

Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales



Héctor Jairo Portilla Obando
Segundo Javier Caicedo Zambrano



Editorial
Universidad de **Nariño**



Editorial Universidad de **Nariño**

INTRODUCCIÓN A LOS FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS GENERALES

INTRODUCCIÓN A LOS FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS GENERALES

Héctor Jairo Portilla Obando

Segundo Javier Caicedo Zambrano



Editorial
Universidad de **Nariño**

Portilla Obando, Héctor Jairo

Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales/ Héctor Jairo Portilla Obando, Segundo Javier Caicedo Zambrano. - - San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2019

180 p.

Incluye bibliografía

ISBN: 978-958-8958-84-2 digital

1. Matemáticas – fundamentos 2. Fundamentos (matemáticas) – enseñanza superior 3. Fundamentos matemáticas –problemas, ejercicios, etc.

510 P852 – SCDD-Ed. 22

Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales

Talleres y Evaluaciones

Autores: Héctor Jairo Portilla O.

Segundo Javier Caicedo Z.

ISBN: 978-958-8958-84-2 digital.

Editorial Universidad de Nariño

Diagramación: Segundo Javier Caicedo Zambrano

Diseño: Diana Sofía Salas Chalapud

Prohibida la reproducción total o parcial de este libro,

sin autorización expresa y por escrito de la de la Editorial

Universitaria de la Universidad de Nariño

San Juan de Pasto – Nariño - Colombia

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN	9
CAPÍTULO 1	11
ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS	11
ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA	11
1.1.1 Proposiciones	11
1.1.2 Negación	12
1.1.3 Ley Involutiva	12
1.1.4 Conjunción	12
1.1.5 Disyunción	13
1.1.6 Disyunción Excluyente o Exclusiva	13
1.1.7 Proposición Compuesta	14
1.1.8 Proposición Simple	15
1.1.9 Proposición Implicación	15
1.1.10 Proposición Doble Implicación	16
1.1.11 Proposiciones Equivalentes	18
1.1.12 Leyes de la Lógica Proposicional	19
1.1.13 Ejercicios Sobre Valores de Verdad	20
1.2 ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS	21
1.2.1 Definición	21
1.2.2 Determinación de un Conjunto	21
1.2.3 Subconjuntos	22
1.2.3.1 Definición	22
1.2.3.2 Propiedades	22
1.2.4 Conjunto Vacío	23
1.2.5 Conjunto Unitario	23
1.2.6 Conjunto Universal	24
1.2.7 Igualdad de Conjuntos	24
1.2.8 Operaciones entre Conjuntos	24
1.2.9 Propiedades y Casos Particulares de Unión e Intersección	25
1.2.10 Complemento de un Conjunto	26
1.2.11 Propiedades y Casos Especiales del Complemento de un Conjunto	26
1.2.12 Diagramas de Venn	27
1.2.13 Ejercicios Sobre Valores de Verdad Aplicados a Operaciones de Conjuntos	27
1.3 EJERCICIOS CON RESPUESTAS	28
1.4 EVALUACIÓN CON RESPUESTAS Y SUGERENCIAS	30
1.4.1 Evaluación de Elementos de Lógica Matemática	30
1.4.2 Evaluación de Elementos de Teoría de Conjuntos	32
CAPÍTULO 2	46
CONJUNTOS NUMÉRICOS	46
2.1 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES	46
2.2 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS	46
2.2.1 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$	47
2.2.2 Algoritmo de la División	47
2.2.3 Divisibilidad en los Enteros	48
2.2.4 Número Primos	49
2.2.5 Número Compuestos	49
2.2.6 Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM)	49
2.3 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES	52
2.3.1 Igualdad de Racionales	53
2.3.2 Operaciones Básicas con Racionales	53
2.3.3 Operaciones Combinadas	56
2.3.4 Números Mixtos	56

2.3.5 Porcentajes	57
2.3.6 Relación de Orden en $\mathbb{Q}$	58
2.3.7 Notación Decimal	59
2.4 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES	60
2.5 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES	61
2.6 EJERCICIOS CON RESPUESTAS	62
2.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MCD Y DE MCM	64
2.8 EQUIVALENCIAS Y CONVERSIONES	68
2.9 EVALUACIÓN CON RESPUESTA Y SUGERENCIAS	76
2.9.1 Operaciones con Números Racionales Fraccionarios	76
2.9.2 Conversión de Números Mixtos a Fraccionarios	82
2.9.3 Conversión de Porcentajes a Números Fraccionarios	84
2.9.4 Conversión de Porcentajes a Notación Decimal	85
2.9.5 Conversión de Fraccionarios o Decimales a Porcentajes	86
2.9.6 Operaciones con Porcentajes y Fraccionarios	88
2.9.7 Cálculo de MCD y de MCM	89
CAPÍTULO 3.....	94
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA	94
3.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS	94
3.2 POLINOMIOS	95
3.2.1 Conceptos	95
3.2.2 Polinomios con una Variable.....	98
3.2.3 Operaciones con Polinomios	98
3.2.4 Teorema del Residuo y del Factor.	107
3.2.6 Valor Numérico y Raíz de un Polinomio	110
3.2.7 Raíces Racionales de un Polinomio	113
3.2.8 Teorema Fundamental del Álgebra.....	115
3.3 PRODUCTOS NOTABLES	115
3.3.1 Suma por Diferencia de dos Expresiones	115
3.3.2 Cuadrado de un Binomio	116
3.3.3 Cubo de un Binomio	116
3.4 COCIENTES NOTABLES	116
3.5 FACTORIZACIÓN	118
3.5.1 Diferencia de Cuadrados.....	118
3.5.2 Trinomio Cuadrado Perfecto	118
3.5.3 Factorización de un Trinomio Cuadrático.....	119
3.5.4 Factor Común	120
3.5.5 Diferencia y Sumas de Potencias	120
3.6 RACIONALIZACIÓN.....	121
3.6.1 Fracciones con Denominador Raíz n -ésima de A	121
3.6.2 Fracciones con Denominador de Suma y Resta de Radicales.....	122
3.7 ECUACIONES E INECUACIONES	122
3.7.1 Ecuaciones e Inecuaciones Polinómicas.....	123
3.7.2 Ecuaciones Fraccionarias con una Variable.....	124
3.7.3 Ecuaciones con Radicales	125
3.7.4 Ecuaciones con Valor Absoluto	126
3.7.5 Inecuaciones Polinómicas; Fraccionarias; con Valor Absoluto	128
3.7.6 Orden en $\mathbb{R}$	128
3.8 INTERVALOS REALES.....	129
3.8.1 Gráficas de los Intervalos en la Recta Real.....	130
3.8.2 Ejemplos de Inecuaciones	130
3.9 EJERCICIOS CON RESPUESTAS	138
3.10 EVALUACIÓN CON RESPUESTAS Y SUGERENCIAS	145
3.10.1 Leyes de los Exponentes	145
3.10.2 Reducción de Radicales.....	149

3.10.3 Reducción de Términos Semejantes	152
3.10.4 Multiplicaciones y Reducciones	154
3.10.5 Productos Notables	155
3.10.7 Factorización	162
3.10.8 Factor Común y Otros Casos	175
3.10.9 Racionalización	178
3.10.10 Algoritmo de la División.....	182
3.10.11 Raíces y Factores Lineales de un Polinomio.....	184
3.10.12 Soluciones Reales de Ecuaciones e Inecuaciones	192
CAPÍTULO 4.....	200
FUNCIONES	200
4.1 FUNCIONES REALES	200
4.1.1 Definición de Función.....	200
4.1.2 Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva	200
4.1.3 Función Constante	202
4.1.4 Función Inversa	203
4.2 FUNCIONES REALES CON UNA VARIABLE	203
4.3 FUNCIONES REALES DESTACADAS.....	205
4.3.1 Funciones Polinómica.....	205
4.3.2 Función Exponencial y Función Logarítmica.....	208
4.3.3 Propiedades de los Logaritmos	209
4.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS	211
4.5 EJERCICIOS CON RESPUESTAS	212
4.6 EVALUACION CON RESPUESTAS Y SUGERENCIAS	218
4.6.1 Definición Relación-Función	218
4.6.2 Dominio de Funciones Reales	222
4.6.3 Rango de Funciones Reales	226
4.6.4 Ecuación Pendiente-Corte de Rectas.....	230
4.6.5 Variables con Imagen Cero.....	231
4.6.6 Solución de Ecuaciones Exponenciales	234
4.6.7 Solución de Ecuaciones Logarítmicas	237
4.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE FUNCIONES Y ECUACIONES	240
4.7.1 Introducción	240
4.7.2 Problemas resueltos	240
4.7.3 Problemas Propuestos.	249
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	251
ACERCA DE LOS AUTORES	252

INTRODUCCIÓN

Esta obra nace por el interés de los autores de publicar un documento introductorio sobre fundamentos de matemáticas generales que sirva de consulta y nivelación a estudiantes que ingresan a primer semestre a la Universidad de Nariño, sobre todo, a estudiantes de programas que tienen relación con las Ciencias Básicas, Técnicas e Ingenierías.

Los temas que se abordan en esta obra han sido seleccionados a partir de la experiencia de los autores, quienes reconocen en ellos las dificultades de los estudiantes, tanto en lo conceptual como en lo procedimental. Para el efecto, se presenta, en forma resumida, la conceptualización, ejemplos y, luego, se proponen ejercicios incluyendo las respectivas respuestas. Adicionalmente, en cada capítulo se propone una evaluación que contiene preguntas organizadas por temas, en las que se indica la respuesta correcta y se propone una sugerencia que, bien retroalimenta o guía la obtención de la misma.

Esta obra está organizada en cuatro capítulos. El primero, "Elementos de lógica matemática y teoría de conjuntos", presenta aspectos básicos de proposiciones simples, compuestas, tablas de verdad y aplicaciones a la teoría de conjuntos. El segundo, "Conjuntos numéricos", contiene un repaso de los sistemas numéricos: conjunto de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, con la operatoria aritmética. El tercero, "Introducción al Álgebra", aborda un repaso general de expresiones algebraicas, polinomios, raíces de polinomios, factorización y teoremas relacionados con las raíces de polinomios. Finalmente, el capítulo cuarto, "Funciones", contiene aspectos generales de funciones, para luego centrarse en el estudio de las funciones numéricas reales, a saber: polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. No obstante, en lo que corresponde a funciones trigonométricas, sólo se introduce la definición, sus dominios y rangos, dado que se trata de un texto para repaso de fundamentos de matemáticas generales. Su ampliación será abordada en una obra que se publicará posteriormente.

Es conveniente anotar que en este texto se utiliza el punto (.) para separar cifras de miles y la coma (,) para la separación de decimales, hecho que es contrario a lo que normalmente aplican los dispositivos electrónicos.

Los autores

Septiembre de 2018

CAPÍTULO 1.

Elementos de Lógica Matemática
y Teoría de Conjuntos

CAPÍTULO I

ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA Y TEORÍA DE CONJUNTOS

ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

Una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes para asimilar, comprender los conocimientos matemáticos, así como también para analizar, deducir procesos matemáticos; radica en el uso y poco manejo del lenguaje y la simbología propia de esta ciencia. Teniendo en cuenta lo anterior, se plantean elementos básicos y necesarios tanto de la lógica matemática como de la teoría de conjuntos. Se pretende con esto, que los estudiantes se apropien de estos elementos para su uso y aplicación durante el desarrollo de un curso de matemáticas básica y en otras asignaturas de la misma.

1.1.1 Proposiciones

Una proposición es un enunciado que tiene un solo valor de verdad: Verdadero o Falso.

Una proposición se designa o denota con una letra; por ejemplo, $p, q, r, s, t; P, Q, R, S, T$ u otras.

En el lenguaje común, en la cotidianidad, el valor de verdad de una proposición depende de ciertas circunstancias, factores, conveniencias, tales como: tiempo, lugar, lenguaje convenido, contexto, entre otros.

Ejemplos:

Las siguientes declaraciones o expresiones, son ejemplos de proposiciones.

p : Cinco es un número natural q : 0,75 es un número irracional r : 10 no es número entero

s : Hoy es día lunes t : Hace mucho calor w : Jaime no es inteligente

De las propiedades de los conjuntos numéricos, se sabe que la proposición p es verdadera, q y r son falsas; sin embargo, el valor de verdad de las proposiciones s, t, w , queda sujeto a circunstancias o factores como los descritos anteriormente. En efecto, para s depende del día en que se enuncia la afirmación; para t de las condiciones del estado del tiempo.

En adelante, se utiliza esencialmente proposiciones matemáticas, salvo algunos ejemplos donde se requiera comprender ciertos valores verdad.

1.1.2 Negación

Operador (NO; NOT)

La negación de una proposición p se indica por $\sim p$, en la cual se lee: no p . Así, p es otra proposición llamada la

negación de p .

Si p es falsa, entonces, $\sim p$ es verdadera; y si p es verdadera, entonces, $\sim p$ es falsa.

Ejemplos:

Negando las proposiciones de los ejemplos anteriores, se tiene:

$\sim p$: Cinco no es un número natural $\sim q$: 0,75 no es un número irracional
 $\sim r$: 10 es número entero

$\sim s$: Hoy no es día lunes $\sim t$: No hace mucho calor $\sim w$: Jaime es inteligente

1.1.3 Ley Involutiva

La negación de la negación de una proposición dada, equivale a la proposición dada.

Ejemplos:

$\sim(\sim p)$: Cinco es un número natural

$\sim(\sim q)$: 0,75 es un número irracional

$\sim(\sim r)$: 10 no es número entero.

Como se puede observar, la negación de la negación de una proposición, produce la proposición original; en este caso, se obtiene, respectivamente, las proposiciones iniciales p, q, r .

1.1.4 Conjunción

Operador (Y; AND)

Si p, q son proposiciones, entonces $p \wedge q$ es otra proposición llamada la conjunción de p con q . En la expresión $p \wedge q$, se lee: p y q ; también p and q

Valor de verdad de una conjunción

Una conjunción es verdadera, únicamente cuando son verdaderas las dos proposiciones que la constituyen; en cualquier otro caso, la conjunción es falsa.

1.1.5 Disyunción

Operador (O; OR)

Si p, q son proposiciones, entonces, $p \vee q$ es otra proposición llamada la disyunción (disyunción) de p con q . En la expresión $p \vee q$, se lee: p o q ; o también p o q .

Valor de verdad de una disyunción

Una disyunción es verdadera, cuando es verdadera al menos una de las dos proposiciones que la constituyen; por lo cual, una disyunción es falsa, únicamente cuando son falsas las dos proposiciones que la constituyen.

1.1.6 Disyunción Excluyente o Exclusiva

Operador (Ó; XOR)

Si p, q son proposiciones, entonces, $p \oplus q$ es otra proposición llamada la disyunción excluyente de p con q .

En la expresión $p \oplus q$ se lee p ó q , o también p o q pero no ambas ($p \text{ xor } q$; $p \text{ or } q$ but not both)

Valor de verdad de una disyunción exclusiva

Una disyunción excluyente es verdadera, cuando es verdadera únicamente una de las proposiciones que la constituyen; por lo cual, la una excluye a la otra; es decir, una disyunción excluyente es verdadera cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen diferente valor de verdad.

Tablas de valores de verdad de negación, conjunción, disyunción y disyunción exclusiva										
Negación		Conjunción			Disyunción			Disyunción exclusiva		
p	$\sim p$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \oplus q$
v	f	v	v	v	v	v	v	v	v	f
		v	f	f	v	f	v	v	f	v
f	v	f	v	f	f	v	v	f	v	v
		f	f	f	f	f	f	f	f	f

Observando los valores de verdad de las tablas anteriores, se podría decir que una disyunción no es exigente, puesto que, para que sea verdadera, no es necesario que las proposiciones que la conforman sean verdaderas; pues, basta que sea verdadera una de ellas; en cambio, una conjunción es exigente, puesto

que, para que sea verdadera, es decir, para que se cumpla, es necesario que las dos proposiciones que la constituyen, sean verdaderas.

Los símbolos $\neg$, $\wedge$, $\vee$, son operadores lógicos.

El símbolo $\sim$ es operador unario, porque se aplica o actúa sobre una proposición; en cambio, los operadores $\wedge$, $\vee$, son operadores binarios, porque unen dos proposiciones. Estos operadores son conectivos lógicos fundamentales.

Ejemplos:

p : 100 es número natural q : 0.85 es número entero r : -120 es número entero

La proposición $p \vee q$: 100 es número natural o 0.85 es número entero; es verdadera, porque p es verdadera. Observe que no importa el valor de verdad de la proposición q , que para este ejemplo es falsa.

$p \wedge q$: 100 es número natural y 0.85 es número entero, es falsa, porque q es falsa. Note que no importa el valor de verdad de p , que para este ejemplo es verdadera.

$p \wedge r$: 100 es número natural y -120 es número entero, es verdadera, porque, tanto p como r son verdaderas.

Sean las proposiciones siguientes:

s : x es número racional t : x es número irracional

$s \vee t$: x es número racional o x es número irracional

La proposición $s \vee t$ es una disyunción excluyente, porque si x es racional, no puede ser irracional; o si x es irracional, entonces, x no es racional. En realidad, la proposición s excluye a la proposición t , y viceversa.

Así pues, si s es verdadera, entonces t es falsa; y si t es verdadera, entonces, s es falsa. En este ejemplo, la proposición $s \vee t$ es verdadera.

1.1.7 Proposición Compuesta

Una proposición es compuesta cuando tiene al menos un operador (conectivo) binario.

De aquí se deduce que una conjunción, disyunción, disyunción excluyente son proposiciones compuestas.

1.1.8 Proposición Simple

Una proposición es simple (aislada) cuando no tiene operadores binarios; existe una sola unidad de afirmación.

1.1.9 Proposición Implicación

Operador $\rightarrow$ (Si ... entonces ...; If ... then ...)

Sean las proposiciones arbitrarias p, q .

La expresión $p \rightarrow q$ es otra proposición, llamada implicación; la cual, puede constituir un enunciado condicional, hipotético o implicativo.

La expresión $p \rightarrow q$ se lee: p implica q ; o también: si p entonces q ; p solamente si q ; p sólo si q ; q si p

En la proposición $p \rightarrow q$ se puede decir que p es el antecedente y q es el consecuente. Esta lectura es la de mayor aplicación en los procesos matemáticos deductivos, inclusive, en el lenguaje común.

Vale anotar que en procesos de demostración matemática de una proposición de la forma $p \rightarrow q$, se asume que p es una proposición verdadera; es decir, se asume que p es una verdad hipotética. En realidad, no tiene sentido considerar que la proposición p es falsa, porque en este caso la implicación es verdadera. Por esto, la proposición $p \rightarrow q$ constituye un enunciado hipotético.

p es la condición que se impone y, si se concluye que q es verdadera, entonces, la implicación ($p \rightarrow q$) es verdadera. Por esto, a la proposición $p \rightarrow q$ también se la llama enunciado condicional.

Ejemplos:

Un estudiante, ante sus compañeros, afirma lo siguiente:

Si apruebo las asignaturas del primer semestre, entonces, en vacaciones me voy a las playas de Cartagena.

Si terminado el semestre, el estudiante aprueba todas las asignaturas (antecedente verdadero) y, efectivamente, en vacaciones va a las playas de Cartagena (consecuente verdadero), entonces, el estudiante no miente; es decir, cumplió lo que prometió; en este caso, la implicación es verdadera.

Pero si el estudiante aprueba todas las asignaturas (antecedente verdadero) y en vacaciones no viaja a las playas de Cartagena (consecuente falso), entonces, el estudiante no dice la verdad; es decir, no cumplió lo que prometió; en este caso, la implicación es falsa.

Ahora bien, si terminado el semestre, el estudiante no aprueba todas las asignaturas (antecedente falso), entonces el estudiante no está obligado a viajar a Cartagena; en este caso, si viaja a Cartagena (consecuente verdadero) o si no lo hace (consecuente falso), el estudiante no miente; pues, si no se

cumple la condición que él mismo se impuso, queda libre de hacer lo que quiera. En consecuencia, en estos dos últimos casos, la implicación sería verdadera.

Valor de verdad de una implicación

Una implicación es falsa, únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso; pues, cuando el antecedente es falso, no interesa el valor de verdad del consecuente, ya que, en cualquier caso, la implicación es verdadera.

Tabla de verdad de la implicación		
P	q	$p \rightarrow q$
V	v	v
V	f	f
F	v	v
F	f	v

1.1.10 Proposición Doble Implicación

Operador: $\leftrightarrow$ (p si y solo si q)

La proposición $p \leftrightarrow q$ se lee: p si y solo si q ; p solamente si q ; y representa la conjunción:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p).$$

La proposición doble implicación, también se la llama bicondicional.

Tabla de verdad de la doble implicación				
p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
				$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
v	v	V	v	v
v	f	F	v	f
f	v	V	f	f
f	f	V	v	v

Se puede observar que una proposición bicondicional es verdadera, cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen el mismo valor de verdad; y es falsa, cuando los valores de verdad de las dos proposiciones son contrarios.

Ejemplos:

Una conjunción es verdadera, si y solo si, las proposiciones que la constituyen son verdaderas.

La anterior proposición es verdadera, porque si una conjunción es verdadera, implica o se concluye que, las proposiciones que la constituyen son verdaderas. Ahora bien, si las dos proposiciones que constituyen una conjunción son verdaderas, entonces, se concluye que dicha conjunción es verdadera; es decir, la una afirmación implica la otra.

Una disyunción es verdadera, si y solo si, las proposiciones que la constituyen son verdaderas. La anterior proposición es falsa, porque si una disyunción es verdadera, no implica o no se concluye que las dos proposiciones que la constituyen sean verdaderas, porque puede suceder que una de ellas sea verdadera y la otra sea falsa.

Ahora bien, si las dos proposiciones que constituyen una disyunción son verdaderas, entonces, sí se puede concluir que dicha disyunción es verdadera.

En este ejemplo, la primera afirmación no implica la segunda, pero la segunda afirmación sí implica la primera.

Nota.

Si $(p \rightarrow q)$ es falsa y $(q \rightarrow p)$ es verdadera, entonces, la proposición $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ es falsa; por lo tanto, la proposición $p \leftrightarrow q$ es falsa.

Generalmente, en Matemáticas, las definiciones se expresan como una proposición de doble implicación. Así pues, si $p \leftrightarrow q$ es una definición, entonces, en la proposición p se enuncia lo que se define, y en la proposición q se establece la condición o condiciones que se deben cumplir.

Ejemplos:

Sea n un número entero.

n es número par, si y solo si, existe un número entero k tal que $n = 2k$

n es número impar, si y solo si, existe un número entero h tal que $n = 2h + 1$

En las afirmaciones anteriores, se da las definiciones de número par y de número impar. También se establece la condición que se debe cumplir para que un número entero sea par o sea impar.

1.1.1.1 Proposiciones Equivalentes

Dos proposiciones, compuestas por las mismas proposiciones simples, son lógicamente equivalentes, si asignando los mismos valores de verdad a las proposiciones simples, las proposiciones compuestas resultan con el mismo valor de verdad. Sus respectivas tablas de verdad, son idénticas.

Ejemplos:

P	q	$p \rightarrow q$
V	v	V
V	f	F
F	v	V
F	f	V

p	q	p	p q
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

Como se puede observar, asignando los mismos valores de verdad a p y q en ambas tablas, los valores de verdad de las proposiciones compuestas ($p \rightarrow q$) y $(\sim p \vee q)$ tienen los mismos valores de verdad; en consecuencia, las proposiciones ($p \rightarrow q$) y $(\sim p \vee q)$ son equivalentes, lo cual se simboliza así:

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q).$$

La proposición: Carlos es estudiante y es futbolista, es equivalente a la proposición: Carlos es futbolista y es estudiante; ya que expresan lo mismo; no importa qué se mencione primero, bien sea la palabra estudiante o la palabra futbolista.

De igual manera, la proposición: Diana estudia inglés o Diana estudia matemáticas, es equivalente a la proposición: Diana estudia matemáticas o Diana estudia inglés.

Según lo anterior, la proposición $(p \rightarrow q)$ es equivalente a la proposición $(q \rightarrow p)$; lo mismo ocurre con las proposiciones: $(p \rightarrow q)$ y $(q \rightarrow p)$; es decir: $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (q \rightarrow p)$;

En alguno caso de dos proposiciones equivalentes, una de ellas puede ser simple, por ejemplo: $p \rightarrow p$

También se puede afirmar lo siguiente: Una proposición p es lógicamente equivalente con otra proposición q , cuando para cada asignación de valor de verdad a las proposiciones simples que la componen, p y q tienen el mismo valor de verdad.

También se usa el símbolo $\equiv$ para indicar equivalencia, o el signo $=$. Así: $p \rightarrow p \equiv p$; $p \rightarrow p = p$

1.1.12 Leyes de la Lógica Proposicional

En el álgebra de proposicionales se utiliza equivalencias, las cuales se constituyen en leyes lógicas porque su empleo es muy frecuente. Se establece algunas de ellas.

En las siguientes expresiones, el símbolo $\sim$ se lee equivalente a; y es análogo al signo igual (=) que representa igualdad en aritmética y en álgebra.

Involutiva. La negación de la negación de una proposición es equivalente a la proposición.

$$(\sim(\sim p)) \sim p$$

Conmutativa. La conjunción y la disyunción de proposiciones son conmutativas.

$$(p \wedge q) \sim (q \wedge p) \qquad (p \vee q) \sim (q \vee p)$$

Idempotencia. La conjunción y la disyunción son idempotentes.

$$(p \wedge p) \sim p \qquad (p \vee p) \sim p$$

Identidad. Si T es una proposición verdadera y C es cualquier proposición falsa, entonces, T y C actúan como elementos neutros (módulos), en la conjunción y la disyunción de proposiciones, respectivamente.

$$(p \wedge T) \sim p \qquad (p \vee C) \sim p$$

Leyes de Morgan. La negación de la disyunción de dos proposiciones, es equivalente a la conjunción de las negaciones de estas; y la negación de la conjunción de dos proposiciones, es equivalente a la disyunción de las negaciones de estas dos proposiciones. En símbolos se tiene:

$$\sim(p \vee q) \sim (\sim p \wedge \sim q) \qquad \sim(p \wedge q) \sim (\sim p \vee \sim q)$$

Asociativa. La conjunción, disyunción y disyunción excluyente son asociativas.

$$(p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r) \qquad (p \wedge q) \wedge r \sim p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \sim p \vee (q \vee r)$$

Distributiva. La conjunción se distribuye respecto a disyunción y la disyunción respecto a la conjunción.

Distributiva por izquierda:

$$p \wedge (q \vee r) \sim (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \sim (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Distributiva por derecha:

$$(p \vee q) \wedge r \sim (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \qquad (p \wedge q) \vee r \sim (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

En el desarrollo de las unidades que siguen, se establecerán, tanto en la teoría como en ejemplos, ejercicios, problemas de aplicación, definiciones, conjunciones, disyunciones, implicaciones, negación de proposiciones; temas relacionados con los elementos de lógica matemática, estudiados anteriormente.

1.1.13 Ejercicios Sobre Valores de Verdad

Analizar el valor de verdad de las proposiciones que se indican en seguida:

Una disyunción excluyente es falsa, únicamente cuando las proposiciones que la componen son falsas.

Si una de las proposiciones que constituyen una disyunción es verdadera, entonces la disyunción es verdadera.

Si una de las proposiciones que constituyen una conjunción es falsa, entonces la conjunción es falsa.

Suficiente con saber que una de las dos proposiciones que constituyen una conjunción sea falsa, para afirmar que la conjunción es falsa.

Suficiente con que una de las proposiciones que constituyen una disyunción sea verdadera, para afirmar que la disyunción es verdadera.

Si $(p \rightarrow q)$ es verdadera y p es verdadera, entonces q es verdadera.

Ejemplo:

Sean las siguientes proposiciones p , q y r :

p : x es un número racional; q : x es un número real; r : x es número irracional

Proposición	Enunciado	Valor de verdad
$(p \rightarrow q)$	Si x es un número racional, entonces, x es un número real	Verdadero
$r \rightarrow q$	Si x es un número irracional, entonces, x es un número real	Verdadero
$q \rightarrow p$:	Si x es un número real, entonces, x es un número racional	Falso
$q \rightarrow r$	Si x es un número real, entonces, x es un número irracional	Falso
$p \rightarrow q$	x es un número racional, si y sólo si, x es un número real	Falso
$q \leftrightarrow (p \vee r)$	x es un número real, si y sólo si x es un número racional ó x es irracional	verdadera

1.2 ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.2.1 Definición

Un conjunto es una agrupación, colección, reunión o grupo de objetos, llamados, en general, elementos del conjunto.

Para denotar o representar los conjuntos, se utiliza letras mayúsculas, tales como: A, B, C, D, X, Y, Z , y otras; por su parte, para representar los elementos de un conjunto, se utiliza letras minúsculas, así: x, y, z, u, v , y otras.

Para indicar que x representa los elementos de un conjunto A , se expresa así: $x \in A$, y se lee: x pertenece al conjunto A ; o también, x es un elemento de A .

En la expresión: $x \notin A$ se lee: x no es elemento de A , x no pertenece al conjunto A . Por tanto, $x \notin A$, es la negación de la proposición $x \in A$.

1.2.2 Determinación de un Conjunto

Un conjunto está expresado en forma extensiva, cuando entre llaves, están todos sus elementos o parte de ellos, pero que identifican, definen o representan a todo el conjunto.

Un conjunto está expresado en forma comprensiva, cuando entre llaves, están representados sus elementos mediante una o más variables, que cumplen una determinada condición o proposición.

Ejemplos:

Son conjuntos expresados en forma extensiva, los siguientes:

$$A = \{a, b, c, d\} \quad B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Si C es el conjunto de los números naturales pares, entonces, $C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$. En este caso, no aparecen todos los números naturales pares; se ha escrito en orden únicamente algunos números pares; exactamente, los primeros siete; pero según el contexto, se puede afirmar que 16, 20, 40, 100, etc., también son elementos de C .

Así pues, $12.358 \in C$; $31.370 \in C$; $12.357 \notin C$; $31;371 \notin C$.

Son ejemplos de conjuntos expresados en forma extensiva, los siguientes:

$$D = \{x / x \in M \vee x \in \mathbb{N}\} \quad E = \{x / x \in M \wedge x \in \mathbb{N}\} \quad F = \{x / x \in M \wedge x \notin \mathbb{N}\}$$

Sea el conjunto $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Asumiendo que $\mathbb{N}$ representa el conjunto de los números naturales, entonces, el conjunto B se puede expresar en forma comprensiva, de la siguiente manera:

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \wedge x < 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 4 < x < 9\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 4 < x < 10\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x < 9\}$$

1.2.3 Subconjuntos

Sean los conjuntos A y B , entonces, la expresión $A \subset B$ denota que A es subconjunto de B ; A está contenido en B o que A está incluido en B .

El símbolo $\subset$ se utiliza para indicar inclusión de conjuntos.

1.2.3.1 Definición

$A \subset B$ sí y solo sí, para todo $x \in A, x \in B$

Observe que de la definición se tiene la siguiente equivalencia:

A subconjunto de B es lógicamente equivalente a:

Para todo x , si x pertenece a A , entonces x pertenece a B .

En símbolos se expresa así:

$$A \subset B \iff \forall x \in A, x \in B \quad \text{o también: } A \subset B \iff (x \in A \rightarrow x \in B)$$

Y negando lo anterior, se tiene:

A no es subconjunto de B es lógicamente equivalente a:

Existe un x , si x pertenece a A , entonces x no pertenece a B .

En símbolos se expresa así:

$$A \not\subset B \iff \exists x \in A, x \notin B$$

1.2.3.2 Propiedades

Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Entonces:

Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

$$A \subset A$$

Transitiva

$$[(A \subset B) \wedge (B \subset C)] \rightarrow (A \subset C)$$

Nota.

Algunos autores utilizan el símbolo $\subseteq$ en lugar de $\subset$ para definir subconjunto; y usan el símbolo $\subset$ para definir subconjunto propio.

$A \subset B$, sí y solo sí, para todo $x \in A$, $x \in B$; y existe al menos $x \in B$ tales que $x \notin A$.

En este documento se utiliza $\subset$ para denotar un subconjunto cualquiera; y cuando sea necesario hacer referencia a subconjuntos propios, se indicará explícitamente que se trata de tales subconjuntos.

Es decir, A es subconjunto propio de B , si B no es subconjunto de A .

Ejemplos:

Sea el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$

Los subconjuntos propios de A , de un elemento son: $\{1\}$; $\{2\}$; $\{3\}$

Los subconjuntos propios de A , de dos elementos son: $\{1, 2\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 3\}$

El único subconjunto de A con tres elementos es el mismo conjunto A

1.2.4 Conjunto Vacío

Un conjunto que no tiene elementos, se denomina conjunto vacío y se lo representa con la letra ϕ .

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto; es decir, si A es cualquier conjunto, entonces $\phi \subset A$.

El conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / 3 < x \wedge x < 2\}$ es vacío, porque no hay números naturales que sean mayores que 3, y al mismo tiempo, que sean menores que 2. Por tanto, $A = \phi$.

1.2.5 Conjunto Unitario

Es un conjunto constituido por un solo elemento.

Son ejemplos de conjuntos unitarios, los siguientes:

$$\{60\}$$

$$\{m\}$$

$$H = \{4, 4\} = \{4\}$$

$$K = \{7, 7, 7\} = \{7\}$$

En un conjunto, basta con escribir cada elemento una sola vez; en consecuencia, H y K son conjuntos unitarios.

1.2.6 Conjunto Universal

Es el conjunto que se toma como referencia; es decir, es el conjunto del cual se toman los subconjuntos en estudio.

1.2.7 Igualdad de Conjuntos

$A = B \iff$ para todo $x \in A, x \in B \wedge$ para todo $x \in B, x \in A$.

Es decir, $A = B$, si todos los elementos de un conjunto, están en el otro.

En efecto, se puede demostrar que $(A = B) \iff [(A \subset B) \wedge (B \subset A)]$

Propiedades

1. Reflexiva

$$A = A$$

2. Transitiva

$$[(A = B) \wedge (B = C)] \rightarrow (A = C)$$

1.2.8 Operaciones entre Conjuntos

Sea A, B, C conjuntos arbitrarios.

Unión de conjuntos A y B . Conjunto formado por los elementos comunes y no comunes de A y B .

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Intersección de conjuntos A y B . Conjunto formado por los elementos comunes de A y B .

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

Diferencia de conjuntos A y B . Corresponde al conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B .

$$A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$$

Diferencia Simétrica de A y B . Conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B , y los elementos de B que no pertenecen al conjunto A .

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

De las definiciones anteriores, se tiene que:

$$x \in (A \cup B) \iff (x \in A \vee x \in B)$$

$$x \in (A \cap B) \iff (x \in A \wedge x \in B)$$

$$x \in (A - B) \iff (x \in A \wedge x \notin B)$$

$$x \in (A \Delta B) \iff (x \in A \vee x \in B)$$

$$x \in (A \Delta B) \iff [x \in (A - B) \vee x \in (B - A)]$$

$$x \in (A \Delta B) \iff [x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)]$$

1.2.9 Propiedades y Casos Particulares de Unión e Intersección

La unión y la intersección de conjuntos son idempotentes.

$$A \cup A = A$$

$$A \cap A = A$$

La unión y la intersección de conjuntos son conmutativas.

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

La unión de conjuntos es modulativa, el módulo es el conjunto vacío.

$$A \cup \phi = A$$

$$A \cap \phi = \phi$$

La unión y la intersección de conjuntos son asociativas.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

La unión de conjuntos es distributiva respecto a la intersección; y la intersección es distributiva respecto a la unión.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Notas:

1. Si $A \cap B = \phi$, entonces A y B son conjuntos disjuntos.

2. Sea $A \subset B$, entonces:

$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

$$A - B = \phi$$

$$A \Delta B = B - A$$

1.2.10 Complemento de un Conjunto

Sea $A \subset B$, entonces, el complemento de A respecto a B se indica así: C_B^A y se define como sigue:

$$C_B^A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}$$

$$C_B^A = (B - A)$$

El conjunto C_B^A está formado por todos los elementos que le falta al conjunto A para ser igual al conjunto B.

Si U es el conjunto de referencia (universal) en una determinada teoría, por ejemplo, en la teoría de conjuntos, entonces, en general, cuando se considera los conjuntos A, B, C, D, y otros, todos son subconjuntos de U.

$$C_U^A = U - A, \text{ el cual se simboliza por } A'; \text{ por tanto, } C_U^A = U - A = A'$$

Notas

$$x \in A' \iff x \notin A$$

$$x \in A \iff x \notin A'.$$

Según lo anterior, se tiene que: si un elemento pertenece al complemento de un conjunto, dicho elemento no pertenece al conjunto; y si un elemento pertenece a un conjunto, dicho elemento no pertenece al complemento del conjunto.

1.2.11 Propiedades y Casos Especiales del Complemento de un Conjunto

$$(A \cup B)' = (A' \cap B')$$

$$(A \cap B)' = (A' \cup B')$$

$$(A')' = A$$

$$A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \phi$$

$$U' = \phi$$

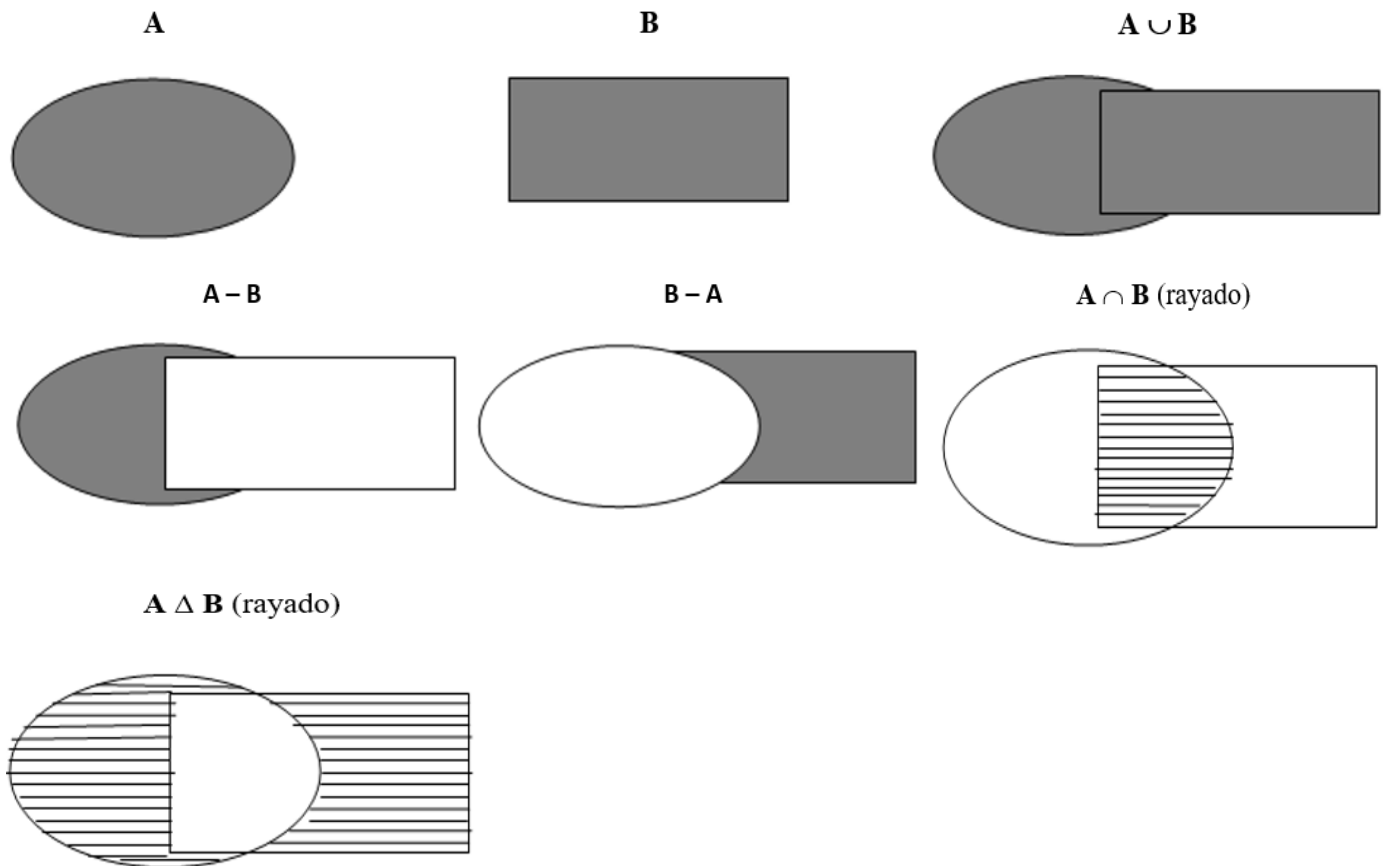
$$\phi' = U$$

$$(A \Delta B)' = (A' \Delta B) = (A \Delta B')$$

Las propiedades 1 y 2, se conocen como leyes de Morgan.

1.2.12 Diagramas de Venn

Son formas gráficas de representar un conjunto; la región sombreada representa el conjunto que se especifica debajo de la región.



1.2.13 Ejercicios Sobre Valores de Verdad Aplicados a Operaciones de Conjuntos

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

$$x \in A \rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$x \notin A \wedge x \in B \rightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$x \in A \rightarrow x \in (A \cap B)$$

$$x \notin A \wedge x \notin B \rightarrow x \notin (A \cup B)$$

$$x \in A \wedge x \notin B \rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$x \in A' \rightarrow x \notin A$$

$$x \in A \wedge x \notin B \rightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$x \in A \rightarrow x \notin A'$$

$$x \notin A \wedge x \notin B \rightarrow x \notin (A \cap B)$$

$$x \notin A \rightarrow x \in A'$$

$$x \notin A \wedge x \in B \rightarrow x \in (A \cup B)$$

$$x \in A' \rightarrow x \notin (A')'$$

1.3 EJERCICIOS CON RESPUESTAS

1. Si p es proposición verdadera, q es proposición falsa, r es proposición falsa. Escribir el valor de verdad de cada proposición, así: v para verdadera, f para falsa.

Proposición	Respuesta	Proposición	Respuesta	Proposición	Respuesta
$p \wedge q$	f	$p \vee q$	v	$p \rightarrow q$	f
$p \vee q$	v	$p \leftrightarrow q$	f	$(p \wedge q) \vee r$	f
$(p \vee q) \wedge r$	f	$(p \rightarrow q) \wedge r$	f	$(p \vee q) \rightarrow r$	f
$p \leftrightarrow r$	f	$\sim (p \wedge q)$	v	$\sim (p \vee q)$	f
$\sim p$	f	$\sim p \leftrightarrow q$	v	$p \vee \sim q$	f

2. Expresar cada conjunto en forma extensiva:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x < 5\}; B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 2\}; A \cup B; A \cap B; A - B; B - A; A \Delta B$$

$$C = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 4 \vee x^2 = 25 \vee x^2 = 81\}; D = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 5 \vee x^2 = 10\}; C \cup D; C \cap D$$

Solución

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A \cap B = \{1, 2\}$$

$$A - B = \{3, 4\}$$

$$B - A = \{-2, -1, 0\}$$

$$A \Delta B = \{-2, -1, 0, 3, 4\} \quad C = \{-2, 2, -5, 5, -9, 9\} \quad D = \emptyset \text{ (vacío)}$$

$$C \cup D = \{-2, 2, -5, 5, -9, 9\} \quad C \cap D = \emptyset$$

Obtener el conjunto complemento respecto al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ (referencia, universal) para cada uno de los siguientes conjuntos:

Conjunto

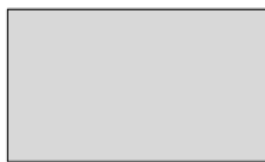
Complemento

Conjunto

Complemento

$\mathbb{Z}^*$	$(\mathbb{Z}^*)' = \{0\}$	$\mathbb{Z}^p$	$(\mathbb{Z}^p)' = \mathbb{Z}^i$
(enteros menos el cero)		(enteros pares)	
$\mathbb{Z}^i$	$(\mathbb{Z}^i)' = \mathbb{Z}^p$	$\mathbb{Z}^+$	$(\mathbb{Z}^+)' = \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$
(enteros impares)		(enteros positivos)	
$\mathbb{Z}^-$	$(\mathbb{Z}^-)' = \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$	$E = \{x \in \mathbb{Z} / x < -3 \wedge 2 < x\}$	$E' = \mathbb{Z}$
(enteros negativos)		$E = \emptyset$	
$F = \{0\}$	$F' = \mathbb{Z}^*$	$G = \{x \in \mathbb{Z} / x < -3 \wedge -3 < x\}$	$(G)' = \{-3\}$

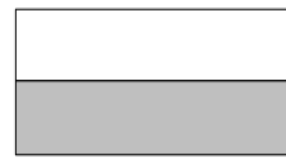
1.3.4 Para las siguientes figuras, la región rectangular representa el conjunto de referencia U; las regiones rectangulares pequeñas corresponden a los conjuntos A y B. Sombrear los conjuntos que se indica debajo de cada diagrama.



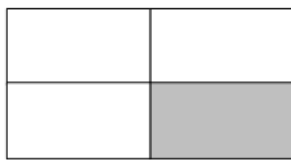
U



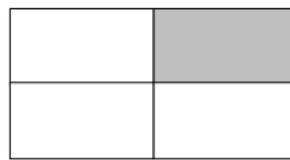
A



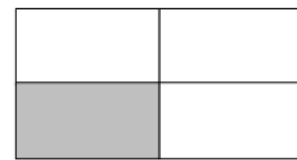
B



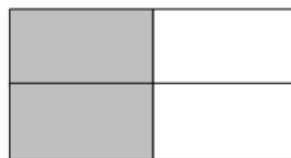
$A \cap B$



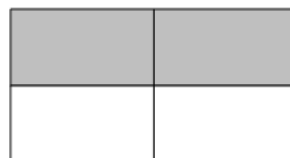
$A - B$



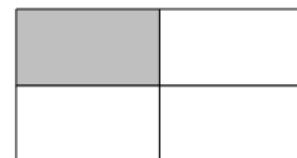
$B - A$



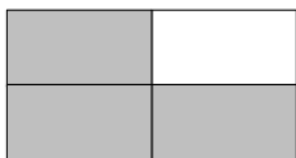
A'



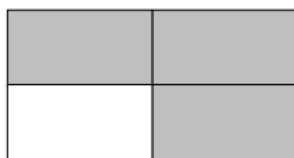
B'



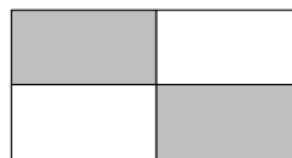
$(A \cup B)'$



$$(A - B)'$$



$$(B - A)'$$



$$(A \Delta B)'$$

I.4 EVALUACIÓN CON RESPUESTAS Y SUGERENCIAS

I.4.I Evaluación de Elementos de Lógica Matemática

Preguntas de verdadero y falso

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \wedge q$ es:

R/ F.

Sugerencia. La conjunción es verdadera sólo si las proposiciones que la constituyen son verdaderas.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \vee q$ es:

R/ V

Sugerencia. La disyunción es falsa sólo si las proposiciones que la constituyen son falsas.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \rightarrow q$ es:

R/ F

Sugerencia. La implicación es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \vee q$ es:

R/ V

Sugerencia. La disyunción exclusiva es falsa sólo si las dos proposiciones que la constituyen tienen el mismo valor de verdad

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \leftrightarrow q$ es:

R/ F

Sugerencia. La doble implicación es falsa cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen valores de verdad contrarios.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa, r una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $(p \wedge q) \vee r$ es:

R/ F.

Sugerencia. La disyunción es falsa sólo si las dos proposiciones que la constituyen son falsas.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa, r una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $(p \vee q) \wedge r$ es:

R/ F.

Sugerencia. La conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la constituyen son verdaderas.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa, r una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $(p \rightarrow q) \wedge r$ es:

R/ F.

Sugerencia. La conjunción es verdadera sólo si las dos proposiciones que la constituyen son verdaderas.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa, r una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $(p \vee q) \rightarrow r$ es:

R/ F.

Sugerencia. La implicación es falsa sólo si el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa, r una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \leftrightarrow r$ es:

R/ F.

Sugerencia. La doble implicación es falsa cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen valores de verdad contrarios.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $\sim (p \wedge q)$ es:

R/ V.

Sugerencia. La proposición $p \wedge q$ es falsa, por tanto, su negación es verdadera.

Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $\sim (p \vee q)$ es:

R/ F.

Sugerencia. La proposición $p \vee q$ es verdadera, por tanto, su negación es falsa.Sea p una proposición verdadera. El valor de verdad de la proposición $\sim p$ es:

R/ F.

Sugerencia. La proposición p es verdadera, por tanto, su negación es falsa.Sea p una proposición verdadera y q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $p \vee \sim q$ es:

R/ F.

Sugerencia. La proposición $p \vee \sim q$ es falsa porque p es verdadera y $\sim q$ también es verdadera.Sea p una proposición verdadera y q una proposición falsa. El valor de verdad de la proposición $\sim p \leftrightarrow q$ es:

R/ V.

Sugerencia. La proposición $\sim p \leftrightarrow q$ es verdadera porque $\sim p$ es falsa y q también es falsa, es decir, $\sim p$ y q tienen el mismo valor de verdad.

1.4.2 Evaluación de Elementos de Teoría de Conjuntos

1.4.2.1 Preguntas de selección múltiple

El conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ en forma extensiva es: $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

R/ a.

Sugerencia. El conjunto de los naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ El conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 3\}$ en forma extensiva es: $B = \{-3, -2, 2, -1, 0, 1, 2\}$ $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

R/ b

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$$B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 3\}$.

El conjunto $A \cup B$ en forma extensiva es:

$$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

R/ a.

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; por tanto, $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 3\}$.

El conjunto $A \cap B$ en forma extensiva es:

$$A \cap B = \emptyset$$

$$A \cap B = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3\}$$

R/ c.

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; por tanto, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 3\}$.

El conjunto $A - B$ en forma extensiva es:

$$A - B = \{3, 4, 5\}$$

$$A - B = \{4, 5\}$$

$$A - B = \{-3, 4, 5\}$$

R/ b.

Sugerencia. El conjunto de los naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$; por tanto, $A - B = \{4, 5\}$

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 3\}$.

El conjunto $B - A$ en forma extensiva es:

$$B - A = \{-2, -1, 0\}$$

$$B - A = \{-2, -1, 0, 1\}$$

$$B - A = \{-2, -1, 0, 4\}$$

R/ a.

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}; \text{ por tanto, } B - A = \{-2, -1, 0\}$$

Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} / -3 < x \wedge x < 3\}$.

