j^i\delta(x-y) + [\delta_{be}\partial_j^y + g\varepsilon_{bef}A_{jf}(y)]\partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
&\{\Pi_a^i(x), \Pi_b^j(y)\}_D = \{\Pi_a^i(x), \Pi_b^j(y)\}'_D = -g\varepsilon_{acd}\Pi_c^i(x)\partial_j^y G_{db}(x,y,A) - g\varepsilon_{dcb}\partial_i^x G_{ad}(x,y,A)\Pi_c^j(x)
\end{aligned}
\tag{3.53}
$$

3.3.1. Ecuaciones de Movimiento

De la definición de corchetes de Dirac, ahora se puede considerar a los vínculos como identidades, de manera que se debe cumplir:

$$
\begin{aligned}
&\varphi_{1a} = \partial_i^x\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) = 0 \\
&\varphi_{2a} = \partial_i A_a^i(x) = 0 \\
&\chi_{1a}(x) = \Pi_a^0(x) = 0 \\
&\chi_{2a}(x) = A_{0a}(x) - \int d^3y G_{ab}(x,y,A)\partial_i^y\Pi_b^i(y) = A_{0a}(x) + \int d^3y G_{ab}(x,y,A)g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y) = 0,
\end{aligned}
\tag{3.54}
$$

con las relaciones anteriores se puede reescribir el hamiltoniano como:

$$
H(x,t) = \int d^3y[\frac{1}{2}\Pi_d^k(x)\Pi_d^k(x) + \frac{1}{4}F_d^{ki}(x)F_{kid}(x)]. \tag{3.55}
$$

Ahora, usando la expresión (3.33) para calcular la evolución temporal de una variable dinámica y escogiendo como variables independientes A_i y Π_i con $i, j = 1, 2$ se determina que (véase **Apéndice J**):

$$\dot{A}_{ia}(x,t) = \Pi^i_a(x) + \partial_i A_{0a}(x) + \varepsilon_{aed} A_{0e}(x) A_{id}(x) \tag{3.56}$$

$$\dot{\Pi}^i_a(x,t) = -\partial^x_k F^{ik}_a(x) + g\varepsilon_{abd} F^{ji}_b(x) A_{jd}(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x) A_{0c}(x) \tag{3.57}$$

La expresión (3.56) se puede reescribir como:

$$\Pi^i_a(x) = \partial^i A^0_a(x) - \partial^0 A^i_a(x) - \varepsilon_{abc} A^i_b(x) A^0_c(x) = F^{i0}_a(x). \tag{3.58}$$

Reemplazando la expresión anterior en (3.57):

$$\begin{aligned} \partial_0 \Pi^i_a(x,t) = \partial_0 F^{i0}(x) &= -\partial^x_k F^{ik}_a(x) + g\varepsilon_{abd} F^{ji}_b(x) A_{jd}(x) + g\varepsilon_{abc} A_{0b}(x) F^{i0}_c(x) \\ 0 &= -\partial^x_k F^{ik}_a(x) - \partial_0 F^{i0}_a(x) + g\varepsilon_{abd} F^{ji}_b(x) A_{jd}(x) + g\varepsilon_{abc} A_{0b} F^{i0}_c(x)(x) \end{aligned} \tag{3.59}$$

Se obtiene como resultado las ecuaciones de Euler-Lagrange para la teoría de Yang-Mills en el espacio de fase definido por A_i y Π_i con $i, j = 1, 2$ haciendo uso del gauge de radiación.

3.4. Gauge Axial

Se consideran como condiciones de gauge a los vínculos [17]:

$$\phi_{3a}(x) = A_{3a}(x,t) \approx 0 \tag{3.60}$$

$$\phi_{4a}(x) = \Pi^3_a(x,t) + \partial_3 A_{0a}(x,t) \approx 0, \tag{3.61}$$

los cuales hacen posible que los vínculos ϕ_{1a} y ϕ_{2a} sean ahora de segunda clase, hecho que permite la construcción de la matriz $C^{ab}(x,y)$ [17]:

$$C^{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{ab}\partial_3^x \\ 0 & 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x,t)\delta_{cd} \\ 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & 0 & \delta_{ab} \\ \delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x,t) & -\delta_{ab} & 0 \end{pmatrix}\delta(x-y), \quad (3.62)$$

y su respectiva inversa [17]:

$$C_{ij}^{ab-1}(x,y) = \begin{pmatrix} I_{ab}(x,y) & -\delta_{ab}G(x,y) & H_{ab}(x,y) & \delta_{ab}F(x,y) \\ \delta_{ab}G(x,y) & 0 & -\delta_{ab}F(x,y) & 0 \\ H_{ab}(x,y) & -\delta_{ab}F(x,y) & 0 & 0 \\ \delta_{ab}F(x,y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Las funciones $I_{ab}(x,y), G(x,y), H_{ab}(x,y), F(x,y)$ tienen la forma:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{2}|x^3 - y^3|\delta^2(x-y) \\ F(x,y) &= \frac{1}{2}\varepsilon(x^3 - y^3)\delta^2(x-y) \\ H_{ab}(x,y) &= \partial_3^x I_{ab}(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)G(x,y) \\ I_{ab}(x,y) &= \frac{1}{4}g\varepsilon_{abc}\delta^2(x-y)\int d\xi|x^3-\xi||\xi-y^3|\frac{\partial\Pi_c^3(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial\xi}, \end{aligned} \quad (3.64)$$

y $\varepsilon(x-y)$ representa el signo algebraico de $(x-y)$ [17]. Las funciones anteriores cumplen que:

$$
\begin{aligned}
&F(x,y) = \partial_3^x G(x,y) \\
&\partial_3^x F(x,y) = \partial_3^x \partial_3^x G(x,y) = \delta^3(x-y) \\
&\partial_3^x H_{ab}(x,y) + g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)F(x,y) = 0 \\
&\partial_3^x I_{ab}(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)G(x,y) - H_{ab}(x,y) = 0.
\end{aligned} \tag{3.65}
$$

Con el resultado obtenido al encontrar la matriz C_{ij}^{ab-1} es posible definir los corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas $A_a(x), B_b(y)$:

$$
\{A_a(x), B_b(y)\}_D = \{A_a(x), B_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{A_a(x), \phi_{id}(u)\} C_{ij}^{-1de}(u,v) \{\phi_{je}(v), B_b(y)\}. \tag{3.66}
$$

Por la definición de los corchetes de Dirac ahora los vínculos pueden ser considerado como identidades, de manera que:

$$
\begin{aligned}
&\phi_{1a}(x) = \Pi_a^0(x) = 0 \\
&\phi_{2a}(x) = \partial_i \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) = 0 \\
&\phi_{3a}(x) = A_{3a}(x) = 0 \\
&\phi_{4a}(x) = \Pi_a^3(x) + \partial_3 A_{0a}(x) = 0.
\end{aligned} \tag{3.67}
$$

Entonces, los corchetes fundamentales de la teoría de Yang-Mills en el gauge axial escogiendo como grados de libertad $(A_{ia}(x,t), \Pi_a^i(x,t))$ donde $i = 1, 2$ se pueden escribir como [17]:

$$
\begin{aligned}
&\{A_{ia}(x,t), A_{jb}(y,t)\}_D = 0 \\
&\{\Pi^i_a(x,t), \Pi^j_b(y,t)\}_D = 0 \\
&\{A_{ia}(x,t), \Pi^j_b(y,t)\}_D = \delta^j_i \delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
&\{\Pi^i_a(x,t), A_{jb}(y,t)\}_D = -\delta^i_j \delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
&\{A_{ia}(x,t), A_{0b}(y,t)\}_D = -\delta_{ab}\partial^x_i G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)G(x,y) \\
&\{\Pi^i_a(x,t), A_{0b}(y,t)\}_D = -g\varepsilon_{abc}\Pi^i_c(x)\delta^3(x-u)G(x,y)
\end{aligned}
\tag{3.68}
$$

3.4.1. Ecuaciones de Movimiento

Usando las igualdades (3.68) obtenidas como consecuencia de la definición de los corchetes de Dirac, se puede reescribir el Hamiltoniano como (véase **Apéndice K**):

$$
\begin{aligned}
H = &\int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{2}\partial_3 A_{0a}(x)\partial_3 A_{0a}(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{1a}(x)\partial_3 A_{1a}(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{2a}(x)\partial_3 A_{2a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x)).
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

Ahora, teniendo en cuenta que la evolución temporal de una variable dinámica esta dada por la expresión (3.33), se encuentra que para los campos $(A_{ia}(x,t), \Pi^i_a(x,t))$ con $i = 1,2$ las ecuaciones de movimiento en el gauge axial están dadas por (véase **Apéndice K**):

$$
\dot{A}_{ia}(x,t) = \Pi^i_a(x) + \partial^x_i A_{0a}(x) - g\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) \tag{3.70}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_a^1(x) &= \partial_3^x\partial_3^x A_{1a}(x) - \partial_2^x F_a^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}(A_{0b}(x)\Pi_c^1(x) + A_{2b}(x)F_c^{12}(x)) \\
\dot{\Pi}_a^2(x) &= \partial_3^x\partial_3^x A_{2b}(x) + \partial_1^x F_b^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}(A_{0b}(x)\Pi_c^2(x) + A_{1b}(x)F_c^{21}(x))
\end{aligned}
\tag{3.71}
$$

Reemplazando:

$$
\Pi_a^i(y) = \partial^i A_a^0(x) - \partial^0 A_a^i(x) - g\varepsilon_{acb}A_c^1(x)A_{0b}(x) = F_a^{i0}(x),
\tag{3.72}
$$

en (3.71), se deduce que:

$$
\begin{aligned}
\partial_0 F_a^{10}(x) &= \partial_3^x\partial_3^x A_{1a}(x) - \partial_2^x F_a^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{2b}(x)F_c^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)F_c^{10}(x) \\
0 &= \partial_3^x\partial_3^x A_{1a}(x) - \partial_2 F_a^{12}(x) - \partial_0 F_a^{10}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{2b}(x)F_c^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)F_c^{10}(x)
\end{aligned}
\tag{3.73}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_0 F_a^{20}(x) &= \partial_3^x\partial_3^x A_{2b}(x) + \partial_1^x F_b^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)\Pi_c^2(x) + g\varepsilon_{abc}A_{1b}(x)F_c^{21}(x) \\
0 &= \partial_3^x\partial_3^x A_{2b}(x) - \partial_0 F_a^{20}(x) - \partial_1^x F_b^{21}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)F_c^{20}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{1b}(x)F_c^{21}(x)
\end{aligned}
\tag{3.74}
$$

4 Campo Electromagnético en Interacción con un Campo Fermiónico

En el capítulo 2 se consideró la densidad Lagrangiana de la cual se pueden derivar las ecuaciones de Maxwell en el vacío, ahora, se estudiará desde el punto de vista clásico, el campo electromagnético interactuando con un campo fermiónico, teoría que se conoce como Electrodinámica Cuántica. Sus ecuaciones de movimiento se pueden derivar de la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&\mathcal{L}^{ED} + \mathcal{L}^{D} + \mathcal{L}^{I} \\ =&-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - m\bar{\psi}\psi - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi,\end{aligned} \tag{4.1}$$

donde las variables $\psi_a(x)$ y $\bar{\psi}_a(x)$ (a=1,2,3,4) representan una funcion matricial compleja de cuatro componentes [44]. Adicionalmente se considera a los campos $\psi_a(x)$ y $\bar{\psi}_a(x)$ como siendo variables fermiónicas, por lo que cumplen con un algebra de Grassmann [20], es decir:

$$\begin{aligned}\psi_\alpha\psi_\beta =&-\psi_\beta\psi_\alpha \\ \bar{\psi}_\alpha\bar{\psi}_\beta =&-\bar{\psi}_\beta\bar{\psi}_\alpha \\ \psi_\alpha\bar{\psi}_\beta =&-\bar{\psi}_\beta\psi_\alpha.\end{aligned} \tag{4.2}$$

También cabe aclarar que para el desarrollo de los cálculos posteriores se consideran derivadas izquierdas, de modo que:

$$\frac{\partial(\Omega_1\Omega_2)}{\partial\psi_\alpha} = \frac{\partial(\Omega_1)}{\partial\psi_\alpha}\Omega_2 + (-1)^{n_{\Omega_1}n_{\Omega_1}}\Omega_1\frac{\partial(\Omega_2)}{\partial\psi_\alpha}, \tag{4.3}$$

donde n_{Ω_i} representa la paridad de la variable Ω_i, de manera que toma el valor 1 si es una variable fermiónica o 0 si es una variable bosónica como el campo A_μ. Las cantidades γ^μ representan las matrices de Dirac y cumplen las siguientes propiedades [20]:

$$\begin{aligned}
&\gamma_0^+ = \gamma_0 \\
&\gamma_k^+ = -\gamma_k \\
&\gamma_0\gamma_0 = I \\
&\gamma_\mu\gamma_\upsilon + \gamma_\upsilon\gamma_\mu = 2\eta^{\mu\upsilon}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Por otro lado, el término que representa la interacción entre los campos A_μ y los campos fermiónicos ψ y $\bar{\psi}$ se introduce para preservar la invarianza de gauge obtenida al aplicar la siguiente transformación:

$$\begin{aligned}
A_\mu \to A'_\mu =& A_\mu + \partial_\mu\Lambda(x) \\
\psi \to \psi' =& e^{-ie\Lambda(x)}\psi,
\end{aligned} \tag{4.5}$$

donde $\Lambda(x)$ es una función arbitraria que depende del punto en el espacio-tiempo. Entonces la densidad Lagrangiana (4.1):

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' = & -\frac{1}{4}F'^{\mu\upsilon}F'_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi' - \partial_{\mu}\bar{\psi}'\gamma^{\mu}\psi') - e\bar{\psi}'\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \\
= & -\frac{1}{4}F'^{\mu\upsilon}F'_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}(e^{-ie\Lambda(x)}\psi) - \partial_{\mu}(e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi})\gamma^{\mu}e^{-ie\Lambda(x)}\psi) \\
& - ee^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\gamma^{\mu}(A_{\mu} + \partial_{\mu}\Lambda(x))e^{-ie\Lambda(x)}\psi - me^{ie\Lambda(x)}e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\psi \\
= & -\frac{1}{4}F'^{\mu\upsilon}F'_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(-iee^{ie\Lambda(x)}e^{-ie\Lambda(x)}\partial_{\mu}\Lambda(x)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + e^{ie\Lambda(x)}e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi) \\
& - \frac{i}{2}(iee^{ie\Lambda(x)}e^{-ie\Lambda(x)}\partial_{\mu}\Lambda(x)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + e^{ie\Lambda(x)}e^{-ie\Lambda(x)}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) \\
& - ee^{-ie\Lambda(x)}e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - ee^{-ie\Lambda(x)}e^{ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\Lambda(x)\psi - me^{ie\Lambda(x)}e^{-ie\Lambda(x)}\bar{\psi}\psi.
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

Se demostró en el capítulo 2 que el primer término es invariante bajo la transformación (4.5). Simplificando el resultado anterior se puede determinar que:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}' = & -\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + e\partial_{\mu}\Lambda(x)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - e\partial_{\mu}\Lambda(x)\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi \\
= & -\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi = \mathcal{L}.
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Por lo tanto, se concluye que el lagrangiano expresado en (4.1) es invariante bajo transformaciones de gauge. Teorías descritas por una densidad Lagrangiana que resulta invariante bajo transformaciones de gauge son sistemas en los que se presentan vínculos, es decir la descripción de la Electrodinámica Cuántica se obtiene a partir de una densidad Lagrangiana singular.

4.1. Formulación Lagrangiana

La acción correspondiente a la densidad Lagrangiana (4.1) es:

$$
\mathcal{A}[A_{\mu}, \psi_a, \bar{\psi}_a] = \int d^4x(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi), \tag{4.8}
$$

la cual es una funcional de $[A_{\mu},\psi_a,\bar{\psi}_a]$. Haciendo uso del principio de Hamilton resultan las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos $A_{\mu},\psi,\bar{\psi}$ (véase **Apéndice L**):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu(x)}-\partial_\upsilon(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu(x))}) =&\partial_\upsilon F^{\mu\upsilon}(x)+e\bar{\psi}\gamma^\beta\psi=0\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_a(x)}-\partial_\upsilon(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))}) =&i\partial_\upsilon(\bar{\psi}\gamma^\upsilon)_a+m\bar{\psi}_a+e(\bar{\psi}\gamma^\mu)_aA_\mu=0\\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_a(x)}-\partial_\upsilon(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \bar{\psi}_a(x))}) =&i\partial_\mu(\gamma^\mu\psi)_a-e(\gamma^\mu\psi)_aA_\mu-m\psi_a=0.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

A continuación, se introduce la formulación Hamiltoniana de la teoría donde se hara evidente la naturaleza singular del sistema.

4.2. Formulación Hamiltoniana

Con el resultado obtenido en el **Apéndice L**, se encuentra que los momentos canónicos asociados a los campos $A_\mu, \psi, \bar{\psi}$ son:

$$
\Pi^\mu=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu(x))}=F^{\mu 0}(x)
\tag{4.10}
$$

$$
\pi_a=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_a(x))}=-\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}
\tag{4.11}
$$

$$
\bar{\pi}_a=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_a(x))}=-\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c.
\tag{4.12}
$$

Se hace evidente que si en (4.10) se hace $\mu=0$ el momento será:

$$
\Pi^0=F^{00}(x)=0.
\tag{4.13}
$$

Si $\mu=i$

$$\Pi^i = F^{i0}(x) = -F_{i0}(x) = \partial_0 A_i(x) - \partial_i A_0(x). \tag{4.14}$$

Como se mencionó anteriormente las ecuaciones (4.10),(4.11) y (4.12) en sistemas regulares representan transformaciones entre el espacio de configuración y el espacio de fase, por lo tanto, debido a que en las expresiones (4.11),(4.12) y (4.13) no aparecen términos que representen las velocidades de la componente A_0 y de los campos fermiónicos ψ y $\bar{\psi}$ respectivamente se concluye que dichas expresiones conforman el conjunto de vínculos primarios de la teoría. Se denota a los vínculos como siendo:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \Pi^0 \approx 0 \\
\Theta_1 &= \pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b \gamma^0_{ba} \approx 0 \\
\Theta_2 &= \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

La obtención de los momentos canónicos permite definir el Hamiltoniano canónico de la teoría como siendo (véase **Apéndice M**):

$$H_c = \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c). \tag{4.16}$$

Teniendo en cuenta que un numero par de variables de Grassman forman un elemento con paridad par (Bosón) y un numero impar de variables de Grassman forman un elemento con paridad impar (Fermión), se concluye que que el Hamiltoniano canónico es una variable bosónica. La naturaleza singular del sistema pone en evidencia que la dinámica de las variables está determinada por el Hamiltoniano primario, entonces, para una variable dinámica $A[A_\mu, \psi, \bar{\psi}, \Pi^\mu, \pi_a, \bar{\pi_a}] \equiv A(\mathbf{x}, t)$ su evolución temporal es dada por:

$$\dot{A}(\mathbf{x},t) = \{A(x), H_p\}, \tag{4.17}$$

con

$$\begin{aligned} H_p \equiv & H_c + \int d^3x(\lambda_1\Phi_1 + \bar{\vartheta}(x)\Theta_2 + \Theta_2\vartheta(x)) \\ = & \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c) \\ & + \int d^3x(\lambda_1(x)\Phi_1(x) + \bar{\vartheta}(x)\Theta_2(x) + \Theta_1(x)\vartheta(x)). \end{aligned} \tag{4.18}$$

como siendo el Hamiltoniano primario de la teoría. Para conservar la paridad Bosónica del Hamiltoniano se consideran los multiplicadores de Lagrange $\bar{\vartheta}(x), \vartheta(x)$ como siendo variables fermiónicas.

4.2.1. Consistencia de Vínculos

Se definen a los corchetes de Bose-Fermi entre un campo fermiónico F y un campo bosónico B como [20]:

$$\{B_1, B_2\} = -\{B_2, B_1\} = \int d^3z(\frac{\delta B_1(x)}{\delta A_i(z)}\frac{\delta B_2(x)}{\delta \Pi^i(z)} - \frac{\delta B_1(x)}{\delta \Pi^i(z)}\frac{\delta B_2(x)}{\delta A_i(z)}) + (\frac{\delta B_1(x)}{\delta \psi_\alpha(z)}\frac{\delta B_2(x)}{\delta \pi^\alpha(z)} - \frac{\delta B_1(x)}{\delta \pi^\alpha(z)}\frac{\delta B_2(x)}{\delta \psi_\alpha(z)}) \tag{4.19}$$

$$\{F_1, F_2\} = \{F_2, F_1\} = \int d^3z(\frac{\delta F_1(x)}{\delta A_i(z)}\frac{\delta F_2(x)}{\delta \Pi^i(z)} + \frac{\delta F_1(x)}{\delta \Pi^i(z)}\frac{\delta F_2(x)}{\delta A_i(z)}) - (\frac{\delta F_1(x)}{\delta \psi_\alpha(z)}\frac{\delta F_2(x)}{\delta \pi^\alpha(z)} - \frac{\delta F_1(x)}{\delta \pi^\alpha(z)}\frac{\delta F_2(x)}{\delta \psi_\alpha(z)}) \tag{4.20}$$

$$\{F, B\} = -\{B, F\} = \int d^3z(\frac{\delta F(x)}{\delta A_i(z)}\frac{\delta B(x)}{\delta \Pi^i(z)} + \frac{\delta F(x)}{\delta \Pi^i(z)}\frac{\delta B(x)}{\delta A_i(z)}) - (\frac{\delta F(x)}{\delta \psi_\alpha(z)}\frac{\delta B(x)}{\delta \pi^\alpha(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi^\alpha(z)}\frac{\delta B(x)}{\delta \psi_\alpha(z)}), \tag{4.21}$$

los cuales cumplen que:

$$\begin{aligned} \{A, BC\} =& (-1)^{\Omega_A\Omega_B}B\{A, C\} + \{A, B\}C \\ \{AB, C\} =& (-1)^{\Omega_B\Omega_C}\{A, C\}B + A\{B, C\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Se considera inicialmente que los únicos corchetes de Bose-Fermi diferentes de cero entre las variables del espacio de fase definido por $(A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^\mu, \pi_a, \bar{\pi}_a)$ son los que se indican a continuación:

$$\begin{aligned} \{A_\mu(x,t), \Pi^\upsilon(y,t)\} =& \delta_\mu^\upsilon \delta^3(x-y) \\ \{\psi_a(x,t), \pi_b(y,t)\} =& -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\ \{\bar{\psi}_a(x,t), \bar{\pi}_b(y,t)\} =& -\delta_{ab}\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Teniendo en cuenta los corchetes definidos anteriormente y haciendo uso de (4.17) se procede a calcular las respectivas condiciones de consistencia asociadas a cada vínculo, de donde se obtiene que (véase **Apéndice M**):

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 =& \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \approx 0 \\ \dot{\Theta}_2 =& -\gamma^0(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)\psi(x) - i\gamma^0\vartheta(x) \approx 0 \\ \dot{\Theta}_1 =& \bar{\psi}(x)(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m) + i\bar{\vartheta}(x)\gamma^0 \approx 0. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Los resultados anteriores establecen que al analizar la consistencia de Φ_1 se obtiene una relación entre las variables del espacio de fase, por lo tanto resulta un vínculo secundario. Ahora, cuando se implementan las condiciones de consistencia a Θ_1 y Θ_2 se deducen expresiónes que permiten fijar el valor de $\bar{\vartheta}$ y $\vartheta(x)$, es decir no resultan vínculos secundarios asociados a Θ_1 y Θ_2. Se denota el vínculo secundario como:

$$\varphi_2 = \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \approx 0, \tag{4.25}$$

y se verifica la consistencia del vínculo:

$$\dot{\varphi}_2 = \{\Phi_2, H_p\} \approx 0, \tag{4.26}$$

de donde se obtiene que:

$$\dot{\varphi}_2 = -e\partial_i^x(\bar{\psi}(x)\gamma^i\psi(x)) - e\bar{\vartheta}(x)\gamma^0\psi(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^0\vartheta(x) \approx 0. \tag{4.27}$$

Como se imponen condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange ϑ y $\bar{\vartheta}$, se puede afirmar que el conjunto completo de vínculos que posee la Electrodinámica Cuántica esta formado por:

$$\begin{aligned}
\Phi_1 =& \Pi^0 \approx 0 \\
\varphi_2 =& \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}(x)\gamma^0\psi(x) \approx 0 \\
\Theta_1 =& \pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \approx 0 \\
\Theta_2 =& \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Con el fin de clasificar a los vínculos, se evaluan los corchetes de Poisson entre ellos y se observa que los únicos corchetes no nulos son:

$$\{\Theta_{1a}(x), \Theta_{2d}(y)\} = - i\gamma^0_{da}\delta(x-y) \tag{4.29}$$

$$\{\varphi_2(x), \Theta_{1d}(y)\} = e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bd}\delta^3(x-y) \tag{4.30}$$

$$\{\varphi_2(x), \Theta_{2d}(y)\} = - e\gamma^0_{dc}\psi_c(x)\delta^3(x-y). \tag{4.31}$$

Por lo tanto, Φ_1 es un vínculo de primera clase y se hace evidente que $\varphi_2, \Theta_1, \Theta_2$ son de segunda clase. Sin embargo, al calcular la matriz que tiene como componentes los corchetes de Bose-Fermi entre los vínculos de segunda clase $C_{ij} = \{\phi_i', \phi_j'\}$ (donde $\phi_1' = \Theta_1$, $\phi_2' = \Theta_2$, $\phi_3' = \varphi_2$)

se obtiene lo siguiente:

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^0 & -e(\bar{\psi}(x)\gamma^0) \\ -i\gamma^0 & 0 & e(\gamma^0\psi(x)) \\ e(\bar{\psi}(x)\gamma^0) & -e(\gamma^0\psi(x)) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{4.32}$$

Ya que la matriz representada anteriormente tiene la propiedad de tener determinante igual a cero, su inversa no puede ser calculada, como consecuencia, los corchetes de Dirac consistentes con $\varphi_2, \Theta_1, \Theta_2$ no pueden ser definidos. Entonces, se dice que $\varphi_2, \Theta_1, \Theta_2$ no constituyen un numero mínimo de vínculos de segunda clase. Además, en el límite $e \to 0$, φ_2 se convierte en el vínculo (2.35) obtenido para el campo electromagnético en el vacío y los corchetes de Poisson (4.30) y (4.31) serán iguales a cero. Si φ_2 perteneciera al conjunto de vínculos de segunda clase, el limite $e \to 0$ no sería posible. Entonces, debe existir una combinación de los vínculos $\varphi_2, \Theta_1, \Theta_2$ e independiente de Φ_1, y es de primera clase. Dicha combinación está dada por [20]:

$$\begin{aligned} \Phi_2 =& \varphi_2 - ie(\Theta_{1a}\psi_a + \bar{\psi}_a\Theta_{2a}) \\ =& \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ab}\psi_b(x) - ie(\pi_a)\psi_a + e\frac{1}{2}\bar{\psi}_a\gamma^0_{ab}\psi_b - ie\bar{\psi}_a\bar{\pi}_a + \frac{1}{2}e\bar{\psi}_a\gamma^0_{ab}\psi_b \\ =& \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ab}\psi_b(x) - ie(\pi_a)\psi_a + e\bar{\psi}_a\gamma^0_{ab}\psi_a - ie\bar{\psi}_a(\bar{\pi}_a) \\ =& \partial_i^x \Pi^i(x) - ie(\pi_a\psi_a + \bar{\psi}_a\bar{\pi}_a) \end{aligned} \tag{4.33}$$

Nuevamente se evaluan los corchetes entre los vínculos Φ_2,Θ_1 y Θ_2:

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_2(x), \Theta_{1d}(y)\} =&\{\partial_i^x \Pi^i(x) - ie(\pi_a(x)\psi_a(x) + \bar{\psi}_a(x)\bar{\pi}_a(x)), \pi_d(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_e(y)\gamma^0_{ed}\} \\
=& - ie\pi_a(x)\{\psi_a(x), \pi_d(y)\} + \frac{1}{2}e\bar{\psi}_a(x)\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\psi}_e(y)\}\gamma^0_{ed} \\
=& - ie\pi_a(x)(-\delta_{ad}\delta^3(x-y)) + \frac{1}{2}e\bar{\psi}_a(x)(-\delta_{ae}\delta^3(x-y))\gamma^0_{ed} \\
=& ie\pi_d(x)\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}e\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ad}\delta^3(x-y) \\
=& ie(\pi_d(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ad})\delta^3(x-y) \\
=& ie\Theta_{1d}(x)\delta^3(x-y) \approx 0
\end{aligned}
\tag{4.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_2(x), \Theta_{2d}(y)\} =&\{\partial_i^x \Pi^i(x) - ie(\pi_a(x)\psi_a(x) + \bar{\psi}_a(x)\bar{\pi}_a(x)), \bar{\pi}_d(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{de}\psi_e(y)\} \\
=& - \frac{1}{2}e\gamma^0_{de}\{\pi_a(x), \psi_e(y)\}\psi_a(x) + ie\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\pi}_d(y)\}\bar{\pi}_a(x) \\
=& - \frac{1}{2}e\gamma^0_{de}(-\delta_{ae}\delta^3(x-y))\psi_a(x) + ie(-\delta_{ad}\delta^3(x-y))\bar{\pi}_a(x) \\
=& \frac{1}{2}e\gamma^0_{da}\psi_a(x)\delta^3(x-y) - ie\bar{\pi}_d(x)\delta^3(x-y) \\
=& - ie(\bar{\pi}_d(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{da}\psi_a(x))\delta^3(x-y) \\
=& - ie\Theta_{2d}(x)\delta^3(x-y) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Finalmente, el conjunto de vínculos a considerar será el que se indica a continuación:

$$
\begin{aligned}
\Phi_1 =& \Pi^0 \approx 0 \\
\Phi_2 =& \partial_i \Pi^i - ie(\pi_a\psi_a + \bar{\psi}_a\bar{\pi}_a) \approx 0 \\
\Theta_1 =& \pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \approx 0 \\
\Theta_2 =& \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

Los vínculos Φ_1 y Φ_2 son vínculos de primera clase. Debido a que los vínculos Θ_1 y Θ_2 son de segunda clase, es posible construir una matriz compuesta por los corchetes de Poisson entre ellos y establecer los corchetes de Dirac para las variables fermiónicas, de manera que Θ_1 y Θ_2 puedan ser eliminados. Ya que los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones de gauge [41] y el Hamiltoniano primario solo considera a uno de los vínculos de primera clase es necesario generalizar los resultados con el fin de garantizar una completa libertad de gauge, agregandole los generadores secundarios mediante el método de los multiplicadores de Lagrange. Se define el Hamiltoniano extendido como:

$$\begin{aligned} H_E \equiv& H_p + \int d^3x \lambda_2 \Phi_2 \\ =& \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c) \\ &+ \int d^3x(\lambda_1(x)\Phi_1(x) + \lambda_2\Phi_2 + \bar{\vartheta}(x)\Theta_2(x) + \Theta_1(x)\vartheta(x)). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Por ende, la evolución temporal de una variable dinámica $F(\mathbf{x}, t) \equiv F[A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^\mu, \pi_a, \bar{\pi}_a]$ estará dada por:

$$\begin{aligned} \dot{F} \approx& \{F(x), H_E\} \\ =& \{F(x), H_c\} + \int d^3y \{F(x), \lambda_1(y)\Phi_1(y)\} + \int d^3y\{F(x), \lambda_2(y)\Phi_2(y)\} \\ &+ \int d^3y\{F(x), \bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y)\} + \int d^3y\{F(x), \Theta_1(y)\vartheta(y))\}. \end{aligned} \tag{4.38}$$

Como λ_1 y λ_2 son funciones arbitrarias y de momento no se han impuesto condiciones sobre ellas no es posible determinar de manera única la evolución temporal de las variables dinámicas, hecho que se indica a continuación (véase **Apéndice M**):

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_\mu(x) =&\delta^i_\mu(\Pi^i(x) + \partial^x_i A_0(x) - \partial^x_i \lambda_2(x)) + \delta^0_\mu \lambda_1(x)\delta^3(x-y)\\
\dot{\Pi}^\mu(x) =& -\delta^\mu_0 \partial^x_i \Pi^i(x) + \delta^\mu_i \partial^x_k F^{ik}(x)\\
\dot{\psi}_a(x) =&ie\lambda_2(x)\psi_a(x) - \vartheta_a(x)\\
\dot{\pi}_a(x) =&\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{ba} - ie\lambda_2(x)\pi_a(x) + \frac{i}{2}\bar{\vartheta}_b(x)\gamma^0_{ba}\\
\dot{\bar{\psi}}_a(x) =& -ie\lambda_2(x)\bar{\psi}_a(x) + \bar{\vartheta}_a(x)\\
\dot{\bar{\pi}}_a(x) =& -(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{ac}\psi_c(x) + ie\lambda_2(x)\bar{\pi}_a(x) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\vartheta_b(x)
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

4.3. Vínculos de Segunda Clase

Se procede a eliminar los vínculos de segunda clase, para ello se construye la matriz de vínculos secundarios asociada a Θ_1, Θ_2, la cual tiene como componentes $C_{ij} = \{\Theta_i, \Theta_j\}$. Realizando los calculos respectivos se encuentra que:

$$
C(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \tag{4.40}
$$

y su inversa es dada por (véase **Apéndice N**):

$$
C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i(\gamma^0)^T & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \tag{4.41}
$$

La matriz $C^{-1}(x,y)$ permite definir el primer conjunto de corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas A(x) y B(x) como siendo:

$$\{A(\mathbf{x},t),B(\mathbf{y},t)\}_D^{\prime} = \{A(x),B(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{A(x),\Theta_{ib}(u)\} C_{bc}^{ij^{-1}}(u,v)\{\Theta_{jc}(u),B(y)\}, \tag{4.42}$$

lo que permite considerar a los vínculos Θ_1 y Θ_2 como identidades, es decir:

$$\begin{aligned} \Theta_1 =& \pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0 \\ \Theta_2 =& \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c = 0. \end{aligned} \tag{4.43}$$

Las expresiones (4.43) hacen evidente que los momentos canónicos π_a y $\bar{\pi}$ dependen de los campos ψ y $\bar{\psi}$ respectivamente, por esta razón se escoge parcialmente como variables independientes de la teoria a los campos $(\psi, \bar{\psi}, A_\mu, \Pi^\mu)$, para dichos campos, los corchetes de Dirac están dados por (véase **Apéndice N**):

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x,t),\psi_b(y,t)\}_D^{\prime} =& 0 \\ \{\bar{\psi}_a(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D^{\prime} =& 0 \\ \{\psi_a(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D^{\prime} =& -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \\ \{\bar{\psi}_a(x,t),\psi_b(y,t)\}_D^{\prime} =& -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \\ \{A_\mu(x,t),\psi_b(y,t)\}_D^{\prime} =& 0 \\ \{A_\mu(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D^{\prime} =& 0 \\ \{\Pi^\mu(x,t),\psi_b(y,t)\}_D^{\prime} =& 0 \\ \{\Pi^\mu(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D^{\prime} =& 0. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Ahora, con el fin de identificar los grados de libertad asociados a la teoría deben implementarse condiciones de *gauge*, de manera que Φ_1 y Φ_2 se conviertan en vínculos de segunda clase y puedan ser eliminados implementando el método de Dirac, además con las condiciones adicionales debe ser posible fijar el valor de los multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2.

4.4. Gauge de Radiación

Como se mencionó anteriormente, es necesario imponer condiciones adicionales con el fin de definir los valores de los multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2. Se procede a mostrar por que no es posible implementar la condición de gauge de radiación de la teoría libre. Se asume inicialmente lo siguiente:

$$\partial_i^x A^i(x) \approx 0. \tag{4.45}$$

Debido a que el vínculo anterior debe cumplir condiciones de consistencia, se debe cumplir lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\partial_0(\partial_i^x A^i(x)) =& \partial_i^x \partial_0(A^i(x)) = \partial_i^x \{A^i(x), H_c\} \\
=& \partial_i^x \int d^3y \{A^i(x), \frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^j(y) + \partial_j^y A_0(y)\Pi^j(y) + \frac{1}{2}F^{kj}(y)F_{kj}(y)\} \\
&+ \partial_i^x \int d^3y \{A^i(x), \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y) \\
=& - \partial_i^x \int d^3y \Pi^j(y)\{A_i(x), \Pi^j(y)\} - \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y A_0(y)\{A_i(x), \Pi^j(y)\} \\
=& - \partial_i^x \int d^3y \Pi^j(y)(\delta_i^j \delta^3(x-y)) - \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y A_0(y)(\delta_i^j \delta^3(x-y)) \\
=& - \partial_i^x \Pi^j(x) - \partial_i^x \partial_i^x A_0(x) \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Por lo tanto, en el gauge de radiación se considera el conjunto de vínculos que se indica a continuación:

$$
\begin{aligned}
\phi_1 =& \Pi^0(x) \approx 0 \\
\phi_2 =& \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma_{ba}^0 \psi_a(x) \approx 0 \\
\phi_3 =& \partial_i^x \Pi^i(x) + \partial_i^x \partial_i^x A_0(x) \approx 0 \\
\phi_4 =& \partial_i^x A_i(x) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{4.47}
$$

Al calcular la condición consistencia de los vínculos adicionales usando (4.37) se obtendran condiciones que permitan fijar el valor de los multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2, ya que ahora se cumple (vease **Apéndice O**):

$$
\begin{aligned}
\{\phi_1(x,t), \phi_3(y,t)\}'_D =& - \partial_i^x \partial_i^x \delta^3(x-y) \\
\{\phi_2(x,t), \phi_4(y,t)\}'_D =& - \partial_i^x \partial_i^x \delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{4.48}
$$

Adicionalmente se puede concluir que los vínculos Φ_1 y Φ_2 despues de implementar el gauge de radiación pasan a ser vínculos de segunda clase, lo que permite la construcción de una nueva matriz definida a partir de los corchetes de Dirac preliminares, la cual tiene como componentes $C_{ij}(x,y) = \{\phi_i, \phi_j\}'_D$ (con i,j=1,2,3,4). Dicha matriz en el gauge de radiación se puede representar como (vease **Apéndice O**):

$$
C(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_i^x \partial_i^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x \partial_i^x \\ \partial_i^x \partial_i^x & 0 & 0 & -\partial_i^x \partial_i^x \\ 0 & \partial_i^x \partial_i^x & \partial_i^x \partial_i^x & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{4.49}
$$

La inversa de la matriz C(x,y) es dada por (véase **Apéndice O**):

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}. \tag{4.50}$$

La matriz $C^{-1}(x,y)$ permite definir a los corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas $A(\mathbf{x},t) \equiv A[A_i, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^i]$ y $B(\mathbf{x},t) \equiv B[A_i, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^i]$ $(i = 1,2)$ a tiempos iguales como:

$$\{A(x), B(y)\}_D = \{A(x), B(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{A(x), \phi_\mu(u)\}'_D C^{-1}_{\mu\nu}(u,v)\{\phi_\nu(v), B(y)\}'_D. \tag{4.51}$$

De la definición de los corchetes de Dirac se puede considerar a los vínculos (4.47) como identidades, por ende se cumple que:

$$\begin{aligned} &\Pi^0(x) = 0 \\ &\partial_i^x \Pi^i(x) + \partial_i^x \partial_i^x A_0(x) = 0 \\ &\partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba}\psi_a(x) = 0 \\ &\partial_i^x A^i(x) = 0. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Las primer expresion hace evidente que $\Pi^0 = 0$. La relación $\partial_i^x A^i(x) = 0$ se puede resolver de modo que solo dos de las componentes espaciales de A_μ sean independientes, de la misma manera se determina con las expresiónes restantes que de las tres componentes espaciales asociadas al momento canónico Π^μ solo dos pueden considerarse como independientes. Ya que la elección de los grados de libertad asociados a la teoría es arbitraria, se escoge $(A_i(x), \Pi^i, \psi, \bar{\psi})$ con $i = 1,2$ y se calcula los corchetes fundamentales entre dichas variables, resultando que los únicos elementos diferentes de cero son: (véase **Apéndice P**):

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D =& - i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\}_D =& - i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y) \\
\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D =& \delta^j_i\delta^3(x-y) - \partial^x_i\partial^y_j\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \\
\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D =& - \delta^i_j\delta^3(x-y) + \partial^x_i\partial^y_j\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \\
\{\psi_a(x), \Pi^i(y)\}_D =& - ie\frac{1}{4\pi}\psi_a(x)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|} \\
\{\bar{\psi}_a(x), \Pi^i(y)\}_D =& ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}
\end{aligned}
\tag{4.53}
$$

Se observa que las relaciones anteriores son iguales a las obtenidas en el capitulo 2 para el campo electromagnético sin la presencia del campo fermiónico. Finalmente con los corchetes bien definidos se procede a calcular la evolución temporal de los grados de libertad.

4.4.1. Ecuaciones de Movimiento

La evolución temporal de una variable dinámica $A(x)$ definida en el espacio de fase definido por $(A_i(x), \Pi^i, \psi_a, \bar{\psi}_a)$ $(i = 1, 2)$, puede ser obtenida a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{A}(x,t) = \{A(x,t), H\}_D \tag{4.54}$$

donde H representa el Hamiltoniano de la teoría reescrito en términos de las variables independientes. Entonces, el Hamiltoniano se puede escribir de la siguiente forma:

$$H = \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i\Pi^i + \frac{1}{2}F^{ki}F_{ki} + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c). \tag{4.55}$$

Se calcula la evolución dinámica de las variables fermiónicas (véase **Apéndice P**):

$$\dot{\psi}_a(x,t) = ie\psi_a(x)A_0(x) - i\gamma^0(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)\psi(x) \tag{4.56}$$

Multiplicando por el lado izquierdo $i\gamma^0$ y usando que $\gamma^0\gamma^0 = I$:

$$\begin{aligned} i\partial_0(\gamma^0\psi(x,t)) =& -e\gamma^0\psi(x)A_0(x) + (-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu + m)\psi(x,t) \\ 0 =& -i\partial_0(\gamma^0\psi(x,t)) + (-i\gamma^i\partial_i^x - e\gamma^0 A_0(x) + e\gamma^0 A_0 + e\gamma^i A_i + m)\psi(x) \\ 0 =& (i\gamma^\mu\partial_\mu^x - e\gamma^i A_i - m)\psi(x) \end{aligned} \tag{4.57}$$

Por otro lado:

$$\dot{\bar{\psi}}_a(x,t) = \partial_0\bar{\psi}_a(x,t) = -ie\bar{\psi}(x)A_0(x) + i\bar{\psi}(x)(i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu + m)\gamma^0 \tag{4.58}$$

Multiplicando por el lado derecho $i\gamma^0$ y usando nuevamente las propiedades de la matriz γ^0:

$$\begin{aligned} i\partial_0(\gamma^0\psi(x,t)) =& e\bar{\psi}(x)A_0(x)\gamma^0 - (i\partial_i^x\gamma^i + e\gamma^\mu A_\mu + m)\bar{\psi}(x) \\ 0 =& -i\partial_o\bar{\psi}(x,t)\gamma^0 - (i\partial_i^x\gamma^i - e\gamma^0 A_0(x) + e\gamma^0 A_0 + e\gamma^i A_i + m)\bar{\psi}(x) \\ 0 =& (i\partial_\mu^x\gamma^\mu + e\gamma^i A_i + m)\bar{\psi}(x) \end{aligned} \tag{4.59}$$

Se hace evidente que las relaciones (4.57) y (4.59) representan a las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos fermiónicos ψ y $\bar{\psi}$. De igual manera se realiza el cálculo de la evolución temporal de las variables bosónicas A_i y Π^i de tal manera que se tiene como resultado:

$$\dot{A}_i(x) = \Pi^i(x) = F^{i0}(x) \tag{4.60}$$

$$\dot{\Pi}^i(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bc}^i\psi_c(x), \tag{4.61}$$

reemplazando la ecuación (4.60) en (4.61):

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}^i(x) =& \partial_0 F^{i0}(x) = \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bc}^i\psi_c(x) \\ 0 =& \partial_0 F^{0i}(x) + \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bc}^i\psi_c(x) \end{aligned} \tag{4.62}$$

Obteniendo así las ecuaciónes de Euler-Lagrange definidas en el espacio de fase generado por las variables bosónicas independientes que se escogen después implementar el gauge de radiación.

