CONDICIONES DE ESTABILIDAD Y DE ROMPIMIENTO DE SIMETRIA EN EL MODELO GENERAL DE DOS DOBLETES HIGGS

JAVIER ALEXANDER AYALA CUATIN

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2009

CONDICIONES DE ESTABILIDAD Y DE ROMPIMIENTO DE SIMETRIA EN EL MODELO GENERAL DE DOS DOBLETES HIGGS

JAVIER ALEXANDER AYALA CUATIN

Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de Físico

Director:
JUAN CARLOS SALAZAR Ms.C.

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PROGRAMA DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2009

Nota de aceptacion:

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Diciembre 2009

"Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores"

Articulo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

A Dios que nos concede el privilegio de la vida
y nos ofrece lo necesario para alcanzar nuestras metas.
A mis padres por el apoyo incondicional que me brindaron constantemente
día tras día.

Javier Ayala

AGRADECIMIENTOS

A mis padres por su confianza, apoyo, y motivación a lo largo de mi carrera.

A mi director de trabajo de grado; MsC. Juan Carlos Salazar, por su colaboración y paciencia, y por compartir sus amplios conocimientos y experiencia para el desarrollo de este trabajo.

A mis compañeros por el apoyo y sobre todo por los momentos compartidos.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

Pág

GLOSARIO

INFIMUM: el infimum (extremo inferior) de un subconjunto de algún conjunto es el mayor elemento que es menor o igual a todos los elementos del subconjunto.

MATRIZ HESSIANA: la matriz hessiana de una función f de n variables, es la matriz cuadrada de $n \times n$, de las segundas derivadas parciales, que permite decidir si la función f, en un punto estacionario exhibe un máximo o mínimo local o un punto de silla.

MDDH: Modelo General de Dos dobletes Higgs es la extensión mas simple del Modelo Estándar, que da preámbulo al Modelo Mínimo Supersimétrico (MSSM).

MODELO ESTÁNDAR: es una teoría que describe las relaciones entre las interacciones fundamentales conocidas entre partículas elementales que componen toda la materia.

MSSM: es el modelo de la mínima extensión de la supersimetría al modelo estandar.

PARTÍCULA HIGGS: es una partícula elemental hipotética masiva cuya existencia es predicha por el Modelo Estándar de la física de partículas. Es la única partíula del Modelo Estándar que no ha sido observada hasta el momento, pero desempeña un papel importante en la explicación del origen de la masa de otras partículas elementales.

SUSY: supersimetría es una teoría que plantea una simetría hipotética, que relaciona las propiedades de bosones y fermiones.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método formal para el análisis del potencial escalar en el Modelo General de Dos Dobletes Higgs (MDDH). Este metodo permite establecer las condiciones para la estabilidad del potencial y para el rompimiento de simetría electrodébil del modelo en una manera muy concisa.

ABSTRACT

In this work a method is presented for the analysis of the scalar potential in the general Two-Higgs-Doublet Model. This allows to give the conditions for the stability of the potential and for electroweak symmetry breaking in this model in very concise way.

INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar (ME) de física de partículas es una teoría gauge local bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, el cual ha sido muy exitoso en describir las interacciones fuertes y electrodébiles. Esta teoría fué establecida por S. Glashow, S. Weinberg y A. Salam en el sector electrodébil y por H. Fritszch en el sector fuerte e incluye el rompimiento de simetría espontáneo y el mecanismo Higgs. El Modelo Estándar ha logrado explicar satisfactoriamente la mayoría de las observaciones experimentales. Sin embargo posee algunos problemas cuyas soluciones implican buscar extensiones al Modelo Estándar, que logren solventar en parte las debilidades que el modelo presenta. Extensiones al modelo estándar pueden ser: la introducción de nuevos campos fermiónicos (como la introducción de un neutrino derecho en cada familia), también se pueden introducir campos Higgs con o sin valores esperados del vacío (VEV), así mismo se puede extender el grupo gauge local que conlleva a la generación de bosones vectoriales extras, entre otros.

Dentro de las posibles extensiones al Modelo Estándar la extensión más simple compatible con la invarianza gauge es el llamado Modelo de Dos Dobletes Higgs (MDDH); el cual consiste en adicionar un segundo doblete Higgs con los mismos números cuánticos que el primero. Además da pauta al llamado Modelo Mínimo Supersimétrico (MSSM, Minimal Supersymmetric Standard Model).

En este trabajo se presenta un método para el análisis del potencial escalar del Modelo General de Dos dobletes Higgs, el cual proporciona las condiciones para la estabilidad del potencial y para el rompimiento de simetría electrodébil.

En modelos generales que tiene un sector escalar con dos dobletes Higgs, el potencial depende de muchos parámetros a los cuales se le imponen condiciones para entregar el potencial estable y garantizar el rompimiento espontáneo de la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ a $U(1)_{EM}$.

Este trabajo se ha organizado por capítulos; en el capítulo uno se da un resumen general del Modelo Estándar; en el capítulo dos se presenta la lagrangiana para el MDDH y se introduce la notación para el potencial de Higgs, el cual se expresa en términos de funciones invariantes gauge de los campos; en el capítulo tres se analiza las condiciones para la estabilidad del potencial; en el capítulo cuarto se encuentran expresiones para la localización de puntos estacionarios del potencial; en el capítulo cinco se encuentran las condiciones para el rompimiento espontáneo de la simetría del grupo gauge electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ al grupo gauge electromagnético $U(1)_{EM}$; en el capítulo seis se especifica el potencial después del rompimiento de simetría electrodébil en la notación respectiva y finalmente en el capítulo siete se presenta las conclusiones.

En el anexo A se aplican los resultados obtenidos a dos diferentes potenciales Higgs; y en los anexos B y C, se discute la estructura del espacio de órbitas gauge para el MDDH y para el modelo general con numero arbitrario de dobletes Higgs, respectivamente.

1NOCIONES ELEMENTALES

En este capitulo se da una descripción general sobre; Invarianza Gauge Local, Rompimiento de Simetría, Modelo Estándar, con el fin de presentar definiciones y notaciones útiles en el desarrollo de los capítulos posteriores[1].

1.1. INVARIANZA GAUGE LOCAL

Es bién conocido desde la electrodinámica clásica que las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una *transformación gauge local* de la forma:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x) \tag{1.1}$$

donde A_μ es el cuadri-vector potencial. Por otro lado, tomando la lagrangiana para partícula libre de Dirac;

$$\mathcal{L}_{libre} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi \tag{1.2}$$

El cual es invariante bajo el cambio de fase global,

$$\Psi \rightarrow e^{i\theta}\Psi \tag{1.3}$$

Sin embargo, inspirados en la simetría gauge local en electrodinámica, se puede verificar directamente que la lagrangiana libre de Dirac es invariante gauge localmente, si se remplaza la derivada ∂_μ por la derivada covariante $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$, donde A_μ es un cuadri-vector que transforma como; $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$ cuando la tranformación de $\Psi \rightarrow e^{-iq\lambda(x)}$ es realizada. Por consiguiente la lagrangiana (1.2) queda:

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi - qA_\mu \bar{\Psi}\gamma^\mu \Psi = \mathcal{L}_{libre} - J^\mu A_\mu \tag{1.4}$$

Es fácil mirar que esta nueva lagrangiana es invariante bajo las transformaciones combinadas $\Psi \rightarrow e^{-iq\lambda(x)}$, $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x)$. Ahora si se interpreta A_μ como un cuadri-vector potencial electromagnético, entonces J_μ es el cuadri-vector corriente electromagnética. Para completar la lagrangiana de Electrodinámica Cuántica (QED), se adiciona el término cinético que describe la propagación de fotones libres,

$$\mathcal{L}_{QED} = \mathcal{L}_{libre} - J^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{1.5}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1.6}$$

El término cinético para fotones libres (el cual conduce a las ecuaciones de Maxwell) es también invariante gauge local. Por consiguiente, el acoplamiento radiación-materia

[1] Las secciones Invarianza Gauge Local, Rompimiento de Simetría, están basadas en: R. A. Diaz, "Phenomenological Analysis of the Two-Higgs-Doublet Model", Ph.D. thesis, arXiv:hep-ph/0212237; y la sección del Modelo Estándar en: J. A. Herrera, "Fenomenologia de un Modelo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_Y$". Trabajo de Grado (Magíster en Física), Universidad de Antioquia, 2008, Capitulo 1.

ha sido generado desde la imposición del principio de invarianza gauge local. Adicionalmente, para preservar esta invarianza se ha introducido dentro de la derivada covariante un cuadri-vector (el cuadri-vector potencial A_μ), el cual es llamado un *campo gauge*, y también un parámetro q que actúa como el generador para las transformaciones del grupo local $\hat{U}(x) = exp(-iq\lambda(x))$. En este caso, para analizar las simetrías se ha usado el grupo de rotación unidimensional en el espacio complejo, este grupo es llamado $U(1)$, el grupo de matrices unitarias complejas 1×1.

En el Modelo Estándar electrodébil se usa además, el grupo de matrices unitarias 2×2 de determinante uno, conocido como $SU(2)$. Este grupo es no abeliano y sus generadores obedecen el álgebra de Lie del grupo de rotación en tres dimensiones $SO(3)$. Después aplicando la invarianza gauge local a todo el grupo electrodébil $SU(2) \otimes U(1)$, cuatro campos gauge aparecen, ellos generan después de algunas transformaciones adicionales los tres bosones vectoriales débiles y el fotón. Esta idea es extendida al grupo $SU(3)$ produciendo la cromodinámica cuántica (QCD).

En el Modelo Estándar todas las interacciones fundamentales se generan de esta forma.

1.2. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE SIMETRÍA Y MECANISMO HIGGS

Usando la invarianza gauge local como un principio dinámico, no se predicen partículas físicas, ya que este conduce a bosones gauge sin masa que no corresponde a la realidad física. El Modelo Estándar predice que estos bosones vectoriales adquieran sus masas através de un rompimiento espontáneo de simetría.

Cuando el estado base (vacío) de un sistema es degenerado, se puede escoger uno en particular[2], el cual no es invariante bajo la simetrá de la lagrangiana. Cuando el vacío no comparte la simetría de la lagrangiana, se dice que la simetría ha sido espontáneamente rota.

Cuando este fenómeno ocurre otras partículas sin masa llamadas bosones Goldstone surgen en el espectro. Sin embargo, si la lagrangiana posee una simetría gauge local una interacción entre bosones gauge y Goldstone dota a los bosones gauge con una masa física, mientras los bosones Goldstone desaparecen del espectro, este fenómeno es llamado *Mecanismo Higgs*[3].

Para explicar el mecanismo se usará un modelo descrito por una cupla de campos escalares complejos interactuando (ϕ y ϕ^*) cuya lagrangiana es invariante gauge local,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu\phi)(D^\mu\phi)^* - V(\phi^*\phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}; \quad V(\phi) = -\frac{1}{2}\mu^2(\phi^*\phi) + \frac{1}{4}\lambda^2(\phi^*\phi)^2 \tag{1.7}$$

donde,

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2 \tag{1.8}$$

[2]La teoría de campos cuánticos exige que el vacío es único tal que expansiones de perturbación son calculadas alrededor de este punto.

[3]T.Morii, C.S.Lim, S.N.Mukherjee, "The Physics of the Standard Model and Beyong". 2003

es un campo complejo y también

$$D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu; \qquad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.9}$$

La lagrangiana (1.7) ya comparte la simetría gauge local descrita por las transformaciones simultaneas:

$$\phi = e^{-iq\lambda(x)}\phi \qquad A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda(x) \tag{1.10}$$

Se observa que la imposición de la invarianza gauge local genera la interacción de los campos escalares complejos con un cuadri-vector campo.

Si $\mu^2 < 0$, el potencial $V(\phi)$ posee un mínimo único en $\phi = 0$ el cual preserva la simetría de la lagrangiana. Sin embargo, si $\mu^2 > 0$, el potencial $V(\phi)$ tiene un mínimo situado sobre un círculo de radio μ/λ, el cual forma un conjunto continuo degenerado de estados base,

$$\langle|\phi|^2\rangle = \langle\phi_1\rangle^2 + \langle\phi_2\rangle^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2} \equiv v^2 \tag{1.11}$$

cualquiera de ellos podría ser escogido como el estado fundamental, pero ninguno de ellos es invariante bajo una rotación de fase local[4]. De acuerdo con la definición hecha, la simetría de la lagrangiana ha sido espontáneamente rota.

Escogiendo un mínimo particular,

$$\langle\phi_1\rangle = \frac{\mu}{\lambda} \equiv v, \qquad \langle\phi_2\rangle = 0 \tag{1.12}$$

decimos que el campo ϕ_1 ha adquirido un valor esperado del vacío (VEV) $\langle\phi_1\rangle$. Es conveniente introducir nuevos campos;

$$\eta \equiv \phi_1 - v; \qquad \xi \equiv \phi_2 \tag{1.13}$$

y expandiendo la lagrangiana en términos de estos nuevos campos se obtiene,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} =&(\frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \mu^2\eta^2) + \frac{1}{2}(\partial_\mu\xi)(\partial^\mu\xi) + (-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{q^2v^2}{2}A_\mu A^\mu)\\ &- 2iqv(\partial_\mu\xi)A^\mu + [q(\eta(\partial_\mu\xi) - \xi(\partial_\mu\eta))A^\mu + vq^2(\eta A_\mu A^\mu)\\ &+ \frac{q^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)A_\mu A^\mu - \lambda\mu(\eta^3 + \eta\xi^2) - \frac{\lambda^2}{4}(\eta^4 + 2\eta^2\xi^2 + \xi^4)] + \frac{\mu^2v^2}{4}\end{aligned} \tag{1.14}$$

El espectro de partículas una vez se realiza el rompimiento espontáneo de simetría es:

Un campo η con masa $\sqrt{2}\mu$.

Un bosón vectorial A_μ que adquirió una masa $qv > 0$.

[4]El conjunto de todos los estados base es invariante bajo la simetría, pero la obligación de escoger solamente uno de ellos, nos conduce al rompimiento de la simetría.

Un campo sin masa ξ llamado bosón Goldstone.

Sin embargo, la lagrangiana (1.14) aparece un término mixto de la forma $(\partial_\mu \xi)A^\mu$, el cual no tiene una clara interpretación física. Afortunadamente, se esta en capacidad de eliminar este término por la utilización de la invarianza gauge local de la lagrangiana.

Escribiendo la ecuación (1.10) en términos de ϕ_1 y ϕ_2 queda;

$$\phi \to \phi' = e^{i\theta(x)}\phi = [\phi_1 \cos\theta(x) - \phi_2 \sin\theta(x)] + i[\phi_1 \sin\theta(x) + \phi_2 \cos\theta(x)] \tag{1.15}$$

donde $\theta(x) \equiv -q\lambda(x)$, y usando,

$$\theta(x) = -\tan^{-1}\left(\frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}\right) \tag{1.16}$$

se obtiene que ϕ' es real. [5] El campo gauge transforma como $A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x)$. Sin embargo la transformación gauge no afecta el contenido físico de $A_\mu(x)$, así se suprime la notación prima.

Usando la transformación local definida por (1.10) y (1.16) (un gauge particular), la lagrangiana queda,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = (\frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - \mu^2\eta^2) + (-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{q^2v^2}{2}A_\mu A^\mu) \\ + (q^2 v(\eta A_\mu A^\mu) + \frac{q^2}{2}\eta^2 A_\mu A^\mu - \lambda\mu\eta^3 - \frac{\lambda^2}{4}\eta^4) + \frac{\mu^2 v^2}{4}\end{aligned} \tag{1.17}$$

Así nos hemos desecho del campo sin masa ξ y todas sus interacciones, especialmente el término $(\partial_\mu \xi)A^\mu$. Por consiguiente nos queda un campo escalar masivo η (una partícula Higgs) y un campo vectorial masivo A_μ.