El conjunto $A \Delta B$ en forma extensiva es:

$$A \Delta B = \{-2, -1, 0, 4, 3, 5\}$$

$$A \Delta B = \{-2, -1, 4, 5\}$$

$$A \Delta B = \{-2, -1, 0, 4, 5\}$$

R/ c.

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \text{ y } B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}; \text{ por tanto, } A \Delta B = \{-2, -1, 0, 4, 5\}$$

Sean los conjuntos $C = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 9 \vee x^2 = 16 \vee x^2 = 25\}$ y $D = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 6 \vee x^2 = 12\}$.

El conjunto $C \cup D$ en forma extensiva es:

$$C \cup D = \{-3, -4, -5, 3, 4\}$$

$$C \cup D = \{-3, -5, 3, 4, 5\}$$

$$C \cup D = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$$

R/ c.

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$$C = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\} \text{ y } D = \emptyset; \text{ por tanto, } C \cup D = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$$

Sean los conjuntos $C = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 9 \vee x^2 = 16 \vee x^2 = 25\}$ y $D = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 = 6 \vee x^2 = 12\}$.

El conjunto $C \cap D$ en forma extensiva es:

$$C \cap D = \{-3, -4, -5, 3, 4\}$$

$$C \cap D = \phi$$

$$C \cap D = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$$

R/ b

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, entonces,

$$C = \{-5, -4, -3, 3, 4, 5\} \text{ y } D = \phi; \text{ por tanto, } C \cap D = \phi$$

1.4.2.2 Preguntas de verdadero y falso

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$

R/ V

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}^- = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$$

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}, \text{ entonces, } \mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$$

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^p$ (conjunto de los enteros pares) es $\mathbb{Z}^i$ (conjunto de los enteros impares)

R/ V

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$,

$\mathbb{Z}^p = \{\dots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$, $\mathbb{Z}^i = \{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$, entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^p$ es $\mathbb{Z}^i$

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ es $\mathbb{Z} \cup \{0\}$

R/ V

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$ es $\mathbb{Z} \cup \{0\}$

Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^-$ es $\mathbb{Z}^+$

R/ F

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$,

$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$, $\mathbb{Z}^- = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1\}$, entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^-$ es $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Sea el conjunto $E = \{x \in \mathbb{Z} / x < -4\}$. Entonces, el conjunto $E' = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, \dots\}$

R/ V

Sugerencia. El conjunto de los enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$,

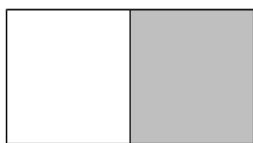
$E = \{\dots, -7, -6, -5, -4\}$, entonces, el conjunto $E' = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, \dots\}$

Sea el conjunto Universal U representado por:

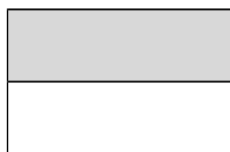


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

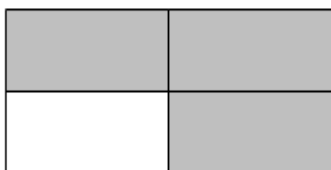


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $A \cup B$ corresponde a:



R/ V.

Sugerencia. La unión de los conjuntos A y B, es decir, $A \cup B$, está formada por todos los elementos que pertenecen al conjunto A junto con todos los elementos de B, escritos una sola vez.

Sea el conjunto Universal U representado por:

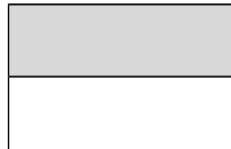


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

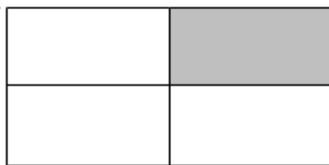


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $A \cap B$ corresponde a:



R/ V.

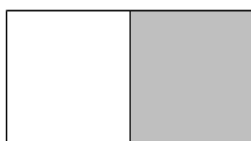
Sugerencia. La intersección de los conjuntos A y B , es decir $A \cap B$, está formada por todos los elementos comunes de A y B (región común).

Sea el conjunto Universal U representado por:

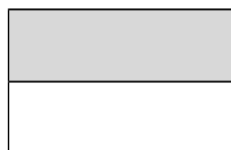


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

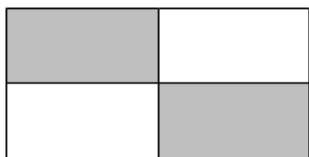


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $A - B$ corresponde a:



R/ F.

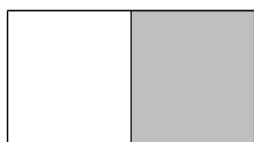
Sugerencia. La diferencia de los conjuntos A y B, es decir $A - B$, está formada por todos los elementos de A que no pertenecen a B.

Sea el conjunto Universal U representado por:

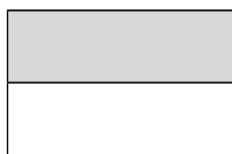


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

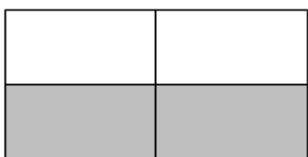


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $B - A$ corresponde a:



R/ F.

Sugerencia. La diferencia de los conjuntos B y A, es decir $B - A$, está formada por todos los elementos B que no pertenecen al conjunto A.

Sea el conjunto Universal U representado por:

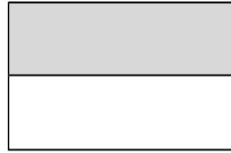


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

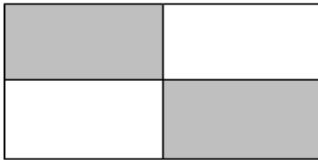


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $B \Delta A$ corresponde a:



R/ V.

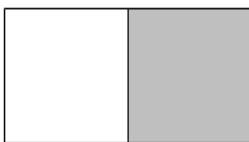
Sugerencia. La diferencia simétrica de los conjuntos A y B, es decir $A \Delta B$ o lo que es lo mismo $B \Delta A$, está formada por todos los elementos de A que no pertenecen a B junto con todos los elementos de B que no pertenecen al conjunto A.

Sea el conjunto Universal U representado por:



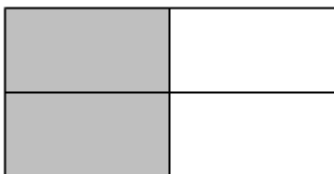
U

Sea el conjunto A representado como sigue:



A

Es verdadero o falso que el conjunto A' corresponde a:



R/ V.

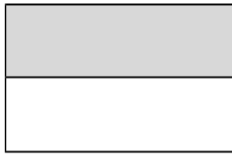
Sugerencia. El complemento del conjunto A está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto A para ser igual al conjunto universal U.

Sea el conjunto Universal U representado por:



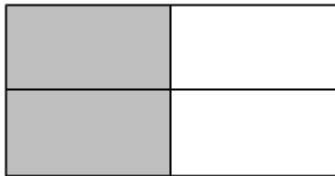
U

Sea el conjunto B representado como sigue:



B

Es verdadero o falso que el conjunto B' corresponde a:



R/ F.

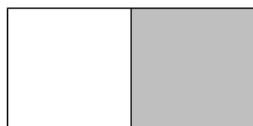
Sugerencia. El complemento del conjunto B está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto B para ser igual al conjunto universal U.

Sea el conjunto Universal U representado por:

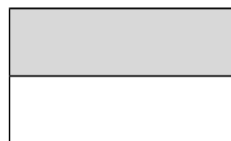


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

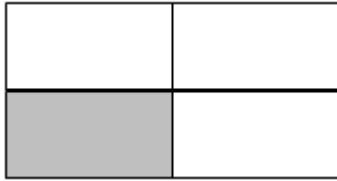


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $(A \cup B)'$ corresponde a:



R/ V.

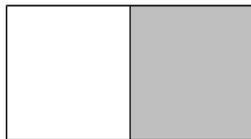
Sugerencia. El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto para ser igual al conjunto universal.

Sea el conjunto Universal U representado por:

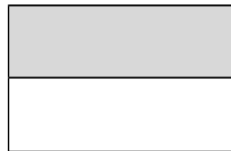


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

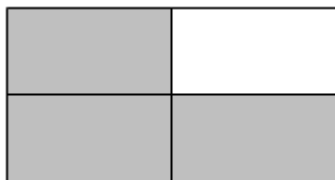


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $(A \cap B)'$ corresponde a:



R/ V.

Sugerencia. El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto para ser igual al conjunto universal.

Sea el conjunto Universal U representado por:

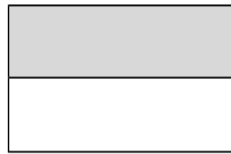


U

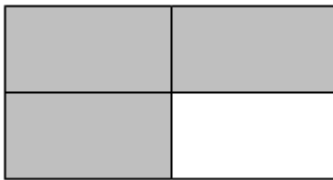
Sean los conjuntos A y B representados como sigue:



A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $(A - B)'$ corresponde a:

R/ V.

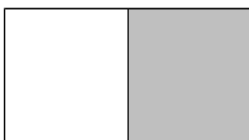
Sugerencia. El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto para ser igual al conjunto universal. Recuerde que $A - B$ es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B.

Sea el conjunto Universal U representado por:

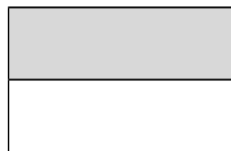


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

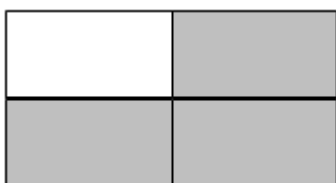


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $(B - A)'$ corresponde a:



R/ V.

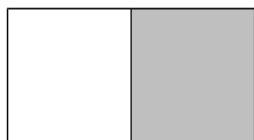
Sugerencia. El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto para ser igual al conjunto universal. Recuerde que $B - A$ es el conjunto formado por los elementos de B que no pertenecen al conjunto A.

Sea el conjunto Universal U representado por:

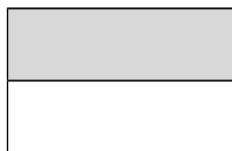


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

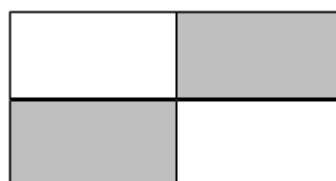


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $(A \Delta B)'$ corresponde a:



R/ V.

Sugerencia. El complemento de un conjunto está formado por todos los elementos que le faltan al conjunto para ser igual al conjunto universal. Recuerde que $A \Delta B$ es el conjunto formado por los elementos de A que no pertenecen a B junto con los elementos de B que no pertenecen al conjunto A.

Sea el conjunto Universal U representado por:

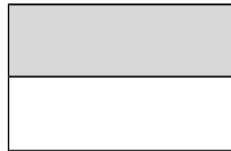


U

Sean los conjuntos A y B representados como sigue:

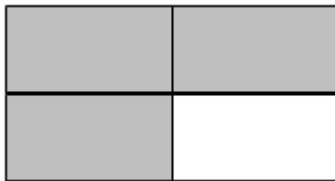


A



B

Es verdadero o falso que el conjunto $A' \cup B'$ corresponde a:



R/ V.

Sugerencia. El conjunto $A' \cup B'$ está constituido por el complemento del conjunto A unido al complemento del conjunto B.

CAPÍTULO 2.

Conjuntos Numéricos

CAPÍTULO 2

CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, \dots\}$

Si a, b es cualquier par de números naturales, entonces $a + b$ y $a \times b$ son números naturales; es decir, la suma y el producto de dos (o más) números naturales, es otro número natural; es decir, la suma y el producto de naturales cumple la Ley de Composición Interna.

La diferencia y el cociente de dos números naturales, no siempre resulta número natural; es decir, $a - b$ y $\frac{a}{b}$ no siempre son números naturales; es decir, la sustracción y división de números naturales, no cumplen con la Ley de Composición interna.

2.2 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z} = \{\dots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots\}$

Si a, b es cualquier par de números enteros, entonces $a + b$, $a \times b$, $a - b$ son números enteros; es decir, la suma, el producto y la diferencia de dos (o más) números enteros, es otro número entero; es decir, estas operaciones cumplen la Ley de Composición Interna.

El cociente de dos números enteros, no siempre resulta número entero; es decir, $\frac{a}{b}$ no siempre es número entero.

Ejemplos:

$$10 + 90 = 100$$

$$10 + (-90) = -80$$

$$-10 + 90 = 80$$

$$-10 - 90 = -100$$

$$10 - 90 = -80$$

$$-10 + (-90) = -100$$

$$450 + (-30) = 420$$

$$-10 - (-90) = -10 + 90 = \frac{10}{7} \notin \mathbb{Z}$$

$$450 - (-30) = 450 + 30 = 480$$

$$345 + 15 + (-20) = 360 + (-20) = 340$$

2.2.1 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots\}$

Enteros negativos: $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -13, -14, -15, -16, -17, \dots\}$

Enteros Pares: $Z_p = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}\}$

Enteros Impares: $Z_i = \{x \in \mathbb{Z} / x = 2k + 1, \text{ donde } k \in \mathbb{Z}\}$

Según lo anterior:

$$Z_p = \{\dots, -16, -14, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, \dots\}$$

$$Z_i = \{\dots, -15, -13, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots\}$$

Conjunto de enteros, menos el cero: $Z^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es el conjunto de enteros no-negativos

$\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ es el conjunto de enteros no-positivos

Según lo anterior, el entero cero, no es positivo y ni es negativo; es decir es neutro. Entonces $-0 = +0 = 0$.

2.2.2 Algoritmo de la División

Dado un entero no-negativo m y un entero positivo n , existe un único entero positivo q , llamado cociente y un entero r , llamado resto o residuo, tales que $m = nq + r$, donde $0 \leq r < n$

Ejemplos:

$100 = 30 \times 3 + 10$ Así, el cociente de dividir $m = 100$ entre $n = 30$, es $q = 3$ y el resto es $r = 10$. (Observe que $10 < 30$)

De igual manera, $100 = 3 \times 33 + 1$; luego, el cociente de dividir 100 entre 3, es 33 y el resto es 1. (Note que $1 < 3$)

$215 = 20 \times 10 + 15$: el resto de dividir 215 entre 20, es 15 y el cociente es 10. (Observe que $15 < 20$)

$215 = 10 \times 21 + 5$: el resto de dividir 215 entre 10, es 5 y el cociente es 21. (Note que $5 < 10$).

Observe que $100 = 30 \times 2 + 40$, pero el resto de dividir 100 entre 30 no es 2, ni el cociente es 40, porque 40 no es menor que 30; y el resto r debe ser menor que n , que en este caso es 30.

Como $50 = 25 \times 2 + 0$, entonces el cociente de dividir 50 entre 25, es 2 y el resto es 0. También, el cociente de dividir 50 entre 2 es 25 y el residuo es 0.

El cociente de dividir 50 entre 10, es 5 y el resto es 0; el cociente de dividir 50 entre 5 es 10 y el resto es 0.

2.2.3 Divisibilidad en los Enteros

Un entero positivo a , divide a un entero positivo b , si y sólo si existe un entero k , tal que $b = ak$.

Según lo anterior, el resto de dividir a entre b , es 0. El entero k es el cociente.

En este caso, se afirma que el entero a es un factor o divisor del entero b , y que b es *múltiplo* de a .

También se afirma que a divide a b o que b es divisible por a . Además, k es otro factor de b y es cofactor de a .

Notas:

Para efectos de divisibilidad de números, es pertinente recordar que:

Un número es múltiplo de 2, cuando la última cifra es número par.

Un número es múltiplo de 3, cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Un número es divisible por 4, cuando las dos últimas cifras forman un número múltiplo de 4.

Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 o en 5.

Un número es múltiplo de 9, cuando la suma de sus cifras resulta un número múltiplo de 9.

Ejemplos:

Los divisores positivos de 40 son: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40

Algunos múltiplos positivos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, ...

Observación. En la divisibilidad, es suficiente con considerar enteros positivos; también se puede considerar enteros negativos, pero el signo menos ($-$), se lo trata de otra manera o por aparte, como se verá más adelante.

Nota.

Dado que $m = 1 \times m$, entonces se concluye que m es múltiplo de m y al mismo tiempo es divisor de m .

Todo número entero es múltiplo y divisor de sí mismo.

El número 1 es divisor de todo número entero.

Todo número entero positivo, tiene como mínimo dos divisores positivos, el 1 y el mismo número.

2.2.4 Número Primos

Un entero positivo p diferente de 1, es número primo, si y sólo si, los únicos divisores positivos de p , son 1 y p

Son números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53...

2.2.5 Número Compuestos

Un entero positivo q diferente de 1, es número compuesto, si y sólo si, tiene al menos otro divisor además de 1 y de q . En consecuencia, un entero positivo diferente de 1 es compuesto, cuando no es número primo.

Ejemplo de números compuestos:

4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, ...

Nota.

Todo número compuesto, se lo puede expresar (o descomponer) como un producto de factores primos.

Ejemplos:

$$100 = 2 \times 50 = 2 \times 2 \times 25$$

$$= 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$$

$$210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$$

2.2.6 Máximo Común Divisor (MCD) y Mínimo Común Múltiplo (MCM)

Un entero positivo d es el MCD de dos enteros positivos a y b , si y sólo si, d es el mayor de todos los divisores comunes de a y b . Se expresa así: $MCD(a, b) = d$.

Un entero positivo m es el MCM de dos enteros positivos a y b , si y sólo si, m es el menor de todos los múltiplos comunes de a y b . Se expresa así: $MCM(a, b) = m$.

Los divisores positivos de 16 son: 1, 2, 4, 8 y 16

Los divisores positivos de 40 son: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40

Entonces, los divisores comunes de 16 y 40 son: 1, 2, 4, 8 y el mayor es 8; luego, $MCD(16, 40) = 8$

De igual manera, $MCD(20, 60) = 20$; $MCD(35, 14) = 7$; $MCD(100, 80) = 20$

Algunos múltiplos positivos de 30: 30, 60, 90, 120, **150**, 180, 210, 240, 270, **300**, 330, 360, 390, 420, **450**, ...

Algunos múltiplos positivos de 50: 50, 100, **150**, 200, 250, **300**, 350, 400, **450**, 500, ...

Son múltiplos positivos comunes de 30 y 50: 150, 300, 450, 600, ...

El menor múltiplo común de 30 y 50 es 150; luego $MCM(30, 50) = 150$

Nota.

Dos o más enteros positivos son coprimos o primos relativos, cuando su MCD es igual a 1.

Ejemplos:

$$MCD(10, 9) = 1, MCD(5, 12) = 1, MCD(10, 9, 15) = 1, MCD(2, 3, 5) = 1$$

Entonces, los pares de números 10 y 9, 5 y 12, son coprimos; lo mismo sucede con las ternas 10, 9 y 15; y 2, 3 y 5.

2.2.6.1 Propiedades MCM, MCD y Algunos Casos Especiales

Si $MCD(a, b) = d$, entonces, $MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = \frac{d}{t}$ donde t es un divisor positivo de a y b

De lo anterior se obtiene la expresión: $t \times MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = d$

Si $MCD(a, b) = d$, entonces, $MCM(ka, kb) = kd$ donde k es un entero positivo.

Si $MCM(a, b) = m$, entonces, $MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = \frac{m}{t}$, donde t es un divisor positivo de a y b .

De lo anterior se obtiene la expresión: $t \times MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = m$

Si $MCM(a, b) = m$, entonces, $MCM(ka, kb) = km$, k es un entero positivo.

Además, si a es un divisor positivo de b , entonces:

$$MCD(a, b) = a$$

$$MCM(a, b) = b$$

Ejemplos:

$$MCD(100, 200) = 100$$

$$MCD(30, 90) = 30$$

$$MCD(5, 35) = 5$$

$$MCM(100, 200) = 200$$

$$MCM(30, 90) = 90$$

$$MCM(5, 35) = 35$$

2.2.6.2 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios enteros

Para calcular el MCD de dos o más enteros, se descomponen los enteros en factores primos comunes. El producto de estos factores primos comunes, es el máximo común divisor.

Para calcular el MCM de dos o más enteros, se descomponen los enteros en factores primos comunes y no comunes. El producto de todos estos factores primos, es el mínimo común múltiplo.

Para ello, se dispone los números en columna y a la derecha, separados por una línea, se escribe los factores primos y debajo de cada número, los respectivos y sucesivos cofactores (el otro divisor), es decir, los cocientes.

Ejemplos:

Obtener el MCD y el MCM de los siguientes enteros: 420, 330, 390 y 300

420	330	390	300	2	420	330	390	300	2
210	165	195	150	3	210	165	195	150	2
70	55	65	50	5	105	165	195	75	3
14	11	13	10		35	55	65	25	5
					7	11	13	5	5
					7	11	13	1	7
					1	11	13	1	11
					1	1	13	1	13
					1	1	1	1	

Según la descomposición se tiene que:

$$MCD(420, 330, 390, 300) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

$$MCM(420, 330, 390, 300) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 300.300$$

Nota.

Para calcular el MCM y el MCD de varios enteros, cuando sea posible, es de gran utilidad aplicar sus propiedades.

En los ejemplos anteriores, se tiene que los números 2, 3, 5, 10, son divisores comunes de los enteros dados.

Luego:

$$MCD(420, 330, 390, 300) = 10 \times MCD(42, 33, 39, 30) = 10 \times 3 \times MCD(14, 11, 13, 10) \\ = 10 \times 3 \times 1 = 30$$

Se observa que $MCD(14, 11, 13, 10) = 1$

$$MCM(420, 330, 390, 300) = 10 \times MCM(42, 33, 39, 30) = 10 \times 3 \times MCM(14, 11, 13, 10)$$

Como no hay un divisor común de 14, 11, 13 y 10, se los descompone en factores primos comunes y no comunes, así:

14	11	13	10	2
7	11	13	5	5
7	11	13	1	7

1	11	13	1	11
1	1	13	1	13
1	1	1	1	

Entonces, $MCM(14,11,13,10) = 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 10.010$

Por tanto, $MCM(420,330,390,300) = 10 \times 3 \times 10.010 = 300.300$

2.3 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

En notación fraccionaria, el conjunto de los números racionales es: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*\}$

Conjunto de racionales positivos $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} / (a \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } b \in \mathbb{Z}^+) \text{ o } (a \in \mathbb{Z}^- \text{ y } b \in \mathbb{Z}^-)\}$

Conjunto de racionales negativos $\mathbb{Q}^- = \{\frac{a}{b} / (a \in \mathbb{Z}^+ \text{ y } b \in \mathbb{Z}^- \text{ o } (a \in \mathbb{Z}^- \text{ y } b \in \mathbb{Z}^+))\}$

$\mathbb{Q}^*$ es el conjunto de todos los números racionales a excepción del 0: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q} - \{0\}$.

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^* \cup \{0\}$$

Ejemplos:

Son números racionales:

$$\frac{5}{4}, \frac{-7}{2}, \frac{10}{-3}, \frac{1}{15}, \frac{0}{32}, \frac{-24}{-12}, \frac{17}{1}, \frac{100}{100}$$

Son racionales positivos:

$$\frac{14}{27}, -\frac{320}{-419}, \frac{-60}{-17}$$

Son racionales negativos:

$$\frac{-17}{27}, \frac{120}{-211}, -\frac{86}{19}$$

2.3.1 Igualdad de Racionales

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ si y sólo si } ad = bc$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \text{ porque } 5 \times 8 = 10 \times 4$$

$$\frac{5}{4} = \frac{-10}{-8} \text{ porque } 5 \times (-8) = (-10) \times (4)$$

También:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \text{ porque } \begin{array}{l} 5 \times 8 \\ = 10 \times 4 \end{array} \quad \frac{5}{4} = \frac{-10}{-8} \text{ porque } \begin{array}{l} 5 \times (-8) \\ = (-10) \times (4) \end{array}$$

$$\frac{-7}{2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$

$$\frac{100}{200} = \frac{50}{100} = \frac{25}{50} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{-20}{-80} &= \frac{20}{80} \\ &= \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Nota.

Si a es un número entero, entonces, como $a = \frac{a}{1}$, se sigue que a es un número racional. Así: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Conclusión:

Todo número entero, es número racional, por tanto, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

2.3.2 Operaciones Básicas con Racionales

$$\text{Adición y Sustracción: } \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$\text{Multiplicación: } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\text{División: } \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos de adición y sustracción.

$$\frac{7}{3} + \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5 + 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{35 + 6}{15} = \frac{41}{15}$$

$$\frac{-11}{2} + \frac{13}{4} = \frac{-44 + 26}{8} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4}$$

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5 - 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{35 - 6}{15} = \frac{29}{15}$$

$$\frac{-11}{2} - \frac{13}{4} = \frac{-44 - 26}{8} = \frac{-70}{8} = -\frac{35}{4}$$

Nota.

Simplificar una fracción $\frac{a}{b}$, consiste en dividir a y b entre un divisor común a ellos.

Así:

$$\frac{100}{70} = \frac{100 \div 10}{70 \div 10} = \frac{10}{7}$$

$$\frac{-18}{8} = \frac{-18 \div 2}{8 \div 2} = \frac{-9}{4}$$

$$\frac{30}{42} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$$

$$\frac{162}{45} = \frac{18}{5}$$

Cuando los fraccionarios que se suman o restan tienen el mismo denominador (fraccionarios homogéneos), se suma o resta los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{25}{7} + \frac{4}{7} = \frac{29}{7}$$

$$\frac{31}{6} + \frac{5}{6} = \frac{36}{6} = 6$$

$$\frac{-75}{4} + \frac{5}{4} = -\frac{70}{4} = -\frac{35}{2}$$

$$\frac{16}{5} - \frac{12}{5} = \frac{16 - 12}{5} = \frac{4}{5}$$

Para obtener la suma o diferencia de varios fraccionarios, se multiplica cada numerador por los denominadores de los demás fraccionarios y se suma o resta estos productos para obtener el numerador del fraccionario resultante. Para el denominador, se multiplica todos los denominadores. Si los fraccionarios que se operan son homogéneos, se opera únicamente los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{12}{5} + \frac{-2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{12 \times 3 \times 4 + (-2) \times 5 \times 4 - 3 \times 3 \times 5}{5 \times 3 \times 4} = \frac{144 - 40 - 45}{60} = \frac{59}{60}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{18 + 12 + 6}{36} = \frac{36}{36} = 1$$

$$\frac{7}{4} + \frac{-3}{4} + \frac{5}{4} - \frac{9}{4} - \frac{-6}{4} = \frac{7-3+5-9+6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

También se puede transformar los racionales a fraccionarios homogéneos, es decir, que tengan un común denominador. Para ello, se busca un múltiplo común de los denominadores; para lo cual, el más conveniente es el MCM. Cada numerador debe multiplicarse por el mismo número por el cual se multiplicó su denominador.

Ejemplo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 2 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

$$\frac{7}{6} + \frac{-3}{5} + \frac{5}{3} - \frac{7}{10} = \frac{35 - 18 + 50 - 21}{30} = \frac{46}{30} = \frac{23}{15}$$

Multiplicaciones

$$\frac{21}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{21 \times 3}{5 \times 4} = \frac{63}{20}$$

$$\frac{10}{-3} \times \frac{6}{5} = \frac{60}{-35} = -\frac{12}{7}$$

$$\frac{-9}{7} \times \frac{-5}{2} \times \frac{10}{3} = \frac{(-9)(-5)(10)}{7 \times 2 \times 3} = \frac{450}{42} = \frac{75}{7}$$

$$\frac{10}{-3} \times \frac{-6}{5} = \frac{-60}{-35} = \frac{12}{7}$$

Divisiones

$\frac{8}{5} \div \frac{2}{3} = \frac{8 \times 3}{5 \times 2} = \frac{24}{10} = \frac{12}{5}$	$\frac{14}{9} \div \frac{-3}{2} = \frac{28}{-27}$
$\frac{36}{-15} \div \frac{-4}{3} = \frac{36 \times 3}{-15 \times (-4)} = \frac{108}{60} = \frac{27}{15}$ $= \frac{9}{5}$	$\frac{-9}{4} \div \frac{-2}{3} = \frac{-9 \times 3}{4 \times (-2)} = \frac{-27}{-8}$ $= \frac{27}{8}$
$\frac{-9}{4} \div \frac{-2}{3} = \frac{-9 \times 3}{4 \times (-2)} = \frac{-27}{-8} = \frac{27}{8}$ (Ley de medios y extremos)	$\frac{10}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{10 \times 4}{1 \times 3} = \frac{40}{3}$
$\frac{5}{9} \div 8 = \frac{5}{9} \div \frac{8}{1} = \frac{5 \times 1}{9 \times 8} = \frac{5}{72}$	$\frac{4}{3} \div -8 = \frac{4}{3} \div \frac{-8}{1} = \frac{4 \times 1}{9 \times (-8)}$ $= \frac{4}{-72} = -\frac{1}{18}$

2.3.3 Operaciones Combinadas

Primero se realiza las operaciones que están agrupadas; después las multiplicaciones y al final las sumas y restas.

$$\begin{aligned} \left(\frac{15}{4} + \frac{9}{5}\right) \times \frac{-10}{3} - \left(\frac{12}{7} \div \frac{8}{21}\right) \times \frac{14}{9} &= \left(\frac{111}{20} \times \frac{-10}{3}\right) - \left(\frac{252}{56} \times \frac{14}{9}\right) \\ &= \frac{-1110}{60} - \frac{3.528}{504} = \frac{-37}{2} - \frac{392}{56} = \frac{-37}{2} - \frac{196}{28} = \frac{-37}{2} - \frac{98}{14} \\ &= \frac{-37}{2} - \frac{49}{7} = \frac{-37}{2} - 7 = \frac{-37 - 14}{2} = \frac{-51}{2} \end{aligned}$$

Nota.

Dado que 3 y 10 son divisores de 1.110 y 60, entonces, 30 es divisor común; por lo cual, se simplifica el número racional $\frac{1110}{60}$ dividiendo numerador y denominador por 30, resultando $\frac{37}{2}$

De igual manera, 9 es divisor de 3.528 y de 504; entonces, se simplifica $\frac{3.528}{504}$ dividiendo numerador y denominador por 9. Se continúa simplificando las sucesivas fracciones entre 2. (Observe que se puede simplificar dividiendo por 4).

2.3.4 Números Mixtos

La suma de un número entero positivo a con un fraccionario positivo menor que uno, $\frac{c}{b}$, esto es $a + \frac{c}{b}$ se lo expresa así: $a\frac{c}{b}$

Este número se denomina mixto porque está formado por una parte entera y una parte fraccionaria.

Ejemplo:

$$1\frac{1}{4} \text{ el cual equivale a } 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$1\frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$$

Pasando de fraccionario a mixto:

$$\frac{7}{4} = \frac{4+3}{4} = \frac{4}{4} + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$$

2.3.5 Porcentajes

Un número racional $\frac{a}{100}$, se lo puede expresar así: a % que se lee: a por ciento.

$$\left(\frac{a}{100} = a \%\right)$$

Ejemplos:

$$\frac{3}{100} = 3 \%$$

$$\frac{50}{100} = 50 \%$$

$$\frac{0,8}{100} = 0,8 \%$$

$$\frac{125}{100} = 125 \%$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{100} = \frac{3}{4} \% = 0,75 \%$$

2.3.5.1 Conversión de fraccionarios y decimales a porcentajes

$$\frac{3}{4} = 0,75 = \frac{0,75 \times 100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

$$\frac{1}{2} = 0,5 = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$0,8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$$

$$0,1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100}$$

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\%$$

$$\frac{3}{8} = 0,375 = 37,5\%$$

2.3.5.2 Conversión de porcentajes a fraccionarios y decimales

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$62\% = \frac{62}{100} = 0,62$$

$$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0,8$$

$$\text{El } 9\% \text{ de } 9 \text{ es } 0,81 \text{ porque } 9\% = \frac{9}{100} \times 9 = \frac{81}{100} = 0,81$$

$$\text{El } 25\% \text{ de } 200 \text{ es } 50 \text{ porue } 25\% \times 200 = \frac{25}{100} \times 200 = \frac{5000}{100} = 50$$

$$\text{El } 40\% \text{ de la mitad de } 800 \text{ es igual a } 160 \text{ porque } 40\% \times \frac{1}{2} \times 800$$

$$= \frac{40}{100} \times \frac{1}{2} \times 800 = \frac{40 \times 800}{100 \times 200} = 160$$

2.3.6 Relación de Orden en $\mathbb{Q}$

Para dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ donde b y d son enteros positivos, se tiene que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y sólo si $ad < bc$

Ejemplos:

$\frac{7}{4} < \frac{9}{5}$ porque $35 < 36$	$\frac{-11}{3} < \frac{-13}{4}$ porque $-44 < -39$
Como $3 \times 2 < 1 \times 7$, entonces $\frac{3}{7} < \frac{1}{2}$	$\frac{11}{3} > \frac{-13}{4}$ porque $44 > -39$

Propiedad

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son racionales tales que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, entonces $\frac{a}{b} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) < \frac{c}{d}$

Ejemplo:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{5}{12}\right) < \frac{5}{12} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{3}{8} < \frac{5}{12}$$

Nota.

Dados dos racionales diferentes, (el uno menor que el otro), la semisuma de ellos, es otro racional, mayor que el menor y menor que el mayor de los dos racionales dados.

La afirmación anterior se la puede aplicar las veces que se desee, para obtener racionales entre dos racionales diferentes.

De lo anterior se obtiene las siguientes afirmaciones:

Entre dos números racionales diferentes, siempre existe otro número racional

Entre dos números racionales diferentes, existen infinitos números racionales

El conjunto de los números racionales es denso, pero no completo

El conjunto es denso, porque entre cualquier par de números racionales diferentes, existen infinitos racionales; y no es completo, porque al representar en una recta los números racionales, a cada uno le corresponde un punto en la recta, pero hay puntos de la recta a los cuales no les corresponde un número racional; es decir, hay vacíos en la recta cuando en esa sólo se ubican los números racionales.

2.3.7 Notación Decimal

Un número decimal consta de dos partes, una entera y otra decimal. Así:
 $E, c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots$

E es la parte entera y $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 \dots$ es la parte decimal. Cada c_i es una cifra decimal.

Un decimal periódico es de la forma:
 $E, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n \dots$

$a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m$ es la parte decimal no periódica y el grupo $b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n$ es el período.

Si $N = a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_m$ (la cual no siempre existe) y $P = b_1 b_2 b_3 b_4 \dots b_n$, el racional periódico queda así: $E, N\tilde{P}$.

Todo decimal periódico se lo puede expresar de la forma fraccionaria $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros, $b \neq 0$

$$E, N\tilde{P} = \frac{ENP - EN}{\underbrace{n}_{9} \underbrace{m}_{0}}$$

ENP y EN son números enteros; $\underbrace{n}_{9} \underbrace{m}_{0}$ es el número formado por n nueves, seguido de m ceros; n es el número de cifras que tiene el periodo, m es el número de cifras que tiene la parte no periódica.

Conclusión. Todo número decimal periódico es número racional.

Ejemplos:

$$3,25\tilde{4} = \frac{3254 - 325}{\underbrace{1\ 2}_{9\ 0}} = \frac{2.929}{900} \quad 5,12\tilde{32} = \frac{51.232 - 512}{\underbrace{2\ 2}_{9\ 0}} = \frac{50.720}{9900}$$

$$= \frac{5.072}{990} = \frac{2.536}{495}$$

$$1,5\tilde{3} = \frac{153 - 15}{\underbrace{1\ 1}_{9\ 0}} = \frac{138}{90} = \frac{69}{45} = \frac{23}{15} \quad 15,3\tilde{78} = \frac{15.378 - 153}{\underbrace{2\ 1}_{9\ 0}} = \frac{15.225}{990}$$

$$= \frac{3.045}{198} = \frac{1.015}{66}$$

Cuando el decimal periódico carece de parte no-periódica, entonces $m = 0$, y en este caso, la fórmula queda así:

$$E, \tilde{P} = \frac{EP - E}{\underbrace{n}_{9}}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 12,\overline{5} &= \frac{125 - 12}{\underbrace{1}_9} = \frac{113}{9} & 3,\overline{90} &= \frac{390 - 3}{\underbrace{2}_9} = \frac{387}{99} & 2,\overline{3} &= \frac{23 - 2}{\underbrace{1}_9} = \frac{21}{9} \\
 & & &= \frac{43}{11} & &= \frac{7}{3}
 \end{aligned}$$

Nota.

Cuando el decimal periódico es negativo, se aplica las mismas fórmulas, anteponiendo el signo menos (-).

$$\begin{aligned}
 -12,\overline{5} &= -\frac{125 - 12}{\underbrace{1}_9} = -\frac{113}{9} & -3,\overline{90} &= -\frac{390 - 3}{\underbrace{2}_9} = -\frac{387}{99} = -\frac{43}{11}
 \end{aligned}$$

Afirmación. Todo número racional es decimal periódico.

Ejemplos de decimales periódicos (rationales) con periodo 0

124,5 -25,78 0,75 -1,80 58 72

2.4 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Todo número decimal no-periódico e infinito es número Irracional.

Un número irracional no se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b sean enteros.

El conjunto de los números irracionales se lo simboliza con I. También así: $\mathbb{Q}^c$, $\mathbb{Q}'$: Complemento de $\mathbb{Q}$ respecto a $\mathbb{R}$

Las raíces cuadradas inexactas de números positivos; raíces cúbicas inexactas de racionales, son irracionales.

Por ejemplo, son números irracionales: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, -\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \pm\sqrt[3]{20}$

Dos números irracionales muy importantes en la Matemática, debido a su gran aplicación, son los siguientes:

El número pi, $\pi = 3,141592653 \dots$

El número de Euler, $e = 2,71828182845 \dots$

2.5 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ es el conjunto de los números reales.

De modo que, todo número decimal y todo número que se lo pueda expresar en notación decimal, es número real; por lo cual, todo número real es un decimal o se lo puede expresar en notación decimal.

De la definición se deduce que: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $I \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \cap I = \emptyset$

Un número real es un decimal con infinitas cifras decimales periódicas o no periódicas.

Afirmaciones. Sean las proposiciones p , q y r , como sigue: p

p : x es un número racional q : x es un número real r : x es número irracional

Ejemplos:

Símbolos	Enunciado	Valor de verdad
$p \rightarrow q$	Si x es un número racional, entonces x es un número real	Verdadero
$r \rightarrow q$	Si x es un número irracional, entonces x es un número real	Verdadero
$q \rightarrow p$	Si x es un número real, entonces x es un número racional	Falso
$q \rightarrow r$	Si x es un número real, entonces x es un número irracional	Falso
$p \leftrightarrow q$	Si x es un número racional, si y sólo si x es un número real	Falso
$q \leftrightarrow p \vee r$	x es un número real, si y sólo si x es un número racional ó x es irracional	Verdadero
$p \rightarrow \sim r$	Si x es un número racional, entonces x no es un número irracional	verdadero

Ejemplos de números reales

3	-5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{8}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$-\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$-\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{9}$	$\pm \sqrt[3]{24}$	2π
2e	129,4	-21,678	0,850	450,2 $\overline{38}$	- 450,71 $\overline{125}$

Afirmaciones

La suma, diferencia y producto de números reales, es un número real. El cociente de dos números reales es número real siempre que se divida por un número diferente de cero.

Sean x, y números reales, entonces: $x + y \in \mathbb{R}$; $x \times y = xy \in \mathbb{R}$; $x - y \in \mathbb{R}$; $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}$ si $y \neq 0$

Propiedades

Asociativa para la adición y multiplicación	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
---	-----------------------------	---

Conmutativa para la adición y multiplicación	$x + y = y + x$	$x \times y = y \times x$
--	-----------------	---------------------------

Ley modulativa para la adición y multiplicación	$x + 0 = 0 + x = x$	$x \times 1 = 1 \times x = x.$
---	---------------------	--------------------------------

Ley invertible en la adición y multiplicación	$x + (-x) = (-x) + x = 0$	$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1; x \neq 0$
---	---------------------------	---

Los números 0 y 1 son los respectivos módulos o elementos neutros de la adición y la multiplicación.

2.6 EJERCICIOS CON RESPUESTAS

1. Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

Operaciones	Respuestas	Operaciones	Respuestas
$\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	1
$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	0	$\frac{3}{5} + \frac{5}{3}$	$\frac{34}{15}$
$\frac{35}{2} + \frac{135}{4}$	$\frac{205}{4}$	$\frac{5}{-4} + \frac{-2}{3}$	$-\frac{23}{12}$
$\frac{7}{-2} + \frac{-2}{3} + \frac{11}{-6}$	-6	$\frac{3}{5} - \frac{5}{3}$	$-\frac{16}{15}$
$-\frac{35}{2} - \frac{135}{4}$	$-\frac{205}{4}$	$\frac{5}{-4} - \frac{-2}{3}$	$-\frac{7}{12}$
$\frac{7}{-2} - \frac{2}{3} - \frac{11}{6}$	-6	$\frac{40}{7} \times \frac{49}{100}$	$\frac{14}{5}$

$$\begin{array}{llll}
 \frac{23}{-8} \times \frac{18}{300} & -\frac{69}{400} & \frac{15}{-14} \times \frac{98}{-105} & 1 \\
 \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{-5}{2} & -\frac{15}{8} & \frac{55}{4} \times \frac{75}{24} & \frac{22}{5} \\
 \frac{70}{-8} \div \frac{-770}{48} & \frac{6}{11} & \left(\frac{9}{80} \div \frac{-10}{210} \right) \div \frac{81}{-42} & \frac{49}{40} \\
 \frac{125}{49} + \frac{3}{7} \times \left(\frac{140}{3} - \frac{65}{6} \right) & -\frac{5105}{98} & 350 - \left(\frac{4}{5} + \frac{5}{4} \right) \times \frac{20}{41} & 359 \\
 & & + \left(\frac{1}{4} \div \frac{1}{48} \right) & \\
 & & \times \frac{5}{6} &
 \end{array}$$

2. Expresar en forma fraccionaria los siguientes números mixtos.

Números mixtos	Respuestas	Números mixtos	Respuestas
$10\frac{3}{4}$	$\frac{43}{4}$	$50\frac{1}{2}$	$\frac{101}{2}$
$2\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-30\frac{2}{5}$	$-\frac{152}{5}$

3. Expresar cada porcentaje en forma fraccionaria, y cada fraccionario o decimal en términos de porcentajes.

Porcentaje/decimal	Respuestas	Porcentaje/decimal	Respuestas
60%	$\frac{3}{5}$	12,5%	$\frac{1}{8}$
16%	$\frac{4}{25}$	$\frac{3}{5}$	60%
$\frac{1}{8}$	12,5%	0,6	60%
0,125	12,5%	0,16	16%
2,43	243%	$\frac{60}{100}$	60%

4. Determinar la cantidad que se indica en cada expresión.

Expresiones	Respuestas	Expresiones	Respuestas
Dos quintas partes de 57.955	23.182	Las tres cuartas partes de 45.729.116	34.296.837

El 75% de 45.729.116	34.296.837	La mitad del 50% de 200	800
Tres quintas partes del 25% de 35.588.600	5.338.290	1% de 10	0,1

5. Determinar en cada caso, el valor correspondiente al MCD o MCM.

a)

Operaciones	Respuestas	Operaciones	Respuestas
$MCM(6, 2)$	6	$MCM(6, 3)$	6
$MCM(6, 2, 3)$	6	$MCM(3, 2, 6)$	6
$MCD(42, 72)$	6	$MCD(84, 144)$	12
$MCD(3024, 5184)$	432	$MCM(42, 72)$	504
$MCM(4, 7, 2, 1)$	28	$MCD(4, 7, 2, 1)$	1
$MCM(84, 144)$	1008	$MCD(3024, 5184, 1728)$	432
$MCM(4000, 7000, 2000, 1000)$	28.000	$MCD(4000, 7000, 2000, 1000)$	1.000

b)

Operaciones	Respuestas
Si $MCD(a, b) = 900$, hallar $MCD(3a, 3b)$	2.700
Si $MCM(a, b) = 800$, hallar $MCM(3a, 3b)$	2.400
Si 100 es divisor de a y b, hallar $MCD\left(\frac{a}{100}, \frac{b}{100}\right)$	9
Si 100 es divisor de a y b, hallar $MCM\left(\frac{a}{100}, \frac{b}{100}\right)$	8

2.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MCD Y DE MCM

Un problema de MCD y de MCM, muchas veces, se lo identifica por la misma pregunta que se formula; por ejemplo, obtener el mayor o máximo valor o cantidad de ciertos valores o cantidades (MCD); o bien, obtener el menor o mínimo valor o cantidad (MCM).

Tres entidades bancarias A, B, C disponen respectivamente de \$240.000.000, \$180.000.000, \$360.000.000 para realizar préstamos de igual valor en cada una

de las tres entidades. Para que el préstamo sea el mayor posible, ¿cuál debe ser su valor? ¿Para cuántas personas alcanza el préstamo en cada entidad?

Solución:

Según el planteamiento del problema y la pregunta que se debe responder, se debe calcular el MCD de los tres valores.

$$MCD(240.000.000, 180.000.000, 360.000.000) =$$

$$= 10.000.000 \times MCD(24, 18, 36)$$

$$= 10.000.000 \times 6 \times MCD(4, 3, 6)$$

$$= 60.000.000 \times 1$$

$$= 60.000.000$$

Para obtener el número de personas para las cuales alcanza el préstamo, se divide los valores dados entre 60.000.000 y se obtiene respectivamente, 4, 3, 6.

Respuesta. El mayor valor del préstamo es de \$60.000.000. El número de personas para las cuales alcanza el préstamo en las entidades A, B y C, son respectivamente: 4, 3 y 6.

Se debe comprar igual cantidad de tres tipos de fertilizantes A, B, C. Cada bulto de fertilizante tipo A contiene 10,5 Kg, del tipo B 16,5 Kg. y el bulto del tipo C contiene 22,5 Kg. ¿Cuántos Kg de fertilizante de cada tipo se puede comprar como mínimo? En este caso, ¿Cuántos bultos de cada tipo se debe comprar?

Solución:

Según el planteamiento, se debe de calcular el MCM.

Se observa que los números dados no son enteros. En este caso, multiplicando por 10 se obtiene números enteros; no interesa qué unidades se obtenga. Una vez obtenido el MCM se divide entre 10.

$$MCM(105, 165, 225) = 5 \times MCM(21, 33, 45) = 5 \times 3 \times MCM(7, 11, 15) = 15 \times MCM(7, 11, 15)$$

7	11	15	3	$MCM(7, 11, 15) = 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1.155$
7	11	5	5	$MCM(105, 165, 225) = 15 \times 1.155 = 17.325$
7	11	1	7	$17.325 / 10 = 1.732,5$
1	11	1	11	
1	1	1		

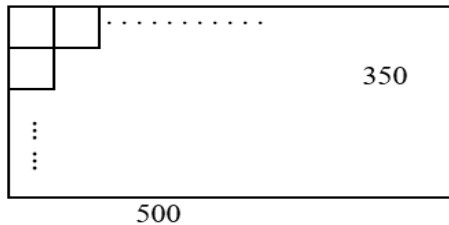
Respuesta 1. Se debe comprar como mínimo de cada tipo de fertilizante 1.732,5 Kg.

Para obtener el número de bultos que se debe comprar de cada tipo, se divide 1.732,5 entre 10,5; 16,5; y 22,5; con lo cual, se obtiene 165, 105 y 77, respectivamente.

Respuesta 2. Se debe comprar 165, 105 y 77 bultos de los fertilizantes tipo A, B, C, respectivamente.

Se desea dividir un terrero rectangular de 500 x 350 m. en lotes cuadrados de igual área. Obtener la longitud del lado de cada lote de máxima área. ¿Cuántos lotes se obtiene con esta área máxima? Calcular el área de cada lote.

Solución:



$$MCD(500,350) = 50 \times MCD(10,7) = 50 \times 1 = 50$$

Número de lotes a lo largo: $500 \div 50 = 10$; a lo ancho: $350 \div 50 = 7$

Número de lotes: $10 \times 7 = 70$; área de cada lote: $50 \text{ m} \times 50 \text{ m} = 2500 \text{ m}^2$

Respuestas:

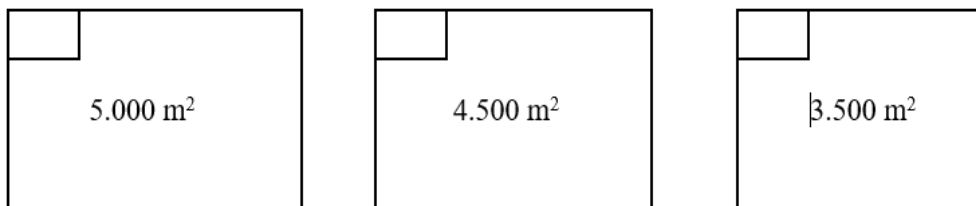
La longitud del lado de cada lote cuadrado de máxima área es de 50 m

El número total de lotes es 70

El área de cada lote es 2.500 m²

Se desea dividir 4 lotes rectangulares de terreno, de 5.000 m², 4.500 m², 3.500 m², 4.000 m², respectivamente, en lotes rectangulares de igual área en todos los terrenos. Calcular la mayor área posible de los lotes. Obtener el número de lotes de área máxima que se obtiene en cada lote.

Solución:



Como se debe dividir cada superficie (rectangular) en superficies rectangulares de igual área, y esta área debe ser la máxima, se debe calcular el MCD de las cuatro áreas dadas, las cuales tienen a 500 como divisor común; así:

$$MCD(5.000; 4.500; 3.500; 4.000) = 500 \times MCD(10; 9; 7; 8) = 500 \times 1 = 500$$

$$5.000 \div 500 = 10; 4.500 \div 500 = 9; 3.500 \div 500 = 7; 4.000 \div 500 = 8$$

Respuestas:

La mayor área posible de los lotes es de 500 m²

El número de lotes que se obtiene de los terrenos en el orden dado son: 10, 9, 7 y 8 respectivamente.

Nota

Los lotes de 500 m² pueden tener diferentes dimensiones. Por ejemplo, 10×50 ; 20×25 ; 4×125

Se llena una caja, en forma completa y exacta con cubos de igual tamaño. La caja tiene las siguientes dimensiones interiores: $50 \times 40 \times 30$ cm. Obtener la longitud de las aristas de los cubos de mayor tamaño que se puede disponer en la caja. Calcular el número de dichos cubos que llenan la caja.