4.5. Gauge Axial

Ahora, se tienen en cuenta como condiciones adicionales a los vínculos que componen el gauge axial, de modo que el conjunto de vínculos a considerar es:

$$\begin{aligned} \phi_1 =& \Pi^0(x) \approx 0 \\ \phi_2 =& \partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b\gamma_{ba}^0\psi_a \approx 0 \\ \phi_3 =& A_3(x) \approx 0 \\ \phi_4 =& \Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) \approx 0. \end{aligned} \tag{4.63}$$

Si se evaluan los corchetes de Dirac definidos por los vínculos de segunda clase fermiónicos, entre ϕ_1, ϕ_2 y los vínculos del gauge de axial se determina que (vease **Apéndice Q**):

$$\begin{aligned}
\{\phi_1(x), \phi_4(y)\}_D^{\prime} &= -\, \partial_3^y \delta(x-y) = \partial_3^x \delta(x-y) \\
\{\phi_2(x), \phi_3(y)\}_D^{\prime} &= -\, \partial_3^x \delta(x-y).
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Entonces, se determina un conjunto de vínculos de segunda clase compuesto por ϕ_1,ϕ_2,ϕ_3 y ϕ_4, por ende, es posible calcular la matriz compuesta por los corchetes de Dirac entre dichos vínculos, la cual se puede representar como siendo:

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_3^x \delta(x-y) \\ 0 & 0 & -\partial_3^x \delta(x-y) & 0 \\ 0 & -\partial_3^x \delta(x-y) & 0 & \delta(x-y) \\ \partial_3^x \delta(x-y) & 0 & -\delta(x-y) & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.65}$$

Al calcular su matriz inversa se obtiene el siguiente resultado (véase **Apéndice Q**):

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -g(x,y) & 0 & f(x,y) \\ g(x,y) & 0 & -f(x,y) & 0 \\ 0 & -f(x,y) & 0 & 0 \\ f(x,y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.66}$$

Donde:

$$\begin{aligned}
\partial_3^x \partial_3^x g(x,y) =& \partial_3^x f(x,y) = \delta(x-y) \\
\partial_3^x g(x,y) =& f(x,y) \\
g(x,y) =& \frac{1}{2} \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2)|x_3-y_3| \\
f(x,y) =& \frac{1}{2} \delta(x_1-y_1)\delta(x_2-y_2) e(x_3-y_3).
\end{aligned} \tag{4.67}$$

En la expresión anterior $|x - y|$ y $\epsilon(x - y)$ representan las funciones valor absoluto y signo algebraico respectivamente. El cálculo de $C^{-1}(x,y)$ permite definir a los corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas $A(\mathbf{x},t) \equiv A[A_i, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^i]$ y $B(\mathbf{x},t) \equiv B[A_i, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^i]$ $(i = 1,2)$ a tiempos iguales como siendo:

$$\{A(x,t), B(y,t)\}_D = \{A(x), B(y)\}_D - \int\int d^3u d^3v \{A(x), \phi_i(u)\}_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v), B(y)\}_D. \tag{4.68}$$

Por medio de la definición de los corchetes de Dirac es posible imponer la condición para los vínculos $\phi_i = 0$ (i=1,2,3,4), por lo tanto ahora se cumple que:

$$\begin{aligned} \Pi^0(x) =& 0 \\ \partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b \gamma^0_{ba} \psi_a) =& 0 \\ A_3(x) =& 0 \\ \Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) =& 0. \end{aligned} \tag{4.69}$$

Las condiciones anteriores permiten escoger como grados de libertad a los campos $(A_i(x), \Pi^i, \psi, \bar{\psi})$ donde $i = 1,2$. Entonces los corchetes de Dirac diferentes de cero entre los grados de libertad escogidos serán (véase **Apéndice Q**):

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D =& - i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \\ \{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\}_D =& - i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y) \\ \{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D =& \delta_i^j \delta^3(x-y) \\ \{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D =& - \delta^i_j \delta^3(x-y) \end{aligned} \tag{4.70}$$

4.5.1. Ecuacion de Movimiento

Con las relaciones (4.69) se puede reescribir el Hamiltoniano en términos de las variables independientes como siendo:

$$H = \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1(x)\Pi^1(x) + \frac{1}{2}\Pi^2(x)\Pi^2(x) + \Pi^1(x)\partial_1^x A_0(x) + \Pi^2(x)\partial_2^x A_0(x) - \frac{1}{2}(\partial_3^x A_0(x))^2 + \frac{1}{4}F_{ki}(x)F^{ki}(x))$$
$$+ \int d^3x(\bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c). \tag{4.71}$$

Ya que la evolución temporal de una variable dinámica $F(\mathbf{x}, t)$ definida en el espacio de fase formado por los grados de libertad $(A_i, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^i)$ está dada por:

$$\dot{F} \approx \{F(x), H\}_D \tag{4.72}$$

Se obtiene como resultado que la evolución temporal de los campos bosónicos puede escribirse de la siguiente manera (véase **Apéndice Q**):

$$\dot{A}_i(x) = \{A_i(x), H\}_D = \Pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x) \tag{4.73}$$

$$\dot{\Pi}^i(x) = \{\Pi^i(x), H\}_D = \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma_{bc}^i\psi_c(x) \tag{4.74}$$

De (4.14):

$$\Pi^i(x) = \partial_0^x A_i(x) - \partial_i^x A_0(x) = -F^{0i} \tag{4.75}$$

Reemplazando la relación anterior en (4.74):

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i(x) =& -\partial_0 F^{0i} = \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x) \\
0 =& \partial_0 F^{0i} + \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x)
\end{aligned}
\tag{4.76}
$$

Resultando así las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo electromagnetico en interacción con un campo fermiónico despues de eliminar los grados de libertad redundantes implementando el gauge axial. Adicionalmente se puede mostrar (ver **Apéndice S**) que las ecuaciones de movimiento asociadas a los campos fermiónicos ψ y $\bar{\psi}$ son las mismas obtenidas para el gauge de radiación, es decir:

$$
\begin{aligned}
0 =& (i\gamma^\mu \partial_\mu^x - e\gamma^\mu A_\mu - m)\psi(x,t) \\
0 =& \bar{\psi}(x,t)(i\overleftarrow{\partial}_\mu^x \gamma^\mu + e\gamma^\mu A_\mu + m)
\end{aligned}
\tag{4.77}
$$

5 Estudio Clásico del Campo de Yang-Mills en Interacción con un Campo Fermiónico en el Gauge Axial

A continuación se considera una densidad Lagrangiana invariante bajo las siguientes transformaciones de gauge:

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_a =& - i\varepsilon^b(x)T^b_{ac}\psi_c(x) \\
\delta\bar{\psi}_a =& i\varepsilon^b(x)\bar{\psi}_c(x)T^b_{ca} \\
\delta A^a_\mu =& \frac{1}{g}\partial_\mu\epsilon^a(x) - \varepsilon_{abc}A^b_\mu\epsilon^c(x),
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

donde ε^a es un parametro infinitesimal que depende del punto en el espacio-tiempo. Como se mencionó anteriormente, el grupo de simetría en el que serán desarrollados los cálculos posteriores, al igual que en el capítulo 3, es el SU(2), para el cual la constante de estructura es el tensor antisimétrico ε_{ijk}. Los generadores T^a del grupo están dados en terminos de las matrices de Pauli y pueden ser representados de la siguiente manera:

$$
T^1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} T^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} T^3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.2}
$$

Adicionalmente, las matrices definidas anteriormente satisfacen el algebra de Lie del grupo, es decir [3]:

$$[T^a, T^b] = i\epsilon_{abc}T^c. \tag{5.3}$$

Ya que la dimensión de la representación del grupo es 2, el campo fermiónico $\psi_{\sigma a}(x)$ ($\sigma = 1, 2, 3, 4; a = 1, 2$) perteneciente a la representación del grupo SU(2) se interpreta para cada indice a como siendo un spinor de Dirac de cuatro componentes [44], de manera que:

$$\psi_a(x) = \begin{pmatrix} \phi_{1a}(x) \\ \phi_{2a}(x) \\ \phi_{3a}(x) \\ \phi_{4a}(x) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

La densidad Lagrangiana invariante bajo las transformaciones de gauge expresadas en (5.1) se puede escribir como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{YM} + \mathcal{L}^{D} + \mathcal{L}^{I}, \tag{5.5}$$

Donde:

$$\mathcal{L}^{YM} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon}^a \tag{5.6}$$

$$\mathcal{L}^{D} = \frac{i}{2}(\bar{\psi}_a\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a - \partial_\mu\bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_a) - m\bar{\psi}_a\psi_a \tag{5.7}$$

$$\mathcal{L}^{I} = -g\bar{\psi}_c\gamma^\mu T_{ca}^b\psi_a A_\mu^b. \tag{5.8}$$

En las relaciones anteriores g representa la constante de acople entre los campos y γ^μ son las matrices de Dirac que cumplen las propiedades (4.4). Las componentes del tensor antisimétrico $F_{\mu\upsilon}$ en el grupo SU(2) se definen como:

$$F_a^{\mu\upsilon} = \partial^\mu A_a^\upsilon(x) - \partial^\upsilon A_a^\mu(x) - g\varepsilon_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\upsilon(x). \tag{5.9}$$

5.1. Formulación Lagrangiana

La acción asociada a la densidad Lagrangiana (5.5) se puede escribir como:

$$\mathcal{A}[A_{\mu a}, \psi_a, \bar{\psi}_a] = \int d^4x(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon a} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_a\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a - \partial_\mu\bar{\psi}_a\gamma^\mu\psi_a) - g\bar{\psi}_c\gamma^\mu T_{ca}^b\psi_a A_{\mu b}). \tag{5.10}$$

Usando el principio de Hamilton, se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a los campos $A_{\mu a}$,ψ_a y $\bar{\psi}_a$, las cuales pueden ser escritas como se indica a continuación (vease **Apéndice R**):

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu a}(x)} - \partial_\upsilon(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_{\mu a}(x))}) = g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{cb}^a\psi_b(x) + \partial_\upsilon F_a^{\mu\upsilon}(x) = 0 \tag{5.11}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_a(x)} - \partial_\upsilon(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon\psi_a(x))}) = (i\partial_\mu\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}_a(x) + g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{ca}^b A_{\mu b}(x))_\sigma = 0 \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_a(x)} - \partial_\upsilon(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon\bar{\psi}_a(x))}) = (i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a(x) - m\psi_a(x) - g\gamma^\mu T_{ac}^b\psi_c(x)A_{\mu b}(x))_\sigma = 0. \tag{5.13}$$

El resultado anterior se interpreta como siendo las ecuaciones de movimiento para los campos $A_{\mu a}$,ψ_a y $\bar{\psi}_a$ definidas en el espacio de configuración dado por $(A_{\mu a}, \psi_a, \bar{\psi}_a, \dot{A}_{\mu a}, \dot{\psi}_a, \dot{\bar{\psi}}_a)$. Ahora, se procede a estudiar la formulación Hamiltoniana. Debido a que se estudia un Lagrangiano invariante bajo transformaciones de gauge, se espera al igual que en los capítulos anteriores que la teoría presente vínculos, los cuales podran ser eliminados haciendo uso del método de Dirac.

5.2. Formulación Hamiltoniana

Se definen los momentos canónicos de la teoría como:

$$\Pi^{\mu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_{\mu}(x))} \tag{5.14}$$

$$\pi_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_a(x))} \tag{5.15}$$

$$\bar{\pi}_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_a(x))}. \tag{5.16}$$

Los resultados obtenidos en el **Apéndice R** permiten establecer que los momentos canónicos asociados a los campos $A_{\mu a}$,ψ_a y $\bar{\psi}_a$ se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\Pi^{\mu a} = F_a^{\mu 0}(x) \tag{5.17}$$

$$\pi_{\sigma a} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma} \tag{5.18}$$

$$\bar{\pi}_{\sigma a} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x). \tag{5.19}$$

Si en (5.17) es considerado el valor de $\mu = 0$, debido a la antisimétria del tensor $F_a^{\mu\nu}$(x) se deduce que:

$$\Pi^0_a = F_a^{00}(x) = 0, \tag{5.20}$$

de igual manera con $\mu = i$:

$$\Pi_a^i(x) = F_a^{i0}(x) = \partial^i A_a^0(x) - \partial^0 A_a^i(x) - g\varepsilon_{abc} A_b^i(x) A_c^0(x). \tag{5.21}$$

Es posible observar, que las expresiones (5.18), (5.19) y (5.20) no contienen términos en los que esten presente las "velocidades" de ψ_a, $\bar{\psi}_a$ y A_0. Lo que indica la existencia del siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \Phi_{1a} =& \Pi_a^0 \approx 0 \\ \Theta_{\sigma a}^1 =& \pi_{\sigma a} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma_{\theta\sigma}^0 \approx 0 \\ \Theta_{\sigma a}^2 =& \bar{\pi}_{\sigma a} + \frac{i}{2}\gamma_{\sigma\alpha}^0 \psi_{\alpha a}(x) \approx 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Ahora, es posible construir el Hamiltoniano canónico de la teoría bajo la definición de derivadas izquierdas como: (véase **Apéndice S**):

$$\begin{aligned} H_c =& \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) - A_{0a}(x)\partial_i \Pi_a^i(x) - g\varepsilon_{abc} A_{ib}(x) A_{0c}(x)\Pi_a^i(x) + \frac{1}{4}F_a^{ki}(x) F_{kia}(x)) \\ &+ \int d^3x \bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma_{\theta\sigma}^i \partial_i + g\gamma_{\theta\sigma}^\mu T_{bc}^d A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma} \psi_{\sigma c}(x). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Ya que en la teoría se evidencia la presencia de vínculos, la dinámica de los campos está determinada por el Hamiltoniano primario. Entonces, le evolución temporal de una variable dinámica $A[A_{\mu a}, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^{\mu a}, \pi_{\sigma a}, \bar{\pi}_{\sigma a}] \equiv A(\mathbf{x}, t)$ se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{A}(\mathbf{x}, t) = \{A(x), H_p\}, \tag{5.24}$$

con el Hamiltoniano primario dado por:

$$
\begin{aligned}
H_p \equiv & H_c + \int d^3x(\lambda_{1a}\Phi_{1a} + \bar{\vartheta}_{\sigma a}(x)\Theta^2_{\sigma a} + \Theta^1_{\sigma a}\vartheta(x)_{\sigma a}) \\
= & \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) + \Pi^i_a(x)\partial_i A_{0a}(x) - g\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x)\Pi^i_a(x) + \frac{1}{4}F^{ki}_a(x)F_{kia}(x)) \\
& + \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i\partial_i + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(x) \\
& + \int d^3x(\lambda_{1a}(x)\Phi_{1a}(x) + \bar{\vartheta}_{\sigma a}(x)\Theta^2_{\sigma a}(x) + \Theta^1_{\sigma a}(x)\vartheta_{\sigma a}(x))
\end{aligned}
\tag{5.25}
$$

Para conservar la paridad Bosónica del Hamiltoniano se considera que los multiplicadores de Lagrange $\bar{\vartheta}(x), \vartheta(x)$ representan variables fermiónicas.

5.2.1. Condiciones de Consistencia

Teniendo en cuenta los corchetes de definidos en (3.24), (4.19), (4.20), y (4.21) se determina que los únicos diferentes de cero son:

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu a}(x,t), \Pi^{\upsilon b}(y,t)\} = & \delta_{ab}\delta^\upsilon_\mu\delta^3(x-y) \\
\{\psi_{\sigma a}(x,t), \pi_{\alpha b}(y,t)\} = & -\delta_{\sigma\alpha}\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \bar{\pi}_{\alpha b}(y,t)\} = & -\delta_{\sigma\alpha}\delta_{ab}\delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{5.26}
$$

Al analizar las condiciones de consistencia para cada vínculo primario se deduce que (véase **Apéndice T**):

$$
\dot{\Phi}_{1a}(x) = \partial^x_i\Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \approx 0 \tag{5.27}
$$

$$
\dot{\Theta}^1_{\sigma a}(x) = \bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\overleftarrow{\partial}^x_i + g\gamma^\mu T^d_{ba}A_{\mu d}(x) + m) - i\bar{\vartheta}(x)_a\gamma^0 \approx 0 \tag{5.28}
$$

$$
\dot{\Theta}^2_{\sigma a}(x) = -(-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^\mu T^d_{ac}A_{\mu d}(x) + m)_\sigma\psi_c(x) - i\gamma^0_\sigma\vartheta(x)_a \approx 0 \tag{5.29}
$$

Se concluye que de la condición de consistencia asociada al vínculo primario Φ_{1a} resulta una relación entre las variables dinámicas, es decir se obtiene un vínculo secundario. En tanto que con la consistencia de Θ_a^1 y Θ_a^2 se fija los valores de los multiplicadores de Lagrange $\vartheta(x)$ y $\bar{\vartheta}(x)$. Por lo tanto, no se obtienen mas vínculos asociados a Θ_a^1 y Θ_a^2. Se denota al vínculo secundario como siendo:

$$\varphi_{2a}(x) = \partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma_{\theta\sigma}^0 T_{bc}^a \psi_{\sigma c}(x) \approx 0. \tag{5.30}$$

De igual manera, al implementar la condicion de consistencia de este nuevo vínculo secundario se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}_{2a}(x) =& g\partial_i^x(\bar{\psi}_{\theta d}(x)(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\gamma^i T_{de}^b - \gamma^i T_{de}^a)_{\theta\beta}\psi_{\beta e}(x)) \\ &- g(g\varepsilon_{adf}\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma_{\theta\sigma}^0 T_{bc}^d \psi_{\sigma c}(x)A_{0f}(x) + \bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma_{\theta\sigma}^0 T_{dc}^a \psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma_{\theta\beta}^0 T_{bd}^a \vartheta(x)_{\beta d}) \approx 0.\end{aligned} \tag{5.31}$$

De la relación anterior se deducen condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange, por lo tanto, es posible afirmar que el conjunto completo de vínculos que posee la teoría son:

$$\begin{aligned}\Phi_{1a} =& \Pi_a^0 \approx 0 \\ \Theta_{\sigma a}^1 =& \pi_{\sigma a} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma_{\theta\sigma}^0 \approx 0 \\ \Theta_{\sigma a}^2 =& \bar{\pi}_{\sigma a} + \frac{i}{2}\gamma_{\sigma\alpha}^0\psi_{\alpha a}(x) \approx 0 \\ \varphi_{2a} =& \partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma_{\theta\sigma}^0 T_{bc}^a \psi_{\sigma c}(x) \approx 0\end{aligned} \tag{5.32}$$

Para identificar si los vínculos obtenidos son de primera o de segunda clase se evaluan los corchetes entre ellos. Se observa que los únicos corchetes diferentes de cero son los siguientes:

$$
\begin{aligned}
\{\Theta_{1\sigma a}(x), \Theta_{2\beta d}(y)\} =& \{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\upsilon a}(x)\gamma^0_{\upsilon\sigma}, \bar{\pi}_{\beta d}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\psi_{\alpha d}(y)\} \\
=& \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\{\pi_{\sigma a}(x), \psi_{\alpha d}(y)\} + \frac{i}{2}\{\bar{\psi}_{\upsilon a}(x), \bar{\pi}_{\beta d}(y)\}\gamma^0_{\upsilon\sigma} \\
=& \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}(-\delta_{\sigma\alpha}\delta_{ad}\delta^3(x-y)) + \frac{i}{2}(-\delta_{\upsilon\beta}\delta_{ad}\delta^3(x-y))\gamma^0_{\upsilon\sigma} \\
=& -\frac{i}{2}\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y) \\
=& -i\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{5.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\varphi_{2a}(x), \Theta_{1\beta d}(y)\} =& \{\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \pi_{\beta d}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\alpha d}(y)\gamma^0_{\alpha\beta}\} \\
=& -g\{\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \pi_{\beta d}(y)\} \\
=& -g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\{\psi_{\sigma c}(x), \pi_{\beta d}(y)\} \\
=& -g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}(-\delta_{\sigma\beta}\delta_{cd}\delta^3(x-y)) \\
=& g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{5.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\varphi_{2a}(x), \Theta_{2\beta d}(y)\} =& \{\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \bar{\pi}_{\beta d}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\psi_{\alpha d}(y)\} \\
=& g\{\bar{\psi}_{\theta b}(x), \bar{\pi}_{\beta d}(y)\}\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
=& g(-\delta_{\theta\beta}\delta_{bd}\delta^3(x-y))\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
=& -g\gamma^0_{\beta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x)\delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{5.35}
$$

Ya que el vínculo Φ_{1a} tiene corchete de Poisson igual a cero con todos los vínculo se afirma que dicho vínculo es de primera clase. Por otro lado, los vínculos φ_{2a}, $\Theta_{1\sigma a}$, y $\Theta_{2\sigma a}$ son de segunda clase, sin embargo al evaluar el límite $g \to 0$, φ_2 se convierte en el vínculo (3.28) obtenido para el campo de Yang-Mills libre, y los corchetes de Poisson $\{\varphi_{2a}(x), \Theta_{2\beta d}(y)\}$ y $\{\varphi_{2a}(x), \Theta_{1\beta d}(y)\}$ serán iguales a cero. Si φ_{2a} perteneciera al conjunto de vínculos de segunda clase no seria posible efectuar el limite $g \to 0$. Entonces, debe existir una combinación de los vínculos $\varphi_{2a}(x)$, $\Theta^1_{\sigma a}$, y $\Theta^2_{\sigma a}$ e independiente de Φ_{1a} que es de primera clase, dicha combinación puede ser escrita de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\Phi_{2a}(x) =&\varphi_{2a} - ig(\Theta_{1\beta b}T^a_{bc}\psi_{\beta c} + \bar{\psi}_{\beta b}T^a_{bc}\Theta_{2\beta c}) \\
=&\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
&- ig((\pi_{\beta b}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\alpha b}(x)\gamma^0_{\alpha\beta})T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) + \bar{\psi}_{\beta b}(x)T^a_{bc}(\bar{\pi}_{\beta c}(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\psi_{\alpha c}(x))) \\
=&\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
&-ig(\pi_{\beta b}(x)T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) + \bar{\psi}_{\beta b}(x)T^a_{bc}\bar{\psi}_{\beta c}(x)) - ig(\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\alpha b}(x)\gamma^0_{\alpha\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta b}(x)\gamma^0_{\beta\alpha}T^a_{bc}\psi_{\alpha c}(x)) \\
=&\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
&- ig(\pi_{\beta b}(x)T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) + \bar{\psi}_{\beta b}(x)T^a_{bc}\bar{\pi}_{\beta c}(x)) + g\bar{\psi}_{\alpha b}(x)\gamma^0_{\alpha\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) \\
=&\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - ig(\pi_{\beta b}(x)T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) + \bar{\psi}_{\beta b}(x)T^a_{bc}\bar{\pi}_{\beta c}(x)) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{5.36}
$$

Con el fin de corroborar que nuestra propuesta es correcta, se demuestra que éste vínculo tiene corchete de Poisson nulo con los vínculos calculados:

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_{2a}(x), \Theta^1_{\beta d}(y)\} =&\{\partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - ig(\pi_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) + \bar{\psi}_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\bar{\pi}_{\sigma c}(x)), \pi_{\beta d}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\alpha d}(y)\gamma^0_{\alpha\beta}\} \\
=& - ig\pi_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\{\psi_{\sigma c}(x), \pi_{\beta d}(y)\} + \frac{1}{2}g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\{\bar{\pi}_{\sigma c}(x), \bar{\psi}_{\alpha d}(y)\}\gamma^0_{\alpha\beta} \\
=& - ig\pi_{\sigma b}(x)T^a_{bc}(-\delta_{\sigma\beta}\delta_{cd}\delta^3(x-y)) + \frac{1}{2}g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\gamma^0_{\alpha\beta}(-\delta_{\sigma\alpha}\delta_{cd}\delta^3(x-y)) \\
=&ig\pi_{\beta b}(x)T^a_{bd}\delta^3(x-y) - \frac{1}{2}g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)T^a_{bd}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta^3(x-y) \\
=&ig(\pi_{\beta b}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta})T^a_{bd}\delta^3(x-y) \\
=&ig(\Theta^1_{\beta b})T^a_{bd}\delta^3(x-y) \approx 0
\end{aligned}
\tag{5.37}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Phi_{2a}(x),\Theta^2_{\beta d}(y)\} =&\{\partial^x_i\Pi^i_a(x)+g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x)-ig(\pi_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x)+\bar{\psi}_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\bar{\pi}_{\sigma c}(x)),\bar{\pi}_{\beta d}(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\psi_{\alpha d}(y)\}\\
=&g\frac{1}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\{\pi_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x),\psi_{\alpha d}(y)\}-ig\{\bar{\psi}_{\sigma b}(x)T^a_{bc}\bar{\pi}_{\sigma c}(x),\bar{\pi}_{\beta d}(y)\}\\
=&-\frac{1}{2}g\gamma^0_{\beta\alpha}\{\pi_{\sigma b}(x),\psi_{\alpha d}(y)\}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x)+ig\{\bar{\psi}_{\sigma b}(x),\bar{\pi}_{\beta d}(y)\}T^a_{bc}\bar{\pi}_{\sigma c}(x)\\
=&-\frac{1}{2}g\gamma^0_{\beta\alpha}(-\delta_{\sigma\alpha}\delta_{bd}\delta^3(x-y))T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x)+ig(-\delta_{\sigma\beta}\delta_{bd}\delta^3(x-y))T^a_{bc}\bar{\pi}_{\sigma c}(x)\\
=&\frac{1}{2}g\gamma^0_{\beta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x)\delta^3(x-y)-igT^a_{dc}\bar{\pi}_{\beta c}(x)\delta^3(x-y)\\
=&-igT^a_{dc}(\bar{\pi}_{\beta c}(x)+\frac{i}{2}g\gamma^0_{\beta\sigma}\psi_{\sigma c}(x))\delta^3(x-y)\\
=&-igT^a_{dc}(\Theta^1_{\beta c})\delta^3(x-y)\approx 0.
\end{aligned}
\tag{5.38}
$$

Por último (véase **Apéndice V**):

$$
\{\Phi_{2a}(x),\Phi_{2a}(y)\}=0. \tag{5.39}
$$

Finalmente, se confirma que Φ_{1a}, Φ_{2a} son vínculos de primera clase y $\Theta^1_{\sigma a}$, $\Theta^2_{\sigma a}$ son vínculos de segunda clase. Por otro lado, ya que el Hamiltoniano primario solo considera a los generadores primarios de transformaciones de gauge es necesario extender el resultado obtenido y añadirle los generadores secundarios. Entonces, la evolución temporal de una variable dinámica $F(\mathbf{x},t)\equiv F(A_{\mu a},\psi_{\sigma a},\bar{\psi}_{\sigma a},\Pi^\mu_a,\pi_{\sigma a},\bar{\pi}_{\sigma a})$ estará dada por:

$$
\begin{aligned}
\dot{F}\approx&\{F(x),H_E\}\\
=&\{F(x),H_c\}+\int d^3y\{F(x),\lambda_{1a}(y)\Phi_{1a}(y)\}+\int d^3y\{F(x),\lambda_{2a}(y)\Phi_{2a}(y)\}\\
&+\int d^3y\{F(x),\bar{\vartheta}_a(y)\Theta^2_a(y)\}+\int d^3y\{F(x),\Theta^1_a(y)\vartheta_a(y))\}
\end{aligned}
\tag{5.40}
$$

Donde el Hamiltoniano extendido es escrito de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
H_E\equiv&H_p+\int d^3x\lambda_{2a}\Phi_{2a}\\
=&\int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x)+\Pi^i_a(x)\partial_iA_{0a}(x)-g\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x)\Pi^i_a(x)+\frac{1}{4}F^{ki}_a(x)F_{kia}(x))\\
&+\int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i\partial_i+g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(x)+m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(x)\\
&+\int d^3x(\lambda_{1a}(x)\Phi_{1a}(x)+\lambda_{2a}\Phi_{2a}+\bar{\vartheta}_{\sigma a}(x)\Theta^2_{\sigma a}(x)+\Theta^1_{\sigma a}(x)\vartheta_{\sigma a}(x)).
\end{aligned}
\tag{5.41}
$$

Cabe resaltar que por ahora los multiplicadores de Lagrange λ_i $(i=1,2)$ no han sido fijados, por lo tanto la evolución temporal de una variable dinámica no puede ser definida de manera única.

5.3. Vínculos de Segunda Clase

Procedemos a eliminar el conjunto de vínculos de segunda clase de la teoría:

$$\Theta^1_{\sigma a} = \pi_{\sigma a} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma} \approx 0 \tag{5.42}$$

$$\Theta^2_{\sigma a} = \bar{\pi}_{\sigma a} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x) \approx 0, \tag{5.43}$$

para ello se contruye la matriz de vínculos que tiene por componenentes $C^{ij}_{\sigma\beta ab} = \{\Theta^i_{\sigma a}, \Theta^j_{\beta b}\}$ $(i,j=1,2)$ y se encuentra que puede ser expresada de la siguiente forma (véase **Apéndice U**):

$$C_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ab}\delta^3(x-y). \tag{5.44}$$

Su matriz inversa se puede escribir como siendo (véase **Apéndice U**):

$$C^{-1}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i(\gamma^0)^T & 0 \end{pmatrix} \delta_{ab}\delta(x-y). \tag{5.45}$$

A partir de $C^{-1}_{ab}(x,y)$ es posible suprimir a los vínculos $\Theta^1_{\sigma a}$ y $\Theta^2_{\sigma a}$ bajo la introducción del primer conjunto de corchetes de Dirac a tiempos iguales, que para dos variables dinamicas $A(x)$ y $B(x)$ definidas en el espacio de fase dado por $(A_{\mu a}, \psi_{\sigma a}, \bar{\psi}_{\sigma a}, \Pi^{\mu a}, \pi_{\sigma a}, \bar{\pi}_{\sigma a})$ se pueden escribir como siendo:

$$\{A(x,t),B(y,t)\}_D' = \{A(x),B(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{A(x),\Theta^i_{\sigma b}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\sigma\beta cd}(u,v)\{\Theta^j_{\beta c}(v),B(y)\}. \tag{5.46}$$

La expresion anterior hace posible imponer la condición $\Theta^i_{\sigma a} = 0$ con $i = 1, 2$, por lo tanto ahora se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} \Theta^1_{\sigma a} =& \pi_{\sigma a} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma} = 0 \\ \Theta^2_{\sigma a} =& \bar{\pi}_{\sigma a} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x) = 0, \end{aligned} \tag{5.47}$$

donde se hace evidente que los momentos canónicos $\pi_{\sigma a}$ y $\bar{\pi}_{\sigma a}$ dependen de los campos fermiónicos $\bar{\psi}_{\sigma a}$ y $\psi_{\sigma a}$ respectivamente. Por lo tanto, se escoge como un conjunto parcial de grados de libertad a $(A_\mu, \psi_{\sigma a}, \bar{\psi}_{\sigma a}, \Pi^\mu)$ y se procede a calcular un primer conjunto de corchetes de Dirac entre dichos campos. Se procede a mostrar que los únicos corchetes de Dirac diferentes de cero son (véase **Apéndice V**):

$$\begin{aligned} \{\psi_{\sigma a}(x,t),\bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D' =& -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \\ \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),\psi_{\beta b}(y,t)\}_D' =& -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \\ \{A_{\mu a}(x,t),\Pi^v_b(y,t)\}_D' =& \delta_{ab}\delta^v_\mu\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{5.48}$$

5.4. Gauge de Axial

A continuación, con el fin de identificar los grados de libertad asociados a los campos bosónicos, se implementan condiciones de *gauge*, de manera que los vínculos Φ_1 y Φ_2 pasen a ser de segunda clase y sea posible definir los corchetes de Dirac entre las variables independientes escogidas. Además, las condiciones de gauge permiten fijar el valor de λ_1 y λ_2 de manera que la evolución temporal de una variable dinámica pueda ser determinada de manera única. Así, se impondrá como condiciones de gauge, el gauge axial definido por:

$$A_{3a}(x,t) \approx 0 \tag{5.49}$$

$$\Pi^3_a(x,t) + \partial_3 A_{0a}(x,t) \approx 0. \tag{5.50}$$

Por lo tanto, el conjunto de vínculos a considerar es el que se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
\phi_{1a} =& \Pi^0_a \approx 0 \\
\phi_{2a} =& \partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) \approx 0 \\
\phi_{3a} =& A_{3a}(x,t) \approx 0 \\
\phi_{4a} =& \Pi^3_a(x,t) + \partial_3 A_{0a}(x,t) \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Donde el vínculo ϕ_{2a} fue reescrito usando las expresiones (5.47). Por último, se procede a construir la matriz de vínculos asociada a los vínculos (5.38) utilizando para ello los corchetes de Dirac (5.48). Esta matriz se definirá por los siguientes elementos $C^{ij}_{ab} = \{\phi_{ia}, \phi_{jb}\}'_D$. Y se representa como (véase **Apéndice W**):

$$C^{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{ab}\partial^x_3 \\ 0 & 0 & -\delta_{ab}\partial^x_3 & -g\varepsilon_{abc}\Pi^3_c(x,t)\delta_{cd} \\ 0 & -\delta_{ab}\partial^x_3 & 0 & \delta_{ab} \\ \delta_{ab}\partial^x_3 & -g\varepsilon_{abc}\Pi^3_c(x) & -\delta_{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y). \tag{5.52}$$

Posteriormente se calcula la matriz $C^{ab-1}(x,y)$ y es dada por:

$$C^{ab-1}(x,y) = \begin{pmatrix} I_{ab}(x,y) & -\delta_{ab}G(x,y) & H_{ab}(x,y) & \delta_{ab}F(x,y) \\ \delta_{ab}G(x,y) & 0 & -\delta_{ab}F(x,y) & 0 \\ H_{ab}(x,y) & -\delta_{ab}F(x,y) & 0 & 0 \\ \delta_{ab}F(x,y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.53}$$

Las funciones $I_{ab}(x,y), G(x,y), H_{ab}(x,y), F(x,y)$ tienen la forma:

$$\begin{aligned} G(x,y) &= \frac{1}{2}|x^3 - y^3|\delta^2(x-y) \\ F(x,y) &= \frac{1}{2}\varepsilon(x^3 - y^3)\delta^2(x-y) \\ H_{ab}(x,y) &= \partial_3^x I_{ab}(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)G(x,y) \\ I_{ab}(x,y) &= \frac{1}{4}g\varepsilon_{abc}\delta^2(x-y)\int d\xi|x^3 - \xi||\xi - y^3|\frac{\partial\Pi_c^3(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial\xi}, \end{aligned} \tag{5.54}$$

donde $\varepsilon(x-y)$ representa el signo algebraico de $(x-y)$. Adicionalmente, las funciones anteriores cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} & F(x,y) = \partial_3^x G(x,y) \\ & \partial_3^x F(x,y) = \partial_3^x\partial_3^x G(x,y) = \delta^3(x-y) \\ & \partial_3^x H_{ab}(x,y) + g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)F(x,y) = 0 \\ & \partial_3^x I_{ab}(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)G(x,y) - H_{ab}(x,y) = 0. \end{aligned} \tag{5.55}$$

Se defінden los corchetes de Dirac a tiempos iguales entre dos variables dinámicas $A[A_{\mu a}, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^{\mu a}]$ y $B[A_{\mu a}, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^{\mu a}]$ como siendo:

$$\{A_a(x), B_b(y)\}_D = \{A_a(x), B_b(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{A_a(x), \phi_{id}(u)\}'_D C^{-1de}_{ij}(u,v)\{\phi_{je}(v), B_b(y)\}'_D \tag{5.56}$$

Donde $(i, j = 1, 2, 3, 4)$. La expresión anterior permite considerar a los vínculos como identidades, es decir:

$$\begin{aligned}
\phi_{1a}(x) =& \Pi^0_a(x) = 0 \\
\phi_{2a}(x) =& \partial^x_i \Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) = 0 \\
\phi_{3a}(x) =& A_{3a}(x) = 0 \\
\phi_{4a}(x) =& \Pi^3_a(x) + \partial_3 A_{0a}(x) = 0.
\end{aligned} \tag{5.57}$$

De las relaciones anteriores es posible concluir que $\Pi^0_a(x) = A_{3a}(x) = 0$. Adicionalmente, las condiciónes ϕ_{2a} y ϕ_{4a} pueden ser resueltas de manera que las variables $\Pi^3_a(x)$, $A_{0a}(x)$ sean funcionales de A_1, A_2, Π^1, Π^2. Por lo tanto, se escoge como grados de libertad a los campos $(A_{ia}, \Pi^{ja}, \psi_a, \bar{\psi}_a)$ donde i,j=1,2. Entonces, los corchetes de Dirac fundamentales diferentes de cero para las variables independienes despues de implementar el gauge Axial, se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\{A_{ia}(x,t), \Pi^j_b(y,t)\}_D =& \delta^j_i \delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{\Pi^i_a(x,t), A_{jb}(y,t)\}_D =& -\delta^i_j \delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{A_{ia}(x,t), A_{0b}(y,t)\}_D =& -\delta_{ab}\partial^x_i G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)G(x,y) \\
\{\Pi^i_a(x,t), A_{0b}(y,t)\}_D =& -g\varepsilon_{abc}\Pi^i_c(x)\delta^3(x-u)G(x,y) \\
\{\psi_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D =& -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \\
\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}_D =& -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{5.58}$$

5.4.1. Ecuaciones de Movimiento

Con los corchetes de Dirac definidos y teniendo en cuenta que ahora se cumple la condición $\phi_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ se procede a reescribir el Hamiltoniano en términos de las variables independientes, entonces (véase **Apéndice X**):

$$\begin{aligned} H = &\int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^1(x)\Pi_a^1(x) + \frac{1}{2}\Pi_a^2(x)\Pi_a^2(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{0a}(x)\partial_3 A_{0a}(x)) \\ &+ \int d^3x(\frac{1}{2}\partial_3 A_{1a}(x)\partial_3 A_{1a}(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{2a}(x)\partial_3 A_{2a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F_a^{12}(x))) \\ &+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^i T^d_{bc}A_{id}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(x). \end{aligned} \tag{5.59}$$

Por lo tanto, la evolución temporal de una variable dinámica F(x) definida en el espacio de fase dado por $(A_i, \Pi^j, \psi_a, \bar{\psi_a})$ (i,j=1,2), puede ser determinada a partir de:

$$\dot{F}(\mathbf{x}, t) = \{F(x), H\}_D. \tag{5.60}$$

Entonces, para los grados de libertad asociados a los campos bosónicos A_i y Π^i, se tiene que las ecuaciones de movimiento se pueden expresar como siendo (véase **Apéndice X**):

$$\dot{A}_{ia}(x,t) = \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x A_{0a}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x) \tag{5.61}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_a^1(x) =& \partial_3^x\partial_3^x A_{1a}(x) - \partial_2^x F_a^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}(A_{2b}(x)F_c^{12}(x) + A_{0b}(x)\Pi_c^1(x)) \\ &- \bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \end{aligned} \tag{5.62}$$

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_a^2(x) =& \partial_3^x\partial_3^x A_{2b}(x) + \partial_1^x F_b^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}(A_{1b}(x)F_c^{21}(y) + A_{0b}(x)\Pi_c^2(x)) \\ &- \bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \end{aligned} \tag{5.63}$$

Reemplazando la expresión obtenida para el momento canónico:

$$\Pi^i_a(y) = \partial^i A^0_a(x) - \partial^0 A^i_a(x) - g\varepsilon_{acb}A^1_c(x)A_{0b}(x) = F^{i0}_a(x), \tag{5.64}$$

en los resultados anteriores se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{10}_a(x) &= \partial^x_3\partial^x_3 A_{1a}(x) - \partial^x_2 F^{12}_a(x) + g\varepsilon_{abc}A_{2b}(x)F^{12}_c(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)F^{10}_c(x) \\
&- \bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) &= \partial^x_3\partial^x_3 A_{1a}(x) - \partial^x_2 F^{12}_a(x) - \partial_0 F^{10}_a(x) \\
&+ g\varepsilon_{abc}A_{2b}(x)F^{12}_c(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)F^{10}_c(x)
\end{aligned} \tag{5.65}$$

$$\begin{aligned}
\partial_0 F^{20}_a(x) &= \partial^x_3\partial^x_3 A_{2b}(x) + \partial^x_1 F^{12}_b(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)\Pi^2_c(x) + g\varepsilon_{abc}A_{1b}(x)F^{21}_c(x) \\
&- \bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x)\delta_{ad} \\
g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) &= \partial^x_3\partial^x_3 A_{2b}(x) - \partial_0 F^{20}_a(x) - \partial^x_1 F^{21}_b(x) \\
&+ g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)F^{20}_c(x) + g\varepsilon_{abc}A_{1b}(x)F^{21}_c(x).
\end{aligned} \tag{5.66}$$

De manera similar, se procede a calcular las ecuaciones de movimiento para los campos fermiónicos, las cuales se pueden escribir de la siguiente manera (véase **Apéndice X**):

$$\dot{\psi}_{\sigma a}(x) = -ig(\psi_g(x)T^b_{ag}A_{0b}(x))_\sigma - i(\gamma^0(-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^i T^e_{ad}A_{ie}(x) + m)\psi_d(x))_\sigma. \tag{5.67}$$

Multiplicando a $i\gamma^0$ por el lado izquierdo en la expresion anterior y teniendo en cuenta que $\gamma^0\gamma^0 = I$, se determina:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x) =& i\gamma^0\partial_0\psi_a(x) = -g\gamma^0\psi_g(x)T^b_{ag}A_{0b}(x) + (-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^iT^e_{ad}A_{ie}(x) + m)\psi_d(x) \\
=& g\gamma^0\psi_g(x)T^b_{ag}A_{0b}(x) - i\gamma^0\partial_0 I_{ad}\psi_d(x) + (-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^iT^e_{ad}A_{ie}(x) + m)\psi_d(x) \\
=& g\gamma^0\psi_g(x)T^b_{ag}A_{0b}(x) + (-i\gamma^0\partial_0 - i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^iT^e_{ad}A_{ie}(x) + m)\psi_d(x) \\
=& gA_{0b}(x)T^b_{ag}\gamma^0\psi_g(x) + (-i\gamma^\mu\partial^x_\mu + g\gamma^iT^e_{ad}A_{ie}(x) + m)\psi_d(x) \\
0 =& (-i\gamma^\mu\partial^x_\mu + g\gamma^0T^b_{ad}A_{0b}(x) + g\gamma^1T^e_{ad}A_{1e}(x) + g\gamma^2T^e_{ad}A_{2e}(x) + m)\psi_d(x).
\end{aligned} \tag{5.68}$$

Por último, se calcula la ecuacion de movimiento para el campo $\bar{\psi}_a$:

$$\dot{\bar{\psi}}_{\sigma a}(x) = ig(\bar{\psi}_c(x)T^b_{ca}A_{0b}(x))_\sigma + i(\bar{\psi}_c(x)(i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^iT^e_{ca}A_{ie}(x) + m)\gamma^0)_\sigma. \tag{5.69}$$

Multiplicando por la derecha a $i\gamma^0$ se obtiene el siguiente resultado:

$$\partial_0\bar{\psi}_a(x)i\gamma^0 = -g\bar{\psi}_c(x)\gamma^0T^b_{ca}A_{0b}(x) - \bar{\psi}_c(x)(i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^iT^e_{ca}A_{ie}(x) + m) \tag{5.70}$$

$$0 = \bar{\psi}_c(x)(i\gamma^0\overleftarrow{\partial}_0 + i\gamma^i\overleftarrow{\partial}^x_i + g\gamma^0T^e_{ca}A_{0e}(x) + g\gamma^iT^e_{ca}A_{ie}(x) + m) \tag{5.71}$$

$$0 = \bar{\psi}_c(x)(i\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}^x_\mu + g\gamma^0T^e_{ca}A_{0e}(x) + g\gamma^1T^e_{ca}A_{1e}(x) + g\gamma^2T^e_{ca}A_{2e}(x) + m). \tag{5.72}$$

Las relaciones (5.65), (5.66), (5.68) y (5.72) representan las ecuaciones de movimiento de la teoría de Yang-Mills en interacción con un campo fermiónico para los campos escogidos como grados de libertad despues de haber implementado el gauge Axial.

Conclusiones

Al estudiar la estructura canónica de las teorías de gauge abeliana y no abeliana para el caso libre y en interacción con un campo fermiónico, se determinaron las ecuaciones de movimiento respectivas. Las ecuaciones de movimiento encontradas permiten obtener la evolución de los estados fisicos del sistema. En el caso abeliano sin interacción, se encontró que las ecuaciones de movimiento asociadas son dos de las ecuaciones de Maxwell en el vacío. Las dos ecuaciones de Maxwell restantes, se pueden establecer a partir de las identidades de Bianchi, las cuales son una consecuencia de la invarianza de gauge local que posee el sistema.

Debido a la naturaleza singular de los sistemas considerados para el desarrollo de este trabajo, se destaca la presencia de vínculos, por lo tanto, fue necesario implementar el método de Dirac de manera que se pudo establecer el conjunto mínimo de grados de libertad. Ya que en las teorías de gauge estudiadas, los vínculos encontrados se indentificaron como de primera clase, fue necesario introducir condiciones de gauge para determinar únicamente los estados físicos y eliminar los vínculos mediante la implementación de lo corchetes de Dirac.

Considerando una densidad Lagrangiana que resulta invariante al aplicarle transformaciones de gauge no abelianas, se observó, que a diferencia del sistema considerado en el capítulo 2, presenta un término del cual es posible concluir que el campo de Yang-Mills interactua consigo mismo.

Aunque los corchetes de Dirac, asi como las ecuaciones de movimiento dependan de la escogencia de las condiciones de gauge, dichas ecuaciones de movimiento representan los mismos estados fisicos. La implementación de el gauge axial en las teorias Electromagnética y de Yang-Mills cuando interactuan con un campo fermiónico, permite resaltar que el resultado obtenido al calcular los corchetes de Dirac fue igual a los corchetes de Dirac encontrados para las teorías libres.

Ya que el principal postulado de las teorias de gauge es que las cantidades físicas observables deben ser invariantes de gauge, el estudio de las mismas resulta de suma importancia en la comprensión de las interacciónes fundamentales.

Bibliografía

[1] Bassetto, Antonio, Giancarlo Nardelli, and Roberto Soldati. Yang-Mills theories in algebraic non-covariant gauges: canonical quantization and renormalization. World Scientific, (1991).

[2] C.N Yang and R. L. Mills, Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance, Phys. Rev, pag. 191-195, 96 (1954).

[3] Weinberg, Steven. The quantum theory of fields. Vol. 2. Cambridge university press, pag.1-7, (1995).

[4] G. tHooft,The Renomalization Procedure for Yang-Mills Fields, Ph.D Thesis, Utrecht University (1972).

[5] ES Abers, and Benjamin W Lee,Gauge theories, Physics Reports 9.1 pag. 1-2, (1973).

[6] A. Salam, Weak and electromagnetic interactions, in Svartholm, Elementari Particle Theory, Proceedings of the Nobel Symposium held in 1968 at Lerum, Sweden, Stockholm, pag. 366-377, (1968).

[7] S. Weinberg, A model of Leptons, Phys. Rev. Lett. 19, pag. 1264-1266, (1967).

[8] Bjorken, B. J., and Sheldon L. Glashow,Elementary particles and SU (4), Physics Letters 11, pag.255-257, (1964).

[9] Georgi, Howard. Weak interactions and modern particle theory. Dover, (2009).

[10] Commins, Eugene D., and Philip H. Bucksbaum. Weak interactions of leptons and quarks. cambridge university press, (1983).

[11] Bailin, D. Bristol, Weak interactions , Graduate Student Series In Physics,Uk: Hilger , (1982).

[12] Quigg, Chris. Gauge theories of the strong, weak, and electromagnetic interactions. Princeton University Press, (2013).

[13] Gross, David J, and Frank Wilczek,Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories, Physical Review Letters 30.26 pag. 1343, (1973).

[14] Marciano, William, and Heinz Pagels,Quantum chromodynamics, Physics Reports 36.3;137-276, (1978).

[15] Dirac, Paul Adrien Maurice. ”Generalized hamiltonian dynamics.Çanadian journal of mathematics 2 pag.129-148, (1950).

[16] Dirac, Paul Adrien Maurice. ”Generalized hamiltonian dynamics.”Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences 246.1246, pag.326-332, (1958).

[17] Hanson, Andrew, Tullio Regge, and Claudio Teitelboim. Constrained hamiltonian systems. Accademia Nazionale dei Lincei , pag. 7-16;73-80;89-98, (1976).

[18] Dirac, Paul AM,Lectures on Quantum Mechanics, Belfer Graduate School of Science-Yeshiva University, New York (1964).

[19] Ryder, Lewis H. Quantum field theory. Cambridge university press, pag.105-112;155, (1996).

[20] Sundermeyer, Kurt,Constrained dynamics with applications to Yang-Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model”, pag. 123-128;153-159;161-168;290, (1982).

[21] Peskin, Michael E. An introduction to quantum field theory. CRC Press, (2018).

[22] Landau, Lev Davidovich, ed. The classical theory of fields. Vol. 2. Elsevier, (2013).

[23] H. Weyl, Gravitation und Elektrizitat.Sitzungsber. Akademie der Wissenschaften Berlin, Siehe auch die Gesammelten Abhandlungen. 6 Vols. Ed. K. Chadrasekharan, Springer-Verlag pag. 465-480, (1918).

[24] Pauli, Wolfgang. General principles of quantum mechanics. Springer Science y Business Media, (1980).

[25] Wu, Tai Tsun, and Chen Ning Yang,Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields, Physical Review D 12.12 (1975)

[26] Fock, Vladimir,On the invariant form of the wave equation and the equations of motion for a charged point mass, Z.Phys, 39; pag. 226-232, (1926).

[27] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder. I. Zeitschrift fur Physik, 56, pag.1- 61, (1929).

[28] W. Heisenberg and W. Pauli. Zur Quantenelektrodynamik der Wellenfelder. II. Zeitschrift fur Physik, 59, pag.168- 190, (1930).

[29] Rubakov, Valery. Classical theory of gauge fields. Princeton University Press;pag.3-5;33-53, (2009).

[30] Klein, Oskar,On the theory of charged fields, Surveys in High Energy Physics 5.pag.3;269-285, (1986).

[31] Cheng, T.P, and Ling-Fong Li, Resource Letter: GI-1 Gauge invariance, American Journal of Physics 56.7, pag.586-600, (1988).

[32] Pais, Abraham, Inward bound: of matter and forces in the physical world, (1986).

[33] Salam, Abdus, Gauge unification of fundamental forces, Selected Papers Of Abdus Salam: (With Commentary). pag. 306-326, (1994).

[34] Aitchison, I. J. R., and A. J. G. Hey, Gauge theories in particle physics. Adam Hilger, pag.327 , (1989).

[35] Barut, Asim Orhan, Electrodynamics and classical theory of fields and particles. Courier Corporation, (1964).

[36] Goldstein, Herbert, Classical mechanics. Pearson Education India; pag.34-36, (2011).

[37] Marsden, Jerrold E., and Tudor S. Ratiu, Introduction to mechanics and symmetry, Physics Today; pag.2-6, (1995).

[38] Rothe, Heinz J., and Klaus Dieter Rothe, Classical and quantum dynamics of constrained Hamiltonian systems. Vol. 81. World Scientific; pag.6-7,(2010).

[39] Faddeev, L. D., and A. A. Slavnov,Gauge fields Introduction to quantum theory, (1980).

[40] Arfken, George B., and Hans J. Weber,Mathematical methods for physicists,pag.170,(1999).

[41] Henneaux, Marc, and Claudio Teitelboim. Quantization of gauge systems. Princeton university press, pag.3-34, (1994).

[42] Das, Ashok. Lectures on quantum field theory. World Scientific, pag.327-339;379-407;485-502, (2008).

[43] Burgess, Mark. Classical covariant fields. Cambridge University Press, pag.54-55, (2002).

[44] Ashok, Das, and Okubo Susumu. Lie groups and Lie algebras for physicists. World Scientific, pag.209, (2014).

[45] Lechner, Kurt. Classical Electrodynamics. Springer, Cham, pag.27-84, (2018)

[46] de Wit, Bernard. Introduction to gauge theories and the Standard Model. CERN-VIDEO-C-221-E, (1995).