Es instructivo notar que un grado de libertad ha desaparecido (bosón Goldstone), mientras que otro ha surgido (una polarización longitudinal para el bosón vectorial). Por lo general se puede decir que el fotón a "consumido" un boson Goldstone ξ para adquirir su masa. Este resultado es conocido como el *Mecanismo Higgs*. No obstante, vale enfatizar que además del boson vectorial masivo, el Mecanismo Higgs nos ha proporcionado un grado de libertad físico adicional que corresponde a un campo escalar, el así llamado "campo Higgs".

Podemos notar que el Mecanismo Higgs es posible, a causa del principio de invarianza gauge local y el rompimiento espontáneo de simetría. Además si se implementa un rompimiento espontáneo de simetría con una simetrá global, lo que se obtiene es un cierto número de bosones físicos Goldstone sin masa, ya que con una simetría global, no genera bosones vectoriales que "consuman" grados de libertad extras. Técnicamente, el

[5] Observe que la invarianza gauge bajo una rotación de fase del campo complejo $\phi \to e^{i\theta}\phi$, es equivalente a la invarianza bajo una rotación $SO(2)$ de la parte real e imaginaria, $\phi_1 \to \phi_1 \cos\theta - \phi_2 \sin\theta$; $\phi_2 \to \phi_1 \sin\theta + \phi_2 \cos\theta$.

número de bosones Goldstone generados después del rompimiento de simetría es igual al nuḿero de generadores rotos (Teorema Goldstone)[6].

En el Modelo Estándar, el mecanismo Higgs crea tres bosones vectoriales masivos $(W^{\pm}, Z)$ y un bosón vectorial sin masa (el fotón), además de una partícula Higgs la cual aun no ha sido descubierta.

1.3. MODELO ESTÁNDAR

El Modelo Estándar (ME) es uno de los éxitos alcanzados en la física moderna, el cual proporciona una elegante estructura teórica, la cual describe la mayoría de hechos experimentales conocidos en física de partículas.

El Modelo Estándar es una teoría gauge local que describe las interacciones fuertes y electrodébiles. Estas interacciones se producen mediante el intercambio de partículas de spín 1; en la interacción fuerte existen ocho partículas mediadoras correspondientes a bosones no masivos eléctricamente neutros, los cuales se denominan gluones; para la interacción débil hay tres bosones masivos correspondientes a W_{+}, W_{-}, y Z_0, y finalmente en el caso de la interacción electromagnética un bosón neutro no masivo conocido como el fotón y denotado como γ.

El contenido fermiónico de la teoría se clasifica en leptones y quarks, según la interacción que experimenta cada partícula. Los leptones y quarks se organizan en estructuras de familias; en cada familia sus miembros poseen propiedades similares de transformación gauge, diferenciándose únicamente por su masa y números cuánticos de sabor. A la fecha hay evidencia experimental de la existencia de tres familias.

En los procesos cargados de interacción débil participan únicamente las componentes izquierdas de los campos fermiónicos; por lo tanto, estas componentes se agrupan en la teoría como dobletes de $SU(2)_L$, mientras que sus contrapartes derechas al no sufrir interacción débil, transforman como singletes de $SU(2)_L$. Así pues para cada familia se tiene un arreglo como;

$$\begin{array}{cc} L_{iL} = \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L & \qquad l^-_{iR} \\ (1,2,-1) & \qquad (1,1,-2) \end{array}$$

para el Sector Leptónico y

$$\begin{array}{ccc} Q_{iL} = \begin{pmatrix} u_i \\ d_i \end{pmatrix}_L & \qquad u_{iR} & \qquad d_{iR} \\ (3,2,1/3) & \qquad (3,1,4/3) & \qquad (3,1,-2/3) \end{array}$$

para el Sector de Quarks, con $l = e, \mu, \tau$ e $i = 1, 2, 3$ son índices de familia. Los números entre paréntecis determinan como se transforman los campos bajo el grupo gauge local y

[6]T.Morii, C.S.Lim, S.N.Mukherjee, "The Physics of the Standard Model and Beyong". 2003

no se ha incluido el singlete derecho del neutrino, debido a que en el contexto del ME se considera no masivo. El operador de carga eléctrica de las partículas en los multipletes, esta dado por la relación de Gell-Mann-Nishijima [7].

$$Q = T_{3L} + \frac{Y}{2} \tag{1.18}$$

Donde Y corresponde a la hipercarga y T_{3L} es la proyección del isospín débil. Para los singletes se omite la matriz T_{3L}, de tal manera que la relación para determinar la carga se reduce a $Q = \frac{Y}{2}$.

Por otra parte, el lagrangiano invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, no contiene términos de masa para los estados fermiónicos, ni para los bosones mediadores de la iteracción débil; sin embargo, el grupo gauge local del ME se encuentra espontóneamente roto a $SU(3)_C \otimes U(1)_{EM}$ a la escala de energía v [8]. Así pues, para que los bosones y fermiones adquieran masa es necesario incluir nuevos ingredientes en el modelo, como por ejemplo un doblete escalar complejo $\varphi = (\varphi^+, \varphi^0) \sim (1, 2, 1)$ que rompa la simetría espontáneamente, implicando la aparición de bosones no masivos (Teorema de Goldstone) y la generación de masas a los bosones vectoriales $W_\pm$ y Z_μ a travéz del Mecanismo Higgs, y para los campos fermiónicos a travéz del lagrangiano de Yukawa, como se vera más adelante.

El lagrangiano invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, que incluye campos escalares se puede escribir como,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_y + \mathcal{L}_f \tag{1.19}$$

El término $\mathcal{L}_g$ contiene los términos cinéticos para los bosones vectoriales los cuales son los mediadores de las interacciones, esta dado por:

$$\mathcal{L}_g = -\frac{W^i_{\mu\nu} W^{i\mu\nu}}{4} - \frac{G^i_{\mu\nu} G^{i\mu\nu}}{4} - \frac{F^i_{\mu\nu} F^{i\mu\nu}}{4} \tag{1.20}$$

Donde:

$$W^i_{\mu\nu} = \partial_\mu W^i_\nu - \partial_\nu W^i_\mu + \mathbf{g}\varepsilon_{ijk} W^j_\mu W^k_\mu \qquad \text{con} \quad i = 1 \dots 3 \tag{1.21a}$$

$$G^\alpha_{\mu\nu} = \partial_\mu G^\alpha_\nu - \partial_\nu G^\alpha_\mu + \mathbf{g}_c f_{\alpha\beta\gamma} G^\beta_\mu G^\gamma_\nu \qquad \text{con} \quad \alpha = 1 \dots 8 \tag{1.21b}$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \tag{1.21c}$$

[7] La carga Q en la relación de Gell-Mann-Nishijima esta dada por la conbinación lineal de los generadores diagonales que son la matriz de Pauli σ_3 de $SU(2)_L$ y la matriz identidad de $U(1)_Y$.

[8] v, define la escala por debajo de la cual el grupo de simetría que rige los procesos de interación fuerte y electromagnética es $SU(3)_C \otimes U(1)_{EM}$.

Las constantes $\mathbf{g}$ y $\mathbf{g}_c$ corresponden a las constantes de acople de los grupos $SU(2)_L$ y $SU(3)_C$, ε_{ijk} y $f_{\alpha\beta\gamma}$ son las constantes de estructura de los grupos $SU(2)_L$ y $SU(3)_C$ respectivamente, W_μ son los tres campos gauge asociados con $SU(2)_L$ y los G_ν^α son los ocho campos gauge asociados con $SU(3)_C$ y B_μ es el campo gauge asociado con $U(1)_Y$, para un total de 12 bosones gauge.

En $\mathcal{L}_H$ se hallan los términos correspondientes al doblete escalar φ que son:

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu\varphi)^\dagger(D^\mu\varphi) - V(\varphi^\dagger\varphi), \tag{1.21}$$

donde D_μ es la derivada covariante, la cual se expresa de manera general como:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\mathbf{g}\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i - i\mathbf{g}'YB_\mu - i\mathbf{g}_c\frac{\lambda^\alpha}{2}g_\mu^\alpha \tag{1.22}$$

Los τ_i, $i = 1, 2, 3$ corresponden a las matrices de Pauli, generadores del grupo $SU(2)_L$, las matrices λ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$ son las matrices de Gell-Mann-Okubo y corresponden a los generadores de $SU(3)_C$ y $\mathbf{g}'$ es la constante de acople de $U(1)_Y$. De los 12 bosones gauge en el modelo, los únicos bosones no masivos que de entrada tienen sentido físico son los gluones G_μ^α, asociados con la interacción fuerte; los restantes bosones deben ser redefinidos para que puedan ser asociados a partículas físicas.

El término potencial $V(\varphi^\dagger\varphi)$ siendo invariante gauge es dado por:

$$V(\varphi^\dagger\varphi) = \mu^2(\varphi^\dagger\varphi) + \lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2 \tag{1.23}$$

donde μ^2 y λ son parámetros constantes reales; λ será positivo para asegurar la estabilidad del vacío.

En $\mathcal{L}_y$, se asocian los términos de interacción invariantes de $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ entre los campos fermiónicos y el doblete φ, denominado lagrangiano de Yukawa, el cual se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_y = \sum_{ij} h_{ij}^d \bar{Q}_{iL}\varphi d_{jR} + h_{ij}^e \bar{L}_{iL}\varphi e_{jR} + h_{ij}^u \bar{Q}_{iL}\varphi^* u_{jR}. \tag{1.24}$$

las constantes h_{ij} se denominan acoples de Yukawa y $\bar{Q}_{iL}$, $\bar{L}_{iL}$ están dados por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{iL} &= \frac{1-\gamma^5}{2}Q_{iL} \\ \bar{L}_{iL} &= \frac{1-\gamma^5}{2}L_{iL} \end{aligned} \tag{1.25}$$

El último término $\mathcal{L}_f$, contiene los términos cinéticos para los campos fermiónicos, de los cuales se deduce las corrientes electrodébiles. $\mathcal{L}_f$ se expresa como:

$$\mathcal{L}_f = i\sum_{i=1}^{3}(\bar{Q}_{iL}\gamma^\mu D_\mu Q_{iL} + \bar{L}_{iL}\gamma^\mu D_\mu L_{iL} + \bar{e}_{iR}\gamma^\mu D_\mu e_{iR} + \bar{u}_{iR}\gamma^\mu D_\mu u_{iR} + \bar{d}_{iR}\gamma^\mu D_\mu d_{iR}) + h.c \tag{1.26}$$

Ahora bien, para establecer si la teoría se encuentra espontáneamente rota, se debe estudiar el estado de mínima energía, el cual se encuentra al minimizar el potencial V en (1.23).

Al minimizar V, se presentan dos casos dependiendo del valor de μ^2 los cuales son: si $\mu^2 > 0$ se tiene la solución trivial $\varphi = 0$ para el mínimo del potencial y el lagrangiano (1.21) simplemente corresponde a una partícula escalar con masa μ y un acople cuártico[9]. Si en cambio $\mu^2 < 0$ el mínimo del potencial se presenta cuando:

$$\varphi^\dagger\varphi = |\varphi|^2 = \frac{v^2}{2} \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}} \tag{1.27}$$

Teniendo en cuenta la invarianza de fase que presenta (1.21), se tiene entonces un número infinito de estados degenerados ($\varphi_0 = \frac{v}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$) correspondientes al mínimo de energía. Al escoger una solución particular ($\theta = 0$) para el estado base, la simetría se rompe espontáneamente cuando el valor esperado de φ en el vacío es:

$$\varphi_0 = \langle 0|\varphi|0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{1.28}$$

ya que T_{3L} y Y no aniquilan el vacío φ_0;

$$T_{3L}\varphi_0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\varphi_0, \tag{1.29}$$

$$Y\varphi_0 = \varphi_0 \tag{1.30}$$

y así ellos son generadores rotos, el operador carga eléctrica Q no es un generador roto ya que,

$$Q\varphi_0 = (T_{3L} + \frac{Y}{2})\varphi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0 \tag{1.31}$$

[9]En este caso, la simetría no se encuentra espontánemente rota y no presenta interés para el estudio del ME.

Por consiguiente después del rompimiento, permanece una simetría asociada con el operador Q de $U(1)_{EM}$.

Por ser $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ un grupo continuo, se puede ahora parametrizar cualquier estado $\varphi(x)$ de la siguiente manera:

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix} = \frac{e^{i\tau_i\xi_i/2}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

Aquí los 2 campos escalares complejos φ^+ y φ^0 son remplazados por 4 campos reales, $\xi_i(i = 1, 2, 3)$ y H, donde ξ_i representan partículas escalares sin masa, denominados bosones Goldstone los cuales surgen como consecuencia de rompimiento espontáneo de la simetría. Por cada generador roto se tiene un bosón Goldstone.

De (1.28) se observa que los campos H y ξ_i tienen valor esperado cero en el vacío:

$$\langle 0|\xi_i|0\rangle = \langle 0|H|0\rangle = 0 \quad \text{con} \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.33}$$

Debido a la invarianza local $SU(2)$ que presenta el lagrangiano, se puede suprimir los campos ξ_i aplicando la transformación unitaria $SU(2)$

$$U(\xi) = e^{-i\tau_i\xi_i/2} \tag{1.34}$$

luego φ se puede escribir como:

$$\varphi' = U(\xi)\varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ (v+H)/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\chi, \quad \text{con} \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.35}$$

Remplazando (1.35) y (1.22) en (1.21) con

$$D_\mu\varphi = (\partial_\mu - i\mathbf{g}\frac{\tau^i}{2}W_\mu^i - \frac{i}{2}\mathbf{g}'B_\mu - i\mathbf{g}_c\frac{\lambda^\alpha}{2}g_\mu^\alpha)\frac{1}{\sqrt{2}}(v+H)\chi \tag{1.36}$$

se obtiene el término cuadrado de masa para los bosones gauge débiles el cual es originado desde los términos cuadráticos de los campos gauge como se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{masa} &= \frac{v^2}{2}\chi^\dagger(\mathbf{g}\frac{\tau^i}{2}W^i_\mu + \frac{\mathbf{g'}}{2}B_\mu)(\mathbf{g}\frac{\tau^i}{2}W^{i\mu} + \frac{\mathbf{g'}}{2}B^\mu)\chi \\
&= \frac{v^2}{8}(\mathbf{g}^2 W^i_\mu W^{i\mu} + \mathbf{g'}B_\mu B^\mu - 2\mathbf{g}\mathbf{g'}B_\mu W^{3\mu}) \\
&= \frac{v^2}{8}(\mathbf{g}^2 W^1_\mu W^{1\mu} + \mathbf{g}^2 W^2_\mu W^{2\mu} + (\mathbf{g}W^3_\mu - \mathbf{g'}B_\mu)^2),
\end{aligned}
\tag{1.37}
$$

donde de la primera a la segunda línea se ha utilizado la fórmula $\tau^i\tau^j = \delta_{ij} + i\varepsilon^{ijk}\tau^k$.

Ahora se introduce los bosones vectoriales cargados $W^\pm$, definidos por:

$$
W^\pm_\mu = \frac{W^1_\mu \mp iW^2_\mu}{\sqrt{2}}. \tag{1.38}
$$

Luego la suma del primer y del segundo término de (1.37) puede ser escrito como $\frac{1}{4}g^2v^2W^+_\mu W^{-\mu}$. Lo cual significa que los bosones vectoriales cargados $W^\pm$ son masivos, con masa

$$
M_W = \frac{1}{2}gv. \tag{1.39}
$$

El término remanente el cual es descrito por los campos neutrales puede ser escrito como:

$$
\frac{v^2}{8}(W^3_\mu B_\mu)\begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} \tag{1.40}
$$

el cual puede ser diagonalizado en,

$$
\frac{v^2}{8}(Z_\mu A_\mu)\begin{pmatrix} g^2+g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Z^\mu \\ A^\mu \end{pmatrix} = \frac{v^2}{8}(g^2+g'^2)Z_\mu Z^\mu + 0.A_\mu A^\mu, \tag{1.41}
$$

por una transformación ortogonal,

$$
\begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & -\sin\theta_W \\ \sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix}\begin{pmatrix} W^3_\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \tag{1.42}
$$

donde θ_W es llamado ángulo de mezcla débil o ángulo de Weinberg. La diagonalización conduce a

$$
\tan\theta_W = \frac{g'}{g} \tag{1.43}
$$

o

$$\sin\theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}, \qquad \cos\theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}. \tag{1.44}$$

De (1.41), se observa que el bosón neutral Z llega a ser masivo con masa

$$M_Z = \frac{1}{2}v\sqrt{g^2+g'^2} = \frac{M_W}{\cos\theta_W}, \tag{1.45}$$

y el bosón neutral A_μ se mantiene sin masa, el cual puede ser identificado con el fotón real.

