

DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES QUE
INCIDEN SOBRE CILINDROS ELIPTICOS CONDUCTORES

JAIME ENRIQUE CASTRO RENDÓN

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES QUE
INCIDEN SOBRE CILINDROS ELIPTICOS CONDUCTORES

JAIME ENRIQUE CASTRO RENDÓN

Trabajo de grado para optar él titulo de Físico

Asesor
ÁLVARO RÚGELES PÉREZ
Doctor en Ciencias Físicas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

“Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor”

“Artículo 1 del acuerdo N° 234 de octubre 11 de 1966, emanada por el honorable concejo directivo de la Universidad de Nariño”

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, noviembre de 2005

AGRADECIMIENTOS

Mediante este trabajo agradezco a Dios, quien gracias a su voluntad dio la posibilidad de vivir como ser humano, dotado de voluntad y libre de escoger la vida de físico, con la que tengo la capacidad de apreciar la obra perfecta del Señor... *el universo*.

Aprovecho esta oportunidad para agradecer a todos mis amigos quienes han aportado en mi formación personal y profesional.

A toda mi familia, especialmente a mi padre Enrique Castro Legro y mi madre María Inés Rendón Guerrero quienes día a día con su ejemplo y trabajo me enseñan que si se trabaja con amor y honradez, nuestras vidas serán bendecidas por Dios.

A mis profesores y amigos de estudio con quienes comparto el placer de aprender. A mis maestros Álvaro Rúgeles, Juan Florez y Alfredo Pasaje quienes me brindaron su sincera amistad en estos cinco difíciles años de carrera.

*A Dios,
A mi familia*

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	
1. OBJETIVOS	17
1.1 OBJETIVO GENERAL	17
1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS	17
2. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES EN UN MEDIO DIELÉCTRICO HOMOGÉNEO	18
2.1 ECUACIONES DE MAXWELL	18
2.2 PARÁMETROS CONSTITUTIVOS	18
2.3 CONDICIONES DE FRONTERA EN LA INTERFACE DIELÉCTRICO- CONDUCTOR	19
2.4 VECTOR POTENCIAL MAGNÉTICO \vec{A}	20
2.5 MODOS ELECTROMAGNÉTICOS TRANSVERSALES	21
2.5.1 Modo transversal eléctrico TE^z	22
2.5.2 Modo transversal magnético TM^z	23
3. DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES QUE INCIDEN SOBRE CILINDROS ELÍPTICOS CONDUCTORES PERFECTOS	24
3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	24
3.1.1 DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DEL CILINDRO ELÍPTICO CONDUCTOR	25
3.2 DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS TE^z QUE INCIDEN SOBRE CILINDROS ELIPTICOS CONDUCTORES	28

3.2.1	Densidad superficial de corriente	34
3.2.2	Campo dispersado	38
3.2.3	Sección eficaz de área	42
3.3	DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS TM^z QUE INCIDEN SOBRE CILINDROS ELÍPTICOS CONDUCTORES	45
3.3.1	Densidad superficial de corriente	48
3.3.2	Campo dispersado	51
3.3.3	Sección eficaz de área	55
	CONCLUSIONES	58
	RECOMENTACIONES	
	BIBLIOGRAFÍA	

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1 Condiciones de frontera en la interface dieléctrico – conductor para las componentes tangenciales	
(a) Del campo eléctrico. (b) Del campo magnético	20
Figura 2 Representación gráfica de la fuente eléctrica superficial distribuida sobre una superficie S y del punto de observación cuyo vector posición es \vec{r}	21
Figura 3 Modo de propagación TE^Z	22
Figura 4 Modo de propagación TM^Z	23
Figura 5 Regiones y campos presentes en la dispersión	24
Figura 6 Cilindro elíptico conductor	25
Figura 7 Vectores unitarios tangentes \hat{c} y normales \hat{n} a la superficie del cilindro elíptico	26
Figura 8 Ángulo de inclinación α entre el plan tangente a la superficie del cilindro y el plano f_z	27
Figura 9 Geometría presente en la dispersión con incidencia TE^Z	28
Figura 10 División del contorno del dispersor en segmentos ΔC	31
Figura 11 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros circulares caso TE^Z	36
Figura 12 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros elípticos caso TE^Z	37
Figura 13 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros aplanados caso TE^Z	37
Figura 14 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TE^Z cilindros circulares	38
Figura 15 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TE^Z cilindros circulares	39
Figura 16 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TE^Z cilindros elípticos	40
Figura 17 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TE^Z cilindros elípticos	40
Figura 18 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TE^Z cilindros aplanados	41
Figura 19 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TE^Z cilindros aplanados	42
Figura 20 Sección eficaz de área para el caso TE^Z cilindros circulares	43
Figura 21 Sección eficaz de área para el caso TE^Z cilindros elípticos	44
Figura 22 Sección eficaz de área para el caso TE^Z cilindros aplanados	44
Figura 23 Geometría presente en la dispersión con incidencia TM^Z	45

Figura 24 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros circulares caso TM^Z	49
Figura 25 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros elípticos caso TM^Z	50
Figura 26 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros aplanados caso TM^Z	50
Figura 27 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TM^Z cilindros circulares	52
Figura 28 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TM^Z cilindros circulares	52
Figura 29 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TM^Z cilindros elípticos	53
Figura 30 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TM^Z cilindros elípticos	53
Figura 31 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TM^Z cilindros aplanados	54
Figura 32 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TM^Z cilindros aplanados	55
Figura 33 Sección eficaz de área para el caso TM^Z cilindros circulares	55
Figura 34 Sección eficaz de área para el caso TM^Z cilindros elípticos	56
Figura 35 Sección eficaz de área para el caso TM^Z cilindros aplanados	57

GLOSARIO

Ancho de dispersión: Es el parámetro de dispersión que se usa en el caso bidimensional, que se define como la sección eficaz de área por unidad de longitud de onda, que en la literatura inglesa se conoce como *scattering width SW*.

Conductor: Medio material cuyos átomos tienen electrones de valencia que no se encuentran ligados por las fuerzas atómicas y moleculares. De este modo un conductor tiene cargas libres.

Conductor eléctrico perfecto: Es un conductor cuya conductividad es infinita.

Dieléctrico: Medio material cuyos átomos tienen electrones de valencia que se encuentran ligados por las fuerzas atómicas y moleculares. Así un dieléctrico ideal no tiene cargas libres.

Dieléctrico homogéneo: Es un medio cuyos parámetros constitutivos no dependen de la posición del campo aplicado.

Dieléctrico isotrópico: Es un medio cuyos parámetros constitutivos no dependen de la dirección del campo aplicado.

Dieléctrico lineal: Es un medio cuyos parámetros constitutivos no dependen de la intensidad de campo aplicado.

Dispersión electromagnética: Fenómeno causado por el cambio en las propiedades electromagnéticas del medio en donde la onda se propaga.

Dispersor: Objeto que por sus propiedades electromagnéticas se distingue en un medio.

Onda electromagnética: Perturbación espacio temporal en que el campo eléctrico y el magnético varían transversalmente entre sí y a la dirección de propagación de acuerdo a las ecuaciones de Maxwell.

Onda electromagnética plana uniforme: Es una onda electromagnética tal que tiene sus dos campos, el eléctrico y el magnético contenidos en un mismo plano y la distancia entre dos planos consecutivos es constante, además estos serán paralelos.

Ondas transversales eléctricas TE^z : Son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, donde el campo eléctrico es transversal a la dirección z .

Ondas transversales magnéticas TM^z : Son soluciones de las ecuaciones de Maxwell, donde el campo magnético es transversal a la dirección z .

RESUMEN

Se analiza el fenómeno de dispersión de ondas electromagnéticas planas uniformes trabajando superficies dispersoras bidimensionales correspondientes a diferentes cilindros elípticos conductores perfectos. Se calcula la densidad de corriente inducida sobre la superficie dispersora haciendo uso del método de las ecuaciones integrales. Se valora el campo dispersado en la zona lejana y finalmente se presenta la sección eficaz de área de dispersión correspondiente a cada cilindro.

ABSTRACT

The phenomenon of scattering of uniform plane electromagnetic waves is analyzed working scatterer surfaces two-dimensional corresponding to different elliptic perfect conducting cylinders. The current density induced is calculated on the scatterer surface using integral equation method and the scattering field is valued in the far zone and finally the scattering cross section is presented for each cylinder.

INTRODUCCIÓN

El fenómeno de dispersión de ondas electromagnéticas por un obstáculo puede ser entendido como la interacción de la energía con la materia. Así, cuando una onda electromagnética incide sobre un conductor eléctrico perfecto ésta onda induce una distribución de densidad de corriente eléctrica sobre la superficie del conductor. Entonces, dicha densidad de corriente radiará unas ondas electromagnéticas que se denominan ondas dispersadas.

En el presente trabajo se consideró la incidencia de dos tipos de ondas electromagnéticas planas uniformes: las ondas transversales eléctricas TE^Z y las ondas transversales magnéticas TM^Z . El obstáculo que se consideró es un conductor eléctrico perfecto bidimensional, es decir: un cilindro, el cuál tiene por sección cilíndrica una elipse cuyos semiejes dimensionalmente son comparables con la longitud de onda de la onda electromagnética incidente.

En el primer capítulo brevemente se expone la propagación de ondas electromagnéticas planas uniformes en un dieléctrico continuo, libre de fuentes y obstáculos (dispersores). Se hará énfasis en las ondas que poseen polarización lineal y de las cuales se escogen las ondas transversales eléctricas TE^Z y las transversales magnéticas TM^Z .

En el segundo capítulo se trabaja el fenómeno de dispersión: a partir de la condición de frontera en la superficie del conductor y la implementación del vector potencial magnético se plantea la ecuación integral del campo magnético MFIE para el primer tipo de onda incidente (TE^Z) y la ecuación integral del campo eléctrico EFIE para el segundo tipo (TM^Z), las cuales son resueltas mediante aproximaciones numéricas obteniendo la densidad de corriente eléctrica superficial, luego se calcula el campo dispersado y finalmente se encuentra el ancho de dispersión SW .

En este trabajo de grado se consideran distintos cilindros elípticos los cuales geoméricamente se diferencian en sus semiejes. De este modo se analiza como se presenta el fenómeno de dispersión en correspondencia a la geometría del dispersor.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

1.1.1 Estudiar la dispersión de una onda electromagnética plana armónica cuando incide sobre un cilindro elíptico conductor perfecto.

1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

1.1.1 Determinar el campo electromagnético dispersado y los parámetros que caracterizan la dispersión debida a un cilindro elíptico conductor perfecto.

1.1.2 Utilizar un método analítico-numérico que permita solucionar el problema.

2. ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES EN UN MEDIO DIELECTRICO HOMOGÉNEO

En este capítulo se presenta un resumen de la teoría de propagación de ondas electromagnéticas en el dominio de las frecuencias. Se considera una dependencia del tiempo de la forma $e^{j\omega t}$ y se usa la notación compleja de las cantidades que describen las fuentes y los campos electromagnéticos.

2.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Las ecuaciones de Maxwell expresan las leyes físicas que gobiernan el comportamiento de los campos electromagnéticos producidos por cargas y corrientes. En el dominio de las frecuencias estas ecuaciones se escriben así¹:

$$\nabla \cdot \vec{D} = r_{ev} \quad (1.1)$$

Ecuación de Maxwell - Gauss

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.2)$$

Ecuación de Maxwell - Biott-Savart

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega \vec{B} \quad (1.3)$$

Ecuación de Maxwell - Faraday

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega \vec{D} \quad (1.4)$$

Ecuación de Maxwell - Ampere,

donde \vec{E} es la intensidad de campo eléctrico (V/m), \vec{H} es la intensidad de campo magnético (A/m), \vec{D} es la densidad de flujo eléctrico (C/m²), \vec{B} es la densidad de flujo magnético (Wb/m²), \vec{J} es la densidad de corriente eléctrica (A/m²), r_{ev} es la densidad de carga eléctrica volumétrica (C/m³) y ω es la frecuencia angular (Hz).

2.2 PARÁMETROS CONSTITUTIVOS

Cuando los medios materiales son expuestos a campos electromagnéticos, las partículas cargadas que los conforman interactúan con estos campos, modificando

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 25.

la propagación de las ondas electromagnéticas en el medio comparada con la propagación en el vacío^{2,3}. Para un medio homogéneo isotrópico y lineal la influencia del medio se tiene en cuenta mediante las siguientes relaciones constitutivas:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.5)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (1.7)$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica del medio, μ es la permeabilidad magnética del medio y σ es la conductividad del medio. Se definen la permitividad relativa ϵ_r y la permeabilidad relativa μ_r así:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.8)$$

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad (1.9)$$

donde $\epsilon_0 = 1/36\pi \times 10^{-9}$ Faradios/metro y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Henrios/metro son la permitividad y la permeabilidad del vacío. Para el aire $\epsilon_r = 1.0006$ y $\mu_r = 1.0000004$, de modo que en la mayoría de los problemas se considera que en el aire $\epsilon = \epsilon_0$ y $\mu = \mu_0$.

2.3 CONDICIONES DE FRONTERA EN LA INTERFACE DIELECTRICO - CONDUCTOR

Cuando una onda electromagnética se propaga a través de una interface plana entre un medio dieléctrico 1 y un medio conductor 2, los vectores de campo cumplen unas condiciones de frontera que se derivan de las ecuaciones de Maxwell^{3,4}. Entre estas se destacan:

La componente tangencial del campo eléctrico presenta continuidad, como se muestra en la Figura 1a, es decir:

² ZAJAC, Alfred, Eugene Hecht. Óptica. P. 41.

³ CABRERA, José Manuel, Óptica electromagnética. P. 229.

⁴ CORSON, Dale R, LORRAIN, Paul. Introduction of electromagnetic field and waves. P. 130, 285

$$\hat{n} \times (\vec{E}^1 - \vec{E}^2) = 0. \quad (1.10)$$

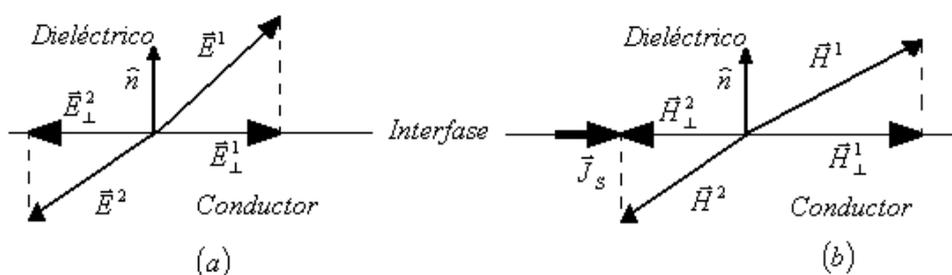
La componente tangencial del campo magnético presenta una discontinuidad igual a la densidad de corriente superficial \vec{J}_s en la interface, como se muestra en la Figura 1b, es decir:

$$\hat{n} \times (\vec{H}^1 - \vec{H}^2) = \vec{J}_s. \quad (1.11)$$

Figura 1 Condiciones de frontera en la interface dieléctrico – conductor para las componentes tangenciales

(a) Del campo eléctrico.

(b) Del campo magnético.



Si el medio 2 es un conductor eléctrico perfecto, entonces:

$$\hat{n} \times \vec{E}^1 = 0, \quad (1.12)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}^1 = \vec{J}_s. \quad (1.13)$$

2.4 VECTOR POTENCIAL MAGNÉTICO \vec{A}

El vector potencial magnético \vec{A} es una cantidad vectorial auxiliar, que se introduce para facilitar la solución de algunos problemas electrodinámicos^{1,5}. El potencial magnético \vec{A} en un medio dieléctrico homogéneo isotrópico y lineal, caracterizado por una permitividad ϵ y una permeabilidad μ cumple la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{A} + \mathbf{b}^2 \vec{A} = -\mathbf{m} \vec{j}, \quad (1.14)$$

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P 256, 261, 273

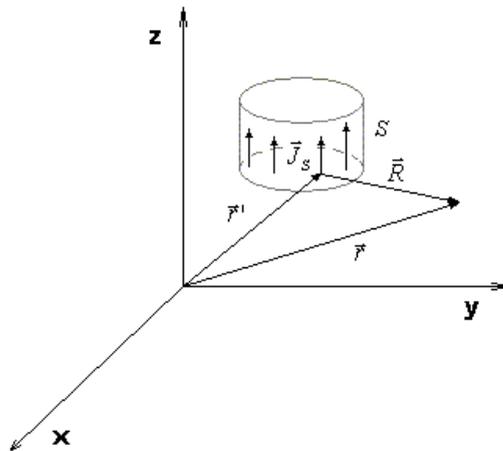
⁵ JACKSON, Jhon David. Classical electrodynamics. P 239.

donde \vec{b} es el vector de onda, cuya norma es $b = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$. En términos de \vec{A} los vectores de campo \vec{H} y \vec{E} están dados por:

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{A} \quad (1.15)$$

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - j\frac{1}{\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \quad (1.16)$$

Figura 2 Representación gráfica de la fuente eléctrica superficial distribuida sobre una superficie S y del punto de observación cuyo vector posición es \vec{r} .