Apéndices

1. Apéndice A: Notacion Utilizada

En este apéndice se explicará la notación usada para el desarrollo del trabajo.El cuadri-vector contravariante se puede escribir como:

$$x^{\mu} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, \mathbf{X}), \tag{73}$$

y la métria de Minkowski en (3+1) dimensiones viene dada por:

$$\eta^{\mu\upsilon} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Haciendo uso de la métrica de Minkowski se puede representar a un cuadrivector covariante como:

$$x_{\mu} = \eta_{\mu\upsilon} x^{\upsilon} = (x_0, -x_1, -x_2, -x_3) = (t, -\mathbf{x}), \tag{75}$$

tambien, el producto entre dos cuadrivectores arbitrarios será:

$$xp \equiv x_{\mu} p^{\mu} = \eta_{\mu\upsilon} x^{\upsilon} p^{\mu} = x^0 p^0 - x^1 p^1 - x^2 p^2 - x^3 p^3 = x^0 p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}. \tag{76}$$

Finalmente, el operador diferencial gradiente se puede escribir como:

$$\partial_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} = (\frac{\partial}{\partial t}, \nabla), \text{ y } \partial^{\mu} = \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} = (\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla) \tag{77}$$

2. Apéndice B: Demostracion de la Ecuación (2.19)

Demostración de la relacion (2.19):

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)} &= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}[F^{\theta\sigma}(x)F_{\theta\sigma}(x)] \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\sigma}F_{\alpha\beta}(x))F_{\theta\sigma}(x) - \frac{1}{4}F^{\theta\sigma}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(F_{\theta\sigma}(x)) \\
&= -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(F_{\alpha\beta}(x))F^{\alpha\beta}(x) - \frac{1}{4}F^{\theta\sigma}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(F_{\theta\sigma}(x)) \\
&= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(F_{\alpha\beta}(x)) \\
&= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(\partial_\alpha A_\beta(x)) - \partial_\beta A_\alpha(x)) \\
&= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(\partial_\alpha A_\beta(x)) + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(\partial_\beta A_\alpha(x)) \\
&= -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\delta^\alpha_\upsilon\delta^\beta_\mu + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\delta^\beta_\upsilon\delta^\alpha_\mu \\
&= -\frac{1}{2}F^{\upsilon\mu}(x) + \frac{1}{2}F^{\mu\upsilon}(x).
\end{aligned}
\tag{78}
$$

entonces:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)} = F^{\mu\upsilon}(x) \tag{79}
$$

3. Apéndice C: Demostración de las Expresiones (2.33),(2.41), (2.44) y las Ecuaciones de Movimiento a Partir del Hamiltoniano Extendido.

3.1. Demostración de la Relación (2.33)

Considerando:

$$\Pi^i(x) = \partial_0 A_i(x) - \partial_i A_0(x) = -F^{0i}(x) \tag{80}$$

Se tiene que :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &\equiv \Pi^\mu \partial_0 A_\mu(x) - \mathcal{L}(x) \\
&= \Pi^i \partial_0 A_i(x) + \frac{1}{4}F^{0k}(x)F_{0k}(x) + \frac{1}{4}F^{k0}(x)F_{k0}(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) \\
&= \Pi^i(x)(\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)) - \frac{1}{4}\Pi^k(x)\Pi^k(x) - \frac{1}{4}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) \\
&= \Pi^i(x)\Pi^i(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) - \frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x).
\end{aligned} \tag{81}$$

Finalmente, se demuestra (2.33):

$$\mathcal{H}_c = \frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) \tag{82}$$

3.2. Demostración Ecuaciones (2.41) y (2.44)

Sea $\phi_1 = \Pi^0(x) \approx 0$, su condición de consistencia estará dada por :

$$\dot{\phi}_1 = \{\phi_1, H_p\} \approx 0, \tag{83}$$

con H_p dado por la relación (2.35). Entonces, se demuestra (2.41) :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= \int d^3y\{\Pi^0(x),(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y)+\Pi^i(y)\partial_i^y A_o(y)+\frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y)+\lambda_1(y)\Pi^0(y))\} \\
&\approx \int d^3y(\Pi^i(y)\{\Pi^0(x),\partial_i^y A_o(y)\} \\
&\approx \int d^3y(\Pi^i(y)\partial_i^y\{\Pi^0(x),A_o(y)\} \\
&\approx \int d^3y\Pi^i(y)\partial_i^y(-\delta(x-y)) \\
&= \partial_i^x\int d^3y\Pi^i(y)\delta(x-y) \\
&= \partial_i^x\Pi^i(x)\approx 0,
\end{aligned} \tag{84}$$

Y dado que se obtiene un vínculo secundario se deben implementar igualmente condiciones de consistencia:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2 =&\{\phi_2,H_p\} = \int d^3y\{\partial_i^x\Pi^i(x),(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y)+\Pi^i(y)\partial_i^y A_o(y)+\frac{1}{4}F_{lm}(y)F^{lm}(y)+\lambda_1(y)\Pi^0(y))\} \\
=&\int d^3y\frac{1}{4}\{\partial_i^x\Pi^i(x),F_{lm}(y)F^{lm}(y)\} \\
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\{\Pi^i(x),\partial_l^y A_m(y)\}-\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\{\Pi^i(x),\partial_m^y A_l(y)\} \\
=&-\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\partial_l^y\delta_m^i\delta(x-y)+\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\partial_m^y\delta_l^i\delta(x-y) \\
=&\frac{1}{2\partial_i^x\partial_l^x\int d^3y}F^{lm}(y)\delta_m^i\delta(x-y)-\frac{1}{2}\partial_i^x\partial_m^x\int d^3yF^{lm}(y)\delta_l^i\delta(x-y) \\
=&\frac{1}{2}\partial_l^x\partial_i^xF^{li}(x)-\frac{1}{2}\partial_i^x\partial_m^xF^{im}(x) \\
=&0
\end{aligned} \tag{85}$$

Demostrando así la expresión (2.44).

3.3. Demostración Ecuaciones de Movimiento de los Campos a Partir del Hamiltoniano Extendido

Dado que la evolución temporal de una variable dinámica $F(\mathbf{x}, t) = F[A_\mu, \Pi^\mu]$, se obtiene a partir de la siguiente expresión:

$$\dot{F} \approx \{F, H_E\}, \tag{86}$$

Donde:

$$H_E = \int d^3x \left[\frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2\right], \tag{87}$$

la evolución temporal del campo A_μ, será

$$\dot{A_\mu} = \int d^3y \{A_\mu, [\frac{1}{2}\Pi^k(y)\Pi^k(y) + \Pi^i(y)\partial_i^y A_0(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y)]\} \tag{88}$$

$$+ \int d^3y \{A_\mu, [+\lambda_1(y)\Pi^0(y) + \lambda_2(y)\partial_i^y \Pi^i(y)]\}. \tag{89}$$

De acuerdo con los corchetes de Poisson considerados inicialmente en (2.36), (2.37) y (2.38), se determina que los únicos términos diferentes de cero, serán:

$$\dot{A_\mu} = \int d^3y \Pi^k(y)\{A_\mu, \Pi^k(y)\} + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)\{A_\mu, \Pi^i(y)\} \tag{90}$$

$$+ \int d^3y \lambda_1(y)\{A_\mu, \Pi^0(y)\} + \int d^3y \lambda_2(y)\{A_\mu, \partial_i^y \Pi^i(y)\}. \tag{91}$$

Ya que la definición de los corchetes de Poisson depende de derivadas funcionales, y las derivadas parciales estan aplicadas a las coordenadas espaciotemporales, se puede considerar lo siguiente:

$$\dot{A_\mu} = \int d^3y \Pi^k(y)\{A_\mu, \Pi^k(y)\} + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)\{A_\mu, \Pi^i(y)\} \tag{92}$$

$$+ \int d^3y \lambda_1(y)\{A_\mu, \Pi^0(y)\} + \int d^3y \lambda_2(y)\partial_i^y\{A_\mu, \Pi^i(y)\} \tag{93}$$

$$= \int d^3y \Pi^k(y)(\delta_\mu^k \delta^3(x-y)) + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)(\delta_\mu^i \delta^3(x-y)) \tag{94}$$

$$+ \int d^3y \lambda_1(y)(\delta_\mu^0 \delta^3(x-y)) + \int d^3y \lambda_2(y)\partial_i^y(\delta_\mu^i \delta^3(x-y)) \tag{95}$$

Si se considera una función $f(x-y)$, y se denomina $u = x - y$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u)}{\partial x} &= \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df(u)}{du} \\ \frac{\partial f(u)}{\partial y} &= \frac{df(u)}{du}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{df(u)}{du}, \end{aligned} \tag{96}$$

por lo tanto:

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x} = -\frac{\partial f(u)}{\partial y}. \tag{97}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \dot{A_\mu} = &\int d^3y \Pi^k(y)(\delta_\mu^k \delta^3(x-y)) + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)(\delta_\mu^i \delta^3(x-y)) \\ &+ \int d^3y \lambda_1(y)(\delta_\mu^0 \delta^3(x-y)) - \int d^3y \lambda_2(y)\partial_i^x(\delta_\mu^i \delta^3(x-y)). \end{aligned} \tag{98}$$

Ya que la integración en el cuarto término es sobre la variable "y", y la derivada parcial actua sobre la variable "x", la derivada puede salir de la integral. Además usando el hecho de que:

$$\int d^3y f(y)\delta^3(x-y) = f(x), \tag{99}$$

se determina finalmente que la evolución temporal del campo A_μ es:

$$\dot{A_\mu} = \Pi^\mu(x) + \delta^i_\mu \partial^x_i A_0(x) + \delta^0_\mu \lambda_1(x) - \delta^i_\mu \partial^x_i \lambda_2(x). \tag{100}$$

Ahora, se procede a calcular la evolución temporal del momento canónico Π^μ. La cual puede ser obtenida a partir de:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi^\mu} = &\int d^3y \{\Pi^\mu, [\frac{1}{2}\Pi^k(y)\Pi^k(y) + \Pi^i(y)\partial^y_i A_0(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y)]\} \\ &+ \int d^3y \{\Pi^\mu, [+\lambda_1(y)\Pi^0(y) + \lambda_2(y)\partial^y_i \Pi^i(y)]\}\end{aligned} \tag{101}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los corchetes de Poisson se determina que:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi^\mu} = &\int d^3y \Pi^i(y)\partial^y_i \{\Pi^\mu, A_0(y)\} + \int d^3y \frac{1}{2}F^{ki}(y)\{\Pi^\mu, \partial^y_k A_i(y) - \partial^y_i A_k(y)\} \\ &+ \int d^3y \lambda_1(y)\{\Pi^\mu, \Pi^0(y)\} + \int d^3y \lambda_2(y)\partial^y_i \{\Pi^\mu, \Pi^i(y)\} \\ = &\int d^3y \Pi^i(y)\partial^y_i(-\delta^\mu_0 \delta^3(x-y)) \\ &+ \int d^3y \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial^y_k(-\delta^\mu_i \delta^3(x-y)) - \int d^3y \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial^y_i(-\delta^\mu_k \delta^3(x-y)).\end{aligned} \tag{102}$$

Como se cumple que $\partial^x_i \delta^3(x-y) = -\partial^y_i \delta^3(x-y)$, y usando la propiedad de la funcion Delta de Dirac, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\dot{\Pi}^{\mu} =&\delta_0^{\mu}\partial_i^x\Pi^i(x) + \frac{1}{2}\delta_i^{\mu}\partial_k^x F^{ki}(x) - \frac{1}{2}\delta_k^{\mu}\partial_i^x F^{ki}(x)\\ =&\delta_0^{\mu}\partial_i^x\Pi^i(x) + \frac{1}{2}\delta_i^{\mu}\partial_k^x F^{ki}(x) + \frac{1}{2}\delta_k^{\mu}\partial_i^x F^{ik}(x)\\ =&\delta_0^{\mu}\partial_i^x\Pi^i(x) + \delta_i^{\mu}\partial_k^x F^{ki}(x)\\ =&\partial_{\mu}^x F^{\mu\nu}(x)\end{aligned} \tag{103}$$

4. Apéndice D: Demostración Ecuaciones (2.54) y (2.55)

Apéndice D: Demostración Ecuaciones (2.54) y (2.55)

4.1. Demostación de las condiciones de consistencia expresadas en (2.54) (2.55)

Las condiciones de consistencia de los vínculos pertenecientes al gauge de radiación se calculan a partir de:

$$\dot{\phi_i} \approx \{\phi_i, H_E\} = \{\phi_i, H_p + \int d^3x\lambda_2\Phi_2\} \approx 0. \tag{104}$$

Entonces, para el vínculo $\phi_3 = A_0(x)$

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_3 = \{\phi_3, H_E\} =&\int d^3y\{A_0(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \Pi^i(y)\partial_i^y A_o(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) + \lambda_1(y)\Pi^0(y) + \lambda_2(y)\partial_i^y\Pi^i(y)\}\\ =&\int d^3y\lambda_1(y)\{A_0(x), \Pi^0(y)\}\\ =&\int d^3y\lambda_1(y)\delta(x-y)\\ =&\lambda_1(x) \approx 0.\end{aligned} \tag{105}$$

Por otro lado se calcula la consistencia de $\phi_4 = \partial_k^x A^k(x)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_4 = \{\phi_4, H_E\} = & \int d^3y\{\partial_k^x A^k(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \Pi^i(y)\partial_i^y A_o(y) + \frac{1}{4}F_{ji}(y)F^{ji}(y) + \lambda_1(y)\Pi^0(y) + \lambda_2(y)\partial_i^y\Pi^i(y)\} \\
= & -\partial_k^x \int d^3y\Pi^i(y)\{A_k(x), \Pi^i(y)\} - \partial_k^x \int d^3y\partial_i^y A_o(y)\{A_k(x), \Pi^i(y)\} - \partial_k^x \int d^3y\lambda_2(y)\partial_i^y\{A_k(x), \Pi^i(y)\} \\
= & -\partial_k^x \int d^3y\Pi^i(y)(\delta_k^i\delta(x-y)) - \partial_k^x \int d^3y\partial_i^y A_o(y)(\delta_k^i\delta(x-y)) - \partial_k^x \int d^3y\lambda_2(y)\partial_i^y(\delta_k^i\delta(x-y)) \\
= & -\partial_k^x \int d^3y\Pi^k(y)\delta(x-y) - \partial_k^x \int d^3y\partial_k^y A_o(y)\delta(x-y) + \partial_k^x\partial_k^x \int d^3y\lambda_2(y)\delta(x-y) \\
= & -\partial_k^x\Pi^k(x) - \partial_k^x\partial_k^x A_o(x) + \partial_k^x\partial_k^x\lambda_2(x) \approx 0
\end{aligned}
\tag{106}
$$

Obteniendo así relaciones que permiten determinar el valor de los multiplicadores de lagrange λ_1 y λ_2.

5. Apéndice E: Condiciones de Consistencia para el Gauge Axial

5.1. Condiciones de Consistencia para el gauge Axial

Teniendo en cuenta el Hamiltoniano Extendido:

$$
H_E \equiv H_p + \int d^3x\lambda_2\Phi_2 = \int d^3x[\frac{1}{2}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \Pi^i(x)\partial_i A_0(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \lambda_1\Phi_1 + \lambda_2\Phi_2],
\tag{107}
$$

se calcula las condiciones de consistencia para los vínculos ϕ_3 y ϕ_4 expresados en (1.77).

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_3 =&\{\phi_3(x), H_E\} = \int d^3y\{A_3(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \Pi^i(y)\partial_i^y A_o(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) + \lambda_1(y)\Pi^0(y) + \lambda_2(y)\partial_i^y\Pi^i(y)\}\\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\{A_3(x),\Pi^i(y)\} + \int d^3y\partial_i^y A_o(y)\{A_3(x),\Pi^i(y)\} + \int d^3y\lambda_2(y)\partial_i^y\{A_3(x),\Pi^i(y)\}\\
=&\int d^3y\Pi^i(y)(\delta_3^i\delta(x-y)) + \int d^3y\partial_i^y A_o(y)(\delta_3^i\delta(x-y)) + \int d^3y\lambda_2(y)\partial_i^y(\delta_3^i\delta(x-y))\\
=&\Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) - \partial_3^x\lambda_2(x) \approx 0
\end{aligned}
\tag{108}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\phi}_4 =&\{\phi_4(x), H_E\}\\
=&\int d^3y\{\Pi^3(x) + \partial_3^x A_0(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y)\} + \Pi^i(y)\partial_i^y A_o(y) + \frac{1}{4}F_{ki}(y)F^{ki}(y) + \lambda_1(y)\Pi^0(y) + \lambda_2(y)\partial_i^y\Pi^i(y)\}\\
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\{\Pi^3(x),F_{ki}(y)\} + \partial_3^x\int d^3y\lambda_1(y)\{A_0(x),\Pi^0(y)\}\\
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_k^y\{\Pi^3(x),A_i(y)\} - \int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_i^y\{\Pi^3(x),A_k(y)\} + \partial_3^x\int d^3y\lambda_1(y)\{A_0(x),\Pi^0(y)\}\\
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_k^y(-\delta_i^3\delta(x-y)) - \int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_i^y(-\delta_k^3\delta(x-y) + \partial_3^x\int d^3y\lambda_1(y)(\delta(x-y))\\
=&\partial_k^x\int d^3y\frac{1}{2}F^{k3}(y)\delta(x-y) - \partial_i^x\int d^3y\frac{1}{2}F^{3i}(y)\delta(x-y) + \partial_3^x\int d^3y\lambda_1(y)\delta(x-y)\\
=&\frac{1}{2}\partial_k^x F^{k3}(x) - \frac{1}{2}\partial_i^x F^{3i}(x) + \partial_3^x\lambda_1(x)\\
=&\frac{1}{2}\partial_k^x F^{k3}(x) + \frac{1}{2}\partial_i^x F^{i3}(x) + \partial_3^x\lambda_1(x)\\
=&\partial_i F^{i3}(x) + \partial_3\lambda_1(x) \approx 0.
\end{aligned}
\tag{109}
$$

Así, se obtienen relaciones de las cuales se puede determinar el valor de los multiplicadores de Lagrange λ_1 y λ_2.

6. Apéndice F: Ecuaciones de Movimiento en el Gauge Axial

6.1. Ecuaciones de Movimiento en el Gauge Axial

Considerando que los corchetes de Dirac fundamentales entre las variables independientes a $A_i(x), \Pi^j(x)$ con $i = 1, 2$ son:

$$\begin{aligned}
\{A_i(x), A_j(y)\}_D =& 0 \\
\{\Pi^{\mu}(x), \Pi^{\upsilon}(y)\}_D =& 0 \\
\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D =& \delta_i^j \delta(x-y) \\
\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D =& -\delta_j^i \delta(x-y) \\
\{A_i(x), A_0(y)\}_D =& -\partial_i^x g(x,y)
\end{aligned} \tag{110}$$

La evolución temporal de una variable dinámica esta dada por:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} = \{A(x), H\}_D \tag{111}$$

Para el campo $A_\mu(x)$

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) = \{A_i(x), H\}_D =& \{A_i(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y) + \Pi^i(y)\partial_i^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y))\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2}\{A_i(x), \Pi^j(y)\Pi^j(y)\}_D + \int d^3y\{A_i(x), \Pi^k(y)\partial_k^y A_0(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi^j(y)\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D + \int d^3y \partial_k^y A_0(y)\{A_i(x), \Pi^k(y)\}_D + \int d^3y \Pi^k(y)\partial_k^y\{A_i(x), A_0(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi^j(y)(\delta_i^j \delta(x-y) - \delta_3^j \partial_i^x f(x,y)) + \int d^3y \partial_k^y A_0(y)(\delta_i^k \delta(x-y) - \delta_3^k \partial_i^x f(x,y)) \\
& - \int d^3y \Pi^k(y)\partial_k^y \partial_i^x g(x,y) \\
=& \int d^3y \Pi^i(y)\delta(x-y) - \int d^3y \Pi^3(y)\partial_i^x f(x,y) - \int d^3y \Pi^k(y)\partial_k^y \partial_i^x g(x,y) \\
& + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)\delta(x-y) - \int d^3y \partial_3^y A_0(y)\partial_i^x f(x,y)
\end{aligned} \tag{112}$$

como $\Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) = 0$:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) = \int d^3y \Pi^i(y)\delta(x-y) + \int d^3y \partial_3^y A_o(y)\partial_\mu^x f(x,y) - \int d^3y \partial_3^y A_0(y)\partial_\mu^x f(x,y) \\
- \int d^3y \partial_k^y (\Pi^k(y)\partial_i^x g(x,y)) + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)\delta(x-y) + \int d^3y \partial_k^y \Pi^k(y)\partial_i^x g(x,y)
\end{aligned}
\tag{113}
$$

Donde el cuarto término se puede despreciar usando la ley de Gauss dada por:

$$
\int d^3x \partial_i^x \phi^i(x) = \oint_s \boldsymbol{dA} \cdot \boldsymbol{\phi}. \tag{114}
$$

Como la integral es evaluada en la superficie de un volumen que tiende al infinito, por la propiedad asintótica de los campos se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) =& \int d^3y \Pi^i(y)(\delta(x-y)) + \int d^3y \partial_i^y A_0(y)\delta(x-y) \\
=& \Pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x)
\end{aligned}
\tag{115}
$$

Y para el momento:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i(x) = \{\Pi^i(x), H\}_D =& \{\Pi^i(x), \int d^3y (\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y) + \Pi^j(y)\partial_j^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y))\}_D \\
=& \int d^3y \Pi^j(x)\partial_j^y\{\Pi^i(x), A_0(y)\}_D + \int d^3y \frac{1}{2}F^{kl}(y)\{\Pi^i(x), F_{kl}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2}F^{kl}(y)\{\Pi^i(x), \partial_k^y A_l(y) - \partial_l^y A_k(y)\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_k^y\{\Pi^i(x), A_l(y)\}_D - \int d^3y \frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_l^y\{\Pi^i(x), A_k(y)\}_D \\
=& \int d^3y \frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_k^y(-\delta_l^i\delta(x-y)) - \int d^3y \frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_l^y(-\delta_k^i\delta(x-y)) \\
=& -\int d^3y \frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_k^y\delta(x-y) + \int d^3y \frac{1}{2}F^{il}(y)\partial_l^y\delta(x-y) \\
=& \partial_k^x \int d^3y \frac{1}{2}F^{ki}(y)\delta(x-y) - \partial_l^x \int d^3y \frac{1}{2}F^{il}(y)\delta(x-y) \\
=& \frac{1}{2}\partial_k^x F^{ki}(x) - \frac{1}{2}\partial_l^x F^{il}(x) \\
=& \partial_k^x F^{ki}(x)
\end{aligned}
\tag{116}
$$

7. Apéndice G: Grupos

7.1. Grupos

Un grupo es un conjunto G en el cual se define la operacion multiplicación con las siguientes propiedades [29]:

1. Asociativa: $\forall$ a,b,c $\in$ G, $(ab)c = a(bc)$;
2. Elementro Neutro: e $\in$ G tal que $\forall$ a $\in$ G , $ae = ea = a$;
3. Elemento Inverso: a^{-1} $\in$ G para cada a $\in$ G tal que $a^{-1}a = aa^{-1} = e$

Adicionalmente se tiene que si la operacion multiplicación entre los elementos es conmutativa

$$ab = ba \; \forall \text{ a,b} \in \text{G},$$

se dice que el grupo es Abeliano, en caso contrario será no abeliano.

7.2. Grupos de Simetría

Se tiene que la densidad lagrangiana dada por (3.8) es invariante bajo transformaciones en los campos $A_{\mu a}(x)$ que dependen de un conjunto de matrices constantes e independientes Λ_a. Se asume que estas transformaciones de simetría son la parte infinitesimal de un grupo de Lie [3]. Al espacio tangente al elemento identidad del grupo se llama algebra de Lie; En un algebra de Lie asi como en un espacio vectorial, se puede elegir una base, dicha base compuesta por k matrices Λ_i (i=1,2,3...k; donde k es la dimension del algebra), las cuales se conocen como los generadores del algebra de Lie y el correspondiente grupo de Lie [29]. Entonces las matrices deben cumplir que:

$$[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta] = iC^{\gamma}_{\alpha\beta}\Lambda_\gamma \tag{117}$$

Donde $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ son un conjunto de constantes reales conocidas como las constantes de esctructura del grupo. De la anti-simetría del conmutador se puede concluir que las constantes de estructura cumplen que :

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = -C^{\gamma}_{\beta\alpha}, \tag{118}$$

también de la identidad de Jacobi:

$$0 = [[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta], \Lambda_\gamma] + [[\Lambda_\gamma, \Lambda_\alpha], \Lambda_\beta] + [[\Lambda_\beta, \Lambda_\gamma], \Lambda_\alpha] \tag{119}$$

se tiene que

$$0 = C^{\delta}_{\alpha\beta}C^{\epsilon}_{\delta\gamma} + C^{\delta}_{\gamma\alpha}C^{\epsilon}_{\delta\beta} + C^{\delta}_{\beta\gamma}C^{\epsilon}_{\delta\alpha}. \tag{120}$$

Cualquier conjunto de constantes $C^{\gamma}_{\alpha\beta}$ que cumplan las propiedades anteriores definen al menos un conjunto de matrices:

$$(\Lambda^{A}_{\alpha})^{\beta}_{\gamma} \equiv -iC^{\beta}_{\gamma\alpha}, \tag{121}$$

que satisfacen

$$[\Lambda^{A}_{\alpha}, \Lambda^{A}_{\beta}] = iC^{\gamma}_{\alpha\beta}\Lambda^{A}_{\gamma}. \tag{122}$$

A $(\Lambda^{A}_{\alpha})^{\beta}_{\gamma}$ se le conoce como la representación adjunta del algebra de Lie con constantes de estructura $C^{\beta}_{\gamma\alpha}$. Para el grupo SU(2) se tiene que:

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{123}$$

y se cumple que $C^{\beta}_{\gamma\alpha} = \epsilon_{\gamma\alpha\beta}$, donde $\epsilon_{\gamma\alpha\beta}$ toma valores 1 y -1 si se hacen permutaciones pares o impares de γ, α, β respectivamente.

8. Apéndice H: Condicion de Consistencia para Φ_{2a}

La evolución temporal del vínculo Φ_{2a} será:

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{2a}(x) =& \{\Phi_{2a}(x), H_p(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3y\{\partial^x_j \Pi^j_a(x) + g\varepsilon_{bca}\Pi^j_b(y)A_{jc}(y), [\frac{1}{2}\Pi^k_d(y)\Pi^k_d(y) \\
&+ \Pi^i_d(y)\partial^y_i A_{0d}(y) - g\varepsilon_{def}\Pi^i_d(y)A_{ie}(y)A_{0f}(y) + \frac{1}{4}F^{ki}_d(y)F_{kid}(y)]\} \\
&+ \{\partial^x_j \Pi^j_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^j_b(x)A_{jc}(x), \int d^3y \lambda_{1d}(y)\Pi^0_d(x)\} \\
=& \int d^3y\{\partial^x_j \Pi^j_a(x), [\frac{1}{2}\Pi^k_d(y)\Pi^k_d(y) + \Pi^i_d(y)\partial^y_i A_{0d}(y) - g\varepsilon_{def}\Pi^i_d(y)A_{ie}(y)A_{0f}(y) + \frac{1}{4}F^{ki}_d(y)F_{kid}(y)]\} \\
&+ \int d^3y\{g\varepsilon_{bca}\Pi^j_b(y)A_{jc}(y), [\frac{1}{2}\Pi^k_d(y)\Pi^k_d(y) + \Pi^i_d(y)\partial^y_i A_{0d}(y) - g\varepsilon_{def}\Pi^i_d(y)A_{ie}(y)A_{0f}(y) + \frac{1}{4}F^{ki}_d(y)F_{kid}(y)]\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&-\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)\{\Pi_a^j(x),A_{ie}(y)\}\\
&+\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\{\Pi_a^j(x),\partial_k^yA_{id}(y)-\partial_i^yA_{kd}(y)-g\varepsilon_{def}A_{ke}(y)A_{if}(y)\}\\
&-\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)A_{jc}(y)\{\Pi_b^j(y),A_{ie}(y)\}\\
&+\frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\{\Pi_b^j(x),\partial_k^yA_{id}(y)-\partial_i^yA_{kd}(y)-g\varepsilon_{def}A_{ke}(y)A_{if}(y)\}\\
&+\int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_d^k(y)\{A_{jc}(x),\Pi_d^k(y)\}+\int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\partial_i^yA_{0d}(y)\{A_{jc}(x),\Pi_d^i(y)\}\\
&-\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^j(x)A_{ie}(y)A_{0f}(y)\{A_{jc}(x),\Pi_d^i(y)\}\\
=&-\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)\{\Pi_a^j(x),A_{ie}(y)\}-\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)A_{jc}(x)\{\Pi_b^j(x),A_{ie}(y)\}\\
&+\int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_d^k(y)\{A_{jc}(x),\Pi_d^k(y)\}+\int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\partial_i^yA_{0d}(y)\{A_{jc}(x),\Pi_d^i(y)\}\\
&-\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^j(x)A_{ie}(y)A_{0f}(y)\{A_{jc}(x),\Pi_d^i(y)\}\\
&+\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_k^y\{\Pi_a^j(x),A_{id}(y)\}-\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_i^y\{\Pi_a^j(x),A_{kd}(y)\}\\
&-\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{if}(y)\{\Pi_a^j(x),A_{ke}(y)\}-\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)\{\Pi_a^j(x),A_{if}(y)\}\\
&+\frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_k^y\{\Pi_b^j(x),A_{id}(y)\}-\frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_i^y\{\Pi_b^j(x),A_{kd}(y)\}\\
&-\frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{if}(y)\{\Pi_b^j(x),A_{ke}(y)\}-\frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)\{\Pi_b^j(x),A_{if}(y)\}\\
=&-\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)(-\delta_i^j\delta_{ae}\delta(x-y))-\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)A_{jc}(x)(-\delta_i^j\delta_{be}\delta(x-y))\\
&+\int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_d^k(y)(\delta_j^k\delta_{cd}\delta(x-y))+\int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\partial_i^yA_{0d}(y)(\delta_j^i\delta_{cd}\delta(x-y))\\
&-\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^j(x)A_{ie}(y)A_{0f}(y)(\delta_j^i\delta_{cd}\delta(x-y))+\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_k^y(-\delta_i^j\delta_{ad}\delta(x-y))\\
&-\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_i^y(-\delta_k^j\delta_{ad}\delta(x-y))-\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{if}(y)(-\delta_k^j\delta_{ae}\delta(x-y))\\
&-\frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)(-\delta_i^j\delta_{af}\delta(x-y))+\frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_k^y(-\delta_i^j\delta_{bd}\delta(x-y))\\
&-\frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_i^y(-\delta_k^j\delta_{bd}\delta(x-y))\\
&-\frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{if}(y)(-\delta_k^j\delta_{be}\delta(x-y))\\
&-\frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)(\delta_i^j\delta_{bf}\delta(x-y))\\
=&-g\varepsilon_{adf}\partial_j^x(\Pi_d^j(x)A_{0f}(x))+gg\varepsilon_{aec}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(x)A_{ic}(x)A_{0f}(x)\\
&+g\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_c^j(x)+g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)\partial_i^xA_{0c}(x)\\
&-gg\varepsilon_{abd}\varepsilon_{def}\Pi_b^i(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x)+\frac{1}{2}\partial_j^x\partial_k^xF_a^{kj}(x)-\frac{1}{2}\partial_j^x\partial_i^xF_d^{ji}(x)\\
&+\frac{1}{2}g\varepsilon_{daf}\partial_j^xF_d^{ji}(x)A_{if}(x)+\frac{1}{2}g\varepsilon_{dea}\partial_j^xF_d^{kj}(x)A_{ke}(x)\\
&+\frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_k^xF_b^{kj}(x)A_{jc}(x)-\frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_i^xF_b^{ji}(x)A_{jc}(x)\\
&+\frac{1}{2}gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dbf}F_d^{ji}(y)A_{jc}(x)A_{if}(x)-\frac{1}{2}gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{deb}F_d^{kj}(y)A_{ke}(x)A_{jc}(x)\\
=&-g\varepsilon_{adf}\partial_j^x\Pi_d^j(x)A_{0f}(x)-g\varepsilon_{adf}\Pi_d^j(x)\partial_j^xA_{0f}(x)+g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)\partial_i^xA_{0c}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- gg\varepsilon_{abd}\varepsilon_{def}\Pi^i_b(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x) + gg\varepsilon_{aec}\varepsilon_{def}\Pi^i_d(x)A_{ic}(x)A_{0f}(x)\\
&+ \frac{1}{2}g\varepsilon_{adf}\partial^x_j F^{ij}_d(x)A_{if}(x) + \frac{1}{2}g\varepsilon_{ade}\partial^x_j F^{kj}_d(x)A_{ke}(x)\\
&- \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial^x_k F^{jk}_b(x)A_{jc}(x) - \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial^x_i F^{ji}_b(x)A_{jc}(x)\\
&+ \frac{1}{2}gg\varepsilon_{bac}\varepsilon_{bdf}F^{ji}_d(y)A_{jc}(x)A_{if}(x) - \frac{1}{2}gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{bdf}F^{jk}_d(y)A_{jc}(x)A_{kf}(x)\\
=& - g\varepsilon_{adf}\partial^x_j\Pi^j_d(x)A_{0f}(x)\\
&+ gg(\delta_{ad}\delta_{cf} - \delta_{af}\delta_{cd})\Pi^i_d(x)A_{ic}(x)A_{0f}(x) - gg(\delta_{ae}\delta_{bf} - \delta_{af}\delta_{be})\Pi^i_b(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x)\\
=& - g\varepsilon_{adf}\partial^x_j\Pi^j_d(x)A_{0f}(x) + gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{0a}(x)\Pi^i_d(x)A_{id}(x)\\
&- ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x) + ggA_{0a}(x)\Pi^i_b(x)A_{ib}(x)\\
=& - g\varepsilon_{adf}\partial^x_j\Pi^j_d(x)A_{0f}(x) + gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x)
\end{aligned}
$$

Recordando que $\partial^x_i\Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) \approx 0$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Phi}_{2a}(x) \approx& gg\varepsilon_{adf}\varepsilon_{dbc}\Pi^i_b(y)A_{ic}(y)A_{0f}(x) + gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x)\\
&- ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x)\\
=& - gg(\delta_{ab}\delta_{fc} - \delta_{ac}\delta_{fb})\Pi^i_b(y)A_{ic}(y)A_{0f}(x)\\
&+ gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x)\\
=& - gg\Pi^i_a(y)A_{if}(y)A_{0f}(x) + ggA_{ia}(y)\Pi^i_b(y)A_{0b}(x)\\
&+ gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x)
\end{aligned}
\tag{124}
$$

Obteniendo así la condición de consistencia para el vínculo Φ_{2a}:

$$
\dot{\Phi}_{2a}(x) \approx 0 \tag{125}
$$

9. Apéndice I: Condicion de Consistencia Para el Vínculo $\varphi_{2a}(x)$

9.1. Condición de Consistencia para el vínculo $\varphi_{2a}(x)$

La condición de consistencia para el vínculo adicional $\varphi_{2a}(x) = \partial_i^x A_a^i(x)$ se calcula a partir de la expresión (3.29), por lo tanto se observa que:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{2a}(x) =& \{\varphi_{2a}(x), H_E(\mathbf{y}, t)\} \\
=& \partial_i^x \int d^3y \{A_a^i(x), [\frac{1}{2}\Pi_d^k(y)\Pi_d^k(y) + \Pi_d^k(y)\partial_k^y A_{0d}(y) - g\varepsilon_{def}\Pi_d^k(y)A_{ke}(y)A_{0f}(y) + \frac{1}{4}F_d^{kj}(y)F_{kjd}(y)]\} \\
&+ \int d^3y \lambda_{1d}(y)\{\partial_i^x A_a^i(x), \Pi_a^0(y)\} + \partial_i^x \int d^3y \lambda_{2d}(y)\{A_a^i(x), (\partial_k^y \Pi_d^k(y) + g\varepsilon_{dbc}\Pi_b^k(y)A_{kc}(y))\} \\
=& -\partial_i^x \int d^3y \Pi_d^k(y)\{A_{ia}(x), \Pi_d^k(y)\} - \partial_i^x \int d^3y \partial_k^y A_{0d}(y)\{A_{ia}(x), \Pi_d^k(y)\} \\
&+ g\varepsilon_{def}\partial_i^x \int d^3y A_{ke}(y)A_{0f}(y)\{A_{ia}(x), \Pi_d^k(y)\} - \partial_i^x \int d^3y \lambda_{2d}(y)\partial_k^y\{A_{ia}(x), \Pi_d^k(y)\} \\
&- g\varepsilon_{dbc}\partial_i^x \int d^3y \lambda_{2d}(y)A_{kc}(y)\{A_{ia}(x), \Pi_b^k(y)\} \\
=& -\partial_i^x \int d^3y \Pi_d^k(y)(\delta_i^k\delta_{ad}\delta(x-y)) - \partial_i^x \int d^3y \partial_k^y A_{0d}(y)(\delta_i^k\delta_{ad}\delta(x-y)) \\
&+ g\varepsilon_{def}\partial_i^x \int d^3y A_{ke}(y)A_{0f}(y)(\delta_i^k\delta_{ad}\delta(x-y)) - \partial_i^x \int d^3y \lambda_{2d}(y)\partial_k^y(\delta_i^k\delta_{ad}\delta(x-y)) \\
&- g\varepsilon_{dbc}\partial_i^x \int d^3y \lambda_{2d}(y)A_{kc}(y)(\delta_i^k\delta_{ad}\delta(x-y)) \\
=& -\partial_i^x \int d^3y \Pi_a^i(y)\delta(x-y) - \partial_i^x \int d^3y \partial_i^y A_{0a}(y)\delta(x-y) + g\varepsilon_{aef}\partial_i^x \int d^3y A_{ie}(y)A_{0f}(y)\delta(x-y) \\
&+ \partial_i^x\partial_i^x \int d^3y \lambda_{2a}(y)\delta(x-y) - g\varepsilon_{abc}\partial_i^x \int d^3y \lambda_{2a}(y)A_{ic}(y)\delta(x-y) \\
=& -\partial_i^x \Pi_a^i(x) - \partial_i^x\partial_i^x A_{0a}(y) + g\varepsilon_{aef}\partial_i^x A_{ie}(x)A_{0f}(x) + \partial_i^x\partial_i^x \lambda_{2a}(y) - g\varepsilon_{abc}\partial_i^x(\lambda_{2a}(x)A_{ic}(x)) \approx 0
\end{aligned}
$$

10. Apéndice J: Evolucion Temporal de los Campos en el Gauge de Radiación

Con los corchetes correctamente definidos en (3.46) se puede calcular la evolución temporal de las variables $(A_{ia}(x), \Pi_a^j(x))$ con $i, j = 1, 2$. Por lo tanto, para el campo A_{ia} se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_{ia}(x) =& \{A_{ia}(x), H(y)\}_D = \{A_{ia}(x), \int d^3y \frac{1}{2}\Pi_b^j(y)\Pi_b^j(y) + \frac{1}{4}F_{kjb}(y)F_b^{kj}(y)\}_D \\
=& \int d^3x \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^j(y)\Pi_b^j(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi_b^j(y)\{A_{ia}(x), \Pi_b^j(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi_b^j(y)(\delta_i^j \delta_{ab}\delta(x-y) - (\delta_{ac}\partial_i^x + g\varepsilon_{acd}A_{id}(x))\partial_j^y G_{cb}(x,y,A)) \\
=& \Pi_a^i(x) - \partial_i^x \int d^3y \Pi_b^j(y)\partial_j^y G_{ab}(x,y,A) - A_{id}(x)\int d^3y \Pi_b^j(y) g\varepsilon_{acd}\partial_j^y G_{cb}(x,y,A) \\
=& \Pi_a^i(x) - \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y(\Pi_b^j(y)G_{ab}(x,y,A)) - A_{id}(x)\int d^3y \partial_j^y(\Pi_b^j(y) g\varepsilon_{acd}G_{cb}(x,y,A)) \\
&+ \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y \Pi_b^j(y)G_{ab}(x,y,A) + A_{id}(x)\int d^3y \partial_j^y \Pi_b^j(y) g\varepsilon_{acd}G_{cb}(x,y,A) \\
=& \Pi_a^i(x) + \partial_i^x \int d^3y \partial_j^y \Pi_b^j(y)G_{ab}(x,y,A) + g\varepsilon_{aed}A_{id}(x)\int d^3y G_{eb}(x,y,A)\partial_j^y \Pi_b^j(y)
\end{aligned}$$

El tercer término se puede despreciar haciendo uso de la ley de Gauss y recordando la propiedad asíntotica de los campos. Además se tiene que:

$$\chi_{2a}(x) = A_{0a}(x) + g\int d^3y G_{ab}(x,y,A)\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y) = A_{0a}(x) - \int d^3y G_{ab}(x,y,A)\partial_i^y \Pi_b^i(y) = 0 \tag{126}$$

entonces

$$\dot{A}_{ia}(x,t) = \Pi^i_a(x) + \partial^x_i A_{0a}(x) + \varepsilon_{aed} A_{0e}(x) A_{id}(x) \tag{127}$$

Para el momento canónico $\Pi^i_a(x)$ se encuentra que su evolución temporal estara determinada por:

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i_a(x,t) =& \{\Pi^i_a(x), H(y)\}_D \\
=& \{\Pi^i_a(x), \int d^3y \frac{1}{2}\Pi^j_b(y)\Pi^j_b(y) + \frac{1}{4}F_{kjb}(y)F^{kj}_b(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi^j_b(y)\{\Pi^i_a(x), \Pi^j_b(y)\}_D + \int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)\{\Pi^i_a(x), F_{kjb}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi^j_b(y)\{\Pi^i_a(x), \Pi^j_b(y)\}_D \\
&+ \int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)\{\Pi^i_a(x), \partial^y_k A_{jb}(y) - \partial^y_j A_{kb}(y) - g\varepsilon_{bcd}A_{kc}(y)A_{jd}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi^j_b(y)\{\Pi^i_a(x), \Pi^j_b(y)\}_D + \int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)\{\Pi^i_a(x), \partial^y_k A_{jb}(y)\}_D \\
&- \int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b\{\Pi^i_a(x), \partial^y_j A_{kb}(y)\}_D - g\varepsilon_{bcd}\int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)A_{jd}(y)\{\Pi^i_a(x), A_{kc}(y)\}_D \\
&- g\varepsilon_{bcd}\int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)A_{kc}(y)\{\Pi^i_a(x), A_{jd}(y)\}_D(y) \\
=& \int d^3y \Pi^j_b(y)(g\varepsilon_{acd}\Pi^i_c(x)\partial^y_j G_{db}(x,y,A) + g\partial^x_i G_{ad}(x,y,A)\varepsilon_{dcb}\Pi^j_c(y)) \\
&+ \int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)\partial^y_k(-\delta_{ab}\delta^j_i\delta(x-y) + [\delta_{be}\partial^y_j + g\varepsilon_{bef}A_{jf}(y)]\partial^x_i G_{ae}(x,y,A)) \\
&- \int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b\partial^y_j(-\delta_{ab}\delta^k_i\delta(x-y) + [\delta_{be}\partial^y_k + g\varepsilon_{bef}A_{kf}(y)]\partial^x_i G_{ae}(x,y,A)) \\
&- g\varepsilon_{bcd}\int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)A_{jd}(y)(-\delta_{ac}\delta^k_i\delta(x-y) + [\delta_{ce}\partial^y_k + g\varepsilon_{cef}A_{kf}(y)]\partial^x_i G_{ae}(x,y,A)) \\
&- g\varepsilon_{bcd}\int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)A_{kc}(y)(-\delta_{ad}\delta^j_i\delta(x-y) + [\delta_{de}\partial^y_j + g\varepsilon_{def}A_{jf}(y)]\partial^x_i G_{ae}(x,y,A)) \\
=& g\varepsilon_{acd}\Pi^i_c(x)\int d^3y \Pi^j_b(y)\partial^y_j G_{db}(x,y,A) + g\int d^3y \partial^x_i G_{ad}(x,y,A)\varepsilon_{dcb}\Pi^j_c(y)\Pi^j_b(y) \\
&- \int d^3y \frac{1}{2}F^{ki}_a(y)\partial^y_k\delta(x-y) - \int d^3y \frac{1}{2}\partial^y_k F^{kj}_b(y)\delta_{be}\partial^y_j\partial^x_i G_{ae}(x,y,A) \\
&- \int d^3y \frac{1}{2}\partial^y_k F^{kj}_b(y)g\varepsilon_{bef}A_{jf}(y)\partial^x_i G_{ae}(x,y,A) + \int d^3y \frac{1}{2}F^{ij}_a\partial^y_j\delta(x-y) \\
&+ \int d^3y \frac{1}{2}\partial^y_j F^{kj}_b\partial^y_k\partial^x_i G_{ab}(x,y,A) + g\varepsilon_{bef}\int d^3y \frac{1}{2}\partial^y_j F^{kj}_b A_{kf}(y)\partial^x_i G_{ae}(x,y,A) \\
&+ g\varepsilon_{bad}\int d^3y \frac{1}{2}F^{ij}_b(y)A_{jd}(y)\delta(x-y) - g\varepsilon_{bcd}\int d^3y \frac{1}{2}F^{kj}_b(y)A_{jd}(y)\partial^y_k\partial^x_i G_{ac}(x,y,A)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- g\varepsilon_{bcd} g\varepsilon_{cef} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj}(y) A_{jd}(y) A_{kf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
&+ g\varepsilon_{bca} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{ki}(y) A_{kc}(y) \delta(x-y) \\
&- g\varepsilon_{bcd} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj}(y) A_{kc}(y) \partial_j^y \partial_i^x G_{ad}(x,y,A) \\
&- g\varepsilon_{bcd} g\varepsilon_{def} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj}(y) A_{kc}(y) A_{jf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A)
\end{aligned}
$$

Simplificando la expresión anterior se obtiene como resultado lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_a^i(x) =& \frac{1}{2}\partial_k^x F_a^{ki}(x) - \frac{1}{2}\partial_j^x F_a^{ij}(x) + \frac{1}{2} g\varepsilon_{bad} F_b^{ij}(x) A_{jd}(x) + \frac{1}{2} g\varepsilon_{bca} F_b^{ki}(x) A_{kc}(x) \\
&- g\varepsilon_{acd} \Pi_c^i(x) \int d^3y \partial_j^y \Pi_b^j(y) G_{db}(x,y,A) - \frac{1}{2} \int d^3y \partial_k^y (F_b^{kj}(y) \partial_j^y \partial_i^x G_{ab}(x,y,A)) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_i^x \int d^3y F_b^{kj}(y) \partial_k^y \partial_j^y G_{ab}(x,y,A) + \partial_i^x \int d^3y \frac{1}{2} \partial_j^y (F_b^{kj} \partial_k^y G_{ab}(x,y,A)) \\
&- \partial_i^x \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj} \partial_j^y \partial_k^y G_{ab}(x,y,A) + \frac{1}{2} g\varepsilon_{bef} \int d^3y \partial_k^y F_b^{jk}(y) A_{jf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
&+ \frac{1}{2} g\varepsilon_{bef} \int d^3y \partial_j^y F_b^{kj} A_{kf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) + g\varepsilon_{bdc} \partial_i^x \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj}(y) A_{jd}(y) \partial_k^y G_{ac}(x,y,A) \\
&+ g\varepsilon_{bcd} g\varepsilon_{cef} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{jk}(y) A_{jd}(y) A_{kf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
&+ g\varepsilon_{bcd} \partial_i^x \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{jk}(y) A_{kc}(y) \partial_j^y G_{ad}(x,y,A) \\
&- g\varepsilon_{bcd} g\varepsilon_{def} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj}(y) A_{kc}(y) A_{jf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
=& \frac{1}{2}\partial_k^x F_a^{ki}(x) + \frac{1}{2}\partial_j^x F_a^{ji}(x) + \frac{1}{2} g\varepsilon_{abd} F_b^{ji}(x) A_{jd}(x) + \frac{1}{2} g\varepsilon_{abc} F_b^{ki}(x) A_{kc}(x) \\
&- g\varepsilon_{acd} \Pi_c^i(x) \int d^3y \partial_j^y \Pi_b^j(y) G_{db}(x,y,A) + g\varepsilon_{bfe} \int d^3y \partial_k^y F_b^{kj}(y) A_{jf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
&+ g\varepsilon_{bdc} \int d^3y \partial_k^y (F_b^{kj}(y) A_{jd}(y) \partial_i^x G_{ac}(x,y,A)) - g\varepsilon_{bdc} \partial_i^x \int d^3y \partial_k^y F_b^{kj}(y) A_{jd}(y) G_{ac}(x,y,A) \\
&- g\varepsilon_{bdc} g\varepsilon_{cef} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{jk}(y) A_{jd}(y) A_{kf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A) \\
&- g\varepsilon_{bcd} g\varepsilon_{def} \int d^3y \frac{1}{2} F_b^{kj}(y) A_{kc}(y) A_{jf}(y) \partial_i^x G_{ae}(x,y,A)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\partial_k^x F_a^{ki}(x) + g\varepsilon_{abd}F_b^{ji}(x)A_{jd}(x) + g\varepsilon_{acd}\Pi_c^i(x)\int d^3y\partial_j^y\Pi_b^j(y)G_{db}(x,y,A)\\
&- g\varepsilon_{cbg}g\varepsilon_{cef}\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{jg}(y)A_{kf}(y)\partial_i^x G_{ae}(x,y,A)\\
&- g\varepsilon_{dbg}g\varepsilon_{def}\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{kg}(y)A_{jf}(y)\partial_i^x G_{ae}(x,y,A)
\end{aligned}
$$