Solución:

Se debe calcular el mayor divisor común de 50, 40 y 30; pues, las aristas de un cubo tienen igual longitud.

$$\text{MCD}(50, 40, 30) = 10 \times \text{MCD}(5, 4, 3) = 10 \times 1 = 10$$

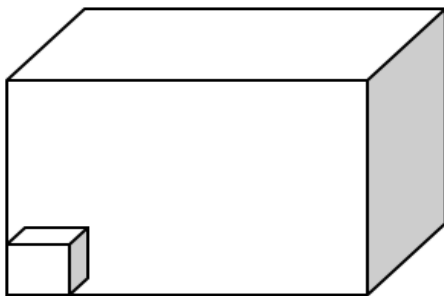
Si se afirma que las dimensiones de la caja son: 50 de largo, 40 de alto y 30 cm. de fondo, entonces, el cociente de dividir 50, 40 y 30 entre 10, es el número de cubos a lo largo, a lo alto, y de fondo.

$$50 \div 10 = 5$$

$$40 \div 10 = 4$$

$$30 \div 10 = 3$$

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$



Respuestas. La longitud de las aristas de los cubos es de 10 cm.

El número de cubos que llenan la caja es de 60

Nota. El volumen de cada cubo es: $10 \times 10 \times 10 = 1000 \text{ cm}^3$.

El volumen de la caja es $50 \times 40 \times 30 \text{ cm}^3 = 60.000 \text{ cm}^3$.

$$60.000 \text{ cm}^3 \div 1.000 \text{ cm}^3 = 60 \text{ cubos}$$

Tres obreros A, B, C pegan (instalan) respectivamente al día 20, 25 y 15 metros de tubo. Obtener el primer tramo de igual longitud que pegan los obreros. Hallar el número de días que necesitan los obreros para pegar la longitud de dicho tramo.

	1 día	2 días	3 días	4 días	
A:	20 m.	40 m.	30 m.	80 m.	
B:	25 m.	50 m.	75 m.	100 m.	
C:	15 m.	30 m.	45 m.	60 m.	

Solución:

Como se puede observar, el problema consiste en hallar un múltiplo común y, a la vez mínimo, entre ellos.

4	5	3	2	$MCM(20,25,15) = 5 \times MCM(4,5,3) = 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 300$
2	5	3	2	$300 \div 20 = 15; 300 \div 25 = 12; 300 \div 15 = 20$
1	5	3	3	Respuestas. El primer tramo de igual longitud que instalan es de 300 m.
1	5	1	5	Los Obreros A, B, C necesitan respectivamente de 15, 12 y 20 días para pegar cada uno el tramo de tubería de 300 m.
1	1	1		

2.8 EQUIVALENCIAS Y CONVERSIONES

Sean U_1 y U_2 unidades de medida, por ejemplo, de longitud, área, volumen, capacidad, peso, corriente, capacidad y resistencia eléctrica; de fuerza, potencia, memoria del computador, unidades monetarias, y otros.

Si una unidad de medida U_1 , equivale a m unidades de medida U_2 , lo cual se expresa así: $U_1 = mU_2$, entonces, n unidades de medida U_1 equivalen a nm unidades de medida U_2 ; es decir, $nU_1 = nm U_2$ (I)

Ahora bien, $\frac{1}{m}U_1 = U_2$, entonces, k unidades de medida U_2 , equivale a $\frac{k}{m}$ unidades U_1 ; esto es, $kU_2 = \frac{k}{m}U_1$ (II)

Significado de prefijos.

Prefijo	Unidades	Prefijo	Unidades
Kilo (K)	Mil	Hecto (H)	Cien
Deca (D)	Diez	Deci (d)	Décima parte ($\frac{1}{10}$)
Centi (c):	Centésima parte ($\frac{1}{100} = 0,01$)	Mili (m)	Milésima parte ($\frac{1}{1.000} = 0,001$)

Ejemplos:

Un Kilociclo = 1.000 ciclos

Un Hectómetro (1 Hm) = 100 metros

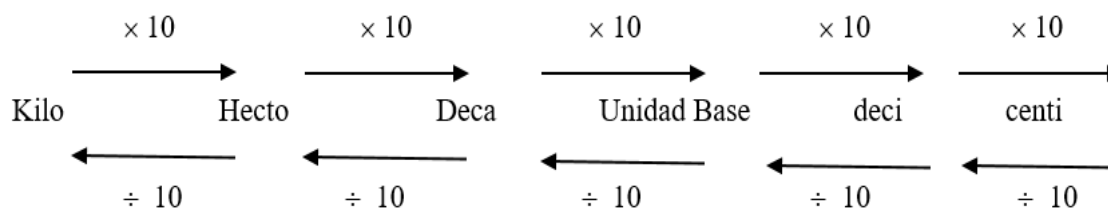
Un Decalitro (1 Dl) = 10 litros

Un decibel (1 db) = 0.1 de Bel

Un centígrado = 0,01 de grado

Un miliplak = 0,001 de plak.

En el siguiente esquema se presenta el paso de unidades en un sistema decimal, tomando una unidad base.



Ejemplos:

Es necesario recordar que, dividir un número entre 10, es equivalente a multiplicar el número por $\frac{1}{10}$

$2,6 \text{ Km} = 2,6 \times 10 \text{ Hm} = 26 \text{ Hm}$	$35 \text{ Km} = 35 \times 10 \times 10 \times 10 \text{ m} = 35000 \text{ m}$
$5 \text{ Hm} = 5 \times 100 \text{ m} = 500 \text{ m}$	$970 \text{ mm} = 970 \div 10 \text{ cm} = 97 \text{ cm}$
$97 \text{ cm} = 97 \div 10 \text{ dm} = 9,7 \text{ dm}$	$845 \text{ cm} = 845 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \text{ m} = 8,45 \text{ m}$

A continuación, se presentan algunas equivalencias. Obviamente, las unidades monetarias varían constantemente.

Unidades de longitud

$1 \text{ Km} = 1000 \text{ m}$	$1 \text{ Hm} = 100 \text{ m.}$	$1 \text{ Dm} = 10 \text{ m.}$
$1 \text{ m} = 10 \text{ dm}$	$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$	$1 \text{ m} = 1000 \text{ mm}$
$1 \text{ dm} = \frac{1}{10} \text{ m}$	$1 \text{ cm} = \frac{1}{100} \text{ m}$	$1 \text{ mm} = \frac{1}{1000} \text{ m}$
$1 \text{ pie (foot)} = 30,48 \text{ cm}$	$1 \text{ pulgada (inch, 1")} = 2,54 \text{ cm}$	$1 \text{ milla náutica} = 1852 \text{ m}$

Unidades de área

$$1 \text{ m}^2 = 100 \text{ dm}^2 \quad 1 \text{ m}^2 = 10.000 \text{ cm}^2 \quad 1 \text{ Dm}^2 = 100 \text{ m}^2 \quad 1 \text{ Hm}^2 = 10.000 \text{ m}^2$$

Unidades de medida agraria

$$\text{Una hectárea (Ha)} = 100 \text{ áreas (1 Ha = 100 áreas)} \quad 1 \text{ Ha} = 10000 \text{ m}^2$$

Unidades de volumen

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ dm}^3. \quad 1 \text{ m}^3 = 1.000.000 \text{ cm}^3.$$

Unidades de capacidad

Un galón americano = 3,784 litros (l.) 1 litro = 1000 ml 1ml = 1cm³

Unidades de tiempo

Un día = 24 horas Una hora = 60 min Un min = 60 seg

Otras notaciones y equivalencias

Kilobyte = Kb Megabyte= Mg Gigabyte= Gb Terabyte= Tb

1 Kg = 1.024 b 1 Mg = 1.024 Kb 1 Gb = 1.024 Mb 1Tb = 1.024 Gb

Conversiones:

Un Dólar equivale \$3.190; es decir: 1 Dólar = 3190 pesos. La equivalencia de un Dólar en pesos, varía diariamente.

En este caso, U1 es Dólar, U2 es Peso colombiano y m = 3190

Para convertir n Dólares a Pesos, se aplica la fórmula (I), así:

120 Dólares = 120×3.190 pesos = \$382.800

Para convertir k Pesos a Dólares, se aplica fórmula (II).

$\$78.155 = \frac{78.155}{3.190}$ Dólares = 24,5 Dólares

Conclusiones:

Para convertir Dólares a Pesos, se multiplica el número de Dólares por 3.190 (valor que cambia diariamente)

Para convertir Pesos a Dólares, se divide el número de Pesos entre 3.190

Un Euro equivales a 1,15 Dólares: 1 Euro = 1,15 Dólares.

Ahora U1 es un Euro y U2 es un Dólar.

Ejemplo:

Convertir 200 Euros a Dólares y 4.439 Dólares a Euros

Solución

Según (I): $200 \times 1,15$ Euros = 230 Dólares

Según (II) $4.439 \text{ Dólares} = \frac{4.439}{1,15}$ Euros = 3.860 Euros

Ejemplo:

Convertir \$500.000 a Euros y 100 Euros a Pesos

Solución:

Se pasa primero de Pesos a Dólares y luego, el resultado a Euros

$$\$500.000 = \frac{500.000}{3.190} \text{ Dólares} = 156,7398 \text{ Dólares} \approx 156,74 \text{ Dólares}$$

$$156,74 \text{ Dólares} = \frac{156,74}{1,15} \text{ E} = 136,2956 \text{ Euros}$$

Ejemplo:

Convertir 100 Euros a Pesos

Se convierte los Euros a Dólares y luego, el resultado a Pesos

$$100 \text{ Euros} = 100 \times 1.15 \text{ Dólares} = 115 \text{ Dólares} = 115 \times 3.190 \text{ Pesos} = \$366.850$$

Efectuar las siguientes conversiones

- | | |
|--|--|
| a) 2,8 Km a Hm, Dm y m. | b) 150 m a Dm, Hm y Km |
| c) 350 m a dm, cm y mm | d) 9.870 mm a cm, dm y m |
| e) 3,5 Kg a gr y 970 gr a Kg | f) 0,8 gr a mg y 12.500 mg a gr y Kg |
| g) 1,4 litros (l) a dl y cl | h) 0,5 litros a centilitros, mililitros y cm ³ |
| i) 10 Kb a bytes | j) 1.024.000 bytes a Kb y Mb |
| k) 5 Ha a áreas y m ² | l) 50.230 m ² a áreas y a Ha, |
| m) 12 pulg a cm; 60 pulg a m; 254 cm a pulg; 35 pulg a dm. | n) 15 pies a cm; 150 pies a metros; 3.048 cm a pies; 60,96 metros a pies |
| o) 20 galones americanos a litros y decilitros | p) 77,572 litros a galones americanos |

Nota.

$$n \div 10 = n \times \frac{1}{10} = n \times 0,1$$

$$n \div 100 = n \times \frac{1}{100} = n \times 0,01$$

Respuestas

- | | |
|--|---|
| a) 2,8 Km = 28 Hm = 280 Dm = 2.800 m | b) 50 m = 15 Dm = 1,5 Hm |
| c) 350 m = 3.500 dm = 35.500 cm = 350.000 mm | d) 9.870 mm = 987 cm = 98,7 dm = 9,87 m |
| e) 3,5 Kg = 3,5 × 10 × 10 × 10 g. = 3.500 g | f) 0,8 gramos = 800 mg |
| | 12.500 mg = 12,5 gr = 0,0125 Kg |

$$970 \text{ g} = 970 \times 0,1 \times 0,1 \times 0,1 \text{ Kg} = 0,97 \text{ Kg}$$

$$\text{g) } 1,4 \text{ litros (L)} = 14 \text{ decilitros (dl)} = 140 \text{ centilitros (cl)} \quad \text{h) } 0,5 \text{ L} = 50 \text{ cl} = 500 \text{ mililitros} = 500 \text{ cm}^3.$$

$$\text{i) } 10 \text{ Kb} = 10.240 \text{ bytes} \quad \text{j) } 1.024.000 \text{ bytes} = 1.000 \text{ Kb} = 0,97656225 \text{ Mg}$$

$$\text{k) } 5 \text{ Ha} = 500 \text{ áreas} = 50.000 \text{ m}^2 \quad \text{l) } 50.230 \text{ m}^2 = 502,3 \text{ áreas} = 5,023 \text{ Ha}$$

$$\text{m) } 12 \text{ pulg} = 30,48 \text{ cm}; 60 \text{ pulg} = 1,1524 \text{ m} \quad \text{n) } 15 \text{ pies} = 457,2 \text{ cm}; 150 \text{ pies} = 45,72 \text{ m}$$

$$254 \text{ cm} = 100 \text{ pulg}; 35 \text{ pulg} = 8,89 \text{ dm} \quad 3.048 \text{ cm} = 100 \text{ pies}; 60,96 \text{ m} = 20 \text{ pies}$$

$$\text{o) } 20 \text{ galones americanos} = 75,68 \text{ L} = 756,8 \text{ dl} \quad \text{p) } 77,572 \text{ L} = 20,5 \text{ galones americanos}$$

Problemas de aplicación

Se distribuye x pesos entre cinco entidades A, B, C, D, E. La entidad A recibe las dos quintas partes de x , B recibe la sexta parte de x , C recibe el 10% de x , a la entidad D le corresponde el doble de lo que recibe C. La entidad E recibe el resto, cuyo valor es \$40.000.000. ¿Cuál es el valor de x ? ¿Cuánto reciben las entidades A, B, C, D? ¿Qué porcentaje de x recibe la entidad E y la entidad A?

Solución:

$$\begin{array}{llll} \text{A recibe } \frac{2}{5}x & \text{B recibe } \frac{1}{6}x & \text{C recibe } 10\% \text{ de } x = \frac{10}{100}x = \frac{1}{10}x & \text{D} \\ \text{recibe } 2 \times \frac{1}{10}x = \frac{1}{5}x & & & \end{array}$$

Sumando todas las cantidades distribuidas, resulta la cantidad distribuida.

$$\frac{2}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}x + 40.000 = x$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{5}\right)x + 40.000 = x$$

Reduciendo a común denominador:

$$\frac{12 + 5 + 3 + 6}{30}x + 40.000 = x$$

$$\frac{26}{30}x + 40.000 = x$$

Efectuando trasposición de términos y reduciendo términos semejantes, se tiene:

$$40.000 = x - \frac{26}{30}x$$

$$40.000 = \left(1 - \frac{26}{30}\right)x$$

$$40.000 = \frac{2}{15}x$$

$$x = 40.000 \times \frac{15}{2}$$

$$x = 300.000.000$$

Determinemos los valores que reciben cada una de las entidades:

$$\text{Entidad A: } \frac{2}{5}x = \frac{2}{5} \times 300.000.000 = 120.000.000$$

$$\text{Entidad B: } \frac{1}{6}x = \frac{1}{6} \times 300.000.000 = 50.000.000$$

$$\text{Entidad C: } \frac{1}{10}x = \frac{1}{10} \times 300.000.000 = 30.000.000$$

$$\text{Entidad D: } \frac{1}{5}x = \frac{1}{5} \times 300.000.000 = 60.000.000$$

Respuestas

El valor de x es \$300.000.000 (Cantidad total distribuida)

Las entidades A, B, C, D reciben respectivamente: 120, 50, 30 y 60 millones de pesos.

Como E recibe $\frac{2}{15}$ de x y $\frac{2}{15} = 0,133333 = 13,33\%$

Entonces, E recibe el 13,333% de x (aproximadamente)

$$300.000.000 \times a\% = 40.000.000; \text{ luego, } a = \frac{40.000.000 \times 100}{300.000.000} = 13,3333$$

$$\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$$

A recibe el 40% del total distribuido.

Se presta un capital de \$50.000.000 al 3,5% mensual (tasa de interés). Obtener el valor del rendimiento a cabo de 8 meses.

Solución y respuestas:

Los rendimientos obtenidos en un mes son:

$$50.000 \times 3,5\% = 50.000.000 \times \frac{3,5}{100} = 500.000 \times 3,5 = 1.750.000$$

Los rendimientos obtenidos en 8 meses son:

$$8 \times 1.750.000 = 14.000.000 \text{ pesos}$$

El salario mensual de una persona en diciembre de 2017 fue de \$980.500. Si para el año 2018 este salario se incrementó en 5,5%, ¿cuál es valor del nuevo salario? ¿cuál es el monto del incremento?

Solución y respuesta:

El valor del incremento mensual fue: $980.500 \times 5,5\% = 53.927,5 \text{ pesos}$

El valor del salario para 2018 es: $980.500 + 53.927,5 = 1.034.427,5 \text{ pesos}$

Se presta un capital con un interés de 4% mensual durante cinco meses. Al cabo de ese tiempo, se recibe el capital prestado junto con el rendimiento obtenido, lo cual suma \$48.000.000. ¿Cuál es el valor del capital prestado?

Solución:

Si x es el valor del capital prestado, entonces, $x \times 4\%$ es el rendimiento obtenido en un mes; por lo tanto: $(x \times 4\%) \times 5$ es el rendimiento obtenido durante 5 meses.

Dado que el capital prestado más el rendimiento obtenido en 5 meses corresponde a 40.000.000, entonces:

$$x + (x \times 4\%) \times 5 = 48.000.000 \rightarrow x + x \frac{4}{100} \times 5 = 48.000.000$$

$$x + 0,2x = 48.000.000 \rightarrow 1,2x = 48.000.000 \rightarrow$$

$$x = \frac{48.000.000}{1,2} = 40.000.000$$

Respuesta:

El valor del capital prestado es de \$40.000.000

El precio de un artículo incluido el 19% de IVA es de \$46.172. ¿Cuál es el precio del producto sin incluir el IVA?

Solución:

Si X es el valor de artículo sin incluir el IVA; entonces, 19% X es el valor a pagar por el impuesto.

Si al valor del artículo sin incluir el IVA, se le suma el valor a pagar por el impuesto, se obtiene el valor del artículo incluido el IVA.

$$x + 19\%x = 46.172 \rightarrow x + 0,19x = 46.172 \rightarrow 1,19x = 46.172 \rightarrow x = \frac{46.172}{1,19} = 38.800$$

Respuesta

El valor del artículo sin incluir IVA, es de \$38.800.

El precio de un metro cuadrado de un terreno es de \$12.000. Obtener el valor de 4 Hectáreas de dicho terreno.

Solución:

Se calcula el número de metros cuadrados de 4 hectáreas y se multiplica este resultado por \$12.000.

$$4 \text{ Ha} = 4 \times 10.000 \text{ m}^2 = 40.000 \text{ m}^2$$

$$40.000 \times 12.000 = 480.000.000$$

Respuesta:

El precio de 4 hectáreas de terreno es de \$480.000.000.

El valor de un producto sin incluir el 19% de IVA es de \$130.000. El vendedor concede un descuento del 10%.

Calcular el valor del producto, así:

i) Aplicando primero el IVA y después el 10% de descuento

ii) Aplicando primero el descuento y después el IVA

Solución.

$$\text{i) } 130.000 + 130.000 \times 19\% = 130.000 + 130.000 \times (0,19) = 1,19 \times 130.000 = 154.700$$

Valor con IVA: 154.700

$$\text{Descuento: } 154.700 \times 10\% = 15.470$$

$$\text{Valor a pagar: } 154.700 - 15.470 = 139.230$$

$$\text{ii) } 130.000 - 130.000 \times 10\% = 130.000 - 130.000 \times (0,1) = (0,9) \times 130.000 = 117.000$$

Valor con descuento: 117.000

$$\text{Valor con IVA: } 117.000 + 117.000 \times 19\% = 117.000 + 117.000 \times (0,19) = 1,19 \times 117.000 = 139.230$$

Respuesta

i) El valor del producto incluyendo el IVA y aplicando después el descuento es: \$139.230

ii) El valor del producto aplicando el descuento y después el IVA es: \$139.230

Se observa que con los dos procedimientos se obtiene el mismo valor a pagar.

El valor de un producto es de \$250.500, pero tiene un descuento de 12%. Obtener el valor del producto con el descuento ofrecido.

Solución

$$250.500 - 250.500 \times 12\% = 250.500 - 250.500 \times (0,12) = 250.500 \times (0,88) = 220.440$$

Respuesta

El valor del producto realizando el descuento es \$220.450.

2.9 EVALUACIÓN CON RESPUESTA Y SUGERENCIAS

2.9.1 Operaciones con Números Racionales Fraccionarios

1. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{7}{10} + \frac{3}{2}$ es:

$$\frac{91}{30}$$

$$\frac{30}{91}$$

$$\frac{89}{30}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma de dos o más racionales fraccionarios. El resultado es $\frac{91}{30}$

2. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{5}{6}$ es:

– 5

5

$$\frac{5}{11}$$

R/ b

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma de dos o más racionales fraccionarios. El resultado es 5

3. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{7}{3} - \frac{7}{2} + \frac{7}{6}$ es:

$$\frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{6}$$

$$0$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma/diferencia de dos o más racionales fraccionarios. El resultado es 0

4. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{7}{3} + \frac{3}{7}$ es:

$$\frac{58}{21}$$

$$\frac{58}{10}$$

$$\frac{10}{21}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma de dos racionales fraccionarios. El resultado es $\frac{58}{21}$

5. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $-\frac{35}{3} + \frac{138}{3}$ es:

$$\frac{173}{3}$$

$$\frac{103}{3}$$

$$-\frac{4.830}{9}$$

R/ b

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma de dos racionales fraccionarios homogéneos. El resultado es $\frac{10}{3}$

6. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{9}{-4} + \frac{-2}{5}$, es:

$$\frac{7}{1}$$

$$\frac{18}{20}$$

$$-\frac{53}{20}$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma de dos racionales fraccionarios. Tener en cuenta también la ley de los signos en la multiplicación.

El resultado es $-\frac{53}{20}$

7. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{5}{-2} + \frac{-7}{3} + \frac{1}{-6}$ es:

$$-5$$

$$-\frac{1}{6}$$

$$-\frac{35}{36}$$

R/ a

Sugerencia. En este caso es conveniente reducir los fraccionarios a un común denominador, por ejemplo, el 6, y luego sumar los fraccionarios homogéneos operando únicamente los numeradores. El resultado es $-\frac{30}{6} = -5$

8. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{3}{5} - \frac{5}{3}$ es:

$$0$$

$$-\frac{16}{15}$$

$$-1$$

R/ b

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma (diferencia) de dos racionales fraccionarios. El resultado es $-\frac{16}{15}$

9. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $-\frac{35}{2} - \frac{138}{4}$ es:

$$52$$

$$\frac{52}{3}$$

$$-52$$

R/ c

Sugerencia. En este caso es mejor reducir los fraccionarios a un común denominador, como el 4 y luego sumar los fraccionarios homogéneos operando únicamente los numeradores. El resultado es:

$$-\frac{35}{2} - \frac{138}{4} = \frac{-35}{2} + \frac{-138}{4} = \frac{-70-138}{4} = \frac{-208}{4} = -52$$

10. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{9}{-4} - \frac{-2}{3}$ es:

$$-\frac{19}{12}$$

$$\frac{19}{12}$$

$$\frac{12}{19}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener la suma (diferencia) de dos racionales fraccionarios. El resultado es $-\frac{19}{12}$

11. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{5}{-2} - \frac{7}{3} - \frac{1}{6}$ es:

$$5$$

$$-5$$

$$\frac{5}{6}$$

R/ b

Sugerencia. En este caso es conveniente reducir los fraccionarios a un común denominador, como el 6 y luego restar los fraccionarios homogéneos operando únicamente los numeradores. El resultado es $-\frac{30}{6} = -5$

12. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{40}{9} \times \frac{81}{100}$ es:

$$18$$

$$\frac{5}{18}$$

$$\frac{18}{5}$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener el producto de dos racionales fraccionarios. Después de simplificar la fracción, el resultado es $\frac{18}{5}$

13. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{23}{-6} \times \frac{24}{300}$ es:

$$-\frac{46}{150}$$

$$\frac{23}{75}$$

$$\frac{23}{300}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener el producto de dos racionales fraccionarios. Después de simplificar la fracción, el resultado es $-\frac{46}{150}$

14. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{25}{-14} \times \frac{98}{-105}$ es:

$$\frac{123}{-119}$$

$$\frac{5}{3}$$

$$\frac{123}{119}$$

R/ b

Sugerencia. Recuerde la fórmula para obtener el producto de dos racionales fraccionarios. Después de simplificar la fracción, el resultado es $\frac{5}{3}$

15. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{3}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{-5}{2}$ es:

$$\frac{105}{8}$$

$$\frac{105}{2}$$

$$-\frac{105}{8}$$

R/ c

Sugerencia. Se realiza la multiplicación de tres números racionales fraccionarios. La respuesta correcta es $-\frac{105}{8}$

16. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{45}{8} \div \frac{75}{48}$ es:

$$\frac{18}{5}$$

$$\frac{120}{56}$$

$$\frac{3.375}{384}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde que está dividiendo números fraccionarios. La respuesta correcta es $\frac{18}{5}$

17. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\frac{\frac{70}{-48}}{\frac{-770}{8}}$ es:

$$-\frac{1}{66}$$

$$\frac{1}{66}$$

$$66$$

R/ b

Sugerencia. Recuerde que está dividiendo números fraccionarios. Tener en cuenta la ley de los signos en la multiplicación y la simplificación de racionales fraccionarios. La respuesta correcta es $\frac{1}{66}$

18. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\left(\frac{9}{80} \div \frac{-10}{210}\right) \div \frac{81}{-42}$ es:

$$\frac{-729}{160}$$

$$\frac{729}{160}$$

$$\frac{49}{40}$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde que está dividiendo números fraccionarios. Tener en cuenta que primero se opera lo que está asociado, en este caso con corchetes. Realizando simplificaciones, la respuesta correcta es $\frac{49}{40}$

19. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $\left(\frac{25}{49} + \frac{3}{7}\right) \times \left(\frac{40}{3} - \frac{65}{6}\right) - 70$ es:

$$-\frac{3.315}{49}$$

$$\frac{3315}{49}$$

$$3.315$$

R/ a

Sugerencia. Primero se opera lo que está asociado, en este caso los corchetes, en los cuales hay una suma y diferencia de racionales. La respuesta correcta simplificando las fracciones, es $-\frac{3.315}{49}$

20. El resultado de efectuar las operaciones en la expresión: $450 - \left(\frac{6}{5} + \frac{3}{4}\right) \times \frac{20}{13} + \left(\frac{\frac{1}{2}}{48} \div \frac{1}{6}\right)$ es:

450

$$\frac{7.153}{16}$$

$$\frac{450}{16}$$

R/ b

Sugerencia. Primero se opera lo que está asociado; después se realiza las divisiones, multiplicaciones; se calcula luego sumas y restas. En fracciones es conveniente simplificar cuando sea posible. La respuesta correcta es: $\frac{7.153}{16}$

2.9.2 Conversión de Números Mixtos a Fraccionarios

1. El número mixto $20\frac{3}{4}$ en notación fraccionaria queda así:

$$\frac{23}{4}$$

$$\frac{83}{4}$$

$$\frac{60}{4}$$

R/ b

Sugerencia. Se multiplica el número entero por el denominador, a este resultado sumarle el numerador y se deja el mismo denominador. La respuesta es $\frac{83}{4}$

2. El número mixto $10\frac{1}{2}$ en notación fraccionaria queda así:

$$\frac{21}{2}$$

$$\frac{11}{2}$$

$$\frac{10}{2}$$

R/ a

Sugerencia. Se multiplica el número entero por el denominador, a este resultado sumarle el numerador y se deja el mismo denominador. La respuesta es $\frac{21}{2}$

3. El número mixto $1\frac{1}{2}$ en notación fraccionaria queda así:

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{2}$$

R/ c

Sugerencia. Se multiplica el número entero por el denominador, a este resultado sumarle el numerador y se deja el mismo denominador. La respuesta es $\frac{3}{2}$

4. El número mixto $-15\frac{2}{5}$ en notación fraccionaria queda así:

$$-\frac{77}{5}$$

$$\frac{77}{5}$$

$$-\frac{30}{5}$$

R/ a

Sugerencia. Se multiplica el número entero 15 por el denominador, a este resultado sumarle el numerador y se deja el mismo denominador. La respuesta es $-\frac{77}{5}$

5. El número mixto $15\frac{1}{3}$ en notación fraccionaria queda así:

$$\frac{15}{3}$$

$$\frac{46}{3}$$

$$\frac{18}{3}$$

R/ b

Sugerencia. Se multiplica el número entero por el denominador, a este resultado sumarle el numerador y se deja el mismo denominador. La respuesta es $\frac{46}{3}$

2.9.3 Conversión de Porcentajes a Números Fraccionarios

1. La expresión 70% en forma fraccionaria es igual a:

$$\frac{70}{10}$$

$$\frac{7}{20}$$

$$\frac{7}{10}$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$. Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{x}{100}$.

2. La expresión 6,25% en forma fraccionaria es igual a:

$$\frac{1}{16}$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\frac{25}{16}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$. Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{x}{100}$.

3. La expresión 12% en forma fraccionaria es igual a:

$$\frac{4}{25}$$

$$\frac{3}{25}$$

$$\frac{2}{25}$$

R/ b

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$. Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{x}{100}$.

4. La expresión 19% en forma fraccionaria es igual a:

$$\frac{9}{10}$$

$$\frac{19}{10}$$

$$\frac{19}{100}$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$. Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{x}{100}$

5. La expresión 16% en forma fraccionaria es igual a:

$$\frac{4}{25}$$

$$\frac{16}{10}$$

$$\frac{16}{5}$$

R/ a

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$. Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{x}{100}$

6. La expresión 1,5% en forma fraccionaria es igual a:

$$\frac{7}{20}$$

$$\frac{7}{10}$$

$$\frac{3}{100}$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$. Si es posible, se simplifica la fracción $\frac{x}{100}$

2.9.4 Conversión de Porcentajes a Notación Decimal

1. La expresión 70% en notación decimal es igual a:

$$7$$

$$0,07$$

$$0,7$$

R/ c

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$ fracción que se debe expresar en notación decimal

2. La expresión 6,25% en notación decimal es igual a:

0,0625

0,00625

0,625

R/ a

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$ fracción que se debe expresar en notación decimal.

3. La expresión 12% en notación decimal es igual a:

1,2

0,12

1,20

R/ b

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$ fracción que se debe expresar en notación decimal.

4. La expresión 19% en notación decimal es igual a:

1,9

1,90

0,19

R/ c

Sugerencia. Recuerde que $x\%$ es igual a $\frac{x}{100}$ fracción que se debe expresar en notación decimal.

2.9.5 Conversión de Fraccionarios o Decimales a Porcentajes

1. El número $\frac{3}{4}$ en notación con porcentaje es igual a:

75%

70%

60%

R/ a

Sugerencia. $\frac{3}{4}=0,75=\frac{75}{100}=75\%$

2. El número $\frac{3}{8}$ en notación con porcentaje es igual a:

75%

37,5%

80%

R/ b

Sugerencia. $\frac{3}{8}=0,375=\frac{0,375 \times 100}{100} = \frac{37,5}{100} = 37,5\%$

3. El número decimal 1,12 en notación con porcentaje es igual a:

11,2%

0,112%

112%

R/ c

Sugerencia. $1,12 = \frac{1,12 \times 100}{100} = \frac{112}{100} = 112\%$

4. El número decimal 0,19 en notación con porcentaje es igual a:

19%

1,9%

0,19%

R/ a

Sugerencia. $0,19 = \frac{0,19 \times 100}{100} = \frac{19}{100} = 19\%$

5. El número decimal 0,08 en notación con porcentaje es igual a:

0,8%

8%

80%

R/ b

Sugerencia. $0,08 = \frac{0,08 \times 100}{100} = \frac{8}{100} = 8\%$

2.9.6 Operaciones con Porcentajes y Fraccionarios

1. Seleccionar la respuesta correcta. Las dos quintas partes de 12155 es igual a:

4862

2431

24310

R/ a

Sugerencia. Las dos quintas partes de una cantidad, se obtiene multiplicando $\frac{2}{5}$ por la cantidad.

2. Seleccionar la respuesta correcta, Las tres cuartas partes de 15.729.148 es igual a:

3.932.287

11.796.861

47.187.444

R/ b

Sugerencia. Las tres cuartas partes de una cantidad se obtiene multiplicando $\frac{3}{4}$ por la cantidad.

3. Seleccionar la respuesta correcta. El 75% de 15.729.148 es igual a:

47.187.444

3.932.287

11.796.861

R/ c

Sugerencia. $75\% \times 15.729.148 = \frac{75}{100} \times 15.729.148 = 11.796.861$

4. Seleccionar la respuesta correcta, La mitad del 50% de 400 es igual a:

100

200

300

R/ a

Sugerencia. $\frac{1}{2} \times \frac{50}{100} \times 400 = 100$.

5. Seleccionar la respuesta correcta. Las tres quintas partes del 25% de 45.588.120, es igual a:

11.397.030

6.838.218

2.279.406

R/ b

Sugerencia. $\frac{3}{5} \times \frac{25}{100} \times 45.588.120 = 6.838.218$

2.9.7 Cálculo de MCD y de MCM

1. El MCM (5, 2) es igual a:

10

1

2

R/ a

Sugerencia. El primero, el menor, de los múltiplos comunes de 2 y 5 es 10

2. El MCM (5, 3) es igual a:

1

15

3

R/ b

Sugerencia. El primero, el menor, de los múltiplos comunes de 3 y 5 es 15

3. El MCM (5, 3, 2) es igual a:

15

1

30

R/ c

Sugerencia. El primero, el menor, de los múltiplos comunes de 2, 3 y 5 es 30

4. El MCD (24, 72), es igual a:

72

24

1

R/ b

Sugerencia. El último, el mayor, de los divisores comunes de 24 y 72 es 24. Tener en cuenta que 24 es divisor de 72

5. El MCD (42, 294), es igual a:

1

294

42

R/ c

Sugerencia. El mayor de los divisores comunes de 42 y 294 es 42. Tener en cuenta que 42 es divisor de 294

6. El MCD (4032, 3132), es igual a:

36

18

9

R/ a

Sugerencia. Aplicando propiedades:

$$\text{MCD}(4032, 3132) = 4 \times \text{MCD}(1008, 783) = 4 \times 9 \times \text{MCD}(112, 87) = 36 \times 1 = 36$$

112 y 87 no tienen factores primos comunes, luego, $\text{MCD}((112, 87)) = 1$

7. El MCD (1, 7, 2, 4) es igual a:

7

1

28

R/ b

Sugerencia. El único divisor común positivo de 1, 7, 2, 4 es 1; luego $\text{MCD}(1, 7, 2, 4) = 1$

8. El MCM (1, 7, 2, 4), es igual a:

1

7

28

R/ c

Sugerencia. Los factores primos comunes de 7, 2 y 4 son: 2, 2 y 7, luego $\text{MCM}(7, 2, 4) = 28 = \text{MCM}(1, 7, 2, 4)$

9. El $\text{MCM}(3.024, 5.184)$, es igual a:

36.288

5.184

3.024

R/ a

Sugerencia. Aplicando propiedades:

$$\text{MCM}(3.024, 5.184)$$

$$= 4 \times \text{MCM}(756, 1296)$$

$$= 4 \times 9 \times \text{MCM}(84, 144)$$

$$= 4 \times 9 \times 4 \times \text{MCM}(21, 36)$$

$$= 4 \times 9 \times 4 \times 3 \times \text{MCM}(7, 12)$$

$$= 4 \times 9 \times 4 \times 3 \times 7 \times 12$$

$$= 36.288$$

4 es divisor común de 3.024 y 5.184; 9 es divisor común de 756, 1.296; 4 es divisor común de 84 y 144; 3 es divisor común de 21 y 36.

Los factores primo comunes y no comunes de 7 y 12 son: 2, 2, 3 y 7.

Entonces, $\text{MCM}(7, 12) = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 12 \times 7 = 84$

10. El $\text{MCD}(3.024, 5.184)$, es igual a:

3.024

432

5.184

R/ b

Sugerencia. Aplicando propiedades:

$$\text{MCD}(3.024, 5.184)$$

$$= 4 \times \text{MCD}(756, 1.296)$$

$$= 4 \times 9 \times \text{MCD}(84, 144)$$

$$= 4 \times 9 \times 4 \times \text{MCD}(21, 36)$$

$$= 4 \times 9 \times 4 \times 3 \times \text{MCD}(7, 12)$$

$$= 4 \times 9 \times 4 \times 3 \times 1$$

$$= 432$$

4 es divisor común de 3.024 y 5.184; 9 es divisor común de 756, 1.296; 4 es divisor común de 84 y 144; 3 es divisor común de 21 y 36.

El único divisor común de 7 y 12 es 1.

Entonces, $\text{MCD}(7, 12) = 1$.

11. Si $\text{MCD}(a, b) = 300$ y 10 es divisor de a, b , entonces $\text{MCD}\left(\frac{a}{10}, \frac{b}{10}\right)$ es igual a:

10

1

30

R/ a

Sugerencia. Se debe aplicar la propiedad: $\text{MCD}(a, b) = d$, y k es divisor de a y b , entonces, $\text{MCD}\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{d}{k}$

12. Si $\text{MCM}(a, b) = 500$, y 10 es divisor de a, b , entonces $\text{MCM}\left(\frac{a}{10}, \frac{b}{10}\right)$ es igual a:

5

50

500

R/ b

Sugerencia. Se debe aplicar la propiedad: $\text{MCM}(a, b) = m$, y k es divisor de a y b , entonces, $\text{MCM}\left(\frac{a}{k}, \frac{b}{k}\right) = \frac{m}{k}$.

CAPÍTULO 3.

Introducción al Álgebra

CAPÍTULO 3

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

3.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es una representación escrita que combina símbolos matemáticos, números, letras, signos de operación, de agrupación, de relación, entre otros.

Ejemplos:

Son expresiones algebraicas:

$$3x \quad 2x - 8 \quad (x - 7) + z \quad \frac{3}{4}x + 10 = x\sqrt{4x - 7} = 2 \quad ax + by < 1$$

Términos. En una expresión algebraica se distinguen los términos, los cuales están separados entre sí por los signos de operación más o menos: $+$ o $-$

La anterior afirmación no es una definición, sino, una forma intuitiva de concebir lo que es un término algebraico.

Ejemplos:

Las expresiones que siguen pueden ser consideradas términos de una expresión algebraica:

$$10x, ax^2, 2axyz, 345, \frac{a}{5}xyz^2, \frac{ax - by}{10}, \sqrt{10a}, \sqrt{x^2 - 16}, \frac{\sqrt{ax + by}}{20}$$

Nota

Cuando una expresión está agrupada con paréntesis, corchetes o llaves, en sí misma, se considera que es un término; inclusive, el signo radical, la barra horizontal de la división, se los considera, en cierta forma, como signos de agrupación.

En la expresión $a + b + c + d$ hay cuatro términos; pero en $(a + b) + (c + d)$, hay dos términos: $(a + b)$ y $(c + d)$.

En la expresión $x^{a+b} + y^c$ hay dos términos, el primer término es x^{a+b} y en su exponente hay dos términos a y b

Variables

Letras tales como: x, y, z, u, v, w se las utiliza como variables, es decir, que pueden tomar distintos valores en la misma expresión. En ciertas expresiones, como las ecuaciones, estas letras se las denomina incógnitas, variables, esto porque representan cantidades o valores desconocidos.

Una letra con subíndices, también puede representar variables, así: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$

Constantes

Letras como a, b, c, d , entre otras, se las emplea como coeficientes de variables o para la generalización de ciertas expresiones; toman valores constantes o fijos, es decir, representan valores particulares de ellas, con lo cual, se obtiene una expresión en particular.

Ejemplos:

La expresión $ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$, en general, es un polinomio de segundo grado o de grado 2, conocido como polinomio cuadrático, donde x es la variable; a, b son coeficientes y c es término independiente.

Si se asigna arbitrariamente valores constantes (fijos) para a, b, c , se obtiene una expresión cuadrática particular.

Así, para $a = 5, b = -7$ y $c = 10$, se obtiene: $5x^2 - 7x + 10$

En la expresión $200x^2 + 35x - 30$, se tiene que $a = 200, b = 35$ y $c = -30$

3.2 POLINOMIOS**3.2.1 Conceptos**

Una expresión algebraica con uno, dos o más términos, donde los exponentes de la variable son números enteros positivos, se denomina polinomio.

Monomio. Es una expresión algebraica con un solo término. Ejemplos: $100, 45x, abc, x^{2+b}y^3, 2ax^3$

Binomio. Es una expresión algebraica con dos términos. Ejemplos: $x + y, 25 - 9y^2, (x + y) + z, a^3 - b^3$

Trinomio. Es una expresión algebraica con tres términos. Ejemplos: $4x^2 - 12x + 9, x + y + z$

La expresión: $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 10$ es un polinomio con cinco términos.

La expresión $(x + y)^2$ es el cuadrado de un binomio; $a^3 - b^3$ es una diferencia de cubos.

La expresión $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ es una igualdad (identidad) en la cual, el primer miembro es el cuadrado de un binomio y el segundo miembro es un trinomio.

Nota

Una identidad es una igualdad, la cual se cumple para valores arbitrarios de sus variables.

Son ejemplos de identidades, las siguientes:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \text{ (diferencia de cubos)}$$

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ (identidad trigonométrica).}$$

La anterior identidad trigonométrica, se cumple para cualquier valor real de x (x expresado en radianes o en grados sexagesimales)

Términos semejantes

Son aquellos que tienen las mismas variables y con igual exponente.

Ejemplos:

$$20x^2y, \frac{2}{3}x^2y, x^2y, -x^2y$$

Término entero. Es aquel que no tiene variables en el denominador. Ejemplos:

$$10x, \frac{1}{5}y, \frac{xy}{4}$$

Término fraccionario. Es aquel que tiene una o más variables en el denominador.

Ejemplos: $\frac{40}{x}, \frac{x+y}{3x}, \frac{2a+8}{x-3y}$

Término racional. Es aquel que no tiene variables en radicales. Los ejemplos anteriores, corresponden a términos racionales.

Grado de un término. El grado de un término entero respecto a una variable, es el exponente entero no-negativo de dicha variable. Se lo llama también grado relativo.

El término $50x^2z^3$ es de grado 2 respecto a x y de grado 3 respecto a z

$3xyz$ es de grado 1 respecto a x , grado 1 respecto a y , de grado 1 respecto a z

Grado absoluto de un término entero. Es la suma de los grados de sus variables.

El grado absoluto de $80ax^2y^3z$ es $2 + 3 + 1 = 6$

El grado absoluto de $80ax^2y^3z$ es $2 + 3 + 1 = 6$

El grado absoluto de $12abxy^4z^3$ es 8

Términos homogéneos. Son los que tienen igual grado absoluto.

Ejemplos. $60x^4yz^2, -\frac{3}{5}x^2y^2z^3$

Términos heterogéneos. Son los que tienen diferente grado absoluto.

Ejemplos. $60x^5yz^2, -\frac{3}{5}x^2y^4z^3$

Un polinomio es entero cuando todos sus términos son enteros; es fraccionario cuando al menos tiene un término fraccionario.

El grado de un polinomio entero respecto a una variable, es el mayor exponente entero positivo de dicha variable.

El grado del polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^3$ es 4 respecto a x y 3 respecto a y

Un polinomio entero está completo respecto a una variable, cuando la variable forma parte de todos sus términos, con exponente entero no negativo, desde cero hasta el correspondiente al grado del polinomio.

Ejemplos:

$$8x^3 + 10x^2 - 6x + 15$$

$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 1$. Este polinomio es completo respecto a x pero también respecto a y .

Un polinomio entero está ordenado en forma ascendente respecto a una variable, cuando los exponentes enteros no negativos de la variable, están en orden de mayor a menor; en caso contrario queda ordenado en forma descendente.

El polinomio $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ está ordenado en forma descendente respecto a x ; pero ascendente respecto a y .

El polinomio $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ está ordenado en forma descendente respecto a x , pero ascendente respecto a y .

Reducción de términos semejantes. Es un proceso que consiste en operar con sus coeficientes y a este resultado agregar la misma parte variable.

Ejemplos:

$$30x + 45x = (30 + 40)x = 75x$$

$$10x - 8x = (10 - 8)x = 2x$$

$$43x - 60x = (43 - 60)x = -17x$$

$$-25x^2 - 16x^2 = (-25 - 16)x^2 = -41x^2$$

$$-54xy + 10xy + 4xy = (-54 + 10 + 4)xy = -40xy$$

$$14x + 15x - 10x^2 - 11x^2 = (14 + 15)x + (-10 - 11)x^2 = 29x + (-21)x^2 = 29x - 21x^2$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}xy - \frac{5}{2}xy + \frac{7}{4}x^3y^2 + 10x^3y^2 - 6xy &= \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 6\right)xy + \left(\frac{7}{4} + 10\right)x^3y^2 \\ &= \frac{-47}{6}xy + \frac{47}{4}x^3y^2 \end{aligned}$$

3.2.2 Polinomios con una Variable

Interesa, sobre todo, polinomios enteros con una variable real (o en general compleja), con coeficientes reales (complejos), de grado n , que son de la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = p(x) \text{ donde } a_n \neq 0$$

La variable es x ; $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, son los coeficientes; a_0 es el término independiente, esto porque no es coeficiente de x . Dado que $x^0 = 1$, cuando $x \neq 0$, entonces se puede considerar que $a_0 = a_0x^0$

La expresión: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$ se denomina ecuación polinómica de grado n .

Polinomio de grado cero. Un polinomio $p(x) = k$, donde k es un real fijo, es decir, es una constante, es un polinomio de grado cero. Cualquier número real, incluyendo el cero, se puede considerar que es un polinomio de grado cero.

Polinomio de grado uno. Un polinomio $p(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$, es de grado uno. En este caso, se dice también que $p(x)$ es un polinomio lineal.

La igualdad $ax + b = 0$ es una ecuación polinómica de grado uno o una ecuación lineal.

Polinomio de grado dos. Un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$ donde $a \neq 0$, es de grado dos. En este caso se dice también que $p(x)$ es un polinomio cuadrático.

La igualdad $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación polinómica de grado dos o una ecuación cuadrática.

Polinomio de grado tres. Un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donde $a \neq 0$, es de grado tres. En este caso, se dice también que $p(x)$ es un polinomio cúbico.

La igualdad $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ es una ecuación polinómica de grado tres o una ecuación cúbica.

3.2.3 Operaciones con Polinomios

3.2.3.1 Adición y sustracción

Para obtener la suma o la diferencia de polinomios, simplemente se reduce términos semejantes. No es necesario que tengan igual grado, que sean completos o que estén ordenados; pero, sí es conveniente hacerlo en forma ascendente o descendente.

Ejemplos:

1) Sean los polinomios $p(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ siguientes:

$$p(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 9; q(x) = 25 + 30x - 15x^2 + 80x^3; r(x) = 23x + 50 - 18x^4 + 70x^3$$

Determinar los polinomios $p(x) + q(x)$, $q(x) + r(x)$, $p(x) - r(x)$, $p(x) - q(x)$, $p(x) - q(x) - r(x)$

Solución

$$p(x) + q(x) = (3 + 80)x^3 + (-8 - 15)x^2 + (7 + 30)x + (-9 + 25) \\ = 83x^3 - 23x^2 + 37x + 16$$

$$q(x) + r(x) = (25 + 50) + (30 + 23)x + (-15)x^2 + (80 + 70)x^3 + (-18)x^4 \\ = 5 + 53x - 15x^2 + 150x^3 - 18x^4$$

$$p(x) - r(x) = -(-18)x^4 + (3 - 70)x^3 - 8x^2 + (7 - 23)x + (-9 - 50) \\ = 18x^4 - 67x^3 - 8x^2 - 16x - 59$$

$$p(x) - q(x) = (3 - 80)x^3 + (-8 + 15)x^2 + (7 - 30)x + (-9 - 25) \\ = -77x^3 + 7x^2 - 23x - 34$$

$$p(x) - q(x) - r(x) \\ = 18x^4 + (3 - 80 - 70)x^3 + (-80 + 15)x^2 + (7 - 30 - 23)x \\ + (-9 - 25 - 50) = 18x^4 - 147x^3 + 7x^2 - 46x - 84$$

2) Simplificar la siguiente expresión: $(3x^3 - 8x^2 + 7x - 9) + (9x - 5x^2 + 8x^3 - 12)$

Solución

$$(3x^3 - 8x^2 + 7x - 9) + (9x - 5x^2 + 8x^3 - 12) \\ = (3 + 8)x^3 + (-8 - 5)x^2 + (7 + 9)x + (-9 - 12) \\ = 11x^3 - 13x^2 + 16x - 21$$

3.2.3.2 Propiedades o leyes de los exponentes**Nota.**

La expresión a^n es una potencia de a ; n es el exponente, a es la base.

Notaciones: $a \times b = a \cdot b = a * b = ab$

Producto de potencias de la misma base: $a^n \times a^m = a^{n+m}$ Se escribe la base y se suma los exponentes

Producto de potencias de igual exponente: $a^n \times b^n = (a \times b)^n$ Se multiplica las bases y se deja el exponente

Cociente de potencias de la misma base: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ Se deja la base y se resta los exponentes

Cociente de potencias de igual exponente: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ Se divide las bases y se deja el exponente

Potencia de una potencia: $(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm}$ Se escribe la base y se multiplica los exponentes

Además, se cumple que $a^1 = a$

Para todo número real $a, a \neq 0$, se cumple que $a^0 = 1$

$$\text{También } \sqrt[n]{a} = (a)^{1/n} \quad \sqrt[n]{a^m} = (a)^{m/n}$$

Ejemplos:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \text{ equivalentemente, } a^{n+m} = a^n \times a^m$$

$$z^2 \times z^5 = z^{2+5} = z^7 \quad x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{2}} = x^2 \quad x^5 x^{-2} = x^{5-2} = x^3$$

$$890^3 \times 890^{-2} = 890^{3-2} = 890^1 = 890$$

$$6^{10} \times 6^5 \times 6^{-13} = 6^{10+5-13} = 6^2 = 36$$

$$2.340^{\frac{1}{2}} \times 2.340^{\frac{1}{3}} \times 2.340^{\frac{1}{6}} = 2.340^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 2.340^{\frac{3+2+1}{6}} = 2.340^1 = 2.340$$

$$a \times a \times a \times a = a^{1+1+1+1} = a^4$$

$$a^5 a^{-8} a^6 a^{-3} = a^{5-8+6-3} = a^0 = 1, \text{ se assume que } a \neq 0$$

$$x^7 = x^{5+2} = x^5 x^2$$

$$x^7 = x^6 x^1 = x^4 x^3 = x^5 x^2$$

$$a^n \times b^n = (a \times b)^n; \text{ equivalentemente } (a \times b)^n = a^n \times b^n$$

$$5^2 \times 10^2 = (5 \times 10)^2 = 2.500$$

$$5^2 \times 10^2 = (5 \times 10)^2 = 50^2 = 2.500$$

$$a^3 b^3 = (ab)^3 \rightarrow \left(\frac{1}{500}\right)^3 (1000)^3 = \left(\frac{1000}{500}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$(a^2)^3 b^3 = (a^2 b)^3$$

$$(a^k)^n \times (b^h)^n = (a^k \times b^h)^n$$

$$(5^k)^n \times (a^3)^n \times (b^2)^n = (5^k \times a^3 \times b^2)^n$$

$$(ab)^3 = a^3 b^3 \rightarrow (2ab)^3 = 2^3 a^3 b^3 = 8a^3 b^3$$

$$(6 \times a^3 \times b^2)^3 = 6^3 (a^3)^3 (b^2)^3 = 216a^9 b^6$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3 \quad \frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2} \quad \frac{b^4}{b^3} = b^{4-3} = b^1 = b$$

$$\frac{20.340^{35}}{20.340^{34}} = 20.340^{35-34} = 20.340^1 = 20.340$$

$$\frac{250^{40}}{250^{41}} = 250^{40-41} = 250^{-1} = \frac{1}{250}$$

Nota.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\frac{1}{5^{-3}} = 5^{-(-3)} = 5^3 = 125$$

$$100 \times 2^{-5} = \frac{100}{2^5} = \frac{100}{32} = \frac{25}{8}$$

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{100^4}{5^4} = \left(\frac{100}{5}\right)^4 = 20^4 = 160.000$$

$$\frac{360^5}{180^5} = \left(\frac{360}{180}\right)^5 = 2^5 = 32$$

$$\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{8^4} = 8^{\frac{4}{2}} = 8^2 = 64 \quad \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt[3]{12^3} = 12^{\frac{3}{3}} = 12^1 = 12$$

3.2.3.3 Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada término del uno por cada término del otro y, luego, si es el caso, se reduce términos semejantes, seleccionado un orden, descendente o ascendente.

