

**PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN GUIAS DE  
ONDAS**

**MILENA DEL ROSARIO PANTOJA VALLEJO  
DAYRA ALEXANDRA YELA GOMEZ**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2004**

**PROPAGACIÓN DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS EN GUIAS DE  
ONDAS**

**MILENA DEL ROSARIO PANTOJA VALLEJO  
DAYRA ALEXANDRA YELA GOMEZ**

**Trabajo de pregrado para optar el título de Físico**

**Asesor  
Álvaro Rúgeles Pérez  
Doctor en Ciencias Físicas**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS  
PROGRAMA DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2004**

**Nota de aceptación:**

---

---

---

---

---

---

---

**Firma del presidente del jurado**

---

**Firma del jurado**

---

**Firma del jurado**

**San Juan de Pasto, 18 de junio 2004**

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva del autor”.

Artículo primero del acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el honorable consejo directivo de la universidad de Nariño.

***A nuestros padres y hermanos***

## CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	14
1. OBJETIVOS	15
2. GUIAS DE ONDAS DIELECTRICAS CILÍNDRICAS: CONCEPTOS BÁSICOS	16
2.1 RELACIONES ELECTRODINAMICAS FUNDAMENTALES	16
2.2 MODOS ELECTROMAGNÉTICOS	19
2.3 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA LOS MODOS ELÉCTRICOS	19
2.4 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA LOS MODOS MAGNÉTICOS	20
2.5 CONDICIONES DE FRONTERA	21
3. GUIA DE ONDA DIELECTRICA CILINDRICA HOMOGÉNEA	22
3.1 MODOS ELÉCTRICOS	22
3.2 MODOS MAGNÉTICOS	25
3.3 DETERMINACIÓN DE LAS COMPONENTES TRANSVERSALES DE LOS MODOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS.	26
3.4 DETERMINACIÓN DE LOS NÚMEROS DE ONDA TRANSVERSALES $g$ Y $p$ .	28
3.5 EXPRESIONES PARA LAS COMPONENTES DEL CAMPO DE LOS MODOS ELECTROMAGNÉTICOS EN UNA GUÍA DE ONDA CON SALTO.	49
4. GUIAS DE ONDAS CON GRADIENTE RADIAL DE LA PERMITIVIDAD	51
4.1 MODOS ELÉCTRICOS	52

<b>4.2 MODOS MAGNÉTICOS</b>	<b>53</b>
<b>4.3 DETERMINACION DE LAS SOLUCIONES PARA LAS COMPONENTES LONGITUDINALES</b>	<b>53</b>
<b>4.4 DETERMINACION DEL NUMERO DE ONDA <math>h</math></b>	<b>58</b>
<b>5. CONCLUSIONES</b>	<b>75</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>76</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
<b>Figura 1.</b> Geometría de una guía de ondas cilíndrica.	16
<b>Figura 2.</b> Guía de onda con salto: perfil de la permitividad $\epsilon_r$ con respecto a $r$ .	22
<b>Figura 3.</b> Corte de las curvas de los lados izquierdo y derecho de (3.80) en función de $g_1$ cuando $m = 1$ .	31
<b>Figura 4.</b> Demostración grafica del cumplimiento de las condiciones de frontera del modo (1,1).	39
<b>Figura 5.</b> Corte de $f_1$ - $f_2$ con el eje $x$ para el modo (3,1).	40
<b>Figura 6.</b> Curvas de dispersión del número de onda $b_{mk}$ en función de la frecuencia $V$ para los modos $(m, k)$ en una guía de onda con salto ( $a = 25 * 10^{-6} m$ , $\epsilon_{r1} = 2.1316$ , $\epsilon_{r2} = 2.1025$ , $m_r = 1$ ).	41
<b>Figura 7.</b> Gráfica de $\epsilon_r$ vs. $r$ para una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad.	51
<b>Figura 8.</b> Solución grafica de la desigualdad (4.38).	56
<b>Figura 9.</b> Intervalos de atenuación y propagación para un $h_1$ dado.	58
<b>Figura 10.</b> Representación grafica de la solución para la amplitud de un modo eléctrico o magnético en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad.	60
<b>Figura 11.</b> Curvas de dispersión del número de onda $h_{m,l}$ en función del parámetro de frecuencia $V$ para los modos $(m, l)$ en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad ( $a = 25 * 10^{-6} m$ , $\epsilon_{r1} = 2.25$ , $\epsilon_{r2} = 2.05$ , $m_r = 1$ , $\Delta = 0.01$ , $\alpha = 2$ ).	74



## LISTA DE CUADROS

	pág.
<b>Cuadro 1.</b> Números de onda transversales y longitudinales de los modos $(0, k)$ , $(m = 0)$ de frecuencia $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$ en una guía de onda con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.102$ y $m_r = 1$ .	33
<b>Cuadro 2.</b> Números de onda transversales y longitudinales de los modos $(1, k)$ $(m = 1)$ de frecuencia $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$ en una guía de onda con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.102$ y $m_r = 1$ .	34
<b>Cuadro 3.</b> Números de onda transversales y longitudinales de los modos $(2, k)$ $(m = 2)$ de frecuencia $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$ en una guía de onda con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.102$ y $m_r = 1$ .	35
<b>Cuadro 4.</b> Números de onda transversales y longitudinales de los modos $(3, k)$ $(m = 3)$ de frecuencia $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$ en una guía de onda con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.102$ y $m_r = 1$ .	36
<b>Cuadro 5.</b> Números de onda transversales y longitudinales de los modos $(4, k)$ $(m = 4)$ de frecuencia $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$ en una guía de onda con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.102$ y $m_r = 1$ .	37
<b>Cuadro 6.</b> Números de onda transversales y longitudinales de los modos $(5, k)$ $(m = 5)$ de frecuencia $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$ en una guía de onda con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.102$ y $m_r = 1$ .	38
<b>Cuadro 7.</b> Dependencia del número de onda $b_{m,k}$ respecto a la frecuencia $V$ para el modo $(0, 1)$ en una guía de ondas con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.1025$ , $m_r = 1$ .	41
<b>Cuadro 8.</b> Dependencia del número de onda $b_{m,k}$ respecto a la frecuencia $V$ para el modo $(1, 1)$ en una guía de ondas con salto de radio $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ , $e_{r1} = 2.1316$ , $e_{r2} = 2.1025$ , $m_r = 1$ .	42

**Cuadro 9.** Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (1, 2) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ . 43

**Cuadro 10.** Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (1, 3) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ . 44

**Cuadro 11.** Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (1, 4) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ . 45

**Cuadro 12.** Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (1, 5) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ . 46

**Cuadro 13.** Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos (1,1), ( $m=1$ ) de frecuencia  $fr = 0.352 * 10^{15} Hz$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ . 63

**Cuadro 14.** Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos (2,1), ( $m=2$ ) de frecuencia  $fr = 0.352 * 10^{15} Hz$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ . 64

**Cuadro 15.** Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos (3,1), ( $m=3$ ) de frecuencia  $fr = 0.352 * 10^{15} Hz$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ . 65

**Cuadro 16.** Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos (4,1), ( $m=4$ ) de frecuencia  $fr = 0.352 * 10^{15} Hz$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ . 66

**Cuadro 17.** Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos (5,1), ( $m=5$ ) de frecuencia  $fr = 0.352 * 10^{15} Hz$  en una guía de ondas con gradiente radial de la

permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\epsilon_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ . 66

**Cuadro 18.** Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{1,7}$  del modo (1,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\epsilon_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$ . 69

**Cuadro 19.** Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{2,7}$  del modo (2,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\epsilon_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$ . 70

**Cuadro 20.** Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{3,7}$  del modo (3,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\epsilon_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$ . 71

**Cuadro 21.** Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{4,7}$  del modo (4,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\epsilon_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$ . 72

**Cuadro 22.** Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{5,7}$  del modo (5,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\epsilon_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$ . 73

## **RESUMEN**

En este trabajo se aplican los principios generales que rigen la propagación de ondas electromagnéticas en sistemas físicos denominados guías de ondas al estudio de guías de ondas cilíndricas dieléctricas con salto y con gradiente radial de la permitividad. Se determinan las soluciones de las ecuaciones de onda fundamentales en forma de modos electromagnéticos guiados y las relaciones de dispersión de estos modos .

## **ABSTRACT**

In this work apply the general principles that govern the propagation of electromagnetic waves in physical systems called waves of guide to the study of cylindrical dielectric waves of guide with step and radial graded of the permittivity. Determine the solutions of the fundamental wave equations in the form of electromagnetic guided modes and the dispersion relations of these modes.

## INTRODUCCIÓN

Las guías de ondas son sistemas que canalizan ondas electromagnéticas con el propósito de transportar energía o información de un punto a otro; se han ideado diversas guías de ondas siendo las más utilizadas las rectangulares y cilíndricas las cuales se utilizan principalmente en las regiones de microondas y óptica.

El funcionamiento de las guías de ondas con salto se basa en el fenómeno de reflexión total interna sobre un plano ideal, lo cual en la práctica conduce a fenómenos de inestabilidad en la canalización de las ondas. Esta deficiencia se ha tratado de superar con las guías de ondas con gradiente radial de la permitividad, en las cuales la reflexión se produce gradualmente en una región de la guía hasta alcanzar el efecto de una reflexión total interna.

Un tipo importante de guía de ondas consiste en fibras ópticas dieléctricas transparentes con diámetros de unos cuantos micrómetros llamadas fibras ópticas, las cuales son ampliamente utilizadas en la transmisión de luz e imágenes y también se emplean en una amplia variedad de sensores que van desde termómetros hasta giroscopios.

La importancia de este estudio es que permite esclarecer los procesos físicos y los métodos que se han elaborado para el análisis y diseño de guías de ondas.

## **1. OBJETIVOS**

### **1.1 OBJETIVO GENERAL**

Investigar las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas en guías de ondas dieléctricas cilíndricas.

### **1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS**

- Determinar las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas en una guía de ondas dieléctrica cilíndrica homogénea.
- Determinar las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas en una guía de ondas dieléctrica cilíndrica con gradiente radial de la permitividad.





$\mathbf{r}_{el}(r, \mathbf{q}, z, t)$  - densidad volumétrica de carga eléctrica expresado en unidades  $(C/m^3)$ ,  
 $\mathbf{r}_m(r, \mathbf{q}, z, t)$  - densidad volumétrica de carga magnética expresado en unidades  $(Wb/m^3)$ ,  
 $\vec{J}_{el}(r, \mathbf{q}, z, t)$  - vector densidad de corriente eléctrica extrínseca expresado en unidades  $(A/m^2)$ ,  
 $\vec{J}_m(r, \mathbf{q}, z, t)$  - vector densidad de corriente magnética extrínseca expresado en unidades  $(V/m^2)$ .

Las cantidades anteriores son reales y se utiliza el Sistema Internacional de Unidades.

En el dominio de la frecuencia se utiliza notación compleja de manera que se puedan simplificar los cálculos ha realizar:

$\tilde{\vec{E}}(r, \mathbf{q}, z)$  - vector amplitud compleja de la intensidad de campo eléctrico,  
 $\tilde{\vec{H}}(r, \mathbf{q}, z)$  - vector amplitud compleja de la intensidad de campo eléctrico,  
 $\tilde{\vec{D}}(r, \mathbf{q}, z)$  - vector amplitud compleja del desplazamiento eléctrico,  
 $\tilde{\vec{B}}(r, \mathbf{q}, z)$  - vector amplitud compleja de la inducción magnética,  
 $\tilde{\mathbf{r}}_{el}(r, \mathbf{q}, z)$  - amplitud compleja de la densidad volumétrica de carga eléctrica,  
 $\tilde{\mathbf{r}}_m(r, \mathbf{q}, z)$  - amplitud compleja de la densidad volumétrica de carga magnética,  
 $\tilde{\vec{J}}_{el}(r, \mathbf{q}, z)$  - vector amplitud compleja de la densidad de corriente eléctrica extrínseca,  
 $\tilde{\vec{J}}_m(r, \mathbf{q}, z)$  - vector amplitud compleja de la densidad de corriente magnética extrínseca.

La relación entre una cantidad  $C(r, \mathbf{q}, z, t)$  en el dominio del tiempo y su correspondiente amplitud compleja  $\tilde{C}(r, \mathbf{q}, z)$  en el dominio de la frecuencia es:

$$C(r, \mathbf{q}, z, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{C}(r, \mathbf{q}, z) e^{j\omega t} \right\}. \quad (2.1)$$

En el presente trabajo, los medios que conforman la guía de ondas son dieléctricos ideales (conductividad  $\mathbf{s}$  es igual a cero) con las siguientes relaciones constitutivas referidas a campos monocromáticos [3, 4, 5]:

$$\tilde{\vec{D}} = \mathbf{e}(r) \tilde{\vec{E}}, \quad (2.2)$$

$$\tilde{\vec{B}} = \mathbf{m} \tilde{\vec{H}}, \quad (2.3)$$

donde  $\mathbf{e}$  es la permitividad eléctrica que depende de  $r$ , es decir, el medio es no homogéneo en la dirección radial;  $\mathbf{m}$  es la permeabilidad magnética que es constante y real.