Usando que $\varepsilon_{abc}\varepsilon_{ade} = \delta_{bd}\delta_{ce} - \delta_{be}\delta_{cd}$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_a^i(x) =&\partial_k^x F_a^{ki}(x) + g\varepsilon_{abd}F_b^{ji}(x)A_{jd}(x) - g\varepsilon_{acd}\Pi_c^i(x)\int d^3y\partial_j^y\Pi_b^j(y)G_{db}(x,y,A)\\
&- g(\delta_{be}\delta_{gf})\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{jg}(y)A_{kf}(y)\partial_i^x G_{ae}(x,y,A)\\
&+ g(\delta_{bf}\delta_{ge})\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{jg}(y)A_{kf}(y)\partial_i^x G_{ae}(x,y,A)\\
&- g(\delta_{be}\delta_{gf})\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{kg}(y)A_{jf}(y)\partial_i^x G_{ae}(x,y,A)\\
&+ g(\delta_{bf}\delta_{ge})\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{kg}(y)A_{jf}(y)\partial_i^x G_{ae}(x,y,A)\\
=&\partial_k^x F_a^{ki}(x) + g\varepsilon_{abd}F_b^{ji}(x)A_{jd}(x) - g\varepsilon_{acd}\Pi_c^i(x)\int d^3y\partial_j^y\Pi_b^j(y)G_{db}(x,y,A)\\
&- g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{jg}(y)A_{kg}(y)\partial_i^x G_{ab}(x,y,A)\\
&+ g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{kb}(y)A_{jg}(y)\partial_i^x G_{ag}(x,y,A)\\
&- g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{kg}(y)A_{jg}(y)\partial_i^x G_{ab}(x,y,A)\\
&+ g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{jb}(y)A_{kg}(y)\partial_i^x G_{ag}(x,y,A)\\
=&\partial_k^x F_a^{ki}(x) + g\varepsilon_{abd}F_b^{ji}(x)A_{jd}(x) - g\varepsilon_{acd}\Pi_c^i(x)\int d^3y\partial_j^y\Pi_b^j(y)G_{db}(x,y,A)\\
&- g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{jg}(y)A_{kg}(y)\partial_i^x G_{ab}(x,y,A)\\
&- g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{kg}(y)A_{jg}(y)\partial_i^x G_{ab}(x,y,A)\\
&- g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{kj}(y)A_{kb}(y)A_{jg}(y)\partial_i^x G_{ag}(x,y,A)\\
&+ g\int d^3y\frac{1}{2}F_b^{jk}(y)A_{jb}(y)A_{kg}(y)\partial_i^x G_{ag}(x,y,A)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$\dot{\Pi}_a^i(x,t) = \partial_k^x F_a^{ki}(x) + g\varepsilon_{abd}F_b^{ji}(x)A_{jd}(x) - g\varepsilon_{acd}\Pi_c^i(x)\int d^3y\partial_j^y\Pi_b^j(y)G_{db}(x,y,A) \quad (128)$$

y recordando que:

$$A_{0a}(x) - \int d^3yG_{ab}(x,y,A)\partial_i^y\Pi_b^i(y) = 0 \quad (129)$$

$$\dot{\Pi}_a^i(x,t) = \partial_k^x F_a^{ki}(x) - g\varepsilon_{abc}A_{jb}(x)F_c^{ji}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{ob}(x)\Pi_c^i(x) \quad (130)$$

Obteniendo las expresiones (3.49) y (3.50)

11. Apéndice K: Evolución Temporal de los Campos en el Gauge Axial

Se reescribe el Hamiltoniano como:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) + \Pi_a^i(x)\partial_i A_{0a}(x) - g\Pi_a^i(x)\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F_a^{ki}(x)) \\
&= \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) + \partial_i(\Pi_a^i(x)A_{0a}(x)) - \partial_i\Pi_a^i(x)A_{0a}(x) \\
&\quad - g\Pi_a^i(x)\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F_a^{ki}(x)) \\
&= \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) - \partial_i\Pi_a^i(x)A_{0a}(x) - g\Pi_a^i(x)\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F_a^{ki}(x)) \\
&\quad + \int d^3x\partial_i(\Pi_a^i(x)A_{0a}(x)) \\
&= \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x,t)A_{ic}(x,t)A_{0a}(x)) - g\Pi_a^i(x)\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) \\
&\quad + \int d^3x(\frac{1}{4}F_{kia}(x)F_a^{ki}(x))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int d^3x (gA_{0a}(x)\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x,t)A_{ic}(x,t) - gA_{0c}(x)\Pi^i_a(x)\varepsilon_{cab}A_{ib}(x)) \\
&+ \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F^{ki}_a(x)) \\
&= \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F^{ki}_a(x)) \\
&= \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^3_a(x)\Pi^3_a(x)) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{4}F_{12}(x)F^{12}_a(x) + \frac{1}{4}F_{13a}(x)F^{13}_a(x) + \frac{1}{4}F_{21a}(x)F^{21}_a(x)) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{4}F_{23a}(x)F^{23}_a(x) + \frac{1}{4}F_{31a}(x)F^{31}_a(x) + \frac{1}{4}F_{32a}(x)F^{32}_a(x)) \\
&= \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^3_a(x)\Pi^3_a(x)) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{4}F_{12}(x)F^{12}_a(x) + \frac{1}{4}F_{13a}(x)F^{13}_a(x) + \frac{1}{4}F_{21a}(x)F^{21}_a(x)) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{4}F_{23a}(x)F^{23}_a(x) + \frac{1}{4}F_{31a}(x)F^{31}_a(x) + \frac{1}{4}F_{32a}(x)F^{32}_a(x)) \\
&= \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^3_a(x)\Pi^3_a(x)) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x) + \frac{1}{2}F_{13a}(x)F^{13}_a(x) + \frac{1}{2}F_{23a}(x)F^{23}_a(x)) \\
&= \int d^3x (\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{0a}(x)\partial_3 A_{0a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x)) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{2}(-\partial_3 A_{1a}(x))(-\partial^3 A^1_a(x))) \\
&\quad + \int d^3x (\frac{1}{2}(-\partial_3 A_{2a}(x))(-\partial^3 A^2_a(x)))
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
H = \int d^3x (&\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{0a}(x)\partial_3 A_{0a}(x) \\
&+ \frac{1}{2}\partial_3 A_{1a}(x)\partial_3 A_{1a}(x) + \frac{1}{2}\partial_3 A_{2a}(x)\partial_3 A_{2a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x))
\end{aligned} \tag{131}
$$

Así, la evolución temporal de las coordenadas será:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_{ia}(x,t) =& \{A_{ia}(x,t), H_b(y)\}_D \\
=& \int d^3y \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y) + \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D \\
&+ \int d^3y \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y A_{1b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y)\}_D \\
&+ \int d^3y \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y)\}_D + \int d^3y \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D \\
&+ \int d^3y \{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi_b^1(y)\{A_{ia}(x), \Pi_b^1(y)\}_D + \int d^3y \Pi_b^2(x)\{A_{ia}(x), \Pi_b^2(x)\}_D \\
&+ \int d^3y \partial_3^y A_{0b}(y)\{A_{ia}(x), \partial_3^y A_{0b}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \Pi_b^1(y)(\delta_i^1\delta_{ab}\delta^3(x-y)) + \int d^3y \Pi_b^2(x)(\delta_i^2\delta_{ab}\delta^3(x-y)) \\
&+ \int d^3y \partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y(-\delta_{ab}\partial_i^x G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)G(x,y)) \\
=& \int d^3y \Pi_b^1(y)\delta_{ab}\delta^3(x-y) + \int d^3y \Pi_b^2(x)\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
&- \int d^3y \partial_3^y A_{0a}(y)\partial_3^y\partial_i^x G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y \partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y) \\
=& \Pi_a^1(y)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 - \partial_i^x \int d^3y \partial_3^y(A_{0a}(y)\partial_3^y G(x,y)) + \partial_i^x \int d^3y A_{0a}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
&- g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y \partial_3^y\,(A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y)) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y A_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
=& \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x \int d^3y A_{0a}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y A_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
=& \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x \int d^3y A_{0a}(y)\delta^3(x-y) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y A_{0b}(y)\delta^3(x-y) \\
\dot{A}_{ia}(x,t) =& \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x A_{0a}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x)
\end{aligned}
$$

Respecto a los momentos canónicos se encuentra que su evolución temporal estará dada por:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_a^1(x) =& \int d^3y \{\Pi_a^1(x), \frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y) + \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D \\
&+ \int d^3y \{\Pi_a^1(x), \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y A_{1b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y)\}_D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d^3y\{\Pi^1_a(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F^{12}_b(y)\}_D\\
=&\int d^3y\{\Pi^1_a(x),\frac{1}{2}\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\{\Pi^1_a(x),\frac{1}{2}\partial^y_3A_{1b}(y)\partial^y_3A_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi^1_a(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F^{12}_b(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\{\Pi^1_a(x),\partial^y_3A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial^y_3A_{1b}(y)\{\Pi^1_a(x),\partial^y_3A_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3yF^{12}_b(y)\{\Pi^1_a(x),F_{12b}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3\{\Pi^1_a(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial^y_3A_{1b}(y)\partial^y_3\{\Pi^1_a(x),A_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3yF^{12}_b(y)\{\Pi^1_a(x),\partial^y_1A_{2b}(y)-\partial^y_2A_{1b}(y)-g\varepsilon_{bcd}A_{1c}(y)A_{2d}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3\{\Pi^1_a(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial^y_3A_{1b}(y)\partial^y_3\{\Pi^1_a(x),A_{1b}(y)\}_D\\
&-\int d^3yF^{12}_b(y)\partial^y_2\{\Pi^1_a(x),A_{1b}(y)\}_D-g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{2d}(y)\{\Pi^1_a(x),A_{1c}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3(-g\varepsilon_{abc}\Pi^1_c(x)G(x,y)\}_D+\int d^3y\partial^y_3A_{1b}(y)\partial^y_3(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))\\
&-\int d^3yF^{12}_b(y)\partial^y_2(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)-g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{2d}(y)(-\delta_{ac}\delta^3(x-y))\\
=&-g\varepsilon_{abc}\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\Pi^1_c(x)\partial^y_3G(x,y)-\int d^3y\partial^y_3\delta_{ab}A_{1b}(y)\partial^y_3\delta^3(x-y)\\
&+\int d^3yF^{12}_b(y)\delta_{ab}\partial^y_2\delta^3(x-y)+g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{2d}(y)\delta_{ac}\delta^3(x-y)\\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi^1_c(x)\int d^3y\partial^y_3(A_{0b}(y)\partial^y_3G(x,y))+g\varepsilon_{abc}\Pi^1_c(x,t)\int d^3yA_{0b}(y)\partial^y_3\partial^y_3G(x,y)\\
&+\partial^x_3\int d^3y\partial^y_3A_{1a}(y)\delta^3(x-y)-\partial^x_2\int d^3yF^{12}_a(y)\delta^3(x-y)\\
&+g\varepsilon_{bad}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{2d}(y)\delta^3(x-y)\\
=&g\varepsilon_{abc}\Pi^1_c(x,t)\int d^3yA_{0b}(y)\delta^3(x-y)+\partial^x_3\int d^3y\partial^y_3A_{1a}(y)\delta^3(x-y)\\
&-\partial^x_2\int d^3yF^{12}_a(y)\delta^3(x-y)+g\varepsilon_{abc}\int d^3yA_{2b}(y)F^{12}_c(y)\delta^3(x-y)\\
\dot{\Pi}^1_a(x)=&\partial^x_3\partial^x_3A_{1a}(x)-\partial^x_2F^{12}_a(x)+g\varepsilon_{abc}(A_{2b}(x)F^{12}_c(x)+A_{0b}(x)\Pi^1_c(x))
\end{aligned}
$$

Finalmente:

$$
\dot{\Pi}^2_a(x)=\int d^3y\{\Pi^2_a(x),\frac{1}{2}\Pi^1_b(y)\Pi^1_b(y)+\frac{1}{2}\Pi^2_b(y)\Pi^2_b(y)\}_D
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d^3y\{\Pi^2_a(x),\frac{1}{2}\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3A_{0b}(y)+\frac{1}{2}\partial^y_3A_{1b}(y)\partial^y_3A_{1b}(y)+\frac{1}{2}\partial^y_3A_{2b}(y)\partial^y_3A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi^2_a(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F^{12}_b(y)\}_D\\
=&\int d^3y\{\Pi^2_a(x),\frac{1}{2}\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\{\Pi^2_a(x),\frac{1}{2}\partial^y_3A_{2b}(y)\partial^y_3A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi^2_a(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F^{12}_b(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3\{\Pi^2_a(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial^y_3A_{1b}(y)\partial^y_3\{\Pi^2_a(x),A_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\partial^y_3A_{2b}(y)\partial^y_3\{\Pi^2_a(x),A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3yF^{12}_b(y)\{\Pi^2_a(x),\partial^y_1A_{2b}(y)-\partial^y_2A_{1b}(y)-g\varepsilon_{bcd}A_{1c}(y)A_{2d}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3\{\Pi^2_a(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial^y_3A_{2b}(y)\partial^y_3\{\Pi^2_a(x),A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3yF^{12}_b(y)\partial^y_1\{\Pi^2_a(x),A_{2b}(y)\}_D-g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{1c}(y)\{\Pi^2_a(x),A_{2d}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3(-g\varepsilon_{abc}\Pi^2_c(x)G(x,y))+\int d^3y\partial^y_3A_{2b}(y)\partial^y_3(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))\\
&+\int d^3yF^{12}_b(y)\partial^y_1(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))-g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{1c}(y)(-\delta_{ad}\delta^3(x-y))\\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi^2_c(x)\int d^3y\partial^y_3A_{0b}(y)\partial^y_3G(x,y)-\int d^3y\delta_{ab}\partial^y_3A_{2b}(y)\partial^y_3\delta^3(x-y)\\
=&-\int d^3y\delta_{ab}F^{12}_b(y)\partial^y_1\delta^3(x-y)+g\varepsilon_{bcd}\int d^3y\delta_{ad}F^{12}_b(y)A_{1c}(y)\delta^3(x-y)\\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi^2_c(x)\int d^3y\partial^y_3(A_{0b}(y)\partial^y_3G(x,y))+g\varepsilon_{abc}\Pi^2_c(x)\int d^3yA_{0b}(y)\partial^y_3\partial^y_3G(x,y)\\
&-\int d^3y\partial^y_3A_{2a}(y)\partial^y_3\delta^3(x-y)-\int d^3yF^{12}_a(y)\partial^y_1\delta^3(x-y)\\
&+g\varepsilon_{bca}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{1c}(y)\delta^3(x-y)\\
=&g\varepsilon_{abc}\Pi^2_c(x)\int d^3yA_{0b}(y)\delta^3(x-y)+\partial^x_3\int d^3y\partial^y_3A_{2a}(y)\delta^3(x-y)\\
&+\partial^x_1\int d^3yF^{12}_a(y)\delta^3(x-y)+g\varepsilon_{bca}\int d^3yF^{12}_b(y)A_{1c}(y)\delta^3(x-y)\\
=&g\varepsilon_{abc}\Pi^2_c(x)A_{0b}(x)+\partial^x_3\partial^x_3A_{2a}(x)+\partial^x_1F^{12}_a(x)+g\varepsilon_{abc}F^{12}_b(y)A_{1c}(x)\\
\dot{\Pi}^2_a(x)=&\partial^x_3\partial^x_3A_{2b}(x)+\partial^x_1F^{12}_b(x)+g\varepsilon_{abc}(A_{1b}(x)F^{21}_c(y)+A_{0b}(x)\Pi^2_c(x))
\end{aligned}
$$

12. Apéndice L: Ecuaciones de Euler Lagrange Campo Electromagnético en Interacción con un Campo Fermiónico

Considerando la densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi, \tag{132}$$

se calcula las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_{μ} dadas por:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu}(x)} - \partial_{\upsilon}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\upsilon}A_{\mu}(x))}) = 0. \tag{133}$$

Entonces, se determina que:

$$\frac{\partial}{\partial A_{\beta}(x)}(-e\bar{\psi}\gamma^{\mu}A_{\mu}\psi) = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\delta^{\mu}_{\beta} = -e\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi \tag{134}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu(x))} =& \frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(-\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}F^{\theta\sigma}(x)F_{\theta\sigma}(x)) \\
=& -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(\eta^{\alpha\theta}\eta^{\beta\sigma}F_{\alpha\beta}(x))F_{\theta\sigma}(x) - \frac{1}{4}F^{\theta\sigma}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(F_{\theta\sigma}(x)) \\
=& -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(F_{\alpha\beta}(x)) \\
=& -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon A_\mu)}(\partial_\alpha A_\beta(x)) - \partial_\beta A_\alpha(x)) \\
=& -\frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\delta^\alpha_\upsilon\delta^\beta_\mu + \frac{1}{2}F^{\alpha\beta}(x)\delta^\beta_\upsilon\delta^\alpha_\mu \\
=& -\frac{1}{2}F^{\upsilon\mu}(x) + \frac{1}{2}F^{\mu\upsilon}(x) \\
=& F^{\mu\upsilon}(x)
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Por lo tanto las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_μ son:

$$
\partial_\upsilon F^{\mu\upsilon}(x) + \bar{\psi}e\gamma^\beta\psi = 0. \tag{136}
$$

De igual manera para el campo ψ_a se determina sus respectivas ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales se obtienen a partir de los siguientes calculos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\psi_a(x)} =& \frac{\partial}{\partial\psi_a(x)}(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi) \\
=& \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\frac{\partial}{\partial\psi_a(x)}(\psi_c) + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}A_\mu\frac{\partial}{\partial\psi_a(x)}(\psi_c) + m\bar{\psi}_b\frac{\partial}{\partial\psi_a(x)}(\psi_b) \\
=& \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\delta_{ac} + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}A_\mu\delta_{ac} + m\bar{\psi}_b\delta_{ab} \\
=& \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba} + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba}A_\mu + m\bar{\psi}_a
\end{aligned}
\tag{137}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))} =& \frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))}(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi) \\
=& -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))}(\partial_\mu\psi_c) \\
=& -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\delta^\mu_\upsilon\delta^c_a \\
=& -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^\upsilon_{ba}
\end{aligned}
\tag{138}
$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo ψ_a serán:

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_a(x)} - \partial_\upsilon(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))}) \\
0 =& \frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba} - e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba}A_\mu + m\bar{\psi}_a + \frac{i}{2}\partial_\upsilon\bar{\psi}_b\gamma^\upsilon_{ba} \\
0 =& \partial_\mu\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba} + m\bar{\psi}_a + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{ba}A_\mu \\
0 =& \partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu)_a + m\bar{\psi}_a + e(\bar{\psi}\gamma^\mu)_a A_\mu
\end{aligned}
\tag{139}
$$

Finalmente, para el campo $\bar{\psi}_a$ es posible determinar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a(x)} =& \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_a(x)}(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}F_{\mu\upsilon} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - \partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) - e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi) \\
=& \frac{i}{2}\gamma^\mu_{bc}\partial_\mu\psi_c\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_a(x)}\bar{\psi}_b - e\gamma^\mu_{bc}\psi_c A_\mu\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_a(x)}\bar{\psi}_b - m\psi_b\frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_a(x)}\bar{\psi}_b \\
=& \frac{i}{2}\gamma^\mu_{bc}\partial_\mu\psi_c\delta^b_a - e\gamma^\mu_{bc}\psi_c A_\mu\delta^b_a - m\psi_b\delta^b_a \\
=& \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ac}\partial_\mu\psi_c - e\gamma^\mu_{ac}\psi_c A_\mu - m\psi_a
\end{aligned}
\tag{140}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_v \bar{\psi}_a(x))} =& \frac{\partial}{\partial(\partial_v \bar{\psi}_a(x))}(-\frac{1}{4}F^{\mu v}F_{\mu v} + \frac{i}{2}(\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - \partial_\mu \bar{\psi}\gamma^\mu \psi) + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi) \\
=& -\frac{i}{2}\gamma^\mu_{bc}\psi_c \frac{\partial}{\partial(\partial_v \bar{\psi}_a(x))}(\partial_\mu \bar{\psi}_b) \\
=& -\frac{i}{2}\gamma^\mu_{bc}\psi_c \delta^\mu_v \delta_{ab} \\
=& -\frac{i}{2}\gamma^v_{ac}\psi_c.
\end{aligned}
\tag{141}
$$

Reemplazando los resultados obtenidos se tiene que para el campo $\bar{\psi}_a$, las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$
\begin{aligned}
0 =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a(x)} - \partial_v(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_v \bar{\psi}_a(x))}) \\
0 =& \frac{i}{2}\gamma^\mu_{ac}\partial_\mu \psi_c - e\gamma^\mu_{ac}\psi_c A_\mu - m\psi_a + \frac{i}{2}\partial_v \gamma^v_{ac}\psi_c \\
0 =& i\gamma^\mu_{ac}\partial_\mu \psi_c - e\gamma^\mu_{ac}\psi_c A_\mu - m\psi_a \\
0 =& i\partial_\mu(\gamma^\mu \psi)_a - e(\gamma^\mu \psi)_a A_\mu - m\psi_a.
\end{aligned}
\tag{142}
$$

13. Apéndice M: Demostración (4.16), (4.24), y ecuaciones de movimiento obtenidas a partir del Hamiltoniano Extendido

13.1. Demostración de la Expresión (4.16)

Se consideran las expresiones obtenidas en el apéndice anterior:

$$
\begin{aligned}
\Pi^i =& \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_i)} = F^{i0}(x) = \partial_0 A_i - \partial_i A_0 \\
\pi_a =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_a(x))} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b \gamma^0_{ba} \\
\bar{\pi}_a =& \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_a(x))} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c,
\end{aligned}
\tag{143}
$$

y de la definición del Hamiltoniano canónico:

$$
\begin{aligned}
H_c =& \int d^3x(\partial_0 A_\mu \Pi^\mu + \partial_0\psi_a\pi_a + \partial_0\bar{\psi}_a\bar{\pi}_a - \mathcal{L}) \\
=& \int d^3x(\Pi^i\partial_0 A_i(x) + \frac{1}{4}F^{0k}(x)F_{0k}(x) + \frac{1}{4}F^{k0}(x)F_{k0}(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x)) \\
&+ \int d^3x(\partial_0\psi_a(-\frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}) + \partial_0\bar{\psi}_a(-\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c) - \frac{i}{2}(\bar{\psi}_b\gamma^0_{bc}\partial_0\psi_c + \bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\partial_i\psi_c - \partial_0\bar{\psi}_b\gamma^0_{bc}\psi_c - \partial_i\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c) + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}A_\mu\psi_c + m\bar{\psi}\psi) \\
=& \int d^3x(\Pi^i(x)(\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)) - \frac{1}{4}\Pi^k(x)\Pi^k(x) - \frac{1}{4}\Pi^k(x)\Pi^k(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba}\partial_0\psi_a(x) - \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ac}\psi_c(x) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_b\gamma^0_{bc}\partial_0\psi_c + \bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\partial_i\psi_c - \partial_0\bar{\psi}_b\gamma^0_{bc}\psi_c - \partial_i\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c) + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi + m\bar{\psi}\psi) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\partial_i\psi_c + \frac{i}{2}\partial_i\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}A_\mu\psi_c + m\bar{\psi}_b\psi_b) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\partial_i\psi_c + \frac{i}{2}\partial_i(\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\partial_i\psi_c + e\bar{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}A_\mu\psi_c + m\bar{\psi}_b\psi_b) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c + \frac{i}{2}\int d^3x\partial_i(\bar{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c)
\end{aligned}
\tag{144}
$$

El último termino puede ser despreciado haciendo uso de la ley de Gauss, la cual establece que para un campo vectorial ϕ, se cumple que:

$$
\int d^3x\partial_i\phi^i(x) = \oint_s \boldsymbol{dA}\cdot\boldsymbol{\phi}. \tag{145}
$$

Ya que S se puede considerar como una superficie que tiende al infinito y teniendo en cuenta la propiedad asintótica de los campos se obtiene lo siguiente:

$$
H_c = \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c). \tag{146}
$$

13.2. Demostración de las Expresiónes (4.24)

Se considera el Hamiltoniano primario:

$$\begin{aligned} H_p =& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c) \\ &+ \int d^3x(\lambda_1(x)\Phi_1(x) + \bar{\vartheta}(x)\Theta_2(x) + \Theta_1(x)\vartheta(x)), \end{aligned} \tag{147}$$

y los vínculos:

$$\begin{aligned} \Phi_1 =& \Pi^0 \approx 0 \\ \Theta_1 =& \pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \approx 0 \\ \Theta_2 =& \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c \approx 0. \end{aligned} \tag{148}$$

La evolución temporal de Φ_1 se calcula a partir de:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_1 =& \{\Phi_1, H_p\} = \int d^3y\{\Pi^0(x), \frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial^y_i A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y)\} \\ &+ \int d^3y\{\Pi^0(x), \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial^y_i + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y) + \lambda_1(y)\Phi_1(y) + \bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y) + \Theta_1(y)\vartheta(y)\} \\ =& \int d^3y\Pi^i(y)\partial^y_i\{\Pi^0(x), A_0(y)\} + \int d^3y e\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)\{\Pi^0(x), A_\mu(y)\} \\ =& -\int d^3y\Pi^i(y)\partial^y_i\delta^3(x-y) - \int d^3y e\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)\delta^0_\mu\delta^3(x-y) \\ =& \partial^x_i\int d^3y\Pi^i(y)\delta^3(x-y) - \int d^3y e\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\delta^3(x-y) \\ =& \partial^x_i\Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\psi_c(x). \end{aligned} \tag{149}$$

Se observa que al aplicarle las condiciones de consistencia a Φ_1 se obtiene un vínculo secundario, entonces, se debe analizar igualmente su consistencia:

$$\dot{\Phi}_2 = \{\Phi_2, H_p\} = \int d^3y\{\partial^x_i\Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\psi_c(x), \bar{\psi}_c(y), \frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial^y_i A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y)\} \tag{150}$$

$$+\int d^3y\{\partial_i^x\Pi^i(x)+e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\psi_c(x),\bar{\psi}_c(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu(y)+m)_{cd}\psi_d(y)+\lambda_1(y)\Phi_1(y)+\bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y)+\Theta_1(y)\vartheta(y)\} \tag{151}$$

$$=\int d^3y\frac{1}{4}\{\partial_i^x\Pi^i(x),F_{ki}(y)F^{ki}(y)\}+\int d^3y\frac{1}{4}\bar{\psi}_c(y)e\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\partial_i^x\{\Pi^i(x),A_\mu(y)\} \tag{152}$$

$$-\int d^3y\{e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\psi_c(x),\bar{\vartheta}(y)_d(\bar{\pi}_d(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{de}\psi_e(y))+(\pi_d(y)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_e(y)\gamma^0_{ed})\vartheta_d(y)\} \tag{153}$$

$$=\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\{\Pi^i(x),\partial_l^yA_m(y)-\partial_m^yA_l(y)\}+\int d^3y\bar{\psi}_c(y)e\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)\partial_i^x\{\Pi^i(x),A_\mu(y)\} \tag{154}$$

$$+\int d^3y\bar{\vartheta}(y)_d\{\bar{\psi}_b(x),\bar{\pi}_d(y)\}e\gamma^0_{bc}\psi_c(x)-\int d^3ye\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\{\psi_c(x),\pi_d(y)\}\vartheta_d(y) \tag{155}$$

$$=-\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\partial_l^y\delta^i_m\delta^3(x-y)+\int d^3y\frac{1}{2}F^{lm}(y)\partial_i^x\partial_m^y\delta^i_l\delta^3(x-y)+e\partial_i^x\int d^3y\bar{\psi}_c(y)\gamma^\mu_{cd}\psi_d(y)(-\delta^i_\mu\delta^3(x-y)) \tag{156}$$

$$+\int d^3y\bar{\vartheta}(y)_d(-\delta_{bd}\delta^3(x-y))e\gamma^0_{bc}\psi_c(x)-\int d^3ye\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}((-\delta_{cd}\delta^3(x-y)))\vartheta_d(y) \tag{157}$$

$$=\frac{1}{2}\partial_i^x\partial_l^x\int d^3yF^{li}(y)\delta^3(x-y)-\frac{1}{2}\partial_i^x\partial_m^x\int d^3yF^{im}(y)\delta^3(x-y)-e\partial_i^x\int d^3y\bar{\psi}_c(y)\gamma^i_{cd}\psi_d(y)\delta^3(x-y) \tag{158}$$

$$-e\int d^3y\bar{\vartheta}(y)_b\gamma^0_{bc}\psi_c(x)\delta^3(x-y)+\int d^3ye\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bd}\vartheta_d(y)\delta^3(x-y) \tag{159}$$

$$=\frac{1}{2}\partial_l^x\partial_i^xF^{li}(x)-\frac{1}{2}\partial_i^x\partial_m^xF^{im}(x)-e\partial_i^x(\bar{\psi}_c(x)\gamma^i_{cd}\psi_d(x))-e\bar{\vartheta}(x)_b\gamma^0_{bc}\psi_c(x)+e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bd}\vartheta_d(x) \tag{160}$$

$$=-e\partial_i^x(\bar{\psi}_c(x)\gamma^i_{cd}\psi_d(x))-e\bar{\vartheta}(x)_b\gamma^0_{bc}\psi_c(x)+e\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bd}\vartheta_d(x)\approx 0 \tag{161}$$

Ahora, para el vinculo Θ_1:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_1 =&\{\Theta_1,H_p\}=\int d^3y\{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba},\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y)+\partial_i^yA_0(y)\Pi^i(y)+\frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y)\}\\
&+\int d^3y\{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba},\bar{\psi}_c(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu(y)+m)_{cd}\psi_d(y)+\lambda_1(y)\Phi_1(y)+\bar{\vartheta}(y)(\bar{\pi}_a(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{ac}\psi_c(y))+\Theta_1(y)\vartheta(y)\}\\
=&-\int d^3y\bar{\psi}_c(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu(y)+m)_{cd}\{\pi_a(x),\psi_d(y)\}-\frac{i}{2}\bar{\vartheta}_c(y)\gamma^0_{cd}\int d^3y\{\pi_a(x),\psi_d(y)\}-\int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\bar{\vartheta}_c(y)\{\bar{\psi}_b(x),\bar{\pi}_c(y)\}\\
=&-\int d^3y\bar{\psi}_c(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu(y)+m)_{cd}(-\delta_{ad}\delta^3(x-y))-\frac{i}{2}\gamma^0_{cd}\int d^3y\bar{\vartheta}(y)_c(-\delta_{ad}\delta^3(x-y))-\int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\bar{\vartheta}(y)_c(-\delta_{bc}\delta^3(x-y))\\
=&\int d^3y\bar{\psi}_c(y)(-i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu(y)+m)_{ca}\delta^3(x-y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{ca}\int d^3y\bar{\vartheta}_c(y)\delta^3(x-y)+\int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\bar{\vartheta}(y)_c(\delta^3(x-y))\\
=&\bar{\psi}_c(x)(-i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu(x)+m)_{ca}+i\bar{\vartheta}_c(x)\gamma^0_{ca}\\
=&\bar{\psi}(x)(-i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu(x)+m)+i\bar{\vartheta}(x)\gamma^0\approx 0
\end{aligned} \tag{162}$$

Como $\gamma^0\gamma^0=I$, multiplicando por la derecha a γ^0:

$$\begin{aligned}
0\approx&\bar{\psi}(x)(-i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu(x)+m)\gamma^0+i\bar{\vartheta}(x)\\
\bar{\vartheta}(x)\approx&i\bar{\psi}(x)(-i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i^x+e\gamma^\mu A_\mu(x)+m)\gamma^0
\end{aligned} \tag{163}$$

Por último, para el vínculo Θ_2:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_2 =&\{\Theta_2, H_p\} = \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b(x), \frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial^y_i A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y)\} \\
&+ \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b(x), \bar{\psi}_c(y)(-i\gamma^i\partial^y_i + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{cd}\psi_d(y) + \lambda_1(y)\Phi_1(y) + \bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y) + (\pi_d(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cd})\vartheta(y)\} \\
=& \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}(-i\gamma^i\partial^y_i + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{cd}\psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{cd}\int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}\vartheta_d(y) + \int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\{\psi_b(x), \pi_d(y)\}\vartheta_d(y) \\
=& \int d^3y(-\delta_{ac}\delta^3(x-y))(-i\gamma^i\partial^y_i + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{cd}\psi_d(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{cd}\int d^3y(-\delta_{ac}\delta^3(x-y))\vartheta_d(y) + \int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}(-\delta_{bd}\delta^3(x-y))\vartheta_d(y) \\
=& -\int d^3y\delta^3(x-y)(-i\gamma^i\partial^y_i + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{ad}\psi_d(y) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\int d^3y\delta^3(x-y)\vartheta_d(y) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\int d^3y\delta^3(x-y)\vartheta_d(y) \\
=& -(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{ad}\psi_d(x) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\vartheta_d(x) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ad}\vartheta_d(x) \\
=& -(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{ad}\psi_d(x) - i\gamma^0_{ad}\vartheta_d(x) \\
=& -\gamma^0(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)\psi(x) - i\gamma^0\vartheta(x) \approx 0
\end{aligned} \tag{164}$$

Multiplicando a γ^0 por la izquierda:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}_2 =& -\gamma^0(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)\psi(x) - i\vartheta(x) \approx 0 \\
\vartheta(x) \approx& i\gamma^0(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)\psi(x)
\end{aligned} \tag{165}$$

Demostrando así, las condiciones de consistencia expresadas en (4.24).

13.3. Ecuaciones de Movimiento Obtenidas a Partir del Hamiltoniano Extendido

Se procede a calcular a partir de:

$$\begin{aligned}
\dot{F} \approx& \{F(x), H_E\} = \{F(x), H_c\} + \int d^3y\{F(x), \lambda_1(y)\Phi_1(y)\} + \int d^3y\{F(x), \lambda_2(y)\Phi_2(y)\} \\
&+ \int d^3y\{F(x), \bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y)\} + \int d^3y\{F(x), \Theta_1(y)\vartheta(y))\},
\end{aligned} \tag{166}$$

donde el Hamiltoniano extendido esta dado por:

$$H_E \equiv \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \partial_i A_0(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c)$$
$$+ \int d^3x(\lambda_1(x)\Phi_1(x) + \lambda_2\Phi_2 + \bar{\vartheta}(x)\Theta_2(x) + \Theta_1(x)\vartheta(x)), \tag{167}$$

las ecuaciones de movimiento del espacio de fase inicial, compuesto por $(A_\mu, \psi_a, \bar{\psi}_a, \Pi^\mu, \pi_a, \bar{\pi}_a)$. Entonces, para el campo A_μ se deduce que:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_\mu(x) \approx &\{A_\mu(x), H_E\} = \{A_\mu(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y)\} \\
&+ \{A_\mu(x), \int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y))\} \\
&+ \int d^3y\{A_\mu(x), \lambda_1(y)\Pi^0(y)\} + \int d^3y\{A_\mu(x), \lambda_2(y)(\partial_i^y\Pi^i(y) - ie(\pi_b(y)\psi_b(y) + \bar{\psi}_b(y)\bar{\pi}_b(y)))\} \\
&+ \int d^3y\{A_\mu(x), \bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y)\} + \int d^3y\{A_\mu(x), \Theta_1(y)\vartheta(y))\} \\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\{A_\mu(x), \Pi^i(y)\} + \int d^3y\partial_i^y A_0(y)\{A_\mu(x), \Pi^i(y)\} + \int d^3y\lambda_1(y)\{A_\mu(x), \Pi^0(y)\} \\
&+ \int d^3y\lambda_2(y)\partial_i^y\{A_\mu(x), \Pi^i(y)\} \\
=&\int d^3y\Pi^i(y)(\delta_\mu^i\delta^3(x-y)) + \int d^3y\partial_i^y A_0(y)(\delta_\mu^i\delta^3(x-y)) + \int d^3y\lambda_1(y)(\delta_\mu^0\delta^3(x-y)) \\
&+ \int d^3y\lambda_2(y)\partial_i^y(\delta_\mu^i\delta^3(x-y)) \\
=&\delta_\mu^i\Pi^i(x) + \delta_\mu^i\partial_i^x A_0(x) + \delta_\mu^0\lambda_1(x)\delta^3(x-y) - \delta_\mu^i\partial_i^x\lambda_2(x) \\
=&\delta_\mu^i(\Pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x) - \partial_i^x\lambda_2(x)) + \delta_\mu^0\lambda_1(x)\delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Ahora, para el momento canónico Π^μ:

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^\mu(x) \approx &\{\Pi^\mu(x), H_E\} = \{\Pi^\mu(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y)\} \\
&+ \{\Pi^\mu(x), \int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y))\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d^3y\{\Pi^\mu(x),\lambda_1(y)\Pi^0(y)\}+\int d^3y\{\Pi^\mu(x),\lambda_2(y)(\partial_i^y\Pi^i(y)+ie(\pi_b(y)\psi_b(y)+\bar{\psi}_b(y)\bar{\pi}_b(y)))\}\\
&+\int d^3y\{\Pi^\mu(x),\bar{\vartheta}(y)\Theta_2(y)\}+\int d^3y\{\Pi^\mu(x),\Theta_1(y)\vartheta(y))\}\\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\partial_i^y\{\Pi^\mu(x),A_0(y)\}+\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\{\Pi^\mu(x),\partial_k^yA_i(y)-\partial_i^yA_k(y)\}\\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\partial_i^y(\delta_0^\mu\delta^3(x-y))+\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_k^y\{\Pi^\mu(x),A_i(y)\}-\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_i^y\{\Pi^\mu(x),A_k(y)\}\\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\partial_i^y(\delta_0^\mu\delta^3(x-y))+\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_k^y(\delta_i^\mu\delta^3(x-y))-\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_i^y(\delta_k^\mu\delta^3(x-y))\\
=&-\delta_0^\mu\partial_i^x\Pi^i(x)-\frac{1}{2}\delta_i^\mu\partial_k^xF^{ki}(x)+\frac{1}{2}\delta_k^\mu\partial_i^xF^{ki}(x)\\
=&-\delta_0^\mu\partial_i^x\Pi^i(x)+\frac{1}{2}\delta_i^\mu\partial_k^xF^{ik}(x)+\frac{1}{2}\delta_k^\mu\partial_i^xF^{ki}(x)\\
=&-\delta_0^\mu\partial_i^x\Pi^i(x)+\delta_i^\mu\partial_k^xF^{ik}(x).
\end{aligned}
$$

Para el campo fermiónico ψ, se demuestra lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x)\approx&\{\psi_a(x),H_E\}=\{\psi_a(x),\int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y)+\partial_i^yA_0(y)\Pi^i(y)+\frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y))\}\\
&+\{\psi_a(x),\int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu(y)+m)_{bc}\psi_c(y))\}\\
&+\int d^3y\{\psi_a(x),\lambda_1(y)\Pi^0(y)\}+\int d^3y\{\psi_a(x),\lambda_2(y)(\partial_i^y\Pi^i(y)-ie(\pi_b(y)\psi_b(y)+\bar{\psi}_b(y)\bar{\pi}_b(y)))\}\\
&+\int d^3y\{\psi_a(x),\bar{\vartheta}_b(y)(\bar{\pi}_b(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y))\}+\int d^3y\{\psi_a(x),(\pi_b(y)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb})\vartheta_b(y))\}\\
=&-ie\int d^3y\lambda_2(y)\{\psi_a(x),\pi_b(y)\}\psi_b(y)+\int d^3y\{\psi_a(x),\pi_b(y)\}\vartheta_b(y)\\
=&-ie\int d^3y\lambda_2(y)(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))\psi_b(y)+\int d^3y(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))\vartheta_b(y)\\
=&ie\lambda_2(x)\psi_a(x)-\vartheta_a(x).
\end{aligned}
\tag{168}
$$

De igual manera, para el momento canónico π se determina que:

$$
\begin{aligned}
\dot{\pi}_a(x) \approx&\{\pi_a(x), H_E\} = \{\pi_a(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y))\} \\
&+ \{\pi_a(x), \int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y))\} \\
&+ \int d^3y\{\pi_a(x), \lambda_1(y)\Pi^0(y)\} + \int d^3y\{\pi_a(x), \lambda_2(y)(\partial_i^y\Pi^i(y) - ie(\pi_b(y)\psi_b(y) + \bar{\psi}_b(y)\bar{\pi}_b(y)))\} \\
&+ \int d^3y\{\pi_a(x), \bar{\vartheta}_b(y)(\bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y))\} + \int d^3y\{\pi_a(x), (\pi_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb})\vartheta_b(y))\} \\
=&-\int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\{\pi_a(x), \psi_c(y)\} \\
&+ ie\int d^3y\lambda_2(y)\pi_b(y)\{\pi_a(x), \psi_b(y)\} - \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\int d^3y\bar{\vartheta}_b(y)\{\pi_a(x), \psi_c(y))\} \\
=&-\int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)) \\
&+ ie\int d^3y\lambda_2(y)\pi_b(y)(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)) - \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\int d^3y\bar{\vartheta}_b(y)(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)) \\
=&\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{ba} - ie\lambda_2(x)\pi_a(x) + \frac{i}{2}\bar{\vartheta}_b(x)\gamma^0_{ba}.
\end{aligned}
\tag{169}
$$

Finalmente, se determina para las variables fermiónicas conjugadas:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_a(x) \approx&\{\bar{\psi}_a(x), H_E\} = \{\bar{\psi}_a(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y))\} \\
&+ \{\bar{\psi}_a(x), \int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y))\} \\
&+ \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x), \lambda_1(y)\Pi^0(y)\} + \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x), \lambda_2(y)(\partial_i^y\Pi^i(y) - ie(\pi_b(y)\psi_b(y) + \bar{\psi}_b(y)\bar{\pi}_b(y)))\} \\
&+ \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\vartheta}_b(y)(\bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y))\} + \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x), (\pi_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb})\vartheta_b(y)\} \\
=&ie\int d^3y\lambda_2(y)\bar{\psi}_b(y)\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\} - \int d^3y\bar{\vartheta}_b(y)\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\} \\
=&ie\int d^3y\lambda_2(y)\bar{\psi}_b(y)(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)) - \int d^3y\bar{\vartheta}_b(y)(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)) \\
=&ie\lambda_2(x)\bar{\psi}_a(x) + \bar{\vartheta}_a(x)
\end{aligned}
\tag{170}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\pi}}_a(x) \approx &\{\bar{\pi}_a(x), H_E\} = \{\bar{\pi}_a(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \partial_i^y A_0(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{4}F^{ki}(y)F_{ki}(y))\} \\
&+ \{\bar{\pi}_a(x), \int d^3y(\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y))\} \\
&+ \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \lambda_1(y)\Pi^0(y)\} + \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \lambda_2(y)(\partial_i^y\Pi^i(y) - ie(\pi_b(y)\psi_b(y) + \bar{\psi}_b(y)\bar{\pi}_b(y)))\} \\
&+ \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\vartheta}_b(y)(\bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y))\} + \int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), (\pi_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb})\vartheta_b(y))\} \\
= &\int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y) \\
&- ie\int d^3y\lambda_2(y)\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}\bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{cb}\int d^3y\{\bar{\pi}_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}\vartheta_b(y) \\
= &\int d^3y(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi_c(y) \\
&- ie\int d^3y\lambda_2(y)(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))\bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{cb}\int d^3y(-\delta_{ac}\delta^3(x-y))\vartheta_b(y) \\
= &-(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{ac}\psi_c(x) + ie\lambda_2(x)\bar{\pi}_a(x) - \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\vartheta_b(x)
\end{aligned}
\tag{171}
$$

14. Apéndice N: Decucción de las relaciones () y (4.39) y (4.41)

14.1. Demostración de la Expresión (4.39)

Se consideran los vínculos de segunda clase:

$$
\begin{aligned}
\Theta_{1a} =&\pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \approx 0 \\
\Theta_{2a} =&\bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \approx 0.
\end{aligned}
\tag{172}
$$

y se calcula:

$$
\begin{aligned}
\{\Theta_{1a}(x),\Theta_{1d}(y)\} =& \{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba},\pi_d(y)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cd}\}=0\\
\{\Theta_{2a}(x),\Theta_{2d}(y)\} =& \{\bar{\pi}_a(x)+\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b(x),\bar{\pi}_d(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\psi_c(y)\}=0\\
\{\Theta_{1a}(x),\Theta_{2d}(y)\} =& \{\pi_a(x)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{ba},\bar{\pi}_d(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\psi_c(y)\}\\
=& \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\{\pi_a(x),\psi_c(y)\}+\{\bar{\psi}_b(x),\bar{\pi}_d(y)\}\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\\
=& \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}(-\delta_{ac}\delta^3(x-y))+(-\delta_{bd}\delta^3(x-y))\frac{i}{2}\gamma^0_{ba}\\
=& -\frac{i}{2}\gamma^0_{da}\delta^3(x-y)-\frac{i}{2}\gamma^0_{da}\delta^3(x-y)\\
=& -i\gamma^0_{da}\delta^3(x-y)\\
\{\Theta_{2a}(x),\Theta_{1d}(y)\} =& -i\gamma^0_{ad}\delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{173}
$$

Entonces, la matriz de vínculos secundarios será:

$$
C(x,y)_{ab}=\begin{pmatrix} 0 & -i\gamma^0_{ba} \\ -i\gamma^0_{ab} & 0 \end{pmatrix}\delta(x-y)=\begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix}\delta^3(x-y). \tag{174}
$$

Para calcular la matriz inversa de $C(x,y)$ se propone una matriz $C^{-1}(z,y)$ que cumpla la siguiente condición:

$$
\int d^3zC(x,z)C^{-1}(z,y)=\delta(x-y)I, \tag{175}
$$

y pueda ser representada como siendo:

$$
C^{-1}(x,y)=\begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) \end{pmatrix}. \tag{176}
$$

Entonces, se determina que:

$$\begin{aligned}\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta(x-z) \begin{pmatrix} A_1(z,y) & A_2(z,y) \\ B_1(z,y) & B_2(z,y) \end{pmatrix} =& \delta(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) \end{pmatrix} =& \delta(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{177}$$

Para que la relación anterior se cumpla debe igualarse componente a componente, así, se determina que:

$$\begin{aligned} -i(\gamma^0)^T B_1(x,y) =& \delta^3(x-y) \\ -i\gamma^0 A_2(x,y) =& \delta^3(x-y) \\ -i(\gamma^0)^T B_2(x,y) =& 0 \\ -i\gamma^0 A_1(x,y) =& 0. \end{aligned} \tag{178}$$

De los resultados anteriores se puede concluir que $B_2(x,y) = A_1(x,y) = 0$. Además, multiplicando $i(\gamma^0)^T$ por la izquierda a la primera expresión:

$$\begin{aligned} (\gamma^0\gamma^0)^T B_1(x,y) =& i(\gamma^0)^T \delta^3(x-y) \\ B_1(x,y) =& i(\gamma^0)^T \delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{179}$$

Por otro lado, multiplicando por iγ^0 a la segunda relación se tiene que:

$$A_2(x,y) = i\gamma^0 \delta^3(x-y). \tag{180}$$

Finalmente la matriz C^{-1} se puede escribir como:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i(\gamma^0)^T & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) \tag{181}$$