Ejemplos:

$$(x + 4)(x + 3) = x(x + 3) + 4(x + 3) = x^2 + 3x + 4x + 3 = x^2 + 7x + 12$$

$$(3x + 2)(x + 5) = 3x(x + 5) + 2(x + 5) = 3x^2 + 15x + 2x + 10 \\ = 3x^2 + 17x + 10$$

$$(5x - 2)(2x^2 + 3x - 6) = 5x(2x^2 + 3x - 6) + (-2)(2x^2 + 3x - 6) \\ = (5x)(2x^2) + (5x)(3x) + (5x)(-6) + (-2)(2x^2) + (-2)(3x) \\ + (-2)(-6) = 10x^3 + 15x^2 - 30x - 4x^2 - 6x + 12 \\ = 10x^3 + 11x^2 - 36x + 12$$

$$(7x^3 - 5x + 10)(10x^2 + 2) \\ = (7x^3)(10x^2) + (-5x)(10x^2) + (10)(10x^2) + (7x^3)(2) \\ + (-5x)(2) + (10)(2) = 70x^5 - 50x^3 + 100x^2 + 14x^3 - 10x + 20 \\ = 70x^5 + (-50 + 14)x^3 + 100x^2 - 10x + 20 \\ = 70x^5 - 36x^3 + 100x^2 - 10x + 20$$

$$\begin{aligned}
 (x+4)(x+3)(8x-5) &= (x^2+7x+12)(8x-5) \\
 &= (x^2)(8x) + (7x)(8x) + (12)(8x) + (x^2)(-5) + (7x)(-5) \\
 &\quad + (12)(-5) = 8x^3 + (56-5)x^2 + (96-35)x - 60 \\
 &= 8x^3 + 51x^2 + 61x - 60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1,2x + 0,4x^2)(10x^3 - 8x) &= (1,2x + 0,4x^2)(10x^3) + (1,2x + 0,4x^2)(-8x) \\
 &= (1,2x)(10x^3) + (0,4x^2)(10x^3) + (1,2x)(-8x) + (0,4x^2)(-8x) \\
 &= 12x^4 + 4x^5 - 9,6x^2 - 3,2x^3 = 4x^5 + 12x^4 - 3,2x^3 - 9,6x^2
 \end{aligned}$$

3.2.3.4 División de polinomios

La división de polinomios tiene trascendencia por los resultados que de ella se obtiene, sobre todo, cuando se divide por un polinomio lineal. Los procesos realizados en la división permiten factorizar el polinomio y obtener ciertos valores de la variable llamados raíces, y de paso, las soluciones de una ecuación polinómica.

3.2.3.4.1 Algoritmos de la división

Dado un polinomio $p(x)$ de grado n y un polinomio $s(x)$ de grado m , tales que $n \geq m$; entonces, existe un polinomio $q(x)$ llamado cociente y un polinomio $r(x)$ llamado resto o residuo, tales que:

$$p(x) = s(x)q(x) + r(x) \text{ donde } 0 \leq \text{grado } r(x) < m$$

La anterior expresión se conoce como algoritmo de la división de polinomios.

Proceso de la división

Se realizan los siguientes pasos:

Se ordenan $p(x)$ y $s(x)$ en forma descendente

Se divide el primer término de $p(x)$ entre el primer término de $s(x)$; este resultado es el primer término del polinomio cociente $q(x)$.

Se multiplica el primer término del cociente por $s(x)$ y este polinomio resultante se resta a $p(x)$. Para esto, se escribe este polinomio resultante, cambiando de signo a sus términos, debajo de $p(x)$ y se reduce términos semejantes; obteniendo de esta forma un polinomio $p_1(x)$, ordenado también en forma descendente.

Si el grado de $p_1(x)$ es mayor o igual a m , se divide el primer término de $p_1(x)$ entre el primer término de $s(x)$ y este resultado es el segundo término del polinomio cociente $q(x)$.

Se multiplica el segundo término del cociente por $s(x)$ y este polinomio resultante se resta a $p_1(x)$. Se escribe este polinomio resultante cambiando de signo a sus términos, debajo de $p_1(x)$ y se reduce términos semejantes;

obteniendo de esta forma un polinomio $p_2(x)$, ordenado también en forma descendente.

Si el grado de $p_2(x)$ es mayor o igual a m , se divide el primer término de $p_2(x)$ entre el primer término de $s(x)$ y este resultado es el tercer término del polinomio cociente $q(x)$; y se continúa el proceso tal como en los casos anteriores.

El proceso termina cuando se obtiene un polinomio $p_k(x)$ de grado menor que m . Este polinomio $p_k(x)$, constituye el polinomio residuo $r(x)$.

Ejemplos:

Dividir: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre:

$$\begin{array}{lllll} \text{a) } s(x) = x + 5 & \text{b) } s(x) = x + 4 & \text{c) } s(x) = 3x - 4 & \text{d) } s(x) = x - 5 & \text{e) } s(x) = 2x + 3 \end{array}$$

Solución

Como $p(x)$ y $s(x)$ están ordenados en forma descendente, entonces, se divide $2x^3$ entre x .

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 43x - 60 \quad \overline{) \quad x + 5} \\ - 2x^3 - 10x^2 \quad \underline{2x^2 - 9x + 2} \\ \hline P_1(x) = -9x^2 - 43x - 60 \\ 9x^2 + 45x \quad \underline{} \\ \hline P_2(x) = 2x - 60 \\ -2x - 10 \quad \underline{} \\ \hline P_3(x) = -70 = R(x) \end{array}$$

El resultado es $2x^2$ y es el primer término del cociente.

Se multiplica $2x^2$ por $x + 5$, lo cual resulta $2x^3 + 10x^2$

Este polinomio se resta a $p(x)$, lo cual equivale a cambiarle de signo y sumar con $p(x)$. Se reduce términos semejantes y se obtiene el polinomio: $p_1(x) = -9x^2 - 43x - 60$

Como $p_1(x)$ es de grado 2 y $x + 5$ es de grado 1, entonces se, procede a dividir tal como en el proceso anterior; aplicando el paso 5) y el paso 6)

Como $p_3(x) = -70$ es de grado cero, entonces termina la división y -70 es el resto o residuo $r(x)$.

El cociente es $q(x) = 2x^2 - 9x + 2$

Según el algoritmo de la división, se tiene que: $p(x) = (x + 5)(2x^2 - 9x + 2) + (-70)$

Dividir: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x + 4$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + x^2 - 43x - 60 & x + 4 \\
 - 2x^3 - 8x^2 & 2x^2 - 7x - 15 \\
 \hline
 P_1(x) = -7x^2 - 43x - 60 & \\
 7x^2 + 28x & \\
 \hline
 P_2(x) = -15x - 60 & \\
 15x + 60 & \\
 \hline
 P_3(x) = 0 = R(x) \text{ (Residuo)} &
 \end{array}$$

$$\text{Cociente: } 2x^2 - 7x - 15$$

Según el algoritmo de la división, se tiene que: $p(x) = (x + 4)(2x^2 - 7x - 15) + 0 = (x + 4)(2x^2 - 7x - 15)$, por lo cual, $p(x)$ queda factorizado.

Dividir: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $c) S(x) = 3x - 4$

$$\begin{array}{r|l}
 2x^3 + x^2 - 43x - 60 & 3x - 4 \\
 - 2x^3 + \frac{8}{3}x^2 & \frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27} \\
 \hline
 p_1(x) = \frac{11}{3}x^2 - 43x - 60 \\
 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{44}{9}x & \\
 \hline
 p_2(x) = -\frac{343}{9}x - 60 \\
 \frac{342}{9}x - \frac{1.372}{27} & \\
 \hline
 p_3(x) = -\frac{2.992}{27} = R(x) \\
 q(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27} &
 \end{array}$$

En este caso se cumple que:

$$p(x) = (3x - 4) \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27} \right) + \left(-\frac{2.992}{27} \right)$$

En este caso, $p(x)$ no está factorizado.

3.2.3.4.2 División Sintética o método de coeficientes separados

Se aplica cuando se divide un polinomio $p(x)$ de grado n , entre un polinomio lineal $s(x) = ax + b$ (Observe que $\text{grado } s(x) = 1$)

Según el algoritmo de la división, el cociente $q(x)$ queda de grado $n - 1$ y $0 \leq \text{grado } r(x) < 1$, en consecuencia, $\text{grado } r(x) = 0$. Según esto, $r(x)$ es un número real, incluido cero. Este hecho se puede observar en los tres ejemplos anteriores. Por tanto, Luego, $r(x)$ es un número real, que se puede representar por r .

Ahora, para realizar la división entre un polinomio lineal, se utiliza un proceso simplificado, llamado División Sintética o método de coeficientes separados.

Pasos

Se ordena en forma descendente $p(x)$ y se escribe únicamente sus coeficientes.

Se baja el primer coeficiente y se multiplica por $-\frac{b}{a}$. Este resultado se suma con el segundo coeficiente de $p(x)$

Se multiplica el resultado anterior por $-\frac{b}{a}$ y este producto se suma con el tercer coeficiente de $p(x)$.

Se multiplica el resultado del paso anterior por $-\frac{b}{a}$ y este producto se suma con el cuarto coeficiente de $p(x)$.

Se continúa hasta obtener la suma del último coeficiente de $p(x)$. con el último producto con $-\frac{b}{a}$. Esta última suma, es el residuo.

Se divide por a el primer coeficiente de $p(x)$. y las sucesivas sumas obtenidas, excepto la última suma, la cual es el residuo. Los demás valores son los coeficientes del cociente $q(x)$.

Ejemplos:

Dividir: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre los siguientes polinomios $s(x)$:

$$\begin{array}{llllll} \text{a)} & s(x) = x + & \text{b)} & s(x) = x + & \text{c)} & s(x) = \\ 5 & & 4 & & 3x - 4 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{d)} & s(x) = x - \\ 5 & \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{e)} & s(x) = \\ 2x + 3 & \end{array}$$

Solucióna) Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x + 5$

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad -43 \quad -60 \\
 (-5) \quad -10 \quad -45 \quad -10 \\
 \hline
 2 \quad -9 \quad 2 \quad -70
 \end{array}$$

En este caso, como $s(x) = x + 5$, entonces $a = 1, b = 5, y -\frac{b}{a} = -5$ Como $p(x)$ está ordenado en forma descendente, entonces el orden de los coeficientes corresponde al establecido en su formulación.

Se baja el primer coeficiente que es 2 y se lo multiplica por -5 . El producto resultante, -10 , en este caso, se suma con 1. Esta suma, -9 , se multiplica por -5 . Este producto 45 se suma con -43 , cuyo resultado es 2. Finalmente, se multiplica 2 por -5 y su resultado -10 se suma con -60 . El valor -70 , es el residuo de la división.

Como $a = 1$, no hace falta dividir 2, -10 y 2 entre 1. Luego, el cociente pedido es: $q(x) = 2x^2 - 9x + 2$

b) Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x + 4$

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad -43 \quad -60 \\
 (-4) \quad -8 \quad 28 \quad 60 \\
 \hline
 2 \quad -7 \quad -15 \quad 0
 \end{array}$$

$$s(x) = x + 4; a = 1 y b = 4; \text{luego: } -\frac{b}{a} = -4$$

$$\text{Cociente: } 2x^2 - 7x - 15$$

$$\text{Residuo: } 0$$

c) Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = 3x - 4$

$$\begin{array}{r}
 2 \quad 1 \quad -43 \quad -60 \\
 (\frac{4}{3}) \quad \frac{8}{3} \quad \frac{44}{9} \quad -\frac{1372}{27} \\
 \hline
 2 \quad \frac{11}{3} \quad -\frac{343}{9} \quad -\frac{2.992}{27}
 \end{array}$$

$$\text{Como } s(x) = 3x - 4, \text{ entonces, } a = 3, b = -4, -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Cociente: } \frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27}$$

$$\text{Residuo: } \frac{2.992}{27}$$

Se debe tener presente que se divide $2, \frac{11}{3}$ y $-\frac{343}{9}$ entre 3, dando como resultado $\frac{2}{3}, \frac{11}{9}$ y $-\frac{343}{27}$

Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x - 5$

$$\begin{array}{rrrr}
 2 & 1 & -43 & -60 \\
 (5) & 10 & 55 & 60 \\
 \hline
 2 & 11 & 12 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Cociente: } 2x^2 + 11x + 12 \\
 \text{Residuo: } 0 \\
 p(x) = (x - 5)(2x^2 + 11x + 12)
 \end{array}$$

Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = 2x + 3$

$$\begin{array}{rrrr}
 2 & 1 & -43 & -60 \\
 \left(-\frac{3}{2}\right) & -3 & 3 & 60 \\
 \hline
 2 & -2 & -40 & 0
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{Cociente: } \frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{2}x - \frac{40}{2} = x^2 - x - 20 \\
 \text{Residuo: } 0 \\
 p(x) = (2x + 3)(x^2 - x - 20)
 \end{array}$$

En los casos d) y e), $p(x)$ queda factorizado, siendo $x - 5$ y $2x + 3$ factores lineales del polinomio.

En la división por $x + 4$, ejemplo b), el resto también es cero y $x + 4$ es otro factor lineal de $p(x)$.

Así que: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60 = (x + 4)(x - 5)(2x + 3)$

Nota.

Las soluciones de la ecuación cúbica $2x^3 + x^2 - 43x - 60 = 0$, son $-4, 5$ y $-\frac{3}{2}$

Las raíces del polinomio cúbico $2x^3 + x^2 - 43x - 60$, son $-4, 5$ y $-\frac{3}{2}$

3.2.4 Teorema del Residuo y del Factor.

Como se explicó anteriormente, según el algoritmo de la división se cumple que:

$$p(x) = (ax + b)q(x) + r$$

El residuo es $r(x)$, es un número real que se lo puede representar por r . Eso se puede observar en los cinco ejemplos anteriores.

Ahora bien, si $ax + b = 0$, entonces, $x = -\frac{b}{a}$. Reemplazando x por este valor en $p(x)$, se obtiene:

$$p(x) = (ax + b)q(x) + r$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right) = \left(a\left(-\frac{b}{a}\right) + b\right)q\left(-\frac{b}{a}\right) + r = (-b + b) \times q\left(-\frac{b}{a}\right) + r = 0 \times q\left(-\frac{b}{a}\right) + r = r$$

Por lo tanto, $p\left(-\frac{b}{a}\right) = r$

3.2.4.1 Teorema del residuo

El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ entre $ax + b$ es $p\left(-\frac{b}{a}\right)$

Ahora, si el resto r es cero, entonces de la expresión $p(x) = (ax + b)q(x) + r$ se tiene que:

$$p(x) = (ax + b)q(x)$$

En este caso $p(x)$ queda factorizado y la expresión $ax + b$ es un factor lineal del polinomio $p(x)$.

3.2.4.2 Teorema del factor

$ax + b$ es factor lineal de un polinomio $p(x)$, si y solo si, $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

Esto es equivalente a la afirmación siguiente:

$ax + b$ es un factor de $p(x)$, si y solo si, la división de $p(x)$ entre $ax + b$ es exacta; es decir, el residuo de dividir $p(x)$ entre $ax + b$ es $r = 0$.

En los ejemplos $b), d)$ y $e)$, anteriores, los residuos son cero, por lo tanto, las divisiones son exactas. En consecuencia, $x + 4, x - 5$ y $2x + 3$ son factores (lineales) de $p(x)$.

Ejemplo:

Aplicando el teorema del residuo, obtener el resto de dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ los siguientes polinomios: $a) s(x) = x + 5; b) s(x) = x + 4; c) s(x) = 3x - 4; d) s(x) = x - 5; e) s(x) = 2x + 3$

Solución

a) Como $s(x) = ax + b = x + 5$, entonces $a = 1, b = 5, -\frac{b}{a} = -5$

$$\begin{aligned} p(-5) &= 2(-5)^3 + (-5)^2 - 43(-5) - 60 = 2(-125) + 25 + 215 - 60 \\ &= -250 + 25 + 215 - 60 = -70 \end{aligned}$$

$$p(-5) = -70 = r$$

R/ El residuo es $r = -70$

b) Como $s(x) = ax + b = x + 4$, entonces $a = 1, b = 4, -\frac{b}{a} = -4$

$$\begin{aligned} p(-4) &= 2(-4)^3 + (-4)^2 - 43(-4) - 60 = 2(-64) + 16 + 172 - 60 \\ &= -128 + 16 + 172 - 60 = 0 = r \end{aligned}$$

$$p(-4) = 0 = r$$

R/ El residuo es $r = 0$

c) Como $s(x) = ax + b = 3x - 4$, entonces $a = 3, b = -4, -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 43\left(\frac{4}{3}\right) - 60 = 2\left(\frac{64}{27}\right) + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60$$

$$= \frac{128}{27} + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60 = -\frac{2.992}{27}$$

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2.992}{27} = r$$

R/ El residuo es $r = -\frac{2.992}{27}$

d) Como $s(x) = ax + b = x - 5$, entonces $a = 1, b = -5, -\frac{b}{a} = 5$

$$p(5) = 2(5)^3 + (5)^2 - 43(5) - 60 = 2(125) + 25 - 215 - 60$$

$$= 250 + 25 - 215 - 60 = 0$$

$$p(5) = 0 = r$$

R/ El residuo es $r = 0$

e) Como $s(x) = ax + b = 2x + 3$, entonces $a = 2, b = 3, -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 43\left(-\frac{3}{2}\right) - 60 = 2\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60$$

$$= -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60 = 0$$

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 = r$$

R/ El residuo es $r = 0$

Como se puede observar, estos restos ya se habían obtenido realizando las divisiones correspondientes; sin embargo, se presentan como ejemplos sobre aplicación del teorema del residuo.

Ejemplo

Obtener el resto de la división de $p(x) = 12x^3 - 43x^2 + 11x + 30$ entre a) $4x - 5$;
b) $x - 2$

Solución

$$\text{a) } p(x) = 12\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 43\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 11\left(\frac{5}{4}\right) + 30 = 12\left(\frac{125}{64}\right) - 43\left(\frac{25}{16}\right) + \frac{55}{4} + 30 = \frac{1.500}{64} - \frac{1.075}{16} + \frac{55}{4} + 30 = 0$$

Nota.

Como $r = 0$, entonces, $4x - 5$ es un factor (lineal) de $p(x)$.

$$\text{b) } P(2) = 12(2)^3 - 43(2)^2 + 11(2) + 30 = 12(8) - 43(4) + 22 + 30 = 96 - 172 + 52 = -24 = r \text{ (residuo)}$$

$$p(x) = 12(2)^3 - 43(2)^2 + 11(2) + 30 = 12(8) - 43(4) + 22 + 30 = -24 = r$$

Nota.

Como $r \neq 0$, entonces, $x - 2$ no es un factor de $p(x)$.

Ahora, realicemos las divisiones por el método de coeficientes separados.

a)

$$\begin{array}{r} 12 \quad -43 \quad 11 \quad 30 \\ (5/4) \quad 15 \quad -35 \quad -30 \\ \hline 12 \quad -28 \quad -24 \quad 0 \end{array}$$

Residuo: $r = 0$; cociente: $q(x) = 3x^2 - 7x - 6$

b)

$$\begin{array}{r} 12 \quad -43 \quad 11 \quad 30 \\ (2) \quad 24 \quad -38 \quad -54 \\ \hline 12 \quad -19 \quad -27 \quad -24 \end{array}$$

Residuo $r = -24$; cociente: $q(x) = 12x^2 - 19x - 27$

Conclusión. Para obtener el residuo (resto) de la división de un polinomio $p(x)$ entre un polinomio lineal, es conveniente, en muchos casos, aplicar el método de la división sintética.

3.2.6 Valor Numérico y Raíz de un Polinomio

Sea un polinomio $p(x)$. El valor que se obtiene al reemplazar la variable x por un número fijo k , se denomina valor numérico de $p(x)$ para $x = k$; es decir, el valor numérico de $p(x)$ para $x = k$ es $p(k)$.

Ahora, cuando $p(k) = 0$, se dice que k es una raíz de $p(x)$.

Ejemplos:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$$

$$\text{Sea el polinomio } p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$$

Determinar el valor numérico para $x = -5, x = -4, x = \frac{4}{3}, x = 5, x = -\frac{3}{2}$

Solución

$$\begin{aligned} p(-5) &= 2(-5)^3 + (-5)^2 - 43(-5) - 60 = 2(-125) + 25 + 215 - 60 \\ &= -250 + 25 + 215 - 60 = -70 \end{aligned}$$

Observe que $r = -70$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $x + 5$

$$p(-4) = 2(-4)^3 + (-4)^2 - 43(-4) - 60 = 2(-64) + 16 + 172 - 60 \\ = -128 + 16 + 172 - 60 = 0$$

Observe que $r = 0$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $x + 4$

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 43\left(\frac{4}{3}\right) - 60 = 2\left(\frac{64}{27}\right) + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60 \\ = \frac{128}{127} + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60 = -\frac{2.992}{27}$$

Se recuerda que $r = -\frac{2.992}{27}$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $3x - 4$

$$p(5) = 2(5)^3 + (5)^2 - 43(5) - 60 = 2(125) + 25 - 215 - 60 \\ = 250 + 25 - 215 - 60 = 0$$

Note que $r = 0$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $x - 5$

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 43\left(-\frac{3}{2}\right) - 60 = 2\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60 \\ = -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60 = 0$$

Observe que $r = 0$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $2x + 3$

k	$p(k) = r$
-5	-70
-4	0
$\frac{4}{3}$	$-\frac{2.992}{27}$
5	0
$-\frac{3}{2}$	0

Se puede observar que los valores -4 , 5 y $-\frac{3}{2}$ son raíces de $p(x)$ y los valores -5 y $\frac{4}{3}$ no son raíces de $p(x)$.

Observación

Los valores numéricos indicados en la tabla, se obtuvieron en ejemplos anteriores, aplicando el algoritmo común de la división y también por el algoritmo de la División Sintética en las divisiones de $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre: $x + 5, x + 4, 3x - 4, x - 5$ y $2x + 3$. También se los obtuvo cuando se calculó el residuo de dividir el polinomio $p(x)$ entre $x + 5, x + 4, 3x - 4, x - 5$ y $2x + 3$, respectivamente, como ejemplos del teorema del factor. En su momento se concluyó que los polinomios lineales $x + 4, x - 5$ y $2x + 3$ son factores lineales del polinomio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$.

Resumen.

El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ entre un polinomio lineal $ax + b$, es $p\left(-\frac{b}{a}\right)$

El polinomio $ax + b$ es factor (lineal) de $p(x)$ si y sólo si $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ (El residuo de la división es cero)

$p\left(-\frac{b}{a}\right)$ es raíz de $p(x)$ si y solo si $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

El polinomio $ax + b$ es factor (lineal) de $p(x)$ si y sólo si $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ es raíz de $p(x)$

Conclusión

Un factor lineal de un polinomio, determina una raíz del polinomio.

Una raíz de un polinomio, determina un factor lineal del polinomio.

Ejemplos:

Si $2x + 3$ es un factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $-\frac{3}{2}$ es una raíz de $p(x)$, por lo tanto, $p\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$.

Si $7x - 8$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $\frac{8}{7}$ es una raíz de $p(x)$; por lo tanto, $p\left(\frac{8}{7}\right) = 0$.

Si $x + 12$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, -12 es una raíz de $p(x)$; por tanto, $p(-12) = 0$.

Si $x - 3$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, 3 es una raíz de $p(x)$; por lo cual, $p(3) = 0$.

Si $-\frac{10}{7}, \frac{11}{3}, -40, 20$ son raíces de $p(x)$, entonces, $7x + 10, 3x - 11, x + 40, x - 20$, son factores de $p(x)$.

3.2.7 Raíces Racionales de un Polinomio

Las posibles raíces racionales de un polinomio de grado n , $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$ donde $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números racionales de la forma $\frac{p}{q}$, donde p es un factor de a_0 y q es factor de a_n ($\frac{p}{q}$ es el cociente de factores del término independiente sobre factores del coeficiente del término de mayor exponente).

Ejemplo.

Sea $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10$

Observe que $a_0 = -10$ y $a_n = 2$

Los factores (divisores) de -10 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$

Los factores (divisores) de 2 son: $\pm 1, \pm 2$

Luego, las posibles raíces racionales de la forma $\frac{p}{q}$ son factores de -10 sobre ± 1 y factores de -10 sobre ± 2

De esta manera, las posibles raíces racionales de $p(x)$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$

Ahora, para comprobar que una posible raíz, sea o no una raíz de $p(x)$, se puede aplicar la división sintética o se calcula el valor numérico del polinomio para la posible raíz.

$\begin{array}{rrrr} 2 & 7 & -17 & -10 \\ (1) & 2 & 9 & -8 \\ \hline 2 & 9 & -8 & -18 \end{array}$	$\begin{array}{rrrr} 2 & 7 & -17 & -10 \\ (-1) & -2 & -5 & 22 \\ \hline 2 & 5 & -22 & 12 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ (2) \\ \hline 2 \end{array}$	
--	---	---	--

Según lo anterior, $p(1) = -18$; $p(-1) = 12$; $P(2) = 0$

Por lo tanto, -1 y 1 no son raíces de $p(x)$ y 2 sí es una raíz de $p(x)$

Como 2 es una raíz $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10$, entonces,

$$p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = (x - 2)(2x^2 + 11x + 5)$$

Ahora se halla las raíces del polinomio cociente $q(x) = 2x^2 + 11x + 5$, que también son raíces de $p(x)$.

Nota.

Las raíces de un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ son soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente: $ax^2 + bx + c = 0$, y se pueden obtener mediante la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para $p(x) = 2x^2 + 11x + 5$, se tiene que: $x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4(2)(5)}}{2 \times 2} = \frac{-11 \pm \sqrt{121 - 40}}{4} = \frac{-11 \pm \sqrt{81}}{4} = \frac{-11 \pm 9}{4}$

Una raíz es: $\frac{-11 + 9}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$

La otra raíz es: $\frac{-11 - 9}{4} = \frac{-20}{4} = -5$

Así que: $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ y $p(-5) = 0$

Por tanto, las raíces de la ecuación $2x^2 + 11x + 5 = 0$ son $-\frac{1}{2}$ y -5 .

En consecuencia, las raíces del polinomio $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10$; son $2, -5$ y $-\frac{1}{2}$; y estas raíces son las soluciones de la ecuación $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = 0$

Nota

Los factores lineales de $p(x)$ son $(x - 2), (x + 5)$ y $(2x + 1)$, entonces:

$$p(x) = (x - 2)(x + 5)(2x + 1) \rightarrow p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = (x - 2)(x + 5)(2x + 1)$$

Por tanto, para obtener raíces racionales de un polinomio $p(x)$ de grado n , se aplica la división sintética, iniciando con los coeficientes del $p(x)$ y se continúa el proceso con los coeficientes de los cocientes sucesivos.

Ejemplo

Obtener las raíces de $p(x) = -49x^3 + 6x^4 + 234x + 72 + 37x^2$ (Polinomio no ordenado)

El polinomio $p(x)$ ordenado queda así: $p(x) = 6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72$

Las posibles raíces racionales del polinomio son los divisores de 72 sobre los divisores de 6.

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rrrrr}
 6 & -49 & 37 & 234 & 72 \\
 (4) & 24 & -100 & -252 & -72 \\
 \hline
 6 & -25 & -63 & -18 & 0
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{rrrr}
 (6) & 36 & 66 & 18 \\
 \hline
 6 & 11 & 3 & 0
 \end{array}
 \end{array}$$

Divisores de 72: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$

Divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Posibles raíces:

$$\pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}, \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm 4, \pm \frac{4}{3}, \pm 6, \pm 8, \pm \frac{8}{3}, \pm 9, \pm \frac{9}{2}, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$$

Después de probar varias opciones, se obtiene las primeras dos raíces: 4 y 6.

En la primera división, el cociente es de grado 3; en la segunda es de grado 2 y sus raíces son: $-\frac{3}{2}y - \frac{1}{3}$

Respuesta. Las raíces del polinomio de grado 4, son: 4, 6, $-\frac{3}{2}y - \frac{1}{3}$

Las soluciones de la ecuación $6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72 = 0$, son: 4, 6, $-\frac{3}{2}y - \frac{1}{3}$

Los factores lineales de $p(x) = 6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72$ son $(x - 4)$, $(x - 6)$, $(2x + 3)$ y $(3x + 1)$

Entonces: $p(x) = 6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72 = (x - 4)(x - 6)(2x + 3)(3x + 1)$

3.2.8 Teorema Fundamental del Álgebra

Un polinomio de grado n , tiene como máximo n raíces complejas diferentes.

Una ecuación polinómica de grado n , tiene como máximo n soluciones complejas diferentes.

Notas.

Si las raíces diferentes de un polinomio $p(x)$ de grado 3, son k y h , entonces, una de las dos se repite.

En este caso, $p(x) = (x - h)(x - h)(x - k)$ o $p(x) = (x - h)(x - k)(x - k)$

Las raíces de un polinomio $p(x)$, son las soluciones de la ecuación polinómica $p(x) = 0$

3.3 PRODUCTOS NOTABLES

3.3.1 Suma por Diferencia de dos Expresiones

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

La suma por la diferencia o diferencia por suma, de dos expresiones, es igual al cuadrado de la primera expresión que está en la diferencia, menos el cuadrado de la otra expresión.

Ejemplos:

$$(5 + x)(5 - x) = 25 - x^2$$

$$(x^2 - y)(x^2 + y) = (x^2)^2 - y^2 = x^4 - y^2$$

$$(8 - x^3)(x^3 + 8) = 64 - (x^3)^2 = 64 - x^6$$

$$(3x + 2y)(2y - 3x) = (2y)^2 - (3x)^2 = 4y^2 - 9x^2$$

$$(\sqrt{7} - 4xy^2)(4xy^2 + \sqrt{7}) = (\sqrt{7})^2 - (4xy^2)^2 = 7 - 16x^2y^4$$

3.3.2 Cuadrado de un Binomio

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

Nota.

En el desarrollo de un trinomio, sus términos no necesariamente deben tener el orden señalado anteriormente.

Ejemplos:

$$(6x + 5y)^2 = (6x)^2 + 2(6x)(5y) + (5y)^2 = 36x^2 + 60xy + 25y^2$$

$$(6x - 5y)^2 = (6x)^2 - 2(6x)(5y) + (5y)^2 = 36x^2 - 60xy + 25y^2$$

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$$

$$(2x - 3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$$

3.3.3 Cubo de un Binomio

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(2x^2 + 4y^3)^3 &= (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(4y^3) + 3(2x^2)(4y^3)^2 + (4y^3)^3 \\ &= 4x^6 + 48x^4y^3 + 96x^2y^6 + 64y^9\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(30 - 3x^2)^3 &= (30)^3 - 3(30)^2(3x^2) + 3(30)(3x^2)^2 - (3x^2)^3 \\ &= 27.000 - 8.100x^2 + 810x^4 - 27x^6\end{aligned}$$

3.4 COCIENTES NOTABLES

$$\frac{A^n - B^n}{A - B} = A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + A^{n-4}B^3 + \dots + B^{n-1} \quad \text{para cualquier entero positivo } n$$

$$\begin{aligned} \frac{A^n - B^n}{A + B} &= A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 \\ &\quad - A^{n-4}B^3 + \dots - B^{n-1} \quad \text{para cualquier entero par positivo } n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A^n + B^n}{A + B} &= A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 \\ &\quad - A^{n-4}B^3 + \dots + B^{n-1} \quad \text{para todo entero impar positivo } n \end{aligned}$$

Muchas veces es necesario llevar la expresión a la forma como aparece en el miembro izquierdo de las igualdades anteriores; de esta manera se identifica el valor de n y de las expresiones A y B .

Observar que la secuencia del desarrollo es idéntica en todos los casos, excepto por los signos $\pm$

Ejemplos:

a)

$$\frac{4^3 - x^3}{4 - x} = 4^{3-1} + 4^{3-2}x + 4^{3-3}x^2 = 4^2 + 4^1x + 4^0x^2 = 16 + 4x + x^2$$

Observe que $n = 3, A = 4, B = x$

b)

$$\frac{25 - x^4}{5 - x^2} = \frac{5^2 - (x^2)^2}{5 - x^2} = 5^{2-1} + 5^{2-2}x^2 = 5 + x^2$$

Aquí $n = 2, A = 5, B = x^2$

c)

$$\begin{aligned} \frac{16 - 81x^4}{2 + 3x} &= \frac{2^4 - (3x)^4}{2 + 3x} = 2^3 - 2^2(3x) + 2(3x)^2 - (3x)^3 \\ &= 8 - 12x + 18x^2 - 27x^3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{32 + x^{10}}{2 + x^2} &= \frac{2^5 + (x^2)^5}{2 + x^2} = 2^4 - 2^3x^2 + 2^2(x^2)^2 - 2(x^2)^3 + (x^2)^4 \\ &= 16 - 8x^2 + 4x^4 - 2x^6 + x^8 \end{aligned}$$

e)

$$\frac{6^3 + x^3}{6 + x} = 6^2 - 6x + x^2 = 36 - 6x + x^2$$

f)

$$\frac{1+x^3}{1+x} = 1-x+x^2$$

g)

$$\frac{1-x^3}{1-x} = 1+x+x^2$$

3.5 FACTORIZACIÓN

La factorización es el proceso inverso a la propiedad distributiva. Consiste en descomponer una expresión en dos o más expresiones, llamadas factores; de ahí el nombre de factorización.

3.5.1 Diferencia de Cuadrados

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

Ejemplos:

a)

$$100 - x^2 = 10^2 - x^2 = (10 + x)(10 - x)$$

b)

$$144 - 25x^2 = 12^2 - (5x)^2 = (12 - 5x)(12 + x)$$

c)

$$a^6 - b^8 = (a^3)^2 - (b^4)^2 = (a^3 - b^4)(a^3 + b^4)$$

d)

$$36x^2 - 49y^4 = (6x)^2 - (7y^2)^2 = (6x + 7y)(6x - 7y)$$

e)

$$\begin{aligned} 10a^2x^4 - 5by^8 &= (\sqrt{10}ax^2)^2 - (\sqrt{5}by^4)^2 \\ &= (\sqrt{10}ax^2 + \sqrt{5}by^4)(\sqrt{10}ax^2 - \sqrt{5}by^4) \end{aligned}$$

3.5.2 Trinomio Cuadrado Perfecto

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$$

Ejemplos:

a)

$$36x^2 + 60xy + 25y^2 = (6x)^2 + 2(6x)(5y) + (5y)^2 = (6x + 5y)^2$$

b)

$$36x^2 - 60xy + 25y^2 = (6x)^2 - 2(6x)(5y) + (5y)^2 = (6x - 5y)^2$$

c)

$$9y^2 + 12xy + 4x^2 = (3y)^2 + 2(3y)(2x) + (2x)^2 = (2x + 3y)^2$$

d)

$$4x^2 + 9y^2 - 12xy = (2x - 3y)^2$$

e)

$$30x^2y^4 + 9x^4 + 25y^8 = (3x^2)^2 + (5y^4)^2 + 2(3x^2)(5y^4) = (3x^2 + 5y^4)^2$$

3.5.3 Factorización de un Trinomio Cuadrático

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax + m)(ax + n)}{a}$$

donde $mn = ac$ y $m + n = b$

Como caso particular, si $a = 1$, se tiene que: $ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$,
donde $mn = c$ y $m + n = b$

Ejemplos:

a) $x^2 + 13x + 40 = (x + 5)(x + 8) \rightarrow m = 5$ y $n = 8$; porque $5 + 8 = 13 = b$ y $5 \times 8 = 40 = c$

b) $x^2 + 3x - 70 = (x + 10)(x + (-7)) \rightarrow m = 10$ y $n = -7$; porque $10 + (-7) = 3$ y $10 \times (-7) = -70$

c) $x^2 - 9x - 220 = (x + 11)(x - 20) \rightarrow m = 11$ y $n = -20$; $11 + (-20) = -9$ y $11 \times (-20) = -220$

d) $x^2 - 14x + 48 = (x - 8)(x - 6) \rightarrow m = -8$ y $n = -6$; $-8 + (-6) = -14$ y $-8 \times (-6) = 48$

e)

$$60x^2 + 37x + 48 = \frac{(60x + 25)(60x + 12)}{60} = \frac{5 \times (12x + 5) \times 12 \times (5x + 1)}{60} \\ = (12x + 5)(5x + 1)$$

En este caso se tiene que:

$$m = 25 \text{ y } n = 12; \text{ porque } 25 \times 12 = 300 = 60 \times 5 = ac \text{ y } 25 + 12 = 37 = b$$

3.5.4 Factor Común

Si en cada uno de los términos de una expresión hay un factor común, entonces dicha expresión es igual al factor común multiplicado por la expresión que se obtiene de dividir cada término de la expresión inicial, por ese factor.

Ejemplos:

$$a) 5a + 5ax + 5ay - 5az = 5a(1 + x + y - z)$$

$$b) 12 + 24x - 36y + 12z = 12(1 + 2x - 3y + z)$$

$$c) 3x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 9x = x(3x^3 - 4x^2 + 8x - 9)$$

$$d) \quad 20a^2x^3 - 25a^3y + 30a^4z^4 = 5a^2(4x^3 - 5ay + 6a^2z^4) = (5a^2)(4x^3 - 5ay + 6a^2z^4)$$

e)

$$\frac{5}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(5x^2 + 7x - 1)$$

3.5.5 Diferencia y Sumas de Potencias

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \dots + B^{n-1}) \quad \text{para cualquier entero positivo } n$$

$$A^n - B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \dots - B^{n-1}) \quad \text{para cualquier entero par positivo } n$$

$$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \dots + B^{n-1}) \quad \text{para todo entero impar positivo } n$$

Nota.

Los denominadores en los cocientes notables, los cuales son divisores de los numeradores, ahora pasan a ser factores de los numeradores.

Ejemplos:

$$a) \quad 4^3 - x^3 = (4 - x)(4^{3-1} + 4^{3-2}x + 4^{3-3}x^2) = (4 - x)(4^2 + 4^1x + 4^0x^2) = (4 - x)(16 + 4x + x^2)$$

$$b) \quad 25 - x^4 = 5^2 - (x^2)^2 = (5 - x^2)(5^{2-1} + 5^{2-2}x^2) = (5 - x^2)(5 + x^2)$$

$$c) \quad 16 - 81x^4 = 2^4 - (3x)^4 = (2 + 3x)(2^3 - 2^2(3x) + 2(3x)^2 - (3x)^3) = (2 + 3x)(8 - 12x + 18x^2 - 27x^3)$$

$$d) 6^3 + x^3 = (6 + x)(6^2 - 6x + x^2) = (6 + x)(36 - 6x + x^2)$$

$$e) 1 + x^3 = (1 + x)(1 - x + x^2)$$

$$f) 1 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$$

$$g) 8 - x^3 = 2^3 - x^3 = (1 - x)(1 + x + x^2)$$

$$h) 32 + x^{10} = 2^5 + (x^2)^5 = (2 + x^2)(2^4 - 2^3x^2 + 2^2(x^2)^2 - 2(x^2)^3 + (x^2)^4) = \\ (2 + x^2)(16 - 8x^2 + 4x^4 - 2x^6 + x^8)$$

3.6 RACIONALIZACIÓN

Racionalizar una fracción algebraica que contiene radicales en el denominador, consiste en obtener otra expresión algebraica equivalente de modo que el denominador no contenga radicales.

3.6.1 Fracciones con Denominador Raíz n-ésima de A

$$\frac{K}{\sqrt[n]{A}} = \frac{K \cdot \sqrt[n]{A^{n-1}}}{A}$$

Cuando $n = 2$, no se escribe índice del radical.

Ejemplos:

$$a) \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1 \times \sqrt[3]{2^{3-1}}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

$$b) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3^{2-1}}}{3} = \frac{\sqrt{3^1}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$d) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$e) \frac{10}{\sqrt[3]{5}} = \frac{10 \sqrt[3]{5^2}}{5} = 2 \sqrt[3]{25}$$

$$f) \frac{-20}{\sqrt[3]{30}} = \frac{-20 \sqrt[3]{30^2}}{30} = \frac{-2 \sqrt[3]{900}}{3}$$

$$g) \frac{7}{\sqrt{10}} = \frac{7 \sqrt{10}}{10}$$

$$h) \frac{-45}{\sqrt{15}} = \frac{-45\sqrt{15}}{15} = -3\sqrt{15}$$

3.6.2 Fracciones con Denominador de Suma y Resta de Radicales

$$\frac{K}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{k(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$$

$$\frac{K}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{k(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}$$

Ejemplos:

a)	$\frac{5}{\sqrt{7} + \sqrt{2}} = \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{7 - 2} = \frac{5(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{5} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$
b)	$\frac{10}{\sqrt{7} - \sqrt{2}} = \frac{10(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{7 - 2} = \frac{10(\sqrt{7} + \sqrt{2})}{5} = 2(\sqrt{7} + \sqrt{2})$
c)	$\frac{-30}{\sqrt{10} + \sqrt{5}} = \frac{-30(\sqrt{10} - \sqrt{5})}{10 - 5} = \frac{-30(\sqrt{10} - \sqrt{5})}{5} = -6(\sqrt{10} - \sqrt{5})$
d)	$\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{6 - 2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
e)	$\frac{15}{\sqrt{13} + \sqrt{17}} = \frac{15(\sqrt{13} - \sqrt{17})}{13 - 17} = \frac{15(\sqrt{13} - \sqrt{17})}{-4}$
f)	$\frac{-20}{\sqrt{26} - \sqrt{41}} = \frac{-20(\sqrt{26} + \sqrt{41})}{26 - 41} = \frac{-20(\sqrt{26} + \sqrt{41})}{-15} = \frac{4(\sqrt{26} + \sqrt{41})}{3}$
g)	$\frac{40}{\sqrt{8} - 4} = \frac{40}{\sqrt{8} - \sqrt{16}} = \frac{40(\sqrt{8} + \sqrt{16})}{8 - 16} = \frac{40(\sqrt{8} + \sqrt{16})}{-8} = -5(\sqrt{8} + 4)$
h)	$\frac{-50}{3 - \sqrt{5}} = \frac{-50}{\sqrt{9} - \sqrt{5}} = \frac{-50(\sqrt{9} + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{-50(\sqrt{9} + \sqrt{5})}{-4} = \frac{25(3 + \sqrt{5})}{2}$

3.7 ECUACIONES E INECUACIONES

Una ecuación es una igualdad con una o más variables, la cual se cumple para determinados valores de ellas.

Ejemplos:

$$2x = 7 \quad x + 2y = 0 \quad x^2 + 3x - 1 = 0 \quad y = x^2 - 3$$

Una inecuación es una desigualdad ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) con una o más variables.

Ejemplos:

$$2x < 7 \quad x + 2y > 0 \quad y < x^2 - 3$$

Cada valor numérico que toma cada variable, para el cual se cumple o satisface la igualdad o la desigualdad, es una solución de la ecuación o de la inecuación.

Resolver una ecuación o una inecuación, consiste en obtener la solución o soluciones de la ecuación o de la inecuación.

Para resolver una ecuación o una inecuación se aplica procesos algebraicos, tales como: transposición de términos de factores, divisores; reducción de términos semejantes, factorización, propiedades de las desigualdades, leyes de los exponentes; teorema del residuo, del factor, de las raíces racionales; propiedades del valor absoluto, intervalos, unión, intersección de conjuntos, entre otros.

En las desigualdades, si la variable o variables son reales, entonces hay infinitas soluciones; por esto se debe establecer el conjunto solución.

3.7.1 Ecuaciones e Inecuaciones Polinómicas

Se debe recordar que:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ donde $a_n \neq 0$ es un polinomio entero de grado n , con una variable.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ es una ecuación polinómica de grado n

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n < 0$ ($>$, $\leq$, $\geq$) es una inecuación polinómica de grado n

Una ecuación polinómica de grado 1 o ecuación lineal con una variable, es de la forma: $ax + b = 0, a \neq 0$

Una ecuación polinómica de grado 2 o ecuación cuadrática, es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$

Una ecuación polinómica de grado 3 o ecuación cúbica, es de la forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$

Para resolver una ecuación polinómica se aplica los casos de factorización, división sintética, entre otros procedimientos

Tener en cuenta que las raíces de un polinomio $p(x)$ son las soluciones de la ecuación polinómica $p(x) = 0$

Ejemplos:

Dado que $x^2 + 13x + 40 = (x + 5)(x + 8)$, entonces las raíces del polinomio $p(x) = x^2 + 13x + 40$ son: -5 y -8 .

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 + 13x + 40 = 0$, son -5 y -8 .

De igual manera, las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 70 = 0$ son -10 y 7 .

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 9x - 220 = 0$ son -11 y 20 .

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 14x + 48 = 0$ son 6 y 8 .

Las soluciones de $60x^2 + 37x + 5 = 0$ son $-\frac{5}{12}$ y $-\frac{1}{5}$

Nota.

Las soluciones de una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ también se las puede obtener aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.7.2 Ecuaciones Fraccionarias con una Variable

Una ecuación o inecuación es fraccionaria, cuando tiene al menos un término fraccionario.

Para resolver una ecuación fraccionaria se la debe transformar en ecuación polinómica, para lo cual, primero se aplica trasposición de factores, divisores, términos, según el caso.

Ejemplos:

$$\frac{2}{6x+1} = x \rightarrow 2 = x(6x+1) = 6x^2 + x \rightarrow 6x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (3x+2)(2x-1) = 0$$

Las soluciones son: $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$

$$\frac{x}{x-3} + \frac{x}{10} = 3 \rightarrow \frac{10x + x(x-3)}{10(x-3)} = 3 \rightarrow 10x + x^2 - 3x = 30(x-3) \rightarrow 7x + x^2 = 30x - 90$$

$\rightarrow x^2 - 23x + 90 = 0 \rightarrow (x-5)(x-18) = 0$. Las soluciones son: 5 y 18 .

$$\frac{2}{x} + \frac{3}{2x} + \frac{1}{x+4} = 1 \rightarrow \frac{4x(x+4) + 3x(x+4) + (2x)x}{x(2x)(x+4)} = 1 \rightarrow$$

$$4x^2 + 16x + 3x^2 + 12x + 2x^2 = 2x^2(x+4)$$

$$\rightarrow 9x^2 + 28x = 2x^3 + 8x^2$$

$$\rightarrow 2x^3 - x^2 - 28x = 0$$

$$\rightarrow x(2x^2 - x - 28) = 0$$

$$\rightarrow x(x - 4)(2x + 7) = 0$$

Las soluciones de la última ecuación son: 0, 4 y $-\frac{7}{2}$; pero, dado que en la ecuación fraccionaria inicial, x no puede ser cero, entonces, las soluciones de la ecuación fraccionaria son: 4 y $-\frac{7}{2}$

Conclusión. Transformada una ecuación fraccionaria en ecuación polinómica, se resuelve esta última, tal como se ha realizado en los ejemplos de raíces de un polinomio o soluciones de una ecuación polinómica. Finalmente, se debe considerar que, en una fracción, el denominador debe ser diferente de cero.

3.7.3 Ecuaciones con Radicales

Son aquellas ecuaciones que tienen al menos un radical (raíz cuadrada, raíz cúbica, entre otros casos).

Para resolver una ecuación con radicales es conveniente dejar un radical en un miembro de la igualdad, con el fin de elevar al cuadrado o al cubo, según el caso, con el fin de eliminar el radical y obtener una ecuación polinómica.

Notas.

Cuando se eleva al cuadrado una expresión algebraica, muchas veces se introducen raíces extrañas. Por esto, es necesario comprobar en la ecuación inicial, los valores que se obtengan.

Cuando delante de una raíz cuadrada no está el signo menos, se considera o se toma únicamente la raíz positiva, como se indica en los siguientes ejemplos.

$$\sqrt{16} = 4 \quad \sqrt{2} = 1,414213 \dots \quad -\sqrt{144} = -12 \quad \pm \sqrt{169} = \pm 13 \quad \sqrt{1} = 1$$

Ejemplos:

a) $\sqrt{x} = 4 \rightarrow x = 16$. Solución de la ecuación: $x = 16$.

b) $\sqrt{x+5} = 5 \rightarrow x+5 = 25 \rightarrow x = 25-5 \rightarrow x = 20$. Solución de la ecuación: $x = 20$.

c) $\sqrt{4x+5} = x \rightarrow 4x+5 = x^2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow (x+1)(x-5) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ y } x = 5$.