Teniendo en cuenta las relaciones (2.2) y (2.3), las ecuaciones de Maxwell para las amplitudes complejas se escriben así [6, 7, 8]:

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{H}} = \tilde{\vec{J}}_{el} + j\omega\epsilon(r)\tilde{\vec{E}} \quad , \quad (2.4)$$

$$\vec{\nabla} \times \tilde{\vec{E}} = -\tilde{\vec{J}}_m - j\omega\mu\tilde{\vec{H}} \quad , \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{D}} = \tilde{\vec{r}}_{el} \quad , \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \tilde{\vec{B}} = \tilde{\vec{r}}_m \quad . \quad (2.7)$$

En lo sucesivo las fuentes  $\tilde{\vec{r}}_{el}(r, \mathbf{q}, z)$ ,  $\tilde{\vec{r}}_m(r, \mathbf{q}, z)$ ,  $\tilde{\vec{J}}_{el}(r, \mathbf{q}, z)$ ,  $\tilde{\vec{J}}_m(r, \mathbf{q}, z)$  en (2.4) – (2.7) se igualan a cero ya que el trabajo se limita al estudio de la propagación de campos electromagnéticos monocromáticos.

Considerando la geometría de la guía de ondas representada en la Figura 1, las ecuaciones (2.4) y (2.5) se escriben en coordenadas cilíndricas  $(r, \mathbf{q}, z)$  por componentes:

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial(\tilde{H}_q r)}{\partial z} \right\} = j\omega\epsilon(r)\tilde{E}_r \quad , \quad (2.8)$$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{H}_r}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial r} \right\} = j\omega\epsilon(r)\tilde{E}_q \quad , \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(\tilde{H}_q r)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{H}_r}{\partial \mathbf{q}} \right\} = j\omega\epsilon(r)\tilde{E}_z \quad , \quad (2.10)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial(\tilde{E}_q r)}{\partial z} \right\} = -j\omega\mu\tilde{H}_r \quad , \quad (2.11)$$

$$\left\{ \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial z} - \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial r} \right\} = -j\omega\mu\tilde{H}_q \quad , \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(\tilde{E}_q r)}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{E}_r}{\partial \mathbf{q}} \right\} = -j\omega\mu\tilde{H}_z \quad , \quad (2.13)$$

donde

$$\tilde{\vec{E}}(r, \mathbf{q}, z) = \hat{e}_r \tilde{E}_r(r, \mathbf{q}, z) + \hat{e}_q \tilde{E}_q(r, \mathbf{q}, z) + \hat{e}_z \tilde{E}_z(r, \mathbf{q}, z), \quad (2.14)$$

$$\tilde{\vec{H}}(r, \mathbf{q}, z) = \hat{e}_r \tilde{H}_r(r, \mathbf{q}, z) + \hat{e}_q \tilde{H}_q(r, \mathbf{q}, z) + \hat{e}_z \tilde{H}_z(r, \mathbf{q}, z), \quad (2.15)$$

y  $\hat{e}_r$ ,  $\hat{e}_q$ ,  $\hat{e}_z$  representan los vectores unitarios correspondientes al sistema de coordenadas cilíndricas.

## 2.2 MODOS ELECTROMAGNETICOS

Las amplitudes complejas para los campos electromagnéticos se expresan así [9]:

$$\tilde{\vec{E}}(r, \mathbf{q}, z) = \vec{E}_c(r, \mathbf{q})e^{-jh_z z}, \quad (2.16)$$

$$\tilde{\tilde{H}}(r, \mathbf{q}, z) = \tilde{H}_c(r, \mathbf{q}) e^{-jh_z}, \quad (2.17)$$

donde  $h$  es el número de onda longitudinal a lo largo del eje  $z$ ,  $\tilde{E}_c(r, \mathbf{q})$  y  $\tilde{H}_c(r, \mathbf{q})$  son factores vectoriales transversales. Las ondas electromagnéticas monocromáticas de la forma (2.16) y (2.17) se denominan modos electromagnéticos. El número de onda  $h$  en general es función de la frecuencia  $w$ , la permitividad  $e$ , la permeabilidad  $m$  y el radio  $a$  del núcleo de la guía de ondas (ver Figura 1). La relación entre  $h$  y estas cantidades se denomina relación de dispersión y expresa las propiedades electromagnéticas de la guía de ondas. Es importante calcular los modos electromagnéticos que se pueden propagar en una guía de ondas ya que a partir de estos se construyen soluciones más complejas y desde el punto de vista práctico se utilizan individualmente o por grupos para transmitir información.

Existen dos configuraciones básicas para los modos electromagnéticos: la primera, llamada modo eléctrico, corresponde al caso cuando la componente longitudinal  $\tilde{E}_z$  en (2.16) es diferente de cero, y simultáneamente la componente longitudinal  $\tilde{\tilde{H}}_z$  en (2.17) es igual a cero:

$$\tilde{E}_z \neq 0, \quad \tilde{\tilde{H}}_z = 0. \quad (2.18)$$

En la segunda, llamada modo magnético, la componente longitudinal  $\tilde{\tilde{H}}_z$  en (2.17) es diferente de cero, y simultáneamente la componente longitudinal  $\tilde{E}_z$  en (2.16) es igual a cero:

$$\tilde{\tilde{H}}_z \neq 0, \quad \tilde{E}_z = 0. \quad (2.19)$$

El análisis por separado de los modos eléctricos y magnéticos facilita la construcción de las soluciones para las ecuaciones (2.4) y (2.5). En general, un modo electromagnético de la forma (2.16), (2.17) se puede describir como la superposición de dos modos, uno eléctrico y otro magnético.

### 2.3 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA LOS MODOS ELÉCTRICOS

Para los modos eléctricos se aplica (2.18) en las ecuaciones (2.8) - (2.13):

$$hH_{qc} = \mathbf{we}(r)E_{rc}, \quad (2.20)$$

$$-hH_{rc} = \mathbf{we}(r)E_{qc}, \quad (2.21)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial(H_{qc} r)}{\partial r} - \frac{\partial H_{rc}}{\partial \mathbf{q}} \right\} = j\mathbf{we}(r)E_{zc}, \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_{zc}}{\partial \mathbf{q}} + jhE_{qc} = -j\mathbf{wm}H_{rc}, \quad (2.23)$$

$$-jhE_{rc} - \frac{\partial E_{zc}}{\partial r} = -j\mathbf{wm}H_{qc}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial(E_{qc} r)}{\partial r} = \frac{\partial E_{rc}}{\partial q}, \quad (2.25)$$

que representan ecuaciones diferenciales de primer orden para  $E_{zc}$ ,  $E_{rc}$ ,  $E_{qc}$ ,  $H_{rc}$  y  $H_{qc}$ . De (2.20) – (2.25) se obtendrá un conjunto de ecuaciones fundamentales para los modos eléctricos.

$$\mathbf{we}(r)E_{rc} - \frac{h^2}{\mathbf{wm}}E_{rc} = \frac{jh}{\mathbf{wm}} \frac{\partial E_{zc}}{\partial r}. \quad (2.26)$$

$$-\mathbf{we}(r)E_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{wm}}E_{qc} = \frac{jh}{\mathbf{wm}r} \frac{\partial E_{zc}}{\partial q}. \quad (2.27)$$

$$-H_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 \mathbf{me}(r)} H_{qc} = \frac{j}{\mathbf{wm}} \frac{\partial E_{zc}}{\partial r}. \quad (2.28)$$

$$H_{rc} - \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 \mathbf{me}(r)} H_{rc} = \frac{j}{\mathbf{wm}r} \frac{\partial E_{zc}}{\partial q}. \quad (2.29)$$

$$\frac{j}{\mathbf{wm}r} \frac{1}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial E_{zc}}{\partial r} \right\} + \frac{j}{\mathbf{wm}r^2} \frac{\partial^2 E_{zc}}{\partial q^2} + j\mathbf{we}(r)E_{zc} = \frac{1}{r} \frac{h}{\mathbf{wm}} \frac{\partial(E_{rc} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{h}{\mathbf{wm}} \frac{\partial E_{qc}}{\partial q}. \quad (2.30)$$

$$\frac{hr}{\mathbf{e}(r)} \frac{d\mathbf{e}(r)}{dr} E_{rc} + h \frac{\partial(E_{rc} r)}{\partial r} + h \frac{\partial E_{qc}}{\partial q} = j\mathbf{wh}^2 E_{zc}. \quad (2.31)$$

Las ecuaciones (2.26) – (2.31) sirven de punto de partida en los Capítulos 3 y 4 para la construcción de soluciones para los modos eléctricos en guías de onda con salto y con gradiente radial de la permitividad.

## 2.4 ECUACIONES FUNDAMENTALES PARA LOS MODOS MAGNÉTICOS

Para los modos magnéticos, teniendo en cuenta (2.19), las ecuaciones de Maxwell (2.8) – (2.13) adquieren la forma:

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial(E_{qc} r)}{\partial z} = -j\mathbf{wm}H_{rc}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial E_{rc}}{\partial z} = -j\mathbf{wm}E_{qc}, \quad (2.33)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial E_{qc}}{\partial r} - \frac{\partial E_{rc}}{\partial q} \right\} = -j\mathbf{wm}H_{zc}, \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial H_{zc}}{\partial q} - \frac{\partial(H_{qc} r)}{\partial z} \right\} = j\mathbf{we}(r)E_{rc}, \quad (2.35)$$

$$\left\{ \frac{\partial H_{rc}}{\partial z} - \frac{\partial H_{zc}}{\partial r} \right\} = j\mathbf{we}(r)E_{qc}, \quad (2.36)$$

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial H_{qc}}{\partial r} - \frac{\partial H_{rc}}{\partial q} \right\} = 0. \quad (2.37)$$

Las ecuaciones fundamentales para los modos magnéticos se pueden deducir de (2.32) – (2.37) siguiendo un procedimiento análogo al utilizado para los modos eléctricos. Sin embargo, es más práctico recurrir al principio de dualidad de permutación que establece las siguientes equivalencias [10]:

$$\tilde{\tilde{E}} \leftrightarrow \tilde{\tilde{H}}, \quad \mathbf{e}(r) \leftrightarrow -\mathbf{m}. \quad (2.38)$$

Aplicando este principio en (2.26) - (2.31) se obtienen las ecuaciones fundamentales para los modos magnéticos:

$$\mathbf{wm}H_{rc} + \frac{h^2}{\mathbf{we}(r)} H_{rc} = \frac{j}{\mathbf{we}(r)} \frac{\partial H_{zc}}{\partial r}, \quad (2.39)$$

$$-\mathbf{wm}H_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{we}(r)} H_{qc} = \frac{jh}{\mathbf{we}(r)\mathbf{mr}} \frac{\partial H_{zc}}{\partial q}, \quad (2.40)$$

$$-E_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 \mathbf{me}(r)} E_{qc} = \frac{j}{\mathbf{we}(r)} \frac{\partial H_{zc}}{\partial r}, \quad (2.41)$$

$$E_{rc} - \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 \mathbf{me}(r)} E_{rc} = -\frac{j}{\mathbf{we}(r)r} \frac{\partial H_{zc}}{\partial q}, \quad (2.42)$$

$$\frac{j}{\mathbf{we}(r)r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial H_{zc}}{\partial r} \right\} + \frac{j}{\mathbf{we}(r)r^2} \frac{\partial^2 H_{zc}}{\partial q^2} - j\mathbf{w}^2 \mathbf{m}H_{zc} = \frac{1}{r} \frac{h}{\mathbf{we}(r)} \frac{\partial(H_{rc}r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{h}{\mathbf{we}(r)} \frac{\partial H_{qc}}{\partial q}, \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial(H_{rc}r)}{\partial r} + \frac{\partial H_{qc}}{\partial q} = -h^2 H_{zc}. \quad (2.44)$$

## 2.5 CONDICIONES DE FRONTERA

La metodología utilizada en el análisis de las guías de ondas cilíndricas consiste en considerar dos regiones: el núcleo ( $0 \leq r \leq a$ ) y la envoltura ( $r > a$ ) (ver Figura 1), solucionando las ecuaciones fundamentales para los modos eléctricos y magnéticos en cada una de estas regiones y procediendo luego a acoplar las soluciones en la frontera de separación entre las dos regiones, es decir, en  $r = a$ . Esto último se realiza exigiendo el cumplimiento de la condición de continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético:

$$\tilde{\tilde{H}}_{1t} = \tilde{\tilde{H}}_{2t}, \quad \tilde{\tilde{E}}_{1t} = \tilde{\tilde{E}}_{2t}. \quad (2.45)$$

### 3. GUIA DE ONDA DIELECTRICA CILINDRICA HOMOGENEA

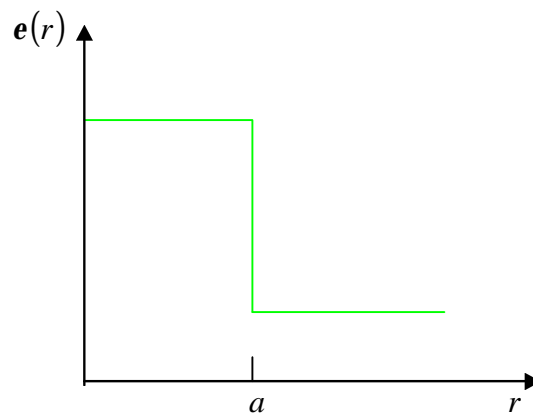
En este capítulo se exponen los métodos utilizados en el estudio de guías de ondas dieléctricas cilíndricas homogéneas, los cuales sirven de punto de partida para el análisis de las guías de ondas dieléctricas cilíndricas con gradiente radial de la permitividad que se desarrolla en el Capítulo 4.