En el proceso, los campos $W^\pm$, Z_μ, han adquirido un grado de libertad adicional al absorber como componentes longitudinales a los bosones Goldstone ξ_i. Y debido a que el generador de carga Q es un generador no roto, A_μ se mantiene sin masa.

El potencial (1.23) después del rompimiento de simetría queda;

$$\begin{aligned} V(\varphi^\dagger\varphi) &= \frac{\mu^2}{2}(v+H)^2\chi^\dagger\chi + \frac{\lambda}{4}(v+H)^4(\chi^\dagger\chi)^2 \\ &= \frac{\mu^2 v^2}{4} + \frac{1}{2}(2\mu^2)H^2 + \lambda v H^3 + \frac{\lambda}{4}H^4. \end{aligned} \tag{1.46}$$

De (1.46), se mira que la masa del bosón Higgs físico H puede ser identificada con,

$$M_H = \sqrt{-2\mu^2} \tag{1.47}$$

Las interacciones Higgs tienen la característica de ser siempre proporcionales al cuadrado de la masa del bosón acoplado. Todos los acoples Higgs son determinados por M_H, M_W, M_Z y el valor esperado del vacío v.

Consecuencia adicional al rompimiento de simetría, es la aparición de términos de masa para los campos fermiónicos, los cuales se obtienen al remplazar (1.35) en el lagrangiano de Yukawa $\mathcal{L}_y$ (1.24), el cual se puede escribir como:

$$\mathcal{L}_y = -\left(1+\frac{H}{v}\right)\left(\begin{pmatrix}\bar{d}'\\ \bar{s}'\\ \bar{b}'\end{pmatrix} M_d'(d',s',b')_R + \begin{pmatrix}\bar{u}'\\ \bar{c}'\\ \bar{t}'\end{pmatrix} M_u'(u',c',t')_R + \begin{pmatrix}\bar{e}'\\ \bar{\mu}'\\ \bar{\tau}'\end{pmatrix} M_l'(e',\mu',\tau')_R + h.c\right). \tag{1.48}$$

Los campos primados corresponden a los estados débiles y las correspondientes matrices de masa están dadas por:

$$(M'_d)_{ij} \equiv -h^d_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (M'_u)_{ij} \equiv -h^u_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (M'_l)_{ij} \equiv -h^l_{ij}\frac{v}{\sqrt{2}} \tag{1.49}$$

La diagonalización de estas matrices determinan los autoestados de masa d_i y u_i, los cuales son una combinación lineal de los correspondientes autoestados débiles d'_i y u'_i. La matriz de masa M'_d se puede descomponer, como el producto de una matriz hermítica positiva, y una matriz unitaria, que se denominarán H_d y U_d respectivamente, asi:

$$M'_d = H_d U_d \tag{1.50}$$

Ahora, ya que H_d es una matriz hermítica positiva, esta se puede diagonalizar a través de una matriz unitaria (a la que se denominará S_d), asi: $M_d = S_d H_d S_d^\dagger$ donde M_d corresponde a una matriz diagonal, hermítica y positiva.

De lo anterior se tiene que M'_d se puede escribir en términos de la matriz diagonal, así:

$$M'_d = H_d U_d = S_d^\dagger M_d S_d U_d, \tag{1.51}$$

En forma similar se tiene:

$$M'_u = H_u U_u = S_u^\dagger M_u S_u U_u \tag{1.52}$$

Donde $M_d = Diag(m_d, m_s, m_b)$, $M_u = Diag(m_u, m_c, m_t)$.

Así los autoestados de masa se relacionan con los autoestados débiles por:

$$\begin{aligned} d_L &\equiv S_d d'_L \\ d_R &\equiv S_d U_d d'_R \end{aligned} \tag{1.53}$$

Ya que $\bar{f}'_L f'_L = \bar{f}_L f_L$ y $\bar{f}'_R f'_R = \bar{f}_R f_R$, $(f = d, u, l)$ la expresión para corrientes neutras no cambia cuando pasamos de los autoestados débiles a los autoestados de masa; así mismo no existe corrientes que cambien sabor a nivel del árbol en el modelo estándar (Mecanismo Gim).
Por otra parte, en el sector de la corriente débil de los quarks se tiene:

$$\bar{u}'_L d'_l = \bar{u}_L S_u S_d^\dagger d_L \equiv \bar{u}_L V_{CKM} d_L \tag{1.54}$$

En general $S_u \neq S_d$; así, si se escriben los autoestados débiles en términos de los autoestados de masa, aparece una matriz de mezcla unitaria V_{CKM} en las corrientes cargadas de los quarks la cual se conoce como la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. La matriz V_{CKM} acopla cualquier quark tipo Up con todos los quarks tipo down. Los elementos de la matriz V_{ij} se han determinado experimentalmente, observando que la matriz V es aproximadamente unitaria y generándose a partir de estos datos parametrizaciones diferentes a dicha matriz.

Ahora bien, aunque el modelo estándar ha logrado explicar satisfactoriamente la mayoría de las observaciones experimentales, sin embargo tiene deficiencias en lograr explicar varias evidencias a nivel teórico y experimental, entre estas encontramos: A nivel teórico uno de los problemas más notorios que presenta el modelo, radica en la falta de explicación del espectro de masa de los fermiones fundamentales (quarks y leptones). De igual forma, la evidencia experimental muestra que la matriz de mezcla de los quarks es aproximadamente diagonal y las evidencias recientes de oscilaciones de neutrinos, son algunos de los hechos al que el modelo estándar no puede dar explicación. Por otra parte, la partícula Higgs que es una partícula esencial en el modelo estándar, a la fecha no se ha encontrado.

Son estas entre otras, las razones por las cuales el modelo estándar, se considera un modelo incompleto, aceptándose únicamente como una teoría efectiva a bajas energías. Lo anterior ha abierto un gran campo de estudio en la búsqueda de extensiones al modelo estándar, que logren explicar en parte las deficiencias que este modelo presenta.

2 EL MODELO GENERAL DE DOS DOBLETES HIGGS

En el capítulo anterior se menciona que el Modelo Estándar es considerado como una teoría de campos efectiva a bajas energías, debido a que no da explicación a varios problemas. Para solventar en parte estas dificultades se han buscado extenciones del Modelo Estándar; adicionando nuevos campos fermiónicos, ampliando el grupo gauge local o incrementando el sector escalar.

En ésta última dirección existe una clase de modelos generales que tienen un sector escalar con dos dobletes Higgs conservando la simetría gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. En su versión mas simple es asumido que el contenido fermiónico de tal modelo es el mismo como en el Modelo Estándar. Lo mismo se tiene para los bosones gauge, así evitando introducir nuevas interacciones fundamentales.

Dicho modelo se lo denomina Modelo General de Dos Dobletes Higgs (MDDH); el cual es la extención más simple del Modelo Estándar. El nuevo doblete Higgs complejo es una replica del primero con los mismos números cuánticos; así los dos dobletes se denotan como:

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

con $i = 1, 2$, por consiguiente se tiene ocho grados de libertad escalares reales. La lagrangiana más general invariante bajo el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, para el modelo general de dos dobletes Higgs puede ser escrita como:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{MDDH}} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{\mathcal{YUK}} + \mathcal{L}' \tag{2.2}$$

donde la lagrangiana asociada a los bosones Higgs es dada por:

$$\mathcal{L}_\varphi = \sum_{i=1,2} (D_\mu \varphi_i)^\dagger (D^\mu \varphi_i) - V(\varphi_1, \varphi_2) \tag{2.3}$$

con la derivada covariante:

$$D_\mu = \partial_\mu + igW_\mu^a T_a + ig' B_\mu Y \tag{2.4}$$

donde $T_a = \tau_a/2$, los τ_a, con $(a = 1, 2, 3)$, son las matrices de Pauli, que corresponden a los generadores del grupo $SU(2)_L$ de isospín débil. Se asume que ambos dobletes tienen hipercarga $y = 1/2$. En $\mathcal{L}_{\mathcal{YUK}}$, se encuentran los términos de interacción de Yukawa de los campos Higgs con los fermiones y finalmente, $\mathcal{L}'$ contiene los términos de la lagrangiana sin campos Higgs. No se especificará $\mathcal{L}_{\mathcal{YUK}}$ y $\mathcal{L}'$, ya que ellos no son objeto de nuestro análisis. El potencial Higgs V en el MDDH será discutido extensivamente.

El potencial más general $V(\varphi_1, \varphi_2)$ invariante gauge y renormalizable para los dos dobletes Higgs φ_1 y φ_2 es una combinación lineal hermítica de los siguientes términos:

$$\varphi_i^\dagger \varphi_j, \qquad (\varphi_i^\dagger \varphi_j)(\varphi_k^\dagger \varphi_l) \tag{2.5}$$

donde $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. Es conveniente discutir las propiedades del potencial tal como su estabilidad y el rompimiento espontáneo de simetría en términos de expreciones invariantes gauge. Para esta propuesta se arregla los productos escalares invariantes bajo el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ dentro de una matriz $\underline{K}$ hermítica 2×2.

$$\underline{K} = \phi(x)\phi(x)^\dagger = \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_1^0(x) \\ \varphi_2^+(x) & \varphi_2^0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_2^+(x) \\ \varphi_1^0(x) & \varphi_2^0(x) \end{pmatrix}^*$$

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

y considerando su descomposición:

$$\underline{K_{ij}} = 1/2(K_0 \delta_{ij} + K_a \sigma_{ij}^a) \tag{2.7}$$

donde $\sigma^a (a = 1, 2, 3)$ son las matrices de Pauli. Los cuatro coeficientes reales definidos por la descomposición (2.7) son dados por:

$$K_0 = \varphi_i^\dagger \varphi_i, \qquad K_a = (\varphi_i^\dagger \varphi_j)\sigma_{ij}^a, \qquad (a = 1, 2, 3) \tag{2.8}$$

adoptando el convenio de sumación de índices repetidos de Einstein. Usando la inversión de (2.8) se tiene:

$$\begin{aligned} \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \underline{K_{11}} = (K_0 + K_3)/2, & \varphi_1^\dagger \varphi_2 &= \underline{K_{21}} = (K_1 + iK_2)/2, \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \underline{K_{22}} = (K_0 - K_3)/2, & \varphi_2^\dagger \varphi_1 &= \underline{K_{12}} = (K_1 - iK_2)/2, \end{aligned} \tag{2.9}$$

Para escribir el potencial de Higgs mas general renormalizable compatible con la invarianza gauge, es conveniente introducir una base de operadores invariantes gauge hermíticos[1],

$$\begin{aligned} &\hat{A} = \varphi_1^\dagger \varphi_1 \qquad \hat{B} = \varphi_2^\dagger \varphi_2 \qquad \hat{C} = 1/2(\varphi_1^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_1) = \mathrm{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) \\ &\hat{D} = -i/2(\varphi_1^\dagger \varphi_2 - \varphi_2^\dagger \varphi_1) = \mathrm{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) \end{aligned} \tag{2.10}$$

escribiendo bajo todas las posibles interacciones bilineares y cuárticas compatibles con

[1] R. A. Diaz, "Phenomenological Analysis of the Two-Higgs-Doublet Model",Ph.D. thesis, arXiv:hep-ph/0212237.

la invarianza gauge se tiene,

$$\begin{aligned} V(\varphi_1,\varphi_2) = & -\mu_1^2\hat{A} - \mu_2^2\hat{B} - \mu_3^2\hat{C} - \mu_4^2\hat{D} + \lambda_1\hat{A}^2 + \lambda_2\hat{B}^2 + \lambda_3\hat{C}^2 + \lambda_4\hat{D}^2 + \lambda_5\hat{A}\hat{B} \\ & + \lambda_6\hat{A}\hat{C} + \lambda_7\hat{A}\hat{D} + \lambda_8\hat{B}\hat{C} + \lambda_9\hat{B}\hat{D} + \lambda_{10}\hat{C}\hat{D}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Utilizando las ecuaciones (2.9) y (2.10) en (2.11), el potencial V se puede escribir en términos de:

$$V(\varphi_1,\varphi_2) = V_2 + V_4 \tag{2.12}$$

donde V_2 y V_4 corresponden a los términos cuadráticos y cuárticos de los campos respectivamente.

El término V_2 viene dado por:

$$\begin{aligned} V_2 &= 1/2((-\mu_1^2 - \mu_2^2)K_0 - \mu_3^2 K_1 - \mu_4^2 K_2 + (\mu_2^2 - \mu_1^2)K_3) \\ V_2 &= \xi_0 K_0 + \xi_1 K_1 + \xi_2 K_2 + \xi_3 K_3 = \xi_0 K_0 + \xi_a K_a \end{aligned} \tag{2.13}$$

y V_4 por:

$$\begin{aligned} V_4 = & \, 1/4(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_5)K_0^2 + (1/4)\lambda_3 K_1^2 + (1/4)\lambda_4 K_2^2 + 1/4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_5)K_3^2 \\ & + 1/2(\lambda_1 - \lambda_2)K_0 K_3 + 1/4(\lambda_7 + \lambda_9)K_0 K_2 + 1/4(\lambda_6 + \lambda_8)K_0 K_1 \\ & + 1/4(\lambda_7 - \lambda_9)K_3 K_2 + 1/4(\lambda_6 - \lambda_8)K_3 K_1 + (1/4)\lambda_{10} K_2 K_1 \end{aligned}$$

Reorganizando, V_4 se puede escribir como:

$$V_4 = \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b \tag{2.14}$$

donde los 14 parámetros independientes ξ_0, ξ_a, η_{00}, η_a y $\eta_{ab} = \eta_{ba}$ son reales.

Ahora definiendo,

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ K_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \eta_{13} \\ \eta_{12} & \eta_{22} & \eta_{23} \\ \eta_{13} & \eta_{23} & \eta_{33} \end{pmatrix},$$

el potencial V nos queda:

$$V = \xi_0 K_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K} + \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{K} + \mathbf{K}^T E \mathbf{K} \tag{2.15}$$

Ahora se considera un cámbio de base de lo campos Higgs $\varphi_i \to \varphi_i'$, donde:

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

Aquí,

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}, \qquad U^\dagger U = I \tag{2.17}$$

Con (2.16), las funciones invariantes gauge (2.8), transforman como sigue;

$$\begin{aligned} K_0 = \varphi_i^\dagger \varphi_i \to K_0' = \varphi_i'^\dagger \varphi_i' = (U\varphi_i)^\dagger (U\varphi_i) = K_0 \\ K_a = (\varphi_i^\dagger \varphi_j)\sigma_{ij}^a \to K_a' = (\varphi_i'^\dagger \varphi_j')\sigma_{ij}'^a = R_{ab} K_b \end{aligned} \tag{2.18}$$

donde $R_{ab}(U)$ es definido por;

$$U^\dagger \sigma^a U = R_{ab}(U)\sigma^b \tag{2.19}$$

La matriz $R(U)$ tiene las propiedades:

$$R(U)^* = R(U), \qquad R^T(U)R(U) = I, \qquad \det R(U) = 1 \tag{2.20}$$

donde I denota la matriz unidad de 3×3, es decir $R(U) \in SO(3)$.