Si se considera un dieléctrico ilimitado, que contiene una fuente eléctrica superficial distribuida sobre la superficie cerrada S como se muestra en la Figura 2, el potencial magnético \vec{A} producido por esta fuente está dado por:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iint_S \vec{J}_s(\vec{r}') \frac{e^{-jbr}}{R} ds', \quad (1.17)$$

donde \vec{J}_s es la densidad superficial de corriente eléctrica, $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$, \vec{r} es la posición del punto de observación y \vec{r}' barre todas las posiciones de la fuente.

2.5 MODOS ELECTROMAGNÉTICOS TRANSVERSALES

En la resolución de problemas electromagnéticos se destacan las soluciones de las ecuaciones de Maxwell, en las que el vector de campo eléctrico y/o el vector

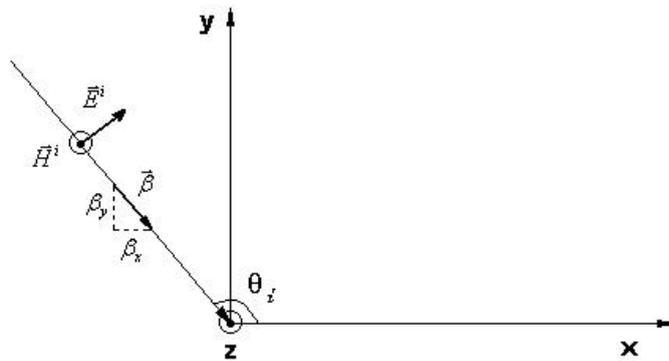
de campo magnético son transversales a una dirección dada¹. Si esta dirección coincide con el eje z es posible considerar tres modos transversales:

Modo eléctrico transversal TE ^Z	(E _z = 0)
Modo magnético transversal TM ^Z	(H _z = 0)
Modo electromagnético transversal TEM ^Z	(E _z = 0, H _z = 0).

2.5.1 Modo transversal eléctrico TE^Z. Sea un modo TE^Z, representado por una onda plana uniforme que viaja a través de un medio dieléctrico como se muestra en la Figura 3^{1,4,5}. El vector de onda \vec{b} está dado por:

$$\vec{b} = -b(\cos q_i \hat{a}_x + \sin q_i \hat{a}_y). \quad (1.18)$$

Figura 3 Modo de propagación TE^Z.



El campo eléctrico es:

$$\vec{E}^i = E_0(\sin q_i \hat{a}_x - \cos q_i \hat{a}_y) e^{j\mathbf{b}(x \cos q_i + y \sin q_i)}. \quad (1.19)$$

De la ecuación de Maxwell - Faraday (1. 3), se obtiene que:

$$\vec{H}^i = E_0 \sqrt{\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}} e^{j\mathbf{b}(x \cos q_i + y \sin q_i)} \hat{a}_z. \quad (1.20)$$

Utilizando coordenadas cilíndricas ($r \mathbf{f}_z$), con el eje z coincidente con el eje z de la Figura 3, las ecuaciones (1. 19) y (1. 20) se pueden expresar así:

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 261

⁴ CORSON, Dale R., Paul Lorrain. Introduction of electromagnetic field and waves. P. 412.

⁵ JACKSON, Jhon David. Classical electrodynamics. P. 356.

$$\vec{E}^i = E_0 (\sin \mathbf{q}_i \hat{a}_x - \cos \mathbf{q}_i \hat{a}_y) e^{jbr \cos(\mathbf{f}-\mathbf{q}_i)}, \quad (1.21)$$

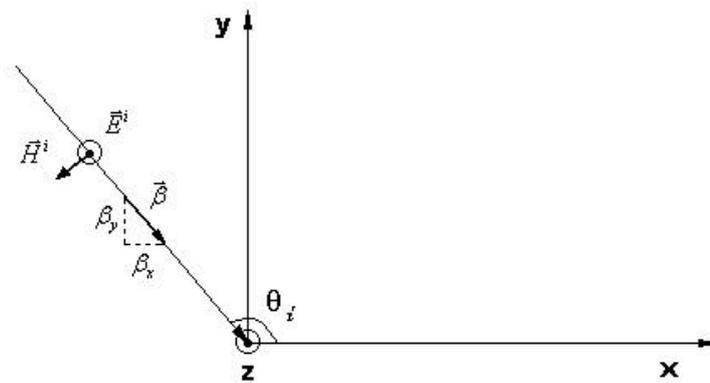
$$\vec{H}^i = E_0 \sqrt{\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}} e^{jbr \cos(\mathbf{f}-\mathbf{q}_i)} \hat{a}_z. \quad (1.22)$$

2.5.2 Modo transversal magnético TM^Z . Sea un modo TM^Z , representado por una onda plana uniforme que viaja a través de un medio dieléctrico como se muestra en la Figura 4^{1,4,5}. El campo eléctrico y magnético están dados por:

$$\vec{E}^i = E_0 e^{jb(x \cos \mathbf{q}_i + y \sin \mathbf{q}_i)} \hat{a}_z, \quad (1.23)$$

$$\vec{H}^i = \frac{E_0}{j\omega \mathbf{m}} (-\sin \mathbf{q}_i \hat{a}_x + \cos \mathbf{q}_i \hat{a}_y) e^{jb(x \cos \mathbf{q}_i + y \sin \mathbf{q}_i)}. \quad (1.24)$$

Figura 4 Modo de propagación TM^Z .



Utilizando coordenadas cilíndricas (r, \mathbf{f}, z) , con el eje z coincidente con el eje z de la Figura 4, las ecuaciones (1.23) y (1.24) se escriben así:

$$\vec{E}^i = E_0 e^{jbr \cos(\mathbf{f}-\mathbf{q}_i)} \hat{a}_z, \quad (1.25)$$

$$\vec{H}^i = \frac{E_0}{j\omega \mathbf{m}} (-\sin \mathbf{q}_i \hat{a}_x + \cos \mathbf{q}_i \hat{a}_y) e^{jbr \cos(\mathbf{f}-\mathbf{q}_i)}. \quad (1.26)$$

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 269.

⁴ CORSON, Dale R., LORRAIN, Paul. Introduction of electromagnetic field and waves. P. 412.

⁵ JACKSON, Jhon David. Classical electrodynamics, P. 356.

3. DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS PLANAS UNIFORMES QUE INCIDEN SOBRE CILINDROS ELÍPTICOS CONDUCTORES PERFECTOS

3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se estudia la dispersión de una onda electromagnética plana uniforme armónica que viaja a través de un medio dieléctrico homogéneo y que encuentra en su camino un dispersor representado por un cilindro elíptico conductor perfecto.

El fenómeno de dispersión en electrodinámica es causado por el cambio en las propiedades electromagnéticas del medio en donde la onda se está propagando¹. Cuando la onda incide sobre el conductor perfecto, esta induce una corriente eléctrica superficial sobre el mismo¹. Esta corriente a su vez genera un campo electromagnético que se conoce como campo dispersado.

En lo sucesivo se utilizará la siguiente notación:

\vec{E}^i Intensidad de campo eléctrico incidente.

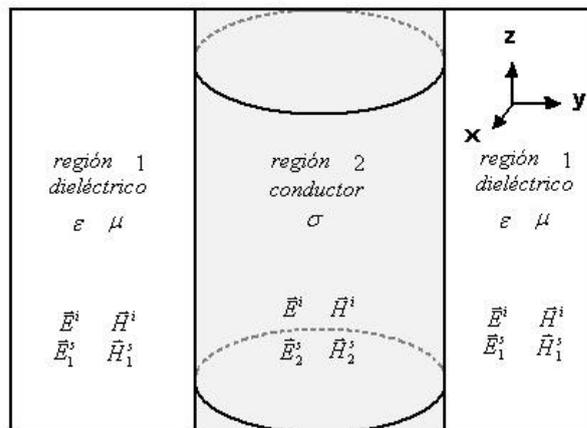
\vec{H}^i Intensidad de campo magnético incidente.

\vec{J}_s Densidad superficial de corriente eléctrica inducida sobre el conductor.

\vec{E}^s Intensidad de campo eléctrico dispersado.

\vec{H}^s Intensidad de campo magnético dispersado.

Figura 5 Regiones y campos presentes en la dispersión.



¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 570.

El campo incidente es el campo en ausencia del dispersor. El campo total (\vec{E}^t, \vec{H}^t) es la suma del campo incidente y el campo dispersado¹:

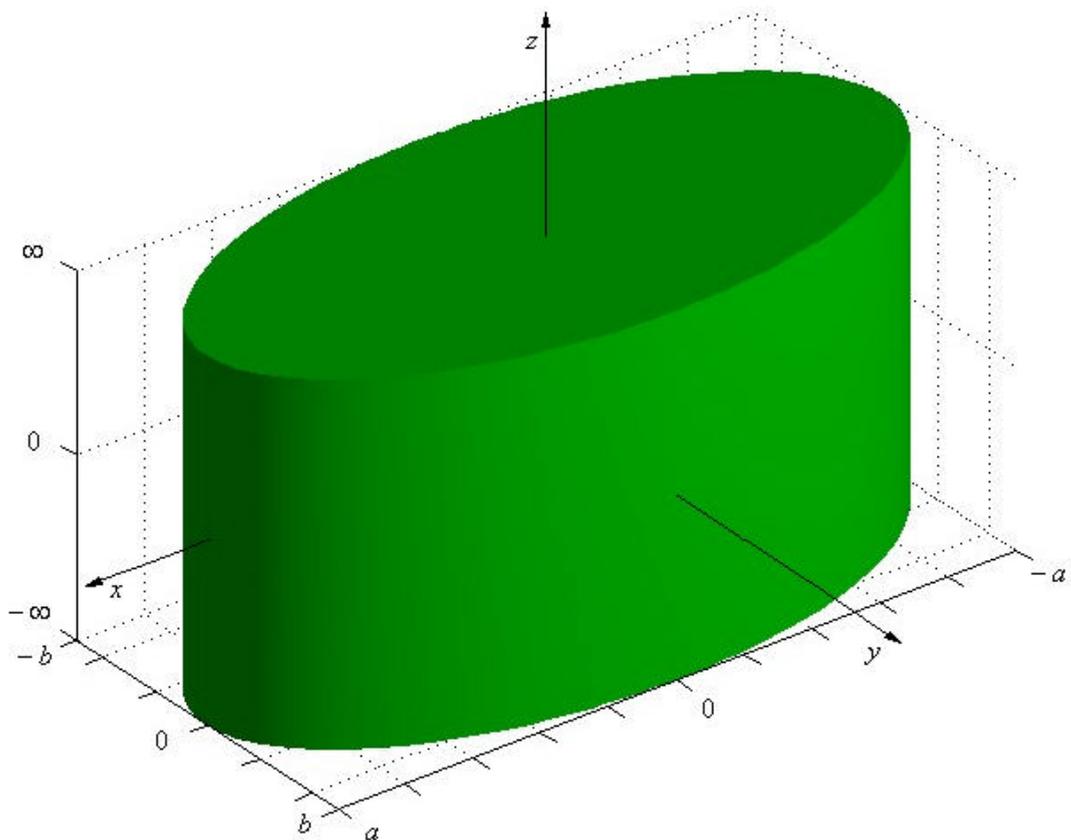
$$\vec{E}^t = \vec{E}^i + \vec{E}^s \quad (2.1)$$

$$\vec{H}^t = \vec{H}^i + \vec{H}^s \quad (2.2)$$

En la Figura 5 se muestra gráficamente un sistema compuesto por un medio dieléctrico homogéneo que contiene un cilindro elíptico conductor perfecto. Dado que la onda incidente se supone conocida, el problema consiste en calcular el campo dispersado lo cual se presenta en las secciones 2.2 y 2.3.

3.1.1 Descripción geométrica del cilindro elíptico conductor

Figura 6 Cilindro elíptico conductor.



¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 570.

En la Figura 6 se muestra un cilindro elíptico conductor cuyo eje coincide con el eje z del sistema coordenado y por lo tanto su corte en el plano xy da como resultado una elipse descrita por la ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (2.3)$$

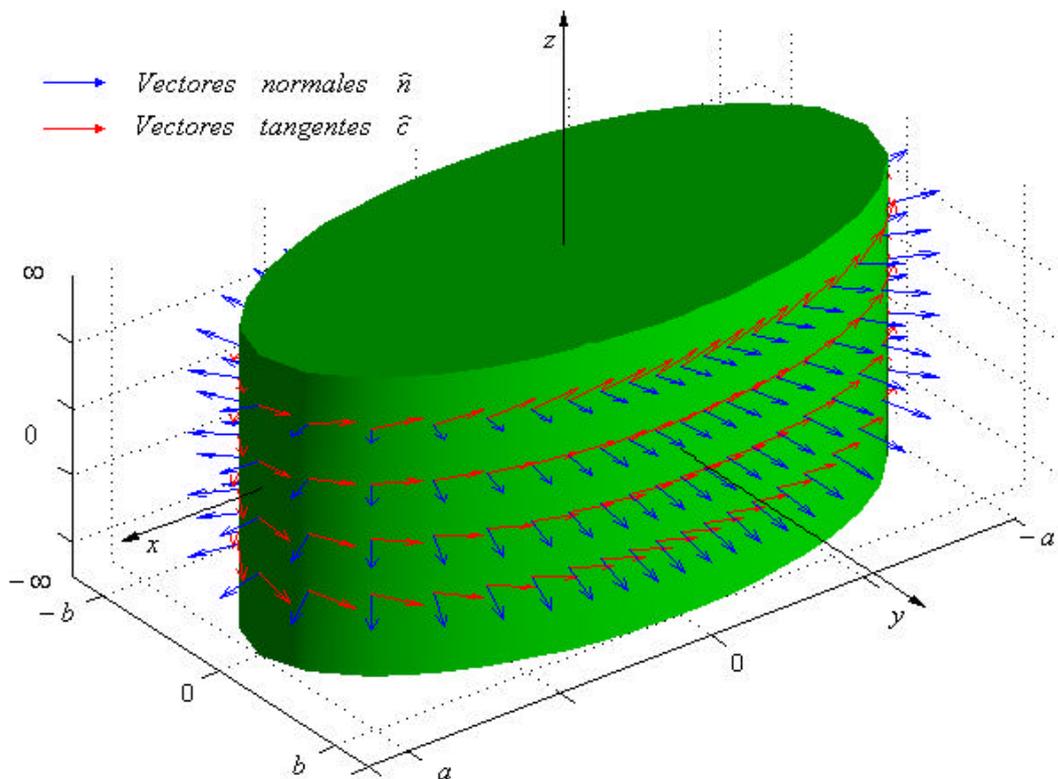
donde a y b son los semiejes a lo largo de los ejes x y y respectivamente. En coordenadas cilíndricas ($r\mathbf{f}_z$), la ecuación (2.3) se escribe de la forma:

$$\mathbf{r} = ab(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \text{sen}^2 \mathbf{f})^{-1/2}. \quad (2.4)$$

El vector posición \vec{r} de un punto cualquiera sobre la superficie del cilindro esta dado por:

$$\vec{r} = ab(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \text{sen}^2 \mathbf{f})^{-1/2} (\cos \mathbf{f} \hat{a}_x + \text{sen} \mathbf{f} \hat{a}_y) + z \hat{a}_z. \quad (2.5)$$

Figura 7 Vectores unitarios tangentes \hat{c} y normales \hat{n} a la superficie del cilindro elíptico.



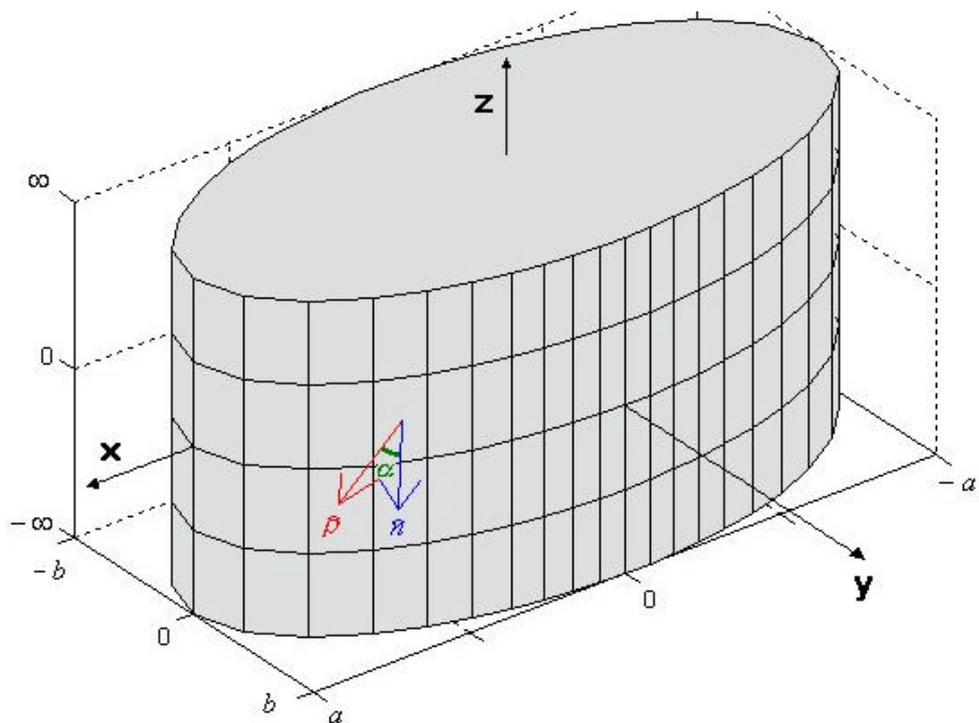
El vector unitario \hat{c} tangente a cualquier punto a lo largo del contorno C de la sección elíptica se halla a partir de la fórmula $\hat{c} = \frac{\partial \vec{r} / \partial \mathbf{f}}{|\partial \vec{r} / \partial \mathbf{f}|}$ ⁶, obteniendo:

$$\hat{c} = \frac{-a^2 \sin \mathbf{f} \hat{a}_x + b^2 \cos \mathbf{f} \hat{a}_y}{\sqrt{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}}. \quad (2.6)$$

El vector unitario normal a la superficie, dado por $\hat{n} = \hat{c} \times \hat{a}_z$ ⁶, se escribe así:

$$\hat{n} = \frac{b^2 \cos \mathbf{f} \hat{a}_x + a^2 \sin \mathbf{f} \hat{a}_y}{\sqrt{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}}. \quad (2.7)$$

Figura 8 Angulo de inclinación α entre el plano tangente a la superficie del cilindro y el plano $\mathbf{f}z$.