La geometría cilíndrica de la guía de ondas corresponde a la mostrada en la Figura 1, el núcleo de radio  $r = a$  y la envoltura están compuestos por dos medios dieléctricos isotrópicos homogéneos, es decir, la permitividad  $\epsilon$  y la permeabilidad  $\mu$  se expresan así:

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1 = \text{const.} & \text{para } 0 \leq r \leq a \\ \epsilon_2 = \text{const.} & \text{para } r > a \end{cases}, \quad (3.1)$$
$$\mu = \text{const.} \quad \text{para todo } r.$$

En (3.1) todas las cantidades son reales. El perfil de la permitividad  $\epsilon$  respecto a  $r$  (Figura 2) tiene forma de salto o escalón por lo cual esta guía de onda también se denomina guía de onda con salto.

**Figura 2. Guía de onda con salto: Perfil de la permitividad  $\epsilon$  con respecto a  $r$ .**



En el presente capítulo se analiza la propagación de modos electromagnéticos a lo largo del eje  $z$  de la guía de ondas, para los cuales las amplitudes complejas están dadas por las expresiones (2.16) – (2.17).

#### 3.1 MODOS ELECTRICOS

Partiendo de las ecuaciones (2.26) – (2.31) se determinarán las componentes  $\tilde{E}_z$ ,  $\tilde{E}_r$ ,  $\tilde{E}_\phi$ ,  $\tilde{H}_r$  y  $\tilde{H}_\phi$ ; el procedimiento consiste en hallar

soluciones para los campos en cada una de las regiones homogéneas (núcleo y envoltura) por separado.

Teniendo en cuenta las propiedades definidas por (3.1), en cada región  $e$  y  $m$  son constantes, las ecuaciones (2.26) – (2.31) adquieren la forma:

$$\mathbf{w}eE_{rc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}m} E_{rc} = \frac{j}{\mathbf{w}m} \frac{\partial E_{zc}}{\partial r}, \quad (3.2)$$

$$-\mathbf{w}eE_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}m} E_{qc} = \frac{jh}{\mathbf{w}mr} \frac{\partial E_{zc}}{\partial q}, \quad (3.3)$$

$$-H_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 m\mathbf{e}} H_{qc} = -\frac{j}{\mathbf{w}m} \frac{\partial E_{zc}}{\partial r}, \quad (3.4)$$

$$H_{rc} - \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 m\mathbf{e}} H_{rc} = \frac{j}{\mathbf{w}m r} \frac{\partial E_{zc}}{\partial q}, \quad (3.5)$$

$$\frac{j}{\mathbf{w}m r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial E_{zc}}{\partial r} \right\} + \frac{j}{\mathbf{w}m r^2} \frac{\partial^2 E_{zc}}{\partial q^2} - j\mathbf{w}^2 \mathbf{e} E_{zc} = \frac{1}{r} \frac{h}{\mathbf{w}m} \frac{\partial(E_{rc} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{h}{\mathbf{w}m} \frac{\partial E_{qc}}{\partial q}, \quad (3.6)$$

$$h \frac{\partial(E_{rc} r)}{\partial r} + h \frac{\partial E_{qc}}{\partial q} = -h^2 E_{zc}. \quad (3.7)$$

Comparando el segundo miembro de la ecuación (3.6) con el primer miembro de la ecuación (3.7) dividido por  $\frac{1}{r}$ , se observa que son iguales, esto permite convertir (3.6) en una ecuación sólo para la componente longitudinal del campo eléctrico  $E_{zc}$ :

$$\frac{\partial^2 E_{zc}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{zc}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_{zc}}{\partial q^2} + l^2 E_{zc} = 0, \quad (3.8)$$

donde

$$l^2 = \mathbf{w}^2 m\mathbf{e} - h^2, \quad (3.9)$$

se denomina número de onda transversal.

Para solucionar esta ecuación se emplea el método de separación de variables, se supone la siguiente forma de solución:

$$E_{zc} = R(r)\mathbf{y}(q). \quad (3.10)$$

Este método conduce a las siguientes ecuaciones:

$$\frac{1}{\mathbf{y}} \frac{d^2 \mathbf{y}}{dq^2} = -m^2, \quad (3.11)$$

y

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{dR}{dr} + \left( l^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R = 0. \quad (3.12)$$

La ecuación (3.12) representa la ecuación de Bessel.

Las soluciones para los modos deben ser finitas y univocas en cada punto y en cada instante y estar confinadas dentro de la guía de ondas.

En el núcleo la solución general de la ecuación (3.11) es periódica respecto a  $q$  es:

$$y(q) = (A_1 \cos(m_1 q) + A_2 \text{sen}(m_1 q)), \quad (3.13)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son amplitudes constantes y  $m_1$  es un número entero positivo ( $m_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

La solución general de la ecuación de Bessel (3.12) es:

$$R(r) = B_1 J_{m_1}(gr) + B_2 Y_{m_1}(gr). \quad (3.14)$$

donde  $J_{m_1}(gr)$  es la función de Bessel de primer genero de orden  $m_1$  y  $Y_{m_1}(gr)$  es la función de Bessel de segundo genero de orden  $m_1$ ,  $g$  es un número real que representa el número de onda transversal dado por (3.9):

$$g^2 = w^2 \mu \epsilon - h_1^2, \quad (3.15)$$

siendo  $h_1$  el numero de onda longitudinal.

La solución (3.14) describe ondas estacionarias en la dirección radial que se forman gracias al fenómeno de reflexión total interna en  $r = a$ . Teniendo en cuenta las condiciones de contorno en  $r = 0$  la solución para  $E_{zc}$  de acuerdo con (3.10), (3.13), (3.14) es:

$$E_{zc}(r, q) = J_{m_1}(gr)(C_1 \cos(m_1 q) + C_2 \text{sen}(m_1 q)), \quad (3.16)$$

donde se han fusionado las constantes  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_1$  así:

$$C_1 = A_1 B_1 \quad \text{y} \quad C_2 = A_2 B_1. \quad (3.17)$$

En la envoltura ( $r > a$ ) se escribe la solución general de (3.11):

$$y(q) = (A_3 \cos(m_2 q) + A_4 \text{sen}(m_2 q)). \quad (3.18)$$

La solución general de la ecuación de Bessel (3.12) en esta región se expresa así:

$$R(r) = B_3 K_{m_2}(pr) + B_4 I_{m_2}(pr). \quad (3.19)$$

donde  $K_{m_2}(pr)$  es la función de Bessel modificada de segundo genero de orden  $m_2$  y  $I_{m_2}(pr)$  es la función de Bessel modificada de primer genero de orden  $m_2$ ,



se ha tomado  $l = jp$  con  $p$  real positivo el cual representa el número de onda transversal entonces de acuerdo con (3.9):

$$p^2 = h2^2 - \mathbf{w}^2 \mathbf{m} \mathbf{e}_2, \quad (3.20)$$

siendo  $h2$  el numero de onda longitudinal.

La solución (3.19) describe ondas evanescentes en la dirección radial. Este tipo de solución garantiza que los modos guiados permanezcan confinados dentro de la guía de ondas. Por condiciones de contorno, cuando  $r = \infty$  de (3.18) y (3.19) se escribe la expresión para la componente longitudinal  $E_{zc}$  en la envoltura:

$$E_{zc}(r, \mathbf{q}) = K_{m2}(-jpr)(C_5 \cos(m2\mathbf{q}) + C_6 \text{sen}(m2\mathbf{q})), \quad (3.21)$$

donde

$$C_5 = A_3 B_3 \quad \text{y} \quad C_6 = A_4 B_3. \quad (3.22)$$

La determinación de los posibles valores de  $h1, h2, m1, m2, g$  y  $p$  se obtienen a partir del cumplimiento de las condiciones de frontera dadas por la ecuación (2.45), lo cual se realizará más adelante.

### 3.3 MODOS MAGNETICOS

Para determinar las ecuación para las componentes longitudinal y transversales del campo magnético se aplica a las ecuación (3.8), (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) el principio de dualidad de permutación dado por la expresión (2.39):

$$\frac{\partial^2 H_{zc}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_{zc}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_{zc}}{\partial \mathbf{q}^2} + l^2 H_{zc} = 0. \quad (3.23)$$

$$\mathbf{w} \mathbf{m} H_{rc} + \frac{h^2}{\mathbf{w} \mathbf{e}} H_{rc} = \frac{j}{\mathbf{w} \mathbf{e}} \frac{\partial H_{zc}}{\partial r}, \quad (3.24)$$

$$-\mathbf{w} \mathbf{m} H_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w} \mathbf{e}} H_{qc} = \frac{j h}{\mathbf{w} \mathbf{e} r} \frac{\partial H_{zc}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.25)$$

$$-E_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 \mathbf{m} \mathbf{e}} E_{qc} = \frac{j}{\mathbf{w} \mathbf{e}} \frac{\partial H_{zc}}{\partial r}, \quad (3.26)$$

$$E_{rc} - \frac{h^2}{\mathbf{w}^2 \mathbf{m} \mathbf{e}} E_{rc} = -\frac{j}{\mathbf{w} \mathbf{e} r} \frac{\partial H_{zc}}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.27)$$

Para solucionar (3.23) se emplea el método de separación de variables obteniéndose relaciones análogas a (3.16) y (3.21).

La componente longitudinal del campo magnético para el núcleo es:

$$H_{zc}(r, \mathbf{q}) = J_{m1}(gr)(C_3 \cos(m1\mathbf{q}) + C_4 \text{sen}(m1\mathbf{q})), \quad (3.28)$$

y la componente longitudinal para la envoltura es:

$$H_{zc}(r, \mathbf{q}) = K_{m2}(pr)(C_7 \cos(m2\mathbf{q}) + C_8 \text{sen}(m2\mathbf{q})), \quad (3.29)$$

### 3.4 DETERMINACIÓN DE LAS COMPONENTES TRANSVERSALES DE LOS MODOS ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS.

Las componentes transversales del campo en el núcleo de la guía se determinan sustituyendo la solución de  $E_{zc}$  (3.16) en las ecuaciones (3.4) – (3.7). Resumiendo las componentes del campo longitudinales y transversales para los modos eléctricos son:

$$\tilde{E}_{zel} = J_{m1}(gr)\{C_1 \cos(m1\mathbf{q}) + C_2 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-j h1z}, \quad (3.30)$$

$$\tilde{E}_{rel} = -j \frac{h1}{g} J'_{m1}(gr)\{C_1 \cos(m1\mathbf{q}) + C_2 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.31)$$

$$\tilde{E}_{qel} = -j \frac{h1m}{rg^2} J_{m1}(gr)\{-C_1 \text{sen}(m1\mathbf{q}) + C_2 \cos(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.32)$$

$$\tilde{H}_{zel} = 0, \quad (3.33)$$

$$\tilde{H}_{rel} = -\frac{we_1}{rg^2} J_m(gr)\{-C_1 \cos(m1\mathbf{q}) + C_2 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.34)$$

$$\tilde{H}_{qel} = -j \frac{we_1}{g} J'_{m1}(gr)\{C_1 \cos(m1\mathbf{q}) + C_2 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}. \quad (3.35)$$

Las componentes transversales del campo para el modo magnético en el núcleo de la guía se determinan sustituyendo la solución de  $H_{zc}$  (3.28) en (3.24) – (3.27). Resumiendo las componentes del campo longitudinales y transversales para los modos magnéticos son :

$$\tilde{H}_{zmag} = J_{m1}(gr)\{C_3 \cos(m1\mathbf{q}) + C_4 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.36)$$

$$\tilde{H}_{rmag} = -j \frac{h1}{g} J'_{m1}(gr)\{C_3 \cos(m1\mathbf{q}) + C_4 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.37)$$

$$\tilde{H}_{qmag} = -j \frac{h1m1}{rg^2} J_{m1}(gr)\{-C_3 \text{sen}(m1\mathbf{q}) + C_4 \cos(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.38)$$

$$\tilde{E}_{zmag} = 0, \quad (3.39)$$

$$\tilde{E}_{rmag} = -j \frac{wm1m1}{rg^2} J_{m1}(gr)\{-C_3 \text{sen}(m1\mathbf{q}) + C_4 \cos(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.40)$$

$$\tilde{E}_{qmag} = j \frac{wm1}{g} J'_{m1}(gr)\{C_3 \cos(m1\mathbf{q}) + C_4 \text{sen}(m1\mathbf{q})\}e^{-jh1z}, \quad (3.41)$$

donde

$$J'_{m1}(gr) = \frac{dJ_{m1}(gr)}{d(gr)}.$$

Para determinar las componentes transversales del campo para los modos eléctricos en la envoltura se utilizan las relaciones (3.4) – (3.7) y (3.21); resumiendo las componentes longitudinales y transversales de los modos eléctricos se tiene:

$$\tilde{E}_{z1el} = K_{m2}(pr)\{C_5 \cos(m2q) + C_6 \text{sen}(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.42)$$

$$\tilde{E}_{r1el} = j \frac{h2}{g} K'_{m2}(pr)\{C_5 \cos(m2j) + C_6 \text{sen}(m2j)\}e^{-jh2z}, \quad (3.43)$$

$$\tilde{E}_{q1el} = j \frac{h2m2}{rp^2} K_{m2}(pr)\{-C_5 \text{sen}(m2q) + C_6 \cos(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.44)$$

$$\tilde{H}_{z1el} = 0, \quad (3.45)$$

$$\tilde{H}_{r1el} = -j \frac{\mathbf{we}_2 m2}{rp^2} K_{m2}(pr)\{-C_5 \text{sen}(m2q) + C_6 \cos(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.46)$$

$$\tilde{H}_{qel} = j \frac{\mathbf{we}_2}{p} K'_{m2}(pr)\{C_5 \cos(m2q) + C_6 \text{sen}(m2q)\}e^{-jh2z}. \quad (3.47)$$