La forma del potencial de Higgs permanece invariante bajo el remplazo de (2.18), si se ejecuta una apropiada transformación a los parámetros:

$$\begin{aligned} &\xi_0' = \xi, \qquad \eta_{00}' = \eta_{00}, \qquad E' = R(U)ER^T(U), \\ &\boldsymbol{\xi'} = R(U)\boldsymbol{\xi}, \quad \boldsymbol{\eta} = R(U)\boldsymbol{\eta}, \end{aligned} \tag{2.21}$$

Se puede por consiguiente diagonalizar E, de ese modo reduciendo 3 parámetros al potencial V. El potencial de Higgs es luego determinado por solamente 11 parámetros reales.

La matriz $\underline{K}$ (2.6) es positiva semidefinida [2], con $K_0 = \operatorname{tr} \underline{K}$ y $K_0^2 - \mathbf{K}^2 = 4 \det \underline{K}$; lo cual implica;

$$K_0 \geq 0, \qquad K_0^2 - \mathbf{K}^2 \geq 0 \tag{2.22}$$

Por otro lado, para cualquier $K_0, \mathbf{K}$ cumpliendo (2.22), es posible encontrar diferentes campos φ_i obedeciendo (2.8). Además, todos los campos obedeciendo (2.8) para un dado $K_0, \mathbf{K}$ forma una órbita gauge.[3] Así las funciones K_0, K_a parametrizan las órbitas gauge y no hay una única configuración de campos Higgs. Específicamente el dominio de las funciones K_0, K_a correspondiendo a órbitas gauge permiten discutír el potencial directamente en la forma (2.15) con todos los grados de libertad gauge eliminados. Es curioso notar que las órbitas gauge de los campos Higgs del MDDH son parametrizadas por el cuadri-vector $(K_0, \mathbf{K})$ tipo Minkowski que esta situado sobre o en el interior del cono de luz.

[2]Una matriz $\underline{K}$ es positiva semidefinida si cumple $Y^\dagger \underline{K} Y \geq 0$ para todo vector $Y \neq 0$

[3]Anexo B

En los siguientes capítulos se derivarán límites sobre los parámetros del potencial que resulta de las condiciones impuestas por la estabilidad del potencial escalar y del rompimiento espontáneo de la símetria del grupo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ a $U(1)_{EM}$.

Según el capítulo anterior, se puede analizar las propiedades del potencial (2.15) como una función de K_0 y $\mathbf{K}$ sobre el domínio determinado por $K_0 \geq 0$ y $K_0^2 \geq \mathbf{K}^2$. Evidentemente se tiene $K_0 = 0$ solo para $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, lo cual conduce a la solución trivial $V = 0$.

Para $K_0 > 0$, definimos:

$$\boldsymbol{k} := \mathbf{K}/K_0 \tag{3.1}$$

y de (2.15) y (3.1) se obtiene:

$$V = V_2 + V_4 = K_0(J_2(\boldsymbol{k}) + K_0 J_4(\boldsymbol{k})) \tag{3.2}$$

donde hemos separado términos cuadráticos de cuárticos con:

$$V_2 = K_0 J_2(\boldsymbol{k}), \qquad J_2(\boldsymbol{k}) = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{k} \tag{3.3}$$

$$V_4 = K_0^2 J_4(\boldsymbol{k}), \qquad J_4(\boldsymbol{k}) = \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}^T E \boldsymbol{k} \tag{3.4}$$

donde se introduce las funciones $J_2(\boldsymbol{k})$ y $J_4(\boldsymbol{k})$ sobre el dominio $|\boldsymbol{k}| \leq 1$.

Haciendo una analogía al potencial escalar del Modelo Estándar (1.23), μ y λ corresponderían a las funciones $J_2(\boldsymbol{k})$ y $J_4(\boldsymbol{k})$ respectivamente en el dominio $|\boldsymbol{k}| \leq 1$. Por lo tanto la estabilidad del potencial V esta determinada por el comportamiento de las funciones $J_4(\boldsymbol{k})$ (3.4) y $J_2(\boldsymbol{k})$ (3.3).

La estabilidad del potencial es garantizada por:

$$J_4(\boldsymbol{k}) = 0 \qquad \text{y} \qquad J_2(\boldsymbol{k}) > 0 \tag{3.5}$$

para todo $|\boldsymbol{k}| \leq 1$ en un sentido débil y

$$J_4(\boldsymbol{k}) > 0 \tag{3.6}$$

en un sentido fuerte.[1]

En el primer caso, es decir $V_2 \neq 0$ y $V_4 = 0$, la condición para garantizar la estabilidad del potencial es:

$$\xi_0 > |\boldsymbol{\xi}| \tag{3.7}$$

[1]Garantizar la estabilidad del potencial significa que el potencial tenga un mínimo correspondiente al estado de mínima energía; y la diferencia de estabilidad en sentido fuerte y débil corresponde a que las ramas o los brazos de la parábola que se obtiene al graficar $V(K_0)$ son más separadas entre si en sentido débil que para el sentido fuerte.

ya que esta conduce a $J_2(\boldsymbol{k}) > 0$,

$$J_2(\boldsymbol{k}) = |\boldsymbol{\xi}|\big(\frac{\xi_0}{|\boldsymbol{\xi}|} + |\boldsymbol{k}|\cos\theta\big) > 0 \tag{3.8}$$

para todo $|\boldsymbol{k}| \leq 1$.

Ahora si el potencial presenta términos cúarticos $V_4 \neq 0$, las condiciones para la estabilidad del potencial no son tan directas como en el sentido débil, ya que $J_4(\boldsymbol{k})$ involucra mas parámetros. Para asegurar que $J_4(\boldsymbol{k})$ sea positiva y garantizar la estabilidad en sentido fuerte es suficiente considerar su valor para todos los puntos estacionarios de $J_4(\boldsymbol{k})$ sobre el dominio $|\boldsymbol{k}| < 1$, y para todos los puntos estacionarios sobre la frontera $|\boldsymbol{k}| = 1$. Esto conduce a limitar η_{00}, η_a y η_{ab}, los cuales parametrizan el término cuártico V_4 del potencial.

Entonces, para $|\boldsymbol{k}| < 1$ los puntos estacionarios de $J_4(\boldsymbol{k})$ deben cumplir;

$$E\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{\eta} \qquad \text{con} \qquad |\boldsymbol{k}| < 1 \tag{3.9}$$

Si el $\det E \neq 0$, se obtiene explícitamnete:

$$J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta} \qquad \text{si} \qquad 1 - \boldsymbol{\eta}^T E^{-2}\boldsymbol{\eta} > 0, \tag{3.10}$$

donde la desigualdad se obtiene de la condición $|\boldsymbol{k}| < 1$. Si el $\det E = 0$, pueden existír una o más soluciones “excepcionales” $\boldsymbol{k}$ de (3.9). Ellas igualmente tienen que estar en el interior del dominio $|\boldsymbol{k}| < 1$.

Por otro lado, para $|\boldsymbol{k}| = 1$ se debe encontrar los puntos estacionarios de la función;

$$F_4(\boldsymbol{k}, u) := J_4(\boldsymbol{k}) + u(1 - \boldsymbol{k}^2), \tag{3.11}$$

donde u es un multiplicador de Lagrange. Estos puntos son dados por;

$$(E - u)\boldsymbol{k} = -\boldsymbol{\eta} \qquad \text{con} \qquad |\boldsymbol{k}| = 1 \tag{3.12}$$

Para valores regulares de u tales que $\det(E - u) \neq 0$ los puntos estacionarios son dados por;

$$\boldsymbol{k}(u) = -(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta}, \tag{3.13}$$

y el multiplicador de Lagrange es determinado de la codición $\boldsymbol{k}^T\boldsymbol{k} = 1$ utilizando (3.13);

$$1 - \boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-2}\boldsymbol{\eta} = 0 \tag{3.14}$$

Así luego se obtiene:

$$J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta}, \tag{3.15}$$

donde u es una solución de (3.14). También para $|\boldsymbol{k}| = 1$, dependiendo de los parámetros η_a y η_{ab} pueden haber soluciones excepcionales $\boldsymbol{k}$ de (3.12) donde el $\det(E-u) = 0$, es decir donde u sea el autovalor de E.

Para simplificar lo anteriormente mencionado, las soluciones regulares para los casos $|\boldsymbol{k}| < 1$ y $|\boldsymbol{k}| = 1$ pueden ser descritas por una función solamente, asi:

Considerando (3.11) y (3.13) se define:

$$f(u) := F_4(\boldsymbol{k}(u), u), \tag{3.16}$$

con $\boldsymbol{k}(u)$ como en (3.13). Esto conduce a;

$$f(u) = u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T (E-u)^{-1} \boldsymbol{\eta} \tag{3.17}$$
$$f'(u) = 1 - \boldsymbol{\eta}^T (E-u)^{-2} \boldsymbol{\eta} \tag{3.18}$$

Así para todos los puntos estacionarios regulares $\boldsymbol{k}$ de $J_4(\boldsymbol{k})$ se tiene;

$$f(u) = J_4(\boldsymbol{k})|_{est} \tag{3.19}$$
$$f'(u) = 1 - \boldsymbol{k}^2 \tag{3.20}$$

donde se escoge $u = 0$ para la solución con $|\boldsymbol{k}| < 1$.

Hay puntos estacionarios de $J_4(\boldsymbol{k})$ con $|\boldsymbol{k}| < 1$ si $f'(0) > 0$ y con $|\boldsymbol{k}| = 1$ si $f'(u) = 0$, y el valor de $J_4(\boldsymbol{k})|_{est}$ esta dado por $f(u)$.

En una base donde $E = diag(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$ se obtiene;

$$f(u) = u + \eta_{00} - \sum_{a=1}^{3} \frac{\eta_a^2}{\mu_a - u} \tag{3.21}$$

$$f'(u) = 1 - \sum_{a=1}^{3} \frac{\eta_a^2}{(\mu_a - u)^2} \tag{3.22}$$

donde se observa que la derivada $f'(u)$ tiene por lo menos 6 ceros. Note que no hay soluciones excepcionales si en esta base todas las tres componentes de $\boldsymbol{\eta}$ son diferentes de cero.
Además la función $f(u)$ dada por (3.17), también permite discutir las soluciones excepcionales de (3.9) y (3.12). Para esto, se considera primero el caso $|\boldsymbol{k}| < 1$, y se supone que el $\det E = 0$. En la base donde E es diagonal se tiene;

$$\det E = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0 \tag{3.23}$$

y (3.9) indica;

$$\begin{aligned} \mu_1 k_1 &= -\eta_1 \\ \mu_2 k_2 &= -\eta_2 \\ \mu_3 k_3 &= -\eta_3 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Claramente, una solución de (3.24) es solamente posible si para $\mu_a = 0$ también $\eta_a = 0$ $(a = 1, 2, 3)$. Por consiguiente, se mira desde (3.21) que las soluciones excepcionales con $|\boldsymbol{k}| < 1$ son solamente posibles si $f(u)$ permanece finito en $u = 0$. Es decir, el polo al cual correspondería $\mu_a = 0$ debe tener residuo cero.

Como un ejemplo se considera $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y $\eta_1 = \eta_2 = 0$, pero $\mu_3 \neq 0$. Luego se obtiene la solución general de (3.24) como;

$$k_3 = -\frac{\eta_3}{\mu_3} \tag{3.25}$$

con k_1 y k_2 arbitrarios, pero satisfaciendo:

$$\boldsymbol{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\eta_3}{\mu_3}\right)^2 < 1 \tag{3.26}$$

$\boldsymbol{k}$ y $\boldsymbol{\eta}$ pueden ser expresados como;

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_\parallel + \boldsymbol{k}_\perp \tag{3.27}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\parallel + \boldsymbol{\eta}_\perp \tag{3.28}$$

con,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{k}_\parallel = -\frac{1}{\mu_3}\boldsymbol{\eta}_\parallel, \qquad E\boldsymbol{k}_\perp = 0 \\ &\boldsymbol{k}^2 = \boldsymbol{k}_\parallel^2 + \boldsymbol{k}_\perp^2 < 1 \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{k}_\perp^2 < 1 - \boldsymbol{k}_\parallel^2 = 1 - \left(\frac{\eta_3}{\mu_3}\right)^2 \end{aligned} \tag{3.29}$$

donde $\boldsymbol{k}_\parallel$ corresponde a los soluciones regulares y $\boldsymbol{k}_\perp$ a las soluciones excepcionales de $J_4(\boldsymbol{k})$ con $|\boldsymbol{k}| < 1$. Para las funciones (3.21), (3.22), se obtiene para este caso;

$$f(u) = u + \eta_{00} - \frac{\eta_3^2}{\mu_3 - u} \tag{3.30}$$

$$f'(u) = 1 - \frac{\eta_3^2}{(\mu_3 - u)^2} \tag{3.31}$$

Insertando la solución desde (3.27) a (3.29) en $J_4(\boldsymbol{k})$ se obtiene;

$$\begin{aligned} J_4(\boldsymbol{k})|_{est} &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}^T E\boldsymbol{k} \\ &= \eta_{00} + 2(\boldsymbol{\eta}_\perp + \boldsymbol{\eta}_\parallel)^T(\boldsymbol{k}_\perp + \boldsymbol{k}_\parallel) + (\boldsymbol{k}_\perp^T + \boldsymbol{k}_\parallel^T)E(\boldsymbol{k}_\perp + \boldsymbol{k}_\parallel) \\ &= f(0) \end{aligned} \tag{3.32}$$

$$f'(0) = 1 - \boldsymbol{k}_\parallel^2 > \boldsymbol{k}_\perp^2 \geq 0 \tag{3.33}$$

Claramente estos argumentos se trabajan similarmente, si solamente uno de los μ_a es igual a cero o todos tres μ_a son cero. En todos los casos (3.32) se mantiene para los puntos excepcionales con $|\boldsymbol{k}| < 1$, los cuales pueden existir solamente si $f(u)$ no tiene polo en $u = 0$. Además, ya que (3.32) involucra solamente cantidades "escalares", esto se mantiene en cualquier base.

Así las funciones $f(u)$ y $f'(u)$ permiten describir además de las soluciones regulares, las soluciones excepcionales de $J_4(\boldsymbol{k})$ en el interior del dominio $|\boldsymbol{k}| < 1$

El caso de soluciones excepcionales con $|\boldsymbol{k}| = 1$ puede ser tratado en forma análoga. Una solución excepcional de (3.12) con $u = \mu_a (a = 1, 2, 3)$ puede solamente existir si el correspondiente $\eta_a = 0$. Luego $f(u)$ no tiene polo para $u = \mu_a$.

Denotando:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_\parallel + \boldsymbol{k}_\perp, \tag{3.34}$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_\parallel + \boldsymbol{\eta}_\perp \tag{3.35}$$

con,

$$\boldsymbol{k}_\parallel = -(E-u)^{-1}\boldsymbol{\eta}_\parallel|_{u=\mu_a}, \qquad (E-\mu_a)\boldsymbol{k}_\perp = 0 \tag{3.36}$$

donde igualmente como en el caso anterior $\boldsymbol{k}_\parallel$ y $\boldsymbol{k}_\perp$ corresponden a las soluciones regulares y excepcionales respectivamente de $J_4(\boldsymbol{k})$, en la frontera del dominio $|\boldsymbol{k}| = 1$.

Insertando (3.34), (3.36) en $J_4(\boldsymbol{k})$ se obtiene:

$$f(\mu_a) = J_4(\boldsymbol{k})|_{est} \tag{3.37}$$

$$f'(\mu_a) = 1 - \boldsymbol{k}_\parallel^2 = \boldsymbol{k}_\perp^2 \geq 0 \tag{3.38}$$

Note que si una solución excepcional es posible, $\boldsymbol{k}_\perp$ debe ser cualquier combinación lineal de los autovectores con autovalor μ_a de E, donde la norma es dada por $|\boldsymbol{k}_\perp| = \sqrt{f'(\mu_a)}$.

Por consiguiente las funciones $f(u)$ y $f'(u)$ permiten describir soluciones regulares y excepcionales de $J_4(\boldsymbol{k})$ en la frontera del dominio $|\boldsymbol{k}| = 1$.