En la Figura 7 se muestra el campo de los vectores \hat{c} y \hat{n} sobre la superficie del cilindro elíptico. Ahora el diferencial de superficie sobre el cilindro elíptico está dado por⁶:

⁶ LARSON Rolante E, Hostettler Robert. Calculo y geometría analítica

$$ds = dc dz, \quad (2.8)$$

donde dc es diferencial de línea a lo largo del contorno C , así (2.8) queda⁶:

$$ds = r \sec a \, df dz, \quad (2.9)$$

donde a es el ángulo entre el plano tangente a la superficie del cilindro y el plano fz como se muestra en la Figura 8⁶, él cual se calcula con la fórmula $\hat{n} \cdot \hat{r} = |\hat{n}| |\hat{r}| \cos a$ y por tanto se tiene que:

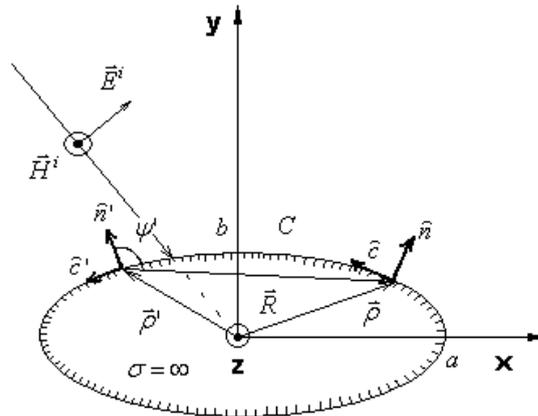
$$\sec a = \frac{\sqrt{b^4 \cos^2 f + a^4 \sin^2 f}}{b^2 \cos^2 f + a^4 \sin^2 f}. \quad (2.10)$$

Finalmente el diferencial de superficie para el cilindro elíptico es:

$$ds = ab \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 f + a^4 \sin^2 f}{(b^2 \cos^2 f + a^2 \sin^2 f)^3}} df dz. \quad (2.11)$$

3.2 DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS TE^Z QUE INCIDEN SOBRE CILINDROS ELÍPTICOS CONDUCTORES

Figura 9 Geometría presente en la dispersión con incidencia TE^Z .



En la Figura 9 se muestra un corte transversal del cilindro elíptico conductor y de la onda incidente en el plano xy . La onda incidente TE^Z está dada por las fórmulas (1. 21) y (1. 22) con $E_0 = 1$. El campo dispersado se calcula a partir de las ecuaciones de Maxwell con ciertas condiciones de frontera sobre la superficie del cilindro elíptico conductor.

Para el tipo de incidencia TE^Z conviene exigir la discontinuidad de la componente tangencial del campo magnético en la interface dieléctrico-conductor (1. 13) y considerando el campo total (2. 2), se tiene que:

$$\vec{J}_s(\vec{r} = \vec{r}_s) = \hat{n} \times [\vec{H}^i(\vec{r} = \vec{r}_s) + \vec{H}^s(\vec{r} = \vec{r}_s)], \quad (2. 12)$$

donde \vec{r}_s es el vector posición que describe la superficie del cilindro. Teniendo en cuenta la Figura 9, el problema presenta simetría axial con respecto al eje del cilindro y por lo tanto todos los vectores de campo y la densidad de corriente inducida son independientes de la coordenada z . El corte transversal del cilindro se puede ubicar en $z = 0$ y por lo tanto:

$$\vec{r} = \vec{r}' . \quad (2. 13)$$

Teniendo en cuenta que \hat{n} es dado por (2. 7), el primer término del lado derecho de la ecuación (2. 12), puede escribirse así:

$$\hat{n} \times \vec{H}^i(\vec{r} = \vec{r}_s) = -\sqrt{\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}} e^{\left(\frac{jabb \cos(f-q_i)}{\sqrt{b^2 \cos^2 f + a^2 \sin^2 f}} \right)} \hat{c} \quad (2. 14)$$

De acuerdo a (2. 12) una densidad de corriente aparece al existir una diferencia entre las componentes tangenciales a la superficie del cilindro del campo magnético incidente y dispersado, Figura 1b. Con un campo incidente y un vector normal dados por (1. 22) y (2. 7) se concluye que la densidad de corriente se encuentra en el plano xy a lo largo del vector \hat{c} , así que:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = J_{sc}(\vec{r}) \hat{c} . \quad (2. 15)$$

Y así, el lado izquierdo de la ecuación (2. 12) queda:

$$\vec{J}_s(\vec{r} = \vec{r}_s) = J_{sc}(\vec{r}') \hat{c} . \quad (2. 16)$$

Teniendo en cuenta (2. 14) y (2. 16), el segundo producto vectorial del lado derecho de (2. 12), debe estar a lo largo de la dirección \hat{c} , es decir:

$$\hat{n} \times \vec{H}^s(\vec{r} = \vec{r}_s) = \left[\hat{c} \cdot \lim_{r \rightarrow C} (\hat{n} \times \vec{H}^s(\vec{r})) \right] \hat{c} , \quad (2. 17)$$

donde el límite representa un acercamiento al contorno C del dispersor desde afuera. El potencial magnético producido por \vec{J}_s de acuerdo a (1. 17), (2. 11) y (2. 16) se escribe como:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{ab\mathbf{m}}{4\mathbf{p}} \int_c \int_{-\infty}^{\infty} J_{sc}(\vec{r}') \hat{c}' \frac{e^{-jbR}}{R} \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} dz' d\mathbf{f}, \quad (2.18)$$

donde $R = \sqrt{|\vec{r} - \vec{r}'|^2 + (z - z')^2}$ representa la distancia existente entre el punto donde se mide el campo y el punto donde se encuentra la densidad de corriente que lo produce. El campo magnético de acuerdo con (1.15) queda:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = \frac{ab}{4\mathbf{p}} \nabla \times \int_c \int_{-\infty}^{\infty} J_{sc}(\vec{r}') \hat{c}' \frac{e^{-jbR}}{R} \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} dz' d\mathbf{f}. \quad (2.19)$$

La función de Hankel $H_0^{(2)}(\mathbf{x})$ de segundo tipo y orden cero se representa de la forma¹:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-jn\sqrt{x^2+t^2}}}{\sqrt{x^2+t^2}} dt = -j\mathbf{p}H_0^{(2)}(\mathbf{x}). \quad (2.20)$$

Aplicando (2.20) en (2.19) se obtiene:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = -j\frac{ab}{4} \nabla \times \int_c J_{sc}(\vec{r}') \hat{c}' H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f}, \quad (2.21)$$

al conmutar la integral y el rotacional en (2.21), aparece el siguiente producto vectorial:

$$\nabla \times \hat{c}' H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|) = \hat{c}' \times \hat{R} \mathbf{b} H_1^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|), \quad (2.22)$$

donde \hat{R} es el vector unitario a lo largo de la distancia $\vec{r} - \vec{r}'$ que se muestra en la Figura 9 y para obtener (2.22) se ha aplicado la relación¹:

$$\nabla H_0^{(2)}(\mathbf{b}R) = -\mathbf{b} H_1^{(2)}(\mathbf{b}R) \hat{R}. \quad (2.23)$$

De acuerdo a la Figura 9 $\hat{c}' = -\hat{n}' \times \hat{a}_z$. Así el producto escalar en (2.17) da:

$$\hat{c}' \cdot \hat{n}' \times (\hat{c}' \times \hat{R}) = \hat{R} \cdot \hat{n}' = \cos \mathbf{y}', \quad (2.24)$$

finalmente el segundo producto vectorial del lado derecho de (2.12), mediante los resultados (2.21), (2.22) y (2.24) puede escribirse así:

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 581, 708.

donde:

$$V_m = -\sqrt{\frac{\mathbf{e}}{\mathbf{m}}} \exp\left(\frac{j\mathbf{b}ab\cos(\mathbf{f}_m - \mathbf{q}_i)}{\sqrt{b^2\cos^2\mathbf{f}_m + a^2\sin^2\mathbf{f}_m}}\right), \quad (2.33)$$

$$Z_{mn} = \frac{\mathbf{d}_{mn}}{2} +$$

$$j\frac{abb}{4} \underset{r \rightarrow C}{\text{Lím}} \int_{C-\Delta C} \cos\mathbf{y}'_{mn} H_1^{(2)}(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}}_m - \bar{\mathbf{r}}'_n|) \sqrt{\frac{b^4\cos^2\mathbf{f}_n + a^4\sin^2\mathbf{f}_n}{(b^2\cos^2\mathbf{f}_n + a^2\sin^2\mathbf{f}_n)^3}} d\mathbf{f}_n, \quad (2.34)$$

$$I_n = a_n. \quad (2.35)$$

Al resolver el sistema (2.32) se encontrara los coeficientes a_n , dicha solución se obtendrá al dividir el contorno que se muestra en la Figura 10 en 500 partes y al uso de un algoritmo computacional en que las integrales se valorarán por el método del trapecio^{8,9}, para luego obtener la densidad de corriente a partir de (2.28) y (2.29). Finalmente se procede a calcular el campo dispersado en la zona lejana ($\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'| \rightarrow \infty$), donde es válida la siguiente aproximación:

$$|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'| \approx \begin{cases} \mathbf{r} - \mathbf{r}'\cos(\mathbf{f} - \mathbf{f}') & \text{Variaciones de fase} \\ \mathbf{r} & \text{Variaciones de amplitud} \end{cases} \quad (2.36)$$

Así en la zona lejana la función de Hankel de segundo tipo y orden n obedece a la expresión asintótica¹:

$$H_n^{(2)}(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|) \approx \sqrt{\frac{2j}{pbr}} j^n e^{-j\mathbf{b}[r - \mathbf{r}'\cos(\mathbf{f} - \mathbf{f}')]} \quad (2.37)$$

El campo magnético dispersado teniendo en cuenta (2.21) y (2.22) en la zona lejana se escribe de la forma:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = -\frac{abb}{4} \sqrt{\frac{2j}{pbr}} e^{-jbr} \int_C J_{SC}(\vec{r}') e^{j\mathbf{b}\mathbf{r}'\cos(\mathbf{f} - \mathbf{f}')} \frac{b^2 \cos \mathbf{f} \cos \mathbf{f}' + a^2 \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{f}'}{\sqrt{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f}')^3}} d\mathbf{f} \hat{a}_z. \quad (2.38)$$

El campo eléctrico dispersado puede ser encontrado mediante la ecuación de Maxwell - Ampere y a partir del campo magnético dispersado (2.38) mediante¹:

⁸ PÉREZ, López César. Matlab y sus aplicaciones en Ciencias y la Ingeniería. P. 301.

⁹ MATHEUS, Jhon H., Fink Kurtis D. Métodos Numéricos con MATLAB. P. 56.

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 681, 259, 577.

$$\vec{E}^s = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H}^s \quad (2.39)$$

Que en coordenadas cilíndricas queda:

$$\begin{aligned} \vec{E}^s(\vec{r}) = & \\ \frac{-abb}{4j\omega\epsilon} \sqrt{\frac{2j}{\rho br}} e^{-jbr} \int_c \frac{J_{sc}(\vec{r}') e^{-jbr' \cos(\mathbf{f}-\mathbf{f}')}}{\sqrt{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} & \left\{ \hat{a}_f \left(\frac{1}{2r} + j\mathbf{b} \right) (b^2 \cos \mathbf{f} \cos \mathbf{f} + a^2 \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{f}) + \right. \\ \left. \frac{\hat{a}_r}{r} [(-b^2 \sin \mathbf{f} \cos \mathbf{f} + a^2 \cos \mathbf{f} \sin \mathbf{f}) + jbr' \cos(\mathbf{f}-\mathbf{f}')] (b^2 \cos \mathbf{f} \cos \mathbf{f} + a^2 \sin \mathbf{f} \sin \mathbf{f}) \right\} & (2.40) \end{aligned}$$

La sección eficaz de área S es un parámetro importante en el fenómeno de la dispersión electromagnética por un dispersor, la cual se define como el área que intercepta la cantidad de potencia y es la potencia radiada, por unidad de ángulo sólido, por unidad flujo incidente. Esta sección de área en el caso bidimensional (potencia por unidad de longitud) se define como¹:

$$S_{2d} = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow \infty} \left[2\rho r \frac{|\vec{E}^s|^2}{|\vec{E}^i|^2} \right] \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \left[2\rho r \frac{|\vec{H}^s|^2}{|\vec{H}^i|^2} \right] \end{cases} \quad (2.41)$$

3.2.1 Densidad superficial de corriente. A continuación se presenta la densidad superficial de corriente sobre los diferentes cilindros elípticos que es inducida cuando una onda TE^z de longitud de onda $I = 0.03m$ incide con un ángulo de 45° sobre ellos. Para obtenerlas se dividió el contorno de la sección elíptica de los cilindros en 500 partes y se resolvió la ecuación matricial (2. 32) hallando los coeficiente a_n , los cuales adquieren en general valores complejos.

De acuerdo con (2. 28) y (2. 29) y teniendo en cuenta que r' es función de f' mediante (2. 4) se tiene:

$$J_{SC} = \begin{cases} a_1 & f_0' \leq f \leq f_1' \\ a_2 & f_1' \leq f \leq f_2' \\ \vdots & \vdots \\ a_i & f_{i-1}' \leq f \leq f_i' \\ \vdots & \vdots \\ a_N & f_{N-1}' \leq f \leq f_N' \end{cases} \quad (2.42)$$

Cilindros circulares: Para un cilindro circular los semiejes cumplen la condición $a = b$. Se consideró dos cilindros: uno con semiejes $a = b = I$ y el otro para $a = b = 2I$. En la Figura 11 se presenta los resultados del cálculo del módulo de J_{SC} en función del ángulo f realizado para ambos cilindros, la curva azul corresponde al módulo de la densidad de corriente inducida sobre el cilindro de radio I y la roja para la inducida sobre el cilindro de radio $2I$. Ambas curvas presentan la máxima densidad de corriente inducida en 45° , es decir el ángulo de incidencia y al alejarse de este ángulo tanto por la derecha como por la izquierda se puede ver que la densidad de corriente disminuye simétricamente y en forma oscilatoria alcanzando el menor de los máximos locales en 225° y a su alrededor los dos mínimos absolutos. Al comparar las dos curvas se puede decir que conforme el radio del cilindro aumenta el carácter oscilatorio presente en las curvas se acentúa, debido a que hay mayor superficie donde distribuir dicha corriente.

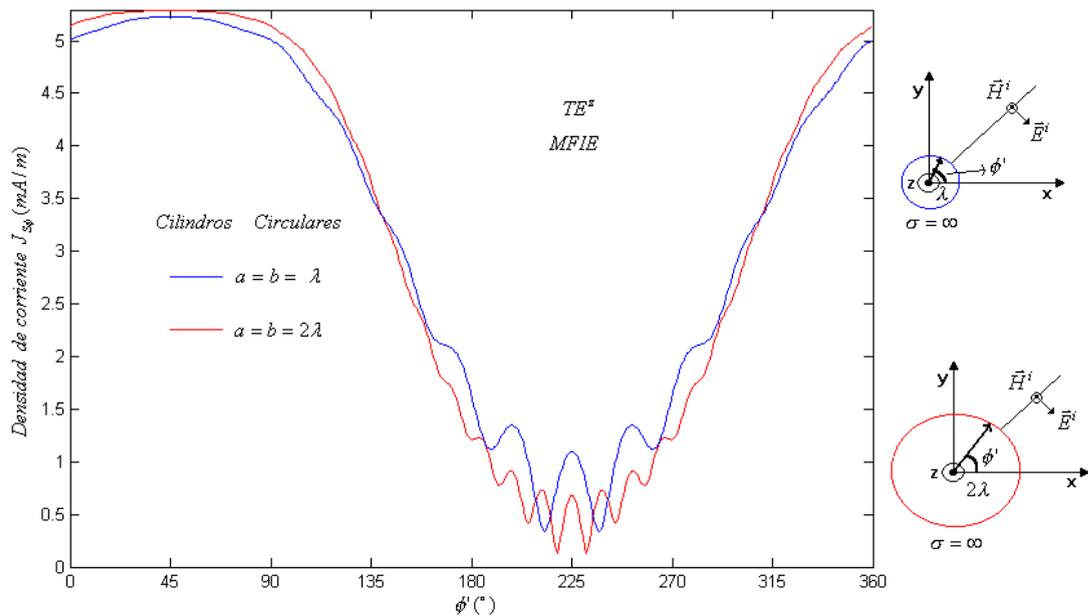
Es de notar que la Figura 11 corresponde a los resultados encontrados en la literatura para cilindros circulares¹.