Para determinar las componentes transversales del campo para los modos magnéticos para la envoltura se utilizan las relaciones (3.24) – (3.27) y (3.29); resumiendo las componentes longitudinales y transversales de los modos magnéticos se tiene:

$$\tilde{H}_{z1mag} = K_{m2}(pr)\{C_7 \cos(m2q) + C_8 \text{sen}(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.48)$$

$$\tilde{H}_{r1mag} = j \frac{h2}{p} K'_m(pr)\{C_7 \cos(m2q) + C_8 \text{sen}(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.49)$$

$$\tilde{H}_{q1mag} = j \frac{hm2}{rp^2} K_{m2}(pr)\{-C_7 \text{sen}(m2q) + C_8 \cos(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.50)$$

$$\tilde{E}_{z1mag} = 0, \quad (3.51)$$

$$\tilde{E}_{r1mag} = j \frac{\mathbf{wm}m2}{rp^2} K_{m2}(pr)\{-C_7 \text{sen}(m2q) + C_8 \cos(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.52)$$

$$\tilde{E}_{q1mag} = j \frac{\mathbf{wm}}{p} K'_{m2}(pr)\{C_7 \cos(m2q) + C_8 \text{sen}(m2q)\}e^{-jh2z}, \quad (3.53)$$

donde

$$K'_{m2}(pr) = \frac{dK_{m2}(pr)}{d(pr)}.$$

### 3.5 DETERMINACIÓN DE LOS NÚMEROS DE ONDA TRANSVERSALES $g$ Y $p$ .

A continuación, se considera un par de modos eléctrico y magnético con  $m_1$  y  $m_2$  fijos, siendo el campo total ( $\tilde{E}_\Sigma$  y  $\tilde{H}_\Sigma$ ) la superposición de (3.30) – (3.35), (3.42) – (3.47) y (3.36) – (3.41), (3.48) – (3.53). Partiendo de exigir el cumplimiento de las condiciones de frontera en  $r = a$  para los vectores del campo, se determinarán los números de onda transversales  $g$  y  $p$  en función de  $e_1, e_2, \mathbf{m}, \mathbf{w}, a, m$  y  $h$ .

Teniendo en cuenta (2.45), (3.16), (3.21), (3.28) y (3.29) las condiciones de frontera se expresan así:

$$\tilde{E}_{q\Sigma} = \tilde{E}_{q1\Sigma}, \quad \tilde{H}_{q\Sigma} = \tilde{H}_{q1\Sigma}, \quad \tilde{E}_{z\Sigma} = \tilde{E}_{z1\Sigma}. \quad (\text{para } r = a) \quad (3.54)$$

Para  $r \leq a$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{q\Sigma} = \tilde{E}_{qel} + \tilde{E}_{qmag} = -j \frac{h_1 m_1}{r g^2} J_{m_1}(gr) \{ -C_1 \text{sen}(m_1 q) + C_2 \text{cos}(m_1 q) \} e^{-j h_1 z} + \\ j \frac{\mathbf{m}}{g} J'_{m_1}(gr) \{ C_3 \text{cos}(m_1 q) + C_4 \text{sen}(m_1 q) \} e^{-j h_1 z} \end{aligned}, \quad (3.55)$$

y para  $r > a$ :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{q1\Sigma} = \tilde{E}_{q1el} + \tilde{E}_{1mag} = j \frac{h_2 m_2}{r p^2} K_{m_2}(pr) \{ -C_5 \text{sen}(m_2 q) + C_6 \text{cos}(m_2 q) \} e^{-j h_2 z} - \\ j \frac{\mathbf{w} \mathbf{m}}{p} K'_{m_2}(gr) \{ C_7 \text{cos}(m_2 q) + C_8 \text{sen}(m_2 q) \} e^{-j h_2 z} \end{aligned}. \quad (3.56)$$

La primera condición en (3.54) se cumple si :

$$m_1 = m_2 = m, \quad (3.57)$$

$$h_1 = h_2 = h, \quad (3.58)$$

donde  $h$  es un número real positivo aún por determinar. Además, la dependencia del campo con respecto a  $q$  deber ser la misma dentro y fuera de la guía, de esta manera

$$C_2 = C_3 = C_6 = C_7 = 0. \quad (3.59)$$

Por lo tanto aplicando las condiciones (3.54) se tiene:

$$-\frac{hm}{ag^2} J_m(ga) C_1 - \frac{\mathbf{w} \mathbf{m}}{g} J'_m(ga) C_4 = \frac{hm}{ap^2} K_m(pa) C_5 + \frac{\mathbf{w} \mathbf{m}}{p} K'_m(pa) C_8, \quad (3.60)$$

$$-\frac{\mathbf{w}\mathbf{e}_1}{g} J'_m(ga)C_1 - \frac{hm}{ag^2} J_m(ga)C_4 = \frac{hm}{ap^2} K_m(pa)C_5 + \frac{\mathbf{w}\mathbf{e}_2}{p} K'_m(pa)C_8, \quad (3.61)$$

$$J_m(ga)C_1 = K_m(pa)C_5, \quad (3.62)$$

$$J_m(ga)C_4 = K_m(pa)C_8. \quad (3.63)$$

A partir de las ecuaciones (3.60) – (3.63) se obtienen dos relaciones que contienen sólo los parámetros  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}, \mathbf{w}, a, m, h, g$  y  $p$ :

$$(hma)^2 \left\{ \frac{1}{(ga)^2} + \frac{1}{(pa)^2} \right\}^2 = (\mathbf{w}a)^2 \left\{ \frac{\mathbf{e}_1 J'_m(ga)}{ga J_m(ga)} + \frac{\mathbf{e}_2 K'_m(pa)}{pa K_m(pa)} \right\} \times \left\{ \frac{\mathbf{m} J'_m(ga)}{ga J_m(ga)} + \frac{\mathbf{m} K'_m(pa)}{pa K_m(pa)} \right\} \quad (3.64)$$

$$(pa)^2 + (ga)^2 = (\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2). \quad (3.65)$$

Las expresiones (3.64) y (3.65) son relaciones de dispersión que se utilizarán para determinar  $g$  y  $p$  en función de las cantidades conocidas  $\mathbf{w}$  (o la correspondiente longitud de onda en el vacío  $\mathbf{l}$ ),  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ , el radio  $a$  y el orden  $m$  de la función de Bessel; de estas ecuaciones es posible escribir una ecuación algebraica trascendental respecto a  $g$ :

$$\begin{aligned} & (\mathbf{w}^2 \mathbf{e}_1 \mathbf{m} - g^2)(ma)^2 \left\{ \frac{1}{(ga)^2} + \frac{1}{(\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2} \right\}^2 = \\ & = (\mathbf{w}a)^2 \left\{ \frac{\mathbf{e}_1 J'_m(ga)}{ga J_m(ga)} + \frac{\mathbf{e}_2 K'_m \left( \left( (\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2 \right)^{1/2} \right)}{(\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2 K_m \left( \left( (\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2 \right)^{1/2} \right)} \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\mathbf{m} J'_m(ga)}{ga J_m(ga)} + \frac{\mathbf{m} K'_m \left( \left( (\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2 \right)^{1/2} \right)}{(\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2 K_m \left( \left( (\mathbf{w}a)^2 \mathbf{m}(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) - (ga)^2 \right)^{1/2} \right)} \right\} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Esta ecuación se resuelve por un método numérico gráfico con ayuda del programa para computador MAPLE consistente en los siguientes pasos:

- Se escoge una guía de ondas con salto específica, es decir, se fijan  $\mathbf{w}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{m}$ , y el radio  $a$ .

- Las soluciones para los modos eléctricos y magnéticos (3.16), (3.21), (3.28) y (3.29) dependen del orden  $m$  de las funciones de Bessel. Por lo tanto, se analizan

por separado las soluciones con  $m$  diferentes. Se analizarán las soluciones con  $m$  desde cero hasta 5.

- Después de los reemplazos numéricos de  $w, e_1, e_2, m$ , el radio  $a$  y el orden  $m$  de las funciones de Bessel en (3.66), esta ecuación se resuelve gráficamente con respecto a la incógnita  $g$ . La solución gráfica consiste en construir las curvas de los lados izquierdo y derecho de (3.66) en función de  $g$  con el propósito de establecer los puntos de corte de estas curvas. Para construir estas curvas se establece primeramente el intervalo de variación de  $g$ . Teniendo en cuenta la condición (3.54) y que  $p$  es real, de la ecuación (3.20) se concluye que:

$$w^2 e_2 m - h^2 > 0 . \quad (3.67)$$

Se reemplaza  $h$  a partir de la ecuación (3.15) en (3.64), obteniendo para el dominio de valores físicamente aceptables de  $g$  la siguiente condición:

$$g < w \sqrt{m(e_1 - e_2)} . \quad (3.68)$$

De la condición (3.68) se observa que  $g$  toma valores reales cuando la permitividad en el núcleo  $e_1$  es mayor que la permitividad en la envoltura  $e_2$ :

$$e_1 > e_2 . \quad (3.69)$$

Como consecuencia física de la condición (3.69) se origina en la frontera  $r = a$  el fenómeno de reflexión total interna.

Radio del núcleo de la guía:  $a = 25 * 10^{-6} m$ .

Frecuencia lineal de propagación:  $fr = 0.352 * 10^{15} Hz$ .

Longitud de onda de propagación:  $\lambda = 0.85 * 10^{-6} m$ .

Permitividad relativa del núcleo :  $e_{r1} = 2.1316$ .

Permitividad relativa de la envoltura :  $e_{r2} = 2.102$ .

Permeabilidad relativa del núcleo = Permitividad relativa de la envoltura:  $m_{r1} = m_{r2} = 1$ .

donde  $e_{r1}$ ,  $e_{r2}$  y  $m_r$  son permitividad y permeabilidad relativas respectivamente, las cuales son cantidades adimensionales que vienen relacionadas con la permitividad y permeabilidad absoluta por:

$$e_{r1} = \frac{e_1}{e_0}, \quad e_{r2} = \frac{e_2}{e_0} \quad \text{y} \quad m_r = \frac{m}{m_0} .$$

siendo  $e_0$  y  $m_0$  la permitividad y permeabilidad en el vacío.

En el rango de frecuencias ópticas utilizadas (infrarrojo  $frecuencia \approx 10^{15} Hz$ ), se conoce que los números de onda adquieren valores del orden de  $10^6 m^{-1}$  [11].

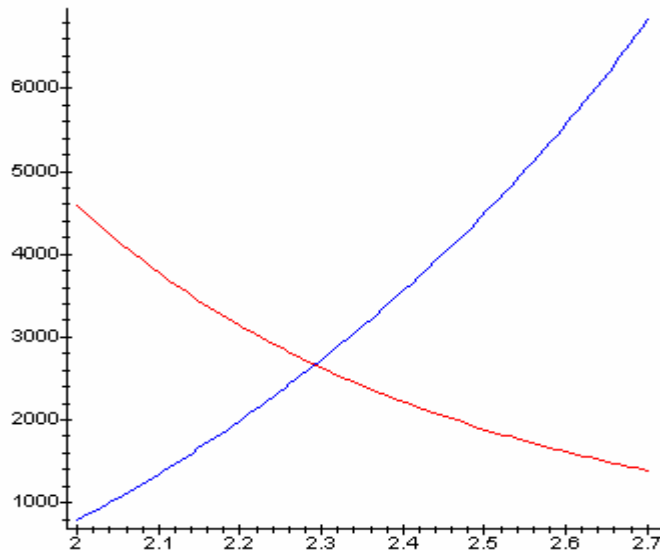
El radio de las guías de onda con salto es del orden de  $10^{-6} m$ . De otra parte en (3.66) aparece el producto  $ga$ , por lo que resulta conveniente realizar en (3.65) las sustituciones

$$g1 = ga, p1 = pa, h1 = ha. \quad (3.70)$$

Esta normalización de los números de onda permite trabajar con cantidades adimensionales y de un orden de magnitud pequeño (10 a 100).

Para ilustrar el método gráfico de determinación de  $g1$ ,  $p1$  y  $h1$  para la guía de onda y la frecuencia anteriormente fijadas, en la Figura 3 se muestra uno de los puntos de corte de las curvas de los lados izquierdo y derecho en función de  $g1$  cuando  $m = 1$ .