Así se observa que la función $f(u)$ es muy útil para discutír la estabilidad del potencial del MDDH. Todo lo discutido hasta ahora puede ser formulado como sigue:

Definimos un intervalo I como:

$$I = (u_1, ..., u_n); \tag{3.39}$$

se incluye en I todo u donde $f'(u) = 0$, el cual determina los puntos estacionarios regulares de $J_4(\boldsymbol{k})$ sobre la frontera $|\boldsymbol{k}| = 1$; se adiciona $u = 0$ a I si $f'(0) > 0$, el cual determina los puntos estacionarios regulares y excepcionales en el interior del dominio $|\boldsymbol{k}| < 1$. Se considera luego los autovalores $\mu_a (a = 1, 2, 3)$ de E y se adiciona aquellos μ_a a I donde $f(\mu_a)$ es finita y $f'(\mu_a) \geq 0$ para incluir las soluciones excepcionales en la frontera del dominio. Así se tiene $n \leq 10$.

Los valores de la función $J_4(\boldsymbol{k})$ en sus puntos estacionarios son dados por:

$$J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = f(u_i), \qquad u_i \in I \tag{3.40}$$

El punto estacionario de $J_4(\boldsymbol{k})$ correspondiente al multiplicador de Lagrange $u_i \in I$ mas pequeño, producirá el valor mas pequeño de $J_4(\boldsymbol{k})$ en el dominio $|\boldsymbol{k}| \leq 1$. Para mostrar esto se considera dos puntos estacionarios $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ con multiplicadores de Lagrange u_p y u_q respectivamente, con $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}| = 1$ (se considera después el caso $u_p = 0$, $|\boldsymbol{p}| < 1$). Ambos $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ deben satisfacer;

$$(E - u_p)\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{\eta}, \qquad (E - u_q)\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\eta} \tag{3.41}$$

En estos dos puntos estacionarios, $J_4(\boldsymbol{k})$ toma el valor;

$$J_4(\boldsymbol{p}) = \eta_{00} + u_p + \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{p}, \tag{3.42}$$

$$J_4(\boldsymbol{q}) = \eta_{00} + u_q + \boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{q}, \tag{3.43}$$

donde se ha usado las ecuaciones (3.17), (3.19) y (3.41). Restando las ecuaciones (3.42) y (3.43) se tiene;

$$J_4(\boldsymbol{p}) - J_4(\boldsymbol{q}) = u_p - u_q + \boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}). \tag{3.44}$$

Ahora, recalcando que $(E - u_p)^T = E - u_p$, se transpone (3.41),

$$\boldsymbol{p}^T(E - u_p) = -\boldsymbol{\eta}^T, \qquad \boldsymbol{q}^T(E - u_q) = -\boldsymbol{\eta}^T. \tag{3.45}$$

Multiplicando por q y p, se tiene;

$$\boldsymbol{p}^T(E - u_p)\boldsymbol{q} = -\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{q}, \tag{3.46}$$

$$\boldsymbol{q}^T(E - u_q)\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{\eta}^T\boldsymbol{p} \tag{3.47}$$

Restando las ecuaciones (3.46) y (3.47) se obtiene,

$$(u_q - u_p)\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\eta}^T(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) \tag{3.48}$$

Remplazando (3.48) en (3.44), se obtiene finalmente;

$$\begin{aligned} J_4(\boldsymbol{p}) - J_4(\boldsymbol{q}) &= u_p - u_q + (u_q - u_p)\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} \\ &= (u_q - u_p)(1 - \boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q}) \end{aligned} \tag{3.49}$$

donde $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta = \cos\theta < 1$[2]. El $\cos\theta$ no puede ser igual a 1, porque $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$ no pueden ser paralelos. Si se asume que ellos son paralelos, la ecuación (3.41) conduce a;

$$(u_p - u_q)\boldsymbol{p} = 0, \qquad \text{entonces} \qquad u_p = u_q, \tag{3.50}$$

[2] Si $|\boldsymbol{p}| < 1$, entonces $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{q} = |\boldsymbol{p}||\boldsymbol{q}|\cos\theta < 1$

pero se ha asumido $u_p \neq u_q$. Así, en todos los casos se tendría:

$$(1 - \boldsymbol{p}^T \boldsymbol{q}) > 0. \tag{3.51}$$

De la ecuación (3.49), se concluye finalmente:

$$u_p < u_q \Longleftrightarrow J_4(\boldsymbol{p}) < J_4(\boldsymbol{q}). \tag{3.52}$$

Así el mínimo global de la función $J_4(\boldsymbol{k})$, en el dominio $|\boldsymbol{k}| \leq 1$ corresponde al punto estacionario con multiplicador de Lagrange $u_i \in I$ mas pequeño.

Sea u_i el valor más pequeño del intervalo I; por consiguiente, el potencial es estable si $f(u_i) > 0$. El potencial es inestable si $f(u_i) < 0$. Si $f(u_i) = 0$, se tiene que considerar en adición $J_2(\boldsymbol{k})$ para decidir la estabilidad del potencial.

Para este último caso se mostrará que se tiene entonces que considerar además la función,

$$g(u) := \xi_0 - \boldsymbol{\xi}^T (E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta} \tag{3.53}$$

para el punto estacionario de $J_4(\boldsymbol{k})$ con,

$$J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = f(u_i) = 0 \tag{3.54}$$

Se tiene para los vectores $\boldsymbol{k}$ satisfaciendo (3.54)

$$J_2(\boldsymbol{k}) = g(u_i) \tag{3.55}$$

si $u_i \neq \mu_a$, es decir u_i no es un autovalor de E. Si u_i es un autovalor de E, es decir $u_i = \mu_a$, y $\boldsymbol{e}_l(u_i)(l = 1, ..., N)$ son los $N \leq 3$ autovectores para u_i, entonces se tiene;

$$\inf_{\boldsymbol{k}} J_2(\boldsymbol{k}) = g(u_i) + |\boldsymbol{\xi}_\perp(u_i)| \sqrt{f'(u_i)}, \tag{3.56}$$

donde el infimun es tomado sobre todas las soluciones excepcionales $\boldsymbol{k}$ para u_i, y

$$\boldsymbol{\xi}_\perp(u_i) := \sum_{l=1}^{N} \frac{\boldsymbol{\xi} \boldsymbol{e}_l(u_i)}{|\boldsymbol{e}_l(u_i)|^2} \boldsymbol{e}_l(u_i) \tag{3.57}$$

Asi la estabilidad del potencial esta garantizada si $g(u_i) > 0$ con $u_i \neq \mu_a$ y $g(u_i) + |\boldsymbol{\xi}_\perp(u_i)| \sqrt{f'(u_i)} > 0$ con $u_i = \mu_a$.

Resumiendo los resultados obtenidos:

El potencial más general del modelo general de dos dobletes Higgs tiene la forma (2.15). Su estabilidad es determinada en la siguiente forma; si el potencial solamente tiene el término cuadrático V_2, es estable para $\xi_0 > |\boldsymbol{\xi}|$, e inestable para $\xi_0 < |\boldsymbol{\xi}|$ en un sentido débil. Se supone ahora que $V_4 \neq 0$; se construye luego las funciones $f(u)$ (3.17), $f'(u)$

(3.18), $g(u)$ (3.53), y el conjunto I (3.39) de valores de u (por lo menos 10). Sea u_i el valor mas pequeño del intervalo I, entonces se tiene:

Si $f(u_i) > 0$ el potencial es estable en sentido fuerte (3.6).

Si $f(u_i) < 0$ el potencial es inestable.

Si $f(u_i) = 0$ se considera la función $g(u)$ evaluada en u_i (3.53). El potencial es estable en el sentido débil (3.5) si se mantiene (mirar (3.55) a (3.57))

$$g(u_i) > 0 \qquad si \qquad u_i \neq \mu_a \tag{3.58}$$

$$g(u_i) + |\boldsymbol{\xi}_\perp(u_i)|\sqrt{f'(u_i)} > 0 \qquad si \qquad u_i = \mu_a \tag{3.59}$$

Si en álguna de las dos ecuaciones (3.58),(3.59) se tiene menor que cero, en vez de mayor que cero se tiene un potencial inestable.

Este teorema da una completa caracterización de las propiedades de estabilidad del potencial general del MDDH.

4 LOCALIZACIÓN DE PUNTOS ESTACIONARIOS

Despúes del análisis de estabilidad en el capítulo anterior se determina ahora la localización de los puntos estacionarios del potencial, ya que entre estos puntos esta localizado el mínimo local y global. Para este fín se define:

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{pmatrix} K_0 \\ \boldsymbol{K} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{\xi}} = \begin{pmatrix} \xi_o \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{E} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \boldsymbol{\eta}^T \\ \boldsymbol{\eta} & E \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

En esta notación el potencial (2.15) queda:

$$V = \tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{E} \tilde{\boldsymbol{k}} \tag{4.2}$$

y es definido sobre el dominio:

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{K}} \geq 0, \qquad K_0 \geq 0 \tag{4.3}$$

con

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

Para la discusión de los puntos estacionarios de V, se distinguen primero los casos permitidos $\tilde{\boldsymbol{K}} = 0$, $K_0 > |\boldsymbol{K}|$ y $K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0$. La configuración trivial $\tilde{\boldsymbol{K}} = 0$ es un punto estacionario del potencial con $V = 0$, como una consecuencia directa de las definiciones.

Los puntos estacionarios de V en la parte interna del dominio $K_0 > |\boldsymbol{K}|$, son dados por;

$$\tilde{E} \tilde{\boldsymbol{K}} = -\frac{1}{2} \tilde{\boldsymbol{\xi}} \qquad \text{con} \qquad \tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{K}} > 0 \qquad \text{y} \qquad K_0 > 0. \tag{4.5}$$

Para $\det \tilde{E} \neq 0$ se obtiene la solución única:

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = -\frac{1}{2} \tilde{E}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\xi}}, \tag{4.6}$$

siempre que,

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{E}^{-1} \tilde{g} \tilde{E}^{-1} \tilde{\boldsymbol{\xi}} > 0 \qquad \text{y} \qquad K_0 > 0, \tag{4.7}$$

y no hay solución sí (4.7) no se mantiene. La matríz Hessiana,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial K_i \partial K_j} V \right) = 2\tilde{E}, \qquad \text{donde} \qquad i, j = 0 \ldots 3, \tag{4.8}$$

determina si (4.6) es un mínimo local, un máximo local o un punto de silla. En el caso $\det \tilde{E} = 0$ se debe tener soluciones excepcionales de (4.5). En el caso regular, también en los casos excepcionales, la existencia de una solución de (4.5) junto con los correspondientes valores del potencial no son aféctados por la transformación de parámetros (2.21).

Los puntos estacionarios de V sobre la frontera del dominio $K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0$ son puntos estacionarios de la función:

$$\tilde{F}(\tilde{\boldsymbol{K}}, u) := V - u\tilde{K}^T \tilde{g} \tilde{K}, \tag{4.9}$$

donde u es el multiplicador de Lagrange. Estos puntos son dados por:

$$(\tilde{E} - u\tilde{g})\tilde{\boldsymbol{K}} = -\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \qquad \text{con} \qquad \tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{K}} = 0 \qquad \text{y} \qquad K_0 > 0. \tag{4.10}$$

Para valores regulares de u con $\det(\tilde{E} - u\tilde{g}) \neq 0$ se obtiene:

$$\tilde{\boldsymbol{K}}(u) = -\frac{1}{2}(\tilde{E} - u\tilde{g})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}}. \tag{4.11}$$

El multiplicador de Lagrange es determinado de las condiciones de (4.10) remplazando (4.11):

$$\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T (\tilde{E} - u\tilde{g})^{-1} \tilde{g} (\tilde{E} - u\tilde{g})^{-1} \tilde{\boldsymbol{\xi}} = 0 \qquad \text{y} \qquad K_0 > 0 \tag{4.12}$$

Deben haber hasta 4 valores $u = \tilde{\mu}_a$ con $a = 1 \ldots 4$ para el cual el $\det(\tilde{E} - u\tilde{g}) = 0$. Dependiendo del potencial, algunos o todos de ellos deben conducir a soluciones excepcionales de (4.10). Se observa que para los casos regulares y excepcionales, los multiplicadores de Lagrange u correspondiendo a soluciones $\tilde{\boldsymbol{K}}$ de (4.10), son invariantes bajo las transformaciones (2.21).

Para cualquier punto estacionario el potencial viene dado por;

$$V|_{est} = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{\boldsymbol{\xi}} = -\tilde{\boldsymbol{K}}^T \tilde{E} \tilde{\boldsymbol{K}}. \tag{4.13}$$

Se supone ahora que la condición de estabilidad fuerte (3.6) se mantiene. Luego (4.13) entrega para puntos estacionarios no triviales donde $\tilde{\boldsymbol{K}} \neq 0$:

$$V|_{est} < 0 \tag{4.14}$$

ya que los casos $V_4 < 0$ y $V_4 = 0$ son excluidos por la condición de estabilidad. Similarmente como en el análisis de estabilidad en el capítulo anterior, se puede usar una descripción unificada para los puntos estacionarios regulares de V con $K_0 > 0$ para $|\boldsymbol{K}| < K_0$ y $|\boldsymbol{K}| = K_0$ definiendo la función:

$$\tilde{f}(u) := F(\tilde{\boldsymbol{K}}(u), u) \tag{4.15}$$

donde $\tilde{\boldsymbol{K}}(u)$ es la solución de (4.11); entonces;

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(u) &= -\frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \frac{1}{4}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{E}(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \\
&\quad - \frac{1}{4}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}u\tilde{g}(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \\
\tilde{f}(u) &= -\frac{1}{4}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}}, \qquad (4.16) \\
\tilde{f}'(u) &= -\frac{1}{4}\tilde{\boldsymbol{\xi}}^T(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{g}(\tilde{E}-u\tilde{g})^{-1}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

Denotando la primera componente de $\tilde{K}(u)$ como $K_0(u)$ se resume todo lo anterior en lo siguiente:

Los puntos estacionarios del potencial son dados por:

I) $\tilde{\boldsymbol{K}} = \tilde{\boldsymbol{K}}(0)$, *si* $\tilde{f}'(0) < 0, K_0(0) > 0$ *y el* $\det \tilde{E} \neq 0$.

II) Soluciones $\tilde{\boldsymbol{K}}$ *de (4.5) si el* $\det \tilde{E} = 0$

III) $\tilde{\boldsymbol{K}} = \tilde{\boldsymbol{K}}(u)$, *para* u *con* $\det(\tilde{E}-u\tilde{g}) \neq 0$, $\tilde{f}'(u) = 0$ *y* $K_0(u) > 0$.

IV) Soluciones $\tilde{\boldsymbol{K}}$ *de (4.10) para* u *con* $\det(\tilde{E}-u\tilde{g}) = 0$.

V) $\tilde{\boldsymbol{K}} = 0$.

El mínimo global estará entre los puntos estacionarios discutidos en el capítulo anterior. Aquí se discúte las características del rompimiento espontáneo de la simetría y se da un criterio para asegurar un mínimo global con el rompimiento de simetría electrodébil requerido $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{EM}$.

Un mínimo global en $\tilde{\boldsymbol{K}} = 0$ significa ausencia de campos para el vacío. En este caso, la simetría no es espontánemente rota. Si el mínimo global esta situado en $\tilde{\boldsymbol{K}} \neq 0$, el grupo gauge completo o un subgrupo es roto.

Se denota los valores esperados del vacío, es decir, los campos en el mínimo global del potencial V por:

$$v_i^+ := \langle \varphi_i^+ \rangle, \qquad v_i^0 := \langle \varphi_i^0 \rangle \tag{5.1}$$

con $i = 1, 2$. En general los v_i^+, v_i^0 son números complejos. Para mostrar las consecuencias de la invarianza gauge electromagnética se considera la matriz (2.6) en el mínimo global, $\underline{K}|_{min}$. Si el mínimo global de V ocurre con $K_0 > |\boldsymbol{K}|$, entonces el $\det \underline{K}|_{min} = \frac{1}{4}(K_0^2 - \boldsymbol{K}^2)|_{min} > 0$.