Cilindros elípticos: Ahora se consideran dos cilindros cuyo semieje $a = 1I$, para el primero el semieje $b = 0.5I$ y para el segundo $b = 1.5I$. En la Figura 12 se presenta los resultados del cálculo del módulo de J_{SC} en función del ángulo f realizado para ambos cilindros, la curva azul corresponde al primer cilindro y la roja al segundo. Al comparar la densidad de corriente correspondiente al cilindro circular de radio I presentada en la Figura 11 con las densidades de corriente de la Figura 12 se puede decir: primero, que la densidad de corriente del cilindro de semieje $b = 0.5I$ pierde el carácter ondulatorio y se acumula a la derecha de 45° , mientras que a la izquierda el carácter ondulatorio persiste, pero en compensación a la acumulación del lado derecho, en el lado izquierdo se presenta una disipación y segundo, si ahora se compara la densidad de corriente del cilindro de semieje $b = 1.5I$ la persistencia del carácter oscilatorio y la disipación de densidad ocurre a la derecha de 45° y la pérdida de carácter ondulatorio y la acumulación ocurre a la izquierda de 45° . Esta redistribución de la densidad de corriente en los casos

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 716.

elípticos, es debida a la conservación de la fuente del campo dispersado, en este caso la densidad de corriente.

Figura 11 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros circulares caso TE^z .



Cilindros aplanados: Cuando $b \rightarrow 0$ y $a \neq 0$ el cilindro elíptico tiende a adquirir la forma de un cilindro aplanado o de una cinta de ancho a y longitud infinita. Se consideran dos anchos: $a = 1$ y $a = 2$. En la Figura 13 se presenta los resultados del cálculo del módulo de J_{sc} en función del ángulo ϕ' realizado para ambos cilindros, la curva azul corresponde al cilindro de ancho 1 y la roja para el de ancho 2 . Teniendo en cuenta que en los ángulos 0° , 180° y 360° se encuentran los filos de la cinta y que el vector densidad de corriente se encuentra en el plano xy , al observar la Figura 13 se puede decir que la densidad de corriente inducida sobre ambos cilindros se acumula en los filos, lo que es un resultado bien conocido. Ambas curvas presentan simetría respecto a 180° , lo que puede ser interpretado así: el barrido de 0° a 180° corresponde al lado superior de la cinta y el barrido de 180° a 360° al lado inferior. Finalmente La Figura 13 corresponde a los resultados encontrados en la literatura para cilindros aplanados¹.

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 701.

Figura 12 Densidades de corriente superficial inducida sobre los cilindros elípticos caso TE^z .

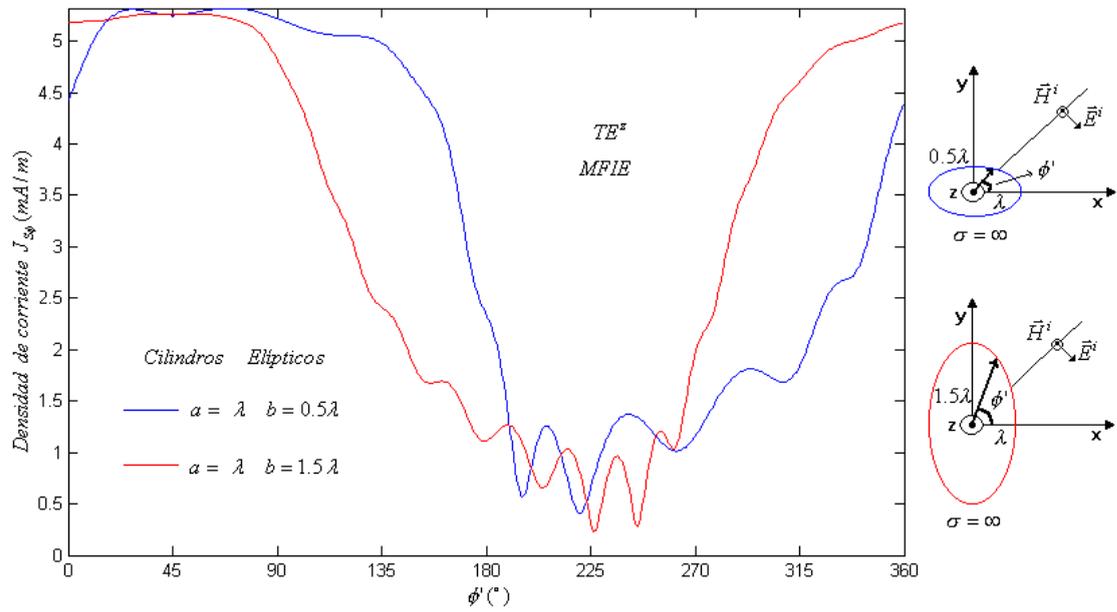
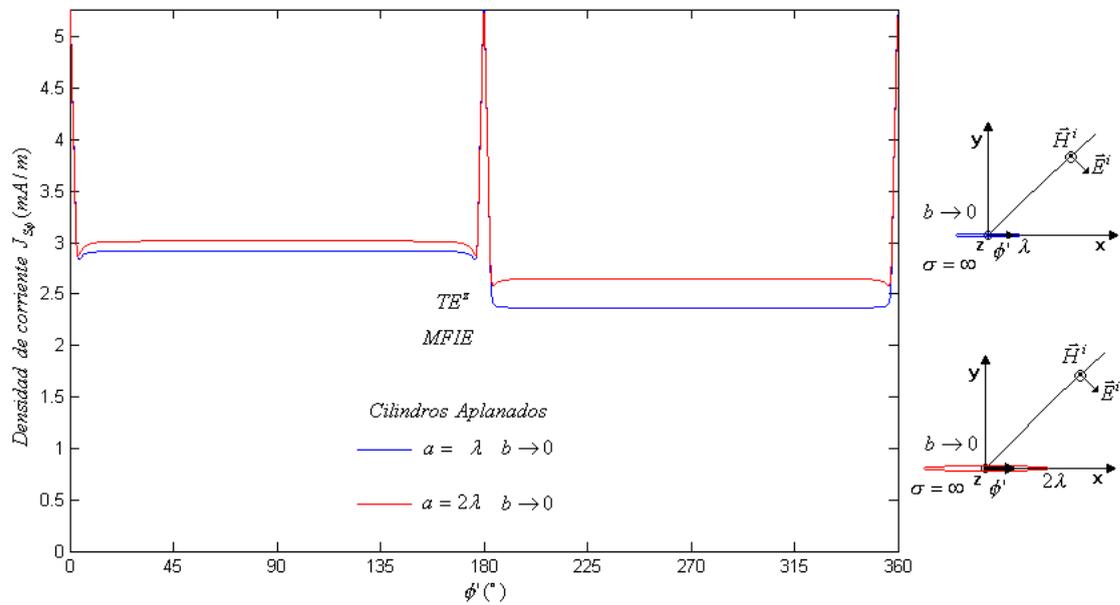


Figura 13 Densidades de corriente superficial inducida sobre los cilindros aplanados caso TE^z .

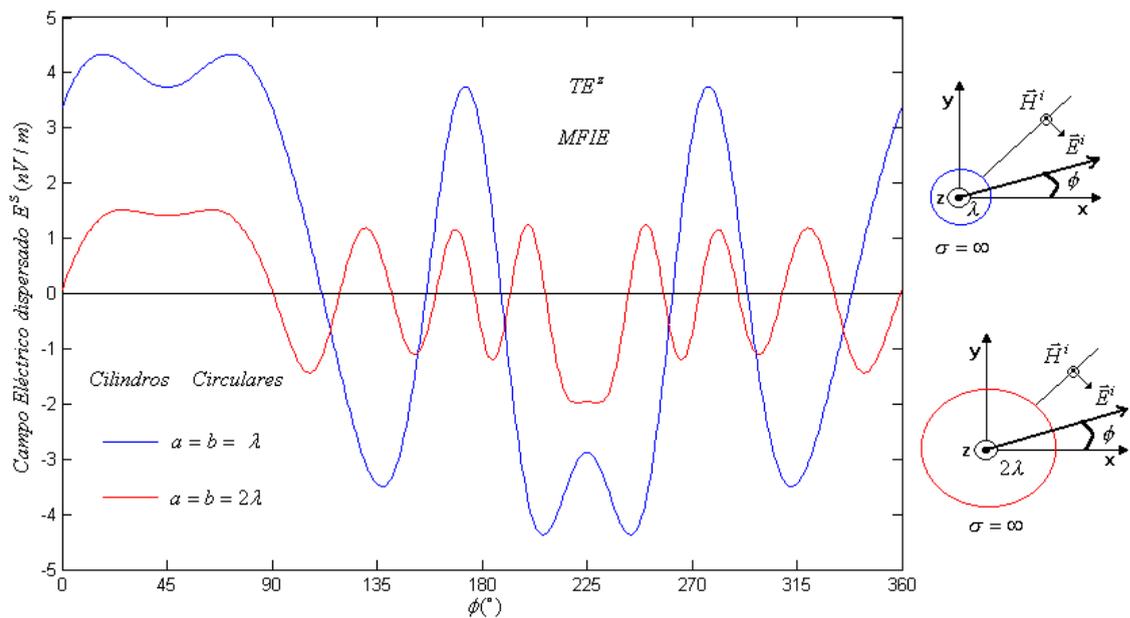


3.2.2 Campo dispersado. Con las densidades de corriente presentadas en la sección 2.2.1 se calculó el campo dispersado en la zona lejana. El campo eléctrico esta dado por (2. 39) y el campo magnético por (2. 38). Las integrales que aparecen en estas expresiones se evalúan numéricamente dividiendo el dominio de la variable de integración f en 500 partes y aplicando el método del trapecio [7], [8]. A continuación se presenta la parte real del módulo del vector de campo eléctrico dispersado y de campo magnético dispersado en la zona lejana para los diferentes cilindros elípticos, los cuales corresponden a los campos mensurables en la zona lejana.

El campo dispersado se obtiene superponiendo los campos producidos por cada uno de los elementos de la densidad de corriente, conformando un frente de onda en la zona lejana².

Cilindros circulares: En la Figura 14 se presenta la parte real del módulo del campo eléctrico dispersado y en la Figura 15 la parte real del módulo del campo magnético dispersado para el caso de cilindros circulares. En estas figuras la curva azul corresponde al campo obtenido para el cilindro circular de radio 1 y la roja al correspondiente al cilindro de radio 21 . Estos campos son debidos a las densidades de corriente presentadas en la Figura 11.

Figura 14 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TE^z cilindros circulares.

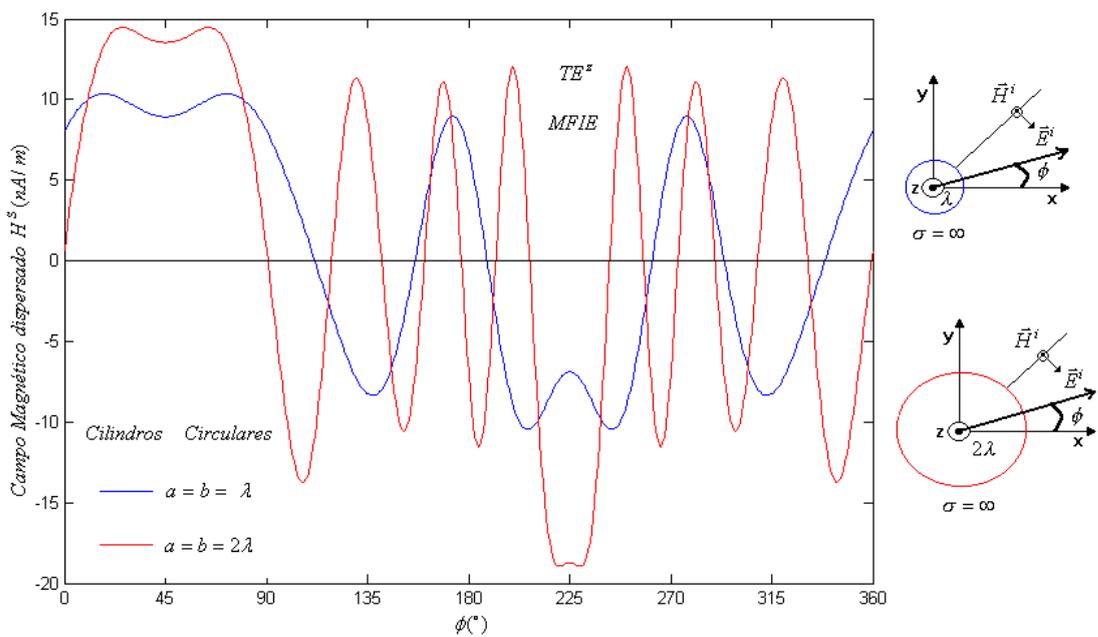


² ZAJAC, Alfred, Eugene Hecht. Óptica. P. 64.

En la Figura 14 se destacan dos máximos absolutos de campo eléctrico dispersado alrededor de 45° tanto para el cilindro de radio I como para el de $2I$ y en 45° el mayor de los mínimos. Por otro lado en 225° aparece el menor de los máximos y su alrededor dos mínimos absolutos, de nuevo para los dos cilindros. Como en el caso de la densidad de corriente la simetría respecto a 45° persiste y el carácter ondulatorio se acentúa para el cilindro de radio $2I$. También es de notar que el campo eléctrico presenta puntos en que la intensidad es nula, en dichos puntos se puede decir que las contribuciones al campo hechas por los elementos de corriente se anulan mutuamente.

En la Figura 15 se puede observar que el campo magnético dispersado tiene un comportamiento similar al campo eléctrico dispersado coincidiendo la ubicación de los máximos, mínimos y puntos donde la intensidad es cero; solo diferenciándose en la intensidad del campo haciendo correspondencia a la inducción electromagnética.

Figura 15 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TE^z cilindros circulares.



Cilindros elípticos: En la Figura 16 se presenta la parte real del módulo del campo eléctrico dispersado y en la Figura 17 la parte real del módulo del campo magnético dispersado para el caso de cilindros elípticos. Para estas figuras la curva azul corresponde al campo dispersado para el cilindro de semiejes $a = I$ y $b = 0.5I$, la roja para el cilindro de semiejes $a = I$ y $b = 1.5I$. Estos campos son debidos a las densidades de corriente presentadas en la Figura 12.

Figura 16 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TE^z cilindros elípticos.