**Figura 3. Corte de las curvas de los lados izquierdo y derecho de la ecuación (3.66) en función de  $g1$  cuando  $m = 1$ .**



Estas curvas se construyeron utilizando computador asistido por el programa Maple. Para un  $m$  fijo, las curvas de la figura 3 se cortan alrededor de 15 veces. Cada corte proporciona un valor de  $g1$  que es solución de (3.66). A partir de este valor, utilizando (3.15), (3.65) y (3.70), se calculan  $g1$ ,  $g$ ,  $p1$ ,  $p$ ,  $h1$  y  $h$ . De lo anterior se concluye que para cada frecuencia  $w$  y cada  $m$ , en una guía de onda

con salto se pueden propagar varios modos electromagnéticos híbridos. Con el fin de identificar estos modos se utiliza la terminología modos  $(m, k)$  donde  $k$  es número de corte para un  $m$  fijo. A estos modos corresponden los números de onda  $(h_{m,k}, g_{m,k}, p_{m,k})$ .

Los resultados presentados en los cuadros 1- 6 corresponden a una misma guía de ondas con salto y para parámetros fijos  $(a, e_{r1}, e_{r2}, m_r$  y  $w)$ . De un Cuadro a otro sólo cambia el número  $m$  ( $m$  desde cero hasta cinco). Cada Cuadro contiene los números de onda  $(h_{m,k}, g_{m,k}, p_{m,k})$  para un conjunto de modos  $(m, k)$  con  $m$  fijo.



**Cuadro 1. Números de onda transversales y longitudinales de los modos  $(0, k)$ , ( $m = 0$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.102$  y  $m_r = 1$ .**

Modos (0, k)	$g^1$	$g = \frac{g^1}{a} (m^{-1})$	$h^1$	$h = \frac{h^1}{a} (m^{-1})$	$p^1$	$p = \frac{p^1}{a} (m^{-1})$
(0,1)	3,597	143880	270	10800000	31,34	1253600
(0,2)	3,715	148600	270	10800000	31,33	1253200
(0,3)	6,598	263920	269,94	10797600	30,85	1234000
(0,4)	6,799	271960	269,94	10797600	30,8	1232000
(0,5)	9,591	383640	269,85	10794000	30,05	1202000
(0,6)	9,856	394240	269,85	10794000	29,71	1188400
(0,7)	12,59	503600	269,73	10789200	28,92	1156800
(0,8)	12,9	516000	269,72	10788800	28,79	1151600
(0,9)	15,61	624400	269,57	10782800	27,41	1096400
(0,10)	15,94	637600	269,55	10782000	27,22	1088800
(0,11)	18,63	745200	269,38	10775200	25,46	1018400
(0,12)	18,97	758800	269,36	10774400	25,21	1008400
(0,13)	21,66	866400	269,16	10766400	22,94	917600
(0,14)	21,99	879600	269,13	10765200	22,62	904800
(0,15)	24,7	988000	268,89	10755600	19,36	774400
(0,16)	24,99	999600	268,87	10754800	19,25	770000
(0,17)	27,74	1109600	268,6	10744000	15,03	601200
(0,18)	27,96	1118400	268,57	10742800	14,61	584400
(0,19)	30,74	1229600	268,27	10730800	7,1	284000
(0,20)	30,83	1233200	268,26	10730400	6,7	268000

**Cuadro 2. Números de onda transversales y longitudinales de los modos  $(1, k)$  ( $m = 1$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.102$  y  $m_r = 1$ .**

Modo (1, k)	$g^1$	$g = \frac{g^1}{a} (m^{-1})$	$h^1$	$h = \frac{h^1}{a} (m^{-1})$	$p^1$	$p = \frac{p^1}{a} (m^{-1})$
(1,1)	2,29	88076,9231	270,02	10800800	31,46	1258400
(1,2)	4,89	188076,923	269,98	10799200	31,16	1246400
(1,3)	5,28	203076,923	269,97	10798800	31,1	1244000
(1,4)	7,996	307538,462	269,91	10796400	30,52	1220800
(1,5)	8,309	319576,923	269,9	10796000	30,43	1217200
(1,6)	11,03	424230,769	269,8	10792000	29,55	1182000
(1,7)	11,35	436538,462	269,79	10791600	29,43	1177200
(1,8)	14,06	540769,231	269,66	10786400	28,24	1129600
(1,9)	14,4	553846,154	269,64	10785600	28,07	1122800
(1,10)	17,09	657307,692	269,48	10779200	26,52	1060800
(1,11)	17,43	670384,615	269,46	10778400	26,29	1051600
(1,12)	20,12	773846,154	269,27	10770800	24,3	972000
(1,13)	20,46	786923,077	269,25	10770000	24,01	960400
(1,14)	23,16	890769,231	269,03	10761200	21,42	856800
(1,15)	23,47	902692,308	269	10760000	21,08	843200
(1,16)	26,2	1007692,31	268,75	10750000	17,57	702800
(1,17)	26,46	1017692,31	268,73	10749200	17,18	687200
(1,18)	29,23	1124230,77	268,44	10737600	11,87	474800
(1,19)	29,4	1130769,23	268,42	10736800	11,44	457600

**Cuadro 3. Números de onda transversales y longitudinales de los modos  $(2, k)$  ( $m = 2$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.102$  y  $m_r = 1$ .**

Modos (2,k)	$g1$	$g = \frac{g1}{a} (m^{-1})$	$h1$	$h = \frac{h1}{a} (m^{-1})$	$p1$	$p = \frac{p1}{a} (m^{-1})$
(2,1)	3,647	145880	270	10800000	31,33	1253200
(2,2)	6,089	243560	269,96	10798400	30,95	1238000
(2,3)	6,697	267880	269,94	10797600	30,83	1233200
(2,4)	9,302	372080	269,87	10794800	30,14	1205600
(2,5)	9,744	389760	269,85	10794000	30	1200000
(2,6)	12,4	496000	269,74	10789600	29,01	1160400
(2,7)	12,79	511600	269,72	10788800	28,84	1153600
(2,8)	15,46	618400	269,58	10783200	27,5	1100000
(2,9)	15,84	633600	269,56	10782400	27,28	1091200
(2,10)	18,51	740400	269,39	10775600	25,55	1022000
(2,11)	18,88	755200	269,36	10774400	25,27	1010800
(2,12)	21,57	862800	269,16	10766400	23,02	920800
(2,13)	21,91	876400	269,13	10765200	22,7	908000
(2,14)	24,62	984800	268,9	10756000	19,73	789200
(2,15)	24,92	996800	268,87	10754800	19,35	774000
(2,16)	27,66	1106400	268,6	10744000	15,17	606800
(2,17)	27,9	1116000	268,58	10743200	14,73	589200
(2,18)	30,67	1226800	268,2	10728000	7,4	296000
(2,19)	30,78	1231200	268,27	10730800	6,93	277200

**Cuadro 4. Números de onda transversales y longitudinales de los modos  $(3, k)$  ( $m = 3$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.102$  y  $m_r = 1$ .**

Modos (3, k)	$g1$	$g = \frac{g1}{a} (m^{-1})$	$h1$	$h = \frac{h1}{a} (m^{-1})$	$p1$	$p = \frac{p1}{a} (m^{-1})$
(3,1)	4,884	195360	269,98	10799200	31,17	1246800
(3,2)	7,25	290000	269,93	10797200	30,7	1228000
(3,3)	8,025	321000	269,91	10796400	30,51	1220400
(3,4)	10,56	422400	269,82	10792800	29,73	1189200
(3,5)	11,11	444400	269,8	10792000	29,52	1180800
(3,6)	13,72	548800	269,68	10787200	28,41	1136400
(3,7)	14,18	567200	269,65	10786000	28,18	1127200
(3,8)	16,82	672800	269,5	10780000	26,68	1067200
(3,9)	17,24	689600	269,47	10778800	26,42	1056800
(3,10)	19,91	796400	269,29	10771600	24,47	978800
(3,11)	20,29	811600	269,26	10770400	24,16	966400
(3,12)	22,98	919200	269,05	10762000	21,61	864400
(3,13)	23,32	932800	269,02	10760800	21,25	850000
(3,14)	26,05	1042000	268,77	10750800	17,79	711600
(3,15)	26,33	1053200	268,74	10749600	17,38	695200
(3,16)	29,29	1171600	268,43	10737200	11,72	468800

**Cuadro 5. Números de onda transversales y longitudinales de los modos  $(4, k)$  ( $m = 4$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.102$  y  $m_r = 1$ .**

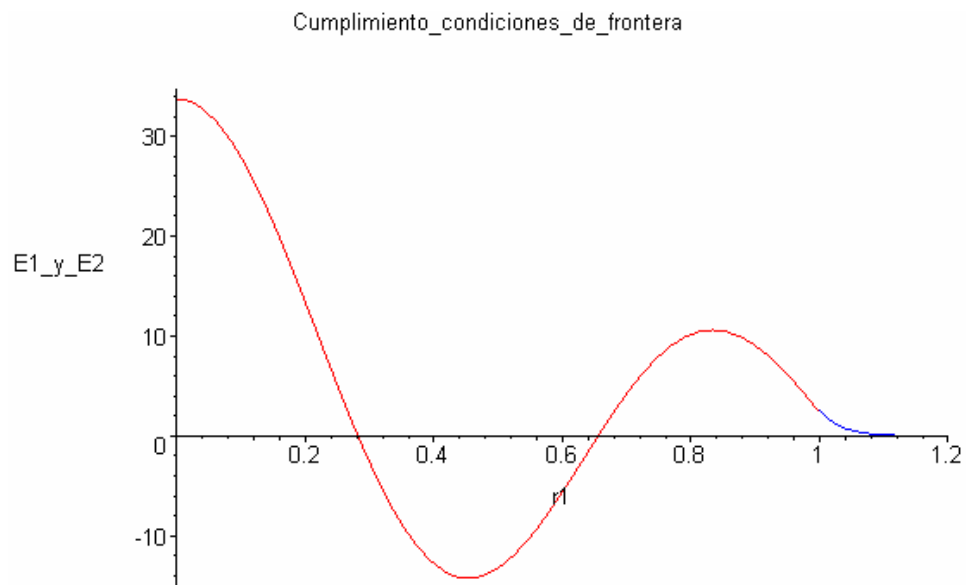
Modos (4,k)	$g1$	$g = \frac{g1}{a} (m^{-1})$	$h1$	$h = \frac{h1}{a} (m^{-1})$	$p1$	$p = \frac{p1}{a} (m^{-1})$
(4,1)	6,059	242360	269,96	10798400	30,96	1238400
(4,2)	8,391	335640	269,89	10795600	30,41	1216400
(4,3)	9,296	371840	269,87	10794800	30,14	1205600
(4,4)	11,8	472000	269,77	10790800	29,26	1170400
(4,5)	12,43	497200	269,74	10789600	28,99	1159600
(4,6)	15,01	600400	269,61	10784400	27,75	1110000
(4,7)	15,53	621200	269,58	10783200	27,46	1098400
(4,8)	18,16	726400	269,41	10776400	25,8	1032000
(4,9)	18,61	744400	269,38	10775200	25,47	1018800
(4,10)	21,27	850800	269,19	10767600	23,3	932000
(4,11)	21,67	866800	269,15	10766000	22,93	917200
(4,12)	24,36	974400	268,92	10756800	20,05	802000
(4,13)	24,71	988400	268,89	10755600	19,61	784400
(4,14)	27,44	1097600	268,63	10745200	15,57	622800
(4,15)	27,71	1108400	268,6	10744000	15,08	603200
(4,16)	30,47	1218800	268,3	10732000	8,18	327200
(4,17)	30,62	1224800	268,28	10731200	7,6	304000

**Cuadro 6. Números de onda transversales y longitudinales de los modos  $(5, k)$  ( $m = 5$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.102$  y  $m_r = 1$ .**

Modos (5, k)	$g1$	$g = \frac{g1}{a} (m^{-1})$	$h1$	$h = \frac{h1}{a} (m^{-1})$	$p1$	$p = \frac{p1}{a} (m^{-1})$
(5,1)	7,196	287840	269,93	10797200	30,71	1228400
(5,2)	9,515	380600	269,86	10794400	30,08	1203200
(5,3)	10,53	421200	269,82	10792800	29,74	1189600
(5,4)	13,01	520400	269,71	10788400	28,74	1149600
(5,5)	13,71	548400	269,68	10787200	28,41	1136400
(5,6)	16,28	651200	269,53	10781200	27,02	1080800
(5,7)	16,85	674000	269,5	10780000	26,67	1066800
(5,8)	19,47	778800	269,32	10772800	24,82	992800
(5,9)	19,95	798000	269,29	10771600	24,44	977600
(5,10)	22,61	904400	269,08	10763200	22	880000
(5,11)	23,01	920400	269,04	10761600	21,58	863200
(5,12)	25,72	1028800	268,8	10752000	18,27	730800
(5,13)	26,06	1042400	268,76	10750400	17,78	711200
(5,14)	28,8	1152000	268,49	10739600	12,88	515200
(5,15)	29,04	1161600	268,46	10738400	12,33	493200

Cada uno de los modos  $(m, k)$  que se determinaron, y que se indican en los Cuadros 1 – 6, cumplen las condiciones de frontera dadas por la ecuación (2.45), lo que físicamente significa que el número de onda  $g_{mk}$  que hace parte del argumento de la función  $J_{mk}(gr)$  debe ser tal que en la frontera  $r = a$  se encuentre en la región de uno de los semiperiodos de la función  $J_{mk}(gr)$  dependiendo del modo  $(m, k)$ . El cumplimiento de las condiciones de frontera se ilustra en la Figura 4.