Las soluciones de la ecuación cuadrática son: -1 y 5 ; pero reemplazando x por -1 en la ecuación inicial, se observa que no se cumple la igualdad. En efecto:

$$\sqrt{4(-1)+5} = \sqrt{-4+5} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$$

Reemplazando x por 5 en la ecuación inicial se obtiene lo siguiente:

$$\sqrt{4(5)+5} = \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación $\sqrt{4x+5} = x$ es $x = 5$.

$$d) \sqrt{5x+39} - x = 9$$

$$\sqrt{5x+39} - x = 9 \rightarrow \sqrt{5x+39} = x + 9 \text{ . Elevando al cuadrado:}$$

$$5x + 39 = (x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81 \rightarrow x^2 + 18x + 81 - 5x - 39 = 0$$

$$x^2 + 13x + 42 = 0 \rightarrow (x + 6)(x + 7) = 0 \rightarrow x = -6 \text{ y } x = -7$$

$$\text{Comprobando: } \sqrt{5(-6)+39} - (-6) = \sqrt{-30+39} + 6 = \sqrt{9} + 6 = 3 + 6 = 9$$

$$\sqrt{5(-7)+39} - (-7) = \sqrt{-35+39} + 7 = \sqrt{4} + 7 = 2 + 7 = 9$$

Entonces, las soluciones de la ecuación inicial $\sqrt{5x+39} - x = 9$ son: -6 y -7 . Observe que, en este caso, no se introdujeron raíces extrañas.

3.7.4 Ecuaciones con Valor Absoluto

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se aplica propiedades del valor absoluto. De esta forma se obtiene una ecuación polinómica.

Nota.

Para un número real x , el valor absoluto de x se denota o indica así: $|x|$

Definición

$$|x| = x \text{ si y solo si } x \geq 0 \text{ (} x \text{ es mayor o igual que 0)}$$

$$|x| = -x \text{ si y solo si } x < 0$$

Ejemplos:

$$|0| = 0 \quad |10| = 10 \quad |-10| = -(-10) = 10 \quad |15| = 15 \quad |-15| = 15$$

$$\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \quad \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$$

Propiedades

Para cualquier par de números reales x, y se cumple que:

$$|x| \geq 0$$

$$|xy| = |x||y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x - y| = |y - x|$$

$$|x| = |y| \text{ si y solo si } x = y \text{ o } x = -y$$

$$|x| = \sqrt{x^2}$$

Ejemplos:

a) $|x| = 10 \rightarrow x = 10 \text{ o } x = -10$

Solución:

$$x = 10 \text{ o } x = -10$$

b) $|x| = 15 \rightarrow x = 15 \text{ o } x = -15$

Solución:

$$x = 15 \text{ o } x = -15$$

c) $|x| = \frac{1}{3} \rightarrow x = \pm \frac{1}{3}$

Solución:

$$x = \frac{1}{3} \text{ o } x = -\frac{1}{3}$$

d) $|3x| = 8 \rightarrow 3x = 8 \text{ o } 3x = -8 \rightarrow x = \frac{8}{3} \text{ o } x = -\frac{8}{3}$

Solución:

$$x = \frac{8}{3} \text{ o } x = -\frac{8}{3}$$

e) $|5x + 9| = 14 \rightarrow 5x + 9 = 14 \text{ o } 5x + 9 = -14 \rightarrow 5x = 5 \text{ o } 5x = -23$

$$\rightarrow x = 1 \text{ o } x = -\frac{23}{5}$$

Solución:

$$x = 1 \text{ y } x = -\frac{23}{5}$$

g) $\frac{2}{|x|} + \frac{8}{|x|} = 1 \rightarrow \frac{10}{|x|} = 1 \rightarrow 10 = |x| \rightarrow x = \pm 10$

Solución:

$$x = 10 \text{ y } x = -10$$

h) $|x + 8| = \frac{17}{|x - 8|} \rightarrow |x + 8||x - 8| = 17 \rightarrow |(x + 8)(x - 8)| = 17 \rightarrow |x^2 - 64| = 17$

$$x^2 - 64 = 17 \text{ o } x^2 - 64 = -17 \rightarrow x^2 = 81 \text{ o } x^2 = 47$$

Extrayendo raíz cuadrada se tiene:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{81} \text{ o } \sqrt{x^2} = \sqrt{47} \rightarrow |x| = 9 \text{ o } |x| = \sqrt{47} \rightarrow x = \pm 9 \text{ o } x = \pm\sqrt{47}$$

Solución:

$$x = -9, x = 9, x = \sqrt{47}, x = -\sqrt{47}$$

3.7.5 Inecuaciones Polinómicas; Fraccionarias; con Valor Absoluto

Para resolver una inecuación, se sigue procesos similares que para resolver una ecuación; pero, en este caso, se debe aplicar propiedades de las desigualdades y para las respuestas se debe tener en cuenta las definiciones de intervalos reales.

3.7.6 Orden en $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$, en la expresión $a < b$ se lee: a es menor que b .

La expresión $a < b$ es equivalente a la expresión $b > a$

Definición

$a < b$ si y sólo si existe un real c mayor que 0 tal que: $a + c = b$

$a \leq b$ (menor o igual) si y sólo si existe un real c mayor o igual a 0 tal que: $a + c = b$

Nota

Un número real k es positivo, si y sólo si, $k > 0$ y es negativo si y sólo si $k < 0$

Entre dos números reales diferentes, existen infinitos números reales.

Según lo anterior, no existe un número real que sea el inmediatamente mayor o menor que cualquier número real. En cambio, en los enteros siempre hay un entero que es el siguiente mayor o el anterior menor.

Entre los números reales 3,1 y 3,2 existen infinitos números reales. El entero inmediatamente mayor que 3 es el 4 y el inmediatamente menor es 2.

Propiedades del orden en $\mathbb{R}$

$$1. a < b \text{ y } c < d \rightarrow a + c < b + d$$

$$2. a < b \rightarrow a + f < b + f$$

$$3. a < b \text{ y } h > 0 \rightarrow ah < bh$$

$$4. a < b \text{ y } h < 0 \rightarrow ah > bh$$

5. $a < 0$ y $b < 0 \rightarrow ab > 0$ Real negativo por real negativo resulta un real positivo: $(-)(-) = +$

6. $a < 0$ y $b > 0 \rightarrow ab < 0$ Real negativo por real positivo resulta un real negativo: $(-)(+) = -$

7. $a > 0$ y $b > 0 \rightarrow ab > 0$ Real positivo por real positivo resulta un real positivo: $(+)(+) = +$

8. $a > 0$ y $b < 0 \rightarrow ab < 0$ Real positivo por real negativo resulta un real negativo: $(+)(-) = -$

9. Si a, b son reales positivos y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$

9. Para a, b reales positivos, $a < b \rightarrow a^2 < b^2$

11. Si a, b son reales negativos y $a^2 < b^2$ entonces $a > b$

11. Si a, b son reales negativos y $a > b$ entonces $a^2 < b^2$

13. Si $a^3 < b^3$ entonces $a < b$ para a y b reales arbitrarios

14. $a < b \leftrightarrow -a > -b$

15. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a = b$ ó $a < b$ ó $a > b$ (Ley de la tricotomía)

16. $a < b$ y $b < c \rightarrow a < c$ (Propiedad transitiva)

18. $a < b \rightarrow a - b < 0$ y $b - a > 0$

19. Para k real positivo: $|a| < k$, si y sólo si $-k < a < k$

20. Para k real positivo:

$|a| > k$, si y sólo si $a < -k$ o $k < a$

$|a| < k$, si y sólo si $-k < a < k$

$|a| > k$, si y sólo si $a < -k$ o $k < a$

3.8 INTERVALOS REALES

Sean m y n números reales, tales que $m < n$.

$\{x \in \mathbb{R} / m \leq x \leq n\} = [m, n]$ Intervalo cerrado

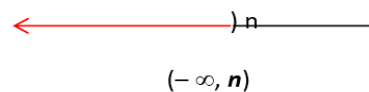
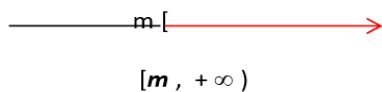
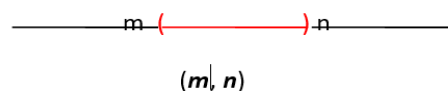
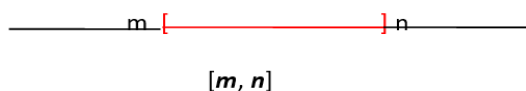
$\{x \in \mathbb{R} / m < x < n\} = (m, n)$ Intervalo abierto

$\{x \in \mathbb{R} / m \leq x < n\} = [m, n)$ Intervalo semi-abierto

$\{x \in \mathbb{R} / m < x \leq n\} = (m, n]$ Intervalo semi-abierto

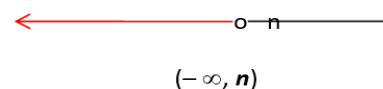
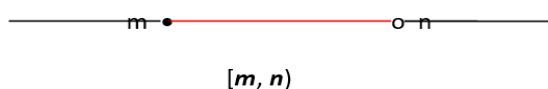
$\{x \in \mathbb{R} / m \leq x\} = [m, +\infty)$ Intervalo infinito

$$\{x \in \mathbb{R} / m < x\} = (m, +\infty) \text{ Intervalo infinito}$$



$$\{x \in \mathbb{R} / x \leq n\} = (-\infty, n] \text{ Intervalo infinito}$$

$$\{x \in \mathbb{R} / x < n\} = (-\infty, n) \text{ Intervalo infinito}$$



3.8.1 Gráficas de los Intervalos en la Recta Real

La gráfica de intervalos cerrados, abiertos, semi-abiertos son segmentos de recta. Para indicar que se incluyen extremos, m, n se emplea el corche y para no incluir, se emplea el paréntesis. También se puede emplear un punto "relleno" • para incluir y un punto vacío ○ para excluir.

Según lo anterior, se tiene lo siguiente:



A

$$|x| < k \leftrightarrow -k < x < k \leftrightarrow x \in (-k, k)$$

$$|x| \leq k \leftrightarrow -k \leq x \leq k \leftrightarrow x \in [-k, k]$$

$$|x| > k \leftrightarrow x > k \text{ o } x < -k \leftrightarrow x \in (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$$

$$|x| \geq k \leftrightarrow x \geq k \text{ o } x \leq -k \leftrightarrow x \in (-\infty, -k] \cup [k, +\infty)$$



A'

Nota.

Si $A = (-k, k)$ entonces, el complemento de A respecto a $\mathbb{R}$ es $A' = (-\infty, -k) \cup (k, +\infty)$

3.8.2 Ejemplos de Inecuaciones

$x < 8$ Conjunto solución $(-\infty, 8)$

$x > -20$ Conjunto solución $[-20, +\infty)$

$5x < 15$ Se multiplica ambos miembros por $\frac{1}{5} > 0$ y se aplica propiedad de desigualdades:

$$(5x) \left(\frac{1}{5} \right) \leq 15 \left(\frac{1}{5} \right) \rightarrow x \leq 3$$

Conjunto solución: $(-\infty, 3]$

Nota.

En el anterior ejemplo, multiplicar por $\frac{1}{5}$, equivale a dividir por 5 o también transponer 5 de factor a divisor.

$$-10x < 80 \rightarrow (-10x) \left(-\frac{1}{10} \right) > (80) \left(-\frac{1}{10} \right) \rightarrow x > -8$$

En este caso se multiplicó una desigualdad por un número negativo.

Conjunto solución: $(-8, +\infty)$

$x - 6 < 0 \rightarrow x < 6$ Conjunto solución: $(-\infty, 6)$

$x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$ Conjunto solución: $(-3, +\infty)$

$$x^2 + 2x - 48 \leq 0 \rightarrow (x + 8)(x - 6) \leq 0$$

Por la ley de los signos, un factor es positivo y el otro negativo: $+$ $\wedge$ $-$ por lo cual, se presentan dos casos.

Caso 1

$$x + 8 \geq 0 \wedge x - 6 \leq 0 \rightarrow x \geq -8 \wedge x \leq 6 \rightarrow x \in (-8, +\infty) \wedge x \in (-\infty, 6]$$

$$\rightarrow x \in (-8, +\infty) \cap (-\infty, 6] \rightarrow x \in [-8, 6]$$

Caso 2

$$x + 8 \leq 0 \wedge x - 6 \geq 0 \rightarrow x \leq -8 \wedge x \geq 6 \rightarrow x \in (-\infty, -8] \wedge x \in [6, +\infty)$$

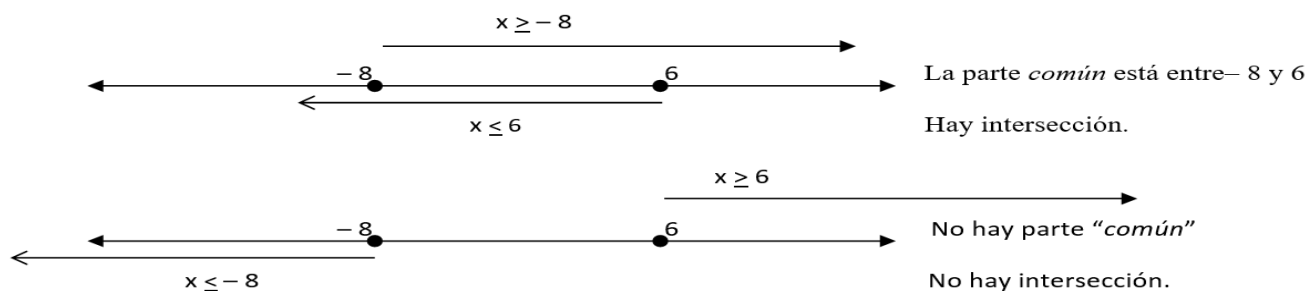
$$\rightarrow x \in (-\infty, -8) \cap [6, +\infty)$$

$\rightarrow x \in \emptyset$, es decir, no hay solución en este caso.

Según Caso 1 o Caso 2: $x \in [-8, 6] \vee x \in \emptyset \rightarrow x \in ([-8, 6] \cup \emptyset) \rightarrow x \in [-8, 6]$

En definitiva, el conjunto solución de la inecuación $x^2 + 2x - 48 \leq 0$ es el intervalo $[-8, 6]$.

En el ejemplo anterior, se realizó todo el proceso con los pasos necesarios y convenientes. En adelante, se omitirán ciertos pasos del proceso. Además, las gráficas sobre la recta real son una gran ayuda para obtener la unión y la intersección de intervalos.



Nota

Dado que los valores que son solución de la inecuación $x^2 + 2x - 48 \leq 0$ pertenecen al intervalo $[-8, 6]$, entonces, los valores que no son solución de la inecuación $x^2 + 2x - 48 \leq 0$ no pertenecen al intervalo $[-8, 6]$, por lo tanto, pertenecen al conjunto complemento, es decir, pertenecen al conjunto $(-\infty, -8) \cup (6, +\infty)$.

En consecuencia, la de la inecuación:

$$x^2 + 2x - 48 \leq 0 \rightarrow x \in [-8, 6]$$

$$x^2 + 2x - 48 < 0 \rightarrow x \in (-8, 6)$$

$$x^2 + 2x - 48 > 0 \rightarrow x \in (-\infty, -8) \cup (6, +\infty)$$

$$x^2 + 2x - 48 \geq 0 \rightarrow x \in (-\infty, -8] \cup [6, +\infty)$$

$$2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 > 0 \rightarrow (x - 2)(x + 5)(2x + 1) > 0$$

Para obtener la solución de la inecuación $(x - 2)(x + 5)(2x + 1) > 0$ se deben analizar los siguientes cuatro (4) casos respecto a los signos de los factores, así:

$x - 2$	$x - 5$	$2x + 1$	$(x - 2)(x - 5)(2x + 1) > 0$
$>$	$>$	$>$	$>$
$>$	$<$	$<$	$>$
$<$	$>$	$<$	$>$
$<$	$<$	$>$	$>$

Caso 1: $x - 2 > 0 \wedge x + 5 > 0 \wedge 2x + 1 > 0 \rightarrow x > 2 \wedge x > -5 \wedge x > -\frac{1}{2} \rightarrow x \in (2, +\infty) \wedge x \in (5, +\infty) \wedge x \in (2, +\infty)$

Los valores de x que cumplen a la vez las tres condiciones son mayores que 2, por lo tanto, la solución del caso 1 (solución parcial de la inecuación dada) es el intervalo $(2, +\infty)$; así pues, $S_1 = (2, +\infty)$.

Caso 2: $x - 2 > 0 \vee x + 5 < 0 \wedge 2x + 1 < 0 \rightarrow x > 2 \wedge x < -5 \wedge x < -\frac{1}{2} \rightarrow x \in (2, +\infty) \wedge x \in (-\infty, -5) \wedge x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

No existen tales valores de x que cumplan a la vez las tres condiciones; por lo tanto, $S_2 = \emptyset$

Caso 3: $x - 2 < 0 \vee x + 5 > 0 \wedge 2x + 1 < 0 \rightarrow x < 2 \wedge x > -5 \wedge x < -\frac{1}{2} \rightarrow x \in (-\infty, 2) \wedge x \in (-5, +\infty) \wedge x \in (-\infty, -\frac{1}{2})$

Los valores de x que cumplen a la vez las tres condiciones son a la vez menores que 2, mayores que -5 y menores que $-\frac{1}{2}$, por lo tanto: $S_3 = (-5, -\frac{1}{2})$

Caso 4: $x - 2 < 0 \vee x + 5 < 0 \wedge 2x + 1 > 0 \rightarrow x < 2 \wedge x < -5 \wedge x > -\frac{1}{2} \rightarrow x \in (-\infty, 2) \wedge x \in (-\infty, -5) \wedge x \in (-\frac{1}{2}, +\infty)$

No existen tales valores de x que cumplan a la vez las tres condiciones; por lo tanto, $S_4 = \emptyset$

Finalmente, la solución de la inecuación $(x - 2)(x - 5)(2x + 1) > 0$ es:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cap S_4 = (2, +\infty) \cup \emptyset \cup (-5, -\frac{1}{2}) \cup \emptyset = (-5, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$$

Entonces la solución de la inecuación $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 > 0$ es: $S = (-5, -\frac{1}{2}) \cup (2, +\infty)$

$$\frac{1}{x} < -2$$

$\frac{1}{x}$ es negativo y como 1 es positivo, entonces x debe ser negativo, es decir $x < 0$

Multiplicamos los dos términos de la inecuación por $x < 0$, se tiene que:

$$1 > -2x \rightarrow -\frac{1}{2} < x$$

Entonces:

$$-\frac{1}{2} < x \wedge x < 0 \rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$$

Conjunto solución: $S = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\frac{3}{x} < 5$$

En este caso, para cualquier real negativo x , $\frac{3}{x}$ es negativo, y de hecho, también es menor que 5.

Luego, el conjunto $S_1 = (-\infty, 0)$ es solución parcial.

Ahora, para $x > 0$, multiplicando los dos términos de la inecuación por dicho x , se tiene:

$$3 < 5x \rightarrow \frac{3}{5} < x$$

Entonces, $x \in \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$ para $x > 0$, por lo cual, $S_2 = \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$.

Finalmente, la solución de la inecuación $\frac{3}{x} < 5$ es: $S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$, entonces:

$$S = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

Nota.

El conjunto solución de la inecuación $\frac{3}{x} \geq 5$ es $S = (0, \frac{3}{5}]$

Note que este conjunto es el complemento de $S' = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$

$$|x| < 12 \rightarrow -12 < x < 12 \rightarrow x \in [-12, 12]$$

Conjunto solución $S = (-12, 12)$

Nota

El conjunto solución de: $|x| < 12$ es $(-12, 12)$, entonces, la solución de $|x| > 12$ es $(-\infty, -12) \cup (12, +\infty)$

$$\begin{aligned} |2x| > 20 &\rightarrow 2x < -20 \text{ o } 2x > 20 \rightarrow x < -10 \text{ o } x > 10 \\ &\rightarrow x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty) \end{aligned}$$

El conjunto solución de $|2x| > 20$ es $S = (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$ y de la inecuación $|2x| < 20$ es $S'(-10, 10)$, que es el complemento del conjunto solución anterior.

$$\begin{aligned} x^2 - 49 \leq 0 &\rightarrow x^2 \leq 49 \rightarrow \sqrt{x^2} \leq \sqrt{49} \rightarrow |x| \leq 7 \rightarrow -7 \leq x \leq 7 \rightarrow x \\ &\in [-7, 7] \end{aligned}$$

Conjunto solución: $S = [-7, 7]$

Nota.

El conjunto solución de $x^2 - 49 > 0$ es $S = (-\infty, -7] \cup [7, +\infty)$

De igual manera, realizando el mismo proceso, el conjunto solución de $x^2 - 50 < 0$ es $S = [-\sqrt{50}, \sqrt{50}]$

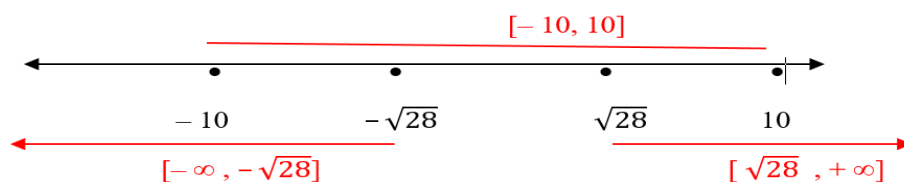
Por tanto, el conjunto solución de $x^2 - 50 > 0$ es $S = (-\infty, -\sqrt{50}) \cup (\sqrt{50}, +\infty)$

$$|x^2 - 64| \leq 36 \rightarrow -36 \leq x^2 - 64 \leq 36 \rightarrow -36 + 64 \leq x^2 \leq 36 + 64 \rightarrow 28 \leq x^2 \leq 100 \rightarrow$$

$$\sqrt{28} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{100} \rightarrow \sqrt{28} \leq |x| \leq 10 \rightarrow |x| \leq 10 \text{ y } |x| \geq \sqrt{28} \rightarrow$$

$$-10 \leq x \leq 10 \text{ y } (x \leq -\sqrt{28} \text{ o } x \geq \sqrt{28}) \rightarrow x \in [-10, 10] \text{ y } (x \in (-\infty, -\sqrt{28}] \text{ o } x \in [\sqrt{28}, +\infty))$$

Conjunto solución: $S = [-10, -\sqrt{28}] \cup [\sqrt{28}, 10]$

**Nota.**

El conjunto solución de $|x^2 - 64| \geq 36$ es: $(-\infty, -10] \cup [-\sqrt{28}, \sqrt{28}] \cup [10, +\infty)$

$$\begin{aligned} \frac{44}{|x+10|} &> |x-10| \rightarrow 44 > |x-10||x+10| \rightarrow 44 \\ &> |(x-10)(x+10)| \rightarrow \\ &44 > |x^2 - 100| \end{aligned}$$

$|x^2 - 100| < 44 \rightarrow$ A partir de esta expresión, este ejemplo es similar al anterior

$$-44 < x^2 - 100 < 44 \rightarrow 56 < x^2 < 144 \rightarrow \sqrt{56} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{144}$$

$$\sqrt{56} \leq |x| \leq 12 \rightarrow |x| \leq 12 \text{ y } |x| \geq \sqrt{56}$$

Continuando el procedimiento, tal como en el ejemplo anterior, se obtiene el siguiente conjunto solución:

$$S = [-12, -\sqrt{56}] \cup [\sqrt{56}, 12] - \{-10\}$$

Nota.

En la ecuación inicial, $x + 10 \neq 0$, porque está en denominador, luego $x \neq -10$, por esto, se debe excluir -10 del conjunto solución. En el intervalo $[-12, -\sqrt{56}]$ está el -10 .

$$\sqrt{x} < 5$$

En primer lugar, $x \geq 0$, puesto que para $x < 0$; $\sqrt{x}$ no es número real.

Ahora, elevando al cuadrado, se tiene que: $x < 25 \rightarrow x \in (-\infty, 25)$ y $x \in [0, +\infty)$, entonces

$x \in (-\infty, 25)$ y $x \in [0, +\infty)$, entonces, $x \in [0, 25)$

Conjunto solución: $S = [0, 25)$

Nota.

El conjunto solución de $\sqrt{x} \geq 5$ es $[25, +\infty)$

El conjunto solución de $\sqrt{x} > 5$ es $(25, +\infty)$

$$\sqrt{x+1} \leq 2$$

En primer lugar, se tiene que: $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$

$$\sqrt{x+1} \leq 2 \rightarrow x + 1 \leq 4 \rightarrow x \leq 3$$

Se tiene, entonces: $-1 \leq x$ y $x \leq 3$; por tanto, $-1 \leq x \leq 3$

Conjunto solución: $[-1, 3]$

Nota.

El conjunto solución de $\sqrt{x+1} \geq 2$ es $[3, +\infty)$

$$\sqrt{x+1} + 1 < x$$

En primer lugar: $x \geq -1$

$$\begin{aligned} \sqrt{x+1} + 1 < x &\rightarrow \sqrt{x+1} < x - 1 \rightarrow x + 1 < (x - 1)^2 \rightarrow x + 1 \\ &< x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$0 < x^2 - 3x \rightarrow 0 < x(x - 3) \text{ Como } x > 0, \text{ entonces } (x - 3) > 0 \rightarrow$$

$$x > 3 \rightarrow x \in (3, +\infty)$$

En $0 < x(x-3)$ no se requiere considerar otro caso; pues en el ejercicio siempre se cumple $x > 0$; luego el conjunto solución de la inecuación, es el intervalo $(3, +\infty)$

Nota.

$\sqrt{x+1} > 0$; $\sqrt{x+1}+1 > 1$ y como $\sqrt{x+1}+1 < x$, entonces $x > 0$

$\sqrt{x+1} \geq 0$, entonces $\sqrt{x+1}+1 \geq 1$; y según la solución de la inecuación $\sqrt{x+1}+1 < x$, entonces la solución de $\sqrt{x+1}+1 > x$, es $[-1, 3]$. Tener presente que $x \geq -1$

El conjunto solución de $\sqrt{x+1}+1 > x$ es $[-1, 3]$. Tener presente que $x > -1$

$$\sqrt{x^2+x} \leq \sqrt{2} \text{ elevando al cuadrado } \rightarrow x^2+x \leq 2 \rightarrow x^2+x-2 \leq 0$$

$$\rightarrow (x-1)(x+2) \leq 0$$

Para $x \geq 1$ y $x \leq -2$ no hay solución

Para $x \leq 1$ y $x \geq -2$: $-2 \leq x \leq 1$

El conjunto solución de la inecuación $x^2+x-2 \leq 0$ es $[-2, 1]$ y también lo es de la inecuación inicial.

Nota.

Se debe tener en cuenta que $x^2+x \geq 0$, lo cual se cumple para cualquier valor real de x .

$$\sqrt{2x+5} \leq \sqrt{3x-5}$$

$$\text{En primer lugar: } 2x+5 \geq 0 \text{ y } 3x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{5}{2} \text{ y } x \geq \frac{5}{3}$$

$$\text{Ahora, } 2x+5 \leq 3x-5 \rightarrow 10 \leq x$$

$$\text{Luego: } x \geq -\frac{5}{2} \text{ y } x \geq \frac{5}{3} \text{ y } x \geq 10 \text{ entonces: } x \geq 10$$

$$\text{Conjunto solución de la inecuación } \sqrt{2x+5} \leq \sqrt{3x-5} \text{ es: } S = [10, +\infty)$$

$$\text{Conjunto solución de la inecuación } \sqrt{2x+5} < \sqrt{3x-5} \text{ es: } S = (10, +\infty)$$

$$\text{El conjunto solución de la inecuación } \sqrt{2x+5} \geq \sqrt{3x-5} \text{ es } [\frac{5}{3}, 10]$$

Tenga en cuenta que se mantienen las condiciones iniciales o desigualdades:

$x \geq -\frac{5}{2}$ y $x \geq \frac{5}{3}$ y $x \geq 10$, pero además se debe cumplir que $2x+5 \geq 3x-5$, es decir $x \leq 10$, de lo cual, se tiene que los valores de x que satisfacen todas las condiciones pertenecen al intervalo $[\frac{5}{3}, 10]$.

De aquí se infiere que el conjunto solución de $\sqrt{2x+5} > \sqrt{3x-5}$ es el intervalo $(\frac{5}{3}, 10)$.

3.9 EJERCICIOS CON RESPUESTAS

Realizar operaciones en cada expresión y simplificar cuando sea posible. Aplicar fórmulas, leyes. No presentar respuestas en notación decimal.

Expresiones	Respuestas	Expresiones	Respuestas
$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^8$	$\frac{1}{27}$	$\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{12}{5}}$	27
$2^{150} \times 2^{-147}$	8	$\frac{(7.855)^{25}}{(7.855)^{26}}$	$\frac{1}{7.855}$
$8^{\frac{1}{6}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}}$	8	$(225)^{\frac{1}{6}}(225)^{-\frac{1}{2}}(225)^{\frac{1}{3}}$	1
$(64)^{\frac{2}{3}} \times (64)^{-\frac{1}{2}}$ $\times (64)^{\frac{1}{3}}$	8	$\left(\frac{1}{50}\right)^2 (500)^2$	100
$(78.550)^{12}(78.550)^{-11}$	78550	$\left(4x^3y^{\frac{1}{2}}z^{\frac{5}{2}}\right)^2$	$16x^6yz^5$
$\sqrt[3]{54a^4b^7}$	$3ab^2\sqrt[3]{2ab}$	$(1.000)^{\frac{2}{3}}$	100
$(81)^{\frac{3}{4}}$	27	$\left(81x^4y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$	$27x^3y$
$\left(x^{20}y^{\frac{20}{3}}\right)^{\frac{3}{10}}$	x^6y^2	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$	16

Simplificar el radical (extraer un entero del radical)

Expresiones	Respuestas	Expresiones	Respuestas	Expresiones	Respuestas
$\sqrt{48}$	$4\sqrt{3}$	$\sqrt{27}$	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{500}$	$10\sqrt{5}$
$\sqrt{125}$	$5\sqrt{5}$	$\sqrt{\frac{27}{48}}$	$\frac{3}{4}$	$\sqrt[3]{16}$	$2\sqrt[3]{2}$
$\sqrt[3]{54}$	$3\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{128}$	$4\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{16a^3}$	$2a\sqrt[3]{2}$

$(1.000)^{\frac{2}{3}}$

100

$\sqrt[5]{32}$

2

$\sqrt[3]{8}$

2

Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

Expresiones

Polinomios

$(x + 5)(x - 3)(x + 4)$

$x^3 + 6x^2 - 7x - 60$

$(3x + 2)(x - 3)(4x - 5)$

$12x^3 - 43x^2 + 11x + 30$

Aplicar el algoritmo de la división.

Dividendos

Divisores

Respuestas

$x^3 - 4x^2 - 11x + 32$

$x - 5$

$(x - 5)(x^2 + x - 6) + 2$

$x^3 - 4x^2 - 11x + 27$

$x + 3$

$(x + 3)(x^2 - 7x + 10) - 3$

$x^3 - 4x^2 - 11x + 34$

$x - 2$

$(x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 4$

$8x^3 + 2x^2 - 27x - 18$

$2x + 3$

$(2x + 3)(4x^2 - 5x - 6) + 0$

$8x^3 + 2x^2 - 27x - 18$

$x - 2$

$(x - 2)(8x^2 + 18x + 9) + 0$

Aplicación del teorema del factor, teorema fundamental del álgebra, definición de raíz, división sintética.

5.1 Determinar $p(x)$:

Si $2x - 5$ y $x + 4$ son factores de un polinomio $p(x)$ de grado 2, determinar $p(x)$

R/ $p(x) = 2x^2 + 3x - 20$

Si 6 es raíz y $(x + 4)$, $(2x - 5)$ son factores de un polinomio $p(x)$ de grado 3, entonces:

R/ $p(x) = 2x^3 - 9x^2 - 38x + 120$

Si -5 , -4 y 3 son las raíces de un polinomio $p(x)$ de grado 3, determinar $p(x)$.

R/ $p(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 60$

Si $4x - 5$ es un factor de $p(x)$, 3 y $-\frac{2}{3}$ son raíces de un polinomio $p(x)$ de grado 3, hallar $p(x)$:

R/ $p(x) = 12x^3 - 43x^2 + 11x + 30$

Sea un polinomio $p(x)$ de grado 3, tales que $p(1) = 0, p(4) = 0$ y $p(-2) = 0$.
Hallar $p(x)$

R/ $p(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

5.2 Determinar las raíces faltantes de $p(x)$:

Si 3 y -2 son raíces de $P(x) = 6x^4 + x^3 - 41x^2 - 44x - 12$ $p(x) = 6x^4 + x^3 - 41x^2 - 44x - 1$, hallar las dos raíces faltantes.

R/ $-\frac{2}{3}$ y $-\frac{1}{2}$

Si -4 es una raíz de $p(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 60$, hallar las dos raíces que faltan.

R/ -5 y 3

Determinar las raíces del polinomio $p(x) = 5(9x + 2)(x - 17)(5x - 2)(x + 15)(5x + 8)$

R/ $-\frac{2}{9}, 17, \frac{2}{5}, -15, -\frac{8}{5}$

Hallar el factor lineal asociado a la raíz $-\frac{b}{a}$ de un polinomio $p(x)$

R/ $ax + b$

5.3 Aplicando el teorema del factor, determinar los valores numéricos de un polinomio $p(x)$.

Si $3x + 2, x - 5, 7x + 3$ son factores de un polinomio $p(x)$, determinar $p\left(-\frac{2}{3}\right), p\left(-\frac{3}{7}\right)$ y $p(5)$

R/ $p\left(-\frac{2}{3}\right) = 0, p\left(-\frac{3}{7}\right) = 0$ y $p(5) = 0$

Si $x + 8$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p(-8)$

R/ $p(-8) = 0$

Si $x - 12$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p(12)$

R/ $p(12) = 0$

Si $7x + 2$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p\left(-\frac{2}{7}\right)$

R/ $p\left(-\frac{2}{7}\right) = 0$

Si $6x - 1$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p\left(\frac{1}{6}\right)$

$$\mathbb{R} / p\left(\frac{1}{6}\right) = 0$$

Si $mx + n$ es un factor lineal de un polinomio $p(x)$, hallar $p\left(-\frac{n}{m}\right)$

$$\mathbb{R} / p\left(-\frac{n}{m}\right) = 0$$

5.4 Aplicando el teorema del residuo, determinar los factores lineales de un polinomio $p(x)$.

Si $p\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$; $p\left(\frac{7}{2}\right) = 0$; $p(2) = 0$, determinar los factores lineales de polinomio $p(x)$

$$\mathbb{R} / 3x + 5, 2x - 7, x - 2$$

Si $p(-18) = 0$; $p\left(\frac{2}{7}\right) = 0$, determinar los factores lineales de polinomio $p(x)$

$$\mathbb{R} / x + 18, 7x - 2$$

5.4 Raíces racionales y factores lineales de un polinomio $p(x)$.

Si $p(x) = x^3 + 8x^2 - 30x + 12$, determinar las posibles raíces racionales y los posibles factores lineales de $p(x)$.

$\mathbb{R} /$

Posibles raíces: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6$ y ± 12

Posibles factores lineales: $x \mp 1, x \mp 2, x \mp 3, x \mp 4, x \mp 6$ y $x \mp 12$

Si 5 es una solución de la ecuación $4x^2 - 12x + k = 0$, hallar el valor de k y la otra raíz de dicha ecuación.

$$\mathbb{R} / k = -40 \text{ y la otra raíz } -2$$

Si 1 es una solución de la ecuación $x^3 - 7x + h = 0$, hallar el valor de h y las otras dos raíces de dicha ecuación.

$$\mathbb{R} / h = 6 \text{ y las otras raíces son } -3 \text{ y } 2$$

Sea un polinomio $p(x)$ de grado 3, tales que: $p(2) = p(1) = (-3) = 0$ Hallar la ecuación polinómica $p(x) = 0$

$$\mathbb{R} / p(x) = x^3 - 7x + 6 = 0$$

Determinar las soluciones de cada ecuación en el conjunto de los números reales.

Ecuaciones

Respuestas

$(3x + 1)(x - 10)(x^2 + 36)(x + 10)\left(x + \frac{3}{4}\right) = 0$	$-\frac{1}{3}, 10, -10, -\frac{3}{4}$
$(x + 6)(x^2 - 49)(x + 8) = 0$	$-6, 7, -7, -8$
$(3x + 5)(x^2 - 10)(4x - 1) = 0$	$-\frac{5}{3}, -\sqrt{10}, \sqrt{10}, \frac{1}{4}$
$ x + 16 = 6$	$-10, -22$
$ 6x = 12$	$-2, 2$
$ 3x - 18 = 3$	$5, 7$
$ x^2 - 64 = 36$	$-10, 10, -\sqrt{28}, \sqrt{28}$
$\sqrt{x + 10} = 6$	26
$\sqrt{2x - 19} = 9$	50
$\frac{36}{ x - 8 } = x + 8 $	$-10, 10, -\sqrt{28}, \sqrt{28}$

Determinar el conjunto solución de cada inecuación.

Inecuaciones	Respuestas
$ x + 16 \leq 6$	$[-22, -10]$
$ 3x - 18 \geq 3$	$(-\infty, 5] \cup [7, +\infty)$
$ x^2 - 64 < 36$	$(-10, -\sqrt{28}) \cup (\sqrt{28}, 10)$
$\sqrt{x + 10} < 6$	$[-10, 26)$
$ 3x - 18 \leq 3$	$[5, 7]$
$\sqrt{5x - 19} > 9$	$(20, +\infty)$
$ x + 10 > 4$	$(-\infty, -14) \cup (-6, +\infty)$
$ 6x \leq 12$	$[-2, 2]$
$ 6x > 12$	$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$
$ x^2 - 64 \geq 36$	$(-\infty, -10] \cup (-\sqrt{28}, \sqrt{28}] \cup [10, +\infty)$

Reducir términos semejantes, simplificar cuando se posible y escribir la respuesta final.

Expresiones	Respuestas
-------------	------------

$\frac{1}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x$	$\frac{31}{30}x$
$\frac{3}{10}x^2 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{10}x^2$	$\frac{4}{5}x^2$
$\frac{3}{10}xy - \frac{2}{5}xy + \frac{1}{10}xy$	0
$\frac{1}{6}x^2y + z + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{3}z$	$x^2y + \frac{5}{6}z$
$-x^3 + y^3 - 7x^3 + 2x^3 - 8y^3$	$-6x^3 - 7y^3$
$144ax^4 - 200by^2 + 6ax^4 + 100by^2$	$150ax^4 - 100by^2$

Realizar las multiplicaciones, reducir términos semejantes y escribir la respuesta final.

Expresiones	Respuestas
$(x + 9)(x + 5)$	$x^2 + 14x + 45$
$(x - 7)(x + 1)$	$x^2 - 6x - 7$
$(x - 12)(x - 2)$	$x^2 - 14x + 24$
$(2x - 1)(3x + 2)$	$6x^2 + x - 2$
$(5x + 3)(4x + 1)$	$20x^2 + 17x + 3$
$(2x - 3)(3x + 2)(4x + 1)$	$24x^3 - 14x^2 - 29x - 6$
$(x - 8)(2x + 1)(4x - 3)$	$8x^3 - 66x^2 + 13x + 24$

Efectuar los productos notables. Escribir el resultado final.

Productos notables	Respuestas
$(x + 9)(x - 9)$	$x^2 - 81$
$(2x + 3)(3 - 2x)$	$9 - 4x^2$
$(x + 9)(9 - x)$	$81 - x^2$
$(\sqrt{7} - 4x)(4x + \sqrt{7})$	$7 - 16x^2$
$(4x^2 - 5)(5 + 4x^2)$	$16x^4 - 25$
$(\sqrt{7} + 4x)(4x - \sqrt{7})$	$16x^2 - 7$

$(\sqrt{12} + \sqrt{5})(\sqrt{12} - \sqrt{5})$	7
$(a^{0,5} - b^{0,5})(b^{0,5} + a^{0,5})$	$a - b$
$(2x + 1)^2$	$4x^2 + 4x + 1$
$(3x^2 - y)^2$	$9x^4 - 6x^2y + y^2$
$\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y\right)^2$	$\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^2y + \frac{1}{9}y^2$
$(5x + 3)^3$	$125x^3 + 225x^2 + 135x + 27$
$\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}t\right)^3$	$\frac{8}{27}x^6 - \frac{2}{3}x^4t + \frac{1}{2}x^2t^2 - \frac{1}{8}t^3$
$\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}t\right)^3$	$\frac{8}{27}x^6 + \frac{2}{3}x^4t + \frac{1}{2}x^2t^2 + \frac{1}{8}t^3$

Efectuar los cocientes notables.

Cocientes notables	Respuestas	Cocientes notables	Respuestas
$\frac{x^2 - 36}{x - 6}$	$x + 6$	$\frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2$
$\frac{x^2 - 81}{x + 9}$	$x - 9$	$\frac{16x^4 - 25}{4x^2 - 5}$	$4x^2 + 5$
$\frac{7 - 16x^2}{\sqrt{7} + 4x}$	$\sqrt{7} - 4x$	$\frac{8 + x^3}{2 + x}$	$4 - 2x + x^2$
$\frac{125 + x^6}{5 + x^2}$	$25 - 5x^2 + x^4$	$\frac{27 - x^6}{3 - x^2}$	$9 + 3x^2 + x^4$

Factorizar los trinomios

Trinomios	Respuestas	Trinomios	Respuestas
$x^2 + 14x + 45$	$(x + 5)(x + 9)$	$x^2 - 6x - 7$	$(x + 1)(x - 7)$
$x^2 - 14x + 24$	$(x - 12)(x - 2)$	$6x^2 + x - 2$	$(3x + 2)(2x - 1)$
$20x^2 + 17x + 3$	$(5x + 3)(4x + 1)$	$4x^2 + 4x + 1$	$(2x + 1)^2$

Factorizar diferencia de cuadrados, sumas y diferencias de cubos.

Expresiones	Respuestas	Expresiones	Respuestas
-------------	------------	-------------	------------

$x^2 - 81$	$(x + 9)(x - 9)$	$9 - 4x^2$	$(3 - 2x)(3 + 2x)$
$16x^4 - 25$	$(4x^2 + 5)(4x^2 - 5)$	$125 + x^6$	$(5 + x^2)(25 - 5x^2 + x^4)$
$125 - x^6$	$(5 - x^2)(25 + 5x^2 + x^4)$	$8 + x^3$	$(2 + x)(4 - 2x + x^2)$
$64 - x^3$	$(4 - x)(16 + 4x + x^2)$	$8 - x^3$	$(2 - x)(4 + 2x + x^2)$

Racionalizar y simplificar cuando sea posible.

Expresiones	Respuestas	Expresiones	Respuestas
$\frac{5}{\sqrt{5}}$	$\sqrt{5}$	$\frac{-14}{\sqrt{7}}$	$-2\sqrt{7}$
$\frac{10}{\sqrt[3]{2}}$	$5\sqrt[3]{4}$	$\frac{-18}{\sqrt{12}}$	$-\frac{3}{2}\sqrt{12}$
$\frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}}$	$\sqrt{11} + \sqrt{2}$	$\frac{-10}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$	$-\frac{5}{4}(\sqrt{10} - \sqrt{2})$
$\frac{-8}{\sqrt{12} - 4}$	$2(\sqrt{12} + 4)$	$\frac{60}{5 + \sqrt{5}}$	$3(5 - \sqrt{5})$

3.10 EVALUACIÓN CON RESPUESTAS Y SUGERENCIAS

3.10.1 Leyes de los Exponentes

1. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $\left(\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{4}}\right)^4$ se obtiene:

$$\frac{1}{25}$$

$$125$$

$$250$$

R/ a)

Sugerencia

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(\left(\frac{1}{5} \right)^{\frac{3}{4}} \right)^4 = \left(\frac{1}{5} \right)^3$$

2. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $\left(2^{\frac{3}{6}} \right)^{\frac{12}{3}}$ se obtiene:

8

4

16

R/ b)

Sugerencia.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(a^{\frac{3}{6}} \right)^{\frac{12}{3}} = 2^2$$

3. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $2^{150} \times 2^{-147}$ se obtiene:

16

24

8

R/ c)

Sugerencia.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$2^{150} \times 2^{-147} = 2^3$$

4. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $\frac{1.230^{25}}{1.230^{26}}$ se obtiene:

$$\frac{1}{1.230}$$

1.230

1

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{1.230^{25}}{1.230^{26}} = 1.230^{-1} = \frac{1}{1.230}$$

5. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ se obtiene:

10

5

25

R/ b)

Sugerencia.

$$a^m \times a^n \times a^r = a^{m+n+r}$$

$$5^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{3}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$$

6. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $(165)^{\frac{1}{6}}(165)^{-\frac{1}{2}}(165)^{\frac{1}{3}} = (165)^0 = 1$ se obtiene:

165

0

1

R/ c)

Sugerencia.

$$a^m \times a^n \times a^r = a^{m+n+r} \text{ y } a^0 = 1 \text{ para } a \neq 0$$

$$(165)^{\frac{1}{6}}(165)^{-\frac{1}{2}}(165)^{\frac{1}{3}} = (165)^0 = 1$$

7. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $(64)^{\frac{1}{3}}(64)^{-\frac{1}{2}}(64)^{\frac{2}{3}}$ se obtiene:

8

64

16

R/ a)

Sugerencia.

$$a^m \times a^n \times a^r = a^{m+n+r} \text{ Para } a > 0, a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$$

$$(64)^{\frac{1}{3}}(64)^{-\frac{1}{2}}(64)^{\frac{2}{3}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

8. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $\left(\frac{3}{25}\right)^2 (250)^2$, se obtiene:

90

900

9

R/ b)

Sugerencia.

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$\left(\frac{3}{25}\right)^2 (250)^2 = \left(\frac{3}{25} \times 250\right)^2 = (30)^2 = 900$$

9. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión: $(29.000)^{120}(29.000)^{-119}$ se obtiene:

290

$\frac{1}{29.000}$

29.000

R/ c)

Sugerencia.

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ y } a^1 = 1$$

$$(29.000)^{120}(29.000)^{-119} = (29.000)^1 = 29.000$$

10. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $\left(3x^3y^{\frac{5}{2}}z^{\frac{1}{2}}\right)^2$ se obtiene:

$9x^6y^5z$

$3x^5y^5z^4$

$3x^3y^{10}z^4$

R/ a)

Sugerencia.

$$(abc)^n = a^n b^n c^n \text{ y } (a^m)^n = a^{mn}$$

$$\left(3x^3y^{\frac{5}{2}}z^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 3^2x^6y^5z^1 = 3^2x^6y^5z$$

11. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $(8.000)^{\frac{2}{3}}$ se obtiene:

200

400

800

R/ b)

Sugerencia.

$$(ab)^n = a^n b^n \text{ y } (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(8.000)^{\frac{2}{3}} = (8 \times 1.000)^{\frac{2}{3}} = (2^3 \times 10^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 \times 10^2 = 4 \times 100 = 400$$

12. Aplicando leyes de los exponentes en la expresión $(32)^{\frac{4}{5}}$ se obtiene:

32

64

16

R/ c)

Sugerencia.

$$(ab)^n = a^n b^n \text{ y } (a^m)^n = a^{mn}$$

$$(32)^{\frac{4}{5}} = (2^5)^{\frac{4}{5}} = 2^4$$

3.10.2 Reducción de Radicales

1. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt{8}$ un número entero, resulta igual a:

$2\sqrt{2}$

$3\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$

R/ a)

Sugerencia.

$$\text{Para } a > 0, \sqrt{a^2} = a$$

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$$

2. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt{200}$ un número entero, resulta igual a:

$$10\sqrt{5}$$

$$10\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{5}$$

R/ b)

Sugerencia.

Para $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = \sqrt{10^2 \times 2} = 10\sqrt{2}$$

3. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt{54}$ un número entero, resulta igual a:

$$5\sqrt{2}$$

$$6\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{6}$$

R/ c)

Sugerencia.

Para $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \times 6} = \sqrt{3^2 \times 6} = 3\sqrt{6}$$

4. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt{250}$ un número entero, resulta igual a:

$$5\sqrt{10}$$

$$10\sqrt{5}$$

$$8\sqrt{5}$$

R/ a)

Sugerencia.

Para $a > 0$, $\sqrt{a^2} = a$

$$\sqrt{250} = \sqrt{25 \times 10} = \sqrt{5^2 \times 10} = 5\sqrt{10}$$

5. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt{\frac{27}{48}}$ un número entero, resulta igual a:

$$\frac{4}{3}$$

$$\frac{3}{4}$$

$$3$$

R/ b)

Sugerencia.

Para a y b positivos: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$$\sqrt{\frac{27}{48}} = \sqrt{\frac{3 * 9}{3 * 16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}$$

6. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt[3]{24}$ un número entero, resulta igual a:

$$3\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{6}$$

$$2\sqrt[3]{3}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{8 \times 3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$$

7. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt[3]{32}$ un número entero, resulta igual a:

$$2\sqrt[3]{4}$$

$$4\sqrt[3]{2}$$

$$2\sqrt[3]{2}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{8 \times 4} = \sqrt[3]{2^3 \times 4} = 2\sqrt[3]{4}$$

8. Reduciendo o sacando del radical $\sqrt[3]{320}$ un número entero, resulta igual a:

$$5\sqrt[3]{4}$$

$$4\sqrt[3]{5}$$

$$6\sqrt[3]{4}$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{320} = \sqrt[3]{64 \times 5} = \sqrt[3]{4^3 \times 5} = 4\sqrt[3]{5}$$

9. El radical $\sqrt[3]{24c^3}$ es igual a:

$$3c\sqrt[3]{2}$$

$$2c\sqrt[3]{6}$$

$$2c\sqrt[3]{3}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\sqrt[3]{a^3b} = a\sqrt[3]{b}$$

$$\sqrt[3]{24c^3} = \sqrt[3]{8 \times 3 \times c^3} = \sqrt[3]{2^3 \times 3 \times c^3} = 2c\sqrt[3]{3}$$

10. El radical $\sqrt[3]{32c^4d^7}$ es igual a:

$$2cd^2\sqrt[3]{4cd}$$

$$4cd\sqrt[3]{2c^2d^2}$$

$$6cd\sqrt[3]{2c^3d^3}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\sqrt[3]{a^n b^m c} = a^{\frac{n}{3}} b^{\frac{m}{3}} \sqrt[3]{c}$$

$$\sqrt[3]{32c^4d^7} = \sqrt[3]{2^3 \times 4c^3c d^6 d} = 2cd^2\sqrt[3]{4cd}$$

3.10.3 Reducción de Términos Semejantes

1. Reduciendo términos semejantes, $2x + 3x - \frac{1}{2}x$ es igual a:

$$\frac{11}{2}x$$

$$11x$$

$$\frac{3}{2}x$$

R/ a)

Sugerencia. Se opera con los coeficientes de x y a éste resultado se le agrega x

2. Reduciendo términos semejantes, $\frac{1}{3}x^2 + 2x^2 - \frac{1}{2}x^2 + 6x^2$ es igual a:

$$\frac{49}{6}x^2$$

$$\frac{47}{6}x^2$$

$$\frac{53}{6}x^2$$

R/ b)

Sugerencia. Se opera con los coeficientes de x^2 y a este resultado se le agrega x^2

3. Reduciendo términos semejantes, $40u - 4v + \frac{2}{5}u + \frac{3}{4}v$ es igual a:

$$\frac{198}{5}u - \frac{19}{4}v$$

$$\frac{198}{4}u - \frac{13}{5}v$$

$$\frac{202}{5}u - \frac{13}{4}v$$

R/ c)

Sugerencia. Se opera con los coeficientes de u y de v . A estos resultados se les agrega u y v respectivamente

4. Reduciendo términos semejantes, $3nx^2 + 8my^3 - 12nx^2 - 9my^3$ es igual a:

$$-9nx^2 - my^3$$

$$9nx^2 + my^3$$

$$11nx^2 - 21my^3$$

R/ a)

Sugerencia. Se opera con los coeficientes de nx^2 y de my^3 . A estos términos se agrega nx^2 y my^3 . respectivamente.