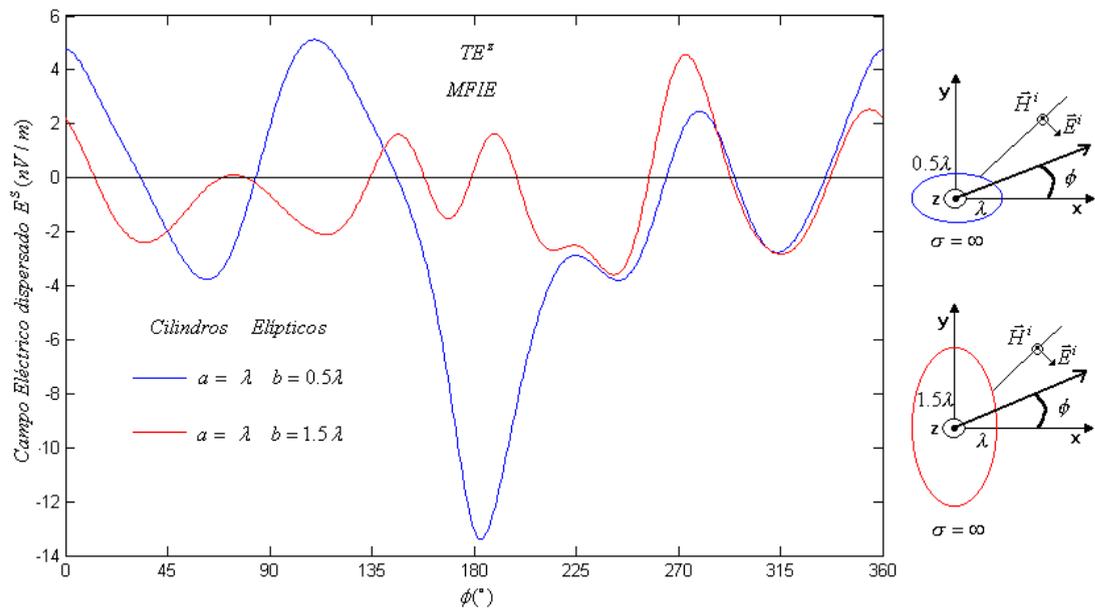
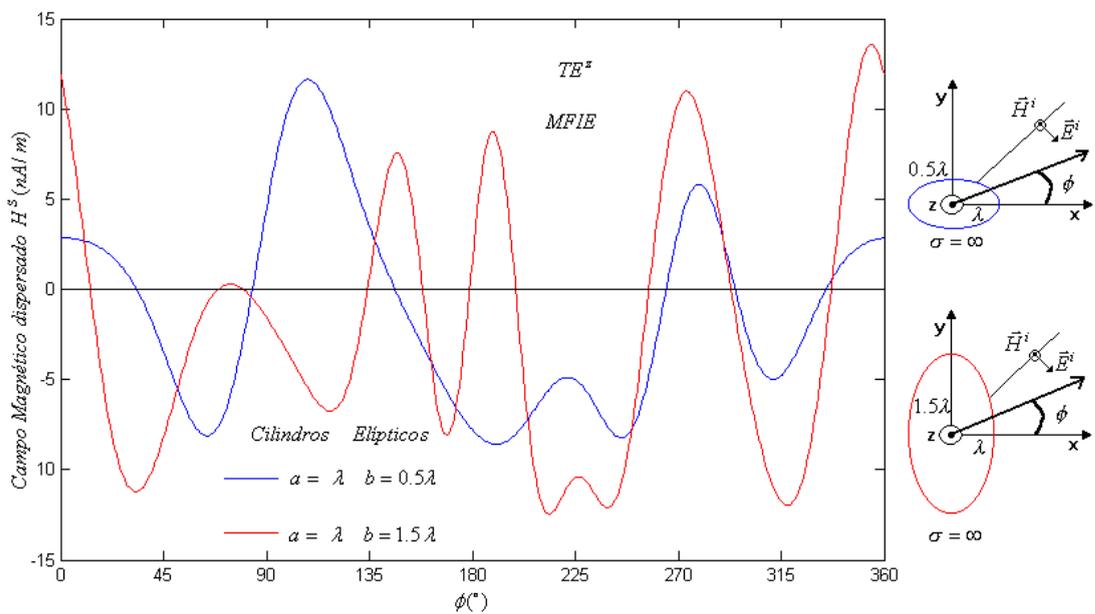


Figura 17 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TE^z cilindros elípticos.



Si se compara la curva azul de la Figura 14 con la curva azul de la Figura 16 se puede apreciar un desplazamiento del campo eléctrico dispersado en el caso del

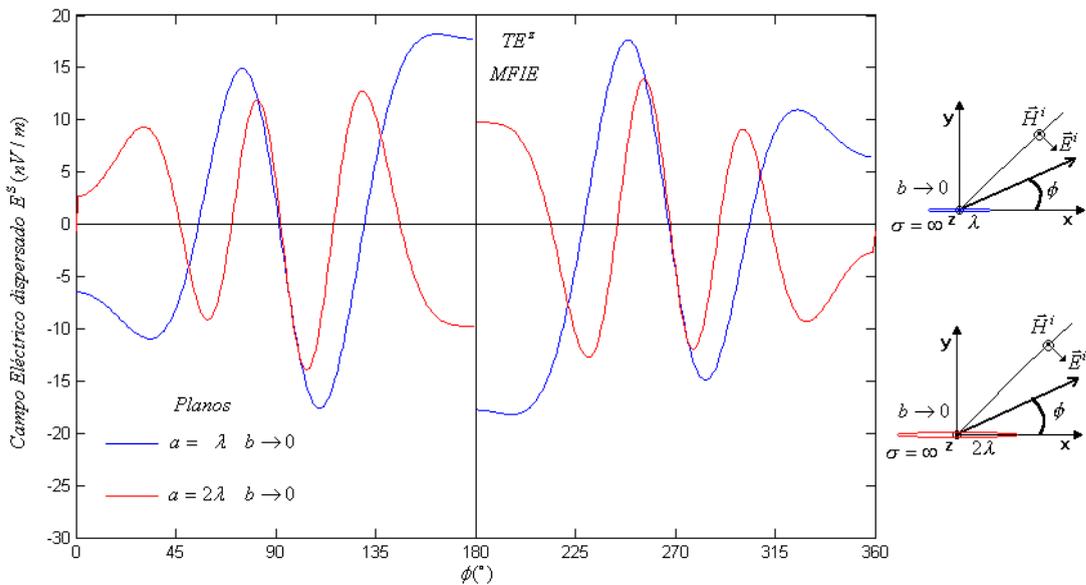
primer cilindro hacia la derecha con respecto al campo eléctrico dispersado en el caso del cilindro circular de radio I y además presentando el mismo número de máximos. Por otra parte la curva roja correspondiente al campo eléctrico dispersado para el caso del segundo cilindro presenta un desplazamiento hacia la izquierda con respecto al campo eléctrico dispersado para el caso del cilindro circular de radio I .

Ahora si se compara la curva azul de la Figura 15 con las curvas azul y roja de la Figura 17 se observara un comportamiento del campo magnético dispersado igual al que presento el campo eléctrico dispersado de la Figura 16 con respecto al de la Figura 14.

Cilindros Aplanados: En la Figura 18 se presenta la parte real del módulo del campo eléctrico dispersado y en la Figura 19 la parte real del módulo del campo magnético dispersado para el caso de cilindros aplanados, la curva azul corresponde al cilindro aplanado de ancho I y la roja al de ancho $2I$. Tanto el campo eléctrico como el magnético son debidos a las densidades de corriente que aparecen en la Figura 13.

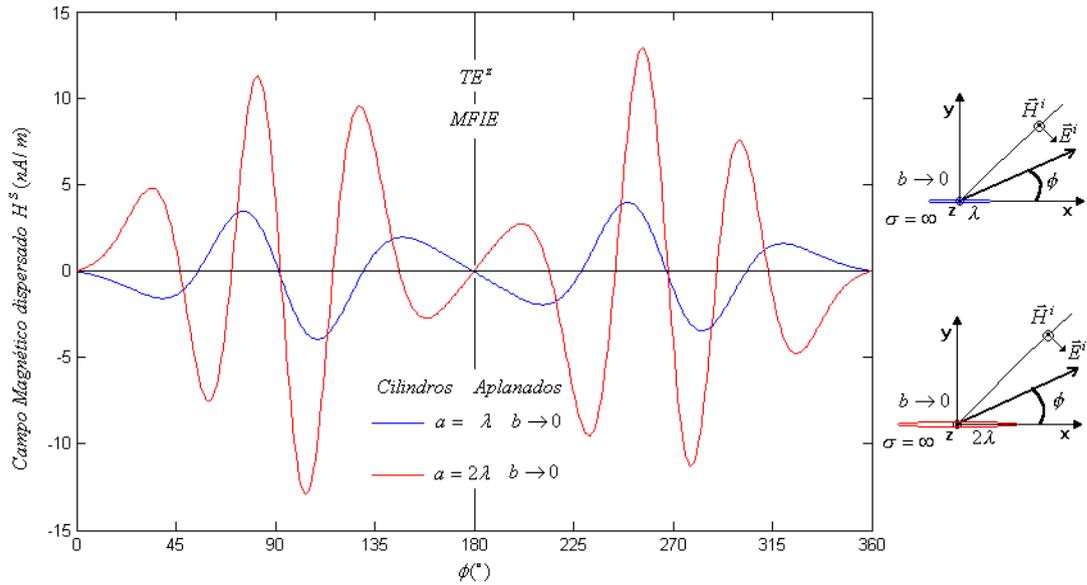
En la Figura 18 se puede apreciar dos máximos, dos mínimos y 3 ceros en el intervalo 0° a 180° para la curva azul y 3 máximos, 3 mínimos y 5 ceros un el mismo intervalo para la curva roja; si se observa en el intervalo 180° a 360° el número de máximos y mínimos se intercambian, es decir se presenta de nuevo la simetría de los resultados que se obtuvieron en estos cilindros.

Figura 18 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TE^z cilindros aplanados.



La Figura 19 presenta igual comportamiento que la Figura 18, así el campo eléctrico dispersado y el magnético dispersado presentan correspondencia.

Figura 19 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TE^z cilindros aplanados.



3.2.3 Sección eficaz de área. Con los campos dispersados de la sección 2.2.2, mediante la ecuación (2. 41) se calculó la sección eficaz de área para los distintos cilindros elípticos. Cabe destacar que los resultados son los mismos si la ecuación es aplicada al campo eléctrico o al campo magnético. A continuación se presenta los resultados del cálculo del ancho de dispersión SW obtenido con los resultados de las secciones eficaces de área, mediante:

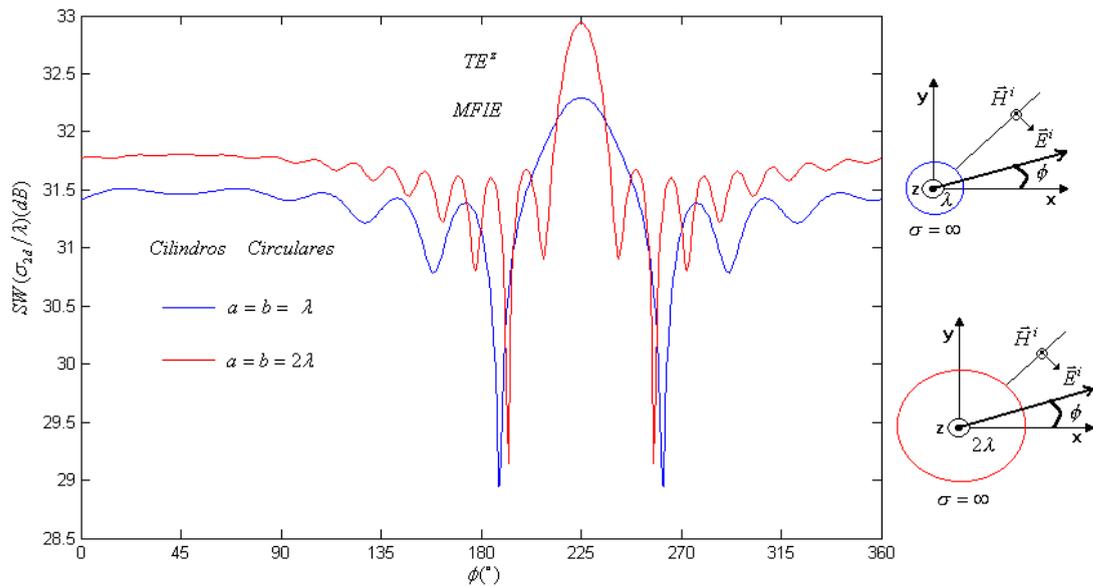
$$SW\left(\mathbf{s}_{2d}/\mathbf{I}\right) = \log_{10}\left(\mathbf{s}_{2d}/\mathbf{I}\right). \quad (2. 43)$$

La unidad en que se expresa el ancho de dispersión es el decibel.

Cilindros circulares: En la Figura 20 se muestra los resultados del cálculo de los anchos de dispersión correspondiente a los dos cilindros circulares: la curva azul corresponde al cilindro de radio I y la curva roja al de radio $2I$. En ambas curvas se observa la simetría respecto a 45° y que se ha venido dando presentando en todas las figuras presentadas para los cilindros circulares (Figura 11, Figura 14 y Figura 15). En estas curvas el máximo ancho de dispersión ocurre en 225° , es decir detrás del cilindro y los dos mínimos anchos de dispersión a menos de 45° de distancia de 225° . A partir de estos mínimos el ancho de

dispersión oscila hasta alcanzar un valor aproximadamente constante alrededor de 45° . Es de notar que la Figura 20 corresponde a los resultados que se pueden encontrar en la literatura para el ancho de dispersión de cilindros circulares¹.

Figura 20 Sección eficaz de área para el caso TE^z cilindros circulares.



Cilindros elípticos: En la Figura 21 se muestra los resultados de los anchos de dispersión correspondiente a los dos cilindros elípticos: la curva azul corresponde al cilindro de semiejes $a=1$ y $b=0.51$, la roja al cilindro de semiejes $a=1$ y $b=1.51$. Comparando la Figura 21 con la Figura 20 se puede observar que: el ancho de dispersión correspondiente al cilindro de semieje $b=0.51$ conserva la forma presentada en los cilindros circulares al lado derecho de 225° y un abombamiento al lado izquierdo, mientras que para el cilindro de semieje $b=1.51$ la conservación ocurre hacia el lado izquierdo de 225° y el abombamiento al lado derecho.

Cilindros aplanados: En la Figura 22 se muestran los anchos de dispersión correspondiente a los cilindros aplanados, la curva azul correspondiente al cilindro de ancho 1 y la roja al cilindro de ancho 21 . Aquí se puede apreciar que ambos cilindros presentan anchos de dispersión similares y de nuevo aparece simetría respecto a 180° , ya que el barrido de 0° hasta 180° corresponde a la cara superior del cilindro y el barrido de 180° hasta 360° correspondiente a la inferior.

¹ BALANIS Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 717.

Figura 21 Sección eficaz de área para el caso TE^Z cilindros elípticos.

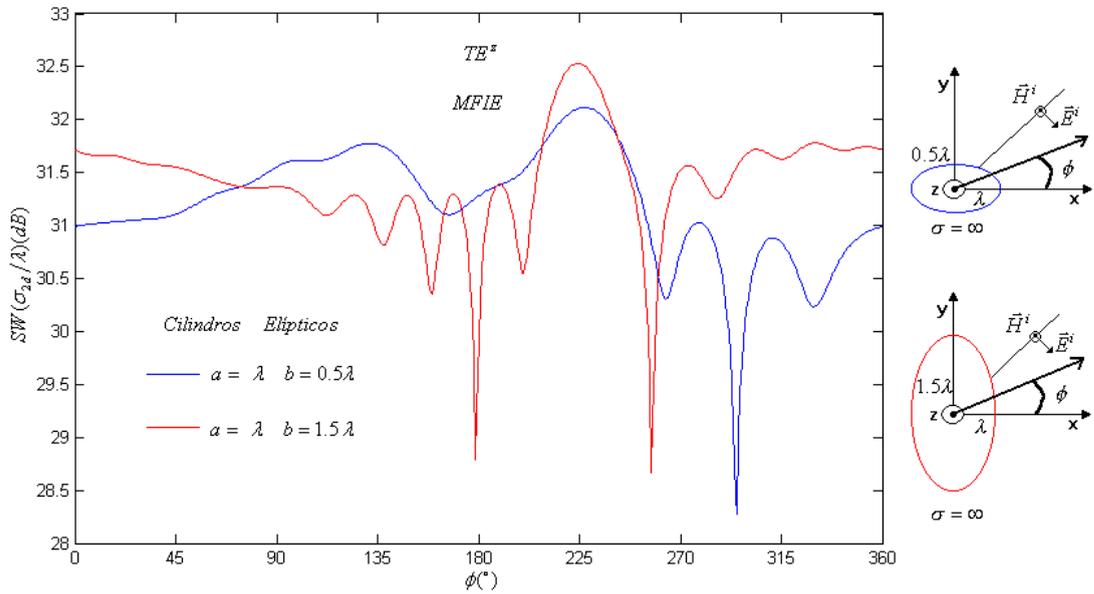
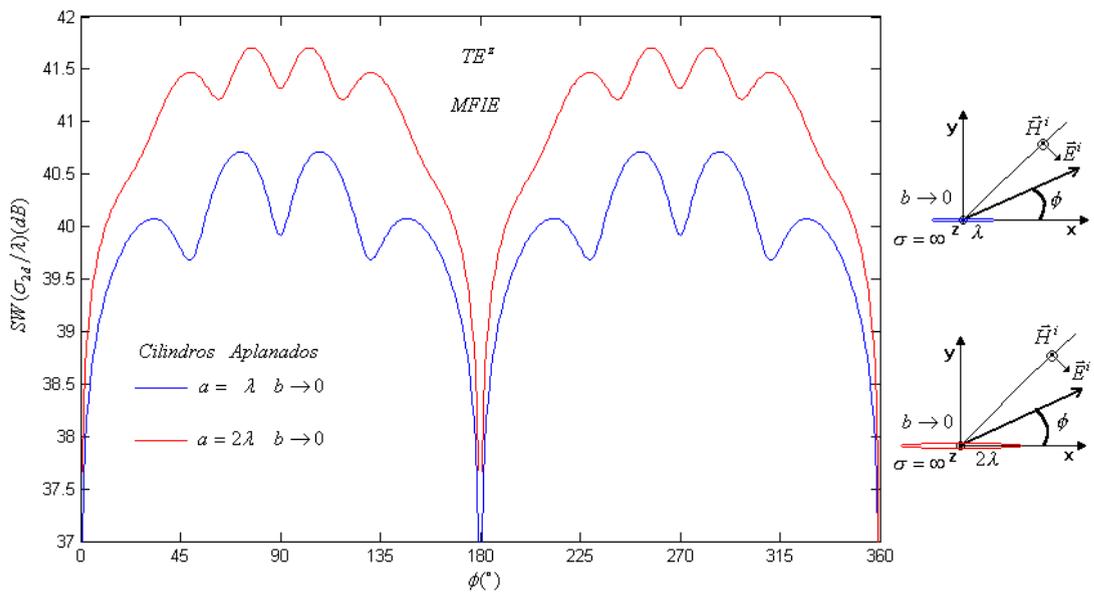


Figura 22 Sección eficaz de área para el caso TE^Z cilindros aplanados.