Ahora, ya que se tiene;

$$\det \underline{K} = (\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) - (\varphi_2^\dagger \varphi_1)(\varphi_1^\dagger \varphi_2), \qquad \text{con} \qquad \varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix}$$

$$\det \underline{K}|_{min} = |\ v_1^+ v_2^0 - v_1^0 v_2^+|^2 > 0, \tag{5.2}$$

los vectores:

$$\begin{pmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

son linealmente independientes. Por consiguiente no hay transformación (2.16) tal que v_1^+ y v_2^+ lleguen ha ser cero. Esto significa que el grupo completo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es roto.

En el caso que el mínimo global de V caracterizado en $K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0$, el rango de la matríz $\underline{K}|_{min}$ es 1 y los vectores (5.3) son linealmente dependientes. Después de ejecutar una transformación $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se tiene:

$$\begin{pmatrix} v_1^+ \\ v_2^+ \end{pmatrix} = 0 \tag{5.4}$$

$$\begin{pmatrix} v_1^0 \\ v_2^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |v_1^0| \\ |v_2^0| e^{i\zeta} \end{pmatrix} \neq 0 \qquad \zeta \in R \tag{5.5}$$

se identifica entonces el grupo no roto como el grupo $U(1)$ electromagnético. Para una transformación (2.16),

$$\begin{pmatrix} \varphi_1' \\ \varphi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta e^{-i\zeta} \\ -\sin\beta e^{i\zeta} & \cos\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

con β cumpliendo $|v_1^0|\sin\beta = |v_2^0|\cos\beta$, se puede arreglar que;

$$\begin{pmatrix} v_1'^{+} \\ v_2'^{+} \end{pmatrix} = 0 \tag{5.7}$$

$$\begin{pmatrix} v_1'^{0} \\ v_2'^{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_0/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_0 > 0 \tag{5.8}$$

para los valores esperados del vacío en la nueva base. En al ecuación (5.8) v_0 es el valor esperado del vacío del campo Higgs usual, $v_0 \approx 246$ GeV.

Por consiguiente el rompimiento de simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{EM}$ debe ser considerado en la frontera del dominio $K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0$, lo cual conlleva a realizar transformaciones sobre los valores esperados del vacío, reduciendo así a un solo valor esperado correspondiente al valor esperado del vacío del campo Higgs que se trabaja en el Modelo Estándar.

Ahora se quiere derivar condiciones para los parámetros en el potencial general (2.15), las cuales conducen al requerido rompimiento de simetría electrodébil por un mínimo global con $K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0$. En lo que sigue se asume que el potencial es estable. Si se considera parámetros cumpliendo $\xi_0 > |\boldsymbol{\xi}|$ esto inmediatamente ímplica $J_2(\boldsymbol{k}) > 0$ y por consiguiente $V > 0$ para todo $\tilde{\boldsymbol{K}} \neq 0$. Por lo tanto para estos parámetros el mínimo global esta en $\tilde{\boldsymbol{K}} = 0$. Así se llega a exigir;

$$\xi_0 < |\boldsymbol{\xi}|. \tag{5.9}$$

Aquí se obtiene:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial K_0}\right|_{\substack{\boldsymbol{k}\ \text{fijo} \\ K_0=0}} = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T\boldsymbol{k} = J_2(\boldsymbol{k}) < 0 \tag{5.10}$$

para algún $\boldsymbol{k}$, es decir el mínimo global de V está situado en $\tilde{\boldsymbol{K}} \neq 0$. Por consiguiente el grupo o subgrupo gauge es roto como se había dicho inicialmente. Ya que se está considerando en la frontera del dominio $K_0 = |\boldsymbol{K}| > 0$, un grupo gauge no se rompe, correspondiente al grupo $U(1)_{EM}$.

Debido a que los puntos estacionarios en la frontera del dominio tienen multiplicadores de Lagrange $u \neq 0$ los campos Higgs son masivos después del rompimiento de simetría electrodébil; ya que el cuadrado de la masa de los campos Higgs (6.20) está expresado en términos del multiplicador de Lagrange como se mirará en el capítulo siguiente.

Así por lo tanto se encuentra para una teoría aceptable:

$$u_0 > 0 \tag{5.11}$$

para el multiplicador de Lagrange correspondiente al punto estacionario donde V exhibe el mínimo global en la frontera del dominio $K_0 = |\boldsymbol{K}|$. Además u_0 debe ser el multiplicador de Lagrange mas grande que cualquier otro multiplicador sobre la frontera y el interior del dominio como se demuestra en lo siguiente:

Sea

$$\tilde{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} p_0 \\ \boldsymbol{p} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{q}} = \begin{pmatrix} q_0 \\ \boldsymbol{q} \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

dos puntos estacionarios de V con $p_O \geq |\boldsymbol{p}|$ y $q_0 \geq |\boldsymbol{q}|$. Es decir que cada uno de ellos es una solución de (4.5), o ambos con un apropiado multiplicador de Lagrange u_p o u_q para $\tilde{\boldsymbol{p}}$ o $\tilde{\boldsymbol{q}}$, respectivamente, una solución de (4.10).

En primer lugar se considera para $p_0 = |\boldsymbol{p}|$ y $q_0 = |\boldsymbol{q}|$. De (4.13) y (4.10) se tiene:

$$\begin{aligned} V(\tilde{\boldsymbol{p}}) - V(\tilde{\boldsymbol{q}}) &= \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{p}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}} - \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{q}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ &= \tilde{\boldsymbol{p}}^T(u_q\tilde{g} - \tilde{E})\tilde{\boldsymbol{q}} - \tilde{\boldsymbol{q}}^T(u_p\tilde{g} - \tilde{E})\tilde{\boldsymbol{p}} \\ &= (u_q - u_p)\tilde{\boldsymbol{p}}^T\tilde{g}\tilde{\boldsymbol{q}}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Ya que $\tilde{\boldsymbol{p}}$ y $\tilde{\boldsymbol{q}}$ son valores sobre el cono de luz (hacia el futuro), $\tilde{\boldsymbol{p}}^T\tilde{g}\tilde{\boldsymbol{q}}^T$ es siempre no negativo y cero solamente para $\tilde{\boldsymbol{p}}$ paralelo a $\tilde{\boldsymbol{q}}$. Además, el caso que dos diferentes $\tilde{\boldsymbol{p}}$,$\tilde{\boldsymbol{q}}$ sean paralelos no puede ocurrir: si se asume que ellos son paralelos conduce a $u_q = u_p$, pero se ha asumido inicialmente que $u_q \neq u_p$ para este caso.

Por lo tanto se concluye:

$$u_p > u_q \qquad \Longleftrightarrow \qquad V(\tilde{\boldsymbol{p}}) < V(\tilde{\boldsymbol{q}}) \tag{5.14}$$

El valor del potencial evaluado en un punto estacionario sobre la frontera del dominio correspondiente al multiplicador de Lagrange mas grande es el mas pequeño que el potencial evaluado en otro punto estacionario cualquiera sobre la frontera.

En segundo lugar, para $p_0 = |\boldsymbol{p}|$ y $q_0 > |\boldsymbol{q}|$ se obtiene desde (4.13) y (4.5):

$$V(\tilde{\boldsymbol{p}}) - V(\tilde{\boldsymbol{q}}) = -u_p \tilde{\boldsymbol{p}}^T \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{q}} \tag{5.15}$$

Esta ecuación implica, que un punto estacionario sobre la frontera del dominio con multiplicador de Lagrange positivo tiene un potencial más bajo que en cualquier punto estacionario con $K_0 > \boldsymbol{K}$.

Estos resultados se resumen como sigue;

Un mínimo global con el rompimiento de simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{EM}$ y en ausencia de campos Higgs físicos cargados de masa cero,

I) requiere $\xi_0 < |\boldsymbol{\xi}|$,

II) es dada y garantizada por el punto estacionario sobre la frontera del dominio con el multiplicador de Lagrange más grande $u_0 > 0$.

Se asume un potencial estable el cual conduce al rompimiento de simetría deseado como se discutió en los capítulos anteriores y ahora se deriva las consecuencias para los campos físicos resultantes. Se escoge un gauge unitario y la base para los campos escalares tal que las relaciones para los valores esperados del vacío (5.7) y (5.8) se mantienen, y además los campos satisfacen;

$$\varphi_1^+(x) = 0 \tag{6.1}$$

$$\mathrm{Im}\varphi_1^0(x) = 0 \tag{6.2}$$

$$\mathrm{Re}\varphi_1^0(x) \geq 0 \tag{6.3}$$

Se introduce como lo usual un campo Higgs cambiado;

$$\rho'(x) := \sqrt{2}\mathrm{Re}\varphi_1^0(x) - v_0 \tag{6.4}$$

Luego los dos dobletes Higgs son;

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 + \rho'(x) \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2(x) = \begin{pmatrix} \varphi_2^+(x) \\ \varphi_2^0(x) \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

En adición a ρ' hay 2 mas campos neutrales Higgs;

$$h' := \sqrt{2}\mathrm{Re}\varphi_2^0, \qquad h'' := \sqrt{2}\mathrm{Im}\varphi_2^0 \tag{6.6}$$

y los campos cargados

$$H^+ := \varphi_2^+, \qquad H^- := (H^+)^*. \tag{6.7}$$

Es conveniente descomponer $\tilde{\boldsymbol{K}}$ de acuerdo al orden de potencia de los campos físicos;

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}}, \tag{6.8}$$

con;

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} = \begin{pmatrix} v_0^2/2 \\ 0 \\ 0 \\ v_0^2/2 \end{pmatrix}, \qquad \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} = v_0 \begin{pmatrix} \rho' \\ h_0' \\ h_0'' \\ \rho' \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \rho'^2 + 2H_-H_+ + h'^2 + h''^2 \\ 2\rho' h' \\ 2\rho' h'' \\ \rho'^2 - 2H_-H_+ - h'^2 - h''^2 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Por u_0 se denota de nuevo el multiplicador de lagrange correspondiente al mínimo global de V. Desde (4.10) se tiene:

$$\tilde{E}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} = u_0 \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} - \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{\xi}} \tag{6.11}$$

Desde las expresiones explícitas (6.9) y (6.10) se tiene además;

$$\tilde{\boldsymbol{K}}^T_{\{0\}} \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} = 0, \qquad \tilde{\boldsymbol{K}}^T_{\{0\}} \tilde{g} \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} = 0 \tag{6.12}$$

Usando (6.8) a (6.12) se obtiene para el potencial (4.2);

$$V = V_{\{0\}} + V_{\{2\}} + V_{\{3\}} + V_{\{4\}} \tag{6.13}$$

donde $V_{\{k\}}$ son los términos de k^{th} órden en los campos Higgs físicos;

$$\begin{aligned} V = \tilde{\boldsymbol{K}}^T\tilde{\boldsymbol{\xi}} + \tilde{\boldsymbol{K}}^T\tilde{E}\tilde{\boldsymbol{K}} &= (\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}})^T\tilde{\boldsymbol{\xi}} \\ &+ (\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}})^T\tilde{E}(\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{0\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} + \tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}}) \end{aligned}$$

remplazando y operando finalmente nos queda;

$$V_{\{0\}} = (\xi_0 + \xi_3)v_0^2/4, \tag{6.14}$$

$$V_{\{2\}} = \tilde{\boldsymbol{K}}^T_{\{1\}}\tilde{E}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{1\}} + 2u_0\tilde{\boldsymbol{K}}^T_{\{0\}}\tilde{g}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}}, \tag{6.15}$$

$$V_{\{3\}} = 2\tilde{\boldsymbol{K}}^T_{\{1\}}\tilde{E}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}}, \tag{6.16}$$

$$V_{\{4\}} = \tilde{\boldsymbol{K}}^T_{\{2\}}\tilde{E}\tilde{\boldsymbol{K}}_{\{2\}}. \tag{6.17}$$

Los términos de segundo órden de (6.15) determinan las masas de los campos Higgs físicos:

$$V_{\{2\}} = \frac{1}{2}(\rho', h', h'')\boldsymbol{M}^2_{neutral}\begin{pmatrix}\rho' \\ h' \\ h''\end{pmatrix} + m^2_{H^\pm}H^+H^- \tag{6.18}$$

con

$$\boldsymbol{M}^2_{neutral} = 2\begin{pmatrix} -\xi_0 - \xi_3 & -\xi_1 & -\xi_2 \\ -\xi_1 & v_0^2(u_0 + \eta_{11}) & v_0^2\eta_{12} \\ \xi_2 & v_0^2\eta_{12} & v_0^2(u_0 + \eta_{22}) \end{pmatrix}, \tag{6.19}$$

$$m^2_{H^\pm} = 2u_0v_0^2. \tag{6.20}$$

Note que la condición $u_0 > 0$ corresponde a la positividad de la masa cuadrada de los Higgs cargados a nivel del árbol. Este resultado fué ya mencionado en el capítulo anterior.

Generalmente los términos de masa (6.18) contienen 7 parámetros reales. Desde (6.19) y (6.20) se mira que todos los 7 parámetros son en general independientes en este modelo.

7 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un método formal para el análisis del potencial del MDDH general. El método permite determinar condiciones para la estabilidad del potencial y el rompimiento de simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{EM}$, ya que para el potencial que incluyen más de un doblete Higgs, la caracterización de estabilidad y rompimiento es cada vez más complicada, debido al número de parámetros que aumenta en el potencial.

La estabilidad del potencial general del MDDH es determinada de la siguiente forma:

Si el potencial presenta únicamente términos cuadráticos, es decir $V_2 \neq 0$ y $V_4 = 0$, es estable en sentido débil si:

$$\xi_0 > |\boldsymbol{\xi}|$$

Si el potencial presenta términos cúarticos $V_4 \neq 0$, se construye las funciones $f(u)$ (3.17), $f'(u)$ (3.18), $g(u)$ (3.53), y el conjunto I (3.39) de valores de u. Identificando u_i como el multiplicador de Lagrange mas pequeño del intervalo I , se obtiene:

$$f(u_i) > 0$$

para un potencial estable en sentido fuerte, y

$$f(u_i) < 0$$

para un potencial inestable en sentido fuerte.

Si $f(u_i) = 0$ $(f(u_i) = J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = 0)$, el potencial es estable si:

$$\begin{aligned} g(u_i) > 0 &\qquad \text{si} \qquad u_i \neq \mu_a \\ g(u_i) + |\boldsymbol{\xi}_\perp(u_i)|\sqrt{f'(u_i)} > 0 &\qquad \text{si} \qquad u_i = \mu_a \end{aligned}$$

en un sentido débil. Si en alguna de las dos ecuaciones anteriores se tiene menor que cero el potencial es inestable débilmente.

Las condiciones para garantizar el rompimiento de simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{EM}$ por un mínimo global de V son:

$\xi_0 < |\boldsymbol{\xi}|$.

$u_0 > 0$ para el multiplicador de Lagrange más grande correspondiente al punto estacionario en la frontera del dominio donde ocurre el mínimo global.

Una importante conclusión de este estudio es de que las condiciones impuestas para la estabilidad y rompimiento, aseguran masas positivas para los campos escalares.

8 RECOMENDACIONES

El método presentado en este trabajo puede ser extendido a modelos generales con múltiples dobletes Higgs. Un primer paso en esta dirección es hecha en el Anexo C. Además también puede ser extendido a modelos con dos o más tripletes escalares (Modelos 3-3-1).

BIBLIOGRAFIA

DIAZ R. A. “PHENOMENOLOGICAL ANALYSIS OF THE TWO-HIGGS-DOUBLET MODEL”, Ph.D. thesis, arXiv:hep-ph/0212237.

GINZBURG, I. F.“SYMMETRIES OF 2HDM, DIFFERENT VACUA, CP VIOLATION AND POSSIBLE RELATION TO A HISTORY OF TIME”, arXiv:hep-ph/0512102.