14.2. Demostración de las Expresiónes (4.41)

Por la definición de los corchetes de Dirac, ahora es posible considerar a los vínculos asociados a las variables fermiónicas como siendo identidades, es decir que:

$$\begin{aligned} \Theta_{1a} =& \pi_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} = 0 \\ \Theta_{2a} =& \bar{\pi}_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b = 0, \end{aligned} \tag{182}$$

se escoge como variables idependientes a los campos ψ y $\bar{\psi}$. Posteriormente se calcula:

$$\begin{aligned} \{\psi_a(x), \Theta_{1b}(y)\} =& \{\psi_a(x), \pi_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb}\} = \{\psi_a(x), \pi_b(y)\} = -\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\ \{\psi_a(x), \Theta_{2b}(y)\} =& \{\psi_a(x,t), \bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\} = 0 \\ \{\bar{\psi}_a(x), \Theta_{1b}(y)\} =& \{\bar{\psi}_a(x), \pi_b(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb}\} = 0 \\ \{\bar{\psi}_a(x), \Theta_{2b}(y)\} =& \{\bar{\psi}_a(x,t), \bar{\pi}_b(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\} = \{\bar{\psi}_a(x), \bar{\pi}_b(y)\} = -\delta_{ab}\delta^3(x-y). \end{aligned} \tag{183}$$

Se definen los corchetes de Dirac preliminares, a tiempos iguales entre dos variables dinámicas A(x) y B(x) como siendo:

$$\{A(x,t), B(y,t)\}'_D = \{A(x), B(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{A(x), \Theta_{ib}(u)\} C^{ij^{-1}}_{bc} \{\Theta_{jc}(v), B(y)\}, \tag{184}$$

Dado que $\psi_a(x)$ tiene corchete de Poisson diferente de cero únicamente con Θ_{1a}, es posible concluir lo que se indica a continuación:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}'_D =& \{\psi_a(x), \psi_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \Theta_{ic}(u)\} C_{cd}^{ij^{-1}}(u,v) \{\Theta_{jd}(v), \psi_b(y)\} \\
=& - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \Theta_{1c}(u)\} C_{cd}^{1j^{-1}} \{\Theta_{jd}(v), \psi_b(y)\}.
\end{aligned}
\tag{185}
$$

Teniendo en cuenta la matriz (4.39), se observa que el elemento no nulo de la primera fila es $C_{12}^{-1} = i\gamma^0\delta^3(x-y)$. Por lo tanto, el corchete de Dirac $\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}'_D$, será:

$$
\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}'_D = - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \Theta_{1c}(u)\} C_{cd}^{12^{-1}} \{\Theta_{2d}(v), \psi_b(y)\} \tag{186}
$$

$$
=0. \tag{187}
$$

Se procede a calcular, el siguiente corchete de Dirac:

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}'_D =& \{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_a(x), \Theta_{ic}(u)\} C_{cd}^{ij^{-1}}(u,v) \{\Theta_{jd}(v), \bar{\psi}_b(y)\} \\
=& - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_a(x), \Theta_{2c}(u)\} C_{cd}^{2j^{-1}} \{\Theta_{jd}(v), \bar{\psi}_b(y)\}.
\end{aligned}
\tag{188}
$$

Recordando que el elemento diferente de cero en la segunda fila es $C_{21}^{-1} = i(\gamma^0)^T\delta^3(x-y)$, y $\{\bar{\psi}_a(x), \Theta_{1b}(y)\} = 0$, entonces, se determina que:

$$
\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}'_D = 0. \tag{189}
$$

Por último se calcula el corchete de Dirac entre los campos ψ y $\bar{\psi}$:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D =&\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x),\Theta_{ic}(u)\} C^{ij^{-1}}_{cd}(u,v)\{\Theta_{jd}(v),\bar{\psi}_b(y)\} \\
=& - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x),\Theta_{1c}(u)\} C^{12^{-1}}_{cd}(u,v)\{\Theta_{2d}(v),\bar{\psi}_b(y)\}
\end{aligned}
\tag{190}
$$

Reemplazando el elemento de matriz $C^{12^{-1}}_{cd}$, y los corchetes de Poisson correspondientes, se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D =& - \int\int d^3u d^3v (-\delta_{ac}\delta^3(x-u))(i\gamma^0_{cd}\delta^3(u-v))(-\delta_{bd}\delta^3(y-v)) \\
=& - i\gamma^0_{ab}\int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u)\delta^3(u-v)\delta^3(y-v) \\
=& - i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)
\end{aligned}
\tag{191}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x),\psi_b(y)\}'_D =&\{\bar{\psi}_a(x),\psi_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_a(x),\Theta_{ic}(u)\} C^{ij^{-1}}_{cd}(u,v)\{\Theta_{jd}(v),\psi_b(y)\} \\
=& - \int\int d^3u d^3v (-\delta_{ac}\delta^3(x-u))(i\gamma^0_{dc}\delta^3(u-v))(-\delta_{bd}\delta^3(y-v)) \\
=& - i\gamma^0_{ba}\int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u)\delta^3(u-v)\delta^3(y-v) \\
=& - i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{192}
$$

Con el fin de calcular los corchetes de Dirac preliminares entre los campos fermiónicos y los campos bosónicos, se determina los siguientes corchetes de Poisson:

$$
\begin{aligned}
\{A_\mu(x),\Theta_{1b}(y,t)\} =&\{A_\mu(x),\pi_b(y)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb}\}=0\\
\{A_\mu(x),\Theta_{2b}(y,t)\} =&\{A_\mu(x),\bar{\pi}_b(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\}=0\\
\{\Pi^\mu(x),\Theta_{1b}(y,t)\} =&\{\Pi^\mu(x),\pi_b(y)+\frac{i}{2}\bar{\psi}_c(y)\gamma^0_{cb}\}=0\\
\{\Pi^\mu(x,,\Theta_{2b}(y,t)\} =&\{\Pi^\mu(x),\bar{\pi}_b(y)+\frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_c(y)\}=0.
\end{aligned}
\tag{193}
$$

Por ende, se deduce los siguientes corchetes de Dirac:

$$
\begin{aligned}
\{A_\mu(x),\psi_b(y)\}'_D =&\{A_\mu(x),\psi_b(y)\}-\int\int d^3ud^3v\{A_\mu,\Theta_{ic}(u)\}C^{ij^{-1}}_{cd}(u,v)\{\Theta_{jd}(v),\psi_b(y)\}\\
=&0
\end{aligned}
\tag{194}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_\mu(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D =&\{A_\mu(x),\bar{\psi}_b(y)\}-\int\int d^3ud^3v\{A_\mu,\Theta_{ic}(u)\}C^{ij^{-1}}_{cd}(u,v)\{\Theta_{jd}(v),\bar{\psi}_b(y)\}\\
=&0
\end{aligned}
\tag{195}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^\mu(x),\psi_b(y)\}'_D =&\{\Pi^\mu(x),\psi_b(y)\}-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^\mu,\Theta_{ic}(u)\}C^{ij^{-1}}_{cd}(u,v)\{\Theta_{jd}(v),\psi_b(y)\}\\
=&0
\end{aligned}
\tag{196}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^{\mu}(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D' =& \{\Pi^{\mu}(x),\bar{\psi}_b(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\Pi^{\mu},\Theta_{ic}(u)\} C_{cd}^{ij^{-1}}(u,v)\{\Theta_{jd}(v),\bar{\psi}_b(y)\} \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{197}
$$

Entonces, se tiene que los corchetes consistentes con los vínculos Θ^i (i=1,2) asociados a las variables fermiónicas están dados por las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x,t),\psi_b(y,t)\}_D' =& 0 \\
\{\bar{\psi}_a(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D' =& 0 \\
\{\psi_a(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D' =& -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{\bar{\psi}_a(x,t),\psi_b(y,t)\}_D' =& -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{A_{\mu}(x,t),\psi_b(y,t)\}_D' =& 0 \\
\{A_{\mu}(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D' =& 0 \\
\{\Pi^{\mu}(x,t),\psi_b(y,t)\}_D' =& 0 \\
\{\Pi^{\mu}(x,t),\bar{\psi}_b(y,t)\}_D' =& 0.
\end{aligned}
\tag{198}
$$

15. Apéndice O: Demostración de (4.44) y (4.46)

15.1. Demostración de la matriz dada por (4.44)

Se considera el conjunto de vínculos

$$
\begin{aligned}
\phi_1 =& \Phi_1 = \Pi^0(x) \approx 0 \\
\phi_2 =& \Phi_2 = \partial_i^x \Pi^i(x) - ie(\pi_a \psi_a + \bar{\psi}_a \bar{\pi}_a) = \partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b \gamma_{ba}^0 \psi_a) \\
\phi_3 =& \chi_1 = \partial_i^x \Pi^i(x) + \partial_i^x \partial_i^x A_0(x) \approx 0 \\
\phi_4 =& \chi_2 = \partial_i^x A^i(x) \approx 0,
\end{aligned}
\tag{199}
$$

Donde ϕ_2 se reescribió usando las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
\pi_a =& -\frac{i}{2} \bar{\psi}_b \gamma_{ba}^0 \\
\bar{\pi}_a =& -\frac{i}{2} \gamma_{ab}^0 \psi_b.
\end{aligned}
\tag{200}
$$

Usando los corchetes de Dirac preliminares determinados anteriormente se procede a realizar el cálculo de los siguientes corchetes:

$$\{\phi_1, \phi_1\}^*_D = \{\Pi^0(x), \Pi^0(y)\}^*_D = 0 \tag{201}$$

$$\{\phi_1, \phi_2\}^*_D = \{\Pi^0(x), \partial_i^y \Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b \gamma_{ba}^0 \psi_a)\}^*_D = 0 \tag{202}$$

$$\{\phi_1, \phi_3\}^*_D = \{\Pi^0(x), \partial_i^y \Pi^i(y) + \partial_i^y \partial_i^y A_0(y)\}^*_D = -\partial_i^x \partial_i^x \delta^3(x-y) \tag{203}$$

$$\{\phi_1, \phi_4\}^*_D = \{\Pi^0(x), \partial_i^y A^i(y)\}^*_D = 0 \tag{204}$$

$$\{\phi_2, \phi_1\}^*_D = \{\partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x), \Pi^0(y)\}^*_D = 0 \tag{205}$$

$$\{\phi_2, \phi_2\}^*_D = \{\partial_i^x \Pi^i(x) - e\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x), \partial_k^y \Pi^k(y) - e\bar{\psi}_c(y) \gamma_{cd}^0 \psi_d(y)\}^*_D \tag{206}$$

$$= \{e\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x), e\bar{\psi}_c(y) \gamma_{cd}^0 \psi_d(y)\}^*_D \tag{207}$$

$$= ee\bar{\psi}_c(y) \gamma_{cd}^0 \{\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x), \psi_d(y)\}^*_D + ee\{\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}^*_D \gamma_{cd}^0 \psi_d(y) \tag{208}$$

$$= -ee\bar{\psi}_c(y) \gamma_{cd}^0 \gamma_{ba}^0 \psi_a(x) \{\bar{\psi}_b(x), \psi_d(y)\}^*_D + ee\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \{\psi_a(x), \bar{\psi}_c(y)\}^*_D \gamma_{cd}^0 \psi_d(y) \tag{209}$$

$$= iee\bar{\psi}_c(y) \gamma_{cd}^0 \gamma_{db}^0 \gamma_{ba}^0 \psi_a(x) \delta^3(x-y) - iee\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \gamma_{ac}^0 \gamma_{cd}^0 \psi_d(y) \delta^3(x-y) \tag{210}$$

$$= 0 \tag{211}$$

$$\{\phi_2, \phi_3\}^*_D = \{\partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x)), \partial_i^y \Pi^i(y) + \partial_i^y \partial_i^y A_0(y)\}^*_D = 0 \tag{212}$$

$$\{\phi_2, \phi_4\}^*_D = \{\partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x)), \partial_k^y A^k(y)\}^*_D = -\partial_i^x \partial_k^y \{\Pi^i(x), A_k(y)\}^*_D = \delta_i^k \partial_i^x \partial_k^y \delta^3(x-y) \tag{213}$$

$$= -\partial_i^x\partial_i^x\delta^3(x-y) \tag{214}$$

$$\{\phi_3,\phi_3\}_D = \{\partial_i^x\Pi^i(x) + \partial_i^x\partial_i^x A_0(x), \partial_j^y\Pi^j(y) + \partial_j^y\partial_j^y A_0(y)\}_D = 0 \tag{215}$$

$$\{\phi_4,\phi_4\}_D = \{\partial_i^x A^i(x), \partial_k^y A^k(y)\}_D = 0 \tag{216}$$

$$\{\phi_3,\phi_4\}_D = \{\partial_i^x\Pi^i(x) + \partial_i^x\partial_i^x A_0(x), \partial_k^y A^k(y)\}_D \tag{217}$$

$$= -\partial_i^x\partial_k^y\{\Pi^i(x), A_k(y)\}_D \tag{218}$$

$$= -\partial_i^x\partial_k^y(-\delta_k^i\delta^3(x-y)) \tag{219}$$

$$= -\partial_i^x\partial_i^x\delta^3(x-y) \tag{220}$$

$$\tag{221}$$

Entonces, la matriz de los vínculos secundarios será:

$$C(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x \\ \partial_i^x\partial_i^x & 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x \\ 0 & \partial_i^x\partial_i^x & \partial_i^x\partial_i^x & 0 \end{pmatrix}\delta(x-y). \tag{222}$$

La matriz inversa de $C(x,y)$ se calcula considerando una matriz que se pueda expresar como:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & A_3(x,y) & A_4(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) & B_3(x,y) & B_4(x,y) \\ C_1(x,y) & C_2(x,y) & C_3(x,y) & C_4(x,y) \\ D_1(x,y) & D_2(x,y) & D_3(x,y) & D_4(x,y) \end{pmatrix}, \tag{223}$$

y cumpla la siguiente condición:

$$\int d^3z C(x,z)C^{-1}(z,y) = \delta(x-y)I. \tag{224}$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x \\ \partial_i^x\partial_i^x & 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x \\ 0 & \partial_i^x\partial_i^x & \partial_i^x\partial_i^x & 0 \end{pmatrix} \delta(x-z) \begin{pmatrix} A_1(z,y) & A_2(z,y) & A_3(z,y) & A_4(z,y) \\ B_1(z,y) & B_2(z,y) & B_3(y,z) & B_4(z,y) \\ C_1(z,y) & C_2(z,y) & C_3(z,y) & C_4(z,y) \\ D_1(z,y) & D_2(z,y) & D_3(z,y) & D_4(z,y) \end{pmatrix} &= \delta(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x \\ \partial_i^x\partial_i^x & 0 & 0 & -\partial_i^x\partial_i^x \\ 0 & \partial_i^x\partial_i^x & \partial_i^x\partial_i^x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & A_3(x,y) & A_4(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) & B_3(x,z) & B_4(x,y) \\ C_1(x,y) & C_2(x,y) & C_3(x,y) & C_4(x,y) \\ D_1(x,y) & D_2(x,y) & D_3(x,y) & D_4(x,y) \end{pmatrix} &= \delta(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{225}
$$

Igualando componente a componente se puede determinar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
& -\partial_i^x\partial_i^x C_1(x,y) = \delta^3(x-y) \\
& -\partial_i^x\partial_i^x C_2(x,y) = 0 \\
& -\partial_i^x\partial_i^x C_3(x,y) = 0 \\
& -\partial_i^x\partial_i^x C_4(x,y) = 0.
\end{aligned}
\tag{226}
$$

Por ende, las componentes $C_2 = C_3 = C_4 = 0$. Por otro lado, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
& \partial_i^x\partial_i^x D_1(z,y) = 0 \\
& \partial_i^x\partial_i^x D_2(z,y) = -\delta^3(x-y) \\
& \partial_i^x\partial_i^x D_3(z,y) = 0 \\
& \partial_i^x\partial_i^x D_4(z,y) = 0,
\end{aligned}
\tag{227}
$$

De donde se concluye que $D_1 = D_3 = D_4 = 0$. Finalmente se tienen las siguientes condiciones:

$$
\begin{aligned}
\partial_i^x \partial_i^x A_1(x,y) - \partial_i^x \partial_i^x D_1(x,y) =& 0 \\
\partial_i^x \partial_i^x A_2(x,y) - \partial_i^x \partial_i^x D_2(x,y) =& 0 \\
\partial_i^x \partial_i^x A_3(x,y) - \partial_i^x \partial_i^x D_3(x,y) =& \delta(x-y) \\
\partial_i^x \partial_i^x A_4(x,y) - \partial_i^x \partial_i^x D_4(x,y) =& 0
\end{aligned} \tag{228}
$$

$$
\begin{aligned}
\partial_i^x \partial_i^x B_1(x,y) + \partial_i^x \partial_i^x C_1(x,y) =& 0 \\
\partial_i^x \partial_i^x B_2(x,y) + \partial_i^x \partial_i^x C_2(x,y) =& 0 \\
\partial_i^x \partial_i^x B_3(x,y) + \partial_i^x \partial_i^x C_3(x,y) =& 0 \\
\partial_i^x \partial_i^x B_4(x,y) + \partial_i^x \partial_i^x C_4(x,y) =& \delta(x-y),
\end{aligned} \tag{229}
$$

De las cuales es posible afirmar que $A_1 = A_2 = B_2 = B_3 = 0$. Adicionalmente resultan las siguientes ecuaciones diferenciales para las componentes restantes:

$$
\begin{aligned}
\partial_i^x \partial_i^x A_3(x,y) =& \delta(x-y) \\
\partial_i^x \partial_i^x A_2(x,y) =& \partial_i^x \partial_i^x D_2(x,y) = -\delta^3(x-y) \\
\partial_i^x \partial_i^x B_1(x,y) =& -\partial_i^x \partial_i^x C_1(x,y) = \delta^3(x-y) \\
\partial_i^x \partial_i^x B_4(x,y) =& \delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{230}
$$

Haciendo uso de las funciones de Green se puede determinar que la operación inversa del Laplaciano aplicada a una función $\rho(\mathbf{x})$ esta dada por:

$$
\nabla^{-2}\rho(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\mathbf{y})}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{y} \mid} d^3y, \tag{231}
$$

aplicando el resultado anterior a la función delta de Dirac se tiene que:

$$\nabla^{-2}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\delta(\mathbf{z}-\mathbf{y})}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{z} \mid} d^3z = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mid \mathbf{x}-\mathbf{y} \mid}. \tag{232}$$

Entonces, se concluye que:

$$A_3(x,y) = -A_2(x,y) = B_1(x,y) = B_4(x,y) = -C_1(x,y) = -D_2(x,y) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}. \tag{233}$$

Finalmente, reemplazando los valores obtenidos se demuestra que:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \tag{234}$$

15.2. Demostración Corchetes de Dirac dados por (4.46)

Se definen los corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas $A(x)$ y $B(y)$ a tiempos iguales como:

$$\{A(x),B(y)\}_D = \{A(x),B(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{A(x),\phi_\mu(u)\}'_D C^{-1}_{\mu v}(u,v)\{\phi_v(v),B(y)\}'_D. \tag{235}$$

Y considerando los vínculos (3.38), se calcula:

$$\{A_\mu(x),\phi_1(y)\}'_D = \{A_\mu(x),\Pi^0(y)\}'_D = \delta^0_\mu \delta^3(x-y) \tag{236}$$

$$\{A_\mu(x),\phi_2(y)\}_D = \{A_\mu(x),\partial_i^y\Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}\psi_a)\}_D = \partial_i^y\{A_\mu(x),\Pi^i(y)\}_D = \delta^i_\mu\partial_i^y\delta^3(x-y) = -\delta^i_\mu\partial_i^x\delta^3(x-y) \tag{237}$$

$$\{A_\mu(x),\phi_3(y)\}_D = \{A_\mu(x),\partial_j^y\Pi^j(y) + \partial_j^y\partial_j^y A_0(y)\}_D \tag{238}$$

$$= \partial_j^y\{A_\mu(x),\Pi^j(y)\}_D \tag{239}$$

$$= \partial_j^y(\delta^j_\mu\delta^3(x-y)) \tag{240}$$

$$= -\delta^j_\mu\partial_j^x\delta^3(x-y) \tag{241}$$

$$\{A_\mu(x),\phi_4(y)\}_D = \{A_\mu(x),\partial_i^y A^i(y)\}_D = 0 \tag{242}$$

$$\{\Pi^\mu(x),\phi_1(y)\}_D = \{\Pi^\mu(x),\Pi^0(y)\}_D = 0 \tag{243}$$

$$\{\Pi^\mu(x),\phi_2(y)\}_D = \{\Pi^\mu(x),\partial_i^y\Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}\psi_a)\}_D = 0 \tag{244}$$

$$\{\Pi^\mu(x),\phi_3(y)\}_D = \{\Pi^\mu(x),\partial_j^y\Pi^j(y) + \partial_j^y\partial_j^y A_0(y)\}_D \tag{245}$$

$$= \partial_j^y\partial_j^y\{\Pi^\mu(x),A_0(y)\}_D \tag{246}$$

$$= \partial_j^y\partial_j^y(-\delta^0_j\delta^3(x-y)) \tag{247}$$

$$= -\delta^0_j\partial_j^x\partial_j^x\delta^3(x-y) \tag{248}$$

$$\{\Pi^\mu(x),\phi_4(y)\}_D = \{\Pi^\mu(x),\partial_i^y A^i(y)\}_D = -\partial_i^y\{\Pi^\mu(x),A_i(y)\}_D = \delta^\mu_i\partial_i^y\delta^3(x-y) = -\delta^\mu_i\partial_i^x\delta^3(x-y) \tag{249}$$

Si se escoge como grados de libertad $A_i(x), \Pi^j(y)$ donde $i, j = 1, 2,$, entonces se cumple lo que se indica a continuación:

$$\begin{aligned} \{A_i(x),\phi_1(y)\}_D &= 0 \\ \{\Pi^i(x),\phi_3(y)\}_D &= 0 \end{aligned} \tag{250}$$

Por lo tanto, los corchetes de Dirac fundamentales estarán dados por:

$$
\begin{aligned}
\{A_i(x), A_j(y)\}_D =& \{A_i(x), A_j(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v), A_j(y)\}'_D \\
=& -\int\int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{2j}(u,v)\{\phi_j(v), A_j(y)\}'_D \\
& -\int\int d^3u d^3v \{A_i(x), \phi_3(u)\}'_D C^{-1}_{3j}(u,v)\{\phi_j(v), A_j(y)\}'_D
\end{aligned}
\tag{251}
$$

Debido a que en la segunda, y en la tercera fila las componentes diferentes de cero son C^{-1}_{21}, C^{-1}_{24} y C^{-1}_{31}, y el momento canónico solo posee corchete de Dirac preliminar no nulo con ϕ_2 y ϕ_2, se concluye que:

$$
\{A_i(x), A_j(y)\}_D = 0 \tag{252}
$$

Haciendo un analisis similar al realizado anteriormente, es posible determinar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^\mu(x), \Pi^\upsilon(y)\}_D =& \{\Pi^\mu(x), \Pi^\upsilon(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{\Pi^\mu(x), \phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v), \Pi^\upsilon(y)\}'_D \\
=& -\int\int d^3u d^3v \{\Pi^\mu(x), \phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{4j}(u,v)\{\phi_j(v), \Pi^\upsilon(y)\}'_D \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{253}
$$

Finalmente, el corchete de Dirac entre el campo A_μ, y el momento canónico Π^μ está dado por:

$$
\begin{aligned}
\{A_i(x),\Pi^j(y)\}_D =&\{A_i(x),\Pi^j(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{A_i(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\Pi^j(y)\}'_D \\
=&\{A_i(x),\Pi^j(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{A_i(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{2j}(u,v)\{\phi_j(v),\Pi^j(y)\}'_D \\
&- \int\int d^3ud^3v\{A_i(x),\phi_3(u)\}'_D C^{-1}_{3j}(u,v)\{\phi_j(v),\Pi^j(y)\}'_D \\
=&\{A_\mu(x),\Pi^\upsilon(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{A_\mu(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{24}(u,v)\{\phi_4(v),\Pi^\upsilon(y)\}'_D \\
=&\delta^j_i\delta^3(x-y) - \int\int d^3ud^3v(-\partial^x_i\delta^3(x-u))(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|u-v|})(\partial^y_j\delta^3(y-v)) \\
=&\delta^j_i\delta^3(x-y) - \partial^x_i\partial^y_j\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}
\end{aligned}
\tag{254}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^i(x),A_j(y)\}_D =&\{\Pi^i(x),A_j(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\Pi^i(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),A_j(y)\}'_D \\
=&\{\Pi^i(x),A_j(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\Pi^i(x),\phi_3(u)\}'_D C^{-1}_{3j}(u,v)\{\phi_j(v),A_j(y)\}'_D \\
&- \int\int d^3ud^3v\{\Pi^i(x),\phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{4j}(u,v)\{\phi_j(v),A_j(y)\}'_D \\
=&\{\Pi^i(x),A_j(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\Pi^i(x),\phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{42}(u,v)\{\phi_2(v),A_j(y)\}'_D \\
=&-\delta^i_j\delta^3(x-y) - \int\int d^3ud^3v(-\partial^x_i\delta^3(x-u))(\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|u-v|})(\partial^y_j\delta^3(y-v)) \\
=&-\delta^i_j\delta^3(x-y) + \partial^x_i\partial^y_j\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}
\end{aligned}
\tag{255}
$$

Por lo tanto, se concluye que los corchetes fundamentales de Dirac para las variables bosonicas en el gauge de radiación estan dados por:

$$
\begin{aligned}
\{A_i(x), A_j(y)\}_D =& 0 \\
\{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}_D =& 0 \\
\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D =& \delta_i^j \delta^3(x-y) - \partial_i^x \partial_j^y \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} \\
\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D =& -\delta_j^i \delta^3(x-y) + \partial_i^x \partial_j^y \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|}
\end{aligned}
\tag{256}
$$

Para determinar los corchetes de Dirac finales asociados a los campos fermiónicos es necesario calcular los siguientes corchetes:

$$\{\psi_a(x), \phi_1(y)\}'_D = \{\psi_a(x), \Pi^0(y)\}'_D = 0 \tag{257}$$

$$\{\psi_a(x), \phi_2(y)\}'_D = \{\psi_a(x), \partial_i^y \Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b(y)\gamma_{bc}^0 \psi_c(y))\}'_D \tag{258}$$

$$= -e\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}'_D \gamma_{bc}^0 \psi_c(y) \tag{259}$$

$$= -e(-i\gamma_{ab}^0 \delta^3(x-y))\gamma_{bc}^0 \psi_c(y) \tag{260}$$

$$= ie\delta_{ac}\psi_c(x)\delta^3(x-y) \tag{261}$$

$$= ie\psi_a(x)\delta^3(x-y) \tag{262}$$

$$\{\psi_a, \phi_3(y)\}'_D = \{\psi_a(x), \partial_j^y \Pi^j(y) + \partial_j^y \partial_j^y A_0(y)\}'_D = 0 \tag{263}$$

$$\{\psi_a, \phi_4(y)\}'_D = \{\psi_a(x), \partial_i^x A^i(y)\}'_D = 0 \tag{264}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \phi_1(y)\}'_D = \{\bar{\psi}_a(x), \Pi^0(y)\}'_D = 0 \tag{265}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \phi_2(y)\}'_D = \{\bar{\psi}_a(x), \partial_i^y \Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b(y)\gamma_{bc}^0 \psi_c(y))\}'_D \tag{266}$$

$$= e\bar{\psi}_b(y)\gamma_{bc}^0 \{\bar{\psi}_a(x), \psi_c(y)\}'_D \tag{267}$$

$$
\begin{aligned}
&= e\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{bc}(-i\gamma^0_{ac}\delta^3(x-y)) && (268)\\
&= -ie\bar{\psi}_b(x)\delta_{ba}\delta^3(x-y) && (269)\\
&= -ie\bar{\psi}_a(x)\delta^3(x-y) && (270)\\
\{\psi_a(x),\phi_3(y)\}'_D &= \{\bar{\psi}_a(x),\partial^y_j\Pi^j(y)+\partial^y_j\partial^y_jA_0(y)\}'_D = 0 && (271)\\
\{\psi_a(x),\phi_4(y)\}'_D &= \{\psi_a(x),\partial^x_iA^i(y)\}'_D = 0. && (272)
\end{aligned}
$$

Ahora, es posible definir los corchetes de Dirac entre las variables fermiónicas como siendo:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x),\psi_b(y)\}_D &= \{\psi_a(x),\psi_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_i(u)\}'_DC^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\psi_b(y)\}'_D\\
&= -\int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_2(u)\}'_DC^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\psi_b(y)\}'_D\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{273}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D &= \{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_i(u)\}'_DC^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\
&= -\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_DC^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{274}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D &= \{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_i(u)\}'_DC^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\
&= -i\gamma^0_{ab}\delta(x-y) - \int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_2(u)\}'_DC^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\
&= -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)
\end{aligned}
\tag{275}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\}_D =& \{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v \{\bar{\psi}_a(x), \phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v) \{\phi_j(v), \psi_b(y)\}'_D \\
=& - i\gamma^0_{ba}\delta(x-y) - \int\int d^3ud^3v \{\bar{\psi}_a(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{22}(u,v) \{\phi_2(v), \psi_b(y)\}'_D \\
=& - i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)
\end{aligned}
\tag{276}
$$

Finalmente, se calculan los corchetes de Dirac entre los campos fermiónicos ψ_a,ψ_a y los campos bosónicos A_μ, Π^μ. Los cuales se derivan a partir del siguiente cálculo:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x), A_i(y)\}_D =& \{\psi_a(x), A_i(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v \{\psi_a(x), \phi_k(u)\}'_D C^{-1}_{kl}(u,v) \{\phi_l(v), A_i(y)\}'_D \\
=& - \int\int d^3ud^3v \{\psi_a(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{21}(u,v) \{\phi_1(v), A_i(y)\}'_D \\
& - \int\int d^3ud^3v \{\psi_a(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{24}(u,v) \{\phi_4(v), A_i(y)\}'_D \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{277}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x), A_i(y)\}_D =& \{\bar{\psi}_a(x), A_i(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v \{\bar{\psi}_a(x), \phi_k(u)\}'_D C^{-1}_{kl}(u,v) \{\phi_l(v), A_i(y)\}'_D \\
=& - \int\int d^3ud^3v \{\bar{\psi}_a(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{24}(u,v) \{\phi_4(v), A_i(y)\}'_D \\
& - \int\int d^3ud^3v \{\psi_a(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{24}(u,v) \{\phi_4(v), A_i(y)\}'_D \\
=& 0
\end{aligned}
\tag{278}
$$

$$\begin{aligned}
\{\psi_a(x), \Pi^i(y)\}_D =&\{\psi_a(x), A_i(y)\}_D' - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \phi_k(u)\}_D' C^{-1}_{kl}(u,v)\{\phi_l(v), \Pi^i(y)\}_D' \\
=& - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \phi_2(u)\}_D' C^{-1}_{24}(u,v)\{\phi_4(v), \Pi^i(y)\}_D' \\
=& - \int\int d^3u d^3v (ie\psi_a(x)\delta^3(x-u))(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|u-v|})(\partial_i^y \delta^3(y-v)) \\
=& ie\frac{1}{4\pi}\psi_a(x)\partial_i^y \int\int d^3u d^3v \frac{1}{|u-v|}\delta^3(x-u)\delta^3(y-v) \\
=& - ie\frac{1}{4\pi}\psi_a(x)\partial_i^x \frac{1}{|x-y|}
\end{aligned} \tag{279}$$

$$\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x), \Pi^i(y)\}_D =&\{\bar{\psi}_a(x), \Pi^i(y)\}_D' - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_a(x), \phi_k(u)\}_D' C^{-1}_{kl}(u,v)\{\phi_l(v), \Pi^i(y)\}_D' \\
=& - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_a(x), \phi_2(u)\}_D' C^{-1}_{24}(u,v)\{\phi_4(v), \Pi^i(y)\}_D' \\
=& - \int\int d^3u d^3v (-ie\bar{\psi}_a(x)\delta^3(x-u))(-\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|u-v|})(\partial_i^y \delta^3(y-v)) \\
=& - ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\partial_i^y \int\int d^3u d^3v \frac{1}{|u-v|}\delta^3(x-u)\delta^3(y-v) \\
=& ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\partial_i^x \frac{1}{|x-y|}
\end{aligned} \tag{280}$$

Entonces, en el gauge de radiación para las variables independientes escogidas se obtienen los siguientes corchetes fundamentales:

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_D = 0 \tag{281}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D = 0 \tag{282}$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D = - i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{283}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\}_D = -i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)\{A_i(x), A_j(y)\}_D = \qquad 0 \tag{284}$$

$$\{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}_D = 0 \tag{285}$$

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \delta_i^j\delta^3(x-y) - \partial_i^x\partial_j^y\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \tag{286}$$

$$\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D = -\delta_j^i\delta^3(x-y) + \partial_i^x\partial_j^y\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \tag{287}$$

$$\{\psi_a(x), \Pi^i(y)\}_D = -ie\frac{1}{4\pi}\psi_a(x)\partial_i^x\frac{1}{|x-y|} \tag{288}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \Pi^i(y)\}_D = ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\partial_i^x\frac{1}{|x-y|} \tag{289}$$

$$\{\psi_a(x), A_i(y)\}_D = 0 \tag{290}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), A_i(y)\}_D = 0 \tag{291}$$

16. Apéndice P: Evolución Temporal de los Campos en el Gauge de Radiación

Considerando al Hamiltoniano de la teoría:

$$H = \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \frac{1}{2}F^{ki}(x)F_{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c), \tag{292}$$

y los resultados obtenidos en (3.46), se puede calcular la evolución temporal de las variables independientes escogidas $A_i(x), \Pi^j(y)$ $(i, j = 1, 2)$, y de las variables fermiónicas $\psi_a, \bar{\psi}_a$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x,t) =&\{\psi_a(x,t), H\}_D = \int d^3y\{\psi_a(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y) + \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y))\}_D \\
=& \int d^3y\Pi^i(y)\{\psi_a(x), \Pi^i(y)\}_D + \int d^3y\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y)\}_D \\
=& \int d^3y\Pi^i(y)(-ie\frac{1}{4\pi}\psi_a(x)\partial_i^x\frac{1}{|x-y|}) + \int d^3y\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y) \\
=& \int d^3y\Pi^i(y)(ie\frac{1}{4\pi}\psi_a(x)\partial_i^y\frac{1}{|x-y|}) + \int d^3y(-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y))(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y) \\
=& \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\frac{1}{|x-y|}) - \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\frac{1}{|x-y|}\partial_i^y\Pi^i(y) - i\gamma^0_{ab}(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{bc}\psi_c(x) \\
=& \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\frac{1}{|x-y|}) + \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\frac{1}{|x-y|}(\partial_i^y\partial_i^y A_0(y)) - i\gamma^0_{ab}(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{bc}\psi_c(x) \\
=& \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\frac{1}{|x-y|}) + \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\partial_i^y(\partial_i^y(\frac{1}{|x-y|}A_0(y))) - \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3yA_0(y)\partial_i^y\partial_i^y\frac{1}{|x-y|} \\
&- i\gamma^0_{ab}(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{bc}\psi_c(x) \\
=& \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\frac{1}{|x-y|}) + \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3y\partial_i^y(\partial_i^y(\frac{1}{|x-y|}A_0(y))) - \frac{1}{4\pi}ie\psi_a(x)\int d^3yA_0(y)(-4\pi\delta^3(x-y)) \\
&- i\gamma^0_{ab}(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{bc}\psi_c(x)
\end{aligned}
\tag{293}
$$

Los primeros dos términos puedes ser despreciados haciendo uso de la ley de Gauss y teniendo en cuenta la propiedad asintótica de los campos. Por ende, La evolución temporal del campo ψ_a será:

$$
\dot{\psi}_a(x,t) = ie\psi_a(x)A_0(x) - i\gamma^0_{ab}(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu(x) + m)_{bc}\psi_c(x) \tag{294}
$$

Ahora, para el campo fermiónico $\bar{\psi}_a(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_a(x,t) =&\{\bar{\psi}_a(x,t),H\}_D = \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x),(\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y)+\frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y)+\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}\psi_c(y))\}_D \\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\{\bar{\psi}_a(x),(\Pi^i(y)\}_D+\int d^3y\{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}\psi_c(y)\}_D \\
=&\int d^3y\Pi^i(y)(ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\partial_i^x\frac{1}{|x-y|})-\int d^3y\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}\{\bar{\psi}_a(x),\psi_c(y)\}_D \\
=&-\int d^3y\Pi^i(y)(ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\partial_i^y\frac{1}{|x-y|})-\int d^3y\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}(-i\gamma^0_{ca}\delta^3(x-y)) \\
=&-ie\frac{1}{4\pi}\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\bar{\psi}_a(x)\frac{1}{|x-y|})+ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\int d^3y\frac{1}{|x-y|}\partial_i^y\Pi^i(y)+i\gamma^0_{ca}\int d^3y\bar{\psi}_b(y)(i\gamma^i\partial_i^x \\
&+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}\delta^3(x-y) \\
=&-ie\frac{1}{4\pi}\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\bar{\psi}_a(x)\frac{1}{|x-y|})-ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\int d^3y\frac{1}{|x-y|}(\partial_i^y\partial_i^yA_0(y))+i\gamma^0_{ca}\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc} \\
=&-ie\frac{1}{4\pi}\int d^3y\partial_i^y(\Pi^i(y)\bar{\psi}_a(x)\frac{1}{|x-y|})-ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\int d^3y\partial_i^y\partial_i^y(\frac{1}{|x-y|}A_0(y))+ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\int d^3yA_0(y)\partial_i^y\partial_i^y\frac{1}{|x-y|} \\
&+i\gamma^0_{ca}\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}.
\end{aligned}
\tag{295}
$$

Nuevamente haciendo uso del teorema de Gauss se pueden despreciar los dos primeros términos, por lo tanto, la evolución temporal de $\bar{\psi}_a$ se puede escribir como siendo:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_a(x,t) =&= ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_a(x)\int d^3yA_0(y))(-4\pi\delta^3(x-y))+i\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}\gamma^0_{ca} \\
=&-ie\bar{\psi}_a(x)A_0(x)+i\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\partial_i^x+e\gamma^\mu A_\mu+m)_{bc}\gamma^0_{ca}
\end{aligned}
\tag{296}
$$

Por último, se calcula la evolución de las variables bosónicas. Entonces, para el campo A_i:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) =&\{A_i(x),H\}_D = \int d^3y\{A_i(x),(\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y)+\frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y)+\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i+e\gamma^iA_i(y)+m)_{bc}\psi_c(y)))\}_D \\
=&\int d^3y\Pi^j(y)\{A_i(x),\Pi^j(y)\}_D=\int d^3y\Pi^j(y)(\delta_i^j\delta^3(x-y)-\partial_i^x\partial_j^y\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}) \\
=&\Pi^i(x)-\partial_i^x\int d^3y\Pi^j(y)\partial_j^y\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \\
=&\Pi^i(x)-\partial_i^x\int d^3y\partial_j^y(\Pi^j(y)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|})+\partial_i^x\int d^3y\partial_j^y\Pi^j(y)\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|} \\
=&\Pi^i(x)
\end{aligned}
\tag{297}
$$

Igualmente para el momento Π^i:

$$
\dot{\Pi}^i(x) =\{\Pi^i(x),H\}_D = \int d^3y\{\Pi^i(x),(\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y)+\frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y)+\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^j\partial_j^y+e\gamma^jA_j(y)+m)_{bc}\psi_c(y)))\}_D
$$

$$
\begin{aligned}
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\{\Pi^i(x),F_{kl}(y)\}_D-\int d^3yi\gamma^j_{bc}\{\Pi^i(x),\bar{\psi}_b(y)\partial^y_j\psi_c(y)\}_D\\
&+e\int d^3y\{\Pi^i(x),A_j(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\psi_c(y)\}_D+\int d^3ym\{\Pi^i(x),\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\}_D\\
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\{\Pi^i(x),\partial^y_kA_l(y)-\partial^y_lA_k(y)\}_D-\int d^3yi\gamma^j_{bc}\{\Pi^i(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D\partial^y_j\psi_c(y)\\
&-\int d^3yi\gamma^j_{bc}\bar{\psi}_b(y)\partial^y_j\{\Pi^i(x),\psi_c(y)\}_D+e\int d^3y\{\Pi^i(x),A_j(y)\}_D\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\psi_c(y)+e\int d^3yA_j(y)\gamma^j_{bc}\{\Pi^i(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D\psi_c(y)\\
&+e\int d^3yA_j(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\{\Pi^i(x),\psi_c(y)\}_D+\int d^3ym\{\Pi^i(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D\psi_b(y)+\int d^3ym\bar{\psi}_b(y)\{\Pi^i(x),\psi_b(y)\}_D\\
=&\int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial^y_k(-\delta^i_l\delta^3(x-y)+\partial^x_i\partial^y_l\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|})-\int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial^y_l(-\delta^i_k\delta^3(x-y)+\partial^x_i\partial^y_k\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|})\\
&+e\int d^3y(-\delta^i_j\delta^3(x-y)+\partial^x_i\partial^y_j\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|})\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\psi_c(y)\\
&-\int d^3yi\gamma^j_{bc}(ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\partial^y_j\psi_c(y)-\int d^3yi\gamma^j_{bc}\bar{\psi}_b(y)\partial^y_j(-ie\frac{1}{4\pi}\psi_c(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\\
&+e\int d^3yA_j(y)\gamma^j_{bc}(ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\psi_c(y)+e\int d^3yA_j(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}(-ie\frac{1}{4\pi}\psi_c(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\\
&+\int d^3ym(ie\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\psi_b(y)+\int d^3ym\bar{\psi}_b(y)(-ie\frac{1}{4\pi}\psi_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\\
=&-e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x)+\frac{1}{4\pi}e\int d^3y\partial^y_j(\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\psi_c(y))\\
&-\frac{1}{4\pi}e\int d^3y\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}\partial^y_j\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\psi_c(y)-e\int d^3y\partial^x_i\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x-y|}\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\partial^y_j\psi_c(y)\\
&+e\frac{1}{4\pi}\int d^3y\gamma^j_{bc}\bar{\psi}_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}\partial^y_j\psi_c(y)-e\frac{1}{4\pi}\int d^3y\gamma^j_{bc}\partial^y_j(\bar{\psi}_b(y)\psi_c(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\\
&+e\frac{1}{4\pi}\int d^3y\partial^y_j\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}\psi_c(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}+iee\int d^3yA_j(y)\gamma^j_{bc}(\frac{1}{4\pi}\bar{\psi}_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})\psi_c(y)\\
&-iee\int d^3yA_j(y)\bar{\psi}_b(y)\gamma^j_{bc}(\frac{1}{4\pi}\psi_c(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|})+ie\frac{1}{4\pi}\int d^3ym\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}\\
&-ie\frac{1}{4\pi}\int d^3ym\bar{\psi}_b(y)\psi_b(y)\partial^x_i\frac{1}{|x-y|}
\end{aligned}
$$

Simplificando el resultado anterior, y usando el teorema de gauss asi como la propiedad asintótica de los campos, se determina que:

$$
\dot{\Pi}^i(x)=\partial^x_kF^{ki}(x)-e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x) \tag{298}
$$

sectionApéndice C6: Demostración de (4.57) y (4.60)

16.1. Demostración de la Matriz dada Por (4.57)

Se considera el conjunto de vínculos:

$$
\begin{aligned}
&\phi_1 = \Phi_1 = \Pi^0(x) \approx 0 \\
&\phi_2 = \Phi_2 = \partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b \gamma_{ba}^0 \psi_a) \approx 0 \\
&\phi_3 = \chi_1 = A_3(x) \approx 0 \\
&\phi_4 = \chi_2 = \Pi^3(x) + \partial_3^x A_0(x) \approx 0,
\end{aligned}
\tag{299}
$$

y se calcula los siguientes corchetes de Poisson:

$$
\begin{aligned}
&\{\phi_1, \phi_3\}'_D = \{\Pi^0(x), A_3(y)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_1, \phi_4\}'_D = \{\Pi^0(x), \Pi^3(y) + \partial_3^y A_o(y)\}'_D = \partial_3^y \{\Pi^0(x), A_o(y)\} = -\partial_3^y \delta(x-y) = \partial_3^x \delta(x-y) \\
&\{\phi_2, \phi_3\}'_D = \{\partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x)), A_3(y)\}'_D = \partial_i^x \{\Pi^i(x), A_3(y)\}'_D = -\partial_i^x \delta_3^i \delta^3(x-y) = -\partial_3^x \delta^3(x-y) \\
&\{\phi_2, \phi_4\}'_D = \{\partial_i^x \Pi^i(x) - e(\bar{\psi}_b(x) \gamma_{ba}^0 \psi_a(x)), \Pi^3(y) + \partial_3^y A_o(y)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_3, \phi_3\}'_D = \{A_3(x), A_3(y)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_4, \phi_4\}'_D = \{\Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x), \Pi^3(y) + \partial_3^y A_o(y)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_3, \phi_4\}'_D = \{A_3(x), \Pi^3(y) + \partial_3^y A_o(y)\}'_D = \{A_3(x), \Pi^3(y)\}'_D = \delta^3(x-y)
\end{aligned}
\tag{300}
$$

Entonces, la matriz formada por los corchetes de Poisson entre los vínculos de segunda clase será:

$$
C(x,y) = \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & \partial_3^x \delta^3(x-y) \\
0 & 0 & -\partial_3^x \delta^3(x-y) & 0 \\
0 & -\partial_3^x \delta^3(x-y) & 0 & \delta^3(x-y) \\
\partial_3^x \delta^3(x-y) & 0 & -\delta^3(x-y) & 0
\end{pmatrix}. \tag{301}
$$

Para calcular la matriz inversa de $C(x,y)$ se propone que:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & A_3(x,y) & A_4(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) & B_3(x,y) & B_4(x,y) \\ C_1(x,y) & C_2(x,y) & C_3(x,y) & C_4(x,y) \\ D_1(x,y) & D_2(x,y) & D_3(x,y) & D_4(x,y) \end{pmatrix}, \tag{302}$$

de manera que se cumpla:

$$\int d^3z C(x,z)C^{-1}(z,y) = \delta^3(x-y)I. \tag{303}$$

Entonces, para el gauge Axial se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_3^x \\ 0 & 0 & -\partial_3^x & 0 \\ 0 & -\partial_3^x & 0 & 1 \\ \partial_3^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-z) \begin{pmatrix} A_1(z,y) & A_2(z,y) & A_3(z,y) & A_4(z,y) \\ B_1(z,y) & B_2(z,y) & B_3(y,z) & B_4(z,y) \\ C_1(z,y) & C_2(z,y) & C_3(z,y) & C_4(z,y) \\ D_1(z,y) & D_2(z,y) & D_3(z,y) & D_4(z,y) \end{pmatrix} &= \delta^3(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \\
= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_3^x \\ 0 & 0 & -\partial_3^x & 0 \\ 0 & -\partial_3^x & 0 & 1 \\ \partial_3^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & A_3(x,y) & A_4(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) & B_3(x,z) & B_4(x,y) \\ C_1(x,y) & C_2(x,y) & C_3(x,y) & C_4(x,y) \\ D_1(x,y) & D_2(x,y) & D_3(x,y) & D_4(x,y) \end{pmatrix} &= \delta^3(x-y) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{304}$$

De la expresion anterior pueden ser determinadas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
&\partial_3^x D_1(x,y) = \delta^3(x-y) \\
&\partial_3^x D_2(x,y) = 0 \\
&\partial_3^x D_3(x,y) = 0 \\
&\partial_3^x D_4(x,y) = 0,
\end{aligned} \tag{305}$$

De donde se observa que las componentes $D_2 = D_3 = D_4 = 0$. De igual manera se establece que:

$$\begin{aligned}
&-\partial_3^x C_1(x,y) = 0\\
&-\partial_3^x C_2(x,y) = \delta^3(x-y)\\
&-\partial_3^x C_3(x,y) = 0\\
&-\partial_3^x C_4(x,y) = 0,
\end{aligned} \tag{306}$$

entonces, $C_1 = C_3 = C_4 = 0$. Finalmente, se tiene las igualdades expresadas a continuación:

$$\begin{aligned}
&-\partial_3^x B_1(x,y) + D_1(x,y) = 0 \rightarrow \partial_3^x B_1(x,y) = D_1(x,y)\\
&-\partial_3^x B_2(x,y) + D_2(x,y) = 0 \rightarrow -\partial_3^x B_2(x,y) = 0\\
&-\partial_3^x B_3(x,y) + D_3(x,y) = \delta^3(x-y) \rightarrow -\partial_3^x B_3(x,y) = \delta^3(x-y)\\
&-\partial_3^x B_4(x,y) + D_4(x,y) = 0 \rightarrow -\partial_3^x B_4(x,y)
\end{aligned} \tag{307}$$

$$\begin{aligned}
&\partial_3^x A_1(x,y) - C_1(x,y) = 0 \rightarrow \partial_3^x A_1(x,y) = 0\\
&\partial_3^x A_2(x,y) - C_2(x,y) = 0 \rightarrow \partial_3^x A_2(x,y) = C_2(x,y)\\
&\partial_3^x A_3(x,y) - C_3(x,y) = \partial_3^x A_3(x,y) = 0\\
&\partial_3^x A_4(x,y) - C_4(x,y) = \delta^3(x-y) \rightarrow \partial_3^x A_4(x,y) = \delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{308}$$

las cuales permiten identificar que $B_2 = B_4 = 0$, $A_1 = A_3 = 0$. Adicionalmente para las componentes restantes de $C^{-1}(x,y)$ se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
\partial_3^x D_1(x,y) =& \delta^3(x-y)\\
\partial_3^x A_4(x,y) =& \delta^3(x-y)\\
-\partial_3^x C_2(x,y) =& \delta^3(x-y)\\
-\partial_3^x B_3(x,y) =& \delta^3(x-y)\\
\partial_3^x B_1(x,y) =& D_1(x,y)\\
\partial_3^x A_2(x,y) =& C_2(x,y).
\end{aligned}
\tag{309}
$$

Si se deriva las ultimas dos relaciones respecto a x^3 se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\partial_3^x \partial_3^x B_1(x,y) = \partial_3^x D_1(x,y) = \delta^3(x-y)\\
&\partial_3^x \partial_3^x A_2(x,y) = \partial_3^x C_2(x,y) = -\delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{310}
$$

Es posible observar que las componentes $D_1(x,y) = A_4(x,y) = -C_2(x,y) = -B_3(x,y)$ y $A_2(x,y) = -B_1(x,y)$. Teniendo en cuenta que se cumple que:

$$
\frac{d|x|}{dx} = \epsilon(x) \tag{311}
$$

$$
\frac{d\epsilon(x)}{dx} = 2\delta(x), \tag{312}
$$

donde $|x|$ es la función valor absoluto, y $\epsilon(x)$ representa a la función signo algebraico de x, se puede concluir lo siguiente:

$$A_2(x,y) = -B_1(x,y) = g(x,y) = \frac{1}{2}\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)|x_3 - y_3|$$

$$D_1(x,y) = A_4(x,y) = -C_2(x,y) = -B_3(x,y) = f(x,y) = \frac{1}{2}\delta(x_1 - y_1)\delta(x_2 - y_2)e(x_3 - y_3), \tag{313}$$

donde las funciones $f(x,y)$ y $g(x,y)$ cumplen que:

$$\begin{aligned} \partial_3^x \partial_3^x g(x,y) = \partial_3^x f(x,y) =& \delta^3(x-y) \\ \partial_3^x g(x,y) =& f(x,y). \end{aligned} \tag{314}$$

Finalmente, la matriz C^{-1} se puede representar como siendo:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -g(x,y) & 0 & f(x,y) \\ g(x,y) & 0 & -f(x,y) & 0 \\ 0 & -f(x,y) & 0 & 0 \\ f(x,y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{315}$$

Obteniendo como resultado (4.57) .