3.10.4 Multiplicaciones y Reducciones

1. El producto $(x - 7)(x + 3)$ es igual a:

$$x^2 + 4x - 21$$

$$x^2 - 4x - 21$$

$$x^2 - 4x + 21$$

R/ b)

Sugerencia. Se multiplica cada término de un factor por cada término del otro factor y se reduce términos semejantes

2. El producto $(0,3x - 1)(x + 0,3)$ es igual a:

$$3x^2 - 0,9x - 3$$

$$0,3x^2 - 0,91x - 0,3$$

$$3x^2 - 0,9x - 0,3$$

R/ b)

Sugerencia. Se multiplica cada término de un factor por cada término del otro factor y se reduce términos semejantes

3. El producto $(x + 2)(x - 5)(x + 1)$ es igual a:

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 13$$

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 12$$

$$x^3 - 2x^2 - 13x - 10$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(x + 2)(x - 5)(x + 1) = (x^2 - 3x - 10)(x + 1)$$

Se multiplica cada término de un factor por cada término del otro factor y se reduce términos semejantes

4. El producto $5(4x + 3) \times 2(x - 1)$ es igual a:

$$40x^3 - 10x^2 - 10$$

$$20x^2 - 10x - 30$$

$$40x^2 - 10x - 30$$

R/ c)

Sugerencia.

$$5(4x + 3) \times 2(x - 1) = 10(4x + 3)(x - 1) = 10(4x^2 - x - 3)$$

3.10.5 Productos Notables

1. Desarrollando el producto notable $(6 + x)(6 - x)$ se obtiene:

$$36 - x^2$$

$$12 - x^2$$

$$x^2 - 12$$

R/ a)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

2. Desarrollando el producto notable $(x + 12)(12 - x)$ se obtiene:

$$144 + x^2$$

$$144 - x^2$$

$$24 - x$$

R/ b)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

3. Desarrollando el producto notable $(2 - x^2)(2 + x^2)$ se obtiene:

$$2 - x^4$$

$$4 + 2x - x^4$$

$$4 - x^4$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

4. Desarrollando el producto notable $(x^3 - 8)(8 + x^3)$ se obtiene:

$$x^6 - 64$$

$$x^6 - 16$$

$$x^3 - 16$$

R/ a)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

5. Desarrollando el producto notable $(3x^2 + 4)(3x^2 - 4)$ se obtiene:

$$6x^4 - 8$$

$$9x^4 - 16$$

$$3x^4 - 8$$

R/ b)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

6. Desarrollando el producto notable $(3 + 5x^4)(5x^4 - 3)$ se obtiene:

$$9 - 25x^8$$

$$5x^8 - 9$$

$$25x^8 - 9$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

7. Desarrollando el producto notable $(4x^2 + 5)(-4x^2 + 5)$ se obtiene:

$$25 - 16x^4$$

$$16x^4 - 25$$

$$25 + 16x^4$$

R/ a)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

8. Desarrollando el producto notable $(8a^2 + 5b)(8a^2 - 5b)$ se obtiene:

$$8a^4 - 5b^2$$

$$6aa^4 - 25b^2$$

$$16a^4 - 10b^2$$

R/ b)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

9. Desarrollando el producto notable $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$ se obtiene:

$$a + b$$

$$b + a$$

$$a - b$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

10. Desarrollando el producto notable $(2x^{1/2} + 3y^{1/2})(3y^{1/2} - 2x^{1/2})$ se obtiene:

$$9y + 4x$$

$$y - x$$

$$y + x$$

R/ a)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

11. Desarrollando el producto notable $(a^{0.5} + b^{0.5})(a^{0.5} - b^{0.5})$ se obtiene:

$$a + b$$

$$a - b$$

$$ab$$

R/ b)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

12. Desarrollando el producto notable $(\sqrt{2} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{2})$ se obtiene:

$$7$$

$$3$$

$$-3$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

13. Desarrollando el producto notable $(\sqrt{3} + \sqrt{6})(\sqrt{6} - \sqrt{3})$ se obtiene:

3

9

27

R/ a)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

14. Desarrollando el producto notable $(\sqrt{8} + 3)(3 - \sqrt{8})$ se obtiene:

-5

1

5

R/ b)

Sugerencia.

$$(A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A) = A^2 - B^2$$

15. Desarrollando el producto notable $(3x + 2y)^2$ se obtiene:

$$9x^2 + 6xy + 4y^2$$

$$9x^2 + 24xy + 4y^2$$

$$9x^2 + 12xy + 4y^2$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + B^2 + 2AB$$

16. Desarrollando el producto notable $(5x - 4y)^2$ se obtiene:

$$25x^2 - 40xy + 16y^2$$

$$25x^2 + 40xy + 16y^2$$

$$25x^2 + 40xy - 16y^2$$

R/ a)

Sugerencia.

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + B^2 - 2AB$$

17. Desarrollando el producto notable $(2x^2 - 3y^2)^2$ se obtiene:

$$4x^4 - 6x^2y^2 + 9y^4$$

$$4x^4 - 12x^2y^2 + 9y^4$$

$$4x^4 - 12x^2y^2 - 9y^4$$

R/ b)

Sugerencia.

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + B^2 - 2AB$$

18. Desarrollando el producto notable $(3a + 2b)^3$ se obtiene:

$$27a^3 - 54a^2b + 36ab^2 - 8b^3$$

$$27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 4b^3$$

$$27a^3 + 54a^2b + 36ab^2 + 8b^3$$

R/ c)

Sugerencia.

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + B^2 - 2AB$$

19. Desarrollando el producto notable $(5x - 3y)^3$ se obtiene:

$$125x^3 - 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$$

$$125x^3 + 225x^2y + 135xy^2 - 27y^3$$

$$125x^3 - 225x^2y - 135xy^2 - 27y^3$$

R/ a)

Sugerencia.

$$(A + B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

3.10.6 Cocientes Notables1. Desarrollando el cociente notable $\frac{a^2 - b^2}{a - b}$ se obtiene:

$$a + b$$

$$a - b$$

$$b - a$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A - B} = A + B$$

2. Desarrollando el cociente notable $\frac{2^2 - x^2}{2 - x}$ se obtiene:

$$4 + x$$

$$2 + x$$

$$2 - x$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A - B} = A + B$$

3. Desarrollando el cociente notable $\frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2}$ se obtiene:

$$a^2 - b^2$$

$$a + b$$

$$a^2 + b^2$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A - B} = A + B \quad \frac{a^4 - b^4}{a^2 - b^2} = \frac{(a^2)^2 - (b^2)^2}{a^2 - b^2}$$

4. Desarrollando el cociente notable $\frac{x^2 - 25}{x - 5}$ se obtiene:

$$x + 5$$

$$x - 5$$

$$5 - x$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A - B} = A + B \quad \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \frac{x^2 - 5^2}{x - 5}$$

5. Desarrollando el cociente notable $\frac{m^2 - n^2}{m + n}$ se obtiene:

$$n - m$$

$$m - n$$

$$m + n$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A + B} = A - B$$

6. Desarrollando el cociente notable $\frac{2^2 - x^2}{2 + x}$ se obtiene:

$$x - 2$$

$$4 - x$$

$$2 - x$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A + B} = A - B$$

7. Desarrollando el cociente notable $\frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2}$ se obtiene:

$$a^2 - b^2$$

$$a - b$$

$$a^2 + b^2$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A + B} = A - B \quad \frac{a^4 - b^4}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2)^2 - (b^2)^2}{a^2 + b^2} \quad A = a^2 \text{ y } B = b^2$$

8. Desarrollando el cociente notable $\frac{x^2 - 25}{x + 5}$ se obtiene:

$$5 - x$$

$$x - 5$$

$$x + 5$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A^2 - B^2}{A + B} = A - B \quad \frac{x^2 - 25}{x + 5} = \frac{x^2 - 5^2}{x + 5} \quad A = x \text{ y } B = 5$$

9. Desarrollando el cociente notable $\frac{m^3 + n^3}{m + n}$ se obtiene:

$$m^2 + mn + n^2$$

$$m^2 - mn - n^2$$

$$m^2 - mn + n^2$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A^3 + B^3}{A + B} = A^2 - AB + B^2$$

10. Desarrollando el cociente notable $\frac{2^3 + x^3}{2 + x}$ se obtiene:

$$4 - 2x + x^2$$

$$2 - x + x^2$$

$$4 + 2x + x^2$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A^3 + B^3}{A + B} = A^2 - AB + B^2$$

11. Desarrollando el cociente notable $\frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2}$ se obtiene:

$$a^4 + a^2b^2 + b^4$$

$$a^4 - a^2b^2 + b^4$$

$$a^4 - ab + b^4$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A^3 + B^3}{A + B} = A^2 - AB + B^2 \quad \frac{a^6 + b^6}{a^2 + b^2} = \frac{(a^2)^3 + (b^2)^3}{a^2 + b^2} \quad A = a^2 \text{ y } B = b^2$$

3.10.7 Factorización

1. Factorizando la diferencia de cuadrados $16 - x^2$ resulta:

$$(4 + x)(4 - x)$$

$$(4 + x)(x - 4)$$

$$(8 + x)(8 - x)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$16 - x^2 = 4^2 - x^2 \quad A = 4 \quad y \quad B = x$$

2. Factorizando la diferencia de cuadrados $49x^4 - 64$ resulta:

$$(7x^2 - 8)(7x^2 - 8)$$

$$(7x^2 + 8)(7x^2 - 8)$$

$$(7x^2 + 8)(7x^2 + 8)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

3. Factorizando la diferencia de cuadrados $x^6 - 100$ resulta:

$$(x^3 - 50)(50 + x^3)$$

$$(x^3 + 50)(50 - x^3)$$

$$(x^3 - 10)(10 + x^3)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$x^6 - 100 = (x^3)^2 - 10^2 \quad A = x^3 \quad y \quad B = 10$$

4. Factorizando la diferencia de cuadrados $4x^4 - 36$ resulta:

$$(2x^2 + 6)(2x^2 - 6)$$

$$(2x^2 + 9)(2x^2 - 4)$$

$$(2x^2 + 4)(2x^2 - 9)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$4x^4 - 36 = (2x^2)^2 - 6^2 \quad A = 2x^2 \quad y \quad B = 6$$

5. Factorizando la diferencia de cuadrados $16x^8 - 4$ resulta:

$$(4x^2 + 2)(2x^2 - 2)$$

$$(2 + 4x^4)(4x^4 - 2)$$

$$(4x^2 + 4)(4x^2 - 1)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

6. Factorizando la diferencia de cuadrados $81a^4 - 16b^2$ resulta:

$$(9a + 4b)(9a - 4b)$$

$$(9a^2 + 8b)(9a^2 - 2b)$$

$$(9a^2 + 4b)(9a^2 - 4b)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$81a^4 - 16b^2 = (9a^2)^2 - (4b^2)^2 \quad A = 9a^2 \quad y \quad B = 4b^2$$

7. Factorizando la diferencia de cuadrados $169 - x^6$ resulta:

$$(13 - x^3)(x^3 + 13)$$

$$(13 - x^2)(13 + x^2)$$

$$(13 - x)(13 + x)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$169 - x^6 = (13)^2 - (x^3)^2 \quad A = 13 \quad y \quad B = x^3$$

8. Factorizando la diferencia de cuadrados $9x^4 - 36$ resulta:

$$(3x^2 - 18)(3x^2 + 2)$$

$$(3x^2 - 6)(3x^2 + 6)$$

$$(3x^2 - 2)(3x^2 + 18)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$9x^4 - 36 = (3x^2)^2 - 6^2 \quad A = 3x^2 \text{ y } B = 6$$

9. Factorizando la diferencia de cuadrados $x^6 - 25$ resulta:

$$(x^3 + 5)(5 - x^3)$$

$$(x^3 - 1)(25 + x^3)$$

$$(x^3 - 5)(5 + x^3)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$x^6 - 25 = (x^3)^2 - 5^2 \quad A = x^3 \text{ y } B = 5$$

10. Factorizando la diferencia de cuadrados $m^4 - n^4$ resulta:

$$(m^2 + n^2)(m - n)(m + n)$$

$$(m^2 + n^2)(m + n)(m + n)$$

$$(m + n)(m - n)(m + n)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = (m^2 + n^2)(m - n)(m + n)$$

11. Factorizando la diferencia de cuadrados $16y^4 - 81x^4$ resulta:

$$(4y^2 + 9x^2)(4y^2 - 9x^2) = (4y^2 + 9x^2)(2y + 3x)(2y + 3x)$$

$$(4y^2 + 9x^2)(4y^2 - 9x^2) = (4y^2 + 9x^2)(2y - 3x)(2y + 3x)$$

$$(4y^2 + 9x^2)(4y^2 - 9x^2) = (4y^2 + 9x^2)(2y - 3x)(2y - 3x)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) = (A - B)(A + B) = (B + A)(A - B) = (A - B)(B + A)$$

$$16y^4 - 81x^4 = (4y^2)^2 - (9x^2)^2 = (4y^2 + 9x^2)(4y^2 - 9x^2) \\ = (4y^2 + 9x^2)(2y - 3x)(2y + 3x)$$

12. Factorizando el trinomio cuadrado perfecto $4x^2 + 12xy + 9y^2$ se obtiene:

$$(3x + 2y)^2$$

$$(2x - 3y)^2$$

$$(2x + 3y)^2$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + B^2 + 2AB = (A + B)^2 = (B + A)^2$$

$$4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \quad A = 2x \text{ y } B = 3y \text{ o también } A \\ = 3y \text{ y } B = 2x$$

13. Factorizando el trinomio cuadrado perfecto $9x^2 + 4y^2 - 12xy$ se obtiene:

$$(3x - 2y)^2$$

$$(3x + 2y)^2$$

$$(2x - 3y)^2$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 = (B - A)^2$$

$$9x^2 + 4y^2 - 12xy = (3x)^2 + (2y)^2 - 2(3x)(2y) \quad A = 3x \text{ y } B = 2y \text{ o también } A \\ = 2y \text{ y } B = 3x$$

14. Factorizando el trinomio cuadrado perfecto $16a^4 + 40a^2b^2 + 25b^4$ se obtiene:

$$(4b^2 + 5a^2)^2$$

$$(5b^2 + 4a^2)^2$$

$$(5b^2 - 4a^2)^2$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + B^2 + 2AB = (A + B)^2 = (B + A)^2$$

$$16a^4 + 40ab^2 + 25b^4 = (4a^2)^2 + 2(4a^2)(5b^2) + (5b^2)^2 \quad A = 4a^2; B = 5b^2 \text{ o también } A = 5b^2; B = 4a^2$$

$$16a^4 + 40a^2b^2 + 25b^4 = (4a^2)^2 + 2(4a^2)(5b^2) + (5b^2)^2 \quad A = 4a^2 \text{ y } B = 5b^2 \text{ o } A = 5b^2 \text{ y } B = 4a^2$$

15. Factorizando el trinomio cuadrado perfecto $\frac{1}{4}a^6 - 3a^3b^2 + 9b^4$ se obtiene:

$$(a^3 - 3b^2)^2$$

$$\left(\frac{1}{8}a^3 - 3b^2\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}a^3 - 3b^2\right)^2$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^2 - 2AB + B^2 = A^2 + B^2 - 2AB = (A - B)^2 = (B - A)^2$$

$$\frac{1}{4}a^6 - 3a^3b^2 + 9b^4 = \left(\frac{1}{2}a^3\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2}a^3(3b^2) + (3b^2)^2 \quad A = \frac{1}{2}a^3 \text{ y } B = 3b^2 \text{ o } A = 3b^2 \text{ y } B = \frac{1}{2}a^3$$

16. Factorizando el trinomio cuadrado perfecto $2x^3y^2 + x^6 + y^4$ se obtiene:

$$(x^3 + y^2)^2$$

$$(2x^3 + y^2)^2$$

$$(x^3 + 2y^2)^2$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^2 + 2AB + B^2 = A^2 + B^2 + 2AB = (A + B)^2 = (B + A)^2$$

$$2x^3y^2 + x^6 + y^4 = 2x^3y^2 + (x^3)^2 + (y^2)^2 \quad A = x^3 \text{ y } B = y^2 \text{ o } A = y^2 \text{ y } B = x^3$$

17. Factorizando la diferencia de cubos $m^3 - n^3$ resulta:

$$(m - n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$(m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

$$(m + n)(m^2 + mn + n^2)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \quad A = m \text{ y } B = n$$

18. Factorizando la diferencia de cubos $3^3 - n^3$ resulta:

$$(3 + n)(9 - 3n + n^2)$$

$$(3 - n)(9 - 3n + n^2)$$

$$(3 - n)(9 + 3n + n^2)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \quad A = 3 \text{ y } B = n$$

19. Factorizando la diferencia de cubos $k^6 - h^6$ resulta:

$$(k^2 - h^2)(k^4 + k^2h^2 + h^4)$$

$$(k^2 + h^2)(k^4 + k^2h^2 + h^4)$$

$$(k^2 - h^2)(k^4 - k^2h^2 + h^4)$$

R/ a)

Sugerencia

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$k^6 - h^6 = (k^2)^3 - (h^2)^3 \quad A = k^2 \text{ y } B = h^2$$

20. Factorizando la diferencia de cubos $1 - y^3$ resulta:

$$(1 + y)(1 + y + y^2)$$

$$(1 - y)(1 + y + y^2)$$

$$(1 - y)(1 - y + y^2)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$1 - y^3 = 1^3 - y^3 \quad A = 1 \quad y \quad B = y$$

21. Factorizando la diferencia de cubos $n^6 - 27$ resulta:

$$(n - 3)(n^2 + 3n + 9)$$

$$(n^2 - 3)(n^2 + 3n + 9)$$

$$(n^2 - 3)(n^4 + 3n^2 + 9)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$n^6 - 27 = (n^2)^3 - 3^3 \quad A = n^2 \quad y \quad B = 3$$

22. Factorizando la diferencia de cubos $8 - y^3$ resulta:

$$(2 - y)(4 + 2y + y^2)$$

$$(2 + y)(4 + 2y + y^2)$$

$$(2 + y)(4 - 2y + y^2)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

$$8 - y^3 = 2^3 - y^3 \quad A = 2 \quad y \quad B = y$$

23. Factorizando la suma de cubos $m^3 + n^3$ resulta:

$$(m - n)(m^2 + mn + n^2)$$

$$(m + n)(m^2 - mn + n^2)$$

$$(m + n)(m^2 + mn + n^2)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad A = m \text{ y } B = n$$

24. Factorizando la suma de cubo $3^3 + n^3$ resulta:

$$(3 - n)(9 + 3n + n^2)$$

$$(3 + n)(9 + 3n + n^2)$$

$$(3 + n)(9 - 3n + n^2)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \quad A = 3 \text{ y } B = n$$

25. Factorizando la suma de cubos $8 + y^3$ resulta:

$$(2 + y)(4 - 2y + y^2)$$

$$(2 + y)(4 + 2y + y^2)$$

$$(2 - y)(4 - 2y + y^2)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$8 + y^3 = 2^3 + y^3 \quad A = 2 \text{ y } B = y$$

26. Factorizando la suma de cubo $k^6 + h^6$ resulta:

$$(k^2 - h^2)(k^4 + k^2h^2 + h^4)$$

$$(k^2 + h^2)(k^4 - k^2h^2 + h^4)$$

$$(k^2 - h^2)(k^4 - k^2h^2 + h^4)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$k^6 + h^6 = (k^2)^2 + (h^2)^2 \quad A = k^2 \text{ y } B = h^2$$

27. Factorizando la suma de cubos $1 + y^3$ resulta:

$$(1 - y)(1 - y + y^2)$$

$$(1 + y)(1 + y + y^2)$$

$$(1 + y)(1 - y + y^2)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$1 + y^3 = 1^3 + y^3 \quad A = 1 \text{ y } B = y$$

28. Factorizando la suma de cubos $n^6 + 27$ resulta:

$$(n^2 + 3)(n^2 - 3n + 9)$$

$$(n^2 - 3)(n^2 - 3n + 9)$$

$$(n^2 + 3)(n^4 - 3n^2 + 9)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

$$n^6 + 27 = (n^2)^3 + 3^3 \quad A = n^2 \text{ y } B = 3$$

29. Factorizando el Trinomio $x^2 + 8x + 15$ se obtiene:

$$(x - 3)(x - 5)$$

$$(x + 3)(x + 5)$$

$$(x + 3)(x - 5)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = 8 \text{ y } mn = 15 \text{ entonces } m = 3 \text{ y } n = 5$$

30. Factorizando el Trinomio $x^2 + x - 20$ se obtiene:

$$(x - 5)(x - 4)$$

$$(x + 10)(x - 2)$$

$$(x + 5)(x - 4)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = 1 \text{ y } mn = -20 \text{ entonces } m = 5 \text{ y } n = -4$$

31. Factorizando el Trinomio $x^2 - 10x + 9$ se obtiene:

$$(x - 1)(x - 9)$$

$$(x + 1)(x + 9)$$

$$(x + 1)(x - 9)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = -10 \text{ y } mn = 9 \text{ entonces } m = -1 \text{ y } n = -9$$

32. Factorizando el Trinomio $u^2 - 4u - 60$ se obtiene:

$$(u - 6)(u - 10)$$

$$(u + 6)(u - 10)$$

$$(u - 6)(u + 10)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = -4 \text{ y } mn = 6 \times (-10) = -60 \text{ entonces } m = 6 \text{ y } n = -10$$

33. Factorizando el Trinomio $2u^2 + 7u + 3$ se obtiene:

$$(2u - 1)(u - 3)$$

$$(2u - 1)(u + 3)$$

$$(2u + 1)(u + 3)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = 7 \text{ y } mn = 1 \times 6 \text{ entonces } m = 1 \text{ y } n = 6$$

De $2u + 6$ se factoriza 2 y se simplifica con 2 del denominador.

34. Factorizando el Trinomio $6h^2 + h - 2$ se obtiene:

$$(3h + 1)(2h - 1)$$

$$(3h - 2)(2h + 1)$$

$$(3h - 2)(2h - 1)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = 1 \text{ y } mn = 4 \times (-3) = -12 \text{ entonces } m = 4 \text{ y } n = -3$$

Se factoriza 2 y 3 y simplifica con el 6 del denominador

35. Factorizando el Trinomio $12z^2 - z - 6$ se obtiene:

$$(3z - 2)(4z - 3)$$

$$(3z + 2)(4z - 3)$$

$$(4z - 1)(3z - 6)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = -1 \text{ y } mn = 8 \times (-9) = -72 \text{ entonces } m = 8 \text{ y } n = -9$$

Se factoriza 4 y 3 y simplifica con el 12 del denominador

36. Factorizando el Trinomio $10v^2 - 7v + 1$ se obtiene:

$$(2v + 1)(5v + 1)$$

$$(2v - 1)(5v + 1)$$

$$(2v - 1)(5v - 1)$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = c$$

$$m + n = -7 \text{ y } mn = (-5)(-2) = 10 \text{ entonces } m = -5 \text{ y } n = -2$$

Se factoriza 2 y 5 y simplifica con el 10 del denominador

37. Factorizando el Trinomio $\frac{2}{3}t^2 - \frac{35}{9}t - \frac{2}{3}$ se obtiene:

$$\frac{1}{9}(6t + 1)(t - 6)$$

$$(6t + 1)(t - 6)$$

$$\frac{1}{3}(6t + 1)(t - 6)$$

R/ a)

Sugerencia.

Se reduce primero los coeficientes a un común denominador; 9 en este caso; se factoriza $\frac{1}{9}$ y el otro factor es de la forma $ax^2 + bx + c$ con coeficientes enteros. Se aplica el proceso como en los casos anteriores.

38. Factorizando el Trinomio $0,5u^2 + 0,9u - 0,20$ se obtiene:

$$(u + 0,2)(5u - 1)$$

$$(0,1u + 0,2)(5u - 1)$$

$$(0,1u + 0,2)(0,5u - 1)$$

R/ b)

Sugerencia.

Primero se multiplica los coeficientes por 10 y se factoriza $\frac{1}{10}$ y el otro factor es de la forma $ax^2 + bx + c$ con coeficientes enteros. Se aplica el proceso como en los casos anteriores.

$$(0,5)u^2 + (0,9)u - (0,2) = \frac{1}{10}(5u^2 + 9u - 2)(*)$$

Factorizando el trinomio se tiene:

$$5u^2 + 9u - 2 = \frac{(5u + 10)(5u - 1)}{5} = \frac{5(u + 2)(5u - 1)}{5} = (u + 2)(5u - 1)$$

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n) \text{ donde } m + n = b \text{ y } mn = ac$$

$$m + n = 9 \text{ y } mn = 10(-1) = -10 \text{ entonces } m = 10 \text{ y } n = -1$$

Reemplazando en (*):

$$\begin{aligned}(0,5)u^2 + (0,9)u - (0,2) &= \frac{1}{10}(u + 2)(5u - 1) = \left(\frac{u}{10} + \frac{2}{10}\right)(5u - 1) \\ &= (0,1u + 0,2)(5u - 1)\end{aligned}$$

3.10.8 Factor Común y Otros Casos

1. Factorizando la expresión $1600 - 16u^2$ se obtiene:

$$16(10 + u)(10 - u)$$

$$160(1 + u)(1 - u)$$

$$160(10 + u)(10 - u)$$

R/ a)

Sugerencia.

Factor común y diferencia de cuadrados.

$$1600 - 16u^2 = 16(100 - u^2) = 16(10 + u)(10 - u)$$

2. Factorizando la expresión $4bx^4 - 49b$ se obtiene:

$$b(2x^2 + 7)(2x^2 + 7)$$

$$b(2x^2 + 7)(2x^2 - 7)$$

$$b(2x^2 - 7)(2x^2 - 7)$$

R/ b)

Sugerencia.

Factor común y diferencia de cuadrados.

$$4bx^4 - 49b = b(4x^4 - 49) = b(2x^2 + 7)(2x^2 - 7)$$

3. Factorizando la expresión $4n^8 - 324n^2$ se obtiene:

$$4n^2 (n^3 - 3) (n^3 + 3)$$

$$4n^2 (n^3 + 9) (n^3 + 9)$$

$$4n^2 (n^3 + 9) (n^3 - 9)$$

R/ c)

Sugerencia.

Factor común y diferencia de cuadrados.

$$4n^8 - 324n^2 = 4n^2(n^6 - 81) = 4n^2(n^3 + 9)(n^3 - 9)$$

4. Factorizando la expresión $90y^4 - 360$ se obtiene:

$$90(y^2 + 2) (y^2 - 2) \quad 90(y^2 + 2)(y^2 - 2)$$

$$9(y^2 + 4) (y^2 - 4) \quad 9(y^2 + 4)(y^2 - 4)$$

$$90(y + 2) (y - 2) \quad 90(y + 2)(y - 2)$$

R/ a)

Sugerencia.

Factor común y diferencia de cuadrados.

$$90y^4 - 360 = 90(y^4 - 4) = 90(y^2 + 2)(y^2 - 2)$$

5. Factorizando la expresión $12x^2 + 36xy + 27y^2$ se obtiene:

$$3(3x + 2y)^2$$

$$3(2x + 3y)^2$$

$$3(2x - 3y)^2$$

R/ b)

Sugerencia.

$$12x^2 + 36xy + 27y^2 = 3(4x^2 + 12xy + 9y^2) = 3(2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \\ = 3(2x + 3y)^2$$

6. Factorizando la expresión $45x^2 + 20y^2 - 60xy$ se obtiene:

$$5(3x + 2y)^2$$

$$(15x - 10y)^2$$

$$5(3x - 2y)^2$$

R/ c)

Sugerencia.

$$45x^2 + 20y^2 - 60xy = 5(9x^2 + 4y^2 - 12xy) = 5((3x)^2 + (2y)^2 - 2(3x)(2y)) \\ = 5(3x - 2y)^2$$

7. Factorizando la expresión $5x^2 + 35x + 60$

$$5(x + 3)(x + 4)$$

$$5(x - 3)(x - 4)$$

$$5(x + 3)(x - 4)$$

R/ a)

Sugerencia.

Factor común y factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$5x^2 + 35x + 60 = 5(x^2 + 7x + 12) = 5(x + 3)(x + 4)$$

8. Factorizar la expresión $2x^2 + 6x - 20$

$$2(x + 2)(x - 5)$$

$$2(x + 5)(x - 2)$$

$$2(x + 5)(x + 2)$$

R/ b)

Sugerencia.

Factor común y factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$2x^2 + 6x - 20 = 2(x^2 + 3x - 10) = 2(x + 5)(x - 2)$$

9. Factorizando la expresión $8x^2 - 72x + 64 = 8$

$$8(x + 1)(x + 8)$$

$$8(x + 1)(x - 8)$$

$$8(x - 1)(x - 8)$$

R/ c)

Sugerencia.

Factor común y factorización de un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

$$8x^2 - 72x + 64 = 8 = 8(x^2 - 9x + 8) = 8(x - 1)(x - 8)$$

3.10.9 Racionalización

1. Racionalizando $\frac{4}{\sqrt{2}}$ se obtiene:

$$2\sqrt{2}$$

$$\sqrt{2}$$

$$4\sqrt{2}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad A = 4 \text{ y } B = 2$$

2. Racionalizando $\frac{1}{\sqrt{6}}$ se obtiene:

$$\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2}$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad A = 1 \text{ y } B = 6$$

3. Racionalizando $\frac{-10}{\sqrt{5}}$ se obtiene:

$$2\sqrt{10}$$

$$-5\sqrt{2}$$

$$-2\sqrt{5}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad A = -10 \text{ y } B = 5$$

4. Racionalizando $\frac{-28}{\sqrt{21}}$ se obtiene:

$$-\frac{4}{3}\sqrt{21}$$

$$-\frac{4}{3}\sqrt{7}$$

$$-\frac{3}{4}\sqrt{21}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad A = -28 \text{ y } B = 21$$

5. Racionalizando $\frac{10}{\sqrt[3]{15}}$ se obtiene:

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{25}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{225}$$

$$\frac{2}{3}\sqrt[3]{125}$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}} = \frac{A \sqrt[3]{B^2}}{B} \quad A = 10 \text{ y } B = 15$$

6. Racionalizando $\frac{10}{\sqrt[3]{10}}$ se obtiene:

$$\sqrt[3]{10}$$

$$10\sqrt[3]{10}$$

$$\sqrt[3]{100}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}} = \frac{A \sqrt[3]{B^2}}{B} \quad A = 10 \text{ y } B = 10$$

7. Racionalizando $\frac{-64}{\sqrt[3]{32}}$ se obtiene:

$$-16 \sqrt[3]{2}$$

$$-16 \sqrt[3]{4}$$

$$-16 \sqrt[3]{6}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt[3]{B}} = \frac{A \sqrt[3]{B^2}}{B} \quad A = -64 \text{ y } B = 32$$

$$\sqrt[3]{32^2} = \sqrt[3]{(2^5)^2} = \sqrt[3]{2^{10}} = \sqrt[3]{2^9 \times 2} = 2^3 \sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$$

8. Racionalizando $\frac{12}{\sqrt{12+\sqrt{3}}}$ se obtiene:

$$\frac{4}{3} \sqrt{12}$$

$$\frac{4}{3} \sqrt{3}$$

$$\frac{3}{4} \sqrt{3}$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} - \sqrt{C})}{B - C} \quad A = 12, B = 12 \text{ y } C = 3$$

$$\sqrt{12} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{3} = \sqrt{3}$$

9. Racionalizando $\frac{24}{\sqrt{10}-\sqrt{2}}$ se obtiene:

$$6(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

$$8(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

$$3(\sqrt{10} + \sqrt{2})$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C})}{B - C} \quad A = 24, B = 10 \text{ y } C = 2$$

10. Racionalizando $\frac{-8}{\sqrt{10}+\sqrt{2}}$ se obtiene:

$$\sqrt{2} - \sqrt{10}$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{10}$$

$$\sqrt{10} - \sqrt{2}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} - \sqrt{C})}{B - C} \quad A = -8, B = 10 \text{ y } C = 2$$

11. Racionalizando $\frac{52}{\sqrt{12}-8}$ se obtiene:

$$\sqrt{12} - 8$$

$$-\sqrt{12} - 8$$

$$\sqrt{12} + 8$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B} - \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} + \sqrt{C})}{B - C} \quad A = 24, B = 10 \text{ y } C = 64$$

$$\begin{aligned} \sqrt{12} - 8 &= \sqrt{12} - \sqrt{64}; \quad 12 - 64 = -52; \quad \frac{52}{-51} = -1; \quad (-1)(\sqrt{12} + 8) \\ &= -\sqrt{12} - 8 \end{aligned}$$

12. Racionalizando $\frac{-100}{8 + \sqrt{14}}$ se obtiene:

$$2\sqrt{14} + 16$$

$$2\sqrt{14} - 8$$

$$2\sqrt{14} - 16$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\frac{A}{\sqrt{B} + \sqrt{C}} = \frac{A(\sqrt{B} - \sqrt{C})}{B - C} \quad A = -100, B = 64 \text{ y } C = 14$$

$$\begin{aligned} 8 + \sqrt{14} &= 64 + \sqrt{14}; \quad 64 - 14 = 50; \quad -\frac{100}{50} = -2; \quad (-2)(8 - \sqrt{14}) \\ &= 2\sqrt{14} - 16 \end{aligned}$$

3.10.10 Algoritmo de la División

1. Según el Algoritmo de la División, $x^3 - 4x^2 - 11x + 32$ es igual a:

$$(x - 5)(x^2 + x - 6) + 2$$

$$(x - 5)(x^2 + x + 6) + 2$$

$$(x - 5)(x^2 - x - 6) + 2$$

R/ a)

Sugerencia.

Se divide $x^3 - 4x^2 - 11x + 32$ entre $x - 5$ aplicando división sintética.

2. Según el Algoritmo de la División, $x^3 - 4x^2 - 11x + 27$ es igual a:

$$(x + 3)(x^2 - 7x + 12) + (-3)$$

$$(x + 3)(x^2 - 7x + 10) + (-3)$$

$$(x + 3)(x^2 + 7x + 10) + (-3)$$

R/ b)

Sugerencia.

Se divide $x^3 - 4x^2 - 11x + 27$ entre $x + 3$ aplicando división sintética.

3. Según el Algoritmo de la División $x^3 - 4x^2 - 11x + 34$, es igual a:

$$(x - 2)(x^2 + 2x + 15) + 4$$

$$(x - 2)(x^2 - 3x - 15) + 4$$

$$(x - 2)(x^2 - 2x - 15) + 4$$

R/ c)

Sugerencia.

Se divide $x^3 - 4x^2 - 11x + 34$ entre $x - 2$ aplicando división sintética.

4. Según el Algoritmo de la División, la división de $8x^3 + 2x^2 - 27x - 18$ entre $2x + 3$ es igual a:

$$(2x + 3)(4x^2 - 5x - 6) + 0$$

$$(2x + 3)(4x^2 - 5x - 6) + 1$$

$$(2x + 3)(4x^2 - 5x - 6) + 2$$

R/ a)

Sugerencia. Se divide $8x^3 + 2x^2 - 27x - 18$ entre $2x + 3$ aplicando división sintética.

5. Según el Algoritmo de la División, la división de $8x^3 + 2x^2 - 27x - 18$ entre $x - 2$ es igual a:

$$(x - 2)(8x^2 + 18x + 8) + (-2)$$

$$(x - 2)(8x^2 + 18x + 9) + 0$$

$$(x - 2)(8x^2 + 18x + 7) + (-4)$$

R/ b)

Sugerencia. Se divide $8x^3 + 2x^2 - 27x - 18$ entre $x - 2$ aplicando división sintética.

3.10.11 Raíces y Factores Lineales de un Polinomio

1. Si $(2x - 5)$ y $(x + 4)$ son factores de un polinomio de grado 2, entonces el polinomio es:

$$2x^2 + 3x - 20$$

$$2x^2 + 3x + 20$$

$$2x^2 - 3x - 20$$

R/ a)

Sugerencia.

Se realiza el producto: $(2x - 5)(x + 4)$

2. Si 6 es raíz y $(x + 4)$ y $(2x - 5)$ son factores de un polinomio de grado 3, entonces el polinomio es:

$$2x^3 - 9x^2 - 38x - 120$$

$$2x^3 - 9x^2 - 38x + 120$$

$$2x^3 - 9x^2 + 38x + 120$$

R/ b)

Sugerencia.

Como 6 es raíz, entonces $x - 6$ es un factor; se realiza luego el producto: $(x - 6)(2x - 5)(x + 4)$.

3. Si -4 es una raíz de $p(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 60$, entonces, las otras dos raíces de $p(x)$ son

$$5 \text{ y } 3$$

$$-5 \text{ y } -3$$

$$-5 \text{ y } 3$$

R/ c)

Sugerencia.

Se divide el polinomio $p(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 60$ entre $x + 4$, aplicando división sintética y se halla las raíces del polinomio cociente, el cual es de grado 2

4. Si $-5, -4$ y 3 son las raíces de un polinomio $p(x)$ de grado 3, entonces, $p(x)$ es igual a:

$$x^3 + 6x^2 - 7x - 60$$

$$x^3 + 6x^2 - 7x + 60$$

$$x^3 + 6x^2 + 7x - 60$$

R/ a)

Sugerencia.

Como $-5, -4$ y 3 son las raíces, entonces $(x + 5), (x + 4)$ y $(x - 3)$ son los factores de $p(x)$. Se realiza el producto $(x + 5)(x + 4)(x - 3)$.

5. Si $(4x - 5)$ es factor, 3 y $-\frac{2}{3}$ son raíces de un polinomio $p(x)$ de grado 3, entonces el polinomio con coeficientes enteros es:

$$12x^3 + 43x^2 + 11x + 30$$

$$12x^3 - 43x^2 + 11x + 30$$

$$12x^3 - 43x^2 - 11x + 30$$

R/ b)

Sugerencia.

Dado que 3 y $-\frac{2}{3}$ son raíces de $p(x)$ entonces $(x - 3)$ y $(x + 2)$ son factores del polinomio. Se realiza el producto $(4x - 5)(x - 3)(3x + 2)$

6. Si 3 y -2 son raíces de $p(x) = 6x^4 + x^3 - 41x^2 - 44x - 12$, entonces, las otras dos raíces de $p(x)$ son:

$$\frac{2}{3} \text{ y } \frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{3} \text{ y } \frac{1}{2}$$

$$-\frac{2}{3} \text{ y } -\frac{1}{2}$$

R/ c)

Sugerencia.

Aplicando división sintética, se divide $p(x) = 6x^4 + x^3 - 41x^2 - 44x - 12$ entre $x - 3$ y luego el cociente se divide entre $x + 2$; después se halla las raíces del segundo cociente, el cual es polinomio de grado 2

7. Las raíces de $p(x) = (9x + 2)(x - 17)(5x - 2)(x + 15)\left(x + \frac{8}{5}\right)$ son:

$$-\frac{2}{9}, 17, \frac{2}{5}, -15, -\frac{8}{5}$$

$$\frac{2}{9}, -17, -\frac{2}{5}, 15, \frac{8}{5}$$

$$-\frac{9}{2}, 17, \frac{5}{2}, -15, -\frac{5}{8}$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $ax + b$ es un factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $-\frac{b}{a}$ es una raíz de $p(x)$.
De cada factor lineal se obtiene una raíz.

8. Si $(3x + 2)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p\left(-\frac{2}{3}\right)$ es igual a:

$$\frac{2}{3}$$

$$0$$

$$\frac{3}{2}$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $ax + b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

9. Si $(7x - 3)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p\left(\frac{3}{7}\right)$ es igual a:

$$\frac{3}{7}$$

$$\frac{7}{3}$$

$$0$$

R/ c)

Sugerencia.

Si $ax + b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$

10. Si $(x - 5)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p(5)$ es igual a:

$$0$$

$$-5$$

$$5$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $x - b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p(b) = 0$

11. Si $(x + 8)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces:

$$p(8) = 0$$

$$p(-8) = 0$$

$$p(-8) = 8$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $x + b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p(-b) = 0$

12. Si $(x - 12)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces:

$$p(-12) = 0$$

$$p(12) = 12$$

$$p(12) = 0$$

R/ c)

Sugerencia.

Si $x - b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p(b) = 0$ 13. Seleccione la respuesta: si $(7x + 2)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces:

$$p\left(-\frac{2}{7}\right) = 0$$

$$p\left(\frac{2}{7}\right) = 0$$

$$p\left(-\frac{7}{2}\right) = 0$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $ax + b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ 14. Si $(6x - 1)$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces:

$$p(6) = 0$$

$$p\left(\frac{1}{6}\right) = 0$$

$$p\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $ax - b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ 15. Si $p\left(-\frac{5}{3}\right) = 0$, $p\left(\frac{7}{2}\right) = 0$ y $p(2) = 0$ entonces los factores lineales de $p(x)$ son:

$$(3x - 5), (2x + 7) \text{ y } (x + 2)$$

$$(3x - 5), (2x + 7) \text{ y } (x - 2)$$

$$(3x + 5), (2x - 7) \text{ y } (x - 2)$$

R/ c)

Sugerencia.

Si $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ y $p\left(\frac{b}{a}\right) = 0$ entonces, $-\frac{b}{a}$ y $\frac{b}{a}$ son raíces de $p(x)$, por lo cual $(ax + b)$ y $(ax - b)$ son factores de $p(x)$

16. El residuo de dividir cualquier polinomio $p(x)$ entre $(x + 18)$ es:

$$p(-18)$$

$$p(18)$$

$$p\left(\frac{1}{8}\right)$$

R/ a)

Sugerencia.

El residuo de dividir cualquier polinomio $p(x)$ entre $(x + b)$ es $p(-b)$.

17. El resto de dividir cualquier polinomio $p(x)$ entre $(7x - 2)$ es:

$$p\left(\frac{7}{2}\right)$$

$$p\left(\frac{2}{7}\right)$$

$$p\left(-\frac{2}{7}\right)$$

R/ b)

Sugerencia.

El residuo de dividir cualquier polinomio $p(x)$ entre $(ax - b)$ es $p\left(\frac{b}{a}\right)$

18. Las posibles raíces racionales del polinomio $p(x) = x^3 + 8x^2 - 30x + 12$, son:

$$-30, 8 \text{ y } 1$$

$$1, 2, 3, 4, 6 \text{ y } 12$$

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6 \text{ y } \pm 12$$

R/ c)

Sugerencia. Las posibles raíces racionales de $p(x) = x^3 + 8x^2 - 30x + 12$, son los divisores de 12.

19. Un polinomio de grado 5 tiene como máximo:

5 raíces complejas diferentes

6 raíces complejas diferentes

4 raíces complejas diferentes

R/ a)

Sugerencia.

Un polinomio de grado n , tiene como máximo n raíces complejas diferentes

20. Seleccione la respuesta: Si $kx + h$ es un factor lineal de un polinomio $p(x)$, entonces:

$\frac{h}{k}$ es raíz de $p(x)$

$-\frac{h}{k}$ es raíz de $p(x)$

$-\frac{k}{h}$ es raíz de $p(x)$

R/ b)

Sugerencia.

Si $ax + b$ es un factor lineal de un polinomio $p(x)$, entonces $-\frac{b}{a}$ es raíz de $p(x)$

21. Si $-\frac{b}{a}$ es una raíz de un polinomio $p(x)$, entonces:

$(ax + b)$ es un factor de $p(x)$

$(bx - a)$ es un factor de $p(x)$

$(bx + a)$ es un factor de $p(x)$

R/ a)

Sugerencia.

De cada raíz de un polinomio $p(x)$, se obtiene un factor lineal de $p(x)$

22. Si $x = 1$ es una solución de la ecuación $x^3 - 7x + h = 0$, entonces h es igual a:

6

7

3

R/ a)

Sugerencia.

Se reemplaza en $x^3 - 7x + h = 0$ la variable x por 1 y se obtiene el valor de h

23. Si 4 es la única solución de una ecuación polinómica de grado 3 con variable x , entonces, la ecuación es:

$$x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0$$

$$x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$$

$$x^3 - 48x^2 + 12x - 64 = 0$$

R/ b)

Sugerencia.

Se desarrolla $(x - 4)^3$ y se iguala a cero

Si 4 es la única solución de una ecuación polinómica de grado 3 con variable x , entonces es una raíz triple, por lo tanto la ecuación es $(x - 4)^3 = 0$, es decir:
 $x^3 - 12x^2 + 48x - 64 = 0$

24. Si 2, 1 y -3 son soluciones de una ecuación cúbica con variable x , entonces la ecuación es:

$$x^3 + 2x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$x^3 - 7x^2 + 6 = 0$$

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

R/ c)

Sugerencia.

Se desarrolla el producto $(x - 2)(x - 1)(x + 3)$ y se iguala a cero

3.10.12 Soluciones Reales de Ecuaciones e Inecuaciones

1. Las soluciones de $(8x + 5)(x - 19)(x^2 - 25)(x + 10)(x + \frac{3}{4}) = 0$, son:

$$-\frac{5}{8}, 19, 5, -5, -10, -\frac{3}{4}$$

$$\frac{5}{8}, -19, 5, -5, 10, \frac{3}{4}$$

$$\frac{8}{5}, 19, 5, -5, -10, -\frac{4}{3}$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $ax \pm b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $\mp \frac{b}{a}$ es una solución de la ecuación polinómica $p(x) = 0$. De cada factor lineal se obtiene una solución. Tener en cuenta que $(x^2 - 25) = (x - 5)(x + 5)$

2. Las soluciones de $(x + 6)(x^2 - 49)(x + 8) = 0$, son:

$$6, -7, 7, -8$$

$$-6, -7, 7, -8$$

$$-6, 7, 7, -8$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $ax \pm b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $\mp \frac{b}{a}$ es una solución de la ecuación polinómica $p(x) = 0$.

De cada factor lineal se obtiene una solución. Tener en cuenta que $(x^2 - 49) = (x + 7)(x - 7)$

3. Las soluciones reales de $(x^2 - 1)(x^3 - 8) = 0$, son:

$$1, -1, -2$$

$$1, 2, 3$$

$$1, -1, 2$$

R/ c)

Sugerencia.

Si $ax \pm b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $\mp \frac{b}{a}$ es una solución de la ecuación polinómica $p(x) = 0$.

De cada factor lineal se obtiene una solución. Tener en cuenta que $(x^2 - 1) = (x + 1)(x - 1)$.

Si $x^3 - 8 = 0$, entonces $x^3 = 8$; entonces, $x = \sqrt[3]{8} = 2$. Las otras dos soluciones de $x^3 - 8 = 0$ son números complejos.

4. Las soluciones de $(3x + 5)(x^2 - 10)(4x - 1) = 0$, son:

$$-\frac{5}{3}, \frac{1}{4}, -\sqrt{10}, \sqrt{10}$$

$$-\frac{5}{3}, \frac{1}{4}, -10, 10$$

$$\frac{5}{3}, -\frac{1}{4}, -\sqrt{10}, \sqrt{10}$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $ax \pm b$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $\mp \frac{b}{a}$ es una solución de la ecuación polinómica $p(x) = 0$.

De cada factor lineal se obtiene una solución. Tener en cuenta que $x^2 - 10 = (x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10})$.

5. Las soluciones de la ecuación $|x + 20| = 8$, son:

$$28, 12$$

$$-28, -12$$

$$28, -12$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $|x + a| = b$, entonces $x + a = b$ o $x + a = -b$ y despejando x : $x = b - a$ o $x = -b - a$

6. Las soluciones de la ecuación $|5x| = 10$, son:

$$5, -5$$

$$10, -10$$

$$2, -2$$

R/ c)

Sugerencia.

Si $|5x| = 10$, entonces, $5x = 10$ o $5x = -10$, entonces: $x = 2$ o $x = -2$

7. Las soluciones de la ecuación $|3x - 11| = 1$, son:

$$4, \frac{10}{3}$$

$$10, 4$$

$$-4, -\frac{10}{3}$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $|3x - 11| = 1$, entonces $3x - 11 = 1$ o $3x - 11 = -1$; entonces:

$$3x = 12 \text{ o } 3x = 10. \text{ Por tanto, } x = 4 \text{ o } x = \frac{10}{3}$$

8. Las soluciones de la ecuación $|x^2 - 81| = 19$, son:

$$10, \sqrt{62}$$

$$\pm 10, \pm \sqrt{62}$$

$$-10, -\sqrt{62}$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\text{Si } |x^2 - 81| = 19 \rightarrow x^2 - 81 = 19 \text{ o } x^2 - 81 = -19 \rightarrow x^2 = 100 \text{ o } x^2 = 62 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{100} \text{ o } \sqrt{x^2} = \sqrt{62}$$

$$\text{Entonces: } \sqrt{x^2} = \sqrt{100} \text{ o } \sqrt{x^2} = \sqrt{62} \rightarrow |x| = 10 \text{ o } |x| = \sqrt{62} \rightarrow x = \pm 10 \text{ o } x = \pm \sqrt{62}$$

9. Las soluciones de la ecuación $\sqrt{x + 10} = 5$, son:

5

25

15

R/ c)

Sugerencia.