GUNION, F. et al,“THE HIGGS HUNTER’S GUIDE”, SCIPP-89/13, Addison- Wesley (1990); “Errata for the Higgs Hunter’s Guide”, arXiv:hep-ph/9302272.

HERRERA, J. A. “FENOMENOLOGIA DE UN MODELO $SU(3)_C SU(3)_L U(1)_Y$”. Trabajo de Grado (Magáster en Física), Universidad de Antioquia, 2008.

MANIATIS, M. et al. “STABILITY AND SYMMETRY BREAKING IN THE GENERAL TWO-HIGGS-DOUBLET MODEL” Institut für Theoretische Physik, Philosophenweg 16, 69120 Heidelberg, Germany.

MARTIN, P. “A SUPERSYMMETRY PRIMER”, arXiv:hep-ph/9709356.

MORII, T. et al. “THE PHYSICS OF THE STANDARD MODEL AND BEYONG”. 2003

PICH, A. “THE STANDARD MODEL OF ELECTROWEAK INTERACTIONS”; arXiv:hep-ph/0502010v1, 1 Feb 2005.

RYDER, H. Lewis. “QUANTUM FIELD THEORY”, 2nd ed. University of Cambridge, 1996.

ANEXOS

Anexo A. Ejemplos En este anexo se aplican los resultados obtenidos a dos modelos específicos.

ESTABILIDAD PARA EL POTENCIAL DEL MDDH PROPUESTO POR GUNION

Se considera el potencial de Higgs para el MDDH con la parametrización de Gunion[1]:

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) &= \lambda_1(\varphi_1^\dagger\varphi_1 - v_1^2)^2 + \lambda_2(\varphi_2^\dagger\varphi_2 - v_2^2)^2 \\ &+ \lambda_3(\varphi_1^\dagger\varphi_1 - v_1^2 + \varphi_2^\dagger\varphi_2 - v_2^2)^2 \\ &+ \lambda_4((\varphi_1^\dagger\varphi_1)(\varphi_2^\dagger\varphi_2) - (\varphi_1^\dagger\varphi_2)(\varphi_2^\dagger\varphi_1)) \\ &+ \lambda_5(\mathrm{Re}(\varphi_1^\dagger\varphi_2) - v_1v_2\cos\xi)^2 \\ &+ \lambda_6(\mathrm{Im}(\varphi_1^\dagger\varphi_2) - v_1v_2\sin\xi)^2 \\ &+ \lambda_7(\mathrm{Re}(\varphi_1^\dagger\varphi_2) - v_1v_2\cos\xi)(\mathrm{Im}(\varphi_1^\dagger\varphi_2) - v_1v_2\sin\xi), \end{aligned} \tag{A1}$$

el cual contiene 10 parámetros libres. Este potencial rompe la simetría discreta

$$\varphi_1 \to -\varphi_1, \qquad \varphi_2 \to \varphi_2 \tag{A2}$$

solo ligeramente, es decir por los términos V_2.

Colocando el potencial en la forma (2.15) usando las relaciones (2.9). Se tiene:

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) &= \lambda_1\left(\frac{K_0+K_3}{2} - v_1^2\right)^2 + \lambda_2\left(\frac{K_0-K_3}{2} - v_2^2\right)^2 \\ &+ \lambda_3\left(\frac{K_0+K_3}{2} - v_1^2 + \frac{K_0-K_3}{2} - v_2^2\right)^2 \\ &+ \lambda_4\left((\frac{K_0+K_3}{2})(\frac{K_0-K_3}{2}) - (\frac{K_1+iK_2}{2})(\frac{K_1-iK_2}{2})\right) \\ &+ \lambda_5\left(\frac{K_1}{2} - v_1v_2\cos\xi\right)^2 \\ &+ \lambda_6\left(\frac{K_2}{2} - v_1v_2\sin\xi\right)^2 \\ &+ \lambda_7\left(\frac{K_1}{2} - v_1v_2\cos\xi\right)\left(\frac{K_2}{2} - v_1v_2\sin\xi\right), \end{aligned}$$

[1] F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane and S. Dawson,"The Higgs Hunter's Guide", SCIPP-89/13, Addison-Wesley (1990); "Errata for the Higgs Hunter's Guide",arXiv:hep-ph/9302272

Operando y órdenando se tiene para los parámetros de V_4:

$$\begin{aligned}
\eta_{00} &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4), \\
\boldsymbol{\eta} &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}, \\
E &= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2(\lambda_5 - \lambda_4) & \lambda_7 & 0 \\ \lambda_7 & 2(\lambda_6 - \lambda_4) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A3}$$

y para V_2 se tiene;

$$\begin{aligned}
\xi_0 &= -\lambda_1 v_1^2 - \lambda_2 v_2^2 - 2\lambda_3(v_1^2 + v_2^2), \\
\boldsymbol{\xi} &= \begin{pmatrix} -v_1 v_2(\lambda_5 \cos\xi + \frac{\lambda_7}{2}\sin\xi) \\ -v_1 v_2(\lambda_6 \sin\xi + \frac{\lambda_7}{2}\cos\xi) \\ -\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A4}$$

Desde (3.17) y (3.18) se obtiene;

$$\begin{aligned}
f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) \\
&\quad - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)},
\end{aligned} \tag{A5}$$

$$f'(u) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)^2}. \tag{A6}$$

Para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, las soluciones de $f'(u) = 0$, las cuales determinan los puntos estacionarios de $J_4(\boldsymbol{k})$ sobre la frontera $|\boldsymbol{k}| = 1$, conduce a los multiplicadores de Lagrange;

$$u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_4), \qquad u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_4), \tag{A7}$$

se debe adicionar los valores,

$$u_3 = 0, \quad u_4 = \frac{1}{4}(\text{ķ} - \lambda_4), \quad \text{con} \quad \text{ķ} = \frac{1}{2}\left(\lambda_5 + \lambda_6 \pm \sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + \lambda_7^2}\right), \tag{A8}$$

los cuales corresponden al punto estacionario en el interior del dominio $|\boldsymbol{k}| < 1$ y la solución excepcional, respectivamente. Por consiguiente se tiene el conjunto:

$$I = \left\{u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_4), u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_4), u_3 = 0, u_4 = \frac{1}{4}(\text{ķ} - \lambda_4)\right\} \tag{A9}$$

este conjunto contiene todas las posibles soluciones validas. Entre las soluciones, el valor más pequeño corresponde al mínimo global de $J_4(\boldsymbol{k})$.

Ahora consideremos las diferentes posibilidades:

1. $u_1 < u_2, u_3, u_4$, es decir, el mínimo global ocurre en u_1. Para tener un potencial estable se impone la condición:

$$f(u_1) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_2 + \lambda_3 > 0 \tag{A10}$$

2. $u_2 < u_1, u_3, u_4$, en este caso la condición de estabilidad conduce a:

$$f(u_2) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 + \lambda_3 > 0 \tag{A11}$$

3. $u_3 < u_1, u_2, u_4$, $(u_3 = 0)$, una solución valida requiere un valor positivo para la función (A6). Verificando se tiene;

$$f'(0) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)^2} = \frac{16u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2} > 0 \tag{A12}$$

   Imponiendo la condición de estabilidad:

$$\begin{aligned} f(0) &= \frac{1}{4}\left(\frac{-(\lambda_4 + 2\lambda_3)^2 + 4(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)}{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{-(\lambda_4 + 2\lambda_3)^2 + 4(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_3)}{2(u_1 + u_2)}\right) > 0 \end{aligned} \tag{A13}$$

   donde $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 = 2(u_1 + u_2) > 0$, se obtiene:

$$\lambda_4 < -2\lambda_3 \pm \sqrt{(\lambda_3 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_1)} \tag{A14}$$

4. $u_4 < u_3, u_1, u_2$ una vez mas $f'(u_4)$ debe ser positiva. Ya que cada uno de los factores $(u_1 - u_4)$, $(u_2 - u_4)$, $(u_1 + u_2 - 2u_4)$, son positivos;

$$f'(u_4) = \frac{4(u_1 - u_4)(u_2 - u_4)}{(u_1 + u_2 - 2u_4)^2} \tag{A15}$$

   La condición de estabilidad produce:

$$f(u_4) = \frac{-(\text{ķ} + 2\lambda_3)^2 + 4(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}{8(u_1 + u_2 - 2u_4)} > 0 \tag{A16}$$

   entonces,

$$\text{ķ} < -2\lambda_3 \pm 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \tag{A17}$$

Por consiguiente las condiciones suficientes (pero no necesarias), para garantizar la estabilidad del potencial para todos los valores posibles de los parámetros, incluyendo el caso especial $\lambda_1 = \lambda_2$ son:

$$
\begin{aligned}
&\lambda_2 + \lambda_3 > 0, \qquad \lambda_1 + \lambda_3 > 0, \\
&\lambda_4, k_5 < -2\lambda_3 \pm 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}
\end{aligned}
\tag{A18}
$$

donde las dos primeras desigualdades son también condiciones necesarias.

Note que el potencial (A1) exhibe un mínimo global en,

$$
\varphi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \qquad \varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 e^{i\xi} \end{pmatrix} \tag{A19}
$$

si todos $\lambda_i > 0$ como una condición suficiente (pero no necesaria). Sin embargo no se descarta la posibilidad de valores negativos para alguno de ellos ya que las condiciones necesarias son, $\lambda_2 + \lambda_3 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_3 > 0$.

ESTABILIDAD DEL POTENCIAL DE HIGGS DEL MODELO MÍNIMO SUPERSIMETRICO (MSSM)

En esta sección se considera el potencial de Higgs del MSSM y se reproduce los resultados conocidos para su estabilidad, rompimiento de simetría y espectro de masa[2], empleando el método descrito en los capítulos anteriores.

El potencial de Higgs del MSSM es:

$$
V = V_D + V_F + V_{soft} \tag{A20}
$$

con

$$
\begin{aligned}
V_D &= \frac{1}{8}(g^2 + g'^2)(H_1^\dagger H_1 - H_2^\dagger H_2)^2 + \frac{1}{2} g^2 |H_1^\dagger H_2|^2, \\
V_F &= |\mu^2|(H_1^\dagger H_1 + H_2^\dagger H_2), \\
V_{dbil} &= m_{H_1}^2 H_1^\dagger H_1 + m_{H_2}^2 H_2^\dagger H_2 - (m_3^2 H_1^T \varepsilon H_2 + h.c.),
\end{aligned}
\tag{A21}
$$

donde H_1 y H_2 son dobletes Higgs con hipercargas débiles $y = -1/2$ y $y = +1/2$, respectivamente, $m_{H_1}^2$ y $m_{H_2}^2 \in R$, $m_3^2 \in C$ y $|\mu^2| \in R^+$ son parámetros de dimensión de masa al cuadrado.

[2] P. Martin, "A Supersymmetry Primer", arXiv:hep-ph/9709356.

Sustituyendo H_1 y H_2 por dobletes φ_1, φ_2 con la misma hipercarga $y = +1/2$ de acuerdo con:

$$\varphi_1^\alpha = -\varepsilon_{\alpha\beta}(H_1^\beta)^*, \qquad \varphi_2^\alpha = H_2^\alpha \tag{8.1}$$

donde ε es dado por:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{8.2}$$

y usando las relaciones (2.9), se puede colocar el potencial en la forma (2.15). Los parámetros son:

$$\eta_{00} = \frac{1}{8}g^2, \qquad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad E = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -g^2 & 0 & 0 \\ 0 & -g^2 & 0 \\ 0 & 0 & g'^2 \end{pmatrix} \tag{A22}$$

para $V_4 = V_D$ y

$$\xi_0 = |\mu^2| + \frac{1}{2}(m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2), \qquad \boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} -\mathrm{Re}(m_3^2) \\ \mathrm{Im}(m_3^2) \\ \frac{1}{2}(m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2) \end{pmatrix} \tag{A23}$$

para $V_2 = V_F + V_{dbil}$.

Se determina la estabilidad del potencial empleando los resultados del capítulo 3. Las funciones $f(u)$ (3.17) y $f'(u)$ (3.18) para el MSSM son:

$$f(u) = u + \frac{1}{8}g^2, \tag{A24}$$

$$f'(u) = 1. \tag{A25}$$

El conjunto I (3.39) es dado para este caso por $u = 0$ y los autovalores de E (A22),

$$I = \left\{ u_1 = 0, u_2 = -\frac{1}{8}g^2, u_3 = \frac{1}{8}g'^2 \right\} \tag{A26}$$

Se encuentra para los puntos estacionarios de J_4 con $u_i = u_1, u_3$ los valores $J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = f(u_i) > 0$, pero para aquellos con u_2 el valor de $J_4(\boldsymbol{k})|_{est} = f(u_2) = 0$. Explícitamente, los puntos estacionarios de J_4 con u_2 son:

$$\boldsymbol{k} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)^T, \quad \phi \in R, \quad \text{con} \quad J_4(\boldsymbol{k}) = 0 \tag{A27}$$

Para el MSSM, estos puntos estacionarios evitan la aserción de la estabilidad por los términos cuárticos. Para que la estabilidad sea garantizada por $V_2 > 0$, la ecuación (3.59) da como condición:

$$g(u_2) + |\boldsymbol{\xi}_\perp(u_2)|\sqrt{f'(u_2)} = \xi_0 + \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2} > 0. \tag{A28}$$

Insertando (A23), se obtiene:

$$|m_3^2| < |\mu|^2 + \frac{1}{2}(m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2). \tag{A29}$$

como la condición necesaria y suficiente para la estabilidad del potencial MSSM en sentido débil.

Para el mínimo global del potencial V no trivial la condición es $\xi_0 < \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2}$, o equivalentemente;

$$|\mu|^2 + \frac{1}{2}(m_{H_1}^2 + m_{H_2}^2) < \sqrt{|m_3^2|^2 + \frac{1}{4}(m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2)^2} \tag{A30}$$

como una condición necesaria y suficiente. Las condiciones (A29) y (A30) evitan soluciones excepcionales. Las relaciones regulares son determinadas por las funciones:

$$\tilde{f}(u) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{\frac{1}{8}g^2 - u} - \frac{\xi_3^2}{-\frac{1}{8}g'^2 - u}\right), \tag{A31}$$

$$\tilde{f}'(u) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}{(\frac{1}{8}g^2 - u)^2} - \frac{\xi_3^2}{(-\frac{1}{8}g'^2 - u)^2}\right), \tag{A32}$$

$$K_0(u) = -\frac{1}{2}\frac{\xi_0}{\frac{1}{8}g^2 - u}, \tag{A33}$$

Empleando las condiciones (A29) y (A30) se encuentra que la función $\tilde{f}'(u)$ siempre tiene dos ceros y estos implican valores de $K_0(u)$ con signos opuestos. La solución física con $K_0(u) > 0$ tiene multiplicador de Lagrange:

$$u_0 = \frac{1}{8}\frac{|\xi_3|g^2 + \sqrt{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\,g'^2}{|\xi_3| - \sqrt{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}}, \tag{A34}$$

el cual es positivo. Por consiguiente se concluye que (A29) y (A30) garantizan la existencia del punto estacionario $\tilde{\boldsymbol{K}}(u_0)$ donde ocurre el mínimo global de V con el rompimiento de simetría electrodébil requerido.