16.2. Demostración de los corchetes fundamentales de Dirac (4.60)

Para obtener los corchetes de Dirac de la teoría en el gauge axial se calcula:

$$
\begin{aligned}
\{A_\mu(x), \phi_1(y)\}'_D =& \{A_\mu(x), \Pi^0(y)\}'_D = \delta^0_\mu \delta^3(x-y) \\
\{A_\mu(x), \phi_2(y)\}'_D =& \{A_\mu(x), \partial^y_i \Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\psi_a(y))\}'_D = \delta^i_\mu \partial^y_i \delta^3(x-y) = -\delta^i_\mu \partial^x_i \delta^3(x-y) \\
\{A_\mu(x), \phi_3(y)\}'_D =& \{A_\mu(x), A_3(y)\} = 0 \\
\{A_\mu(x), \phi_4(y)\}'_D =& \{A_\mu(x), \Pi^3(y) + \partial^y_3 A_o(y)\}'_D = \{A_\mu(x), \Pi^3(y)\}'_D = \delta^3_\mu \delta^3(x-y) \\
\{\Pi^\mu(x), \phi_1(y)\}'_D =& \{\Pi^\mu(x), \Pi^0(y)\}'_D = 0 \\
\{\Pi^\mu(x), \phi_2(y)\}'_D =& \{\Pi^\mu(x), \partial^y_i \Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{ba}\psi_a(y))\}'_D = 0 \\
\{\Pi^\mu(x), \phi_3(y)\}'_D =& \{\Pi^\mu(x), A_3(y)\}'_D = -\delta^\mu_3 \delta^3(x-y) \\
\{\Pi^\mu(x), \phi_4(y)\}'_D =& \{\Pi^\mu(x), \Pi^3(y) + \partial^y_3 A_o(y)\}'_D = \partial^y_3 \{\Pi^\mu(x), A_o(y)\}'_D = -\delta^\mu_0 \partial^y_3 \delta^3(x-y) = \delta^\mu_0 \partial^x_3 \delta^3(x-y).
\end{aligned}
\tag{316}
$$

Entonces, los corchetes de Dirac de la teoría serán:

$$
\begin{aligned}
\{A_\mu(x), A_\upsilon(y)\}_D =& \{A_\mu(x), A_\upsilon(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{A_\mu(x), \phi_1(u)\}'_D C^{-1}_{12}(u,v)\{\phi_2(v), A_\upsilon(y)\}'_D \\
& - \int\int d^3u d^3v \{A_\mu(x), \phi_1(u)\}'_D C^{-1}_{14}(u,v)\{\phi_4(v), A_\upsilon(y)\}'_D \\
& - \int\int d^3u d^3v \{A_\mu(x), \phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{21}(u,v)\{\phi_1(v), A_\upsilon(y)\}'_D \\
& - \int\int d^3u d^3v \{A_\mu(x), \phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{41}(u,v)\{\phi_1(v), A_\upsilon(y)\}'_D \\
=& - \int\int d^3u d^3v (\delta^0_\mu \delta^3(x-u))(-g(u,v))(\delta^i_\upsilon \partial^y_i \delta^3(y-v)) - \int\int d^3u d^3v (\delta^0_\mu \delta^3(x-u))(f(u,v))(-\delta^3_\upsilon \delta^3(y-v)) \\
& - \int\int d^3u d^3v (-\delta^i_\mu \partial^x_i \delta^3(x-u))(g(u,v))(-\delta^0_\upsilon \delta^3(y-v)) - \int\int d^3u d^3v (\delta^3_\mu \delta^3(x-u))(f(u,v))(-\delta^0_\upsilon \delta^3(y-v)) \\
=& \delta^0_\mu \delta^i_\upsilon \partial^y_i \int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u) g(u,v) \delta^3(y-v) + \delta^0_\mu \delta^3_\upsilon \int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u) f(u,v) \delta^3(y-v) \\
& - \delta^0_\upsilon \delta^i_\mu \partial^x_i \int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u) g(u,v) \delta^3(y-v) + \delta^3_\mu \delta^0_\upsilon \int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u) f(u,v) \delta^3(y-v) \\
=& \delta^0_\mu \delta^i_\upsilon \partial^y_i g(x,y) + \delta^0_\mu \delta^3_\upsilon f(x,y) - \delta^0_\upsilon \delta^i_\mu \partial^x_i g(x,y) + \delta^3_\mu \delta^0_\upsilon f(x,y) \\
=& (\delta^0_\mu \delta^i_\upsilon \partial^y_i - \delta^0_\upsilon \delta^i_\mu \partial^x_i) g(x,y) + (\delta^0_\mu \delta^3_\upsilon + \delta^3_\mu \delta^0_\upsilon) f(x,y),
\end{aligned}
\tag{317}
$$

Recordando que $\partial^y_i g(x,y) = -\partial^x_i g(x,y)$,

$$
\{A_\mu(x), A_\upsilon(y)\}_D = -(\delta^0_\mu \delta^i_\upsilon \partial^x_i + \delta^0_\upsilon \delta^i_\mu \partial^x_i) g(x,y) + (\delta^0_\mu \delta^3_\upsilon + \delta^3_\mu \delta^0_\upsilon) f(x,y). \tag{318}
$$

Para los momentos se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^{\mu}(x),\Pi^{\upsilon}(y)\}_D =&\{\Pi^{\mu}(x),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x),\phi_{\sigma}(u)\}'_D C^{-1}_{\sigma\rho}(u,v)\{\phi_{\rho}(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x),\phi_3(u)\}'_D C^{-1}_{3\rho}(u,v)\{\phi_{\rho}(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
&-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x),\phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{4\rho}(u,v)\{\phi_{\rho}(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
=&0
\end{aligned}
\tag{319}
$$

Por otro lado, los corchetes entre los pares canónicos:

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu}(x),\Pi^{\upsilon}(y)\}_D =&\{A_{\mu}(x),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D-\int\int d^3ud^3v\{A_{\mu}(x),\phi_1(u)\}'_D C^{-1}_{14}(u,v)\{\phi_4(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
&-\int\int d^3ud^3v\{A_{\mu}(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{23}(u,v)\{\phi_3(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
=&\delta^{\upsilon}_{\mu}\delta(x-y)-\int\int d^3ud^3v\{A_{\mu}(x),\phi_1(u)\}'_D C^{-1}_{14}(u,v)\{\phi_4(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
&-\int\int d^3ud^3v\{A_{\mu}(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{23}(u,v)\{\phi_3(v),\Pi^{\upsilon}(y)\}'_D\\
=&\delta^{\upsilon}_{\mu}\delta^3(x-y)-\int\int d^3ud^3v(\delta^0_{\mu}\delta^3(x-u))(f(u,v))(-\delta^{\upsilon}_0\partial^y_3\delta^3(y-v))\\
&-\int\int d^3ud^3v(-\delta^i_{\mu}\partial^x_i\delta^3(x-u))(-f(u,v))(\delta^{\upsilon}_3\delta^3(y-v))\\
=&\delta^{\upsilon}_{\mu}\delta^3(x-y)+\delta^0_{\mu}\delta^{\upsilon}_0\partial^y_3\int\int d^3ud^3v\delta(x-u)f(u,v)\delta^3(y-v)-\delta^{\upsilon}_3\delta^i_{\mu}\partial^x_i\int\int d^3ud^3v\delta^3(x-u)f(u,v)\delta^3(y-v)\\
=&\delta^{\upsilon}_{\mu}\delta(x-y)+\delta^0_{\mu}\delta^{\upsilon}_0\partial^y_3 f(x,y)-\delta^{\upsilon}_3\delta^i_{\mu}\partial^x_i f(x,y)\\
=&\delta^{\upsilon}_{\mu}\delta(x-y)-\delta^0_{\mu}\delta^{\upsilon}_0\partial^x_3 f(x,y)-\delta^{\upsilon}_3\delta^i_{\mu}\partial^x_i f(x,y)
\end{aligned}
\tag{320}
$$

Como $\partial^x_3 f(x,y)=-\partial^y_3 f(x,y)=\delta(x-y)$

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu}(x),\Pi^{\upsilon}(y)\}_D =&\delta^{\upsilon}_{\mu}\delta(x-y)-\delta^0_{\mu}\delta^{\upsilon}_0\delta(x-y)-\delta^{\upsilon}_3\delta^i_{\mu}\partial^x_i f(x,y)\\
=&(\delta^{\upsilon}_{\mu}-\delta^0_{\mu}\delta^{\upsilon}_0)\delta(x-y)-\delta^{\upsilon}_3\delta^i_{\mu}\partial^x_i f(x,y)
\end{aligned}
\tag{321}
$$

Por último:

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^{\mu}(x), A_{\upsilon}(y)\}_D =&\{\Pi^{\mu}(x), A_{\upsilon}(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x), \phi_{\sigma}(u)\}'_D C^{-1}_{\sigma\rho}(u,v)\{\phi_{\rho}(v), A_{\upsilon}(y)\}'_D \\
=&\{\Pi^{\mu}(x), A_{\upsilon}(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x), \phi_3(u)\}'_D C^{-1}_{3\rho}(u,v)\{\phi_{\rho}(v), A_{\upsilon}(y)\}'_D \\
&- \int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x), \phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{4\rho}(u,v)\{\phi_{\rho}(v), A_{\upsilon}(y)\}'_D \\
=&\{\Pi^{\mu}(x), A_{\upsilon}(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x), \phi_3(u)\}'_D C^{-1}_{32}(u,v)\{\phi_2(v), A_{\upsilon}(y)\}'_D \\
&- \int\int d^3ud^3v\{\Pi^{\mu}(x), \phi_4(u)\}'_D C^{-1}_{41}(u,v)\{\phi_1(v), A_{\upsilon}(y)\}'_D \\
=&-\delta^{\mu}_{\upsilon}\delta^3(x-y) - \int\int d^3ud^3v(-\delta^{\mu}_3\delta^3(x-u))(-f(u,v))(\delta^i_{\upsilon}\partial^y_i\delta^3(y-v)) \\
&- \int\int d^3ud^3v(\delta^{\mu}_0\partial^x_3\delta^3(x-u))(f(u,v))(-\delta^0_{\upsilon}\delta^3(y-v)) \\
=&-\delta^{\mu}_{\upsilon}\delta^3(x-y) - \delta^{\mu}_3\delta^i_{\upsilon}\partial^y_i\int\int d^3ud^3v\delta^3(x-u)f(u,v)\delta^3(y-v) \\
&+ \delta^{\mu}_0\delta^0_{\upsilon}\partial^x_3\int\int d^3ud^3v\delta^3(x-u)f(u,v)\delta^3(y-v) \\
=&-\delta^{\mu}_{\upsilon}\delta^3(x-y) - \delta^{\mu}_3\delta^i_{\upsilon}\partial^y_i f(x,y) + \delta^{\mu}_0\delta^0_{\upsilon}\partial^x_3 f(x,y) \\
=&-(\delta^{\mu}_{\upsilon} - \delta^{\mu}_0\delta^0_{\upsilon})\delta^3(x-y) + \delta^{\mu}_3\delta^i_{\upsilon}\partial^x_i f(x,y)
\end{aligned}
\tag{322}
$$

Se elige como grados de libertad a A_i, Π^i donde $i = 1, 2$, entonces los corchetes de Dirac serán:

$$
\begin{aligned}
\{A_i(x), A_j(y)\}_D =&\{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}_D = 0 \\
\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D =&-\delta^i_j\delta^3(x-y) \\
\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D =&\delta^j_i\delta^3(x-y)
\end{aligned}
\tag{323}
$$

Se calculan los siguientes corchetes de Dirac:

$$\{\psi_a, \phi_1(y)\}'_D =\{\psi_a(x), \Pi^0(y)\}'_D = 0 \tag{324}$$

$$\{\psi_a(x), \phi_2(y)\}'_D =\{\psi_a(x), \partial^y_i\Pi^i(y) - e(\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{bc}\psi_c(y))\}'_D \tag{325}$$

$$=-e\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}'_D\gamma^0_{bc}\psi_c(y) \tag{326}$$

$$=-e(-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y))\gamma^0_{bc}\psi_c(y) \tag{327}$$

$$=ie\delta_{ac}\psi_c(x)\delta^3(x-y) \tag{328}$$

$$=ie\psi_a(x)\delta^3(x-y) \tag{329}$$

$$\{\psi_a,\phi_3(y)\}_D^{\prime} = \{\psi_a(x),A_3(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{330}$$

$$\{\psi_a,\phi_4(y)\}_D^{\prime} = \{\psi_a(x),\Pi^3(y)+\partial_3^x A_0(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{331}$$

$$\{\bar{\psi}_a,\phi_1(y)\}_D^{\prime} = \{\bar{\psi}_a(x),\Pi^0(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{332}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(y)\}_D^{\prime} = \{\bar{\psi}_a(x),\partial_i^y\Pi^i(y)-e(\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{bc}\psi_c(y))\}_D^{\prime} \tag{333}$$

$$=e\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{bc}\{\bar{\psi}_a(x),\psi_c(y)\}_D^{\prime} \tag{334}$$

$$=e\bar{\psi}_b(y)\gamma^0_{bc}(-i\gamma^0_{ac}\delta^3(x-y)) \tag{335}$$

$$=-ie\bar{\psi}_b(x)\delta_{ba}\delta^3(x-y) \tag{336}$$

$$=-ie\bar{\psi}_a(x)\delta^3(x-y) \tag{337}$$

$$=-ie\pi_b(y)(-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)) = -e\pi_b(x)\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y) \tag{338}$$

$$\{\psi_a(x),\phi_3(y)\}_D^{\prime} = \{\bar{\psi}_a(x),A_3(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{339}$$

$$\{\psi_a(x),\phi_4(y)\}_D^{\prime} = \{\psi_a(x),\Pi^3(y)+\partial_3^x A_0(y)\}_D^{\prime} = 0. \tag{340}$$

Ahora, es posible definir los corchetes de Dirac entre las variables fermiónicas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x),\psi_b(y)\}_D =&\{\psi_a(x),\psi_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\psi_b(y)\}'_D\\ =&-\int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\psi_b(y)\}'_D\\ =&0\end{aligned}\tag{341}$$

$$\begin{aligned}\{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D =&\{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\ =&-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\ =&0\end{aligned}\tag{342}$$

$$\begin{aligned}\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D =&\{\psi_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\ =&-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)-\int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\bar{\psi}_b(y)\}'_D\\ =&-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y)\end{aligned}\tag{343}$$

$$\begin{aligned}\{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}_D =&\{\bar{\psi}_a(x),\bar{\psi}_b(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\psi_b(y)\}'_D\\ =&-i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y)-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{22}(u,v)\{\phi_2(v),\psi_b(y)\}'_D\\ =&-i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y).\end{aligned}\tag{344}$$

Considerando que para los grados de libertad escogidos (A_i,Π^j) (i,j=1,2) se cumple que:

$$\{A_i(x), \phi_1(y)\}_D^{\prime} = \{A_\mu(x), \Pi^0(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{345}$$

$$\{A_i(x), \phi_2(y)\}_D^{\prime} = \{A_\mu(x), \partial_i^y \Pi^i(y) + ie(\pi_a \psi_a + \bar{\psi}_a \bar{\pi}_a)\}_D^{\prime} = -\partial_i^x \delta(x-y) \tag{346}$$

$$\{A_i(x), \phi_3(y)\}_D^{\prime} = \{A_j(x), A_3(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{347}$$

$$\{A_i(x), \phi_4(y)\}_D^{\prime} = \{A_i(x), \Pi^3(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{348}$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_1(y)\}_D^{\prime} = \{\Pi^i(x), \Pi^0(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{349}$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_2(y)\}_D^{\prime} = \{\Pi^i(x), \partial_i^y \Pi^i(y) + ie(\pi_a \psi_a + \bar{\psi}_a \bar{\pi}_a)\}_D^{\prime} = 0 \tag{350}$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_3(y)\}_D^{\prime} = \{\Pi^i(x), A_3(y)\}_D^{\prime} = 0 \tag{351}$$

$$\{\Pi^i(x), \phi_4(y)\}_D^{\prime} = \{\Pi^i(x), \Pi^3(y) + \partial_3^y A_o(y)\}_D^{\prime} = 0, \tag{352}$$

se procede a calcular los corchetes de Dirac entre las variables bosónicas y fermiónicas, los cuales pueden ser escritos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\{\psi_a(x), A_i(y)\}_D =& \{\psi_a(x), A_i(y)\}_D^{\prime} - \int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \phi_i(u)\}_D^{\prime} C_{ij}^{-1}(u,v) \{\phi_j(v), A_i(y)\}_D^{\prime} \\
=& -\int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \phi_2(u)\}_D^{\prime} C_{21}^{-1}(u,v) \{\phi_1(v), A_i(y)\}_D^{\prime} \\
=& -\int\int d^3u d^3v \{\psi_a(x), \phi_2(u)\}_D^{\prime} C_{23}^{-1}(u,v) \{\phi_2(v), A_i(y)\}_D^{\prime} \\
=& 0
\end{aligned} \tag{353}$$

$$
\begin{aligned}
\{\psi_a(x),\Pi^i(y)\}_D =&\{\psi_a(x),\Pi^i(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\Pi^i(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{21}(u,v)\{\phi_1(v),\Pi^i(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\psi_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{23}(u,v)\{\phi_2(v),\Pi^i(y)\}'_D \\
=&0
\end{aligned}
\tag{354}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x),A_i(y)\}_D =&\{\bar{\psi}_a(x),A_i(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),A_i(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{21}(u,v)\{\phi_3(v),A_i(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{23}(u,v)\{\phi_3(v),A_i(y)\}'_D \\
=&0
\end{aligned}
\tag{355}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_a(x),\Pi^i(y)\}_D =&\{\bar{\psi}_a(x),\Pi^i(y)\}'_D - \int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_i(u)\}'_D C^{-1}_{ij}(u,v)\{\phi_j(v),\Pi^i(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{21}(u,v)\{\phi_1(v),\Pi^i(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_a(x),\phi_2(u)\}'_D C^{-1}_{23}(u,v)\{\phi_3(v),\Pi^i(y)\}'_D \\
=&0
\end{aligned}
\tag{356}
$$

Por lo tanto para el gauge axial se tienen los siguientes corchetes fundamentales:

$$\{\psi_a(x), \psi_b(y)\}_D = 0 \tag{357}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D = 0 \tag{358}$$

$$\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D = -i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y) \tag{359}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \psi_b(y)\}_D = -i\gamma^0_{ba}\delta^3(x-y) \tag{360}$$

$$\{A_i(x), A_j(y)\}_D = 0 \tag{361}$$

$$\{\Pi^i(x), \Pi^j(y)\}_D = 0 \tag{362}$$

$$\{\Pi^i(x), A_j(y)\}_D = -\delta^i_j\delta^3(x-y) \tag{363}$$

$$\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D = \delta^j_i\delta^3(x-y) \tag{364}$$

$$\{\psi_a(x), A_i(y)\}_D = 0 \tag{365}$$

$$\{\psi_a(x), \Pi^i(y)\}_D = 0 \tag{366}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), A_i(y)\}_D = 0 \tag{367}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), \Pi^i(y)\}_D = 0 \tag{368}$$

17. Apéndice Q: Evolución Temporal de los Campos en el Gauge Axial

Se considera el Hamiltoniano como:

$$H = \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i(x)\Pi^i(x) + \Pi^i(x)\partial^x_i A_0(x) + \frac{1}{4}F_{ki}(x)F^{ki}(x) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial^x_i + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c), \tag{369}$$

y La evolución temporal de una variable dinámica esta dada por:

$$\dot{A} = \frac{\partial A}{\partial t} = \{A(x), H\}_D \tag{370}$$

Por lo tanto para el campo $A_i(x)$ con $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) =&\{A_i(x), H\}_D = \{A_i(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y) + \Pi^i(y)\partial_i^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y)) + \bar{\psi}_b(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c\}_D \\
=&\int d^3y\Pi^j(y)\{A_i(x), \Pi^j(y)\}_D + \int d^3y\partial_k^y A_0(y)\{A_i(x), \Pi^k(y)\}_D + \int d^3y\Pi^k(y)\partial_k^y\{A_i(x), A_0(y)\}_D \\
=&\int d^3y\Pi^j(y)(\delta_i^j\delta^3(x-y) - \delta_3^j\partial_i^x f(x,y)) + \int d^3y\partial_k^y A_0(y)(\delta_i^k\delta^3(x-y) - \delta_3^k\partial_i^x f(x,y)) - \int d^3y\Pi^k(y)\partial_k^y\partial_i^x g(x,y) \\
=&\int d^3y\Pi^i(y)\delta^3(x-y) - \int d^3y\Pi^3(y)\partial_i^x f(x,y) \\
&-\int d^3y\Pi^k(y)\partial_k^y\partial_i^x g(x,y) + \int d^3y\partial_i^y A_0(y)\delta^3(x-y) - \int d^3y\partial_3^y A_0(y)\partial_i^x f(x,y)
\end{aligned} \tag{371}$$

como $\Pi^3(x) + \partial_3^x A_o(x) = 0$ y $A_3(x) = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) =& \int d^3y\Pi^i(y)\delta^3(x-y) + \int d^3y\partial_3^y A_o(y)\partial_\mu^x f(x,y) - \int d^3y\partial_3^y A_0(y)\partial_\mu^x f(x,y) \\
&- \int d^3y\partial_k^y(\Pi^k(y)\partial_i^x g(x,y)) + \int d^3y\partial_k^y\Pi^k(y)\partial_i^x g(x,y) + \int d^3y\partial_i^y A_0(y)\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{372}$$

Finalmente, haciendo uso del teorema de Gauss para evaluar la cuarta integral se tiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) =& \int d^3y\Pi^i(y)(\delta^3(x-y)) + \int d^3y\partial_i^y A_0(y)\delta^3(x-y) \\
=&\Pi^i(x) + \partial_i^x A_0(x)
\end{aligned} \tag{373}$$

Para el momento Π, la evolución temporal esta dada por:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i(x) = \{\Pi^i(x), H\}_D =& \{\Pi^i(x), \int d^3y(\frac{1}{2}\Pi^j(y)\Pi^j(y) + \Pi^j(y)\partial_j^y A_0(y) + \frac{1}{4}F_{kl}(y)F^{kl}(y)) + \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu(y) + m)_{bc}\psi(y)\}_D \\
=& \int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\{\Pi^i(x), F_{kl}(y)\}_D + \int d^3y e\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)\{\Pi^i(x), A_\mu(y)\}_D \\
=& \int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\{\Pi^i(x), \partial_k^y A_l(y) - \partial_l^y A_k(y)\}_D + \int d^3y e\bar{\psi}_b(y)\gamma^\mu_{bc}\psi_c(y)(-\delta^i_\mu\delta(x-y)) \\
=& \int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_k^y\{\Pi^i(x), A_l(y)\}_D - \int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_l^y\{\Pi^i(x), A_k(y)\}_D - \int d^3y e\bar{\psi}_b(y)\gamma^i_{bc}\psi_c(y)\delta(x-y) \\
=& \int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_k^y(-\delta^i_l\delta^3(x-y)) - \int d^3y\frac{1}{2}F^{kl}(y)\partial_l^y(-\delta^i_k\delta^3(x-y)) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x) \\
=& -\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\partial_k^y\delta^3(x-y) + \int d^3y\frac{1}{2}F^{il}(y)\partial_l^y\delta^3(x-y) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x) \\
=& \partial_k^x\int d^3y\frac{1}{2}F^{ki}(y)\delta^3(x-y) - \partial_l^x\int d^3y\frac{1}{2}F^{il}(y)\delta^3(x-y) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x) \\
=& \frac{1}{2}\partial_k^x F^{ki}(x) - \frac{1}{2}\partial_l^x F^{il}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x) \\
=& \partial_k^x F^{ki}(x) - e\bar{\psi}_b(x)\gamma^i_{bc}\psi_c(x)
\end{aligned}
\tag{374}
$$

Finalmente, para los campos fermiónicos ψ y $\bar{\psi}$ se encuentra que:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x,t) =& \{\psi_a(x,t), H\}_D = \int d^3y\{\psi_a(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y) + \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y))\}_D \\
=& \int d^3y\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y)\}_D \\
=& \int d^3y\{\psi_a(x), \bar{\psi}_b(y)\}_D(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y) \\
=& \int d^3y(-i\gamma^0_{ab}\delta^3(x-y))(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y) \\
=& -i\gamma^0_{ab}(-i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(x)
\end{aligned}
\tag{375}
$$

Ahora, para el campo fermiónico $\bar{\psi}_a(x,t)$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_a(x,t) =& \{\bar{\psi}_a(x,t), H\}_D = \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x), (\frac{1}{2}\Pi^i(y)\Pi^i(y) + \frac{1}{2}F^{ki}(y)F_{ki}(y) + \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y))\}_D \\
=& \int d^3y\{\bar{\psi}_a(x), \bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\psi_c(y)\}_D \\
=& -\int d^3y\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}\{\bar{\psi}_a(x), \psi_c(y)\}_D \\
=& -\int d^3y\bar{\psi}_b(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}(-i\gamma^0_{ca}\delta^3(x-y)) \\
=& \int d^3y\bar{\psi}_b(y)(i\gamma^i\partial_i^x + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}(i\gamma^0_{ca}\delta^3(x-y)) \\
=& \bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i^x + e\gamma^\mu A_\mu + m)_{bc}i\gamma^0_{ca}
\end{aligned}
\tag{376}
$$

18. Apéndice R: Obtención de las Ecuaciones de Euler Lagrange Campo de Yang-Mills en Interacción con un Campo Fermiónico

Las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo A_μ se definen como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu a}(x)} - \partial_\upsilon\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_{\mu a}(x))}\right) = 0 \tag{377}$$

Por ende, se tiene que:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\upsilon d}(x)} = \frac{\partial}{\partial A_{\upsilon d}(x)}\left(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\upsilon}(x)F_{\mu\upsilon}^a(x) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a(x) - \partial_\mu\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu\psi_a(x)) - m\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)) - g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{ca}^b\psi_a(x)A_{\mu b}(x)\right) \tag{378}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\upsilon d}(x)} &= -g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{ca}^b\psi_a(x)\frac{\partial}{\partial A_{\upsilon d}(x)}(A_{\mu b}(x)) \\
&= -g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{ca}^b\psi_a(x)(\delta_{db}\delta_\upsilon^\mu) \\
&= -g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\upsilon T_{ca}^d\psi_a(x).
\end{aligned} \tag{379}$$

Por otro lado, se determina lo siguiente:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))}\left(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\upsilon}(x)F_{\mu\upsilon}^a(x) + \frac{i}{2}(\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_a(x) - \partial_\mu\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu\psi_a(x)) - m\bar{\psi}_a(x)\psi_a(x)) - g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{ca}^b\psi_a(x)A_{\mu b}(x)\right) \tag{380}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))} =& -\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))}(F_a^{\mu\upsilon}(x)F_{\mu\upsilon}^a(x)) \\
=& -\frac{1}{2}F_a^{\mu\upsilon}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))}(\partial^\mu A_a^\upsilon(x) - \partial^\upsilon A_a^\mu(x) - g\varepsilon_{abc}A_b^\mu(x)A_c^\upsilon(x)) \\
=& -\frac{1}{2}F_a^{\mu\upsilon}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))}(\partial^\mu A_a^\upsilon(x))\frac{1}{2}F_a^{\mu\upsilon}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_\alpha A_{\sigma b}(x))}(\partial^\upsilon A_a^\mu(x)) \\
=& -\frac{1}{2}F_a^{\mu\upsilon}(x)(\delta_{ba}\delta_\alpha^\mu\delta_\sigma^\upsilon) + \frac{1}{2}F_a^{\mu\upsilon}(x)(\delta_{ba}\delta_\alpha^\upsilon\delta_\sigma^\mu) \\
=& -\frac{1}{2}F_b^{\alpha\sigma}(x) + \frac{1}{2}F_b^{\sigma\alpha}(x) \\
=& \frac{1}{2}F_b^{\sigma\alpha}(x) + \frac{1}{2}F_b^{\sigma\alpha}(x) \\
=& F_b^{\sigma\alpha}(x).
\end{aligned} \tag{381}
$$

Entonces, las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a los campos $A_{\mu a}$ pueden ser escritas como siendo:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu a}(x)} - \partial_\upsilon\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon A_{\mu a}(x))} =& 0 \\
-g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{cb}^a\psi_b(x) - \partial_\upsilon F_a^{\mu\upsilon}(x)\partial_\upsilon F_a^{\mu\upsilon}(x) =& 0 \\
\partial_\upsilon F_a^{\mu\upsilon}(x) =& -g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T_{cb}^a\psi_b(x)
\end{aligned} \tag{382}
$$

Con el fin de obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange para las variables fermiónicas se realiza el siguiente cálculo:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha d}(x)} = \frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(-\frac{1}{4}F_a^{\mu\upsilon}(x)F_{\mu\upsilon a}(x)+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma_{\theta\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_{\sigma a}(x)-\partial_\mu\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma_{\theta\sigma}^\mu\psi_{\sigma a}(x))-m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x))-g\bar{\psi}_{\theta c}(x)\gamma_{\theta\sigma}^\mu T_{ca}^b\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)) \tag{383}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\alpha d}(x)} =& -\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(\partial_\mu \bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\psi_{\sigma a}(x)) - m\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x)) - g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^b_{ca}\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(\bar{\psi}_{\theta c}(x)\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)) \\
=&\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(\psi_{\sigma a}(x)) + m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(\psi_{\sigma a}(x)) + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^b_{ca}A_{\mu b}(x)\bar{\psi}_{\theta c}(x)\frac{\partial}{\partial \psi_{\alpha d}(x)}(\psi_{\sigma a}(x)) \\
=&\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}(\delta_{\alpha\sigma}\delta_{ad}) + m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)(\delta_{\alpha\sigma}\delta_{ad}) + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^b_{ca}A_{\mu b}(x)\bar{\psi}_{\theta c}(x)(\delta_{\alpha\sigma}\delta_{ad}) \\
=&\frac{i}{2}\partial_\mu \bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^\mu_{\theta\alpha} + m\bar{\psi}_{\alpha d}(x) + g\gamma^\mu_{\theta\alpha}T^b_{cd}A_{\mu b}(x)\bar{\psi}_{\theta c}(x)
\end{aligned}
\tag{384}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))} = \frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon \psi_{\alpha d}(x))}(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}_a(x)F_{\mu\upsilon a}(x)+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\partial_\mu\psi_{\sigma a}(x)-\partial_\mu\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\psi_{\sigma a}(x))-m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x))-g\bar{\psi}_{\theta c}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^b_{ca}\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)
\tag{385}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \psi_a(x))} =& -\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\frac{\partial}{\partial(\partial_\upsilon \psi_{\alpha d}(x))}(\partial_\mu\psi_{\sigma a}(x)) \\
=& -\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}(\delta^\mu_\upsilon\delta_{\alpha\sigma}\delta_{da}) \\
=& -\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^\upsilon_{\theta\alpha}.
\end{aligned}
\tag{386}
$$

Por lo tanto, las ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo $\psi_a(x)$ se pueden expresar como se indica a continuación:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\sigma a}(x)} - \partial_\upsilon\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \psi_{\sigma a}(x))} =&0 \\
\frac{i}{2}\partial_\mu\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma} + m\bar{\psi}_{\sigma a}(x) + g\bar{\psi}_{\theta c}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^b_{ca}A_{\mu b}(x) + \frac{i}{2}\partial_\upsilon\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\upsilon_{\theta\sigma} =&0 \\
(i\partial_\mu\bar{\psi}_a(x)\gamma^\mu + m\bar{\psi}_a(x) + g\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu T^b_{ca}A_{\mu b}(x))_\sigma =&0.
\end{aligned}
\tag{387}
$$

Finalmente, para el campo $\bar{\psi}_a(x)$ se obtiene que:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_{\alpha d}(x)} = \frac{\partial}{\partial \bar{\psi}_{\alpha d}(x)}(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}_a(x)F_{\mu\upsilon a}(x)+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\partial_\mu\psi_{\sigma a}(x)-\partial_\mu\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}\psi_{\sigma a}(x))-m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x))-g\bar{\psi}_{\theta c}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^b_{ca}\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x))
\tag{388}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)} =&\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)}(\frac{i}{2}(\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma a}(x))) - \frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)}(m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x))) - \frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)}(g\bar{\psi}_{\theta c}(x)\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}T^{b}_{ca}\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)) \\
=&\frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma a}(x)\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)}(\bar{\psi}_{\theta a}(x)) - m\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)}\psi_{\sigma a}(x)(\bar{\psi}_{\sigma a}(x)) - g\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}T^{b}_{ca}\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)\frac{\partial}{\partial\bar{\psi}_{\alpha d}(x)}(\bar{\psi}_{\theta c}(x)) \\
=&\frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma a}(x)(\delta_{\alpha\theta}\delta_{da}) - m\psi_{\sigma a}(x)((\delta_{\alpha\sigma}\delta_{da})) - g\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}T^{b}_{ca}\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)(\delta_{\alpha\theta}\delta_{dc}) \\
=&\frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma d}(x) - m\psi_{\alpha d}(x) - g\gamma^{\mu}_{\alpha\sigma}T^{b}_{da}\psi_{\sigma a}(x)A_{\mu b}(x)
\end{aligned} \tag{389}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial(\partial_{\upsilon}\bar{\psi}_{\sigma d}(x))}(-\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}_{a}(x)F_{\mu\upsilon a}(x)+\frac{i}{2}(\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}\partial_{\mu}\psi_{\sigma a}(x)-\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^{\mu}_{\theta\alpha}\psi_{\alpha a}(x))-m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x))-g\bar{\psi}_{\theta c}(x)\gamma^{\mu}_{\theta\alpha}T^{b}_{ca}\psi_{\alpha a}(x)A_{\mu b}(x)) \tag{390}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\upsilon}\bar{\psi}_{\sigma d}(x))} =&- \frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{\theta\alpha}\psi_{\alpha a}(x)\frac{\partial}{\partial(\partial_{\upsilon}\bar{\psi}_{\sigma d}(x))}(\partial_{\mu}\bar{\psi}_{\theta a}(x)) \\
=&- \frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{\theta\sigma}\psi_{\sigma a}(x)(\delta^{\mu}_{\upsilon}\delta_{\sigma\theta}\delta_{da}) \\
=&- \frac{i}{2}\gamma^{\upsilon}_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha d}(x).
\end{aligned} \tag{391}
$$

Entonces, se encuentra que las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas al campo $\bar{\psi}_a$ pueden ser escritas de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}_{\sigma a}(x)} - \partial_{\upsilon}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\upsilon}\bar{\psi}_{\sigma a}(x))} =&0 \\
\frac{i}{2}\gamma^{\mu}_{\sigma\theta}\partial_{\mu}\psi_{\theta a}(x) - m\psi_{\sigma a}(x) - g\gamma^{\mu}_{\sigma\theta}T^{b}_{ac}\psi_{\theta c}(x)A_{\mu b}(x) + \frac{i}{2}\gamma^{\upsilon}_{\sigma\alpha}\partial_{\upsilon}\psi_{\alpha a}(x) =&0 \\
(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_{a}(x) - m\psi_{a}(x) - g\gamma^{\mu}T^{b}_{ac}\psi_{c}(x)A_{\mu b}(x))_{\sigma} =& 0.
\end{aligned} \tag{392}
$$

Se puede concluir que las ecuaciones de Euler-Lagrange de los campos $A_{\mu a}$,ψ_a y $\bar{\psi}_a$ pueden ser escritas como:

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_{\mu a}(x)} - \partial_{\upsilon}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\upsilon}A_{\mu a}(x))}) =g\bar{\psi}_{c}(x)\gamma^{\mu}T^{a}_{cb}\psi_{b}(x) + \partial_{\upsilon}F^{\mu\upsilon}_{a}(x) = 0 \tag{393}
$$

$$
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{a}(x)} - \partial_{\upsilon}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_{\upsilon}\psi_{a}(x))}) =(i\partial_{\mu}\bar{\psi}_{a}(x)\gamma^{\mu} + m\bar{\psi}_{a}(x) + g\bar{\psi}_{c}(x)\gamma^{\mu}T^{b}_{ca}A_{\mu b}(x))_{\sigma} = 0 \tag{394}
$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a(x)} - \partial_\upsilon(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\upsilon \bar{\psi}_a(x))}) = (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi_a(x) - m\psi_a(x) - g\gamma^\mu T^b_{ac}\psi_c(x)A_{\mu b}(x))_\sigma = 0 \tag{395}$$

19. Apéndice S: Obtención del Hamiltoniano Canónico

Los momentos canónicos dados por:

$$\Pi^{\mu a} = F^{\mu 0}_a(x) \tag{396}$$

$$\pi_{\sigma a} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma} \tag{397}$$

$$\bar{\pi}_{\sigma a} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x). \tag{398}$$

permiten definir el Hamiltoniano canónico usando derivadas izquierdas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_c &\equiv \int d^3x(\partial_0 A_{\mu a}(x)\Pi^\mu_a(x) + \partial_0\psi_{\sigma a}(x)\pi_{\sigma a}(x) + \partial_0\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\bar{\pi}_a(x) - \mathcal{L}) \\ &= \int d^3x((\Pi^i_a(x) + \partial_i A_{0a}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x))\Pi^i_a(x) + \partial_0\psi_{\sigma a}(x)(-\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}) + \partial_0\bar{\psi}_a(x)(-\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x)) - \mathcal{L}) \end{aligned} \tag{399}$$

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x((\Pi^i_a(x) + \partial_i A_{0a}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x))\Pi^i_a(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}\partial_0\psi_{\sigma a}(x) - \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x)) \\ &+ \int d^3x(\frac{1}{4}F^{\mu\upsilon}_a(x)F^a_{\mu\upsilon}(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i\psi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\partial_i\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^i_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}\partial_0\psi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x)) \\ &+ \int d^3x(m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x) + g\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu T^d_{bc}\psi_c(x)A_{\mu d}(x)) \\ &= \int d^3x(\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) + \partial_i A_{0a}(x)\Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x)\Pi^i_a(x) + \frac{1}{4}F^{0k}_a(x)F_{0ka}(x) + \frac{1}{4}F^{k0}_a(x)F_{k0a}(x) + \frac{1}{4}F^{ki}_a(x)F_{kia}(x)) \\ &- \int d^3x(\frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i\psi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\partial_i(\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^i_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x)) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^i_{\sigma\alpha}\partial_i\psi_{\alpha a}(x) + m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x) + g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(x)A_{\mu d}(x)) \\ &= \int d^3x(\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) - A_{0a}(x)\partial_i\Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x)\Pi^i_a(x) - \frac{1}{2}\Pi^k_a(x)\Pi^k_a(x) + \frac{1}{4}F^{ki}_a(x)F_{kia}(x)) \\ &- \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i\psi_{\sigma a}(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^i_{\sigma\alpha}\partial_i\psi_{\alpha a}(x) + m\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\psi_{\sigma a}(x) + g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(x)A_{\mu d}(x)) \\ &+ \frac{i}{2}\int d^3x\partial_i(\bar{\psi}_{\sigma a}(x)\gamma^i_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x)) + \int d^3x\partial_i(A_{0a}(x)\Pi^i_a(x) \end{aligned} \tag{400}$$

Los dos últimos términos pueden ser despreciados considerando el teorema de gauss, el cual puede ser expresado para un campo vectorial F(x) como:

$$\oint_S dA_i(F_i(x)) = \int d^3x\partial_i(F_i(x)), \tag{401}$$

Como los campos son evaluados en la frontera de la superficie S, la cual tiende al infinito, se puede afirmar que:

$$\begin{aligned} H_c = &\int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) - A_{0a}(x)\partial_i\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x)\Pi_a^i(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x)) \\ &+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta a}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma a}(x) + \int d^3x\partial_i(A_{0a}(x)\Pi_a^i(x)) \end{aligned} \tag{402}$$

Nuevamente usando el teorema de Gauss para el último término se tiene que el Hamiltoniano canónico de la teoría se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_c = &\int d^3x(\frac{1}{2}\Pi_a^i(x)\Pi_a^i(x) - A_{0a}(x)\partial_i\Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x)\Pi_a^i(x) + \frac{1}{4}F^{ki}(x)F_{ki}(x)) \\ &+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta a}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma a}(x) \end{aligned} \tag{403}$$

20. Apéndice T: Condiciones de Consistencia para los Vínculos Obtenidos

20.1. Condiciones de Consistencia de Vínculos Primarios

Se procede a calcular las condiciones de consistencia de los vínculos primarios de la teoría teniendo en cuenta que la evolución temporal de una variable dinámica esta dada por:

$$\dot{A}(\mathbf{x}, t) = \{A(x), H_p\}, \tag{404}$$

donde el Hamiltoniano primario se puede expresar como:

$$\begin{aligned} H_p \equiv & H_c + \int d^3x(\lambda_{1a}\Phi_{1a} + \bar{\vartheta}_{\sigma a}(x)\Theta^2_{\sigma a} + \Theta^1_{\sigma a}\vartheta(x)_{\sigma a}) \\ = & \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) - A_{0a}(x)\partial_i\Pi^i_a(x) - g\varepsilon_{abc}A_{ib}A_{0c}(x)(x)\Pi^i_a(x) + \frac{1}{4}F^{ki}_a(x)F_{kia}(x)) \\ & + \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i\partial_i + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(x) \\ & + \int d^3x(\lambda_{1a}(x)\Phi_{1a}(x) + \bar{\vartheta}_{\sigma a}(x)\Theta^2_{\sigma a}(x) + \Theta^1_{\sigma a}(x)\vartheta_{\sigma a}(x)). \end{aligned} \tag{405}$$

Entonces, para el vínculo Φ_{1a} se determina lo siguiente:

$$\dot{\Phi}_{1a}(x) = \{\Phi_{1a}(x), H_p(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3y\{\Pi^0_a(x), \frac{1}{2}\Pi^i_b(y)\Pi^i_b(y) - A_{0b}(y)\partial^y_i\Pi^i_b(y) + g\varepsilon_{bcd}A_{0c}(y)A_{id}(y)\Pi^i_b(y) + \frac{1}{4}F^{ki}_b(y)F_{kib}(y)\} \tag{406}$$

$$+ \int d^3y\{\Pi^0_a(x), \bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial^y_i + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(y)\} \tag{407}$$

$$+ \int d^3y\{\Pi^0_a(x), \lambda_{1b}(y)\Phi_{1b}(y) + \bar{\vartheta}_{\sigma b}(y)\Theta^1_{\sigma b}(y) + \Theta^2_{\sigma b}(y)\vartheta(y)_{\sigma b}\} \tag{408}$$

$$= - \int d^3y\partial^y_i\Pi^i_b(y)\{\Pi^0_a(x), A_{0b}(y)\} + \int d^3yg\varepsilon_{bcd}A_{id}(y)\Pi^i_b(y)\{\Pi^0_a(x), A_{0c}(y)\} \tag{409}$$

$$+ \int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi^0_a(x), A_{\mu d}(y)\} \tag{410}$$

$$= - \int d^3y\partial^y_i\Pi^i_b(y)(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)) + \int d^3yg\varepsilon_{bcd}A_{id}(y)\Pi^i_b(y)(-\delta_{ac}\delta^3(x-y)) \tag{411}$$

$$+ \int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)(-\delta^0_\mu\delta_{ad}\delta^3(x-y)) \tag{412}$$

$$=\partial_i^y \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abd}\Pi_b^i(x)A_{id}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \approx 0. \tag{413}$$

Por otro lado, para los vínculos asociados a las variables fermiónicas, se encuentran las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
\dot{\Theta}^1_{\sigma a}(x) =&\{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}, H_p(\mathbf{y},t)\}\\
=&\int d^3y\{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}, \frac{1}{2}\Pi_b^i(y)\Pi_b^i(y) - A_{0b}(y)\partial_i^y\Pi_b^i(y) + g\varepsilon_{bcd}A_{0c}(y)A_{id}(y)\Pi_b^i(y) + \frac{1}{4}F_b^{ki}(y)F_{kib}(y)\}\\
&+\int d^3y\{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}, \bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\beta}\psi_{\beta c}(y)\}\\
&+\int d^3y\{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}, \lambda_{1b}(y)\Phi_{1b}(y) + \bar{\vartheta}_{\beta b}(y)\Theta^2_{\beta b}(y) + \Theta^1_{\beta b}(y)\vartheta(y)_{\beta b}\}\\
=&\int d^3y\{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}, \bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\beta}\psi_{\beta c}(y)\}\\
&+\int d^3y\{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}, \bar{\vartheta}_{\beta b}(y)(\bar{\pi}_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\psi_{\alpha b}(y))\}\\
=&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i^y + g\gamma^\mu_{\theta\beta}T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\sigma\beta}\{\pi_{\sigma a}(x), \psi_{\beta c}(y)\}\\
&-\int d^3y\frac{i}{2}\bar{\vartheta}_{\sigma b}(y)\gamma^0_{\beta\alpha}\{\pi_{\sigma a}(x), \psi_{\alpha b}(y)\} - \int d^3y\frac{i}{2}\bar{\vartheta}_{\beta b}(y)\gamma^0_{\theta\beta}\{\bar{\psi}_{\theta a}(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y)\}\\
=&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i^y + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\beta}(-\delta_{\sigma\beta}\delta_{ac}\delta^3(x-y))\\
&-\int d^3y\frac{i}{2}\bar{\vartheta}_{\beta b}(y)\gamma^0_{\beta\alpha}(-\delta_{\sigma\alpha}\delta_{ab}\delta^3(x-y)) - \int d^3y\frac{i}{2}\bar{\vartheta}_{\beta b}(y)\gamma^0_{\theta\sigma}(-\delta_{\theta\beta}\delta_{ab}\delta^3(x-y))\\
=&\bar{\psi}_{\theta b}(x)(i\gamma^i_{\theta\sigma}\overleftarrow{\partial}_i^x + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{ba}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\sigma}\bar{\vartheta}_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\sigma}\bar{\vartheta}_{\beta b}(y)\\
=&\bar{\psi}_{\theta b}(x)(i\gamma^i_{\theta\sigma}\overleftarrow{\partial}_i^x + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{ba}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma} - i\bar{\vartheta}(x)_{\beta a}\gamma^0_{\beta\sigma} \approx 0\\
=&(\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i^x + g\gamma^\mu T^d_{ba}A_{\mu d}(x) + m) - i\bar{\vartheta}(x)_a\gamma^0)_\sigma \approx 0\\
=&\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i^x + g\gamma^\mu T^d_{ba}A_{\mu d}(x) + m) - i\bar{\vartheta}(x)_a\gamma^0 \approx 0.
\end{aligned} \tag{414}$$

Multiplicando por $i\gamma^0$ y despejando $\vartheta(x)_a$ se tiene que:

$$\vartheta(x)_a \approx i\bar{\psi}_b(x)(i\gamma^i\overleftarrow{\partial}_i^x + g\gamma^\mu T^d_{ba}A_{\mu d}(x) + m)\gamma^0. \tag{415}$$

Finalmente, para el vínculo $\Theta^2_{\sigma a}$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Theta}^2_{\sigma a}(x) =&\{\bar{\pi}_{\sigma a} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x), H_p(\mathbf{y},t)\}\\
=&\int d^3y\{\bar{\pi}_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x), \frac{1}{2}\Pi^i_b(y)\Pi^i_b(y) - A_{0b}(y)\partial^y_i\Pi^i_b(y) + g\varepsilon_{bcd}A_{0c}(y)A_{id}(y)\Pi^i_b(y) + \frac{1}{4}F^{ki}_b(y)F_{kib}(y)\}\\
&+\int d^3y\{\bar{\pi}_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x), \bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i\partial^y_i + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\beta}\psi_{\beta c}(y)\}\\
&+\int d^3y\{\bar{\pi}_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x), \lambda_{1b}(y)\Phi_{1b}(y) + \bar{\vartheta}_{\beta b}(y)\Theta^2_{\beta b}(y) + \Theta^1_{\beta b}(y)\vartheta(y)_{\beta b}\}\\
=&\int d^3y\{\bar{\pi}_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\theta b}(y)\}(-i\gamma^i\partial^y_i + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\beta}\psi_{\beta c}(y)\\
&+\int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{\theta\beta}\{\bar{\pi}_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\theta b}(x)\}\vartheta(y)_{\beta b} + \int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\{\psi_{\alpha a}(x), \pi_{\beta b}(y)\}\vartheta(y)_{\beta b}\\
=&\int d^3y(-\delta_{\sigma\theta}\delta_{ab}\delta^3(x-y))(-i\gamma^i\partial^y_i + g\gamma^\mu T^d_{bc}A_{\mu d}(y) + m)_{\theta\beta}\psi_{\beta c}(y)\\
&+\int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{\theta\beta}(-\delta_{\sigma\theta}\delta_{ab}\delta^3(x-y))\vartheta(y)_{\beta b} + \int d^3y\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}(-\delta_{\alpha\beta}\delta_{ab}\delta^3(x-y))\vartheta(y)_{\beta b}\\
=&-(-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^\mu T^d_{ac}A_{\mu d}(x) + m)_{\sigma\beta}\psi_{\beta c}(x) - \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\beta}\vartheta(x)_{\beta a} - \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\beta}\vartheta(x)_{\beta a}\\
=&-(-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^\mu T^d_{ac}A_{\mu d}(x) + m)_{\sigma}\psi_c(x) - i\gamma^0_\sigma\vartheta(x)_a \approx 0\\
i\gamma^0_\sigma\vartheta(x)_a \approx& -(-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^\mu T^d_{ac}A_{\mu d}(x) + m)_{\sigma}\psi_c(x)
\end{aligned}
\tag{416}
$$

Multiplicando por $i\gamma^0_\sigma$:

$$\vartheta(x)_a \approx i\gamma^0_\sigma(-i\gamma^i\partial^x_i + g\gamma^\mu T^d_{ac}A_{\mu d}(x) + m)_\sigma\psi_c(x) \tag{417}$$

Por lo tanto, de la condición de consistencia asociada al vínculo primario Φ_1 resulta un vínculo secundario. Con respecto a los vínculos asociados a las variables fermiónicas, se obtienen condiciones que permiten fijar los multiplicadores de Lagrange $\vartheta(x)_a$ y $\bar{\vartheta}(x)_a$, lo que permite concluir que no hay mas vínculos asociados a $\Theta^1_{\sigma a}$ y $\Theta^2_{\sigma a}$.