Si $\sqrt{x+10} = 5$, entonces elevando al cuadrado: $x+10 = 25 \rightarrow x = 15$ 10. Las soluciones de la ecuación $\sqrt{2x-19} = 9$, son:

50

81

18

R/ a)

Sugerencia. Si $\sqrt{2x-19} = 9$, entonces, elevando al cuadrado se tiene: $2x-19 = 81 \rightarrow 2x = 100 \rightarrow x = 50$ 11. Las soluciones de la ecuación $\frac{44}{|x-10|} = |x+10|$, son:

$$12, -12, \quad \sqrt{66}, -\sqrt{66}$$

$$12, -12, \sqrt{56}, -\sqrt{56}$$

$$12, \sqrt{56}$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $\frac{44}{|x-10|} = |x+10|$, entonces: $44 = |x+10| \times |x-10| = |x^2-100|$ Si $|x^2-100| = 44 \rightarrow x^2-100 = 44$ o $x^2-100 = -44 \rightarrow x^2 = 144$ o $x^2 = 56$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{144}; \sqrt{x^2} = \sqrt{56}$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{144} \text{ o } \sqrt{x^2} = \sqrt{56} \rightarrow |x| = 12 \text{ o } |x| = \sqrt{56} \rightarrow x = \pm 12 \text{ o } x = \pm \sqrt{56}$$

12. El conjunto solución de la inecuación $|x+20| \leq 8$, es:

$$[28, 12]$$

$$[-8, 8]$$

$$[-28, -12]$$

R/ c)

Sugerencia.

Si $|x + 20| \leq 8$ entonces: $-8 \leq x + 20 \leq 8 \rightarrow -8 - 20 \leq x \leq 8 - 20 \rightarrow -28 \leq x \leq -12$

Luego $x \in [-28, -12]$

13. El conjunto solución de la inecuación $|3x - 11| \geq 1$, es:

$$\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \cup [4, \infty)$$

$$\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \cap [4, \infty)$$

$$\left(-\infty, -\frac{10}{3}\right] \cup [-4, +\infty)$$

R/ a)

Sugerencia.

$|3x - 11| \geq 1$ entonces: $3x - 11 \geq 1$ o $3x - 11 \leq -1 \rightarrow 3x \geq 12$ o $3x \leq 10 \rightarrow x \geq 4$ o $x \leq \frac{10}{3}$

Entonces: $x \in \left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$ o $x \in [4, +\infty)$. Por tanto, $x \in \left(\left(-\infty, \frac{10}{3}\right] \cup [4, +\infty)\right)$

14. El conjunto solución de la inecuación $\sqrt{x + 10} < 5$, es:

$$(-\infty, -10) \cup (15, +\infty)$$

$$[-10, 15)$$

$$(-\infty, -10] \cup [15, +\infty)$$

R/ b)

Sugerencia.

Si $\sqrt{x + 10} < 5$, entonces elevando al cuadrado: $x + 10 < 25$ y por otra parte, se debe cumplir que: $x + 10 \geq 0$

Luego: $x < 15$ y $x > -10 \rightarrow x < 15$ y $x \geq -10 \rightarrow x \in [-10, 15)$

15. El conjunto solución de la inecuación $|3x - 11| \leq 1$, es:

$$(-\infty, \frac{10}{3}] \cup [4, +\infty)$$

$$(-\infty, \frac{10}{3}] \cup [4, +\infty)$$

$$[\frac{10}{3}, 4]$$

R/ c)

Sugerencia.

$$|3x - 11| \leq 1 \rightarrow -1 \leq 3x - 11 \leq 1 \rightarrow 10 \leq 3x \leq 12 \rightarrow \frac{10}{3} \leq x \leq \frac{12}{3} \rightarrow x \in [\frac{10}{3}, 4]$$

16. El conjunto solución de la inecuación $\sqrt{2x - 19} > 9$, es:

$$(50, +\infty)$$

$$(\frac{19}{2}, +\infty)$$

$$[\frac{19}{2}, +\infty)$$

R/ a)

Sugerencia.

Si $\sqrt{2x - 19} > 9$; elevando al cuadrado se tiene: $2x - 19 > 81$; y por otra parte se debe cumplir $2x - 19 \geq 0$.

$$\text{Luego } 2x > 100 \text{ y } 2x \geq 19 \rightarrow x > 50 \text{ y } x \geq \frac{19}{2}.$$

$$\text{Así: } x \in [\frac{19}{2}, +\infty) \text{ y } x \in (50, +\infty)$$

$$\text{Luego, por intersección de conjuntos: } x \in (50, +\infty)$$

17. El conjunto solución de la inecuación $|x + 20| > 8$, es:

$$(-\infty, -28] \cup [-12, +\infty)$$

$$(-\infty, -28) \cup (-12, +\infty)$$

$$(-\infty, 12) \cup (28, +\infty)$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\text{Si } |x + 20| > 8, \text{ entonces } x + 20 > 8 \text{ o } x + 20 < -8$$

$$\text{Despejando } x \text{ en cada inecuación: } x > -12 \text{ o } x < -28 \rightarrow x \in (-\infty, -28) \text{ o } x \in (-12, +\infty)$$

$$\text{Aplicando unión de conjuntos se tiene que: } x \in (-\infty, -28) \cup (-12, +\infty)$$

18. El conjunto solución de la inecuación $|5x| \leq 10$, es:

$$(-5, 5)$$

$$[-5, 5]$$

$$[-2, 2]$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\text{Si } |5x| \leq 10, \text{ entonces: } -10 \leq 5x \leq 10, \text{ despejando } x: -2 \leq x \leq 2 \rightarrow x \in [-2, 2]$$

19. El conjunto solución de la inecuación $|5x| > 10$, es:

$$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

$$(-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$$

$$(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\text{Si } |5x| > 10, \text{ entonces: } 5x < -10 \text{ o } 5x > 10 \rightarrow x < -2 \text{ o } x > 2 \rightarrow x \in (-\infty, -2) \text{ o } x \in (2, +\infty)$$

$$\text{Aplicando unión de conjunto se tiene que: } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

CAPÍTULO 4.

Funciones

CAPÍTULO 4

FUNCIONES

4.1 FUNCIONES REALES

Antes de definir lo que es una función, se establece la definición de relación binaria

Una relación binaria entre un conjunto M y un conjunto N , es cualquier subconjunto del producto cartesiano $M \times N$

Ejemplos:

Sean $M = \{1, 2, 4\}$ y $N = \{a, b\}$

$M \times N = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (4, a), (4, b)\}$

Son relaciones entre M y N :
 $\{(1, a)\}$; $\{(1, b), (2, a)\}$; $\{(2, b), (4, a), (4, b)\}$; $\{(1, b), (2, b), (4, b)\}$

4.1.1 Definición de Función

Una relación F de M hacia N , (de M a N), lo cual se expresa así, $F: M \rightarrow N$, es una función si y solo si:

a cada elemento de M , le corresponde un único elemento de N .

A los elementos de M se los llama pre- imágenes, y a los elementos N que están relacionados con elementos de M , se los llama imágenes.

El conjunto M es el dominio (conjunto de partida, primer conjunto) y el conjunto N (conjunto de llegada o segundo conjunto) es el codominio de la función F . El conjunto de todas las imágenes, es el rango de F .

Notaciones: D_F es el dominio de F ; R_F es el rango (o recorrido) de F .

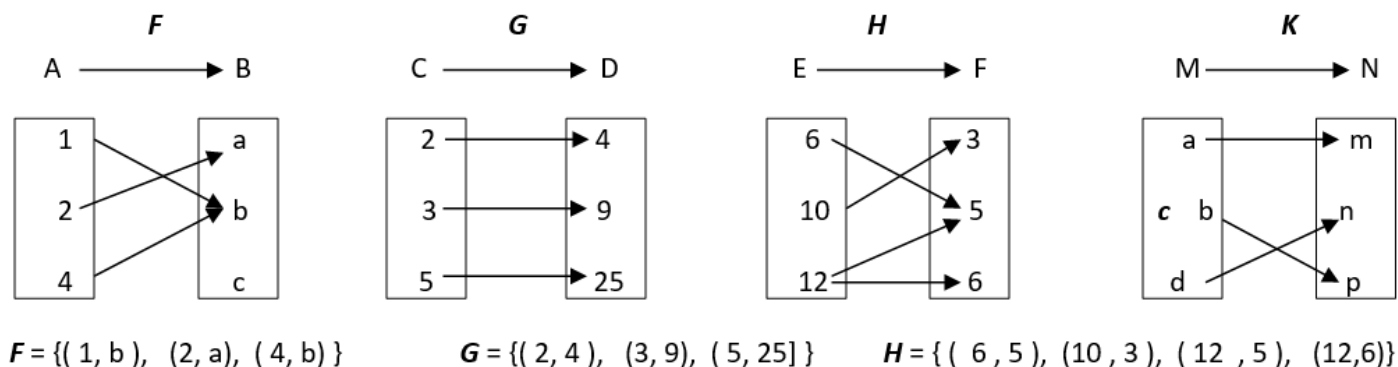
4.1.2 Función Inyectiva, Sobreyectiva y Biyectiva

Sea $F: M \rightarrow N$, una función.

F sobreyectiva cuando el rango de F es N , es decir, cuando todos los elementos de N son imágenes.

F es inyectiva, cuando cada imagen tiene una sola pre- imagen.

F es biyectiva, cuando es inyectiva y sobreyectiva.



F y G son funciones porque a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo

H no es función, porque el elemento 12 tiene dos (2) imágenes.

K no es función, porque al elemento c no le corresponde un elemento de N , es decir, no tiene imagen.

El dominio de F es $A = \{1, 2, 4\} = D_F$.

El rango de F es $R_F = \{a, b\} \subset B$

$R_G = \{4, 9, 25\} = D$; $D_G = C$

F no es inyectiva ni sobreyectiva; F no es biyectiva; G es inyectiva y sobreyectiva; G es biyectiva.

Nota.

Una relación F de M hacia N , no es función, cuando hay al menos un elemento de M , al cual no le corresponde un elemento de N ; es decir, no tiene imagen; o cuando hay al menos un elemento de M , el cual tiene dos o más imágenes.

Cuando F es función de M hacia N , se dice también que F es función definida de M hacia N .

Cuando $M = N$, entonces, se afirma que F es función definida sobre M . ($F: M \rightarrow M$).

En matemáticas interesa, sobre todo, funciones definidas sobre conjuntos numéricos; además, que los elementos de los conjuntos se relacionen mediante una fórmula o una proposición en términos de variables.

En estos casos, una función F se puede definir de la siguiente manera: sea F definida de M a N o definida sobre M , por $F(x) = y$. La variable x representa los elementos del dominio M ; la variable y representa los elementos del rango de la función. Según esto, cada x es pre imagen; cada y es imagen. Además, F es una función con una sola variable x .

Ejemplos:

En la función G , de los ejemplos dados, se observa que $G(x) = x^2 = y$

Si se define F sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, ($F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) así: $F(n) = 2n + 4 = y$, entonces, para cada número natural n ; $2n$ es número natural y único; $2n + 4$ es número natural, además, es único para cada n . Luego, F es función, pues cumple con la definición de función o condición para ser función.

$$F(1) = 6; F(2) = 8; F(3) = 10; F(4) = 12; F(5) = 14; F(6) = 16; F(7) = 18; F(8) = 20; F(9) = 22$$

El rango de F es $R_F = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 30, \dots\} \subset \mathbb{N}$.

Sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se define G por: $G(x) = \frac{7}{x} = y$, entonces G no es función porque el elemento 0 no tiene imagen en los reales; pues, $G(0) = \frac{7}{0}$ no está definido en los números reales, no es número real.

Si $G: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \frac{7}{x} = y$, entonces G es función. ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)

De igual manera, si H se define sobre $\mathbb{R}$, así: $H(x) = \frac{12}{x-4} = y$; H no es función porque $H(4)$ no existe en $\mathbb{R}$.

Si $H: \mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}$ y $H(x) = \frac{12}{x-4} = y$; entonces, en este caso, H es función.

Si $\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$, definida sobre $\mathbb{R}$, no es función, dado que, para $x < -6$ se tiene que $\sqrt{x+6}$ no es número real; es decir, estos valores de x , no tienen imagen real; pues, para $x < -6$, $\sqrt{x+6}$ es número imaginario.

Si se define β de $[-6, +\infty)$ hacia $\mathbb{R}$ y $\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$ entonces β es función.

Nota.

Si a y b son números reales y n entero positivo, entonces: $\frac{a}{b}$ es un número real si $b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a}$ es número real, cuando n es entero par y $a \geq 0$. Cuando n impar, a puede ser cualquier número real.

Para $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es número real; además, es mayor o igual que cero.

4.1.3 Función Constante

Una función $F: M \rightarrow N$ es constante, cuando para todo x , $F(x) = k$, donde k es un elemento fijo (constante) de N .

Ejemplos:

Para todo real x , son funciones constantes: $F(x) = 10$; $G(x) = -8$; $H(x) = \frac{12}{7}$; $K(x) = -9\sqrt{2}$

4.1.4 Función Inversa

Si $F: A \rightarrow B$, tal que $F(x) = y$, es función biyectiva, entonces $F^{-1}: B \rightarrow A$, tal que $F^{-1}(y) = x$, es función, y también es biyectiva. F^{-1} es la inversa de F .

Ejemplo

Si $F(x) = 3x + 7 = y$, para todo real x , entonces F es función biyectiva.

Despejando x se tiene: $x = \frac{y-7}{3}$

Luego, $F^{-1}(y) = \frac{y-7}{3} = x$

Se puede verificar que F^{-1} es función biyectiva.

4.2 FUNCIONES REALES CON UNA VARIABLE

Si $F: M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F(x) = y$; donde $M \subset \mathbb{R}$, es función, entonces: F es función real con una variable.

Como caso particular, puede ser $M = \mathbb{R}$, en este caso, F queda definida sobre $\mathbb{R}$.

Cuando se afirma que F es función real y $F(x) = y$, entonces, $F: M \rightarrow \mathbb{R}$. En este caso, obviamente no se analiza si F es función, pues, en la definición lo dice; pero es conveniente y necesario, obtener el conjunto M ; es decir, se debe determinar el dominio de la función.

Ejemplos:

Dadas las funciones reales G, H, β , definidas como sigue:

$$G(x) = \frac{7}{x} = y$$

$$H(x) = \frac{12}{x-4} = y$$

$$\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$$

Los dominios de las funciones G, H y β , son los siguientes:

$$D_G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$D_H = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$D_\beta = [-6, +\infty)$$

En muchos casos, también es conveniente obtener el rango de una función real F definida por $F(x) = y$.

Para ello, se despeja la variable x , y se analiza para qué valores reales de y , la variable x es número real.

Ejemplos:

Considere las funciones reales anteriores.

1. $G(x) = \frac{7}{x} = y$, entonces: $7 = xy \rightarrow \frac{7}{y} = x$. Por tanto, x es número real cuando $y \neq 0$. Así: $R_G = \mathbb{R}^*$.

2. $H(x) = \frac{12}{x-4} = y$

$$y = \frac{12}{x-4} \rightarrow 12 = (x-4)y \rightarrow 12 = (x-4)y \rightarrow 12 = xy - 4y \rightarrow 12 + 4y = xy \rightarrow \frac{12+4y}{y} = x$$

Se observa que x número real cuando $y \neq 0$; por lo tanto, $R_H = \mathbb{R}^*$

Para el caso de la función $\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$, se tiene que $\sqrt{x+6} \geq 0 \rightarrow x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6$

Entonces, $y = \sqrt{x+6} \geq 0 \rightarrow x+6 \geq 0 \rightarrow x \geq -6$

Por tanto, $D_\beta = [-6, +\infty)$ y $R_\beta = [0, +\infty)$.

3. $F(x) = \sqrt{2x+9}$

Si $F(x) = \sqrt{2x+9} = y$, entonces $\sqrt{2x+9} \geq 0$, en consecuencia, $y \geq 0$. Así. $R_F = [0, +\infty)$

$\sqrt{2x+9} \geq 0 \rightarrow 2x+9 \geq 0 \rightarrow y \geq 0 \rightarrow R_F = [0, +\infty)$

Ahora, $2x+9 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -9 \rightarrow x \geq -\frac{9}{2} \rightarrow x \in [-\frac{9}{2}, +\infty)$

Entonces, $D_F = [-\frac{9}{2}, +\infty)$ y $R_F = [0, +\infty)$

Como se puede observar, la función $F(x)$ *no es sobyectiva*; pero la función G definida como sigue:

$G: [-\frac{9}{2}, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ tales que $G(x) = \sqrt{2x+9}$, es sobyectiva.

$D_G = [-\frac{9}{2}, +\infty)$ y $R_F = [0, +\infty)$

4. $G(x) = \sqrt{x^2 - 36} = y$, entonces $R_G = [0, +\infty)$.

Por otra parte, $x^2 - 36 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 36 \rightarrow |x| \geq 6 \leftrightarrow x \leq -6 \text{ o } x \geq 6 \rightarrow x \in (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

$\rightarrow x \in (-\infty, -6] \cup [6, +\infty) \rightarrow D_G = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$

5. Para $H(x) = \sqrt{100 - x^2} = y$; $R_G = [0, +\infty)$. Ahora, $100 - x^2 \geq 0 \rightarrow 100 \geq x^2 \rightarrow 100 \geq \sqrt{x^2} \rightarrow 10 \geq |x|$

$\rightarrow |x| \leq 10 \rightarrow x \in [-10, 10] \rightarrow D_H = [-10, 10]$

6. Para $\beta(x) = \frac{\sqrt{144 - x^2}}{x^2 - 16}$

$144 - x^2 \geq 0 \rightarrow 144 \geq x^2 \rightarrow 12 \geq |x| \rightarrow x \in [-12, 12]$.

Por otra parte: $x^2 - 16 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 16 \rightarrow x \neq \pm 4$.

Luego: $D_\beta = [-12, 12] - \{-4, 4\}$

7. $\alpha(x) = \frac{18}{x^2 + 7} = y$.

Para todo número real x , $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 7 \geq 7$ entonces $D_\alpha = \mathbb{R}$

El mínimo valor de $x^2 + 7$, es 7, entonces el mínimo valor de y es $\frac{18}{7}$. Así que:

$R_\alpha = [\frac{18}{7}, +\infty)$

4.3 FUNCIONES REALES DESTACADAS

Entre las principales funciones reales con una variable, están: las polinómicas, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. También se destacan funciones reales con valor absoluto, fraccionarias, con radicales.

4.3.1 Funciones Polinómica

Una función real F es polinómica de grado n , si $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n$; $a_n \neq 0$

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales; x es la variable real.

El codominio de cualquier función polinómica es $\mathbb{R}$, pero se puede restringir el codominio hasta obtener como conjunto de llegada, el rango de la función. Es decir, se eliminan los elementos del codominio que no son imágenes. La función no cambia, su gráfica no cambia, pero se crea la posibilidad de disponer de una función biyectiva.

En los primeros ejemplos de funciones, la función F no es sobreyectiva; no obstante, si se redefine F de A hacia el conjunto $B' = \{a, b\} = R_F$, entonces F

queda sobreyectiva. Se ha eliminado el elemento c del conjunto B . La función F no cambia.

Nota.

El dominio de toda función polinómica, es el conjunto $\mathbb{R}$

El rango de las funciones polinómicas de grado impar, es $\mathbb{R}$

4.3.1.1 Casos particulares de funciones polinómicas

$F(x) = k$ es función polinómica de grado cero; k es un valor real fijo, constante.

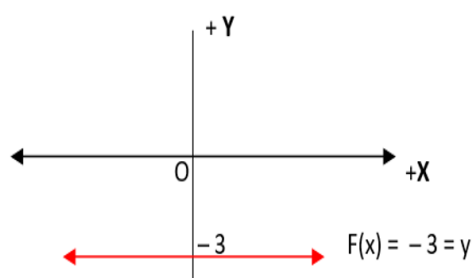
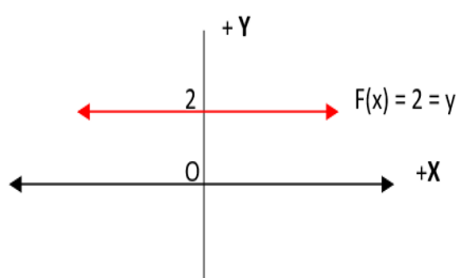
$F(x) = mx + n$ es función polinómica de grado uno; se llama función lineal; $m \neq 0$.

$F(x) = ax^2 + bx + c$ es función polinómica de grado dos; se denomina función cuadrática; $a \neq 0$.

$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es función polinómica de grado tres; se denomina función cúbica; $a \neq 0$.

4.3.1.2 Gráficas de funciones polinómicas en el Plano Cartesiano XOY

La gráfica de una función real constante, es una línea recta paralela al eje coordenado X



La gráfica de una función lineal $F(x) = mx + n$, es una línea recta no paralela al eje coordenado Y ; m es la pendiente.

Nota.

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo positivo medido desde el eje X hasta la recta.

Si $A(a, b)$ y $B(c, d)$ son puntos diferentes de una recta, entonces

$$\frac{y - b}{d - b} = \frac{x - a}{c - a}$$

es la ecuación dos-puntos de dicha recta.

$$y - b = \frac{(d - b)}{c - a}(x - a) = m(x - a)$$

es la ecuación pendiente - corte de la mencionada recta, donde: $m = \frac{d-b}{c-a}$ donde $c - a \neq 0$.

Ejemplo:

Sean los siguientes puntos con coordenadas cartesianas: $A(3, 4), B(5, 8), C(-3, 7), D(5, 4)$.

La ecuación pendiente-corte de la recta que pasa por los puntos A y B es la siguiente:

$$y - 4 = \frac{(8 - 4)}{5 - 3}(x - 3) = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 6 + 4 \rightarrow y = 2x - 2$$

La ecuación pendiente-corte de la recta que pasa por los puntos C y D es la siguiente:

$$y - 7 = \frac{(4 - 7)}{5 - (-3)}(x - (-3)) = \frac{-3}{8}(x + 3) \rightarrow y = \frac{-3}{8}x + \frac{-9}{8} + 7 \rightarrow y = \frac{-3}{8}x + \frac{47}{8}$$

La gráfica de una función cuadrática, $F(x) = ax^2 + bx + c = y$ es una parábola que se extiende desde su vértice hacia arriba, cuando $a > 0$, o hacia abajo cuando $a < 0$.

El vértice de la parábola es el punto de coordenadas $V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

Cuando $a > 0$, el rango de la función es el intervalo $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$.

Cuando $a < 0$, el rango de la función es el intervalo $\left(-\infty, \frac{4ac-b^2}{4a}\right]$

Ejemplo:

$$F(x) = x^2 - 4x - 12 = y$$

En este caso: $a = 1; b = -4; c = -12$.

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(1)(-12) - (-4)^2}{4(1)} = \frac{-48 - 16}{4} = \frac{-64}{4} = -16$$

Entonces:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = V(2, -16)$$

$$R_F = \left(\frac{4ac - b^2}{4a}, +\infty\right) = [-16, +\infty)$$

, el vértice es $V(-b/2a, c - (b^2/4a)) = V(2, -16)$; y el rango de la función es el intervalo $[-16, +\infty)$

Por otra parte, $x^2 - 4x - 12 = y = (x + 2)(x - 6)$

Luego, para $x = -2$ y $x = 6$; se obtiene $y = 0$. En este caso, la parábola corta al eje X en $x = -2$ y $x = 6$; es decir, la parábola intercepta al eje X en los puntos de coordenada $(-2, 0)$ y $(6, 0)$.

4.3.2 Función Exponencial y Función Logarítmica

Para un número real fijo positivo $a, a \neq 1$, la función $E(x) = ax^3 = y$, es una función real; la función E se llama función real exponencial.

Para $0 < a$; si $x \rightarrow +\infty$, (tiende a $+\infty$), entonces $a \rightarrow +\infty$; si $x \rightarrow -\infty$, entonces $a^x \rightarrow 0$, $a^x \neq 0$

Para $0 < a < 1$; si $x \rightarrow +\infty$, entonces $a^x \rightarrow 0$; si $x \rightarrow -\infty$, entonces $a^x \rightarrow +\infty$

Para $x = 0$, $a^0 = 1 = y$.

La gráfica de la función exponencial E intercepta al eje Y en el punto $(0, 1)$.

Para todo número real x , $a^x > 0$.

Entonces el dominio de E es $\mathbb{R}$ y el rango de E es $\mathbb{R}^+$.

Según esto, E no es sobreyectiva, pero es inyectiva.

Restringiendo el codominio $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, entonces E es sobreyectiva y en consecuencia es biyectiva. Es decir, la función $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$, $E(x) = a^x$ es una función exponencial biyectiva.

4.3.2.1 Potenciación

$$A^n = P$$

A es la base, P es la n -ésima potencia de A , n el exponente. Se conoce A y n , se determina P .

4.3.2.2 Radicación

$$\sqrt[n]{P} = A$$

A es la n -sima raíz de P ; n es el índice. P cantidad sub-radical. Se conocen P y n , se determina A .

4.3.2.3 Logaritmación

$$\text{Log}_A(P) = n$$

A es la base, P es el número al cual se calcula el logaritmo. Se conocen A y P , se determina n .

Según lo anterior, se tiene lo siguiente:

$$\text{Log}_A(P) = n \leftrightarrow A^n = P$$

Por lo tanto: $E(x) = a^x = y$ si y solo si $\log_a(y) = x = L(y)$

Como $E: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ entonces: $L: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

La función L es función logarítmica; entonces, L es también función biyectiva. El dominio de L es $\mathbb{R}^+$.

Notas

Cuando la base del logaritmo es 10, entonces, se escribe $\text{Log}_{10}(x) = \text{Log}(x)$. Esta función logarítmica se denomina función logaritmo decimal.

Cuando la base del logaritmo es el número irracional e (número de Euler, $e = 2,718281 \dots$), entonces, se escribe $\text{Log}_e(x) = \text{Ln}(x)$. Esta función logarítmica se denomina función logaritmo natural.

No existe logaritmo de cero ni de números reales negativos.

Ejemplos:

$$\text{Log}_2(8) = 3 \text{ porque } 2^3 = 8$$

$$\text{Log}_3(81) = 4 \text{ porque } 3^4 = 81$$

$$\text{Log}(100) = 2 \text{ porque } 10^2 = 100$$

4.3.3 Propiedades de los Logaritmos

$$\text{Log}_a(xy) = \text{Log}_a(x) + \text{Log}_a(y)$$

$$\text{Log}_a\left(\frac{x}{y}\right) = \text{Log}_a(x) - \text{Log}_a(y)$$

$$\text{Log}_a(x^n) = n\text{Log}_a(x)$$

$$\text{Log}_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \text{Log}_a(x)$$

$$\text{Log}_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\text{Log}_a(a) = 1$$

$$\text{Log}_a(a^n) = n$$

$$\text{Log}_a(1) = 0$$

Si $a^x = p$ entonces $x = \frac{\ln(p)}{\ln(a)}$

$\text{Log}_a(x) = \text{Log}_a(y)$ si y solo si $x = y$

Ejemplos:

$$\text{Log}_2(8^{10}) = 30 = 10 \times \text{Log}_2(8) = 10 \times 3 = 30$$

$$\text{Log}_5(\sqrt[3]{25}) = \frac{1}{3} \times \text{Log}_5(25) = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{Log}_2(30) = \frac{\ln(30)}{\ln(2)} = \frac{3,401197382 \dots}{0,69314718} = 4,906990596 \dots$$

$$\text{Log}_3(81) = \text{Log}_3(3^4) = 4 \times \text{Log}_3(3) = 4 \times 1 = 4$$

$$\text{Log}_3(80) = \frac{\ln(80)}{\ln(3)} = 3,988692535$$

$$\text{Log}(10^{20}) = 20 \times \text{Log}(10) = 20 \times 1 = 20$$

$$\text{Log}_2(2^{10}) = 10 \times \text{Log}_2(2) = 10 \times 1 = 10$$

$\text{Log}_5(5) = 1$ porque $5^1 = 5$

$\ln(e) = 1$ Porque $\ln(e) = \text{Log}_e(e)$ y $e^1 = 1$

$\text{Log}(10) = 1$ porque $\text{Log}(10) = \text{Log}_{10}(10)$ y $10^1 = 10$

$\text{Log}(1) = 0$ porque $\text{Log}(1) = \text{Log}_{10}(1)$ y $10^0 = 1$

$\ln(1) = 0$ Porque $\ln(1) = \text{Log}_e(1)$ y $e^0 = 1$

Notas

La expresión $a^x = b$ es una ecuación exponencial; se debe cumplir que $a > 0$, $a \neq 1$.

Se cumple que $b \in \mathbb{R}^+$

La expresión $\text{Log}_a(x) = b$ es una ecuación logarítmica; se debe cumplir que $a > 0$, $a \neq 1$ y $x > 0$

Se cumple que: $b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

$$5^x = 625 \rightarrow x = \text{Log}_5(625) = \frac{\text{Ln}(625)}{\text{Ln}(5)} = 4$$

$$2^x = 1.024 \rightarrow x = \text{Log}_2(1.024) = \frac{\text{Ln}(1.024)}{\text{Ln}(2)} = 10$$

$$2^x = 1.020 \rightarrow x = \text{Log}_2(1.020) = \frac{\text{Ln}(1.020)}{\text{Ln}(2)} = 9,994 \dots$$

$$2^x = 1.050 \rightarrow x = \text{Log}_2(1.050) = \frac{\text{Ln}(1.050)}{\text{Ln}(2)} = 10,036 \dots$$

Nota.

Los logaritmos en base 10 y en base e , se los obtiene con calculadora mediante las teclas Log y Ln .

4.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

x es la medida de un ángulo en radianes o en grados sexagesimales.

Función Seno

$$S(x) = \text{sen}(x) = y; \quad D_{\text{sen}} = \mathbb{R}; \quad R_{\text{sen}} = [-1, 1]$$

Función Coseno

$$C(x) = \text{cos}(x) = y; \quad D_{\text{cos}} = \mathbb{R}; \quad R_{\text{cos}} = [-1, 1]$$

Función tangente

$$Tg(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} = y; \quad D_{Tg} = \{x \in \mathbb{R} / \text{cos}(x) \neq 0\}; \quad R_{Tg} = \mathbb{R}$$

Cotangente

$$Ctg(x) = \frac{\text{cos}(x)}{\text{sen}(x)} = y; \quad D_{Ctg} = \{x \in \mathbb{R} / \text{sen}(x) \neq 0\}; \quad R_{Ctg} = \mathbb{R}$$

Secante

$$\text{Sec}(x) = \frac{1}{\text{cos}(x)} = y; \quad D_{\text{Sec}} = \{x \in \mathbb{R} / \text{cos}(x) \neq 0\}; \quad R_{\text{Sec}} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Cosecante

$$Csec(x) = \frac{1}{\sen(x)} = y; \quad D_{Csec} = \{x \in \mathbb{R} / \sen(x) \neq 0\}; \quad R_{Csec} \\ = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

Si bien, el dominio de seno y coseno es $\mathbb{R}$, generalmente se toma los intervalos $[0, 2\pi]$ o $[-\pi, \pi]$.

El rango de seno y coseno es el intervalo $[-1, 1]$; es decir, $-1 < \sen(x) < 1$; $-1 < \cos(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Nota

$$\sen^2(x) = \sen(x) \times \sen(x) = (\sen(x))^2$$

La igualdad $\sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$ se cumple para todo número real x ; se llama identidad fundamental de las funciones trigonométricas.

Otras identidades importantes son:

$$Sec^2(x) = 1 + Tg^2(x)$$

$$Csec^2(x) = 1 + Ctg^2(x)$$

4.5 EJERCICIOS CON RESPUESTAS

1. Identificar las relaciones que son funciones; justifique su respuesta.

Nota.

Para demostrar que $F: A \rightarrow B$, tal que $F(x) = y$, no es función, basta con tomar un elemento $a \in A$, para el cual $F(a) \notin B$. Este proceso se llama contra ejemplo.

Expresión	Respuesta
$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = \frac{3}{n}$	No es función. Contra ejemplo: $F(2) = \frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$
$F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = \frac{3}{n}$	Es función. Para cada número natural n , $F(n) = \frac{3}{n} \in \mathbb{Q}$
$G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = -\frac{3}{n+1}$	No es función. Contra ejemplo: $G(1) = -\frac{3}{2} \notin \mathbb{N}$
$G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = -\frac{3}{n+1}$	Es función. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $G(n) = -\frac{3}{n+1} \in \mathbb{R}$

$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H(n) = -\frac{3}{n+1}$ No es función. Contra ejemplo: $H(2) = -\frac{3}{3} = -1 \notin \mathbb{N}$

$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}$, $H(n) = -\frac{3}{n+1}$ No es función. Contra ejemplo: $H(-1) = -\frac{3}{0} \notin \mathbb{N}$

$T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = 8n + 10$ Es función. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = 8n + 10 \in \mathbb{N}$

$T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}$, $T(n) = 10n - 8$ Es función. Para cada $n \in \mathbb{N}$, $10n \in \mathbb{N}$ y $10n > 10$

$$T(1) = 2; T(2) = 12; T(3) = 22; T(4) = 32$$

$S: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que para $n \in \mathbb{Z}$, $S(n) = 8n + 10$ Es función. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, $S(n) = 8n + 10 \in \mathbb{Z}$

$S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que para $n \in \mathbb{N}$, $S(n) = 10n - 18$ No es función.
Contra ejemplo: $S(1) = 10 - 18 = -8 \notin \mathbb{N}$

α definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\alpha(x) = \frac{x}{x+20}$ No es función. Contra ejemplo: $\alpha(-20) = -\frac{20}{0} \notin \mathbb{R}$

β definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\beta(x) = \frac{x}{x^2+20}$ Es función. Para cada $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 20 \geq 20$

$x^2 + 20 \neq 0$ y todo real x dividido entre un real diferente de cero; es real. Así pues, $\beta(x) = \frac{x}{x^2+20} \in \mathbb{R}$

γ definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\gamma(x) = \frac{5x}{x^2-20}$ No es función. $(\sqrt{20})^2 - 20 = 20 - 20 = 0$

Contra ejemplo: $\gamma(\sqrt{20}) = \frac{5\sqrt{20}}{(\sqrt{20})^2-20} = \frac{5\sqrt{20}}{0} \notin \mathbb{R}$

$\omega(x) = \frac{x}{x+20}$ definida de $\mathbb{R} - \{-20\}$ hacia $\mathbb{R}$ Es función. Si $x \in \mathbb{R} - \{-20\}$, entonces:

$x \neq -20$ y $x + 20 \neq 0$, por lo cual, $\omega(x) \in \mathbb{R}$.

$\delta: \mathbb{R} - \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\} \rightarrow \mathbb{R}$, así: $\delta(x) = \frac{5x}{x^2-20}$ δ es función, porque si $x \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\}$, entonces, $x \neq \pm\sqrt{20}$ y $x^2 - 20 \neq 0$. Así, $\delta(x) \in \mathbb{R}$

$$\lambda(x) = \frac{12}{27+x^3} \text{ definida sobre } \mathbb{R}$$

No es función, porque $\lambda(-3) = \frac{12}{27-27} = \frac{12}{0} \notin \mathbb{R}$

$$\varphi \text{ definida sobre } \mathbb{R} \text{ por: } \varphi(u) = \sqrt{2-u}$$

No es función, porque:

para $2-u < 0$ se tiene que $u > 2$ y $\varphi(u) \notin \mathbb{R}$

Contra ejemplo: $\varphi(4) = \sqrt{2-4} = \sqrt{-2} \notin \mathbb{R}$

$$\Omega(u) = \sqrt{2-u}; \text{ definida de } (-\infty, 2] \text{ hacia } \mathbb{R}$$

Es función, porque si $u \in (-\infty, 2]$, entonces:

$$2-u \geq 0 \rightarrow u \leq 2; \text{ entonces } \sqrt{2-u} \in \mathbb{R}$$

Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones reales; excepto para las funciones α, β, γ y δ , para las cuales solo debe calcular el dominio.

Funciones

Respuestas

$$F(x) = \frac{8}{x+9}$$

$$D_F = \mathbb{R} - \{-9\}$$

$$R_F = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$H(x) = \frac{x}{3x+15}$$

$$D_H = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$R_H = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$\beta(x) = \frac{x+7}{x^2+10}$$

$$D_\beta = \mathbb{R}$$

$$F(u) = \sqrt{u+12}$$

$$D_F = [-12, +\infty)$$

$$R_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$H(u) = \sqrt{3u+15}$$

$$D_H = [-5, +\infty)$$

$$R_H = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$\beta(u) = \sqrt{u^2-16}$$

$$D_\beta = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$$

$$R_\beta = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

Funciones

Respuestas

$$G(x) = \frac{-10}{x-9}$$

$$D_G = \mathbb{R} - \{9\}$$

$$R_G = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\alpha(x) = \frac{x+4}{x^2-9}$$

$$D_\alpha = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$$

$$\gamma(x) = \frac{x+7}{x^2-10}$$

$$D_\gamma = \mathbb{R} - \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$$

$$G(u) = \sqrt{u-10}$$

$$D_G = [10, +\infty)$$

$$R_G = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$T(u) = \sqrt{7u-3}$$

$$D_T = \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$$

$$R_T = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

$$S(u) = \sqrt{u^2+20}$$

$$D_S = \mathbb{R}$$

$$R_S = [\sqrt{20}, +\infty)$$

$$\partial(v) = \frac{\sqrt{v^2 - 16}}{v + 5}$$

$$D_{\partial} = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) - \{-5\}$$

$$F(t) = t^2 - t - 30$$

$$D_F = \mathbb{R}$$

$$R_F = \left[-\frac{121}{4}, +\infty\right)$$

$$G(t) = 8t^2 + 10t + 5$$

$$D_F = \mathbb{R}$$

$$W(t) = 3t^3 + 10t$$

$$D_W = \mathbb{R}$$

$$R_F = \left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$$

$$R_W = \mathbb{R}$$

Obtener la ecuación pendiente-corte (es de la forma $y = mx + n$) de cada una de las rectas descritas en seguida.

Condiciones

Respuestas

a) Pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(1,-2)$

Pendiente:

$$m = \frac{-2 - 4}{1 - (-3)} = \frac{-3}{2}$$

$$y - 4 = \left(-\frac{3}{2}\right)(x - (-3)) \rightarrow y - 4 = -\frac{3}{2}(x + 3)$$

$$\rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

b) Pasa por el punto $C(3,5)$ y tiene pendiente 2

$$y - 5 = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 1$$

c) Contiene a los puntos $D(4,5)$ y $E(0,0)$

Pendiente:

$$m = \frac{5 - 0}{4 - 0} = \frac{5}{4}$$

$$y - 5 = \frac{5}{4}(x - 4) \rightarrow y = \frac{5}{4}x$$

d) Pasa por el punto $C(3,5)$ y tiene pendiente -1

$$y - 5 = (-1)(x - 3) \rightarrow y = -x + 8$$

Obtener los valores reales x para los cuales $F(x) = 0$.

Funciones	Respuestas	Funciones	Respuestas
$F(x) = x + 12$	$x = -12$	$F(x) = x - 15$	$x = 15$
$F(x) = 7x + 10$	$x = -\frac{10}{7}$	$F(x) = 8x - 16$	$x = 2$
$F(x) = x^2 + 20$	No existe $x \in \mathbb{R}$, tal que	$F(x) = 3x^2 - 6x - 45$	$3x^2 - 6x - 45 = 0 \rightarrow$

	$F(x) = 0$		$3(x + 3)(x - 5) = 0 \rightarrow$ $x = -3$ o $x = 5$
$F(x) = x^2 - x - 30$	$x^2 - x - 30 = 0 \rightarrow$ $(x + 5)(x - 6) = 0 \rightarrow$ $x = -5$ o $x = 6$	$F(x) = x^2 - 16$	$x^2 - 16 = 0 \rightarrow$ $(x - 4)(x + 4) = 0 \rightarrow$ $x = 4$ o $x = -4$
$F(x) = x^2 - 10$	$x^2 - 10 = 0 \rightarrow$ $(x - \sqrt{10})(x + \sqrt{10}) = 0 \rightarrow$ $x = -\sqrt{10}$ o $x = \sqrt{10}$	$F(x) = x^2 - 11x + 18$	$x^2 - 11x + 18 = 0 \rightarrow$ $(x - 9)(x - 2) = 0 \rightarrow$ $x = 9$ o $x = 2$

Resolver las siguientes ecuaciones. (ln representa logaritmo natural)

Ecuaciones

Procesos y Respuestas

$$5^x = 125$$

$$5^x = 125 \rightarrow x \ln(5) = \ln(125) \rightarrow x = \frac{\ln(125)}{\ln(5)} = 3$$

$$2^x = 1.025$$

$$2^x = 1.025 \rightarrow x \ln(2) = \ln(1.025) \rightarrow x = \frac{\ln(1.025)}{\ln(2)} = 10,00140819 \dots$$

$$5^x + 8 = 133$$

$$5^x + 8 = 133 \rightarrow 5^x = 133 - 8 \rightarrow 5^x = 125 \rightarrow x \ln(5) = \ln(125) \rightarrow$$

$$x = \frac{\ln(125)}{\ln(5)} = 3$$

$$2^x - 1.025 = 0$$

$$2^x - 1.025 = 0 \rightarrow 2^x = 1.025 \rightarrow x \ln(2) = \ln(1.025) \rightarrow$$

$$x = \frac{\ln(1.025)}{\ln(2)} = 10,00140819 \dots$$

$$10(2^x) = 15$$

$$10(2^x) = 15 \rightarrow (2^x) = 15/10 \rightarrow (2^x) = 3/2 \rightarrow x \ln(2) = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \rightarrow$$

$$x = \frac{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}{\ln(2)} \rightarrow x = 0,5849625 \dots$$

$$3(2^x) - 92 = 100$$

$$3(2^x) - 92 = 100 \rightarrow 3(2^x) = 100 + 92 = 192 \rightarrow 2^x = \frac{192}{3} = 64 \rightarrow$$

$$x \ln(2) = \ln(64) \rightarrow x = \frac{\ln(64)}{\ln(2)} = 6$$

$$2(3^x) - 92 = 70$$

$$2(3^x) = 162 \rightarrow 3^x = \frac{162}{2} \rightarrow x \ln(3) = \ln(81) \rightarrow x = \frac{\ln(81)}{\ln(3)} = 4$$

$$3(2^x) + 92 = 110$$

$$3(2^x) = 18 \rightarrow 2^x = \frac{18}{3} \rightarrow x \ln(2) = \ln(6) \rightarrow x = \frac{\ln(6)}{\ln(2)} = 2,5849625...$$

$$3^{2x} = 27$$

$$2x \ln(3) = \ln(27) \rightarrow 2x = \frac{\ln(27)}{\ln(3)} \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1,5$$

$$3^{2x} - 2(3^x) + 1 = 0$$

$$(3^x)^2 - 2(3^x) + 1 = 0. \text{ Sea } 3^x = t, \text{ entonces: } t^2 - 2t + 1 = 0 \rightarrow (t-1)(t-1) = 0 \rightarrow (t-1)^2 = 0 \rightarrow t = 1$$

$$\text{Como } t = 3^x \text{ entonces } 3^x = 1 \rightarrow x \cdot \ln 3 = \ln(1) \rightarrow x = \frac{\ln(1)}{\ln(3)} = \frac{0}{\ln(3)} \rightarrow x = 0$$

$$3^{2x} - 4(3^x) + 4 = 0$$

$$(3^x)^2 - 4(3^x) + 4 = 0. \text{ Sea } 3^x = t, \text{ entonces: } t^2 - 4t + 4 = 0 \rightarrow (t-2)(t-2) = 0 \rightarrow (t-2)^2 = 0 \rightarrow t = 2$$

$$\text{Como } t = 3^x \text{ entonces } 3^x = 2 \rightarrow x \cdot \ln 3 = \ln(2) \rightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \rightarrow x = 0.630929753 \dots \rightarrow x \cong 0,63$$

$$\log_a(x) = b$$

$$x = a^b$$

$$\log_5(x) = 3$$

$$x = 5^3 = 125$$

$$\log_2(x) = 10$$

$$x = 2^{10} = 1.024$$

$$\log_2(x) - 9 = 0$$

$$\log_2(x) - 9 = 0 \rightarrow \log_2(x) = 9 \rightarrow x = 2^9 = 512$$

$$\log_2(x) = 10,96578$$

$$x = 2^{10,96578} = 1.999,99406$$

4.6 EVALUACION CON RESPUESTAS Y SUGERENCIAS

4.6.1 Definición Relación-Función

1. La relación $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}: F(n) = \frac{n}{8}$, es función, porque:

Para cualquier número natural n , $\frac{n}{8}$ es real y es único.

Para cualquier número natural n , $\frac{n}{8}$ es número natural

Para cualquier número natural n , $\frac{n}{8}$ es número entero y es único

R/ a)

Sugerencia. Es función, porque para todo número natural n , la fracción $\frac{n}{8}$ es un número real, además, es único.

2. La relación $G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que para cada $n \in \mathbb{N}: G(n) = \frac{7}{n-8}$, no es función, porque:

Para $n = 8$, $G(8) = \frac{7}{n-8} = \frac{7}{0} \in \mathbb{R}$

Para $n = 8$, $G(8) = \frac{7}{n-8} = \frac{7}{0} \notin \mathbb{N}$

Para $n = 10$, $G(8) = \frac{7}{10-8} = \frac{7}{2} \notin \mathbb{N}$

R/ a)

Sugerencia. Para que G sea función, cada número natural debe tener una imagen real; además, debe ser única. En este caso, el número 8 no tiene imagen. Es el único número natural que no tiene imagen. No se puede dividir entre cero.

3. La relación $G: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$, tal que para $n \in \mathbb{N}: G(n) = \frac{20}{n+3}$, es función, porque:

Para cualquier número natural n , $\frac{20}{n+3}$ es número entero y es único.

Para algunos números naturales n , $\frac{20}{n+3}$ es número racional y es único.

Para cualquier número natural n , $\frac{20}{n+3}$ es número racional y es único.

R/ c)

Sugerencia. Es función porque cada número natural n , tiene su imagen $\frac{20}{n+3}$, que es número racional y es único. Tener presente que $n + 3$ es siempre número natural cuando n es natural.

5. La relación $H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que para todo $n \in \mathbb{Z}: H(n) = \frac{n+9}{2}$, no es función, porque:

Existen números enteros, los cuales no tienen más de una imagen en los enteros.

Todos los números enteros, no tienen su respectiva imagen en los enteros.

Existen números enteros, los cuales no tienen su respectiva imagen en los enteros.

R/ c)

Sugerencia. Es suficiente que exista un número entero n , para el cual $\frac{n+9}{2}$ no sea número entero.

$$H(2) = \frac{2+9}{2} = \frac{11}{2} \in \mathbb{Z}; H(4) = \frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} \notin \mathbb{Z}. \text{ Es decir, 2 y 4 no tienen imagen en } \mathbb{Z}.$$

6. La relación $H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$, tal que para todo $n \in \mathbb{Z}: H(n) = \frac{n+1}{-3}$, es función, porque:

$$\text{Para cada } n \in \mathbb{Z}, \frac{n+1}{-3} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Para algunos } n \in \mathbb{Z}, \frac{n+1}{-3} \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Para cada } n \in \mathbb{Z}, \frac{n+1}{-3} \in \mathbb{Z}$$

R/ a)

Sugerencia. Cada número entero n , tiene su respectiva imagen $\frac{n+1}{-3}$, el cual es número racional y es único. Tener presente que $n + 1$ siempre es entero cuando n es entero.

7. La relación $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que para $n \in \mathbb{N}: T(n) = 7n + 11$ es función, porque:

Para algunos números naturales n , $7n + 11$ es número natural y además es único.

Para cada número natural n , $7n + 11$ es número natural y además es único.

Para cada número natural n , $7n - 11$ es número entero y además es único.

R/ b)

Sugerencia. Cada número natural n , tiene su respectiva imagen: $7n + 11$; es número natural y además es único. Tener presente que $7n$ es siempre número natural cuando n es natural y la suma de naturales es un número natural.

8. La relación $T: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que para $n \in \mathbb{Z}: T(n) = 12n^2 - 14n + 20$, es función, porque:

Para cada número entero n , $12n^2 - 14n + 20$ es número entero y además es único.

Para algunos números enteros n , $12n^2 - 14n + 20$ es número entero y además es único.

Para cada número natural n , $12n^2 - 14n + 20$ es número natural y además es único.

R/ a)

Sugerencia. Cada número entero n , tiene su respectiva y única imagen: $12n^2 - 14n + 20$; y es número entero. La suma, diferencia y producto de números enteros, es siempre otro número entero.

9. La relación α definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\alpha(x) = \frac{2x+4}{x+20}$, no es función, porque:

Para cualquier número real x ; $\alpha(x) \notin \mathbb{R}$.

Para $x = -20$: $\alpha(-20) = \frac{-40+4}{-20+20} = \frac{-36}{0} \notin \mathbb{R}$.

Para todo número real x ; $\alpha(x) \notin \mathbb{R}$.

R/ b)

Sugerencia. Para que sea función, cada número real debe tener una imagen, y en este caso -20 no tiene imagen. Recordar que Tener presente que no se puede dividir entre cero.

10. La relación β definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\beta(x) = \frac{5-x}{x^2-49}$, no es función, porque:

Para todo número real x , $\beta(x) \notin \mathbb{R}$.

Para cualquier número real x , $\beta(x) \notin \mathbb{R}$.

Para $x = 7$ o para $x = -7$: $x^2 - 49 = 0$, y no se puede dividir entre cero.

R/ c)

Sugerencia. Para que sea función, cada número real debe tener su imagen. En este caso, -7 y 7 no tienen imagen; pues, $\beta(7) = \frac{-2}{0} \notin \mathbb{R}$; $\beta(-7) = \frac{12}{0} \notin \mathbb{R}$. Estos son contraejemplos.

11. La relación γ definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\gamma(x) = \frac{5-x}{x^2+49}$, es función, porque:

Para algunos números reales x ; $5-x \in \mathbb{R}$ y x^2+49 es real diferente de cero: luego $\gamma(x) \in \mathbb{R}$.

Para cualquier número real x ; $5-x \in \mathbb{R}$ y x^2+49 es real diferente de cero: luego $\gamma(x) \in \mathbb{R}$.

Existe un número real x , para el cual $5-x \in \mathbb{R}$ y x^2+49 es real diferente de cero.

R/ b)

Sugerencia. Cada número real x , tiene su respectiva y única imagen real. Se cumple la definición de función.

Para cada real x : $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 49 \geq 49$ Luego, se puede dividir entre $x^2 + 49$, porque es diferente de cero.

12. La relación $\omega(x) = \frac{5x}{x+20}$ definida de $\mathbb{R} - \{-20\}$ hacia $\mathbb{R}$, es función, porque:

Para todo número real x , $\omega(x) \in \mathbb{R}$.

Para cada número real x , $x + 20 \neq 0$ y $\omega(x) \in \mathbb{R}$

Para cada $x \in \mathbb{R} - \{-20\}$: $x + 20 \neq 0$ y $\omega(x) \in \mathbb{R}$.