**Figura 4. Demostración grafica del cumplimiento de las condiciones de frontera para el modo (1,1).**



A continuación se examina la dependencia con respecto a la frecuencia  $\omega$  del número de onda  $h_{m,k}$  de los modos  $(m, k)$ , con este propósito, se fijan los parámetros de la guía de ondas:  $a = 25 \cdot 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$  (los mismos que se utilizaron en los Cuadros 1 - 6). Para cada modo  $(m, k)$  se calculan los valores de  $h_{m,k}$  para diferentes valores de la frecuencia  $\omega$  dentro del rango del infrarrojo ( $1 : 10^{-3} m - 7 \cdot 10^{-7} m$ ). En total se examinaron los modos:  $m = 0$  hasta  $m = 5$ . El procedimiento es el siguiente. Se acostumbra introducir la frecuencia normalizada  $V$ :

$$V = \frac{\omega a}{c} m_r (e_{r1} - e_{r2}) . \quad (3.71)$$

y el número de onda longitudinal normalizado  $b_{m,k}$ :

$$b_{m,k} = \frac{h_{m,k}^2 - h_2^2}{h_1^2 - h_2^2} \quad (3.72)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío y

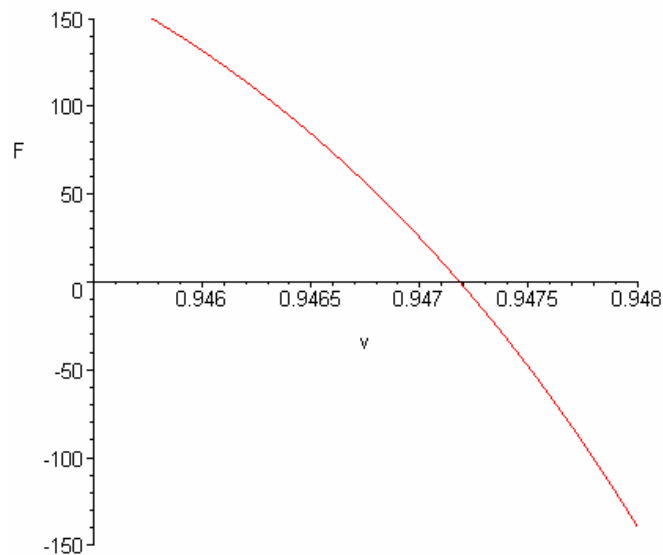
$$h_1 = w\sqrt{\mathbf{e}_0 \mathbf{m} \mathbf{e}_{r1} \mathbf{m}_{r1}} \quad \text{y} \quad h_2 = w\sqrt{\mathbf{e}_0 \mathbf{m} \mathbf{e}_{r2} \mathbf{m}_{r2}} \quad (3.73)$$

Las cantidades (3.72) y (3.73) son adimensionales y en el rango del infrarrojo adquieren valores pequeños del orden de 10.

Teniendo en cuenta lo anterior se observa que en la ecuación (3.66), que sirve de base para los cálculos, se han fijado todas las cantidades que intervienen en la misma, excepto  $V$  y  $b_{m,k}$ . Por lo tanto, (3.66) se puede utilizar para calcular  $b_{m,k}$  en función de  $V$ : se asignan valores a  $V$  y se encuentran los valores correspondientes de  $b_{m,k}$ . Se utiliza el método gráfico: para cada  $V$  se determina el valor de  $b_{m,k}$  por medio del corte de la resta del lado izquierdo menos el derecho de (3.66) con el eje  $x$  como se ilustra en la Figura 5. En los cálculos se utilizó un procedimiento computacional asistidos por MAPLE. Los resultados se presentan en los Cuadros 7-12 con base en las cuales se construyen las curvas de  $b_{m,k}$  en función de  $V$  de la Figura 6 .

**Figura 5. Corte de f1-f2 con el eje x para el modo (3,1).**

Punto\_de\_corte\_de\_F\_con\_el\_eje\_x





**Cuadro 7. Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (0,1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (0,1)	
$V$	$b_{m,k}$
31,55	0,987
30	0,986
29	0,985
28	0,984
27	0,983
26	0,9813
25	0,980
24	0,978
23	0,9765
22	0,9745
21	0,9722
20	0,9696
19	0,9667
18	0,9632
17	0,9592
16	0,9545
15	0,9489
14	0,9422
13	0,934
12	0,924
11	0,9115
10	0,8955
9	0,8746
8.5	0,8617
8	0,8466
7.5	0.8288
7	0.8076
6.5	0.7821
6	0.7508
5.5	0.7123
5	0.6635
4.5	0.6005
4	0.5174
3.5	0.4041
3	0.2468
2.5	0.03602

**Cuadro 8. Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (1, 1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (1,1)	
$V$	$b_{m,k}$
31,55	0,9761
30	0,9735
29	0,9718
28	0,9699
27	0,9678
26	0,9654
25	0,9627
24	0,9597
23	0,9563
22	0,9525
21	0,9482
20	0,9433
19	0,9376
18	0,9311
17	0,9234
16	0,9144
15	0,9036
14	0,8907
13	0,875
12	0,8555
11	0,831
10	0,7996
9	0,7584
8.5	0,7328
8	0,7027
7.5	0,6671
7	0,6246
6.5	0,5733
6	0,5104
5.5	0,4324
5	0,3343
4.5	0,2098
4	0,05491

**Cuadro 9. Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (2, 1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (2,1)	
$V$	$b_{m,k}$
31,55	0,9627
30	0,959
29	0,9562
28	0,9533
27	0,9499
26	0,9462
25	0,942
24	0,9374
23	0,9321
22	0,9262
21	0,9194
20	0,9118
19	0,9028
18	0,8925
17	0,8804
16	0,8662
15	0,8491
14	0,8287
13	0,8037
12	0,7727
11	0,7337
10	0,6834
9	0,6173
8.5	0,5762
8	0,5278
7.5	0,4707
7	0,4025
6.5	0,3205
6	0,2211
5.5	0,1007

**Cuadro 10. Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (3,1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (3,1)	
$V$	$b_{m,k}$
31,55	0.9472
30	0.9418
29	0.938
28	0.9336
27	0.9289
26	0.9236
25	0.9176
24	0.911
23	0.9035
22	0.8951
21	0.8854
20	0.8744
19	0.8616
18	0.8468
17	0.8295
16	0.809
15	0.7846
14	0.7552
13	0.7192
12	0.6746
11	0.6181
10	0.5457
9	0.4502
8.5	0.3908
8	0.3213
7.5	0.2396
7	0.1432

**Cuadro 10. Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (3,1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (3,1)	
$V$	$b_{m,k}$
31,55	0.9472
30	0.9418
29	0.938
28	0.9336
27	0.9289
26	0.9236
25	0.9176
24	0.911
23	0.9035
22	0.8951
21	0.8854
20	0.8744
19	0.8616
18	0.8468
17	0.8295
16	0.809
15	0.7846
14	0.7552
13	0.7192
12	0.6746
11	0.6181
10	0.5457
9	0.4502
8.5	0.3908
8	0.3213
7.5	0.2396
7	0.1432

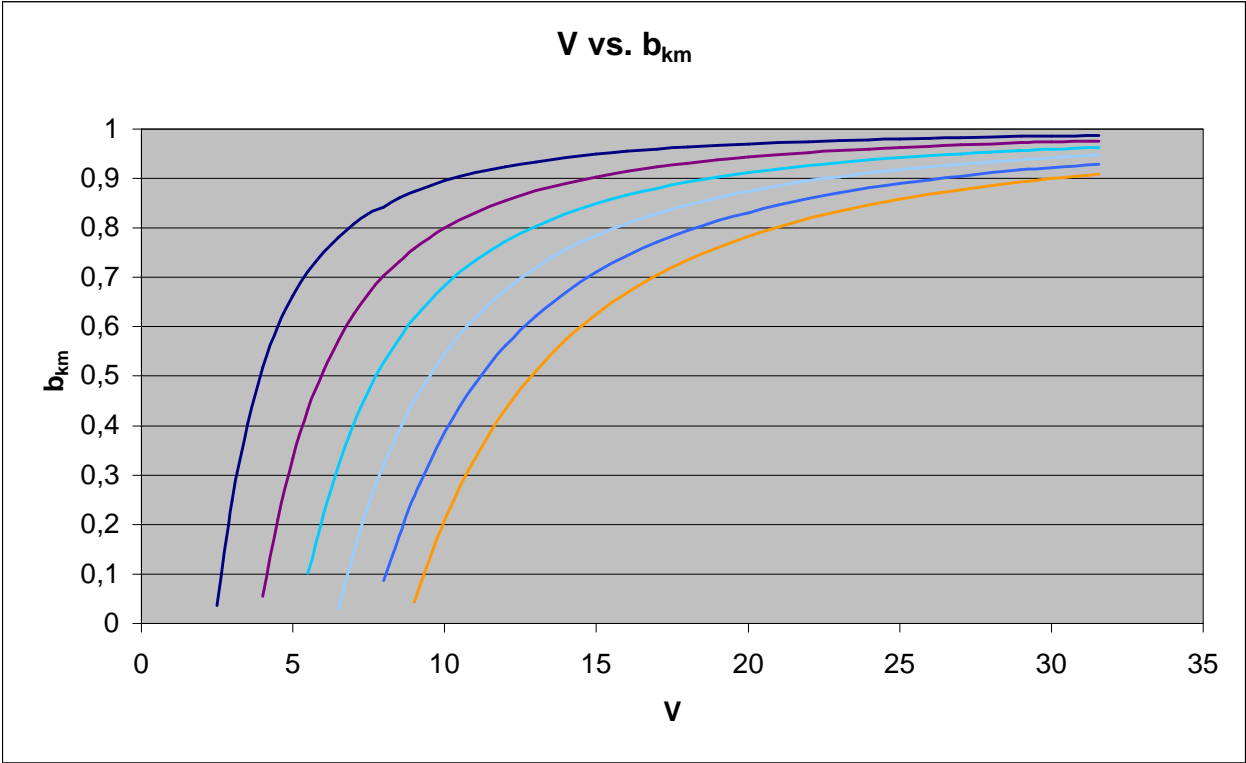
**Cuadro 11. Dependencia del número de onda  $b_{m,k}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (4,1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (4,1)	
$V$	$b_{m,k}$
31,55	0.9293
30	0.9221
29	0.9168
28	0.9111
27	0.9046
26	0.8975
25	0.8895
24	0.8807
23	0.8706
22	0.8592
21	0.8461
20	0.8313
19	0.8141
18	0.7942
17	0.7708
16	0.7432
15	0.7102
14	0.6704
13	0.6216
12	0.5612
11	0.4849
10	0.3868
9	0.2583
8.5	0.1787
8	0.08695

**Cuadro 12. Dependencia del número de onda  $b_{mk}$  respecto a la frecuencia  $V$  para el modo (5,1) en una guía de ondas con salto de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ .**

Modo (5,1)	
$V$	$b_{mk}$
31,55	0.9091
30	0.8998
29	0.893
28	0.8856
27	0.8773
26	0.8682
25	0.8579
24	0.8464
23	0.8334
22	0.8186
21	0.8019
20	0.7827
19	0.7604
18	0.7347
17	0.7043
16	0.6686
15	0.6259
14	0.5744
13	0.5113
12	0.4331
11	0.3345
10	0.2082
9	0.4402

**Figura 6. Curvas de dispersión del número de onda  $b_{mk}$  en función de la frecuencia  $V$  para los modos  $(m, k)$  en una guía de ondas con salto ( $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.1316$ ,  $e_{r2} = 2.1025$ ,  $m_r = 1$ )**





Cada curva de la Figura 6 presenta una frecuencia de corte  $V_{c,mk}$  en la región de las frecuencias bajas, es decir, cada modo  $(m, k)$  existe solo a partir de  $V \geq V_{c,mk}$ .

Al aumentar la frecuencia el número de onda  $b_{m,k}$  crece monótonamente y tiende a alcanzar un valor máximo finito. También se observa que en el intervalo de  $V$  entre las frecuencias de corte de los modos  $(0,1)$  y  $(1,1)$  se propaga sólo el modo  $(0,1)$ ; para  $V \geq V_{c,(0,1)}$  se puede propagar más de un modo.