20.2. Condicion de consistencia para el vínculo secundario

Se denota al vínculo secundario obtenido al analizar la condición de consistencia de Φ_{1a} como siendo:

$$\varphi_{2a}(x) = \partial^y_i\Pi^i_a(x) - g\varepsilon_{bad}A_{id}(x)\Pi^i_b(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \approx 0. \tag{418}$$

Ahora, se procede a calcular su respectiva condición de consistencia:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{2a}(x) =& \{\partial_j^x \Pi_a^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), H_p(\mathbf{y},t)\} \\
=& \int d^3y\{\partial_j^x \Pi_a^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x), \frac{1}{2}\Pi_d^i(y)\Pi_d^i(y) - A_{0d}(y)\partial_i^y\Pi_d^i(y) + g\varepsilon_{def}A_{0e}(y)A_{if}(y)\Pi_d^i(y) + \frac{1}{4}F_d^{ki}(y)F_{kid}(y)\} \\
&+ \int d^3y\{\partial_j^x \Pi_a^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \bar{\psi}_{\theta d}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^\mu T^f_{de}A_{\mu f}(y) + m)_{\theta\beta}\psi_{\beta e}(y)\} \\
&+ \int d^3y\{\partial_j^x \Pi_a^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \lambda_{1d}(y)\Phi_{1d}(y) + \bar{\vartheta}_{\beta d}(y)\Theta^2_{\beta d}(y) + \Theta^1_{\beta d}(y)\vartheta(y)_{\beta d}\} \\
=& \int d^3y\{\partial_j^x \Pi_a^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x), \frac{1}{2}\Pi_d^i(y)\Pi_d^i(y) - A_{0d}(y)\partial_i^y\Pi_d^i(y) - g\varepsilon_{def}A_{ie}(y)A_{0f}(y)\Pi_d^i(y) + \frac{1}{4}F_d^{ki}(y)F_{kid}(y)\} \\
&+ \int d^3yg\bar{\psi}_{\theta d}(y)\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\partial_j^x\{\Pi_a^j(x), A_{\mu f}(y)\} - \int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(y)g\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\{\Pi_b^i(x), A_{\mu f}(y)\} \\
&- \int d^3y\{g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \bar{\vartheta}_{\beta d}(y)\Theta^2_{\beta d}(y)\} - \int d^3y\{g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \Theta^1_{\beta d}(y)\vartheta(y)_{\beta d}\} \\
&= -\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)\{\Pi_a^j(x), A_{ie}(y)\} + \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\{\Pi_a^j(x), \partial_k^yA_{id}(y) - \partial_i^yA_{kd}(y) - g\varepsilon_{def}A_{ke}(y)A_{if}(y)\} \\
&- \int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)A_{jc}(y)\{\Pi_b^j(y), A_{ie}(y)\} \\
&+ \frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\{\Pi_b^j(x), \partial_k^yA_{id}(y) - \partial_i^yA_{kd}(y) - g\varepsilon_{def}A_{ke}(y)A_{if}(y)\} \\
&+ \int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_d^k(y)\{A_{jc}(x), \Pi_d^k(y)\} - \int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)A_{0d}(y)\partial_i^y\{A_{jc}(x), \Pi_d^i(y)\} \\
&- \int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^j(x)A_{ie}(y)A_{0f}(y)\{A_{jc}(x), \Pi_d^i(y)\} + \int d^3yg\bar{\psi}_{\theta d}(y)\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\partial_i^x\{\Pi_a^i(x), A_{\mu f}(y)\} \\
&- \int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(y)g\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\{\Pi_b^i(x), A_{\mu f}(y)\} - \int d^3y\{g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \bar{\vartheta}_{\beta d}(y)\bar{\pi}_{\beta d}(y)\} \\
&- \int d^3y\{g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x), \pi_{\beta d}(y)\vartheta(y)_{\beta d}\} \\
&= -\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)\{\Pi_a^j(x), A_{ie}(y)\} - \int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)A_{jc}(x)\{\Pi_b^j(x), A_{ie}(y)\} \\
&+ \int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_d^k(y)\{A_{jc}(x), \Pi_d^k(y)\} - \int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)A_{0d}(y)\partial_i^y\{A_{jc}(x), \Pi_d^i(y)\} \\
&- \int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^j(x)A_{ie}(y)A_{0f}(y)\{A_{jc}(x), \Pi_d^i(y)\} + \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_k^y\{\Pi_a^j(x), A_{id}(y)\} \\
&- \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_i^y\{\Pi_a^j(x), A_{kd}(y)\} - \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{if}(y)\{\Pi_a^j(x), A_{ke}(y)\} \\
&- \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)\{\Pi_a^j(x), A_{if}(y)\} + \frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_k^y\{\Pi_b^j(x), A_{id}(y)\} \\
&- \frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_i^y\{\Pi_b^j(x), A_{kd}(y)\} - \frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{if}(y)\{\Pi_b^j(x), A_{ke}(y)\} \\
&- \frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)\{\Pi_b^j(x), A_{if}(y)\} + \int d^3yg\bar{\psi}_{\theta d}(y)\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\partial_i^x\{\Pi_a^i(x), A_{\mu f}(y)\} \\
&- \int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(y)g\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\{\Pi_b^i(x), A_{\mu f}(y)\} + \int d^3yg\bar{\vartheta}_{\beta d}(y)\{\bar{\psi}_{\theta b}(x), \bar{\pi}_{\beta d}(y)\}\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
&- \int d^3yg\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\{\psi_{\sigma c}(x), \pi_{\beta d}(y)\}\vartheta(y)_{\beta d} \\
&= -\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)(-\delta_{ae}\delta_i^j\delta^3(x-y)) - \int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_d^i(y)A_{0f}(y)A_{jc}(x)(-\delta_{be}\delta_i^j\delta^3(x-y)) \\
&+ \int d^3yg\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_d^k(y)(\delta_{cd}\delta_j^k\delta^3(x-y)) - \Pi_b^j(x)\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{0d}(y)\partial_i^y(\delta_{cd}\delta_j^i\delta^3(x-y)) \\
&- \int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^j(x)A_{ie}(y)A_{0f}(y)(\delta_{cd}\delta_j^i\delta^3(x-y)) + \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_k^y(-\delta_{ad}\delta_i^j\delta^3(x-y)) \\
&- \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yF_d^{ki}(y)\partial_i^y(-\delta_{ad}\delta_k^j\delta^3(x-y)) - \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{if}(y)(-\delta_{ae}\delta_k^j\delta^3(x-y)) \\
&- \frac{1}{2}\partial_j^x\int d^3yg\varepsilon_{def}F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)(-\delta_{af}\delta_i^j\delta^3(x-y)) + \frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_k^y(-\delta_{bd}\delta_i^j\delta^3(x-y)) \\
&- \frac{1}{2}\int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)\partial_i^y(-\delta_{bd}\delta_k^j\delta^3(x-y)) - \frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{if}(y)(-\delta_{be}\delta_k^j\delta^3(x-y)) \\
&- \frac{1}{2}\int d^3ygg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{jc}(x)F_d^{ki}(y)A_{ke}(y)(-\delta_{bf}\delta_i^j\delta^3(x-y)) + \int d^3yg\bar{\psi}_{\theta d}(y)\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)\partial_i^x(-\delta_{af}\delta_\mu^i\delta^3(x-y)) \\
&- \int d^3yg\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(y)g\gamma^\mu_{\theta\beta}T^f_{de}\psi_{\beta e}(y)(-\delta_{bf}\delta_\mu^i\delta^3(x-y)) + \int d^3yg\bar{\vartheta}_{\beta d}(y)(-\delta_{\theta\beta}\delta_{bd}\delta^3(x-y))\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
&- \int d^3yg\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}(-\delta_{\sigma\beta}\delta_{cd}\delta^3(x-y))\vartheta(y)_{\beta d} \\
&= g\varepsilon_{daf}\partial_j^x(\Pi_d^j(x)A_{0f}(x)) + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dbf}\Pi_d^j(x)A_{0f}(x)A_{jc}(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_c^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\partial_j^xA_{0c}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cef}\Pi_b^i(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x) + \frac{1}{2}\partial_j^x\partial_k^x F_a^{kj}(x) - \frac{1}{2}\partial_j^x\partial_i^x F_a^{ji}(x) \\
&+ \frac{1}{2}g\varepsilon_{daf}\partial_j^x F_d^{ji}(x)A_{if}(x) + \frac{1}{2}g\varepsilon_{daf}F_d^{ji}(x)\partial_j^x A_{if}(x) + \frac{1}{2}g\varepsilon_{dea}\partial_j^x F_d^{kj}(x)A_{ke}(x) + \frac{1}{2}g\varepsilon_{dea}F_d^{kj}(x)\partial_j^x A_{ke}(x) \\
&+ \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_k^x F_b^{kj}(x)A_{jc}(x) - \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}A_{jc}(x)\partial_i^x F_b^{ji}(x) \\
&+ \frac{1}{2}gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dbf}A_{jc}(x)F_d^{ji}(x)A_{if}(x) + \frac{1}{2}gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{deb}A_{jc}(x)F_d^{kj}(x)A_{ke}(x) \\
&- g\partial_i^x(\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x)) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(x)g\gamma^i_{\theta\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x) \\
&- g\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) + g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d} \\
&= -g\varepsilon_{adf}\partial_j^x\Pi_d^j(x)A_{0f}(x) - g\varepsilon_{adf}\Pi_d^j(x)\partial_j^x A_{0f}(x) + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dbf}\Pi_d^j(x)A_{0f}(x)A_{jc}(x) \\
&+ g\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\Pi_c^j(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^j(x)\partial_j^x A_{0c}(x) - gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{cef}\Pi_b^i(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x) \\
&- \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_j^x F_b^{ji}(x)A_{ic}(x) + \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_j^x F_b^{kj}(x)A_{kc}(x) + \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_k^x F_b^{kj}(x)A_{jc}(x) - \frac{1}{2}g\varepsilon_{abc}\partial_i^x F_b^{ki}(x)A_{kc}(x) \\
&+ \frac{1}{2}gg\varepsilon_{bac}\varepsilon_{bdf}A_{jc}(x)A_{if}(x)F_d^{ji}(x) + \frac{1}{2}gg\varepsilon_{bac}\varepsilon_{bde}A_{jc}A_{ke}(x)(x)F_d^{jk}(x) \\
&- g\partial_i^x(\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x)) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(x)g\gamma^i_{\theta\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x) \\
&- g\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) + g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d}
\end{aligned}
$$

Simplificando el resultado obtenido anteriormente se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{2a}(x) =& - g\varepsilon_{adf}\partial_j^x\Pi_d^j(x)A_{0f}(x) + gg\varepsilon_{bac}\varepsilon_{bdf}\Pi_d^j(x)A_{0f}(x)A_{jc}(x) - gg\varepsilon_{cab}\varepsilon_{cef}\Pi_b^i(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x) && (419)\\
&+ g(\partial_i^x(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x) - \bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x))) && (420)\\
&- g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d}) && (421)
\end{aligned}
$$

Usando la propiedad del tensor de Levi-Civita $\varepsilon_{cab}\varepsilon_{cef} = \delta_{ae}\delta_{bf} - \delta_{af}\delta_{be}$, se puede determinar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{2a}(x) =& - g\varepsilon_{adf}\partial_j^x\Pi_d^j(x)A_{0f}(x) \\
&+ gg(\delta_{ad}\delta_{cf} - \delta_{af}\delta_{cd})\Pi_d^i(x)A_{ic}(x)A_{0f}(x) - gg(\delta_{ae}\delta_{bf} - \delta_{af}\delta_{be})\Pi_b^i(x)A_{ie}(x)A_{0f}(x) \\
&+ g(\partial_i^x(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x) - \bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x))) \\
&- g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d}) \\
=& - g\varepsilon_{adf}\partial_j^x\Pi_d^j(x)A_{0f}(x) + gg\Pi_a^i(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{0a}(x)\Pi_d^i(x)A_{id}(x) \\
&- ggA_{ia}(x)\Pi_b^i(x)A_{0b}(x) + ggA_{0a}(x)\Pi_b^i(x)A_{ib}(x) \\
&- g(\partial_i^x(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x) - \bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d})\\
=&- g\varepsilon_{adf}\partial^x_j\Pi^j_d(x)A_{0f}(x) + gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x)\\
&+ g(\partial^x_i(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x) - \bar{\psi}_{\theta d}(x)\gamma^i_{\theta\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x)))\\
&- g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d})
\end{aligned}
$$

Usando el hecho que: $\partial^y_i\Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x) + g\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \approx 0$

$$
\begin{aligned}
\dot{\varphi}_{2a}(x) \approx& gg\varepsilon_{adf}\varepsilon_{dbc}\Pi^i_b(y)A_{ic}(y)A_{0f}(x) + gg\varepsilon_{adf}\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(x)A_{0f}(x) + gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x)\\
&- ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x) + g\partial^x_i(\bar{\psi}_{\theta d}(x)(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\gamma^iT^b_{de} - \gamma^iT^a_{de})_{\theta\beta}\psi_{\beta e}(x))\\
&- g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d})\\
=&- gg(\delta_{ab}\delta_{fc} - \delta_{ac}\delta_{fb})\Pi^i_b(y)A_{ic}(y)A_{0f}(x) + gg\varepsilon_{adf}\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(x)A_{0f}(x) + gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x)\\
&- ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x) + g\partial^x_i(\bar{\psi}_{\theta d}(x)(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\gamma^iT^b_{de} - \gamma^iT^a_{de})_{\theta\beta}\psi_{\beta e}(x))\\
&- g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d})\\
=&- gg\Pi^i_a(y)A_{if}(y)A_{0f}(x) + ggA_{ia}(y)\Pi^i_b(y)A_{0b}(x) + gg\varepsilon_{adf}\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(x)A_{0f}(x)\\
&+ gg\Pi^i_a(x)A_{if}(x)A_{0f}(x) - ggA_{ia}(x)\Pi^i_b(x)A_{0b}(x)\\
&+ g\partial^x_i(\bar{\psi}_{\theta d}(x)(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\gamma^iT^b_{de} - \gamma^iT^a_{de})_{\theta\beta}\psi_{\beta e}(x))\\
&- g(\bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d})\\
=& g\partial^x_i(\bar{\psi}_{\theta d}(x)(g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\gamma^iT^b_{de} - \gamma^iT^a_{de})_{\theta\beta}\psi_{\beta e}(x))\\
&- g(g\varepsilon_{adf}\bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(x)A_{0f}(x) + \bar{\vartheta}_{\theta d}(x)\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{dc}\psi_{\sigma c}(x) - \bar{\psi}_{\theta b}(x)\gamma^0_{\theta\beta}T^a_{bd}\vartheta(x)_{\beta d}) \approx 0
\end{aligned}
\tag{422}
$$

Entonces, se puede concluir que al analizar laconsistencia del vínculo Φ_{2a} se obtiene una relación de la cual es posible obtener una condición sobre los multiplicadores de Lagrange $\vartheta(x)$ y $\bar{\vartheta}(x)$.

21. Apéndice U: Demostración de (5.35)

21.1. Cálculo Matriz Inversa (5.35)

Considerando a los vínculos:

$$\Theta^1_{\sigma a} = \pi_{\sigma a} + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\theta a}(x)\gamma^0_{\theta\sigma} \approx 0 \tag{423}$$

$$\Theta^2_{\sigma a} = \bar{\pi}_{\sigma a} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x) \approx 0, \tag{424}$$

Se calculan los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}
\{\Theta^1_{\sigma a}(x), \Theta^2_{\beta d}(y)\} =& \{\pi_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\upsilon a}(x)\gamma^0_{\upsilon\sigma}, \bar{\pi}_{\beta d}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\psi_{\alpha d}(y)\} \\
=& \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}\{\pi_{\sigma a}(x), \psi_{\alpha d}(y)\} + \frac{i}{2}\{\bar{\psi}_{\upsilon a}(x), \bar{\pi}_{\beta d}(y)\}\gamma^0_{\upsilon\sigma} \\
=& \frac{i}{2}\gamma^0_{\beta\alpha}(-\delta_{\sigma\alpha}\delta_{ad}\delta^3(x-y)) + \frac{i}{2}(-\delta_{\upsilon\beta}\delta_{ad}\delta^3(x-y))\gamma^0_{\upsilon\sigma} \\
=& -\frac{i}{2}\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y) - \frac{i}{2}\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y) \\
=& -i\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{425}$$

$$\begin{aligned}
\{\Theta^2_{\sigma a}(x), \Theta^1_{\beta d}(y)\} =& \{\bar{\pi}_{\sigma a}(x) + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\psi_{\alpha a}(x), \pi_{\beta d}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\upsilon d}(y)\gamma^0_{\upsilon\beta}\} \\
=& \frac{i}{2}\{\bar{\pi}_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\beta d}(y)\}\gamma^0_{\upsilon\beta} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}\{\psi_{\alpha a}(x), \pi_{\beta d}(y)\} \\
=& \frac{i}{2}(-\delta_{\sigma\upsilon}\delta_{ad}\delta^3(x-y))\gamma^0_{\upsilon\beta} + \frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\alpha}(-\delta_{\alpha\beta}\delta_{ad}\delta^3(x-y)) \\
=& -\delta_{ad}\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta^3(x-y) - \delta_{ad}\frac{i}{2}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta^3(x-y) \\
=& -\delta_{ad}i\gamma^0_{\sigma\beta}\delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{426}$$

Por lo tanto, la matriz de vínculos secundarios se puede expresar como siendo:

$$C_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -i\delta_{ad}\gamma^0_{\beta\sigma}\delta^3(x-y) \\ \\ -\delta_{ad}i\gamma^0_{\sigma\beta}\delta^3(x-y) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ab}\delta^3(x-y). \tag{427}$$

Su matriz inversa puede ser calculada a partir de la siguiente condición:

$$\int d^3z C(x,z)C^{-1}(z,y) = \delta(x-y)I, \tag{428}$$

donde se considera que I es la matriz identidad de dimension 2x2 y:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) \\ \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) \end{pmatrix}. \tag{429}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int d^3z \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ab}\delta^3(x-z) \begin{pmatrix} A_1(z,y) & A_2(z,y) \\ \\ B_1(z,y) & B_2(z,y) \end{pmatrix} &= \delta(x-y)I \\ \begin{pmatrix} 0 & -i(\gamma^0)^T \\ \\ -i\gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta_{ab} \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) \\ \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) \end{pmatrix} &= \delta(x-y)I. \end{aligned} \tag{430}$$

Igualando componente a componente la relación anterior se encuentra que:

$$-\delta_{ab}i(\gamma^0)^T B_1(x,y) = \delta(x-y) \tag{431}$$

$$-\delta_{ab}i(\gamma^0)^T B_2(x,y) = 0 \tag{432}$$

$$-\delta_{ab}i\gamma^0 A_2(x,y) = \delta(x-y) \tag{433}$$

$$-\delta_{ab} i\gamma^0 A_1(x,y) = 0. \tag{434}$$

Se puede concluir que $B_2(x,y) = A_1(x,y) = 0$. Por otro lado, multiplicando por $i(\gamma^0)^T$ por la izquierda a la primera expresión

$$(\gamma^0)^T(\gamma^0)^T B_1(x,y) = \delta_{ab}(\gamma^0)^T i\delta(x-y) \tag{435}$$

$$(\gamma^0\gamma^0)^T B_1(x,y) = i\delta_{ab}(\gamma^0)^T \delta(x-y) \tag{436}$$

$$B_1(x,y) = i\delta_{ab}(\gamma^0)^T \delta(x-y). \tag{437}$$

Finalmente, multiplicando por $i\gamma^0$ a la tercera relación

$$\delta_{ab}\gamma^0\gamma^0 A_2(x,y) = i\gamma^0\delta(x-y) \tag{438}$$

$$A_2(x,y) = \delta_{ab} i\gamma^0 \delta(x-y) \tag{439}$$

Entonces, la matriz inversa será:

$$C^{-1}_{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & i\gamma^0 \\ i(\gamma^0)^T & 0 \end{pmatrix} \delta_{ab}\delta(x-y) \tag{440}$$

22. Apéndice V: Cálculo Corchetes de Dirac Consistentes con los Vínculos de Segunda Clase

22.1. Calculo de los corchetes de Dirac entre los campos $\bar{\psi}_{\sigma a}$ y $\psi_{\sigma a}$

Inicialmente se calcula los siguientes corchetes de Poisson:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_{\sigma a}(x,t), \Theta^1_{\beta b}(y,t)\} =& \{\psi_{\sigma a}(x), \pi_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta c}(y)\gamma^0_{cb}\} = \{\psi_{\sigma a}(x), \pi_{\beta b}(y)\} = -\delta_{\sigma\beta}\delta_{ab}\delta(x-y) \\
\{\psi_{\sigma a}(x,t), \Theta^2_{\beta b}(y,t)\} =& \{\psi_{\sigma a}(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_{\beta c}(y)\} = 0 \\
\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \Theta^1_{\beta b}(y,t)\} =& \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \pi_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta c}(y)\gamma^0_{cb}\} = 0 \\
\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \Theta^2_{\beta b}(y,t)\} =& \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_{\beta c}(y)\} = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y)\} = -\delta_{\sigma\beta}\delta_{ab}\delta(x-y).
\end{aligned}
\tag{441}
$$

Ahora, se procede a calcular los corchetes preliminares de Dirac entre las variables independientes escogidas. Por lo tanto, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\{\psi_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}'_D =& \{\psi_{\sigma a}(x), \psi_{\beta b}(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \Theta^i_{vc}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\upsilon\mu cd}(u,v) \{\Theta^j_{\mu d}(v), \psi_{\beta b}(y)\} \\
=& -\int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \Theta^1_{vc}(u)\} C^{1j^{-1}}_{\upsilon\mu cd} \{\Theta_{jd}(u), \psi_{\beta b}(y)\}
\end{aligned}
\tag{442}
$$

Teniendo en cuenta que $\{\psi_{\sigma a}(x,t), \Theta^2_{\beta b}(y,t)\} = 0$, se determina lo siguiente:

$$
\{\psi_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}'_D = 0. \tag{443}
$$

Los corchetes de Dirac entre el campo $\bar{\psi}$ consigo mismo se obtienen a partir de la siguiente expresión:

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),\bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\bar{\psi}_{\beta b}(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\Theta^i_{vc}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\upsilon\mu cd}(u,v)\{\Theta^j_{\mu d}(v),\bar{\psi}_{\beta b}(y)\}$$
$$= -\int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\Theta^2_{vc}(u)\} C^{2j^{-1}}_{\upsilon\mu cd}(u,v)\{\Theta^j_{\mu d}(v),\bar{\psi}_{\beta b}(y)\} \tag{444}$$

Como $\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),\Theta^1_{\beta b}(y,t)\} = 0$, entonces:

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),\bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D = 0 \tag{445}$$

Finalmente, los corchetes de Dirac entre los campos fermiónicos se pueden determinar a partir del siguiente cálculo:

$$\{\psi_{\sigma a}(x,t),\bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D = \{\psi_{\sigma a}(x),\bar{\psi}_{\beta b}(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x),\Theta^i_{vc}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\upsilon\mu bc}(u,v)\{\Theta^j_{\mu d}(v),\bar{\psi}_{\beta b}(y)\} \tag{446}$$
$$= -\int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x),\Theta^1_{vc}(u)\} C^{12^{-1}}_{\upsilon\mu cd}(u,v)\{\Theta^2_{\mu d}(v),\bar{\psi}_{\beta b}(y)\} \tag{447}$$
$$= -\int\int d^3u d^3v (-\delta_{ac}\delta_{\sigma\upsilon}\delta(x-u))(i\delta_{cd}\gamma^0_{\upsilon\mu}\delta(u-v))(-\delta_{bd}\delta_{\upsilon\mu}\delta(y-v)) \tag{448}$$
$$= -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\int\int d^3u d^3v \delta(x-u)\delta(u-v))\delta(y-v) \tag{449}$$
$$= -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{450}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),\psi_{\beta b}(y,t)\}_D = \{\bar{\psi}_{a}(x),\psi_{\beta b}(y)\} - \int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\Theta^i_{vc}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\upsilon\mu bc}(u,v)\{\Theta^j_{\mu d}(v),\psi_{\beta b}(y)\} \tag{451}$$
$$= -\int\int d^3u d^3v \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\Theta^2_{vc}(u)\} C^{21^{-1}}_{\upsilon\mu bc}(u,v)\{\Theta^1_{\mu d}(v),\psi_{\beta b}(y)\} \tag{452}$$

$$= -\int\int d^3u d^3v(-\delta_{ac}\delta_{\sigma v}\delta(x-u))(i\delta_{dc}\gamma^0_{v\mu}\delta(u-v))(-\delta_{\mu\beta}\delta_{bd}\delta(y-v)) \tag{453}$$

$$= -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\int\int d^3u d^3v\delta(x-u)\delta(u-v)\delta(y-v) \tag{454}$$

$$= -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{455}$$

Entonces, los corchetes de Dirac fundamentales asociados a las variables fermiónicas serán:

$$\{\psi_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{456}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{457}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}'_D = -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{458}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}'_D = -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y). \tag{459}$$

Por otro lado, para las variables bosónicas se calculan los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}
\{A_{\mu a}(x,t), \Theta^1_{\beta b}(y,t)\} =& \{A_{\mu a}(x), \pi_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta c}(y)\gamma^0_{cb}\} = 0 \\
\{A_{\mu a}(x,t), \Theta^2_{\beta b}(y,t)\} =& \{A_{\mu a}(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_{\beta c}(y)\} = 0 \\
\{\Pi^\mu_a(x,t), \Theta^1_{\beta b}(y,t)\} =& \{\Pi^\mu_a(x), \pi_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\bar{\psi}_{\beta c}(y)\gamma^0_{cb}\} = 0 \\
\{\Pi^\mu_a(x,t), \Theta^2_{\beta b}(y,t)\} =& \{\Pi^\mu_a(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y) + \frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\psi_{\beta c}(y)\} = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \bar{\pi}_{\beta b}(y)\} = -\delta_{\sigma\beta}\delta_{ab}\delta(x-y).
\end{aligned} \tag{460}$$

De modo que los corchetes de Dirac entre los campos $A_{\mu a}$ y $\Pi^{\mu a}$ y una variable dinámica B(x) se pueden escribir como siendo:

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu a}(x,t), B(y,t)\}'_D =& \{A_{\mu a}(x), B(y,t)\} - \int\int d^3u d^3v \{A_{\mu a}(x), \Theta^i_{\upsilon c}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\upsilon\mu bc}(u,v)\{\Theta^j_{\mu d}(v), B(y,t)(y)\} \\
=& \{A_{\mu a}(x), B(y,t)\} \\
\{\Pi^\mu_a(x,t), B(y,t)\}'_D =& \{\Pi^\mu_a(x), B(y,t)\} - \int\int d^3u d^3v \{\Pi^\mu_a(x), \Theta^i_{\upsilon c}(u)\} C^{ij^{-1}}_{\upsilon\mu bc}(u,v)\{\Theta^j_{\mu d}(v), B(y,t)(y)\} \\
=& \{A_{\mu a}(x), B(y,t)\}
\end{aligned}
\tag{461}
$$

Por lo tanto, se concluye que el conjunto de corchetes de Dirac preliminares se puede escribir como se indica a continuación:

$$\{\psi_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{462}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{463}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}'_D = - i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{464}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}'_D = - i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{465}$$

$$\{A_{\mu a}(x,t), \Pi^{\upsilon b}(y,t)\}'_D = \delta_{ab}\delta^\upsilon_\mu\delta^3(x-y) \tag{466}$$

$$\{A_{\mu a}(x,t), \psi_{\alpha b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{467}$$

$$\{A_{\mu a}(x,t), \bar{\psi}_{\alpha b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{468}$$

$$\{\Pi^\mu_a(x,t), \psi_{\alpha b}(y,t)\}'_D = 0 \tag{469}$$

$$\{\Pi^\mu_a(x,t), \bar{\psi}_{\alpha b}(y,t)\}'_D = 0. \tag{470}$$

23. Apéndice W: Deducción de (5.39) y (5.44)

23.1. Demostración Matriz Inversa de Vínculos de Primera Clase (5.39)

Considerando el siguiente conjunto de vínculos:

$$
\begin{aligned}
\phi_{1a}(x) =& \Pi_a^0 \approx 0 \\
\phi_{2a}(x) =& \partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma_{\sigma\beta}^0 T_{bc}^a \psi_{\beta c}(x) \approx 0 \\
\phi_{3a}(x) =& A_{3a}(x,t) \approx 0 \\
\phi_{4a}(x) =& \Pi_a^3(x,t) + \partial_3 A_{0a}(x,t) \approx 0,
\end{aligned}
\tag{471}
$$

se procede a calcular los corchetes de Poisson:

$$
\begin{aligned}
&\{\phi_{1a}(x), \phi_{1b}(y)\}'_D = \{\Pi_a^0(x), \Pi_b^0(y)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_{1a}(x), \phi_{2b}(y)\}'_D = \{\Pi_a^0(x,t), \partial_i \Pi_b^i(y) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y,t)A_{id}(y) - g\bar{\psi}_{\sigma c}(x)\gamma_{\sigma\beta}^0 T_{cd}^b \psi_{\beta d}(x)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_{1a}(x), \phi_{3b}(y)\}'_D = \{\Pi_a^0(x,t), A_{3b}(y)\}'_D = 0 \\
&\{\phi_{1a}(x), \phi_{4b}(y)\}'_D = \partial_3^y \{\Pi_a^0(x), A_{0b}(y)\}'_D = -\delta_{ab}\partial_3^y \delta(x-y) = \delta_{ab}\partial_3^x \delta(x-y).
\end{aligned}
\tag{472}
$$

De igual manera para el vínculo ϕ_2:

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{2a}(x), \phi_{2e}\}'_D =& \{\partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x)), \partial_j^y \Pi_e^j(y) + g\varepsilon_{efg}\Pi_f^j(y)A_{jg}(y)\}'_D \\
&+ gg\gamma_{\sigma\beta}^0\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{bc}^a T_{fg}^e \{\bar{\psi}_{\sigma b}(x), \bar{\psi}_{\mu f}(x)\psi_{\upsilon g}(x)\}'_D \psi_{\beta c}(x) + gg\gamma_{\sigma\beta}^0\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{bc}^a T_{fg}^e \bar{\psi}_{\sigma d}(x)\{\psi_{\beta c}(x), \bar{\psi}_{\mu f}(x)\psi_{\upsilon g}(x)\}'_D.
\end{aligned}
\tag{473}
$$

Se calcula primero $\{\partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x)), \partial_j^y \Pi_e^j(y) + g\varepsilon_{efg}\Pi_f^j(y)A_{jg}(y)\}_D^{*}$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{2a}(x), \phi_{2d}(y)\}_D^{*} =& \{\partial_k^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x), \partial_k^y \Pi_d^k(y) + g\varepsilon_{def}\Pi_e^k(t)A_{kf}(y)\}_D^{*} \\
=& g\varepsilon_{def}\Pi_e^k(y)\partial_i^x\{\Pi_a^i(x), A_{kfa}(y)\}_D^{*} + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)\partial_k^y\{A_{ic}(x), \Pi_d^k(y)\}_D^{*} \\
& + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{ic}(x)\Pi_e^k(y)\{\Pi_b^i(x), A_{kf}(y)\}_D^{*} \\
& + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^i(x)A_{kf}(y)\{A_{ic}(x), \Pi_e^k(y)\}_D^{*} \\
=& g\varepsilon_{def}\Pi_e^k(y)\partial_i^x(-\delta_k^i\delta_{af}\delta(x-y)) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)\partial_k^y(\delta_i^k\delta_{cd}\delta(x-y)) \\
& + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}A_{ic}(x)\Pi_e^k(y,t)(-\delta_k^i\delta_{bf}\delta(x-y)) \\
& + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{def}\Pi_b^i(x)A_{kf}(y)(\delta_i^k\delta_{ce}\delta(x-y)) \\
=& - g\varepsilon_{dea}\Pi_e^k(y)\partial_k^x\delta(x-y) + g\varepsilon_{abd}\Pi_b^k(x)\partial_k^y\delta(x-y) \\
& - gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{deb}A_{kc}(x)\Pi_e^k(x)\delta(x-y) + gg\varepsilon_{abc}\varepsilon_{dcf}\Pi_b^k(x)A_{kf}(x,t)\delta(x-y) \\
& = -g\varepsilon_{adb}\Pi_b^k(y)\partial_k^x\delta(x-y) + g\varepsilon_{adb}\Pi_b^k(x)\partial_k^x\delta(x-y) \\
& + gg\varepsilon_{cab}\varepsilon_{cdf}(A_{kb}(x)\Pi_f^k(x) - A_{kf}(x)\Pi_b^k(x))\delta(x-y) \\
=& - g\varepsilon_{adb}\partial_k^x(\Pi_b^k(x)\delta(x-y)) + g\varepsilon_{adb}\partial_k^x\Pi_b^k(y)\delta(x-y) \\
& + g\varepsilon_{adb}\partial_k^x(\Pi_b^k(x)\delta(x-y)) - g\varepsilon_{adb}\partial_k^x\Pi_b^k(x)\delta(x-y) \\
& + gg(\delta_{ad}\delta_{bf} - \delta_{af}\delta_{bd})(A_{kb}(x)\Pi_f^k(x) - A_{kf}(x)\Pi_b^k(x))\delta(x-y) \\
=& - g\varepsilon_{adb}\partial_k^x\Pi_b^k(x)\delta(x-y) \\
& + gg\delta_{ad}(A_{kf}(x)\Pi_f^k(x) - A_{kf}(x)\Pi_f^k(x))\delta(x-y) \\
& - gg(A_{kd}(x)\Pi_a^k(x) - A_{ka}(x)\Pi_d^k(x))\delta(x-y)
\end{aligned}
$$

Usando $\Phi_{2a}(x) = \partial_i^x\Pi_b^i(x) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(x)A_{id}(x) + g\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma_{\sigma\beta}^0 T_{de}^a\psi_{\beta e}(x) \approx 0$, se tiene lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{2a}(x), \phi_{2d}(y)\}'_D \approx & - gg(A_{kd}(x,t)\Pi^k_a(x) - g\varepsilon_{adb}(-g\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x))\delta(x-y) \\
& - A_{ka}(x)\Pi^k_d(x))\delta(x-y) \\
\approx & gg(\delta_{ac}\delta_{de} - \delta_{ae}\delta_{dc})\Pi^k_c(x,t)A_{ke}(x,t)\delta(x-y) + gg\varepsilon_{adb}\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x)\delta(x-y) \\
& - gg(A_{kd}(x)\Pi^k_a(x) - A_{ka}(x)\Pi^k_d(x))\delta(x-y) \\
\approx & gg(A_{kd}(x)\Pi^k_a(x) - A_{ka}(x)\Pi^k_d(x))\delta(x-y) \\
& - gg(A_{kd}(x)\Pi^k_a(x) - A_{ka}(x)\Pi^k_d(x))\delta(x-y) \\
& + gg\varepsilon_{adb}\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x)\delta(x-y) \\
\approx & gg\varepsilon_{adb}\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x)\delta(x-y)
\end{aligned}
\tag{474}
$$

Por otro lado, al calcular $\{g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x), g\bar{\psi}_{\mu e}(x)\gamma^0_{\mu\upsilon}T^d_{ef}\psi_{\upsilon f}(x)\}'_D$, haciendo uso de los corchetes de Dirac preliminares definidos anteriormentes se demuestra que:

$$
\begin{aligned}
\{g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x), g\bar{\psi}_{\mu e}(x)\gamma^0_{\mu\upsilon}T^d_{ef}\psi_{\upsilon f}(x)\}'_D = & gg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fg}\{\bar{\psi}_{\sigma b}(x), \bar{\psi}_{\mu f}(x)\psi_{\upsilon g}(x)\}'_D\psi_{\beta c}(x) \\
& + gg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fg}\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\{\psi_{\beta c}(x), \bar{\psi}_{\mu f}(x)\psi_{\upsilon g}(x)\}'_D \\
= & - gg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fg}\bar{\psi}_{\mu f}(x)\{\bar{\psi}_{\sigma b}(x), \psi_{\upsilon g}(x)\}'_D\psi_{\beta c}(x) \\
& + gg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fg}\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\{\psi_{\beta c}(x), \bar{\psi}_{\mu f}(x)\}'_D\psi_{\upsilon g}(x) \\
= & - gg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fg}\bar{\psi}_{\mu f}(x)(-i\delta_{bg}\gamma^0_{\sigma\upsilon}\delta(x-y))\psi_{\beta c}(x) \\
& + gg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fg}\bar{\psi}_{\sigma b}(x)(-i\delta_{cf}\gamma^0_{\beta\mu}\delta(x-y))\psi_{\upsilon g}(x) \\
= & igg\gamma^0_{\beta\sigma}\gamma^0_{\sigma\upsilon}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fb}\bar{\psi}_{\mu f}(x)\delta(x-y)\psi_{\beta c}(x) \\
& - igg\gamma^0_{\sigma\beta}\gamma^0_{\beta\mu}\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{cg}\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\delta(x-y)\psi_{\upsilon g}(x) \\
= & igg(\delta_{\beta\upsilon})\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{fb}\bar{\psi}_{\mu f}(x)\delta(x-y)\psi_{\beta c}(x) - igg(\delta_{\sigma\mu})\gamma^0_{\mu\upsilon}T^a_{bc}T^e_{cg}\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\delta(x-y)\psi_{\upsilon g}(x) \\
= & igg\bar{\psi}_{\mu f}(x)\gamma^0_{\mu\beta}\psi_{\beta c}(x)T^e_{fb}T^a_{bc}\delta(x-y) \\
& - igg\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\upsilon}\psi_{\upsilon g}(x)T^a_{bc}T^e_{cg}\delta(x-y) \\
= & igg\bar{\psi}_{\mu f}(x)\gamma^0_{\mu\beta}\psi_{\beta c}(x)(T^e_{fb}T^a_{bc} - T^a_{bc}T^e_{cg})\delta(x-y) \\
= & - gg\bar{\psi}_{\mu f}(x)\gamma^0_{\mu\beta}\psi_{\beta g}(x)\varepsilon_{eac}T^c_{fc}\delta(x-y)
\end{aligned}
$$

Reemplazando los resultados obtenidos, se deduce lo siguiente:

$$\{\phi_{2a}(x),\phi_{2e}\}'_D \approx gg\bar{\psi}_{\sigma f}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}\psi_{\beta c}(x)\varepsilon_{aeb}T^b_{fc}\delta(x-y)-gg\bar{\psi}_{\mu f}(x)\gamma^0_{\mu\beta}\psi_{\beta g}(x)\varepsilon_{eab}T^b_{fc}\delta(x-y)=0. \tag{475}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\{\phi_{2a}(x),\phi_{3b}(y)\}'_D =&\{\partial^x_i\Pi^i_a(x)+g\varepsilon_{adc}\Pi^i_d(x)A_{ic}(x)-g\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x),A_{3b}(y)\}'_D\\ =&\partial^x_i\{\Pi^i_a(x),A_{3b}(y,t)\}'_D+g\varepsilon_{adc}A_{ic}(x)\{\Pi^i_d(x),A_{3b}(y)\}\\ =&-\partial^x_i(\delta^i_3\delta_{ab}\delta(x-y))-g\varepsilon_{adc}A_{ic}(x)(\delta^i_3\delta_{db}\delta(x-y))\\ =&-\delta_{ab}\partial^x_3\delta(x-y)-g\varepsilon_{abc}A_{3c}(x,t)\delta(x-y)\\ =&-\delta_{ab}\partial^x_3\delta(x-y).\end{aligned} \tag{476}$$

$$\begin{aligned}\{\phi_{2a}(x),\phi_{4d}(y)\}'_D =&\{\partial^x_i\Pi^i_a(x)+g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)A_{ic}(x)-g\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{de}\psi_{\beta e}(x),\Pi^3_d(y)+\partial^y_3A_{0d}(y)\}'_D\\ =&g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)\{A_{ic}(x),\Pi^3_d(y)\}'_D\\ =&g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x)\delta^3_i\delta_{cd}\delta(x-y)\\ =&-g\varepsilon_{abc}\Pi^3_c(x)\delta(x-y)\end{aligned} \tag{477}$$

Para el vínculo ϕ_3 se demuestra que:

$$\begin{aligned}&\{\phi_{3a}(x),\phi_{1b}(y)\}'_D=\{A_{3a}(x),\Pi^0_b(y)\}'_D=0\\ &\{\phi_{3a}(x),\phi_{3b}(y)\}'_D=\{A_{3a}(x),A_{3b}(y)\}'_D=0\\ &\{\phi_{3a}(x),\phi_{4b}(y)\}'_D=\{A_{3a}(x),\Pi^3_b(y)\}'_D=\delta_{ab}\delta(x-y)\end{aligned} \tag{478}$$

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{3a}(x),\phi_{2b}(y)\}_D^{*} =&\{A_{3a}(x),\partial_i^y\Pi_b^i(y)+g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y)-g\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x)\}_D^{*}\\
=&\partial_i^y\{A_{3a}(x),\Pi_b^i(y)\}_D^{*}+g\varepsilon_{bcd}A_{id}(y)\{A_{3a}(x),\Pi_c^i(y)\}_D^{*}\\
=&\partial_i^y\delta_3^i\delta_{ab}\delta(x-y)+g\varepsilon_{bcd}A_{id}(y)\delta_3^i\delta_{ac}\delta(x-y)\\
=&\delta_{ab}\partial_3^y\delta(x-y)+g\varepsilon_{bad}A_{3d}(y)\delta(x-y)\\
=&\delta_{ab}\partial_3^y\delta(x-y).
\end{aligned}
\tag{479}
$$

Finalmente, se obtiene para ϕ_4:

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{4a}(x),\phi_{1b}(y)\}_D^{*} =&\{\Pi_a^3(y)+\partial_3^xA_{0a}(x),\Pi_b^0(y)\}_D^{*}\\
=&\partial_3^x\{A_{0a}(x),\Pi_b^0(y)\}_D^{*}\\
=&\delta_{ab}\partial_3^x\delta(x-y)
\end{aligned}
\tag{480}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{4a}(x),\phi_{2b}(y)\}_D^{*} =&\{\Pi_a^3(x)+\partial_3A_{0a}(x),\partial_i\Pi_b^i(y)+g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y)-g\bar{\psi}_{\sigma d}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^b_{de}\psi_{\beta e}(x)\}_D^{*}\\
=&g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)\{\Pi_a^3(x,t),A_{id}(y)\}_D^{*}\\
=&-g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)\delta_i^3\delta_{ad}\delta(x-y)\\
=&-g\varepsilon_{bca}\Pi_c^3(x)\delta(x-y)
\end{aligned}
\tag{481}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\phi_{4a}(x),\phi_{3b}(y)\}_D^{*} =&\{\Pi_a^3(x)+\partial_3A_{0a}(x),A_{3b}(y)\}_D^{*}\\
=&\{\Pi_a^3(x),A_{3b}(x)\}=-\delta_{ab}\delta(x-y)
\end{aligned}
\tag{482}
$$

$$\{\phi_{4a}(x), \phi_{4b}(y)\}_D' = \{\Pi_a^3(x) + \partial_3 A_{0a}(x), \Pi_b^3(t) + \partial_3 A_{0b}(x)\}_D' = 0. \qquad (483)$$

Los resultados anteriores permiten determinar que la matriz compuesta por los corchetes de Poisson entre los vínculos de segunda clase puede ser escrita como siendo:

$$C_{ij}^{ab}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{ab}\partial_3^x \\ 0 & 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x,t)\delta_{cd} \\ 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & 0 & \delta_{ab} \\ \delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x) & -\delta_{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta(x-y), \qquad (484)$$