De las Figura 20, Figura 21, Figura 22 se puede decir que en la dispersión de ondas TE^Z la mayor potencia radiada se presenta en la dirección de la onda incidente, es decir, se presenta la avanzada dispersión (*forward scattering*).

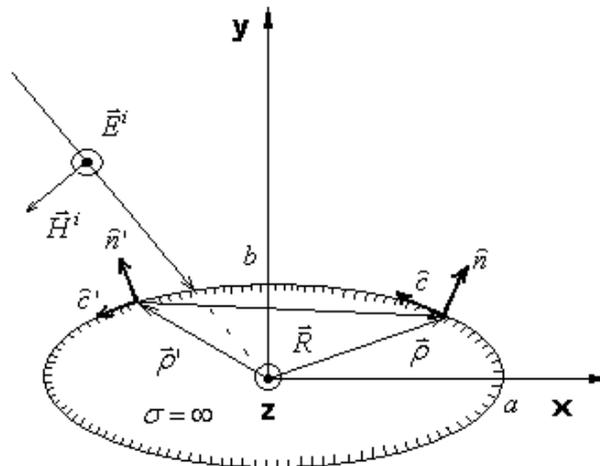
3.3 DISPERSIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS TM^Z QUE INCIDEN SOBRE CILINDROS ELÍPTICOS CONDUCTORES

En la Figura 23 se muestra un corte transversal del cilindro elíptico conductor y de la onda incidente en el plano xy . La onda incidente TM^Z esta dada por las fórmulas (1. 25) y (1. 26) con $E_0 = 1$. El campo dispersado se calcula a partir de las ecuaciones de Maxwell con ciertas condiciones de frontera sobre la superficie del cilindro elíptico conductor.

Para el tipo de incidencia TM^Z conviene exigir la discontinuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en la interface dieléctrico-conductor (1. 12) y considerando el campo total (2. 1), se tiene que:

$$\hat{n} \times \vec{E}^i(\vec{r} = \vec{r}_s) = -\hat{n} \times \vec{E}^s(\vec{r} = \vec{r}_s) \quad (2. 44)$$

Figura 23 Geometría presente en la dispersión con incidencia TM^Z .



Considerando el vector normal (2. 7) el lado de izquierdo de la ecuación (2. 44) viene dada por:

$$\hat{n} \times \vec{E}^i(\vec{r} = \vec{r}_s) = -\exp\left(\frac{j\mathbf{b}abc\cos(\mathbf{f}-\mathbf{q}_i)}{\sqrt{b^2\cos^2\mathbf{f}+a^2\sin^2\mathbf{f}}}\right)\hat{c} \quad (2. 45)$$

Al incidir el campo eléctrico dado por (1. 25) y teniendo en cuenta la relación constitutiva (1. 7) se puede concluir que sobre la superficie del cilindro elíptico se induce una densidad de corriente que por simetría no depende de z y es dada por:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = J_{sz}(\vec{r}) \hat{a}_z, \quad (2.46)$$

la cual es responsable del campo dispersado. El vector potencial magnético debido a esta densidad de corriente según (1. 17), (2. 11) y (2. 20) es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = -j \frac{\mathbf{m}}{4} \int_C J_{sz}(\vec{r}') H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} \hat{a}_z \quad (2.47)$$

Usando (1. 16) y (1. 17) se puede hallar el campo eléctrico dispersado y teniendo en cuenta la propiedad de Hankel (2. 20) entonces:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -\frac{\mathbf{wmb}}{4} \int_C J_{sz}(\vec{r}') H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} \hat{a}_z. \quad (2.48)$$

el lado derecho de la ecuación (2. 44) toma la forma:

$$-\hat{n} \times \vec{E}^s(\vec{r} = \vec{r}_s) = -\frac{\mathbf{wmb}}{4} \lim_{r \rightarrow C} \int_C J_{sz}(\vec{r}') \hat{a}_z H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} \hat{c}. \quad (2.49)$$

Y la ecuación (2. 44) toma la forma:

$$\exp\left(\frac{j\mathbf{b}ab \cos(\mathbf{f} - \mathbf{q}_i)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f}}}\right) = \frac{\mathbf{wmb}}{4} \lim_{r \rightarrow C} \int_C J_{sz}(\vec{r}') H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\vec{r} - \vec{r}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} \quad (2.50)$$

La ecuación (2. 50) representa una ecuación integral para $J_{sz}(\vec{r}')$ la cual se conoce como la ecuación integral del campo eléctrico (EFIE).

Análogo a la sección 2.3 la densidad de corriente aún desconocida se representa por medio de la serie finita:

$$J_{sz}(\vec{r}') = \sum_{n=1}^N a_n g_n(\vec{r}'), \quad (2.51)$$

donde la función base es dada por (2. 29). Mediante (2. 51) se puede expandir (2. 50) de la forma⁷:

⁷ PETROVSKY, I. G. Lecciones y teoría de las ecuaciones integrales. P. 11.

$$\begin{aligned}
& \exp\left(\frac{jbab \cos(\mathbf{f}_1 - \mathbf{q}_i)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \mathbf{f}_1 + a^2 \sin^2 \mathbf{f}_1}}\right) = \\
& \frac{wmb}{4} \lim_{r \rightarrow C} \sum_{n=1}^N \int_C a_n g_n(\bar{\mathbf{r}}') H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} \\
& \quad \vdots \\
& \exp\left(\frac{jbab \cos(\mathbf{f}_N - \mathbf{q}_i)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \mathbf{f}_N + a^2 \sin^2 \mathbf{f}_N}}\right) = \\
& \frac{wmb}{4} \lim_{r \rightarrow C} \sum_{n=1}^N \int_C a_n g_n(\bar{\mathbf{r}}') H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}}_N - \bar{\mathbf{r}}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

La ecuación (2.52) consiste en un sistema de ecuaciones algebraicas las cuales presentan singularidades cuando $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}'$, debido a la presencia de la función de Hankel en el integrando. Para deshacer esta singularidad se usa la aproximación asintótica¹:

$$H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|) \stackrel{b|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'| \rightarrow 0}{\approx} 1 - j \frac{2}{\mathbf{p}} \ln\left(\frac{1.781 \mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}{2}\right). \tag{2.53}$$

Así el sistema (2.52) en forma matricial queda de la forma:

$$[V_m] = [Z_{mn}] [I_n], \tag{2.54}$$

donde:

$$V_m = \exp\left(\frac{jbab \cos(\mathbf{f}_m - \mathbf{q}_i)}{\sqrt{b^2 \cos^2 \mathbf{f}_m + a^2 \sin^2 \mathbf{f}_m}}\right), \tag{2.55}$$

$$Z_{mn} = \begin{cases} \int_C H_0^{(2)}(\mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}}_N - \bar{\mathbf{r}}'|) \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} & n \neq m \\ \int_C \left[1 - j \frac{2}{\mathbf{p}} \ln\left(\frac{1.781 \mathbf{b}|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|}{2}\right)\right] \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \mathbf{f} + a^4 \sin^2 \mathbf{f}}{(b^2 \cos^2 \mathbf{f} + a^2 \sin^2 \mathbf{f})^3}} d\mathbf{f} & n = m \end{cases}, \tag{2.56}$$

$$I_n = a_n. \tag{2.57}$$

¹ BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. P. 688.

Al resolver (2. 54) se encuentra los coeficientes a_n , y se obtiene la densidad de corriente a partir de (2. 29) y (2. 51). Finalmente se procede a calcular el campo dispersado en la zona lejana ($b|\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty$), donde es válida la aproximación (2. 36) y (2. 37).

El campo eléctrico dispersado dado por (2. 48), en la zona lejana es:

$$\vec{E}^s(\vec{r}) = -\frac{\omega \mu b}{4} \sqrt{\frac{2j}{\rho b r}} e^{-jbr} \int_C J_{SZ}(\vec{r}') e^{jbr' \cos(\theta - \theta')} \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \theta + a^4 \sin^2 \theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^3}} d\theta \hat{a}_z. \quad (2. 58)$$

El campo magnético dispersado teniendo en cuenta (1. 15) y (2. 47) en la zona lejana queda de la forma:

$$\vec{H}^s(\vec{r}) = -j \frac{b}{4} \sqrt{\frac{2j}{\rho b r}} e^{-jbr} (\sin \theta \hat{a}_x - \cos \theta \hat{a}_y) \int_C J_{SZ}(\vec{r}') e^{jbr' \cos(\theta - \theta')} \sqrt{\frac{b^4 \cos^2 \theta + a^4 \sin^2 \theta}{(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^3}} d\theta \quad (2.59)$$

3.3.1 Densidad superficial de corriente. A continuación se presenta la densidad superficial de corriente sobre los diferentes cilindros elípticos que es inducida cuando una onda TM^Z de longitud de onda $\lambda = 0.03m$ incide con un ángulo de 45° sobre ellos. Para obtenerlas se dividió el contorno de la sección elíptica de los cilindros en 500 partes y se resolvió la ecuación matricial (2. 54) hallando los coeficiente a_n , los cuales adquieren en general valores complejos.

De acuerdo con (2. 29) y (2. 51) y teniendo en cuenta que r' es función de θ' mediante (2. 4) se tiene:

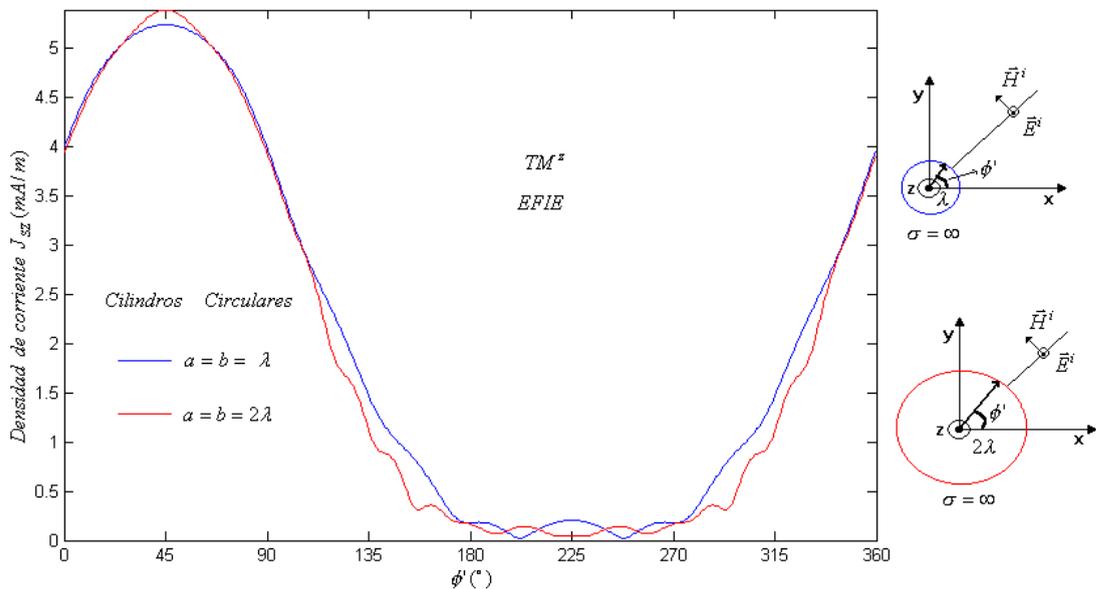
$$J_{SZ} = \begin{cases} a_1 & \theta_0' \leq \theta \leq \theta_1' \\ a_2 & \theta_1' \leq \theta \leq \theta_2' \\ \vdots & \vdots \\ a_i & \theta_{i-1}' \leq \theta \leq \theta_i' \\ \vdots & \vdots \\ a_N & \theta_{N-1}' \leq \theta \leq \theta_N' \end{cases} \quad (2. 60)$$

De forma similar a la sección 2.2.1 se presentara los resultados del cálculo realizado para cilindros circulares, cilindros elípticos y cilindros aplanados.

Cilindros circulares: Para un cilindro circular los semiejes cumplen la condición $a = b$. Se consideró dos cilindros: uno con semiejes $a = b = \lambda$ y el segundo con semiejes $a = b = 2\lambda$. En la Figura 24 se presenta los resultados del cálculo del

módulo de J_{SC} en función del ángulo ϕ' realizado para ambos cilindros, la curva azul correspondiente al cilindro de radio 1 y la roja al cilindro de radio 21 . Ambas curvas presentan la máxima densidad de corriente inducida en 45° , es decir el ángulo de incidencia y al alejarse de este ángulo por la derecha o por la izquierda se puede ver que la densidad de corriente disminuye simétricamente y en forma oscilatoria alcanzando el menor de los máximos locales en 225° y a su alrededor los dos mínimos absolutos, en general es análoga a Figura 11, pero se diferencian en que las curvas de la Figura 24 tienen una forma más aguda. Y tal como en la sección 2.2.1 al comparar estas dos curvas se puede decir que conforme el radio del cilindro aumenta el carácter oscilatorio se acentúa.

Figura 24 Densidad de corriente superficial inducida sobre los cilindros circulares caso TM^z .



Cilindros elípticos: Ahora se consideran dos cilindros cuyo semieje $a=11$, el primero con semieje $b=0.51$ y el segundo con semieje $b=1.51$. En la Figura 25 se presenta los resultados del cálculo del módulo de J_{SZ} en función del ángulo ϕ' realizado para ambos cilindros, la curva azul correspondiente al primer cilindro y la roja al segundo. Si se observa la curva azul, la densidad de corriente para el cilindro de semieje $b=0.51$ muestra una acumulación a la derecha de 45° y ausencia del carácter ondulatorio si es comparada con la curva azul de la Figura 24 (densidad de corriente inducida sobre el cilindro de radio 1) y una disipación de densidad al lado izquierdo de 45° con persistencia del carácter ondulatorio y la máxima densidad de corriente se desplazo hacia la izquierda; mientras que en la curva roja, la densidad de corriente del cilindro de semieje $b=1.51$ muestra una acumulación a la izquierda de 45° , el carácter ondulatorio y la disipación de

densidad al lado derecho y la máxima densidad de corriente desplazada hacia la derecha.

Figura 25 Densidades de corriente superficial inducida sobre los cilindros elípticos caso TM^Z .

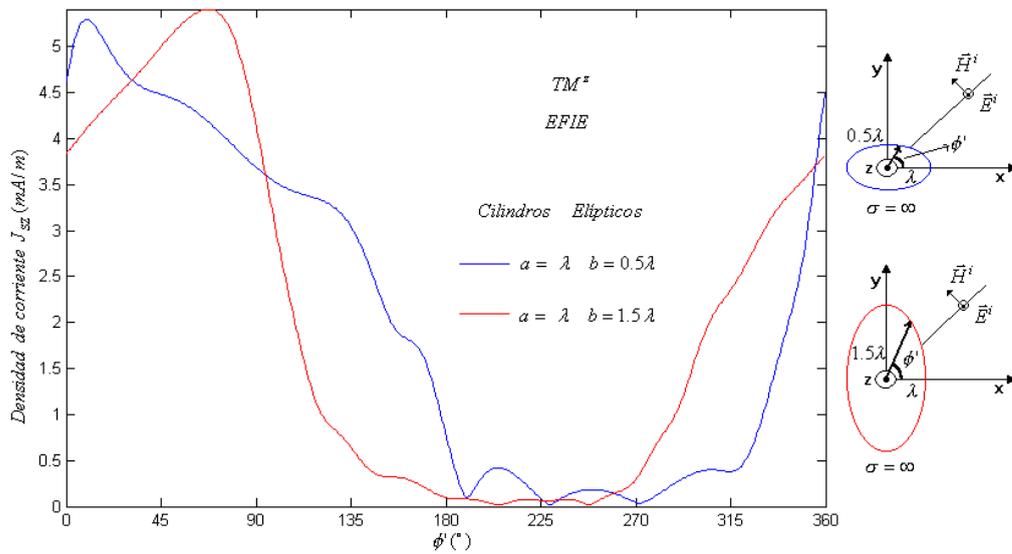
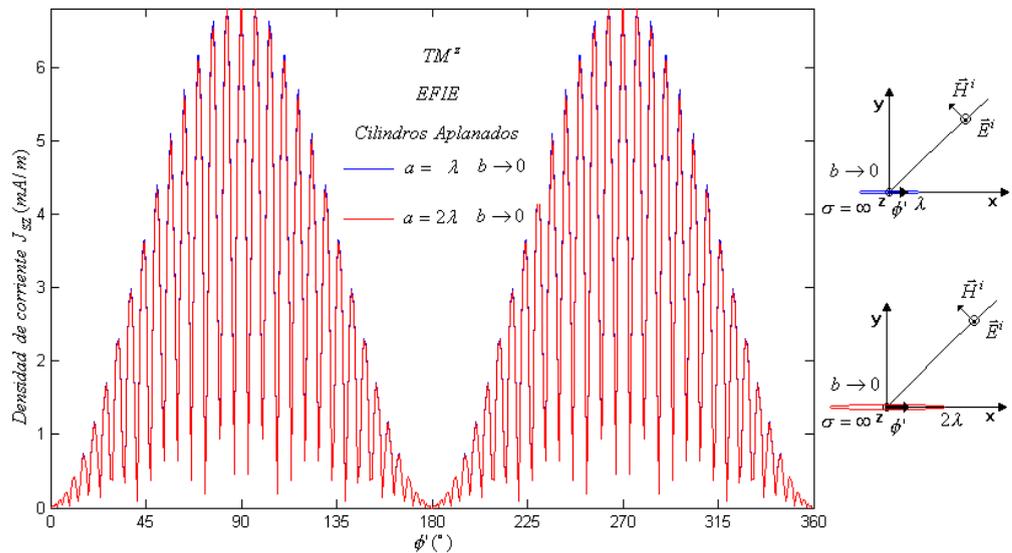


Figura 26 Densidades de corriente superficial inducida sobre los cilindros aplanados caso TM^Z .