### 3.6 EXPRESIONES PARA LAS COMPONENTES DEL CAMPO DE LOS MODOS ELECTROMAGNÉTICOS EN UNA GUÍA DE ONDA CON SALTO.

Las expresiones para las componentes del campo de los modos electromagnéticos examinados anteriormente se expresan así:

Para el núcleo, teniendo en cuenta (3.59), (3.30) – (3.35) y (3.42) – (3.47):

$$\tilde{E}_{z\Sigma} = J_m(gr)C_1 \cos(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.74)$$

$$\tilde{E}_{r\Sigma} = -\left\{ \frac{h}{g} J'_m(gr)C_1 + \frac{\mathbf{wm}_1 m}{rg^2} J_m(gr)C_4 \right\} \cos(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.75)$$

$$\tilde{E}_{j\Sigma} = \left\{ \frac{hm}{rg^2} J_m(gr)C_1 + \frac{\mathbf{wm}_1 r}{g} J'_m(gr)C_4 \right\} \text{sen}(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.76)$$

$$\tilde{H}_{z\Sigma} = J_m(gr)C_4 \text{sen}(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.77)$$

$$\tilde{H}_{r\Sigma} = -\left\{ \frac{\mathbf{we}_1 m}{rg^2} J_m(gr)C_1 + \frac{h}{g} J'_m(gr)C_4 \right\} \text{sen}(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.78)$$

$$\tilde{H}_{j\Sigma} = -\left\{ \frac{\mathbf{we}_1}{g} J'_m(gr)C_1 + \frac{hm}{rg^2} J_m(gr)C_4 \right\} \cos(m\mathbf{j})e^{-jhz}. \quad (3.79)$$

Para la envoltura, teniendo en cuenta (3.59), (3.36) – (3.41) y (3.48) – (3.53):

$$\tilde{E}_{z1\Sigma} = K_m(pr)C_5 \cos(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.80)$$

$$\tilde{E}_{r1\Sigma} = j \left\{ \frac{h}{p} K'_m(pr)C_5 + \frac{\mathbf{wm}_2 m}{rp^2} K_m(gr)C_8 \right\} \cos(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.81)$$

$$\tilde{E}_{1j\Sigma} = -\left\{ \frac{hm}{rp^2} K_m(pr)C_5 + \frac{\mathbf{wm}_2}{p} K'_m(pr)C_8 \right\} \text{sen}(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.82)$$

$$\tilde{H}_{z1\Sigma} = K_m(pr)C_8 \text{sen}(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.83)$$

$$\tilde{H}_{r1\Sigma} = \left\{ \frac{\mathbf{we}_2 m}{rp^2} K_m(pr)C_5 + \frac{h}{p} K'_m(pr)C_8 \right\} \text{sen}(m\mathbf{j})e^{-jhz}, \quad (3.84)$$

$$\tilde{H}_{j1\Sigma} = j \left\{ \frac{\mathbf{w}e_2}{p} K'_m(pr)C_5 + \frac{hm}{rp^2} K_m(pr)C_8 \right\} \cos(m\mathbf{j})e^{-jhz}. \quad (3.85)$$

En estas expresiones intervienen la frecuencia  $\mathbf{w}$ , las permitividades  $e_1, e_2$ , la permeabilidad  $m$ ; los números de onda para cada modo  $(m, k)$  se toman de los diferentes Cuadros disponibles en la literatura sobre guías de ondas. Igualmente las expresiones para el campo están en función de las amplitudes constantes  $C_4, C_5, C_8$  y  $C_1$ , sin embargo utilizando las relaciones (3.55), (3.56) las tres primeras se pueden expresar en términos de  $C_1$ ;  $C_1$  se mantiene indeterminada debido a que se partió de las ecuaciones de Maxwell sin fuente.

#### 4. GUIAS DE ONDAS CON GRADIENTE RADIAL DE LA PERMITIVIDAD

En este capítulo se examina la propagación de ondas electromagnéticas en una guía de ondas dieléctrica cilíndrica cuando la permitividad  $\epsilon$  del núcleo depende de la coordenada radial  $r$  y la permitividad  $\epsilon$  de la envoltura es constante; la permeabilidad  $\mu$  es común para toda la guía de ondas, estas se conocen como guías de ondas con gradiente radial de la permitividad. La dependencia de  $\epsilon$  respecto a  $r$  puede crear condiciones para la propagación de ondas guiadas a lo largo del eje  $z$  (ver Figura 1). Estas propiedades electromagnéticas se formulan analíticamente así:

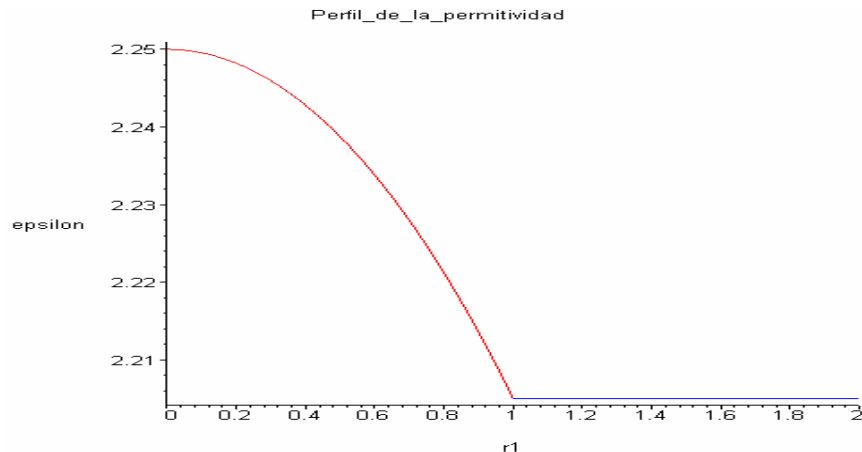
$$\epsilon_r(r) = \begin{cases} \epsilon_{r1} \left( 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) & \text{para } 0 \leq r \leq a \\ \epsilon_{r1} (1 - 2\Delta) = \epsilon_{r2} & \text{para } r > a \end{cases},$$

$$\mu_r = \text{const. para todo } r,$$

$$s = 0 \text{ para todo } r. \quad (4.1)$$

donde  $a$  es el radio del núcleo de la guía y  $\Delta = \frac{\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}}{2\epsilon_{r1}}$ , siendo  $\epsilon_{r1}$  es el valor de la permitividad en  $r = 0$  y  $\epsilon_{r2}$  el valor de la permitividad constante en la envoltura de la guía. En la Figura 7 se muestra la dependencia de  $\epsilon_r$  con respecto a  $r$  dada en (4.1).

**Figura 7. Gráfica de  $\epsilon_r$  vs.  $r$  de una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad cuando  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,  $\Delta = 0.01$  y  $a = 2$ .**



Se estudiará la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas, se requiere construir soluciones que satisfagan las ecuaciones de Maxwell (2.4) - (2.7) sin fuentes:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{H}} = j\omega \mathbf{e}(r) \vec{\tilde{E}} \quad , \quad (4.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\tilde{E}} = -j\omega \mathbf{m} \vec{\tilde{H}} \quad , \quad (4.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{D}} = 0 \quad , \quad (4.4)$$

$$\nabla \cdot \vec{\tilde{B}} = 0. \quad (4.5)$$

donde  $\mathbf{e}(r)$  esta dado por (4.1) y  $\mathbf{m}$  es constante. Además, se cumplen las relaciones constitutivas (2.2) y (2.3) y las condiciones de frontera (2.45).

Se examinará la posibilidad de construir modos electromagnéticos a partir de modos eléctricos y modos magnéticos.

#### 4.1 MODOS ELECTRICOS

Las cantidades ( $E_{rc}$ ,  $E_{qc}$ ,  $E_{zc}$ ) se rigen por el conjunto de ecuaciones (2.26) – (2.31) en las cuales  $\mathbf{e} = \mathbf{e}(r)$  y  $\mathbf{m}$  es constante.

El presente trabajo se limita al estudio de una guía de ondas en la cual la permitividad  $\mathbf{e}(r)$  de la forma (4.1), cumple la condición:

$$\left| \frac{d\mathbf{e}(r)/dr}{\mathbf{e}(r)} \right| \ll 1. \quad (4.6)$$

Este caso es de gran interés para la fabricación de guías de ondas dieléctricas ya que todas las guías de onda con gradiente radial de la permitividad que se fabrican cumplen la condición (4.6). Teniendo en cuenta (4.6), la ecuación (2.32) se simplifica así:

$$\frac{\partial(rE_{rc})}{\partial r} + \frac{\partial E_{qc}}{\partial q} = -h^2 E_{zc}. \quad (4.7)$$

A partir de (4.7) y (2.30) se obtiene la ecuación para la componente longitudinal  $E_{zc}$ :

$$\frac{1}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_{zc}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 E_{zc}}{\partial q^2} \right\} + (\mathbf{w}^2 \mathbf{m} \mathbf{e}(r) - h^2) E_{zc} = 0 \quad . \quad (4.8)$$

## 4.2 MODOS MAGNÉTICOS

Las ecuaciones para las componentes transversales y longitudinal del campo en los modos magnéticos, a partir de los modos eléctricos aplicando el principio de dualidad de permutación (2.39) son :

$$\mathbf{w}\mathbf{m}H_{rc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}\mathbf{e}(r)}H_{rc} = \frac{j}{\mathbf{w}\mathbf{e}(r)}\frac{\partial H_{zc}}{\partial r}, \quad (4.9)$$

$$-\mathbf{w}\mathbf{m}H_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}\mathbf{e}(r)}H_{qc} = \frac{jh}{\mathbf{w}\mathbf{e}(r)}\frac{1}{r}\frac{\partial H_{zc}}{\partial q}, \quad (4.10)$$

$$-E_{qc} + \frac{h^2}{\mathbf{w}^2\mathbf{m}\mathbf{e}(r)}E_{qc} = \frac{j}{\mathbf{w}\mathbf{e}(r)}\frac{\partial H_{zc}}{\partial r}, \quad (4.11)$$

$$E_{rc} - \frac{h^2}{\mathbf{w}^2\mathbf{m}\mathbf{e}(r)}E_{rc} = -\frac{j}{\mathbf{w}\mathbf{e}(r)}\frac{1}{r}\frac{\partial H_{zc}}{\partial q}. \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial H_{zc}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 H_{zc}}{\partial q^2}\right\} + (\mathbf{w}^2\mathbf{m}\mathbf{e}(r) - h^2)H_{zc} = 0. \quad (4.13)$$

## 4.3 DETERMINACION DE LAS SOLUCIONES PARA LAS COMPONENTES LONGITUDINALES

Las ecuaciones (4.8) y (4.13) son matemáticamente idénticas por lo que se examinarán de manera unificada:

$$\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial q^2}\right\} + (\mathbf{w}^2\mathbf{m}\mathbf{e}(r) - h^2)\Psi = 0. \quad (4.14)$$

donde  $\Psi(r, q)$  representa  $E_{zc}$  o  $H_{zc}$ .

Utilizando separación de variables en la ecuación (4.14):

$$\Psi(r, q) = \mathbf{y}(r)\mathbf{f}(q), \quad (4.15)$$

se obtiene:

$$\frac{1}{\mathbf{f}}\frac{d^2\mathbf{f}}{dq^2} = -m^2, \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathbf{y}}{dr} + \left(\mathbf{w}^2\mathbf{m}\mathbf{e}(r) - h^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)\mathbf{y} = 0, \quad (4.17)$$

donde  $m$  es una constante de separación.

Interesa encontrar soluciones que satisfagan las ecuaciones (4.16) y (4.17) y cumplan las siguientes condiciones:

- Los modos se encuentran confinados dentro de la guía de ondas.
- Los campos electromagnéticos son finitos y unívocos en cada punto y en cada instante.

Las ondas electromagnéticas en esta guía de ondas no se basan en el fenómeno de reflexión total interna en  $r = a$ . La ausencia de reflexión total interna implica que la solución de (4.16) es tipo onda viajera:

$$\mathbf{f}(\mathbf{q}) = A \exp(-im\mathbf{q}) + B \exp(im\mathbf{q}), \quad (4.18)$$

donde el número  $m$  se toma entero ( $m = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) para que la solución sea unívoca.

En la envoltura,  $\mathbf{e}(r) = \mathbf{e}_2 = cte$  y la ecuación (4.17) se reduce a la ecuación de Bessel, su solución se escoge de manera que el campo decaiga con  $r$ , condición que satisface la función de Bessel modificada de segundo genero de orden  $m$ ,  $K_m(-jhr)$ :

$$\mathbf{y}(r) = DK_m(-jhr). \quad (4.19)$$

En el núcleo de la guía de ondas,  $\mathbf{e}$  depende de  $r$  y por lo tanto la ecuación (4.17) no es la ecuación de Bessel; teniendo en cuenta la condición (4.6), es valido utilizar el método aproximado WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin) para solucionarla [12, 13, 14].

4.3.1 Método Aproximado WKB: Se trata de encontrar la solución de la ecuación (4.17):

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{y}}{dr} + \left( \mathbf{w}^2 \mathbf{m}_0 \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_r(r) - h^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \mathbf{y} = 0, \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{e}(r) = \mathbf{e}_0 \mathbf{e}_r(r)$  y  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \mathbf{m}_r$ , siendo  $\mathbf{e}_0$ ,  $\mathbf{m}_0$  la permitividad y la permeabilidad en el vacío y  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{m}_r$  la permitividad y la permeabilidad relativas que según (4.1) están dadas por:

$$\mathbf{m}_r = const. \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_r(r) = \mathbf{e}_{r1} \left( 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right).$$

La ecuación (4.19) se puede reescribir así:

$$\frac{d^2 \mathbf{y}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{y}}{dr} + k_0^2 \left( \mathbf{m}_r \mathbf{e}_r(r) - \frac{h^2}{k_0^2} - \frac{m^2}{k_0^2 r^2} \right) \mathbf{y} = 0. \quad (4.18)$$

donde  $k_0$  es el numero de onda en el vacío:

$$k_0^2 = \mathbf{w}^2 \mathbf{e}_0 \mathbf{m}_0. \quad (4.19)$$

La solución para  $\mathbf{y}(r)$  se busca de la forma [15,16,17]:

$$\mathbf{y}(r) = \mathbf{y}_0 \exp(jk_0 S(r)), \quad (4.20)$$

donde  $\mathbf{y}_0$  es una constante y  $S(r)$  es una función de  $r$  desconocida.