Para calcular la matriz inversa de $C(x,y)$ en el gauge axial se propone que $C^{-1}(x,y)$ este dada por:

$$C^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & A_3(x,y) & A_4(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) & B_3(x,y) & B_4(x,y) \\ C_1(x,y) & C_2(x,y) & C_3(x,y) & C_4(x,y) \\ D_1(x,y) & D_2(x,y) & D_3(x,y) & D_4(x,y), \end{pmatrix}, \qquad (485)$$

y cumpla que:

$$\int d^3z C(x,z)C^{-1}(z,y) = \delta(x-y)I. \qquad (486)$$

Entonces,en el gauge Axial se tiene que:

$$\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{ab}\partial_3^x \\ 0 & 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd} \\ 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & 0 & \delta_{ab} \\ \delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x) & -\delta_{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta(x-z) \begin{pmatrix} A_1(z,y) & A_2(z,y) & A_3(z,y) & A_4(z,y) \\ B_1(z,y) & B_2(z,y) & B_3(y,z) & B_4(z,y) \\ C_1(z,y) & C_2(z,y) & C_3(z,y) & C_4(z,y) \\ D_1(z,y) & D_2(z,y) & D_3(z,y) & D_4(z,y) \end{pmatrix} = \delta(x-y)I$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \delta_{ab}\partial_3^x \\ 0 & 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd} \\ 0 & -\delta_{ab}\partial_3^x & 0 & \delta_{ab} \\ \delta_{ab}\partial_3^x & -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x) & -\delta_{ab} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(x,y) & A_2(x,y) & A_3(x,y) & A_4(x,y) \\ B_1(x,y) & B_2(x,y) & B_3(x,y) & B_4(x,y) \\ C_1(x,y) & C_2(x,y) & C_3(x,y) & C_4(x,y) \\ D_1(x,y) & D_2(x,y) & D_3(x,y) & D_4(x,y) \end{pmatrix} = \delta(x-y)I, \tag{487}$$

donde I representa a la matriz identidad, la cual se indica a continuación:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{488}$$

Igualando componente a componente la condición impuesta para la matriz inversa se determina que:

$$\begin{aligned} \delta_{ab}\partial_3^x D_1(x,y) &= \delta(x-y) \\ \delta_{ab}\partial_3^x D_2(x,y) &= 0 \\ \delta_{ab}\partial_3^x D_3(x,y) &= 0 \\ \delta_{ab}\partial_3^x D_4(x,y) &= 0, \end{aligned} \tag{489}$$

de donde se puede concluir que $D_2 = D_3 = D_4 = 0$ y la componente D_1 cumple la ecuación diferencial

$$\delta_{ab}\partial_3^x D_1(x,y) = \delta(x-y). \tag{490}$$

Adicionalmente se tienen las condiciones:

$$
\begin{aligned}
&-\delta_{ab}\partial_3^x C_1(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd}D_1(x,y) = 0 \\
&-\delta_{ab}\partial_3^x C_2(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd}D_2(x,y) = \delta(x-y) \to -\delta_{ab}\partial_3^x C_2(x,y) = \delta(x-y) \\
&-\delta_{ab}\partial_3^x C_3(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd}D_3(x,y) = 0 \to \delta_{ab}\partial_3^x C_3(x,y) = 0 \\
&-\delta_{ab}\partial_3^x C_4(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd}D_4(x,y) = 0 \to \delta_{ab}\partial_3^x C_4(x,y) = 0,
\end{aligned}
\tag{491}
$$

las cuales permiten determinar que las componentes $C_3 = C_4 = 0$, además se obtienen las ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{aligned}
-\delta_{ab}\partial_3^x C_1(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)\delta_{cd}D_1(x,y) =& 0 \\
-\delta_{ab}\partial_3^x C_2(x,y) =& \delta(x-y).
\end{aligned}
\tag{492}
$$

Finalmente, las condiciones para las componentes restantes pueden ser determinadas a partir de las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
&-\delta_{ab}\partial_3^x B_1(x,y) + \delta_{ab}D_1(x,y) = 0 \\
&-\delta_{ab}\partial_3^x B_2(x,y) + \delta_{ab}D_2(x,y) = 0 \to -\delta_{ab}\partial_3^x B(x,y) = 0 \to B_2(x,y) = 0 \\
&-\delta_{ab}\partial_3^x B_3(x,y) + \delta_{ab}D_3(x,y) = \delta(x-y) \to -\delta_{ab}\partial_3^x B_3(x,y) = \delta(x-y) \\
&-\delta_{ab}\partial_3^x B_4(x,y) + \delta_{ab}D_4(x,y) = 0 \to -\delta_{ab}\partial_3^x B_4(x,y) = 0 \to B_4(x,y) = 0
\end{aligned}
\tag{493}
$$

$$\delta_{ab}\partial_3^x A_1(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_1(x,y) - \delta_{ab}C_1(x,y) = 0$$

$$\delta_{ab}\partial_3^x A_2(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_2(x,y) - \delta_{ab}C_2(x,y) = 0 \rightarrow \delta_{ab}\partial_3^x A_2(x,y) - \delta_{ab}C_2(x,y) = 0$$

$$\delta_{ab}\partial_3^x A_3(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_3(x,y) - \delta_{ab}C_3(x,y) = 0 \rightarrow \delta_{ab}\partial_3^x A_3(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_3(x,y) = 0$$

$$\delta_{ab}\partial_3^x A_4(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_4(x,y) - \delta_{ab}C_4(x,y) = \delta(x-y) \rightarrow \delta_{ab}\partial_3^x A_4(x,y) = \delta(x-y), \tag{494}$$

lo que permite deducir que $B_2 = B_4 = 0$ así como las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned}
0 =& - \delta_{ab}\partial_3^x B_1(x,y) + \delta_{ab}D_1(x,y) \\
\delta(x-y) =& - \delta_{ab}\partial_3^x B_3(x,y) \\
0 =& \delta_{ab}\partial_3^x A_2(x,y) - \delta_{ab}C_2(x,y) \\
0 =& \delta_{ab}\partial_3^x A_3(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_3(x,y) - \delta_{ab}C_3(x,y)\delta_{ab}\partial_3^x A_3(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_3(x,y) \\
\delta(x-y) =& \delta_{ab}\partial_3^x A_4(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)B_4(x,y) - \delta_{ab}C_4(x,y)\delta_{ab}\partial_3^x A_4(x,y).
\end{aligned} \tag{495}$$

Solucionando el conjunto de ecuaciones diferenciales obtenidas usando las funciones de Green, se concluye que la matriz $C^{ab^{-1}}(x,y)$ puede ser representada como se indica a continuación:

$$C_{ij}^{ab-1}(x,y) = \begin{pmatrix} I_{ab}(x,y) & -\delta_{ab}G(x,y) & H_{ab}(x,y) & \delta_{ab}F(x,y) \\ \delta_{ab}G(x,y) & 0 & -\delta_{ab}F(x,y) & 0 \\ H_{ab}(x,y) & -\delta_{ab}F(x,y) & 0 & 0 \\ \delta_{ab}F(x,y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{496}$$

Donde las funciones $I_{ab}(x,y), G(x,y), H_{ab}(x,y), F(x,y)$ tienen la forma:

$$
\begin{aligned}
G(x,y) &= \frac{1}{2}|x^3 - y^3|\delta^2(x-y) \\
F(x,y) &= \frac{1}{2}\varepsilon(x^3 - y^3)\delta^2(x-y) \\
H_{ab}(x,y) &= \partial_3^x I_{ab}(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)G(x,y) \\
I_{ab}(x,y) &= \frac{1}{4}g\varepsilon_{abc}\delta^2(x-y)\int d\xi|x^3-\xi||\xi-y^3|\frac{\partial\Pi_c^3(x^0,x^1,x^2,x^3)}{\partial\xi}.
\end{aligned}
\tag{497}
$$

y cumplen que:

$$
\begin{aligned}
&F(x,y) = \partial_3^x G(x,y) \\
&\partial_3^x F(x,y) = \partial_3^x\partial_3^x G(x,y) = \delta^3(x-y) \\
&\partial_3^x H_{ab}(x,y) + g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)F(x,y) = 0 \\
&\partial_3^x I_{ab}(x,y) - g\varepsilon_{abc}\Pi_c^3(x)G(x,y) - H_{ab}(x,y) = 0.
\end{aligned}
\tag{498}
$$

23.2. Demostración corchetes de Dirac dados en (5.44)

Se definen los corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas A(x) y B(x) como:

$$
\{A(x),B(y)\}_D = \{A(x),B(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{A(x),\phi_{id}(u)\}'_D C_{ij}^{-1de}(u,v)\{\phi_{je}(v),B(y)\}'_D.
\tag{499}
$$

Inicialmente se calculan los siguientes corchetes de Poisson:

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu a}(x),\phi_{1b}(y)\}'_D &= \{A_{\mu a}(x,t),\Pi_b^0(y)\}'_D = \delta_\mu^0\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
\{A_{\mu a}(x),\phi_{3b}(y)\}'_D &= \{A_{\mu a}(x,t),A_{3b}(y,t)\}'_D = 0
\end{aligned}
\tag{500}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu a}(x), \phi_{2b}(y)\}'_D =& \{A_{\mu a}(x), \partial_i^y \Pi_b^i(y) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y)\}'_D \\
=& \partial_i^y \{A_{\mu a}(x), \Pi_b^i(y)\}'_D + g\varepsilon_{bcd}A_{id}(y)\{A_{\mu a}(x), \Pi_c^i(y)\}'_D \\
=& \delta_\mu^i \delta_{ab}\partial_i^y \delta^3(x-y) + g\delta_\mu^i \varepsilon_{bcd}A_{id}(y)\delta_{ac}\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{501}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_{\mu a}(x), \phi_{4b}(y)\}'_D =& \{A_{\mu a}(x), \Pi_b^3(y) + \partial_3^y A_{0b}(y)\}'_D \\
=& \{A_{\mu a}(x), \Pi_b^3(y)\}'_D \\
=& \delta_\mu^3 \delta_{ab}\delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{502}
$$

Para el momento Π_a^μ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\{\Pi_a^\mu(x), \phi_{1b}(y)\} &= \{\Pi_a^\mu(x), \Pi_a^0(y)\}'_D = 0 \\
\{\Pi_a^\mu(x), \phi_{3b}(y)\} &= \{\Pi_a^\mu(x), A_{3b}(y)\}'_D = -\delta_3^\mu \delta_{ab}\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{503}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi_a^\mu(x), \phi_{2b}(y)\}'_D =& \{\Pi_a^\mu(x), \partial_i^y \Pi_b^i(y) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y)\}'_D \\
=& g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)\{\Pi_a^\mu(x), A_{id}(y)\}'_D \\
=& -g\delta_i^\mu \varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)\delta_{ad}\delta^3(x-y)
\end{aligned} \tag{504}
$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^{\mu}_{a}(x), \phi_{4b}(y)\}'_D =& \{\Pi^{\mu}_{a}(x), \Pi^{3}_{b}(x) + \partial^{y}_{3} A_{0b}(x)\}'_D \\
=& \partial^{y}_{3}\{\Pi^{\mu}_{a}(x), A_{0b}(x)\}'_D \\
=& \delta^{\mu}_{0}\delta_{ab}\partial^{y}_{3}\delta^{3}(x-y) \\
=& -\delta^{\mu}_{0}\delta_{ab}\partial^{x}_{3}\delta^{3}(x-y)
\end{aligned}
\tag{505}
$$

Usando los resultados anteriores, y escogiendo como las coordenadas independientes $(A_{ia}(x,t), \Pi^{i}_{a}(x,t))$ donde $i = 1, 2$ se tiene que:

$$
\begin{aligned}
&\{A_{ia}(x,t), \phi_{1b}(y,t)\}'_D = \delta^{0}_{i}\delta_{ab}\delta^{3}(x-y) = 0 \\
&\{A_{0a}(x,t), \phi_{1b}(y,t)\}'_D = \delta_{ab}\delta^{3}(x-y) = 0 \\
&\{A_{ia}(x,t), \phi_{2b}(y,t)\}'_D = -\delta_{ab}\partial^{x}_{i}\delta(x-y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x,t)\delta^{3}(x-y) \\
&\{A_{ia}(x,t), \phi_{3b}(y,t)\}'_D = 0 \\
&\{A_{ia}(x,t), \phi_{4b}(y,t)\}'_D = \delta^{3}_{i}\delta_{ab}\delta^{3}(x-y) = 0
\end{aligned}
\tag{506}
$$

$$
\begin{aligned}
&\{\Pi^{i}_{a}(x,t), \phi_{1b}(y,t)\}'_D = 0 \\
&\{\Pi^{i}_{a}(x,t), \phi_{2b}(y,t)\}'_D = -g\varepsilon_{abc}\Pi^{i}_{c}(x,t)\delta^{3}(x-y) \\
&\{\Pi^{i}_{a}(x,t), \phi_{3b}(y,t)\}'_D = -\delta^{i}_{3}\delta_{ab}\delta^{3}(x-y) = 0 \\
&\{\Pi^{i}_{a}(x,t), \phi_{4b}(y,t)\}'_D = -\delta^{i}_{0}\delta_{ab}\partial^{x}_{3}\delta^{3}(x-y) = 0
\end{aligned}
\tag{507}
$$

Entonces, los corchetes fundamentales de Dirac entre los campos estaran dados por:

$$
\begin{aligned}
\{A_{ia}(x,t),A_{jb}(y,t)\}_D =&\{A_{ia}(x),A_{jb}(y)\}'_D \\
&-\int\int d^3ud^3v\{A_{ia}(x,t),\phi_{kd}(u)\}'_D C^{-1de}_{kl}(u,v)\{\phi_{le}(v),A_{jb}(y,t)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{A_{ia}(x,t),\phi_{2d}(u)\}'_D C^{-1de}_{2l}(u,v)\{\phi_{le}(v),A_{jb}(y,t)\}'_D \\
=&0
\end{aligned}
\tag{508}
$$

$$
\begin{aligned}
\{A_{ia}(x,t),A_{0b}(y,t)\}_D =&\{A_{ia}(x,t),A_{0b}(y,t)\}'_D \\
&-\int\int d^3ud^3v\{A_{ia}(x,t),\phi_{kd}(u)\}'_D C^{-1de}_{kl}(u,v)\{\phi_{le}(v),A_{0b}(y)\}'_D \\
=&-\delta_{ab}\partial^x_i\int\int d^3ud^3v\delta(x-u)G(u,v)\delta^3(y-v) \\
&-g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int\int d^3ud^3v\delta^3(x-u)G(u,v)\delta^3(y-v) \\
=&-\delta_{ab}\partial^x_i G(x,y)-g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)G(x,y)
\end{aligned}
\tag{509}
$$

Ahora, los corchetes de Dirac del momento $\Pi_{\mu a}$ consigo mismo se obtienen a partir de:

$$
\begin{aligned}
\{\Pi^i_a(x,t),\Pi^j_b(y,t)\}_D =&\{\Pi^i_a(x),\Pi^j_b(y)\}'_D \\
&-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^i_a(x),\phi_{kd}(u)\}'_D C^{-1de}_{kl}(u,v)\{\phi_{le}(v),\Pi^i_b(y)\}'_D \\
=&-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^i_a(x),\phi_{2d}(u)\}C^{-1de}_{2l}(u,v)\{\phi_{le}(v),\Pi^j_b(y)\} \\
&=0.
\end{aligned}
\tag{510}
$$

Por último, se calculan los corchetes de Dirac entre el campo $A_{\mu a}$ y $\Pi_{\mu a}$. Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\{A_{ia}(x,t),\Pi^j_b(y,t)\}_D =&\{A_{ia}(x),\Pi^j_b(y)\}'_D \\
&-\int\int d^3ud^3v\{A_{ia}(x),\phi_{id}(u)\}'_D C^{-1de}_{ij}(u,v)\{\phi_{je}(v),\Pi^j_b(y)\}'_D \\
=&\delta^j_i\delta_{ab}\delta(x-y) \\
&-\int\int d^3ud^3v\{A_{ia}(x),\phi_{2d}(u)\}C^{-1de}_{2j}(u,v)\{\phi_{je}(v),\Pi^j_b(y)\} \\
=&\delta^j_i\delta_{ab}\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{511}$$

$$\begin{aligned}
\{\Pi^i_a(x,t),A_{jb}(y,t)\}_D =&\{\Pi^\mu_a(x),A_{\upsilon b}(y)\}'_D \\
&-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^i_a(x),\phi_{id}(u)\}'_D C^{-1de}_{ij}(u,v)\{\phi_{je}(v),A_{jb}(y)\}'_D \\
=&\delta^1_j\delta_{ab}\delta(x-y) \\
&-\int\int d^3ud^3v\{\Pi^i_a(x),\phi_{2d}(u)\}C^{-1de}_{2j}(u,v)\{\phi_{je}(v),A_{jb}(y)\} \\
=&-\delta^i_j\delta_{ab}\delta(x-y)
\end{aligned} \tag{512}$$

$$
\begin{aligned}
\{\Pi_a^i(x,t), A_{0b}(y,t)\}_D =&\{\Pi_a^i(x), A_{0b}(y)\}_D' \\
&-\int\int d^3u d^3v \{\Pi_a^\mu(x), \phi_{id}(u)\}_D' C_{ij}^{-1de}(u,v)\{\phi_{je}(v), A_{0b}(y)\}_D' \\
=&\delta_0^i \delta_{ab}\delta(x-y) \\
&-\int\int d^3u d^3v \{\Pi_a^\mu(x), \phi_{2d}(u)\}_D' C_{21}^{-1de}(u,v)\{\phi_{1e}(v), A_{0b}(y)\}_D' \\
=&-\int\int d^3u d^3v (-g\varepsilon_{adc}\Pi_c^i(x)\delta^3(x-u))(\delta_{de}G(u,v))(-\delta_{be}\delta^3(y-v)) \\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^i(x)\int\int d^3u d^3v \delta^3(x-u)G(u,v)\delta^3(y-v) \\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^i(x)\delta^3(x-u)G(x,y).
\end{aligned}
\tag{513}
$$

Se procede a calcular los corchetes de Dirac a tiempos iguales asociados a los campos fermiónicos ψ y $\bar{\psi}$. Inicialmente se determinan los corchetes entre los campos y los vínculos ϕ_i (i=1,2,3,4):

$$\{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{1b}(y)\}_D' =\{\psi_{\sigma a}(x), \Pi_b^0(y)\}_D' = 0 \tag{514}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{2b}(y)\}_D' =\{\psi_{\sigma a}(x), \partial_i^y \Pi_b^i(y) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y) - g\bar{\psi}_{\mu c}(y)\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{cd}^b \psi_{\upsilon d}(y)\}_D' \tag{515}$$

$$=-g\{\psi_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\mu c}(y)\}_D' \gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{cd}^b \psi_{\upsilon d}(y) \tag{516}$$

$$=-g(-i\delta_{ac}\gamma_{\sigma\mu}^0 \delta(x-y))\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{cd}^b \psi_{\upsilon d}(y) \tag{517}$$

$$=ig\delta_{\sigma\upsilon}T_{ad}^b \psi_{\upsilon d}(x)\delta(x-y) \tag{518}$$

$$=igT_{ad}^b \psi_{\sigma d}(x)\delta(x-y) \tag{519}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{3b}(y)\}_D' =\{\psi_{\sigma a}(x), A_{3b}(y)\}_D' = 0 \tag{520}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{4b}(y)\}_D' =\{\psi_{\sigma a}(x), \Pi_b^3(y) + \partial_3^y A_{0b}(y)\}_D' = 0 \tag{521}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \phi_{1b}(y)\}'_D = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \Pi_b^0(y)\}'_D = 0 \tag{522}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \phi_{2b}(y)\}'_D = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \partial_i^y \Pi_b^i(y) + g\varepsilon_{bcd}\Pi_c^i(y)A_{id}(y) - g\bar{\psi}_{\mu c}(y)\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{cd}^b \psi_{\upsilon d}(y)\}'_D \tag{523}$$

$$= g\bar{\psi}_{\mu c}(y)\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{cd}^b \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \psi_{\upsilon d}(y)\}'_D \tag{524}$$

$$= -ig\bar{\psi}_{\mu c}(y)\gamma_{\mu\upsilon}^0 T_{cd}^b \delta_{da}\gamma_{\sigma\upsilon}^0 \delta(x-y) \tag{525}$$

$$= -ig\bar{\psi}_{\mu c}(x)\delta_{\mu\sigma} T_{ca}^b \delta(x-y) \tag{526}$$

$$= -ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x) T_{ca}^b \delta(x-y) \tag{527}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \phi_{3b}(y)\}'_D = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), A_{3b}(y)\}'_D = 0 \tag{528}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \phi_{4b}(y)\}'_D = \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \Pi_b^3(y) + \partial_3^y A_{0b}(y)\}'_D = 0. \tag{529}$$

Ahora, el corchete de Dirac a tiempos iguales entre campo $\psi_{\sigma a}(x)$ y una variable dinámica B(x) puede ser escrito como:

$$\begin{aligned}
\{\psi_{\sigma a}(x,t), B(y,t)\}_D =& \{\psi_{\sigma a}(x), B(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \Theta_{\mu b}^i(u)\}'_D C_{\mu\upsilon cd}^{ij^{-1}}(u,v)\{\Theta_{\upsilon c}^j(v), B(y)\}'_D \\
=& \{\psi_{\sigma a}(x), B(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{2c}(u)\}'_D C_{cd}^{2j^{-1}}(u,v)\{\phi_{jc}(v), B(y)\}'_D \\
=& \{\psi_{\sigma a}(x), B(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{2c}(u)\}'_D C_{cd}^{21^{-1}}(u,v)\{\phi_{1c}(v), B(y)\}'_D \\
&- \int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{ic}(u)\}'_D C_{cd}^{ij^{-1}}(u,v)\{\phi_{jc}(v), B(y)\}'_D.
\end{aligned} \tag{530}$$

$$\begin{aligned}
\{\psi_{\sigma a}(x,t), A_{0b}(y,t)\}_D =& \{\psi_{\sigma a}(x), A_{0b}(y)\}'_D - \int\int d^3u d^3v \, \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{kd}(u)\}'_D C_{kl}^{-1de}(u,v) \, \{\phi_{le}(v), A_{0b}(y)\}'_D \\
=& - \int\int d^3u d^3v \, \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{2d}(u)\}'_D C_{de}^{21^{-1}}(u,v) \, \{\phi_{1e}(v), A_{0b}(y)\}'_D \\
=& - \int\int d^3u d^3v (igT_{ag}^d \psi_{\sigma g}(x)\delta(x-u))(\delta_{de}G(u,v))(-\delta_{be}\delta^3(y-v)) \\
=& igT_{ag}^b \psi_{\sigma g}(x) G(x,y)
\end{aligned} \tag{531}$$

Ya que para los campos bosónicos (A_i, Π^j) $(i,j = 1,2)$ escogidos como grados de libertad se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\{A_{ia}(x),\phi_{1b}(y)\}'_D =&\delta_i^0\delta_{ab}\delta^3(x-y)=0\\
\{A_{ia}(x),\phi_{3b}(y)\}'_D =&0\\
\{\Pi_a^i(x),\phi_{1b}(y)\}'_D =&0\\
\{\Pi_a^i(x),\phi_{3b}(y)\}'_D =&-\delta_3^i\delta_{ab}\delta^3(x-y)=0,
\end{aligned} \tag{532}$$

se puede concluir que:

$$\begin{aligned}
\{\psi_{\sigma a}(x),A_{ia}(x)\}_D =&0\\
\{\psi_{\sigma a}(x),\Pi_a^i(x)\}_D =&0.
\end{aligned} \tag{533}$$

De igual manera para el campo $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned}
\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),B(y,t)\}_D =&\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),B(y)\}'_D-\int\int d^3ud^3v\{\psi_{\sigma a}(x),\phi_{ic}(u)\}'_D C_{cd}^{ij^{-1}}(u,v)\{\phi_{jc}(v),B(y)\}'_D\\
=&\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),B(y)\}'_D-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\phi_{2c}(u)\}'_D C_{cd}^{2j^{-1}}(u,v)\{\phi_{jc}(v),B(y)\}'_D\\
=&\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),B(y)\}'_D-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\phi_{2c}(u)\}'_D C_{cd}^{21^{-1}}(u,v)\{\phi_{1c}(v),B(y)\}'_D\\
&-\int\int d^3ud^3v\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\phi_{2c}(u)\}'_D C_{cd}^{23^{-1}}(u,v)\{\phi_{3c}(v),B(y)\}'_D.
\end{aligned} \tag{534}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t),A_{0b}(y,t)\right\}_D =&\left\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),A_{0b}(y)\right\}'_D-\int\int d^3ud^3v\left\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\phi_{kd}(u)\right\}'_D C_{kl}^{-1de}(u,v)\left\{\phi_{le}(v),A_{0b}(y)\right\}'_D\\
=&-\int\int d^3ud^3v\left\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x),\phi_{2d}(u)\right\}'_D C_{de}^{21^{-1}}(u,v)\left\{\phi_{1e}(v),A_{0b}(y)\right\}'_D\\
=&-\int\int d^3ud^3v(-ig\bar{\psi}_{\sigma c}(y)T_{ca}^d\delta(x-u))(\delta_{de}G(u,v))(-\delta_{be}\delta^3(y-v))\\
=&-ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x)T_{ca}^bG(x,y).
\end{aligned} \tag{535}$$

Por otro lado, los corchetes de Dirac con los campos (A_i,Π^j) $(i,j=1,2)$ serán:

$$\begin{aligned}\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), A_{ia}(x)\}_D =&0\\ \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \Pi^i_a(x)\}_D =&0.\end{aligned} \tag{536}$$

Finalmente, se calcula el corchete de Dirac entre ψ y $\bar{\psi}$:

$$\begin{aligned}\{\psi_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D =&\{\psi_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\beta b}(y)\}'_D\\ &-\int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{ic}(u)\}'_D C^{ij^{-1}}_{cd}(u,v)\{\phi_{jc}(v), \bar{\psi}_{\beta b}(y)\}'_D\\ =&\{\psi_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\beta b}(y)\}'_D\\ &-\int\int d^3u d^3v \{\psi_{\sigma a}(x), \phi_{2c}(u)\}'_D C^{22^{-1}}_{cd}(u,v)\{\phi_{2c}(v), \bar{\psi}_{\beta b}(y)\}'_D,\end{aligned} \tag{537}$$

Como $C^{22^{-1}}_{\mu\upsilon cd}(u,v) = 0$, se determina lo siguiente:

$$\begin{aligned}\{\psi_{\sigma a}(x,t), \bar{\psi}_{\beta b}(y,t)\}_D =&\{\psi_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\beta b}(y)\}'_D = -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y)\\ \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x,t), \psi_{\beta b}(y,t)\}_D =&\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \psi_{\beta b}(y)\}'_D = -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y).\end{aligned} \tag{538}$$

Por lo tanto, se encuentra que los corchetes fundamentales de la teoría en el gauge axial son:

$$\{A_{ia}(x), A_{jb}(y)\}_D =0 \tag{539}$$

$$\{\Pi^i_a(x), \Pi^j_b(y)\}_D =0 \tag{540}$$

$$\{A_{ia}(x), \Pi^j_b(y)\}_D =\delta^j_i\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{541}$$

$$\{\Pi^i_a(x), A_{jb}(y)\}_D =-\delta^i_j\delta_{ab}\delta^3(x-y) \tag{542}$$

$$\{A_{ia}(x), A_{0b}(y)\}_D = -\delta_{ab}\partial_i^x G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)G(x,y) \tag{543}$$

$$\{\Pi_a^i(x), A_{0b}(y)\}_D = -g\varepsilon_{abc}\Pi_c^i(x)\delta^3(x-u)G(x,y) \tag{544}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\beta b}(y)\}_D = -i\delta_{ab}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{545}$$

$$\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \psi_{\beta b}(y)\}_D = -i\delta_{ba}\gamma^0_{\sigma\beta}\delta(x-y) \tag{546}$$

$$\{\psi_{\sigma a}(x), A_{0b}(y)\}_D = igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)G(x,y) \tag{547}$$

$$\left\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), A_{0b}(y)\right\}_D = -ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x)T^b_{ca}G(x,y). \tag{548}$$

24. Apéndice X: Obtención de Ecuaciones de Movimiento en el Gauge Axial

Considerando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\phi_{1a}(x) =& \Pi_a^0 = 0 \\
\phi_{2a}(x) =& \partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) = 0 \\
\phi_{3a}(x) =& A_{3a}(x,t) = 0 \\
\phi_{4a}(x) =& \Pi_a^3(x,t) + \partial_3 A_{0a}(x,t) = 0.
\end{aligned} \tag{549}$$

Se procede a reescribir el Hamiltoniano. Recordando que:

$$\partial_i^x \Pi_a^i(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi_b^i(x)A_{ic}(x) - g\bar{\psi}_{\sigma b}(x)\gamma^0_{\sigma\beta}T^a_{bc}\psi_{\beta c}(x) = 0 \tag{550}$$

:

$$
\begin{aligned}
H =& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) - \partial_i\Pi^i_a(x)A_{0a}(x) - g\Pi^i_a(x)\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F^{ki}_a(x)) \\
&+ \int d^3x\partial_i(\Pi^i_a(x)A_{0a}(x)) + \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(x) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) + g\varepsilon_{abc}\Pi^i_b(x,t)A_{ic}(x,t)A_{0a}(x) - g\Pi^i_a(x)\varepsilon_{abc}A_{ib}(x)A_{0c}(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F^{ki}_a(x)) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i - g\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}A_{0a}(x) + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)\psi_{\sigma c}(x) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^i_a(x)\Pi^i_a(x) + \frac{1}{4}F_{kia}(x)F^{ki}_a(x)) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i - g\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}A_{0a}(x) + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)\psi_{\sigma c}(x) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^3_a(x)\Pi^3_a(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{4}F_{12}(x)F^{12}_a(x) + \frac{1}{4}F_{13a}(x)F^{13}_a(x) + \frac{1}{4}F_{21a}(x)F^{21}_a(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{4}F_{23a}(x)F^{23}_a(x) + \frac{1}{4}F_{31a}(x)F^{31}_a(x) + \frac{1}{4}F_{32a}(x)F^{32}_a(x)) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i - g\gamma^0_{\theta\sigma}T^a_{bc}A_{0a}(x) + g\gamma^\mu_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{\mu d}(x) + m)\psi_{\sigma c}(x) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{0a}(x)\partial_3A_{0a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{2}(\partial_1A_{3a}(x) - \partial_3A_{1a}(x) - g\varepsilon_{abc}A_{1b}(x)A_{3c}(x))(\partial^1A^3_a(x) - \partial^3A^1_a(x) - g\varepsilon_{abc}A^1_b(x)A^3_c(x))) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{2}(\partial_2A_{3a}(x) - \partial_3A_{2a}(x) - g\varepsilon_{abc}A_{2b}(x)A_{3c}(x))(\partial^2A^3_a(x) - \partial^3A^2_a(x) - g\varepsilon_{abc}A^2_b(x)A^3_c(x))) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{id}(x) + m)\psi_{\sigma c}(x) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{0a}(x)\partial_3A_{0a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{2}(-\partial_3A_{1a}(x))(-\partial^3A^1_a(x)) + \frac{1}{2}(-\partial_3A_{2a}(x))(-\partial^3A^2_a(x))) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{id}(x) + m)\psi_{\sigma c}(x) \\
=& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{0a}(x)\partial_3A_{0a}(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{1a}(x)\partial^3A^1_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{2a}(x)\partial^3A^2_a(x)) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}A_{id}(x) + m)\psi_{\sigma c}(x)
\end{aligned}
\tag{551}
$$

Entonces, el Hamiltoniano de la teoría puede ser reescrito como siendo:

$$
\begin{aligned}
H =& \int d^3x(\frac{1}{2}\Pi^1_a(x)\Pi^1_a(x) + \frac{1}{2}\Pi^2_a(x)\Pi^2_a(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{0a}(x)\partial_3A_{0a}(x)) \\
&+ \int d^3x(\frac{1}{2}\partial_3A_{1a}(x)\partial_3A_{1a}(x) + \frac{1}{2}\partial_3A_{2a}(x)\partial_3A_{2a}(x) + \frac{1}{2}F_{12a}(x)F^{12}_a(x))) \\
&+ \int d^3x\bar{\psi}_{\theta b}(x)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i + g\gamma^iT^d_{bc}A_{id}(x) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(x).
\end{aligned}
\tag{552}
$$

Por lo tanto, la evolución temporal del campo A_{ia} puede ser determinada a partir de el siguiente cálculo:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_{ia}(x) =& \{A_{ia}(x,t), H_b(y)\}_D \\
=& \int d^3y\{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y) + \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D \\
&+ \int d^3y\{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y A_{1b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y)\}_D \\
&+ \int d^3y\{A_{ia}(x), \frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)\}_D \\
&+ \int d^3y\{A_{ia}(x), \bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i^y + g\gamma^i T^d_{bc}A_{id}(y) + m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(y)\}_D \\
=& \int d^3y\{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y)\}_D + \int d^3y\{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D \\
&+ \int d^3y\{A_{ia}(x), \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y)\}_D \\
=& \int d^3y\Pi_b^1(y)\{A_{ia}(x), \Pi_b^1(y)\}_D + \int d^3y\Pi_b^2(x)\{A_{ia}(x), \Pi_b^2(x)\}_D \\
&+ \int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\{A_{ia}(x), \partial_3^y A_{0b}(y)\}_D \\
=& \int d^3y\Pi_b^1(y)(\delta_i^1\delta_{ab}\delta^3(x-y)) + \int d^3y\Pi_b^2(x)(\delta_i^2\delta_{ab}\delta^3(x-y)) \\
&+ \int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y(-\delta_{ab}\partial_i^x G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)G(x,y)) \\
=& \int d^3y\Pi_b^1(y)\delta_{ab}\delta^3(x-y) + \int d^3y\Pi_b^2(x)\delta_{ab}\delta^3(x-y) \\
&- \int d^3y\partial_3^y A_{0a}(y)\partial_3^y\partial_i^x G(x,y) - g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y) \\
=& \Pi_a^1(y)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 - \partial_i^x \int d^3y\partial_3^y(A_{0a}(y)\partial_3^y G(x,y)) + \partial_i^x \int d^3y A_{0a}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
&- g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y\partial_3^y\left(A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y)\right) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y A_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
=& \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x \int d^3y A_{0a}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y A_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
=& \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x \int d^3y A_{0a}(y)\delta^3(x-y) + g\varepsilon_{abc}A_{ic}(x)\int d^3y A_{0b}(y)\delta^3(x-y) \\
\dot{A}_{ia}(x,t) =& \Pi_a^1(x)\delta_i^1 + \Pi_a^2(x)\delta_i^2 + \partial_i^x A_{0a}(x) + g\varepsilon_{abc}A_{0b}(x)A_{ic}(x).
\end{aligned}
\tag{553}
$$

Por otro lado, la evolución temporal de las componentes del momento canónico Π^i (i=1,2), se puede obtener a partir de:

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_a^1(x) =& \int d^3y\{\Pi_a^1(x), \frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y) + \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D \\
&+ \int d^3y\{\Pi_a^1(x), \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y A_{1b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y)\}_D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d^3y\{\Pi_a^1(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi_a^1(x),\bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i^y+g\gamma^iT^d_{bc}A_{id}(y)+m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\{\Pi_a^1(x),\frac{1}{2}\partial_3^yA_{0b}(y)\partial_3^yA_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\{\Pi_a^1(x),\frac{1}{2}\partial_3^yA_{1b}(y)\partial_3^yA_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi_a^1(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^1(x),A_{id}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial_3^yA_{0b}(y)\{\Pi_a^1(x),\partial_3^yA_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial_3^yA_{1b}(y)\{\Pi_a^1(x),\partial_3^yA_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3yF_b^{12}(y)\{\Pi_a^1(x),F_{12b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^1(x),A_{id}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial_3^yA_{0b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^1(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial_3^yA_{1b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^1(x),A_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3yF_b^{12}(y)\{\Pi_a^1(x),\partial_1^yA_{2b}(y)-\partial_2^yA_{1b}(y)-g\varepsilon_{bcd}A_{1c}(y)A_{2d}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^1(x),A_{id}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial_3^yA_{0b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^1(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial_3^yA_{1b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^1(x),A_{1b}(y)\}_D\\
&-\int d^3yF_b^{12}(y)\partial_2^y\{\Pi_a^1(x),A_{1b}(y)\}_D-g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF_b^{12}(y)A_{2d}(y)\{\Pi_a^1(x),A_{1c}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^1(x),A_{id}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial_3^yA_{0b}(y)\partial_3^y(-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^1(x)G(x,y)\}_D+\int d^3y\partial_3^yA_{1b}(y)\partial_3^y(-\delta_{ab}\delta^3(x-y))\\
&-\int d^3yF_b^{12}(y)\partial_2^y(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)-g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF_b^{12}(y)A_{2d}(y)(-\delta_{ac}\delta^3(x-y))\\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)(-\delta_i^1\delta_{ad}\delta^3(x-y))\\
=&-g\varepsilon_{abc}\int d^3y\partial_3^yA_{0b}(y)\Pi_c^1(x)\partial_3^yG(x,y)-\int d^3y\partial_3^y\delta_{ab}A_{1b}(y)\partial_3^y\delta^3(x-y)\\
&+\int d^3yF_b^{12}(y)\delta_{ab}\partial_2^y\delta^3(x-y)+g\varepsilon_{bcd}\int d^3yF_b^{12}(y)A_{2d}(y)\delta_{ac}\delta^3(x-y)\\
&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\delta^3(x-y)\\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^1(x)\int d^3y\partial_3^y(A_{0b}(y)\partial_3^yG(x,y))+g\varepsilon_{abc}\Pi_c^1(x,t)\int d^3yA_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^yG(x,y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\partial_3^x\int d^3y\partial_3^y A_{1a}(y)\delta^3(x-y)-\partial_2^x\int d^3y F_a^{12}(y)\delta^3(x-y)\\
&+g\varepsilon_{bad}\int d^3y F_b^{12}(y)A_{2d}(y)\delta^3(x-y)\\
&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\delta^3(x-y)\\
=&g\varepsilon_{abc}\Pi_c^1(x,t)\int d^3y A_{0b}(y)\delta^3(x-y)+\partial_3^x\int d^3y\partial_3^y A_{1a}(y)\delta^3(x-y)\\
&-\partial_2^x\int d^3y F_a^{12}(y)\delta^3(x-y)+g\varepsilon_{abc}\int d^3y A_{2b}(y)F_c^{12}(y)\delta^3(x-y)\\
&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\delta^3(x-y)\\
\dot{\Pi}_a^1(x)=&\partial_3^x\partial_3^x A_{1a}(x)-\partial_2^x F_a^{12}(x)+g\varepsilon_{abc}(A_{2b}(x)F_c^{12}(x)+A_{0b}(x)\Pi_c^1(x))\\
&-\bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^1_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\Pi}_a^2(x)=&\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y)+\frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y)+\frac{1}{2}\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y A_{1b}(y)+\frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\bar{\psi}_{\theta b}(y)(-i\gamma^i_{\theta\sigma}\partial_i^y+g\gamma^i T^d_{bc}A_{id}(y)+m)_{\theta\sigma}\psi_{\sigma c}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\{\Pi_a^2(x),\frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^2(x),A_{id}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^2(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^2(x),A_{1b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^2(x),A_{2b}(y)\}_D\\
&+\int d^3y F_b^{12}(y)\{\Pi_a^2(x),\partial_1^y A_{2b}(y)-\partial_2^y A_{1b}(y)-g\varepsilon_{bcd}A_{1c}(y)A_{2d}(y)\}_D\\
=&\int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^2(x),A_{0b}(y)\}_D+\int d^3y\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y\{\Pi_a^2(x),A_{2b}(y)\}_D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int d^3y F_b^{12}(y)\partial_1^y\{\Pi_a^2(x), A_{2b}(y)\}_D - g\varepsilon_{bcd}\int d^3y F_b^{12}(y)A_{1c}(y)\{\Pi_a^2(x), A_{2d}(y)\}_D \\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^2(x), A_{id}(y)\}_D \\
=&\int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y(-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^2(x)G(x,y)) + \int d^3y\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)) \\
&+\int d^3y F_b^{12}(y)\partial_1^y(-\delta_{ab}\delta^3(x-y)) - g\varepsilon_{bcd}\int d^3y F_b^{12}(y)A_{1c}(y)(-\delta_{ad}\delta^3(x-y)) \\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\{\Pi_a^2(x), A_{id}(y)\}_D \\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^2(x)\int d^3y\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y) - \int d^3y\delta_{ab}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y\delta^3(x-y) \\
&+\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^i_{\theta\sigma}T^d_{bc}\psi_{\sigma c}(y)(-\delta_i^2\delta_{ad}\delta^3(x-y)) \\
=&-\int d^3y\delta_{ab}F_b^{12}(y)\partial_1^y\delta^3(x-y) + g\varepsilon_{bcd}\int d^3y\delta_{ad}F_b^{12}(y)A_{1c}(y)\delta^3(x-y) \\
&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\delta^3(x-y) \\
=&-g\varepsilon_{abc}\Pi_c^2(x)\int d^3y\partial_3^y(A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y)) + g\varepsilon_{abc}\Pi_c^2(x)\int d^3y A_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
&-\int d^3y\partial_3^y A_{2a}(y)\partial_3^y\delta^3(x-y) - \int d^3y F_a^{12}(y)\partial_1^y\delta^3(x-y) \\
&+g\varepsilon_{bca}\int d^3y F_b^{12}(y)A_{1c}(y)\delta^3(x-y) \\
&-\int d^3y\bar{\psi}_{\theta b}(y)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(y)\delta^3(x-y) \\
=&g\varepsilon_{abc}\Pi_c^2(x)\int d^3y A_{0b}(y)\delta^3(x-y) + \partial_3^x\int d^3y\partial_3^y A_{2a}(y)\delta^3(x-y) \\
&+\partial_1^x\int d^3y F_a^{12}(y)\delta^3(x-y) + g\varepsilon_{bca}\int d^3y F_b^{12}(y)A_{1c}(y)\delta^3(x-y) \\
&-\bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
=&g\varepsilon_{abc}\Pi_c^2(x)A_{0b}(x) + \partial_3^x\partial_3^x A_{2a}(x) + \partial_1^x F_a^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}F_b^{12}(y)A_{1c}(x) \\
&-\bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x) \\
\dot{\Pi}_a^2(x) =&\partial_3^x\partial_3^x A_{2b}(x) + \partial_1^x F_b^{12}(x) + g\varepsilon_{abc}(A_{1b}(x)F_c^{21}(y) + A_{0b}(x)\Pi_c^2(x)) \\
&-\bar{\psi}_{\theta b}(x)g\gamma^2_{\theta\sigma}T^a_{bc}\psi_{\sigma c}(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente, se determina que la evolución temporal para los campos fermiónicos se puede expresar como siendo:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_{\sigma a}(x) =&\{\psi_{\sigma a}(x), H\}_D \\
=&\int d^3y\{\psi_{\sigma a}(x),(\frac{1}{2}\Pi^1_b(y)\Pi^1_b(y)+\frac{1}{2}\Pi^2_b(y)\Pi^2_b(y)+\frac{1}{2}\partial^y_3 A_{0b}(y)\partial^y_3 A_{0b}(y))\}_D \\
&+\int d^3y\{\psi_{\sigma a}(x),(\frac{1}{2}\partial^y_3 A_{1b}(y)\partial^y_3 A_{1b}(y)+\frac{1}{2}\partial^y_3 A_{2b}(y)\partial^y_3 A_{2b}(y)+\frac{1}{2}F_{12b}(y)F^{12}_b(y)))\}_D \\
&+\int d^3y\{\psi_{\sigma a}(x),\bar{\psi}_{\mu c}(y)(-i\gamma^i\partial^y_i+g\gamma^i T^e_{cd}A_{ie}(y)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(y)\}_D \\
=&\int d^3y\partial^y_3 A_{0b}(y)\partial^y_3\{\psi_{\sigma a}(x),A_{0b}(y))\}_D \\
&+\int d^3y\{\psi_{\sigma a}(x),\bar{\psi}_{\mu c}(y)\}_D(-i\gamma^i\partial^y_i+g\gamma^i T^e_{cd}A_{ie}(y)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(y) \\
=&\int d^3y\partial^y_3 A_{0b}(y)\partial^y_3(igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)G(x,y)) \\
&+\int d^3y(-i\delta_{ac}\gamma^0_{\sigma\mu}\delta(x-y))(-i\gamma^i\partial^y_i+g\gamma^i T^e_{cd}A_{ie}(y)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(y) \\
=&igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)\int d^3y\partial^y_3 A_{0b}(y)\partial^y_3 G(x,y) \\
&-i\gamma^0_{\sigma\mu}\int d^3y\delta(x-y)(-i\gamma^i\partial^y_i+g\gamma^i T^e_{ad}A_{ie}(y)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(y) \\
=&igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)\int d^3y\partial^y_3(A_{0b}(y)\partial^y_3 G(x,y))-igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)\int d^3yA_{0b}(y)\partial^y_3\partial^y_3 G(x,y) \\
&-i\gamma^0_{\sigma\mu}(-i\gamma^i\partial^x_i+g\gamma^i T^e_{ad}A_{ie}(x)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(x).
\end{aligned}
$$

Como $\partial^y_3\partial^y_3 G(x,y)=\delta(x-y)$, y recordando la propiedad asintótica de los campos, se determina lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_{\sigma a}(x) =&-igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)\int d^3yA_{0b}(y)\delta(x-y)-i\gamma^0_{\sigma\mu}(-i\gamma^i\partial^x_i+g\gamma^i T^e_{ad}A_{ie}(x)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(x) \\
=&-igT^b_{ag}\psi_{\sigma g}(x)A_{0b}(x)-i\gamma^0_{\sigma\mu}(-i\gamma^i\partial^x_i+g\gamma^i T^e_{ad}A_{ie}(x)+m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(x) \\
=&-ig(\psi_g(x)T^b_{ag}A_{0b}(x))_\sigma-i(\gamma^0(-i\gamma^i\partial^x_i+g\gamma^i T^e_{ad}A_{ie}(x)+m)\psi_d(x))_\sigma.
\end{aligned}
\tag{554}
$$

Por otro lado, para el campo $\bar{\psi}_a$ se encuentra que:

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_{\sigma a}(x) =& \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), H\}_D \\
=& \int d^3y \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), (\frac{1}{2}\Pi_b^1(y)\Pi_b^1(y) + \frac{1}{2}\Pi_b^2(y)\Pi_b^2(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y A_{0b}(y))\}_D \\
&+ \int d^3y \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), (\frac{1}{2}\partial_3^y A_{1b}(y)\partial_3^y A_{1b}(y) + \frac{1}{2}\partial_3^y A_{2b}(y)\partial_3^y A_{2b}(y) + \frac{1}{2}F_{12b}(y)F_b^{12}(y)))\}_D \\
&+ \int d^3y \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \bar{\psi}_{\mu c}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^i T_{cd}^e A_{ie}(y) + m)_{\mu\upsilon}\psi_{\upsilon d}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y \{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), A_{0b}(y)\}_D \\
&- \int d^3y \bar{\psi}_{\mu c}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^i T_{cd}^e A_{ie}(y) + m)_{\mu\upsilon}\{\bar{\psi}_{\sigma a}(x), \psi_{\upsilon d}(y)\}_D \\
=& \int d^3y \partial_3^y A_{0b}(y)\partial_3^y(-ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x)T_{ca}^b G(x,y)) + i\int d^3y \bar{\psi}_{\mu c}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^i T_{ca}^e A_{ie}(y) + m)_{\mu\upsilon}\gamma_{\upsilon\sigma}^0 \delta(x-y) \\
=& -ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x)T_{ca}^b \int d^3y \partial_3^y (A_{0b}(y)\partial_3^y G(x,y)) + ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x)T_{ca}^b \int d^3y A_{0b}(y)\partial_3^y\partial_3^y G(x,y) \\
&+ i\int d^3y \bar{\psi}_{\mu c}(y)(-i\gamma^i\partial_i^y + g\gamma^i T_{ca}^e A_{ie}(y) + m)_{\mu\upsilon}\gamma_{\upsilon\sigma}^0 \delta(x-y) \\
=& ig\bar{\psi}_{\sigma c}(x)T_{ca}^b \int d^3y A_{0b}(y)\delta(x-y) + i\bar{\psi}_{\mu c}(x)(i\gamma^i\partial_i^x + g\gamma^i T_{ca}^e A_{ie}(x) + m)_{\mu\upsilon}\gamma_{\upsilon\sigma}^0 \\
\dot{\bar{\psi}}_{\sigma a}(x) =& ig(\bar{\psi}_c(x)T_{ca}^b A_{0b}(x))_\sigma + i(\bar{\psi}_c(x)(i\gamma^i\partial_i^x + g\gamma^i T_{ca}^e A_{ie}(x) + m)\gamma^0)_\sigma
\end{aligned}
$$