Se observa desde (A22) y (A23), que es siempre posible escoger una base con $\xi_1 = -|m_3^2|$, $\xi_2 = 0$ sin afectar algún otro parámetro. Ademés se escoge un gauge donde (5.4) y (5.5) se mantienen y se ejecuta la rotación (5.6) con,

$$\tan\beta = \sqrt{\frac{\xi_0|\xi_3| + \sqrt{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\xi_3}{\xi_0|\xi_3| - \sqrt{\xi_0^2 - \xi_1^2 - \xi_2^2}\xi_3}} \tag{A35}$$

en una base de la forma (5.7) y (5.8); donde $R(u)$ esta dado por:

$$R(u) = \begin{pmatrix} \cos 2\beta & 0 & -\sin 2\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin 2\beta & 0 & \cos 2\beta \end{pmatrix} \tag{A36}$$

los nuevos parámetros quedan:

$$\boldsymbol{\xi'} = \begin{pmatrix} -c_{2\beta}|m_3^2| - s_{2\beta}\frac{1}{2}(m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2) \\ 0 \\ -s_{2\beta}|m_3^2| + c_{2\beta}\frac{1}{2}(m_{H_1}^2 - m_{H_2}^2) \end{pmatrix}, \tag{A37}$$

$$E' = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -g^2 + s_{2\beta}^2\bar{g}^2 & 0 & -\frac{1}{2}s_{4\beta}\bar{g}^2 \\ 0 & -g^2 & 0 \\ -\frac{1}{2}s_{4\beta}\bar{g}^2 & 0 & -g^2 + c_{2\beta}^2\bar{g}^2 \end{pmatrix} \tag{A38}$$

con las abreviaciones $\bar{g}^2 := g^2 + g'^2$ y $s_{2\beta} = \sin 2\beta$, etc. Utilizando las expresiones del capítulo 6, la matriz de masa neutral queda en esta base;

$$\boldsymbol{M}'^2_{neutral} = 2\begin{pmatrix} -\xi_0' - \xi_3' & -\xi_1' & 0 \\ -\xi_1' & v_0^2(u_0 + \eta_{11}') & 0 \\ 0 & 0 & v_0^2(u_0 + \eta_{22}') \end{pmatrix}, \tag{A39}$$

y usando,

$$m_W^2 := (\frac{1}{2}gv_0)^2, \qquad m_Z^2 := (\frac{1}{2}\bar{g}v_0)^2, \tag{A40}$$

con $v_0 = \sqrt{2K_0(u_0)}$, se obtiene el cuadrado de las masas para el bosón $A_0 := h''$ y los bosones cargados $H^\pm$ los cuales son ya autoestados de masa,

$$m_{A^0}^2 = 2v_0^2(u_0 + \eta_{22}'), \qquad m_{H^\pm}^2 = m_{A^0}^2 + m_W^2 \tag{A41}$$

La parte no diagonal de la matriz de masa neutral es;

$$\boldsymbol{M}'^2_{neutral} = \begin{pmatrix} c^2_{2\beta} m^2_Z & -\frac{1}{2} s_{4\beta} m^2_Z \\ -\frac{1}{2} s_{4\beta} m^2_Z & m^2_{A^0} + s^2_{2\beta} m^2_Z \end{pmatrix} \tag{A42}$$

en la base (ρ, h'). Su diagonalización conduce a los cuadrados de masa,

$$m^2_{h^0,H^0} = \frac{1}{2}\left(m^2_{A^0} + m^2_Z \mp \sqrt{(m^2_{A^0} + m^2_Z)^2 - 4c^2_{2\beta} m^2_{A^0} m^2_Z} \right) \tag{A43}$$

para los autoestados de masa h^0, H^0. Ellos son obtenidos desde;

$$\begin{pmatrix} H^0 \\ h^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha' & \sin\alpha' \\ -\sin\alpha' & \cos\alpha' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho \\ h' \end{pmatrix}, \tag{A44}$$

con el ángulo de mezcla α' determinado por:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha' &= -\frac{m^2_{A^0} - c_{4\beta} m^2_Z}{m^2_{H^0} - m^2_{h^0}} \\ \sin 2\alpha' &= \frac{s_{4\beta} m^2_Z}{m^2_{H^0} - m^2_{h^0}} \end{aligned} \tag{A45}$$

Anexo B. Órbitas Gauge En esta apartado se da prueba que las órbitas de los campos Higgs de el MDDH son parametrizadas por cuatro vectores $(K_0, \boldsymbol{K})$ satisfaciendo (2.22), o equivalentemente, por matrices positivas semi-definidas $\underline{K}$ (2.6), (2.7).

Se considera dos dobletes Higgs como en (2.1)

$$\varphi^\alpha_i(x), \qquad i = 1, 2, \qquad \alpha = +, 0 \tag{B1}$$

se arregla estos en la matriz 2×2

$$\phi(x) := (\varphi^\alpha_i(x)) = \begin{pmatrix} \varphi^+_1(x) & \varphi^0_1(x) \\ \varphi^+_2(x) & \varphi^0_2(x) \end{pmatrix} \tag{B2}$$

Luego se tiene desde (2.6):

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x). \tag{B3}$$

El cambio de base (2.16) corresponde la transformación;

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U\phi(x). \tag{B4}$$

Una transformación gauge del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ corresponde;

$$\varphi_i^\alpha(x) \to \varphi_i'^\alpha(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta}\varphi_i^\beta(x), \tag{B5}$$

donde

$$U_G(x) \in U(2). \tag{B6}$$

Así, bajo una transformación gauge la matriz $\phi(x)$ se comporta como;

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x)U_G^T(x) \tag{B7}$$

Como se discutió en el capítulo 2, cualquier matriz $\underline{K}(x)$ formada de campos Higgs según (2.6), la cual es equivalente a (B3), debe ser positiva semidefinida. Recíprocamente, dada cualquier matriz positiva semidefinida $\underline{K}(x)$ se puede diagonalizarla por una transformación unitaria $W(x)$ de 2×2:

$$\begin{aligned} \underline{K}(x) =& W(x) \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 \\ 0 & k_2(x) \end{pmatrix} W^\dagger(x), \\ & W^\dagger(x)W(x) = I \end{aligned} \tag{B8}$$

Ya que se tiene $k_1(x) \geq 0$ y $k_2(x) \geq 0$ se puede colocar,

$$\phi(x) = W(x) \begin{pmatrix} \sqrt{k_1(x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{k_1(x)} \end{pmatrix} \tag{B9}$$

y se obtiene:

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x) \tag{B10}$$

Con esto se a probado lo siguiente:

Para cualquier matriz positiva semidefinida $\underline{K}(x)$ hay campos Higgs satisfaciendo (B3) respectivamente (2.6).

Ahora se supone que se tiene una matriz $\underline{K}(x)$ positiva semidefinida y dos matrices de campos Higgs $\phi(x), \phi'(x)$; ambos satisfaciendo (B3),

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x) = \phi'(x)\phi'^\dagger(x). \tag{B11}$$

Se quiere que mostrar $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ son luego relacionados por una transformación gauge (B7). Se considera tres casos:

I) $\underline{K}(x) = 0$. Luego $\phi(x) = \phi'(x) = 0$ y (B7) se cumple trivialmente.

II) $\underline{K}(x) > 0$, es decir $\underline{K}(x)$ es definida positiva. Luego

$$\det \underline{K}(x) = |\det \phi(x)|^2 = |\det \phi'(x)|^2 > 0 \tag{B12}$$

y ambos $\phi(x)$ y $\phi'(x)$ tienen una inversa. Se coloca,

$$\phi^{-1}(x)\phi'(x) = U_G^T(x) \tag{B13}$$

y se encuentra desde (B11)

$$U_G^\dagger(x)U_G(x) = I, \tag{B14}$$

es decir $U_G(x) \in U(2)$, y

$$\phi'(x) = \phi(x)U_G^T(x). \tag{B15}$$

Así $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ satisfacen (B7), ellos son relacionados por una transformación gauge.

III) $\underline{K}(x)$ tiene rango 1, es decir los autovalores son:

$$k_1(x) > 0, \qquad k_2(x) = 0. \tag{B16}$$

Con la matriz $W(x)$ diagonalizando $\underline{K}(x)$ (B8), se tiene luego desde (B11);

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} k_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= (W^\dagger(x)\phi(x))(W^\dagger(x)\phi(x))^\dagger \\ &= (W^\dagger(x)\phi'(x))(W^\dagger(x)\phi'(x))^\dagger \end{aligned} \tag{B17}$$

De lo anterior se observa que

$$\begin{aligned} W^\dagger(x)\phi(x) &= \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ W^\dagger(x)\phi'(x) &= \begin{pmatrix} \chi_1'^+(x) & \chi_1'^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{B18}$$

donde

$$\chi_1^\dagger(x)\chi_1(x) = \chi_1'^\dagger(x)\chi_1'(x) = k_1(x), \tag{B19}$$

con la composición de los vectores $\chi_i(x), \chi_i'(x)$ definidos igual como los vectores $\varphi_i(x)$. Por consiguiente se puede encontrar una matriz $U_G(x) \in U(2)$ tal que;

$$\chi_1'^\alpha(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta}\chi_1^\beta(x), \tag{B20}$$

lo cual implica

$$\begin{aligned} W(x)\phi'(x) &= W(x)\phi(x)U_G^T(x), \\ \phi'(x) &= \phi(x)U_G^T(x). \end{aligned} \tag{B21}$$

Es decir $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ son relacionados por una transformación gauge.

Resumiendo todo lo anterior;

Dos dobletes campos Higgs arbitrarios dando la misma matriz $\underline{K}(x)$ (2.6), respectivamente (B3), son relacionados por una transformación gauge. El espacio de órbitas gauge puede ser parametrizado por cuatro vectores $(K_0, \boldsymbol{K})$ estando situados sobre y en el interior del cono de luz hacia el futuro (2.22).

Se considera este anexo como una nota suplementaria al capítulo 5 sobre el rompimiento del grupo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. La matriz (B2) de los valores esperados del vacío es

$$\phi_{vac} = \begin{pmatrix} v_1^+ & v_1^0 \\ v_2^+ & v_2^0 \end{pmatrix} \tag{B22}$$

Si el mínimo global del potencial ocurre con $K_0 > |\boldsymbol{K}|$, la correspondiente matriz $\underline{K}(x)$ tiene rango 2. Luego desde (B3) y (B12) se observa también que ϕ_{vac} tiene rango 2.

La invarianza de ϕ_{vac} bajo una transformación gauge (B7)

$$\phi_{vac} = \phi_{vac} U_G^T \tag{B23}$$

es luego solamente posible para $U_G = I$. Es decir como se observa con los métodos de este anexo que en este caso el grupo gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ completo es roto.

Anexo C. El caso de N dobletes En este anexo se generaliza los métodos del capítulo 2 y el anexo B, para el caso de $n > 2$ dobletes Higgs. Se considera n campos Higgs dobletes complejos:

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix}, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{C1}$$

Todos los dobletes es supuesto que tienen la misma hipercarga débil $y = +1/2$. En analogía a (2.6) se introduce la matriz:

$$\underline{K}(x) = (\underline{K}_{ij}(x)) := (\varphi_j^\dagger(x)\varphi_i(x)), \tag{C2}$$

la cual es ahora una matriz de $n \times n$. El objeto es discutir las propiedades de $\underline{K}(x)$. Para esto se introduce la matriz $n \times n$ $\phi(x)$;

$$\phi(x) := \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_1^0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \varphi_2^+(x) & \varphi_2^0(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_n^+(x) & \varphi_n^0(x) & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{C3}$$

Es fácil mirar que se tiene:

$$\underline{K}(x) = \phi^{\dagger}(x)\phi(x). \tag{C4}$$

Un cambio de base entre los dobletes corresponde;

$$\phi(x) \to \phi'(x) = U\phi(x). \tag{C5}$$

con una matriz constante $U \in U(n)$,

$$U^{\dagger}U = I_n \tag{C6}$$

Una tarnsformación gauge del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ corresponde;

$$\phi(x) \to \phi'(x) = \phi(x)\tilde{U}_G^T(x), \tag{C7}$$

donde $\tilde{U}_G(x)$ es bloque-diagonal,

$$\tilde{U}_G(x) = \left(\begin{array}{c|c} U_G(x) & 0 \\ \hline 0 & I_{n-2} \end{array}\right), \tag{C8}$$

$U_G(x) \in U(2)$ y así $\tilde{U}_G(x) \in U(n)$. Se tiene luego desde (C7),

$$\varphi_i'^{\alpha}(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta}\varphi_i^{\beta}(x), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{C9}$$

Desde (C3) y (C4) se observa que la matriz $\underline{K}(x)$ tiene las siguientes propiedades:

$\underline{K}(x)$ es positiva semidefinida, $\underline{K}(x)$ tiene rango ≤ 2.

Es decir, $\underline{K}(x)$ tiene por lo menos dos autovalores $k_1(x), k_2(x) > 0$ y los autovalores que quedan $k_3(x), \ldots, k_n(x)$ deben ser cero.

Suponiendo que se tiene una matriz dada $\underline{K}(x)$ positiva semidefinida de rango ≤ 2. Luego se puede diagonalizar $\underline{K}(x)$ y se representa esto como:

$$\underline{K}(x) = W(x) \left(\begin{array}{cc|c} k_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(x) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) W^{\dagger}(x) \tag{C12}$$

con $W(x) \in U(n)$ y $k_1(x) \geq 0, k_2(x) \geq 0$. Se coloca ahora:

$$\phi(x) = W(x) \left(\begin{array}{cc|c} \sqrt{k_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k_2(x)} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \tag{C13}$$

y se mira fácilmente que $\phi(x)$ es de la forma (C3) y satisface (C4). Así para cualquier matriz $\underline{K}(x)$ positiva semidefinida de rango ≤ 2 hay por lo menos una configuración de campo de de los n dobletes Higgs tal que (C2) se mantiene.

Se supone ahora que se tiene dos configuraciones de campo, es decir dos matrices $\phi(x)$ y $\phi'(x)$ del tipo (C3) tal que,

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x) = \phi'(x)\phi'^\dagger(x). \tag{C14}$$

Se puede diagonalizar $\underline{K}(x)$ como en (C12) y se obtiene,

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} k_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & k_2(x) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &= (W^\dagger(x)\phi(x))(W^\dagger(x)\phi(x))^\dagger \\ &= (W^\dagger(x)\phi'(x))(W^\dagger(x)\phi(x))^\dagger \end{aligned} \tag{C15}$$

De lo anterior se observa que se debe tener;

$$W^\dagger(x)\phi(x) = \left(\begin{array}{cc|c} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) & 0 \\ \chi_2^+(x) & \chi_2^0(x) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \tag{C16}$$

$$W^\dagger(x)\phi'(x) = \left(\begin{array}{cc|c} \chi_1'^+(x) & \chi_1'^0(x) & 0 \\ \chi_2'^+(x) & \chi_2'^0(x) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \tag{C17}$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_1^\dagger(x)\chi_1(x) &= \chi_1'^\dagger(x)\chi_1'(x) = k_1(x), \\ \chi_2^\dagger(x)\chi_2(x) &= \chi_2'^\dagger(x)\chi_2'(x) = k_2(x), \\ \chi_1^\dagger(x)\chi_2(x) &= \chi_1'^\dagger(x)\chi_2'(x) = 0. \end{aligned} \tag{C18}$$

De lo anterior se concluye que se puede encontrar una matriz $U_G(x) \in U(2)$ tal que,

$$\chi_i'^\alpha = (U_G(x))_{\alpha\beta}\chi_i^\beta \qquad i = 1, 2. \tag{C19}$$

Insertando este $U_G(x)$ en (C8), se obtiene,

$$W^\dagger(x)\phi'(x) = W^\dagger(x)\phi(x)\tilde{U}_G^T(x) \tag{C20}$$

y ya que $W(x) \in U(n)$

$$\phi'(x) = \phi(x)\tilde{U}_G^T(x) \tag{C21}$$

Es decir $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ son relacionados por una transformación gauge.

Los resultados anteriores se resumen como sigue:

Para n campos dobletes Higgs de la misma hipercarga débil $y = +1/2$, la matriz $\underline{K}(x) = (\varphi_j^\dagger(x)\varphi_i(x))$ es positiva semidefinida de $n \times n$ de rango ≤ 2. Para cualquier matriz $\underline{K}(x)$ semidefinida de $n \times n$ y de rango ≤ 2 hay campos Higgs tal que (C2) se mantiene. Configuraciones arbitrarias de dos campos dando la misma matriz $\underline{K}(x)$ son relacionados por una transformación gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Las matrices $\underline{K}(x)$ forman, por consiguiente, el espacio de órbitas gauge de los n campos dobletes Higgs.