R/ c)

Sugerencia. Cada número real x diferente de -20 , tiene su respectiva imagen real $\frac{5x}{x+20}$. En este caso, $x + 20 \neq 0$

13. La relación δ definida de $\mathbb{R} - \{-7, 7\}$ a $\mathbb{R}$ así: $\delta(x) = \frac{5-x}{x^2-49}$, es función, porque:

Para cada $x \in \mathbb{R} - \{-7, 7\}$: $x^2 - 49 \neq 0$; en consecuencia $\delta(x) \in \mathbb{R}$

Para cada número real x : $x^2 - 49 \neq 0$; en consecuencia $\delta(x) \in \mathbb{R}$

Cada número real x , tiene su respectiva imagen real

R/ a)

Sugerencia. El conjunto de partida es $\mathbb{R} - \{-7, 7\}$, luego para cada número real x , diferente de 7 y de -7 , existe su imagen real $\frac{5-x}{x^2-49}$. Tener en cuenta que $x^2 - 49 \neq 0$ y $5 - x \in \mathbb{R}$.

14. La relación $\lambda(x) = \frac{12x}{128-2x^3}$, definida sobre $\mathbb{R}$, no es función, porque:

Para cualquier número real x ; $\lambda(x) \notin \mathbb{R}$.

Para $x = 4$: $128 - 2(4)^3 = 128 - 128 = 0$; luego $\lambda(4) = \frac{48}{0} \notin \mathbb{R}$

Para todo número real x ; $\lambda(x) \notin \mathbb{R}$.

R/ b)

Sugerencia. Como $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y 4 no tiene imagen, entonces λ no es función. No cumple la definición de función.

15. La relación φ definida sobre $\mathbb{R}$ por: $\varphi(u) = \sqrt{12-3u}$, no es función, porque:

Para $u > 4$: $3u > 12$ y $12 - 3u < 0$. Luego $\sqrt{12-3u} \notin \mathbb{R}$.

Para todo número real u : $\sqrt{12-3u} \notin \mathbb{R}$

Para $u \leq 4$, $\sqrt{12 - 3u} \notin \mathbb{R}$

R/ a)

Sugerencia. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, y si $u \in (4, +\infty)$, entonces $12 - 3u$ es real negativo, y la raíz cuadrada de reales negativos no es número real. Así, no todos los números reales, tienen imagen real.

16. La relación $\Omega(u) = \sqrt{12 - 3u}$; definida de $(-\infty, 4]$ hacia $\mathbb{R}$, es función, porque:

Para $u \in (-\infty, 4]$: $u \leq 4 \rightarrow 3u \leq 12 \rightarrow 12 - 3u \geq 0$. Luego $\sqrt{12 - 3u} \in \mathbb{R}$

Todo número real u ; tiene su respectiva imagen real

Para $u \in (4, +\infty)$ se tiene que $\sqrt{12 - 3u} \in \mathbb{R}$

R/ a)

Sugerencia. Ω va de $(-\infty, 4]$ hacia $\mathbb{R}$ y cada elemento de $(-\infty, 4]$ tiene imagen real, entonces Ω es función.

4.6.2 Dominio de Funciones Reales

1. El dominio de la función real $F(x) = \frac{2x + 4}{x + 20}$, es

$$\mathbb{R} - \{20\}$$

$$\mathbb{R} - \{-20\}$$

$$\mathbb{R} - \{-2\}$$

R/ b)

Sugerencia.

Como F es función real, entonces: $x + 20 \neq 0 \rightarrow x \neq -20 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-20\}$

2. El dominio de la función real $G(x) = \frac{80}{x - 10}$ es:

$$\mathbb{R} - \{80\}$$

$$\mathbb{R} - \{-10\}$$

$$\mathbb{R} - \{10\}$$

R/ c)

Sugerencia.

Como G es función real, entonces: $x - 10 \neq 0 \rightarrow x \neq 10 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{10\}$

3. El dominio de la función real $H(x) = \frac{2x}{6x+3}$, es:

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$\mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

R/ c)

Sugerencia.

H es función real, luego: $6x + 3 \neq 0 \rightarrow 6x \neq -3 \rightarrow x \neq -\frac{3}{6} \rightarrow x \neq -\frac{1}{2} \rightarrow x \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

4. El dominio de la función real $\alpha(x) = \frac{x+9}{x^2-16}$, es

$$\mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

$$\mathbb{R} - \{-4\}$$

$$\mathbb{R} - \{4\}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$x^2 - 16 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 16 \rightarrow \sqrt{x^2} \neq \sqrt{16} \rightarrow |x| \neq 4 \rightarrow x \neq \pm 4 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-4, 4\}$$

5. El dominio de la función real $\beta(x) = \frac{2x+1}{x^2+50}$, es:

$$\mathbb{R} - \{-5, 0\}$$

$$\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} - \{5, 0\}$$

R/ b)

Sugerencia.

Para cualquier real x : $x^2 \geq 0 \rightarrow x^2 + 50 \geq 50$ (Observe que $x^2 + 50 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$)

6. El dominio de la función real $\gamma(x) = \frac{5x-1}{x^2-25}$, es:

$$\mathbb{R} - \{-25, 25\}$$

$$\mathbb{R} - \{5\}$$

$$\mathbb{R} - \{-5, 5\}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 - 25 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 25 \rightarrow \sqrt{x^2} \neq 25 \rightarrow |x| \neq 5 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-5, 5\}$$

7. El dominio de la función real $F(u) = \sqrt{u - 18}$, es:

$$[-18, +\infty)$$

$$[18, +\infty)$$

$$(-\infty, 18]$$

R/ b)

Sugerencia.

Como F es función real, entonces: $u - 18 \geq 0 \rightarrow u \geq 18 \rightarrow u \in [18, +\infty)$ 8. El dominio de la función real $G(u) = \sqrt{u + 30}$, es:

$$[-30, +\infty)$$

$$[30, +\infty)$$

$$(-\infty, -30]$$

R/ a)

Sugerencia.

Como G es función real, entonces: $u + 30 \geq 0 \rightarrow u \geq -30 \rightarrow u \in [-30, +\infty)$ 9. El dominio de la función real $H(u) = \sqrt{16u + 4}$ es:

$$\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

$$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

$$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$$

R/ b)

Sugerencia.

Como H es función real, entonces: $16u + 4 \geq 0 \rightarrow 16u \geq -4 \rightarrow u \geq -\frac{4}{16} \rightarrow u \in \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ 10. El dominio de la función real $\alpha(x) = \sqrt{10x - 3}$ es:

$$\left[\frac{3}{10}, +\infty\right)$$

$$[3, +\infty)$$

$$\left(-\infty, \frac{3}{10}\right]$$

R/ a)

Sugerencia.

Como α es función real, entonces: $10u - 3 \geq 0 \rightarrow 10u \geq 3 \rightarrow u \geq \frac{3}{10} \rightarrow u \in \left[\frac{3}{10}, +\infty\right)$

11. El dominio de la función real $\beta(u) = \sqrt{u^2 - 81}$, es:

$$(-\infty, -9] \cup [9, +\infty)$$

$$[9, +\infty)$$

$$(-\infty, -9]$$

R/ a)

Sugerencia.

$$u^2 - 81 \geq 0 \rightarrow u^2 \geq 81 \rightarrow \sqrt{u^2} \geq \sqrt{81} \rightarrow |u| \geq 9 \rightarrow u \geq 9 \text{ o } u \leq -9 \rightarrow u \in (-\infty, -9] \cup [9, +\infty)$$

12. El dominio de la función real $\partial(v) = \frac{\sqrt{v^2 - 25}}{v + 8}$ es

$$[-5, 5]$$

$$(-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$$

$$(-\infty, -5] \cup [5, +\infty) - \{-8\}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$v^2 - 25 \geq 0 \rightarrow v^2 \geq 25 \rightarrow \sqrt{v^2} \geq \sqrt{25} \rightarrow |v| \geq 5 \rightarrow v \geq 5 \text{ o } v \leq -5 \rightarrow v \in (-\infty - 5] \cup [5, +\infty)$$

Además: $v + 8 \neq 0 \rightarrow v \neq -8$. Por tanto: $v \in ((-\infty - 5] \cup [5, +\infty)) - \{-8\}$

13. El dominio de la función real $F(t) = t^t - t - 30$ es:

$$\mathbb{R}$$

$$\left[-\frac{12}{14}, +\infty\right)$$

$$(-\infty, -\frac{12}{14}]$$

R/ a)

Sugerencia. El dominio de toda función polinómica es $\mathbb{R}$.

14. El dominio de la función real $G(t) = 8t^3 + 10t + 5$ es:

$$[5, +\infty)$$

$$\mathbb{R}$$

$$(-\infty, 0]$$

R/ b)

Sugerencia. El dominio de toda función polinómica es $\mathbb{R}$.

15. El dominio de la función real $H(x) = 8x^4 + 30x^3 + 10x - 25$ es:

$$(-\infty, 0]$$

$$[0, +\infty)$$

$$\mathbb{R}$$

R/ c)

Sugerencia. El dominio de toda función polinómica es $\mathbb{R}$.

4.6.3 Rango de Funciones Reales

1. El Rango de la función real $F(x) = \frac{2x+4}{x+20}$, es:

$$\mathbb{R} - \{2\}$$

$$\mathbb{R} - \{20\}$$

$$\mathbb{R} - \{-20\}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\begin{aligned} \frac{2x+4}{x+20} = y &\rightarrow 2x+4 = y(x+20) \rightarrow 2x+4 = xy+20y \rightarrow 4-20y = xy-2x \\ &\rightarrow 4-20y = (y-2)x \end{aligned}$$

$$\rightarrow x = \frac{4-20y}{y-2} \rightarrow y \neq 2 \rightarrow y \in \mathbb{R} - \{2\}$$

2. El Rango de la función real $G(x) = \frac{80}{x-10}$, es:

$$\mathbb{R} - \{80\}$$

$$\mathbb{R} - \{-10\}$$

$$\mathbb{R} - \{10\}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\begin{aligned} \frac{80}{x-10} = y &\rightarrow 80 = (x-10)y \rightarrow 80 = xy - 10y \rightarrow 80 + 10y = xy \rightarrow x \\ &= \frac{80 + 10y}{y} \rightarrow y \neq 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

3. El Rango de la función real $H(x) = \frac{2x}{6x+3}$, es:

$$\mathbb{R} - \{3\}$$

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

$$\mathbb{R} - \{-2\}$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\begin{aligned} \frac{2x}{6x+3} = y &\rightarrow 2x = (6x+3)y \rightarrow 2x = 6xy + 3y \rightarrow -3y = 6xy - 2y \rightarrow -3y \\ &= (6y-2)x \rightarrow x = \frac{-3y}{6y-2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow x = -\frac{3y}{6y-2} \rightarrow 6y-2 \neq 0 \rightarrow 6y \neq 2 \rightarrow y \neq \frac{1}{3} \rightarrow y \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

4. El Rango de la función real $F(u) = \sqrt{u-18}$, es:

$$[0, +\infty)$$

$$[-18, +\infty) \quad [-18, +\infty)$$

$$(-\infty, 18]$$

R/ a)

Sugerencia.

Para todo $u \geq 0$: $\sqrt{u} \geq 0$. Si $\sqrt{u-18} = y$ entonces $y \geq 0 \rightarrow y \in [0, +\infty)$

5. El Rango de la función real $G(u) = \sqrt{u+30}$, es:

$$[30, +\infty)$$

$$[0, +\infty)$$

$$(-\infty, -30]$$

R/ b)

Sugerencia.

Para todo $u \geq 0$: $\sqrt{u} \geq 0$. Si $\sqrt{u+30} = y$ entonces $y \geq 0 \rightarrow y \in [0, +\infty)$

6. El Rango de la función real $H(u) = \sqrt{16u+4}$, es:

$$[0, +\infty)$$

$$\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$$

$$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$$

R/ a)

Sugerencia.

Para todo $u \geq 0$: $\sqrt{u} \geq 0$. Si $\sqrt{16u+4} = y$ entonces $y \geq 0 \rightarrow y \in [0, +\infty)$

7. El Rango de la función real $\alpha(u) = \sqrt{10u-3}$, es:

$$\left(-\infty, \frac{3}{10}\right]$$

$$[3, +\infty)$$

$$[0, +\infty)$$

R/ c)

Sugerencia.

Para todo $u \geq 0$: $\sqrt{u} \geq 0$. Si $\sqrt{10u-3} = y$ entonces $y \geq 0 \rightarrow y \in [0, +\infty)$

8. El Rango de la función real $\beta(u) = \sqrt{u^2 - 81}$, es:

$$[9, +\infty)$$

$$[0, +\infty)$$

$$(-\infty, -9]$$

R/ b)

Sugerencia.

Para todo $u \geq 0$: $\sqrt{u} \geq 0$. Si $\sqrt{u^2 - 81} = y$ entonces $y \geq 0 \rightarrow y \in [0, +\infty)$

9. El Rango de la función real $F(t) = t^2 - t - 30$ es:

$$\left[-\frac{121}{4}, +\infty\right)$$

$$\left[\frac{121}{4}, +\infty\right)$$

$$\left(-\infty, -\frac{121}{4}\right]$$

R/ a)

Sugerencia.

El rango de la función $F(x) = ax^2 + bx + c = y$, para $a > 0$ es $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$.

En este caso: $a = 1, b = -1, c = -30$; entonces $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(1)(-30)-(-1)^2}{4(1)} = -\frac{121}{4}$

10. El Rango de la función real $G(t) = 8t^2 + 10t + 5$ es:

$$\left[\frac{15}{8}, +\infty\right)$$

$$\left[-\frac{15}{8}, +\infty\right)$$

$$(-\infty, 0]$$

R/ a)

Sugerencia.

El rango de la función $F(x) = ax^2 + bx + c = y$, para $a > 0$ es $\left[\frac{4ac-b^2}{4a}, +\infty\right)$.

En este caso: $a = 8, b = 10, c = 5$; entonces $\frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4(8)(5)-(10)^2}{4(8)} = \frac{15}{8}$

11. El Rango de la función real $H(x) = 8x^3 + 30x^2 + 10x - 25$ es:

$$\mathbb{R}$$

$$[0, +\infty)$$

$$(-\infty, 0]$$

R/ a)

Sugerencia. El Rango de toda función polinómica de grado impar, es $\mathbb{R}$.

4.6.4 Ecuación Pendiente-Corte de Rectas

1. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(-44, 40)$ y $B(16, -80)$ es:

$$y = -2x + 124$$

$$y = -2x + 48$$

$$y = 2x - 48$$

R/ c)

Sugerencia.

$$m = \frac{-80 - 40}{16 - (-44)} = -\frac{120}{60} = -2 \rightarrow y - 40 = -2(x - (-44)) \rightarrow y = -2x - 88 + 40 \rightarrow y = -2x - 48$$

La pendiente de la recta que contiene los puntos diferentes (a, b) y (c, d) es $m = \frac{d-b}{c-a}$ o también: $m = \frac{b-d}{a-c}$

2. La ecuación de la recta que pasa por el punto $C(80, 50)$ y tiene pendiente -60 es:

$$y = -60x + 4.850$$

$$y = 60x + 4.850$$

$$y = -60x - 4.850$$

R/ a)

Sugerencia.

$$y - 50 = -60(x - 80) \rightarrow y = -60x + 4.800 + 50 \rightarrow y = -60x + 4850$$

La ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por el punto $P(a, b)$ con pendiente m es: $y - b = m(x - a)$

3. La ecuación de la recta que pasa por los puntos $D(-20, -60)$ y $E(0, 0)$ es:

$$y = 3x + 60$$

$$y = 3x + 120$$

$$y = 3x$$

R/ c)

Sugerencia.

$$m = \frac{-60 - 0}{-20 - 0} = 3 \rightarrow y - (-60) = 3(x + 20) \rightarrow y = 3x + 60 - 60 \rightarrow y = 3x$$

4. La ecuación de la recta que pasa por el punto $C(200, 100)$ y tiene pendiente $m = 15$, es:

$$y = 15x + 2900$$

$$y = 15x - 2900$$

$$y = 15x - 1300$$

R/ b)

Sugerencia.

$$y - 100 = 15(x - 200) \rightarrow y = 15x - 3000 + 100 \rightarrow y = 15x - 2900$$

4.6.5 Variables con Imagen Cero

1. El valor de la variable x para el cual $F(x) = 0$ donde $F(x) = x + 40$, es:

$$40$$

$$-40$$

$$0$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\text{Si } x + 40 = 0, \text{ entonces: } x = -40$$

2. Los valores de la variable x para los cuales $F(x) = 0$, donde $F(x) = x^2 - 81$, son:

$$x = 3 \text{ o } x = -3$$

$$x = 27 \text{ o } x = -27$$

$$x = 9 \text{ o } x = -9$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 - 81 = 0 \rightarrow (x + 9)(x - 9) = 0 \rightarrow x = -9 \text{ o } x = 9$$

3. El valor de la variable x para el cual $F(x) = 0$, donde $F(x) = 30x - 10$, es:

$$\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3}$$

$$3$$

R/ b)

Sugerencia.

$$30x - 10 = 0 \rightarrow x = \frac{10}{30} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

4. El valor de la variable x para el cual $F(x) = 0$, donde $F(x) = 72x - 27$ es:

$$\frac{3}{8}$$

$$\frac{9}{8}$$

$$\frac{5}{8}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$72x - 27 = 0 \rightarrow 72x = 27 \rightarrow x = \frac{27}{72} = \frac{3}{8}$$

5. Los valores de la variable x para los cuales $F(x) = 0$, donde $F(x) = x^2 + 14x + 48$, son:

$$6 \text{ y } 8$$

$$6 \text{ y } -8$$

$$-6 \text{ y } -8$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 + 14x + 48 = 0 \rightarrow (x + 6)(x + 8) = 0 \rightarrow x = -6 \text{ o } x = -8$$

6. Los valores de la variable x para los cuales $F(x) = 0$, donde $F(x) = x^2 - 16$ son:

$$4 \text{ y } -4$$

$$16 \text{ y } -16$$

$$8 \text{ y } -8$$

R/ a)

Sugerencia.

$$x^2 - 16 = 0 \rightarrow (x + 4)(x - 4) = 0 \rightarrow x = -4 \text{ o } x = 4$$

7. Los valores de la variable x para los cuales $F(x) = 0$, donde $F(x) = 3x^2 - 36$ son:

$$12 \text{ y } -12$$

$$\sqrt{12} \text{ y } -\sqrt{12}$$

$$6 \text{ y } -6$$

R/ b)

Sugerencia

$$3x^2 - 36 = 0 \rightarrow 3(x^2 - 12) = 0 \rightarrow x^2 = 12 \rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

8. Los valores de la variable x para los cuales $F(x) = 0$, donde $F(x) = x^2 - 169$, son:

$$169 \text{ y } -169$$

$$14 \text{ y } -14$$

$$13 \text{ y } -13$$

R/ c)

Sugerencia.

$$x^2 - 169 = 0 \rightarrow (x + 13)(x - 13) = 0 \rightarrow x = -13 \text{ o } x = 13$$

9. Los valores de la variable x para los cuales $F(x) = 0$, donde $F(x) = 16x^2 - 8$ es:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ y } -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{4} \text{ y } -\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2} \text{ y } -\frac{1}{2}$$

R/ a)

Sugerencia.

$$16x^2 - 8 = 0 \rightarrow 16x^2 = 8 \rightarrow x^2 = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4.6.6 Solución de Ecuaciones Exponenciales

1. La solución de la ecuación $4^x = 1.024$ es:

6

5

4

R/ b)

Sugerencia.

$$4^x = 1.024 \rightarrow x = \frac{\ln(1.024)}{\ln(4)} = 5$$

2. La solución de la ecuación $2(2^x) = 256$ es:

7

8

5

R/ a)

Sugerencia.

$$2(2^x) = 256 \rightarrow 2^x = \frac{256}{2} = 128 \rightarrow x = \frac{\ln(128)}{\ln(2)} = 7$$

3. La solución de la ecuación $5^{2x} - 5 = 0$ es:

$\frac{1}{8}$

$\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}$

R/ c)

Sugerencia.

$$5^{2x} - 5 = 0 \rightarrow 5^{2x} = 5 \rightarrow 2x = \frac{\ln(5)}{\ln(5)} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

4. La solución de la ecuación $2^x - 1.024 = 0$ es:

10

9

8

R/ a)

Sugerencia.

$$2^x - 1.024 = 0 \rightarrow 2^x = 1.024 \rightarrow x = \frac{\ln(1.024)}{\ln(2)} = 10$$

5. La solución de la ecuación $40(2^x) = 10$ es

2

-2

-0,2

R/ b)

Sugerencia.

$$40(2^x) = 10 \rightarrow 2^x = \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{\ln(\frac{1}{4})}{\ln(2)} = -2$$

6. La solución de la ecuación $2(3^x) - 86 = 400$ es:

50

0,5

5

R/ c)

Sugerencia.

$$2(3^x) - 86 = 400 \rightarrow 2(3^x) = 486 \rightarrow 3^x = \frac{486}{2} = 243 \rightarrow x = \frac{\ln(243)}{\ln(3)} = 5$$

7. La solución de la ecuación $4(10^x) - 27 = 13$ es:

1

2

3

R/ a)

Sugerencia.

$$4(10^x) - 27 = 13 \rightarrow 4(10^x) = 40 \rightarrow 10^x = \frac{40}{4} = 10 \rightarrow x = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$$

8. La solución de la ecuación $3(100^x) - 14 = 16$

$$1$$

$$0,5$$

$$5$$

R/ b)

Sugerencia.

$$3(100^x) - 14 = 16 \rightarrow 3(100^x) = 30 \rightarrow 100^x = \frac{30}{3} = 10 \rightarrow x = \frac{\ln(10)}{\ln(100)} = 0,5$$

9. La solución de la ecuación $16(8^{2x}) = 1$ es:

$$-\frac{2}{3}$$

$$-0,6$$

$$-6,6$$

R/ a)

Sugerencia.

$$16(8^{2x}) = 1 \rightarrow 8^{2x} = \frac{1}{16} \rightarrow 2x = \frac{\ln\left(\frac{1}{16}\right)}{\ln(8)} = -1,33333 \dots \rightarrow x = \frac{-1,33333 \dots}{2}$$

$$\rightarrow x = -0,666666 = -0,6\bar{6}$$

$$\rightarrow x = -\frac{2}{3}$$

10. La solución de la ecuación $6^{2x} - 4(6^x) + 4 = 0$ es:

$$0,386852807 \dots$$

$$2,584962501 \dots$$

$$2$$

R/ a)

Sugerencia.

$$6^{2x} - 4(6^x) + 4 = 0 \rightarrow (6^x)^2 - 4(6^x) + 4 = 0$$

Sea $u = 6^x$ entonces: $u^2 - 4u + 4 = 0 \rightarrow (u - 2)^2 = 0 \rightarrow u = 2$

Como $u = 6^x$ entonces $6^x = 2 \rightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(6)} = 0,386852807 \dots$

4.6.7 Solución de Ecuaciones Logarítmicas

1. La solución de la ecuación $\text{Log}_a(x) = b$ es:

$$x = b^a$$

$$x = a^b$$

$$x = ab$$

R/ b)

Sugerencia.

$$\text{Log}_a(x) = b \rightarrow x = a^b$$

2. La solución de la ecuación $\text{Log}_2(x) = -3$ es:

$$8$$

$$-8$$

$$\frac{1}{8}$$

R/ c)

Sugerencia.

$$\text{Log}_2(x) = -3 \rightarrow x = 2^{-3} = \frac{1}{8}$$

3. La solución de la ecuación $\text{Log}_3(x) = 8$ es:

$$6.561$$

$$512$$

$$24$$

R/ a)

Sugerencia.

$$\text{Log}_3(x) = 8 \rightarrow x = 3^8 = 6.561$$

4. La solución aproximada de la ecuación $\text{Log}_3\left(\frac{x}{2}\right) = 7,3689315$ es:

3.279,999996

6.559,999993

7,3689315

R/ b)

Sugerencia.

$$\text{Log}_3\left(\frac{x}{2}\right) = 7,3689315 \rightarrow \frac{x}{2} = 3^{7,3689315} = 3.279,999996 \rightarrow x = 3.279,999996 \times 2 = 6.559,999993$$

5. La solución de la ecuación $\text{Log}(x) = 1$ es:

0

1

10

R/ c)

Sugerencia.

$$\text{Log}(x) = 1 \rightarrow x = 10^1 = 10$$

6. La solución de la ecuación $\text{Log}(x) = 2$, es:

100

20

1.024

R/ a)

Sugerencia.

$$\text{Log}(x) = 2 \rightarrow x = 10^2 = 100$$

7. La solución de la ecuación $\text{Log}(x) = 3$, es:

100

1.000

10

R/ b)

Sugerencia.

$$\text{Log}(x) = 3 \rightarrow x = 10^3 = 1.000$$

8. La solución de la ecuación $\text{Log}(2x) = 3$ es:

200

100

500

R/ c)

Sugerencia.

$$\text{Log}(2x) = 3 \rightarrow 2x = 10^3 = 1.000 \rightarrow x = \frac{1.000}{2} = 500$$

9. La solución de la ecuación $\text{Log}\left(\frac{x}{2}\right) = 2$ es:

200

100

20

R/ a)

Sugerencia.

$$\text{Log}\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \rightarrow \frac{x}{2} = 10^2 = 100 \rightarrow x = 100 \times 2 = 200$$

10. La solución aproximada de la ecuación $\text{Ln}(x) = 1$, es:

2,718281828

1

0

R/ a)

Sugerencia.

$$\text{Ln}(x) = 1 \rightarrow x = e^1 = 2,718281828 \dots \text{ Para efectos de cálculo, se suele tomar } x = 2,71828182$$

11. La solución aproximada de la ecuación $\text{Ln}(x) = 2,302585$, es:

2,302585

9,99999907 ...

10

R/ b)

Sugerencia.

$$\ln(x) = 2,302585 \rightarrow x = e^{2,302585} = 9,99999907 \dots$$

4.7 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE FUNCIONES Y ECUACIONES

4.7.1 Introducción

Se plantea textualmente y se resuelve algunos problemas sencillos, para aplicar ecuaciones y funciones, sobre todo polinómicas, con el propósito que los estudiantes reconozcan la gran utilidad de estos temas matemáticos y vayan adquiriendo capacidad para abordar problemas más complejos y los puedan estructurar en términos matemáticos, para luego obtener la solución de los mismos. Por esto, en el proceso de solucionar los problemas, se darán explicaciones adicionales, se mencionarán temas matemáticos estudiados, lo cual sirve también como retroalimentación.

En el planteamiento textual de un problema, se presentan datos conocidos y datos desconocidos; estos últimos, en muchos casos, se los identifica con la misma pregunta del problema y a los cuales se los representa con letras variables o incógnitas, tales como x, y, z, u, v, w, t ; entre otras.

Se recomienda leer el planteamiento textual del problema las veces sea necesario, con el fin de entender, asimilar su contenido y empezar a estructurar matemáticamente el planteamiento para su solución. Algunas veces es necesario recurrir a gráficas, expresiones particulares, entre otras, como se verá en los ejemplos siguientes.

4.7.2 Problemas resueltos

El administrador de un parqueadero dispone de una malla de longitud 240 m. para hacer un cerco de base rectangular destinado al parqueo de motos.

Establecer la ecuación que relaciona las dimensiones de la base del cerco, es decir del rectángulo.

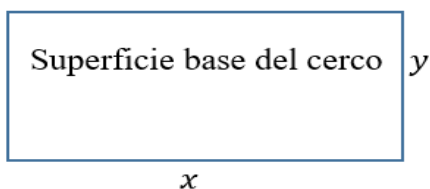
Despeje una variable e identifique la clase de función que se obtiene

Expresar el área de la superficie del cerco en función de una de sus dimensiones.

Solución:

El único dato conocido, es la longitud de la malla: 240 m. Además, se sabe que se debe formar un cerco rectangular.

Sean x, y las dimensiones del rectángulo (superficie). No interesa la altura del cerco, o sea, el ancho de la malla.



El perímetro del rectángulo es igual a la longitud de la malla, luego:

$$\begin{aligned} x + y + x + y &= 240 \rightarrow 2x + 2y = 240 \\ &\rightarrow x + y = 120 \rightarrow \end{aligned}$$

$$y = -x + 120 = f(x)$$

El área de la superficie del cerco es $A = xy$. Reemplazando el valor de y , se tiene:

$$A = x(-x + 120) = -x^2 + 120x = s(x)$$

Las respuestas son las siguientes:

La ecuación que relaciona las dimensiones de la base rectangular del cerco es:
 $x + y = 120$

$f(x) = -x + 120 = y$ La función f es lineal.

$s(x) = -x^2 + 120x = A$. La función s es cuadrática. El área está en función de la dimensión x .

Nota.

La gráfica de la función s , es una parábola que se extiende hacia abajo desde el vértice $V(60, 3.600)$.

Recordar la fórmula del vértice de una parábola. Además, el rango es $(-\infty, 3.600]$. Esto nos dice que el máximo valor del área es: $A = 3600 \text{ m}^2$.

Por otra parte, como $x + y = 120$, entonces para $x = 60 \text{ m}$, se obtiene $y = 60 \text{ m}$, lo cual nos dice que dicho rectángulo es un cuadrado, y en este caso se obtiene el área máxima.

Aplicando Cálculo Diferencial, para obtener éste valor máximo, se deriva la función s , se iguala a cero y se obtiene el valor de x que es 60; se reemplaza este valor en $-x^2 + 120x = A$ y se obtiene el valor de $A = 3.600$

Así, para obtener mayor capacidad de parqueo de motos, se debe construir un cerco de base cuadrada, cuyo lado debe ser de 60 m .

Se dispone de \$7.200.000 para hacer un cerco rectangular aprovechando un muro. El materia e instalación del cerco cuesta: \$8.000 el metro lineal para el lado paralelo al muro; \$12.000 por cada metro lineal de los dos lados laterales.

Establecer la ecuación que relaciona las dimensiones del cerco.

Expresar una dimensión en función de la otra e identificar el tipo de función.

Expresar el área de la base rectangular del cerco en función de una dimensión e identificar la clase de función.

Obtener las dimensiones de la cerca para las cuales se obtiene la mayor área de la superficie y obtener ésta área

Solución:

Datos conocidos: el valor disponible de \$7.200.000; el valor del metro lineal para el lado paralelo al muro y de los otros dos lados es: \$8.000 y \$12.000 respectivamente.

Datos desconocidos: las dimensiones de la base rectangular (el suelo) y el área máxima.

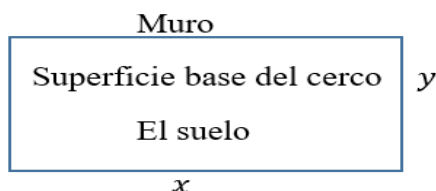
Según los datos del problema, se tiene lo siguiente:

Si x es la longitud en metros del lado paralelo al muro, entonces $8.000x$ es el costo de construir ese lado.

Si y es la longitud en metros de cada lado lateral, entonces $12.000y$ es el costo de construir cada lado lateral.

Así, el costo de construir toda la cerca es: $8.000x + 12.000y + 12.000y$, lo cual es igual al valor disponible.

Luego: $8.000x + 12.000y + 12.000y = 7.200.00 \rightarrow 8.000x + 24.000y = 7.200.000 \rightarrow$



$$8x + 24y = 7.200 \quad \text{Simplificando entre 8:} \\ x + 3y = 900$$

$$\text{Despejando } y \text{ se tiene: } y = -x + 900 = f(x)$$

El área de la base rectangular es $A = xy$
Reemplazando y se obtiene:

$$A = x(-x + 900) = -x^2 + 900x = s(x)$$

Las respuestas son las siguientes:

La ecuación simplificada que relaciona las dimensiones del cerco es: $x + 3y = 900$

Expresando el ancho de la base, en función del largo, queda así: $y = -x + 900 = f(x)$; f es función lineal; la gráfica es una líneas recta con pendiente $m = -1$

Expresando el área de la base en función del largo, queda así: $A = -x^2 + 900x = s(x)$

s es una función cuadrática. La gráfica es una parábola que se extiende hacia abajo desde el vértice.

$V(450, 202.500)$. En consecuencia, el mayor valor de A , es $A = 202.500$, el cual obtiene para $x = 450$.

Ahora, como $y = -x + 900$, entonces, para $x = 450$, se obtiene $y = 450$.

Las dimensiones de la base rectangular para obtener área máxima son de $450\text{ m} \times 450\text{ m}$; y su área máxima es: $A = 202.500\text{ m}^2$

Con una lámina rectangular de $50\text{ cm} \times 40\text{ cm}$ se elabora una caja sin tapa, haciendo cortes cuadrados en sus esquinas y doblando las pestañas o bordes por las líneas punteadas. Se plantea lo siguiente:

Establecer las ecuaciones que relacionan las dimensiones de la caja.

Establecer las desigualdades e intervalos de variación de las dimensiones de la caja (largo, ancho y altura)

Expresar el volumen de la caja en función de una sola dimensión (altura), e identificar la función obtenida.

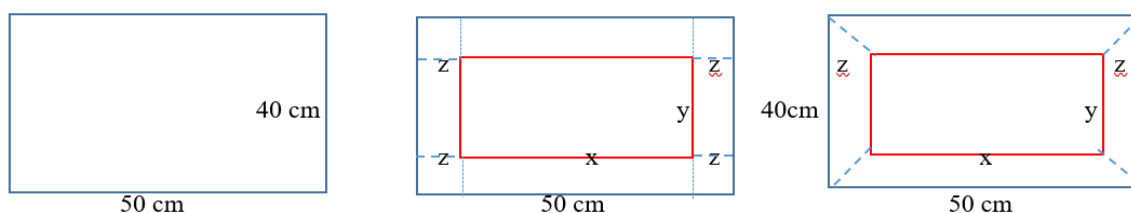
Obtener las dimensiones de la caja si el volumen requerido es de 6.000 m^3 .

Obtener las dimensiones de la caja para las cuales se obtiene volumen máximo. Obtener el volumen.

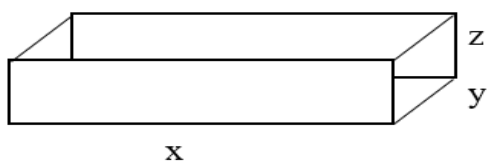
Solución:

Datos conocidos, dimensiones de la lámina: 50 por 40 cm. Datos desconocidos o datos por determinar: dimensiones de la caja para obtener sus relaciones y el máximo volumen de la caja.

Sea x el largo, y el ancho, z la altura en cm de la caja. Los cortes se hacen por las líneas punteadas.



Por las líneas roja se dobla las pestañas, lo cual es la base de la caja. El ancho de las pestañas es la altura de la caja.



Observando las gráficas y teniendo en cuenta los datos del problema, se tiene: $x + 2z = 50$; $y + 2z = 40$

Restando la segunda igualdad a la primera: $x - y = 10$

Despejando variables: $x = 50 - 2z$; $y = 40 - 2z$; $x = 10 + y$

Si $z = 20$ es decir, si se hace cortes cuadrados de 20 cm de lado, no se podría formar una caja, pues se obtendría una franja de la lámina de $10 \text{ cm} \times 40 \text{ cm}$; no habría pestañas para doblar. De igual manera, si $z = 0$, según lo anterior, $0 < z < 20$. Multiplicando por -2 , cambia el sentido de las desigualdades: $0 > -2z > -40$

Sumando respectivamente 50 y 40: $50 > 50 - 2z > 10$; $40 > 40 - 2z > 0 \rightarrow 50 > x > 10$; $40 > y > 0$

Si $10 < x < 50$, $0 < y < 40$, $0 < z < 20$, entonces $x \in (10, 50)$; $y \in (0, 40)$; $z \in (0, 20)$

Las ecuaciones que relacionan las dimensiones de la caja son:

Las respuestas son las siguientes:

$x + 2z = 50$; $y + 2z = 40$; $x - y = 10$ o también: $x = 50 - 2z$; $y = 40 - 2z$; $x = 10 + y$

Los intervalos de variación de las dimensiones de la caja y sus respectivos intervalos son:

$10 < x < 50$, $0 < y < 40$, $0 < z < 20 \rightarrow x \in (10, 50)$; $y \in (0, 40)$; $z \in (0, 20)$

El volumen de la caja es $V = xyz \rightarrow V = (50 - 2z)(40 - 2z)z \rightarrow V = (2.000 - 180z + 4z^2)z \rightarrow$

$V = (2.000z - 180z^2 + 4z^3) = f(z)$

En la anterior igualdad, el volumen de la caja se expresa en función de su altura, que es z . La función f es una cúbica.

Si el volumen requerido es de 6.000 m^3 entonces $2.000z - 180z^2 + 4z^3 = 6.000 \rightarrow$

$4z^3 - 180z^2 + 2.000z - 6.000 = 0$ Simplificando por 4 se tiene: $z^3 - 45z^2 + 500z - 1.500 = 0$

Las posibles raíces racionales de la anterior ecuación cúbica, son los divisores de 1.500, (48 divisores en total).

Pero se debe tener en cuenta que $0 < z < 20$, luego, las posibles raíces racionales son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12 y 15.

Comprobando con la división sintética, se tiene que 10 es una raíz de la ecuación.

En consecuencia:

$(z - 10)(z^2 - 35z + 150) = 0$ y las raíces de $z^2 - 35z + 150$ son: 5 y 30.

En resumen, las soluciones de la ecuación $z^3 - 45z^2 + 500z - 1.500 = 0$ son: 5, 10 y 30.

Para el problema, se descarta el valor de 30; en consecuencia:

Para $z = 5$, se tiene: $x = 50 - 2 \times 5 = 40$, $y = 40 - 2 \times 5 = 30$.

Para $z = 10$, se tiene: $x = 50 - 2 \times 10 = 30$, $y = 40 - 2 \times 10 = 20$.

Para obtener un volumen de 6.000 m^3 las dimensiones de la caja son: largo :40 cm, ancho: 30 cm, altura: 5 cm; o también: largo:30 cm, ancho: 20 cm y altura: 10 cm.

Nota.

Para obtener las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo, se debe derivar respecto a z la función cúbica f , igualar a cero este resultado, resolver la ecuación cuadrática que resulte y comprobar con ciertos criterios, que el valor es máximo; pero esto es tema de Cálculo Diferencial.

Se puede obtener un valor aproximado de z y luego los valores de x, y mediante tablas elaboradas en Excel.

Por ejemplo, desde la celda A5 se escribe números enteros de 0 a 20; en B5 se digita la fórmula: $= 50 - 2 \times A5$ y se la copia hacia abajo; en C5 la fórmula: $= 40 - 2 \times A5$ y se la copia hacia abajo; en D5 se digita la fórmula: $= A5 \times B5 \times C5$ y se la copia hacia abajo.

En esta tabla se observa que para: $z = 6, z = 7, z = 8$, el respectivo volumen es 6.384, sube a 6.552 y baja a 6.528

Esto nos indica que, el volumen máximo se obtiene para z próximo a 7. En tabla siguiente, se toma valores próximos a 7 y las cifras decimales se las establece según el volumen va aumentando, para luego disminuir, tal como en la tabla 1.

Tabla 1				Tabla 2			
DIMENSIONES				DIMENSIONES			
Altura z	Largo x	Ancho y	Volumen	Altura z	Largo x	Ancho y	Volumen
0	50	40	0	7	36	26	6552
1	48	38	1824	7,1	35,8	25,8	6557,844
2	46	36	3312	7,2	35,6	25,6	6561,792

3	44	34	4488	7,3	35,4	25,4	6563,868
4	42	32	5376	7,31	35,38	25,38	6563,97356
5	40	30	6000	7,32	35,36	25,36	6564,06067
6	38	28	6384	7,33	35,34	25,34	6564,12935
7	36	26	6552	7,34	35,32	25,32	6564,17962
8	34	24	6528	7,35	35,3	25,3	6564,2115
9	32	22	6336	7,36	35,28	25,28	6564,22502
10	30	20	6000	7,361	35,278	25,278	6564,22537
11	28	18	5544	7,362	35,276	25,276	6564,22553
12	26	16	4992	7,3621	35,2758	25,2758	6564,22553
13	24	14	4368	7,3622	35,2756	25,2756	6564,22554
14	22	12	3696	7,3623	35,2754	25,2754	6564,22554
15	20	10	3000	7,36231	35,27538	25,27538	6564,22554
16	18	8	2304	7,36232	35,27536	25,27536	6564,22554
17	16	6	1632	7,36233	35,27534	25,27534	6564,22554
18	14	4	1008	7,36234	35,27532	25,27532	6564,22554
19	12	2	456	7,36235	35,2753	25,2753	6564,22554
20	10	0	0	7,36236	35,27528	25,27528	6564,22554
				7,36237	35,27526	25,27526	6564,22554
				8	34	24	6528

Observar en la Tabla1, los valores de x, y, z para obtener un volumen de 6.000 m³.

Según la tabla2, se puede tomar las siguientes dimensiones:

$$x = 35,27526 \text{ cm}; y = 25,27526 \text{ cm}; z = 7,36237 \text{ cm}$$

Pero en la práctica y siendo las longitudes en centímetros, no se puede cortar cuadros de 7,36237 cm.

Para una respuesta aproximada y factible según el problema, se puede hacer cortes cuadrados de 7,3 cm o 7,4 cm.

Una institución educativa abre un curso para un máximo de 50 personas, con un valor por persona de \$200.000, siempre y cuando se escriban hasta 30 personas. Pero, si se inscribe más de 30, entonces por cada persona adicional, el valor por persona disminuye en \$5.000.

Obtener el ingreso que recibe la institución, en función del número de persona que toman en curso.

Calcular el mayor el número de personas que deben tomar el curso, para que la institución obtenga mayor ingreso.

Si se inscriben 50 persona, ¿cuál es el ingreso para la institución?

Teóricamente, ¿cuál es el número de personas que debería tomar el curso para que el valor por persona se de \$0?

Solución:

Si x es un número de persona que toman el curso y u el ingreso para la institución, entonces:

Para $x \leq 30$: $u = 200.000x = f(x)$.

Ahora para $x > 30$ y para comprender la estructuración del problema, se plantea los siguientes casos particulares:

Si $x = 31$, es decir, si hay una persona adicional, entonces el valor para cada persona es:

$$200.000 - 5.000 = 195.000$$

El ingreso es: $u = (200.000 - 5.000) \times 31 = 195 \times 31 = f(x)$

Si $x = 32$, o sea, si hay dos personas adicionales, entonces el valor para cada persona es:

$$200.000 - 2 \times 5.000 = 190.000$$

El ingreso es: $u = (200.000 - 2 \times 5.000) \times 32 = 190 \times 32 = f(x)$

Si $x = 33$, o sea, si hay tres personas adicionales, entonces el valor para cada persona es:

$$200.000 - 3 \times 5.000 = 185.000$$

El ingreso es: $u = (200.000 - 3 \times 5.000) \times 33 = 185 \times 33 = f(x)$

Si $x = 34$, cuatro personas adicionales, entonces el valor para cada persona es:

$$200.000 - 4 \times 5.000 = 180.000$$

El ingreso es: $u = (200.000 - 4 \times 5.000) \times 34 = 180 \times 34 = f(x)$

En general, si n es el número de persona adicionales a 30, es decir $x = 30 + n$, entonces $n = x - 30$

El valor para cada persona es: $200.000 - n \times 5.000 = 200.000 - (x - 30) \times 5.000$

El ingreso para $x > 30$, es:

$$u = (200.000 - (x - 30) \times 5.000)x = f(x) \rightarrow$$

$$u = (200.000 - 5.000x + 150.000)x = f(x) \rightarrow$$

$$u = (350.000 - 5.000x)x = f(x) \rightarrow$$

$$u = 350.000x - 5.000x^2 = f(x)$$

El ingreso que recibe la institución, en función del número de persona que toman el curso, es:

$$u = 200.000x = f(x) \text{ para } x \leq 30 \text{ y } u = 350.000x - 5.000x^2 \\ = f(x) \text{ para } x > 30$$

Para el primer caso, la función f es lineal, su gráfica es una línea recta con pendiente 200.000.

Para el segundo caso, la función f es cuadrática y su gráfica es una parábola con vértice $V(35, 6.125.000)$ y como la parábola se extiende hacia abajo, 6.125.000 es el máximo valor de u , el cual se obtiene para $x = 35$.

Con las condiciones que establece la institución, para que ésta obtenga un mayor ingreso, el número de personas que deben tomar el curso es de 35 y el máximo ingreso es de \$6.125.000.

Si el número de persona que toman el curso es de 50, que el máximo de se establece, el ingreso es:

$$u = 350.000 \times 50 - 5.000 \times (50)^2 = 1.7500.000 - 5.000 \times 2.500 = 5.000.000$$

Si el curso lo toman 50 personas, entonces el ingreso para la institución es de \$5.000.000

Obviamente este ingreso es menor que 6.125.000, pero así resulta bajo las condiciones que se establece.

Si $u = 0$, entonces: $0 = 350.000x - 5.000x^2 = (350.000 - 5.000x)x \rightarrow x = 0$ o $350.000 - 5.000x = 0$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 0$; $x = 70$

Si no se inscriben al curso, es decir, $x = 0$ o si toman el curso 70 personas, entonces el ingreso es \$0.

4.7.3 Problemas Propuestos.

Se debe construir una caja con tapa (cerrada), de base cuadrada y con una capacidad de 216 litros, con una lámina delgada cuyo valor es de \$100 el cm^2 .

Obtener el área total de la caja en función de la longitud del lado de la base.

Obtener el área total de la caja si el lado de la base es: i) 59 cm; ii) 60 cm; iii) 61 cm.

Obtener las dimensiones de la caja y el respectivo volumen, con cada uno de los valores anteriores.

Establecer en función del lado de la base, el costo total del material empleado.

Establecer el costo del material de la caja, si el lado de la base es: i) 59 cm; ii) 60 cm; iii) 61 cm.

Sugerencias.

1 litro equivale a 1.000 cm^3

Si las dimensiones de una caja son a, b, c , entonces su volumen es: $a \times b \times c$

El área de un rectángulo de dimensiones a, b es: $a \times b$

Respuestas.

Si x es la longitud del lado de la base, entonces el área total de la caja es: $A_t = \frac{2x^3 + 864.000}{x} = f(x)$

Las respectivas áreas para $x = 59, x = 60, x = 61\text{ cm}$, son : 21.600; 21.606,06; 21.605,93 cm^2

Las dimensiones de la caja para:

$x = 59$, son: 59, 59; 62,05113473 cm^2 (valor aproximado 62,05) y el volumen es 216.000 cm^3 .

$x = 60$ son 60; 60; 60 cm^2 y el volumen es: $60 \times 60 \times 60 = 216.000\text{ cm}^3$

$x = 61$, son: 61; 61; 58,04891158 cm^2 (valor aproximado 58,05) y el volumen es 216.000 cm^3

El costo total del material empleado en función del lado de la base, es:

$$\frac{2x^3 + 864.000}{x} \times 100 = g(x)$$

El costo total del material empleado si $x = 59$, $x = 60$, $x = 61$ *cm* es respectivamente:

2.160.000 *pesos*; 2.160.606 *pesos*; 2.160.593 *pesos*

Un fabricante hace cajas de cartón sin tapa (abiertas), con láminas cuadradas de 30 *cm* de lado, haciendo cortes cuadrados en las esquinas de la lámina.

Establecer las ecuaciones que relacionan las dimensiones de la caja.

Establecer las desigualdades e intervalos de variación de las dimensiones de la caja (largo, ancho y altura)

Expresar el volumen de la caja en función de una sola dimensión (altura), e identificar la función obtenida.

Obtener las dimensiones de la caja para las cuales se obtiene volumen máximo. Obtener éste volumen.

Sugerencias. Se puede basar en el ejemplo precedente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fleming, W. & Varberg, D. (2003). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Prentice - Hall.

Frank, A. (1980). Fundamentos de Matemáticas Superiores. México: McGraw-Hill.

Raymond, B. et al. (1999). Precálculo. México: Mc Graw Hill

Smith et al. (1998). Algebra: Trigonometría y Geometría. México: Addison Wesley Longman.

Smith, S. et. al (2002). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Addison Wesley Longman.

Zill, D. & Dewar, J. (2001). Álgebra Trigonometría. México: Mc-Graw-Hill.

ACERCA DE LOS AUTORES

Héctor Jairo Portilla Obando.

Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Licenciado en Educación especialidad Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Profesor de Tiempo Completo, categoría Asociado en el escalafón docente, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño; jairopor@gmail.com.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima; Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga; Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño; Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño; Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Profesor de Tiempo Completo, categoría Asociado en el escalafón docente, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño; jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.



Editorial Universidad de **Nariño**

Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales

Esta obra nace por el interés de los autores de publicar un documento introductorio sobre fundamentos de matemáticas generales que sirva de consulta y nivelación a estudiantes que ingresan a primer semestre a la Universidad de Nariño, sobre todo, a estudiantes de programas que tienen relación con las Ciencias Básicas, Técnicas e Ingenierías.

Los temas que se abordan en esta obra han sido seleccionados a partir de la experiencia de los autores, quienes reconocen en ellos las dificultades de los estudiantes, tanto en lo conceptual como en lo procedimental. Para el efecto, se presenta, en forma resumida, la conceptualización, ejemplos y, luego, se proponen ejercicios incluyendo las respectivas respuestas. Adicionalmente, en cada capítulo se propone una evaluación que contiene preguntas organizadas por temas, en las que se indica la respuesta correcta y se propone una sugerencia que, bien retroalimenta o guía la obtención de la misma.

Esta obra está organizada en cuatro capítulos. El primero, “Elementos de lógica matemática y teoría de conjuntos”, presenta aspectos básicos de proposiciones simples, compuestas, tablas de verdad y aplicaciones a la teoría de conjuntos. El segundo, “Conjuntos numéricos”, contiene un repaso de los sistemas numéricos: conjunto de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales, con la operatoria aritmética.

El tercero, “Introducción al Álgebra”, aborda un repaso general de expresiones algebraicas, polinomios, raíces de polinomios, factorización y teoremas relacionados con las raíces de polinomios. Finalmente, el capítulo cuarto, “Funciones”, contiene aspectos generales de funciones, para luego centrarse en el estudio de las funciones numéricas reales, a saber: polinómicas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas. No obstante, en lo que corresponde a funciones trigonométricas, sólo se introduce la definición, sus dominios y rangos, dado que se trata de un texto para repaso de fundamentos de matemáticas generales. Su ampliación será abordada en una obra que se publicará posteriormente.

ISBN: 978-958-8958-84-2 digital



9 789588 958842



Editorial
Universidad de **Nariño**