Cilindros aplanados: Cuando $b \rightarrow 0$ y $a \neq 0$ el cilindro tiende a adquirir la forma de cilindro aplanado o de cinta de ancho a y longitud infinita. Se consideran dos

anchos: $a = I$ y $a = 2I$. En la Figura 26 se presenta los resultados del calculo del módulo de J_{sz} en función del ángulo f° realizado para ambos cilindros, la curva azul corresponde a la cinta de ancho I y la roja para la de

ancho $2I$. Teniendo en cuenta que la densidad de corriente se encuentra a lo largo de \hat{a}_z , al observar la Figura 26 se puede decir que alrededor de la sección elíptica de la cinta se encuentran los vectores de densidad de corriente tanto en la cara superior como en la inferior. Además, que la mayor intensidad de densidad de corriente se encuentra en el centro de dichas caras, es decir en 90° y en 270° , pero las menores intensidades de densidades de corriente se encuentran en los filos, es decir en 0° , 180° y 360° ; a diferencia con el caso de incidencia TE^Z de la sección 2.2.1 en que la densidad se acumula en los filos del cilindro, es preciso recordar que en ese caso el vector de densidad de corriente se encuentra a lo largo de \hat{c} , los cuales están contenidos en el mismo plano donde esta la superficie y el ser la corriente un flujo de electrones, los elementos de densidad fluyen hasta los filos de la cinta.

3.3.2 Campo dispersado. Con las densidades de corriente presentadas en la sección 2.3.1 se procede a calcular el campo dispersado en la zona lejana. El campo eléctrico esta dado por (2. 58) y el campo magnético por (2. 59). Las integrales que aparecen en estas expresiones se evalúan numéricamente dividiendo el dominio de la variable de integración f en 500 partes y aplicando el método del trapecio. A continuación se presenta la parte real del módulo del vector de campo eléctrico y de campo magnético para los diferentes cilindros.

Cilindros circulares: En la Figura 27 se presenta la parte real del módulo del campo eléctrico dispersado y en la Figura 28 se presenta la parte real del módulo del campo magnético dispersado para el caso de cilindros circulares. En estas figuras la curva azul corresponde al campo obtenido para el cilindro circular de radio I y la roja al correspondiente al cilindro de radio $2I$. Estos campos son debidos a las densidades de corriente de la Figura 24.

En la Figura 27 se destaca un mínimo absoluto del campo eléctrico dispersado en 45° tanto para el cilindro de radio I como para el de radio $2I$ y alrededor dos máximos equidistantes y a menos de 45° de separación del mínimo. Por otro lado en 225° aparece el menor de los máximos y a su alrededor dos mínimos absolutos, de nuevo para los dos cilindros. Como en el caso de la densidad de corriente la simetría respecto a 45° persiste y el carácter ondulatorio se acentúa para el cilindro de radio $2I$.

En la Figura 28 se puede observar que el campo magnético dispersado tiene un comportamiento similar al campo eléctrico dispersado coincidiendo la ubicación de los máximos y mínimos y solo diferenciándose en la intensidad del campo, haciendo correspondencia a la inducción electromagnética.

Figura 27 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TM^z cilindros circulares.

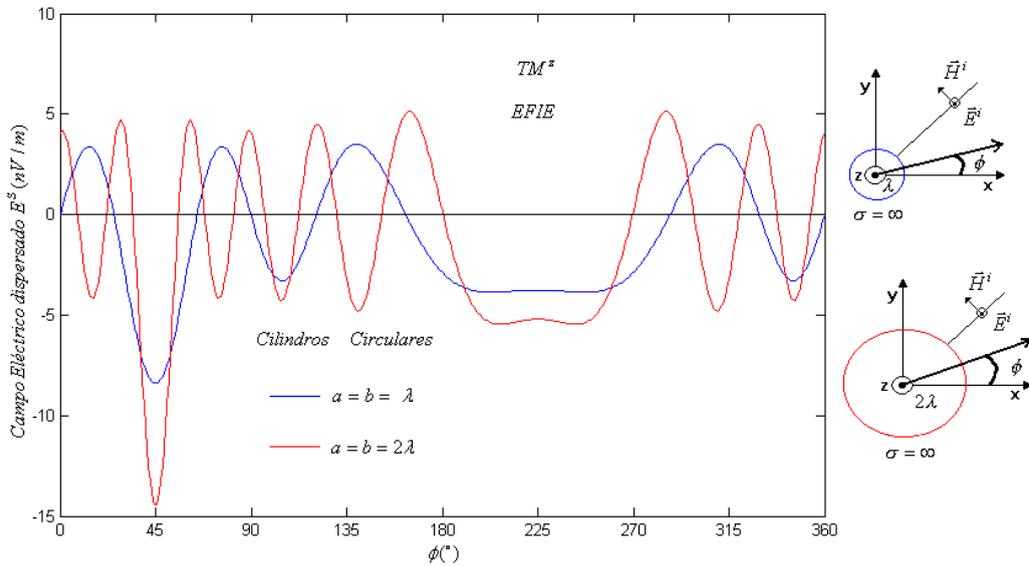
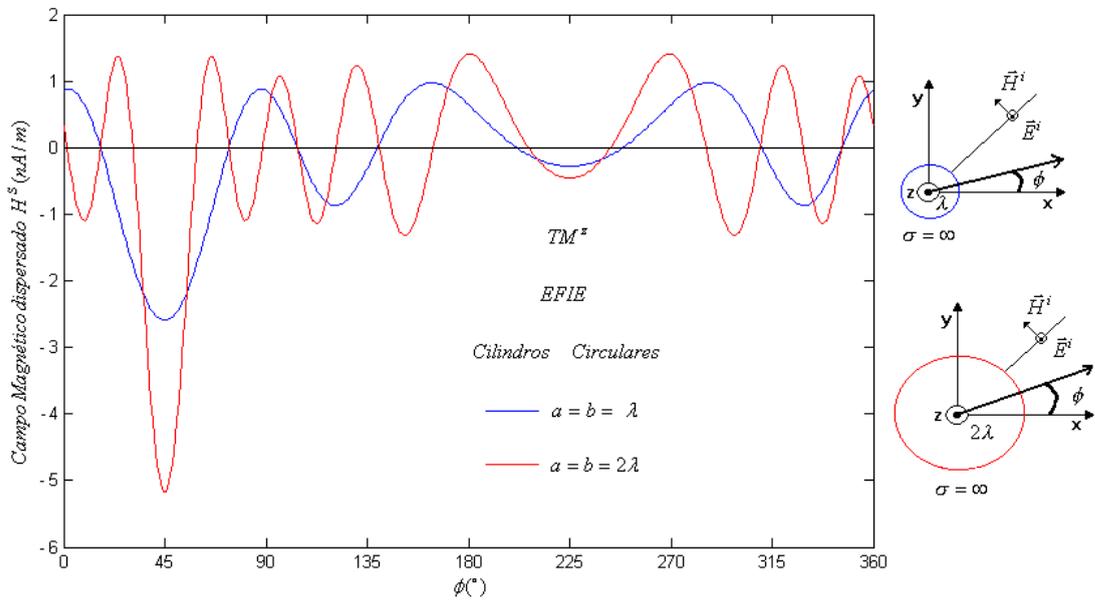


Figura 28 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TM^z cilindros circulares.



Cilindros elípticos: En la Figura 29 se presenta la parte real del módulo del campo eléctrico dispersado y la Figura 30 se presenta la parte real del módulo del campo magnético dispersado para el caso de cilindros elípticos: la curva azul para el

cilindro de semiejes $a = 1$ y $b = 0.51$, la roja para el de semiejes $a = 1$ y $b = 1.51$. Estos campos son debidos a las densidades de corriente presentadas en la Figura 25.

Figura 29 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TM^Z cilindros elípticos.

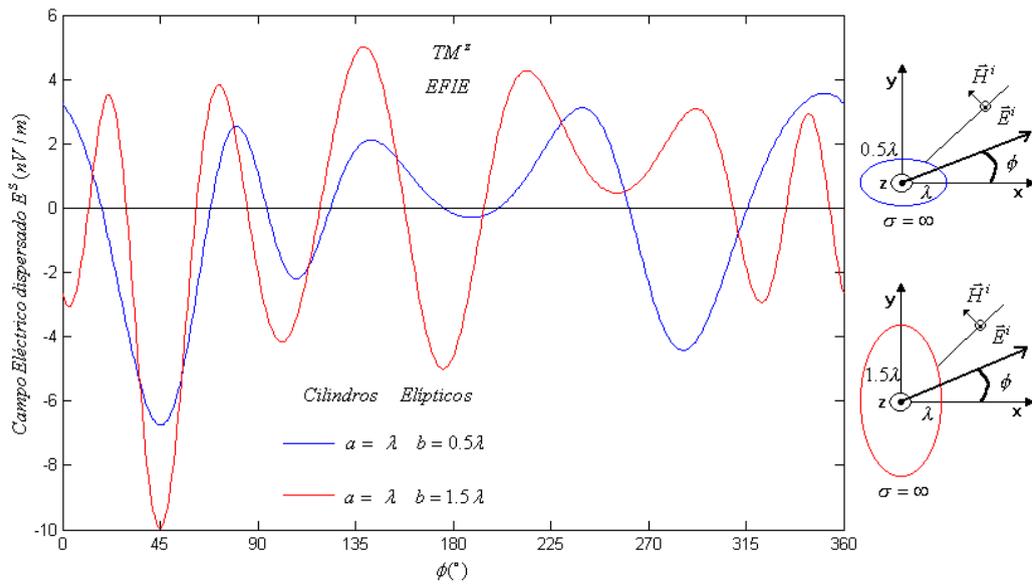
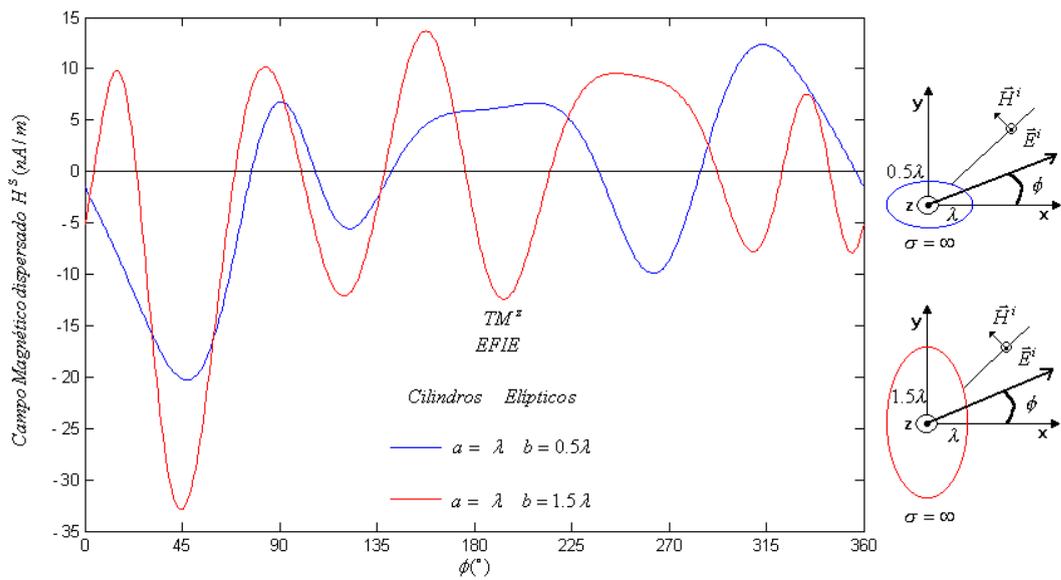


Figura 30 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TM^Z cilindros elípticos.

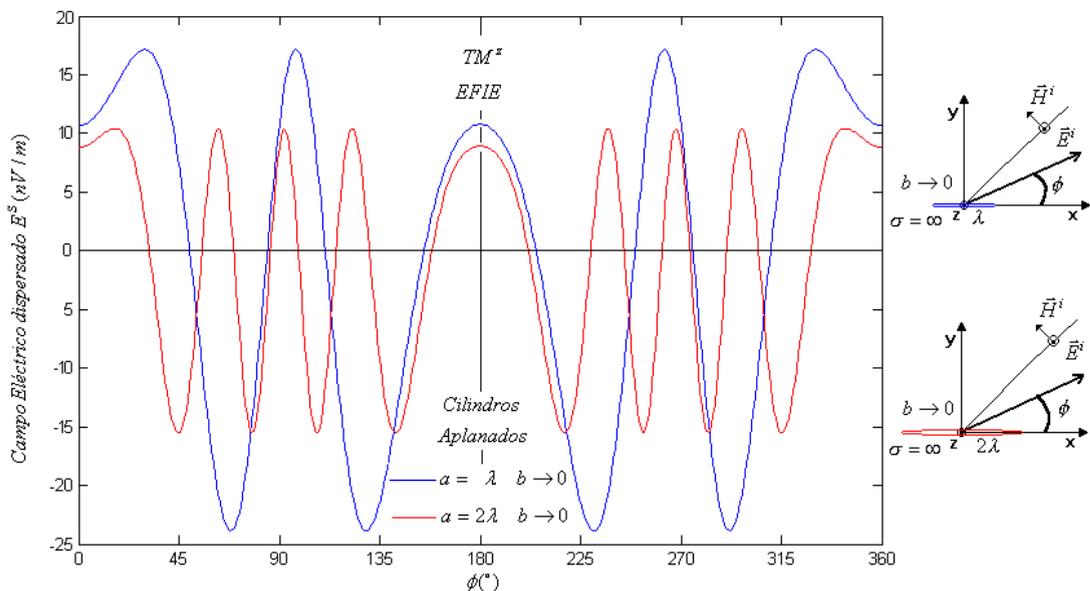


Si se compara la curva azul de la Figura 27 con la curva azul de la Figura 29 se puede apreciar un desplazamiento del campo eléctrico dispersado en el caso del primer cilindro hacia la izquierda con respecto al campo eléctrico dispersado en el caso del cilindro circular de radio I y además presentando el mismo número de máximos. Por otra parte la curva roja correspondiente al campo eléctrico dispersado para el caso del segundo cilindro presenta un desplazamiento hacia la derecha con respecto al campo eléctrico dispersado para el caso del cilindro circular de radio I .

Por otra parte la Figura 30 correspondiente al campo magnético dispersado presenta igual comportamiento que el campo eléctrico dispersado, debido a la inducción electromagnética.

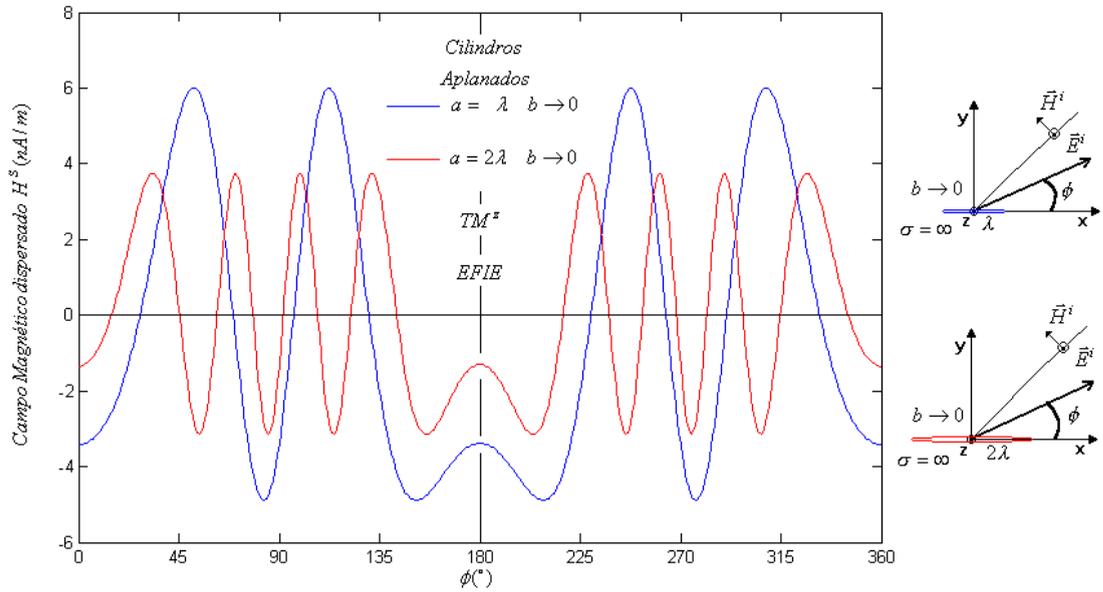
Cilindros aplanados: En la Figura 31 se presenta la parte real del módulo del campo eléctrico dispersado y la Figura 32 se presenta la parte real del módulo del campo magnético dispersado para el caso de cilindros aplanados: la curva azul correspondiente al cilindro de ancho I y la roja al de ancho $2I$. Estos campos son debidos a las densidades de corriente presentadas en la Figura 2.22.

Figura 31 Parte real del campo Eléctrico dispersado para el caso TM^Z cilindros aplanados.



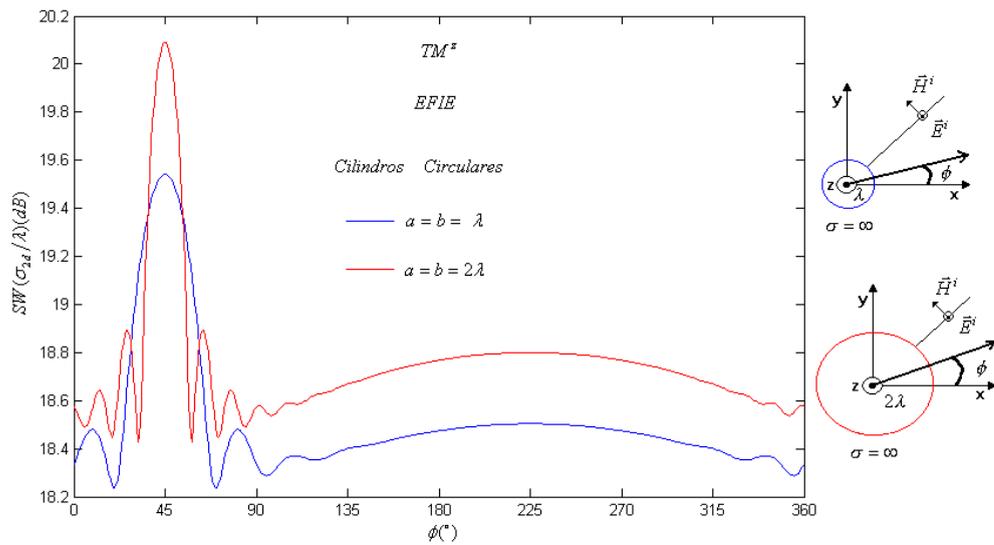
En estas figuras se refleja la simetría presentada en la Figura 26 además ambas presentan los máximos en los mismos ángulos. Un aspecto importante a resaltar es que con una cinta de semiejes a mayor, se presenta un mayor número de máximos, tal como sucedió en el caso de incidencia TE^Z .

Figura 32 Parte real del campo Magnético dispersado para el caso TM^z cilindros aplanados.



3.3.3 Sección eficaz de área. Análogamente a la sección 2.2.3 a continuación se presenta los resultados de los cálculos obtenidos para los anchos de dispersión para los diferentes cilindros elípticos. Los cuales son encontrados a partir de (2. 41) y (2. 43) con los campos presentados en la sección 2.3.2.

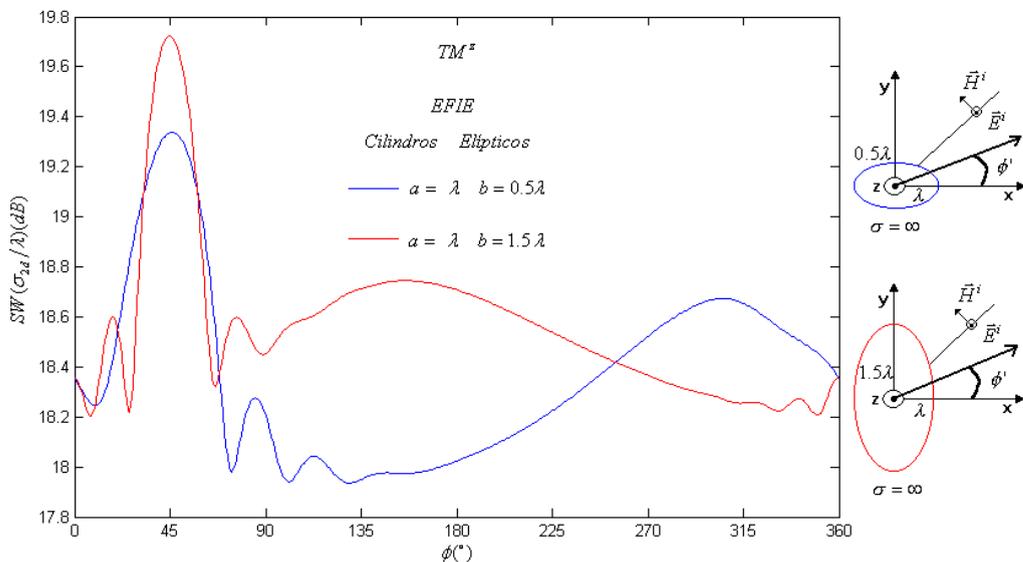
Figura 33 Sección eficaz de área para el caso TM^z cilindros circulares.



Cilindros circulares: En la Figura 33 se muestra los resultados del cálculo del ancho de dispersión realizado para los cilindros circulares: la curva azul corresponde al cilindro de radio 1 y la curva roja al de radio 2 . En ambas curvas se observa la simetría respecto a 45° y que se ha venido presentando en todas las figuras presentadas para los cilindros circulares (Figura 24, Figura 27 y Figura 28), pero a diferencia del caso TE^Z el máximo ancho de dispersión se presenta en 45° aunque la forma de los patrones se mantiene, pero más aguda. Con respecto a la relativa constancia de los patrones del caso TE^Z alrededor de 45° , en estos patrones alrededor de 225° se presenta un arco.

Cilindros elípticos: En la Figura 34 se muestra los resultados del cálculo del ancho de dispersión realizado para los cilindros elípticos: la curva azul corresponde al cilindro de semiejes $a=1$ y $b=0.5$, la roja al cilindro de semiejes $a=1$ y $b=1.5$. Haciendo una comparación con la Figura 2.29 se puede observar que para el caso del cilindro de semieje $b=0.5$ ocurre un abombamiento en 225° hacia la derecha, es decir hacia la izquierda el patrón se conserva; mientras que para el cilindro de semieje $b=1.5$ el abombamiento es hacia la izquierda y hacia la derecha se conserva, si se observa bien aquí ocurre lo contrario a lo que sucedió en la sección 2.2.3.

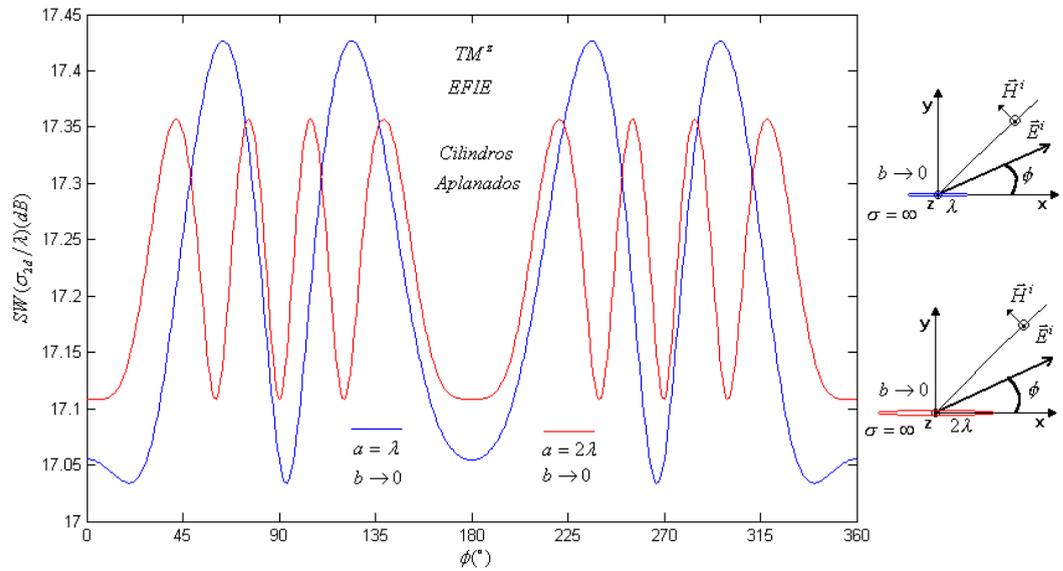
Figura 34 Sección eficaz de área para el caso TM^Z cilindros elípticos.



Cilindros aplanados: En la Figura 35 se muestra los resultados del cálculo del ancho de dispersión realizado para los cilindros elípticos. y también el cálculo realizado ya sea con los campos eléctricos incidente y dispersado ó con los magnéticos producen el mismo patrón. En esta figura también se refleja la simetría

presente en la Figura 26, la Figura 31 y la Figura 32, pero para la cinta de ancho $2l$ el patrón muestra mayor número de máximos que con el de ancho l .

Figura 35 Sección eficaz de área para el caso TM^z cilindros aplanados.



De las Figura 2.29 Figura 2.30 Figura 2.31 se puede decir que en la dispersión de ondas TM^z la mayor potencia radiada se presenta en la dirección opuesta de la onda incidente, es decir, se presenta la retro dispersión (*back scattering*).

CONCLUSIONES

Respecto a la densidad de corriente eléctrica inducida en la superficie de los cilindros conductor se puede decir que:

- En el caso de la dispersión de ondas TE^Z la densidad de corriente eléctrica tiende a acumularse en el lugar de la superficie que presenta más curvatura, es así como en el caso del cilindro de semiejes $a = 1$ y $b = 0.5$ la acumulación ocurrió en el primer y segundo cuadrante, es decir entre 0° y 180° como se mostró en la Figura 15; cuando los cilindros son circulares la distribución es uniforme ya que la curvatura en todos los puntos sobre el cilindro es constante y la acumulación se presentó en el mismo ángulo de incidencia como se mostró en la Figura 2.10, por otra parte, cuando el cilindro tiene semiejes $a = 1$ y $b = 1.5$ la acumulación ocurrió en el tercer cuadrante, es decir entre 270° y 360° como se mostró en la Figura 15; y finalmente en el caso de los cilindros aplanados la acumulación ocurrió en los filos del cilindro, es decir en 0° , 180° y 360° como se mostró en la Figura 16.

- En el caso de la dispersión de ondas TM^Z la densidad de corriente eléctrica tiende a acumularse en el lugar de la superficie que presenta más curvatura y como en el caso de la dispersión de ondas TE^Z , en el caso del cilindro de semiejes $a = 1$ y $b = 0.5$ la acumulación ocurrió entre el primer y el segundo cuadrante, es decir entre 0° y 180° con la máxima densidad de corriente cerca de 0° (donde la curvatura es mayor) como se mostró en la Figura 25; cuando los cilindros son circulares la distribución es uniforme ya que la curvatura en todos los puntos sobre el cilindro es constante y la acumulación se presentó en el mismo ángulo de incidencia como se mostró en la Figura 2.20, aquí si coincide con el caso de incidencia TE^Z , por otra parte, cuando el cilindro tiene semiejes $a = 1$ y $b = 1.5$ la acumulación ocurrió en el primer y tercer cuadrante, es decir entre 270° y 90° con la máxima densidad de corriente cerca de 90° (donde la curvatura es mayor) como se mostró en la Figura 25; y finalmente en el caso de los cilindros aplanados la acumulación ocurrió en el centro del cilindro, es decir en 90° y 270° como se mostró en la Figura 26, aquí no se presentó la acumulación en los filos, pero sí la simetría.

Respecto al campo dispersado se puede decir que:

- El campo eléctrico dispersado y el campo magnético dispersado obtenidos en la zona lejana tanto para el caso de la dispersión de ondas TE^Z como para el caso de la dispersión de ondas TM^Z presentan interrelación mutua, debido a la inducción electromagnética; así resulta en un frente de onda electromagnética que se encuentra en dicha zona.

Respecto a los anchos de dispersión se puede decir que:

- En el caso de la dispersión de ondas TE^Z los anchos de dispersión tienen la tendencia a presentar una forma característica en la región de superficie que no está expuesta a la onda. Es así como en el caso de cilindros circulares el patrón de ancho de dispersión es simétrico en 225° , donde justamente se encuentra el máximo ancho de dispersión y alrededor los dos mínimos anchos de dispersión a menos de 45° ; esta región se encuentra detrás del cilindro (región de superficie no expuesta a la onda), como se mostró en la Figura 20, cuando el cilindro tiene semiejes $a = 1$ y $b = 0.51$ el patrón conserva la forma en el lado derecho; en cambio cuando los semiejes del cilindro son $a = 1$ y $b = 1.51$ el patrón conserva la forma en el lado izquierdo (donde se encuentra la superficie menos expuesta a la onda), como se muestra en la Figura 21. En los patrones de los cilindros aplanados el patrón es simétrico en 180° porque dada la condición $b \rightarrow 0$ la región comprendida entre 0° y 180° y la región entre 180° y 360° teóricamente corresponde a los mismos puntos sobre la superficie, así la región expuesta y la no expuesta son indistinguibles.
- En el caso de la dispersión de ondas TM^Z los anchos de dispersión tienen la tendencia a presentar una forma característica en la región de superficie que está expuesta a la onda, al contrario del caso de dispersión TE^Z . Es así como en el caso de cilindros circulares el patrón de ancho de dispersión es simétrico en 45° , donde justamente se encuentra el máximo ancho de dispersión y alrededor los dos mínimos anchos de dispersión a menos de 45° ; esta región se encuentra delante del cilindro (región de superficie expuesta a la onda), como se muestra en la Figura 33 y en una forma de arco en el barrido desde 90° hasta 360° . Los patrones de los anchos de dispersión de los cilindros elípticos conservan la forma característica puesto que se encuentra en la región expuesta a la onda, pero cuando el cilindro tiene semiejes $a = 1$ y $b = 0.51$ el patrón conserva la forma de arco en el lado izquierdo; en cambio cuando los semiejes del cilindro son $a = 1$ y $b = 1.51$ el patrón conserva la forma en el lado derecho (donde se encuentra la superficie más expuesta a la onda), como se muestra en la Figura 34.

RECOMENDACIONES

En el desarrollo de este trabajo de grado se implementó el método de las ecuaciones integrales en el que a partir de unas condiciones se plantea la ecuación integral y considerando una solución en forma de sumatoria se la convierte en un sistema de ecuaciones lineal, permitiendo escribir una ecuación matricial la cual se resuelve computacionalmente. Este método es así una poderosa herramienta con la que se puede modelar la solución de problemas en que la solución analítica es muy difícil de encontrar o que simplemente no existe.

La dispersión que se trabajó fue para un obstáculo conductor y de superficie suave. En futuros trabajos de grado se puede tener en cuenta obstáculos dieléctricos ó obstáculos con superficies rugosas. Igualmente representa interés científico y técnico la solución del problema inverso, en el cual a partir de datos experimentales del campo dispersado, se propone modelar el dispersor, es decir restablecer sus características geométricas y electromagnéticas.

BIBLIOGRAFÍA

BALANIS, Constantine A. Advanced engineering electromagnetics. New York: John Wiley & Sons Inc. 1989.

CABRERA, José Manuel, LÓPEZ, Fernando Jesús, LÓPEZ, Fernando Agulló. Óptica electromagnética, Fundamentos, Segunda Edición. Addison–Wesley iberoamericana Española, S.A.. 1998.

CORSON, Dale R., LORRAIN, Paul. Introduction of electromagnetic field and waves. W. H. Freedman and Company. 1962.

JACKSON, Jhon David. Classical electrodynamics, Third edition. New York: John Wiley & Sons Inc. 1999.

LARSON, Rolante E, HOSTETTLER, Robert. Calculo y geometría analítica Vol. 2 Quinta Edición. Mc Graw – Hill. 1995.

MATHEUS, Jhon H., FINK, Kurtis D. Métodos Numéricos con MATLAB, 3ª Edición. Prentice may, Inc. 2000

MATLAB, Edición del estudiante. Version 4 Guía del usuario / The Math Works, Inc. Prentice may. 1996.

PÉREZ, López César. Matlab y sus aplicaciones en Ciencias y la Ingeniería. Prentice Hall, Inc. 2002.

PETROVSKY, I. G. Lecciones y teoría de las ecuaciones integrales. Moscú: Ed. Mir. 1971.

ZAJAC, Alfred, HECHT, Eugene. Óptica. Addison – Wesley Iberoamericana. 1986.