En el intervalo de frecuencias ópticas, el número de onda  $k_0$  (4.19) adquiere valores grandes, por lo tanto, es valido desarrollar la función  $S(r)$  en serie de potencias de  $\frac{1}{k_0}$ :

$$S(r) = S_0(r) + k_0^{-1} S_1(r) + k_0^{-2} S_2(r) + \dots \quad (4.21)$$

En lo sucesivo la serie (4.21) se aproximará a los dos primeros términos; por lo tanto la solución para  $S(r)$  es:

$$S(r) = \pm \int \left( k_0^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_r(r) - h^2 - \frac{m^2}{r^2} \right)^{1/2} dr + \frac{j}{2k_0} \ln \left( \frac{r}{k_0} \left( k_0^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_r(r) - h^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) \right) + cte \quad (4.22)$$

La solución general para  $\mathbf{y}(r)$  se obtiene reemplazando la solución (4.22) en (4.20):

$$\mathbf{y}(r) = \frac{1}{[r f(r)]^{1/2}} \left[ C_1 \exp(j \int f(r) dr) + C_2 \exp(-j \int f(r) dr) \right], \quad (4.23)$$

donde:

$$f(r) = \left( k_0^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_r - h^2 - \frac{m^2}{r^2} \right)^{1/2}. \quad (4.24)$$

Ya que  $\Psi(r, \mathbf{q})$  representa a  $E_{zc}$  o a  $H_{zc}$ , la componente longitudinal del campo eléctrico en el núcleo de la guía de ondas para los modos eléctricos se obtiene combinando (2.16), (4.15), (4.18) y (4.23):

$$\tilde{E}_z(r, \mathbf{q}, z) = \frac{1}{(k_0^2 r^2 \mathbf{e}_r(r) \mathbf{m}_r - r^2 h^2 - m^2)^{1/4}} \left[ C_1 \exp(j \int f(r) dr) + C_2 \exp(-j \int f(r) dr) \right] \cdot \exp(-j m \mathbf{q}) + B \exp(j m \mathbf{q}) \cdot \exp(-j h z) \quad (4.25)$$

En la solución WKB (4.23) interviene la exponencial  $\exp(j \int f(r) dr)$  y se pueden presentar dos situaciones: cuando  $f(r) \in \Re$  la solución es oscilante y cuando  $f(r) \in C$  la solución es exponencial. De acuerdo con (4.24) y (4.1) la desigualdad  $f(r) \geq 0$  se escribe así:

$$k_0^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} \left( 1 - 2\Delta \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right) \geq \frac{m^2}{r^2} + h^2. \quad (4.26)$$

Teniendo en cuenta que los números de ondas  $k_0$  y  $h$  en el intervalo óptico adquieren valores grandes (del orden de  $10^8 m^{-1}$ ) mientras que las guías de ondas que se fabrican para este intervalo poseen radios pequeños (radio  $a$  del orden de  $10^{-6} m$ ), es conveniente introducir la siguiente notación en (4.26):

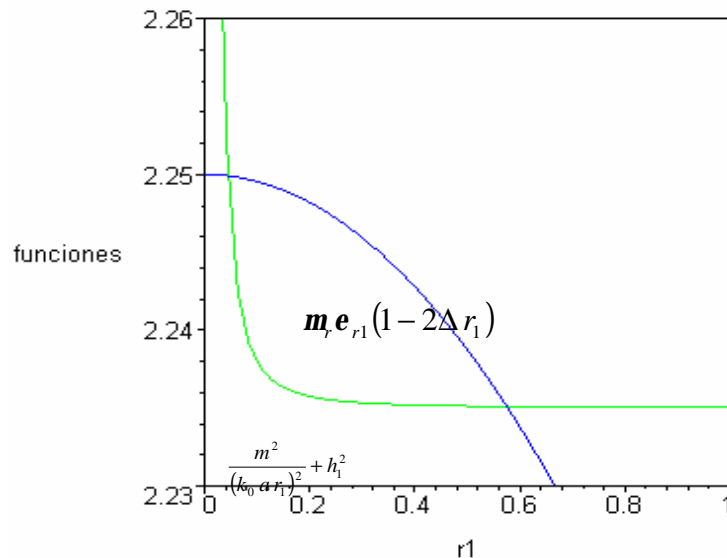
$$h_1 = \frac{h}{k_0} \quad \text{y} \quad r_1 = \frac{r}{a}.$$

Aplicando esta notación, (4.26) adquiere la forma.

$$\mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} (1 - 2\Delta r_1^2) \geq \frac{m^2}{(k_0 a r_1)^2} + h_1^2. \quad (4.27)$$

En la Figura 8 se muestra la solución gráfica de (4.27) cuando  $\mathbf{e}_{r_1} = 2.25$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $\mathbf{m}_r = 1$ ,  $w = 0.2215 * 10^{16} \text{ rad / Hz}$ ,  $m = 1$  y  $h_1 = 1.495 m^{-1}$ , siendo  $r_1$  la variable independiente. Las curvas azul y verde representan los lados izquierdo y derecho de (4.38), respectivamente.

**Figura 8. Solución gráfica de la desigualdad (4.27) cuando  $\mathbf{e}_{r_1} = 2.25$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $\mathbf{m}_r = 1$ ,  $w = 0.2215 * 10^{16} \text{ rad / Hz}$ ,  $m = 1$  y  $h_1 = 1.495 m^{-1}$**





En el intervalo de  $r_1$  en el cual la curva azul esta por encima de la verde,  $f(r_1)$  es positiva y la solución es oscilante; fuera de este intervalo la solución es exponencial.

Continuando con el análisis de la solución WKB (4.23), se identifican las siguientes singularidades: en  $r_1 = 0$  la función  $f(r_1)$  de (4.24):

$$f(r_1) = \left( k_0^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} (1 - 2\Delta r_1^2) - h^2 - \frac{m^2}{(r_1 a)^2} \right)^{1/2},$$

no esta definida; existen ciertos valores de  $r_1$  para los cuales el denominador que aparece en (4.23) se hace igual a cero:

$$r_1^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} (1 - 2\Delta r_1^2) - r_1^2 h_1^2 - \frac{m^2}{(k_0 a)^2} = 0. \quad (4.28)$$

Las raíces de (4.28) con respecto a  $r_1$  son:

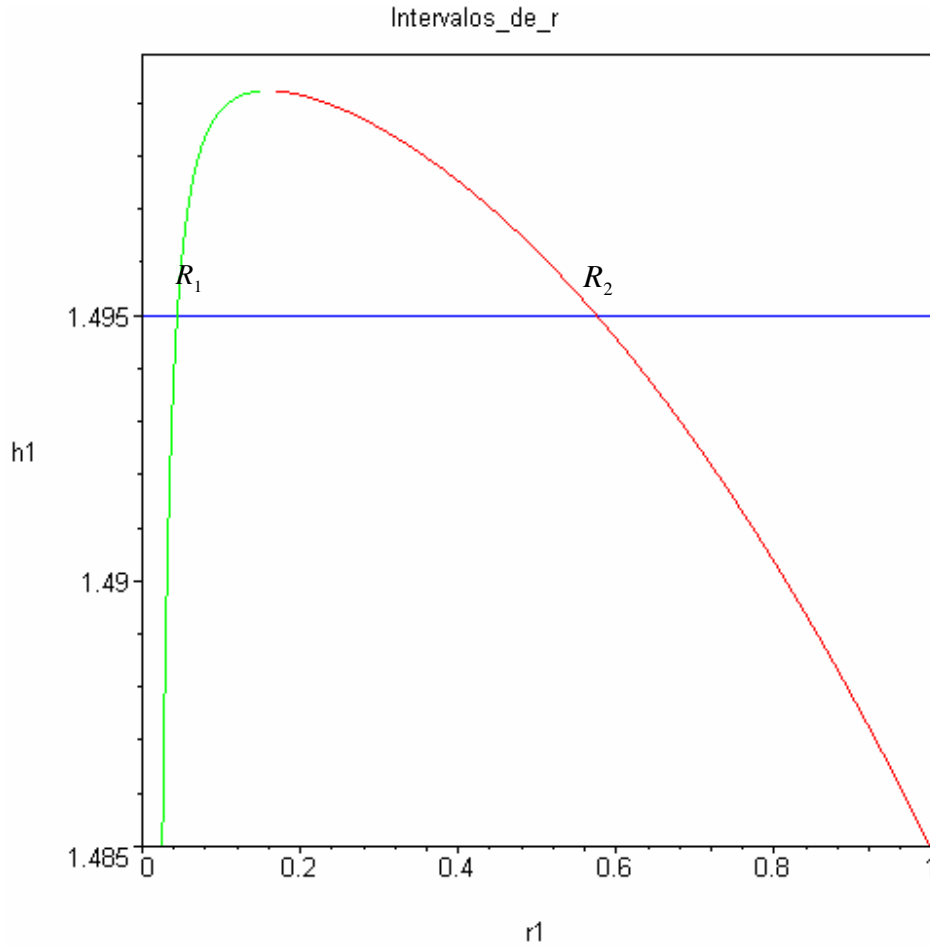
$$R_{1,2}^2 = \frac{1}{4\mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} \Delta} \left( (\mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} - h_1^2) \pm \left[ \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} - h_1^2 - \frac{8\Delta \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} m^2}{(k_0 a)^2} \right]^{1/2} \right). \quad (4.29)$$

De (4.29) se deduce que los radios  $R_{1,2}$  son reales cuando los valores de  $h_1$  pertenecen al intervalo:

$$\sqrt{\mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} - 2\Delta \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} - \frac{m^2}{(k_0 a)^2}} \leq h_1 \leq \sqrt{\mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} - \frac{\sqrt{8\Delta \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} m}}{k_0 a}} \quad (4.30)$$

En la Figura 9 se ha graficado  $R_1$  y  $R_2$  cuando  $\mathbf{e}_{r_1} = 2.25$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $\mathbf{m}_r = 1$ ,  $\omega = 0.2215 * 10^{16} \text{ rad / Hz}$ ,  $m = 1$ , siendo  $h_1$  la variable independiente (en el eje vertical).

**Figura 9. Intervalos de atenuación y propagación para un  $h_1$  dado.**



Las curvas verde y roja representan el comportamiento de los radios  $R_1$  y  $R_2$  en función de  $h_1$  respectivamente. La recta horizontal azul representa  $h_1 = 1.495$  que pertenece al intervalo dado por (4.30). Los puntos de intersección de la recta con las curvas determinan los valores de  $R_1$  y  $R_2$  para el  $h_1$  dado. Lo anterior permite destacar los siguientes intervalos de  $r_1$ :

Intervalo  $r_1 < R_1$  y  $r_1 > R_2$  donde la solución WKB (4.23) es exponencial creciente o decreciente y intervalo  $R_1 \leq r_1 \leq R_2$  donde la solución WKB (4.23) es oscilante.

#### 4.4 DETERMINACION DEL NUMERO DE ONDA $h$

Las constantes de integración  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D$  y el número de onda  $h$  se determinan a partir de la condición de continuidad del campo electromagnético en  $R_1$ ,  $R_2$  y  $r_1 = a$ . A continuación se examina el procedimiento necesario para la aplicación de esta condición de continuidad.

El método WKB ha sido ampliamente utilizado en la mecánica cuántica donde se han determinado formulas de conexión entre las soluciones a la izquierda y derecha de los puntos  $R_1$  y  $R_2$  [3,4]. Desarrollando una analogía entre la mecánica cuántica y la óptica cuando la permitividad  $\epsilon(r)$  varia lentamente (4.6), las formulas de conexión para el caso óptico se escriben así.

En  $r_1 = R_2$ :

$$\frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \cos \left[ a \int_{r_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4} \right] \leftrightarrow \frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \exp \left[ -a \int_{R_2}^{r_1} |f(r_1)| dr_1 \right], \quad (4.31)$$

$$\frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \text{sen} \left[ a \int_{r_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4} \right] \leftrightarrow -\frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \exp \left[ a \int_{R_2}^{r_1} |f(r_1)| dr_1 \right]. \quad (4.32)$$

De acuerdo con (4.31), la solución oscilante a la izquierda de  $R_2$  se conecta con la solución exponencialmente decreciente a la derecha de  $R_2$ . Según (4.32), la solución oscilante a la izquierda de  $R_2$  esta asociada con una solución exponencial que tiende a menos infinito.

En  $r_1 = R_1$ :

$$\frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \exp \left[ -a \int_{r_1}^{R_1} |f(r_1)| dr_1 \right] \leftrightarrow \frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \cos \left[ a \int_{R_1}^{r_1} |f(r_1)| dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4} \right], \quad (4.33)$$

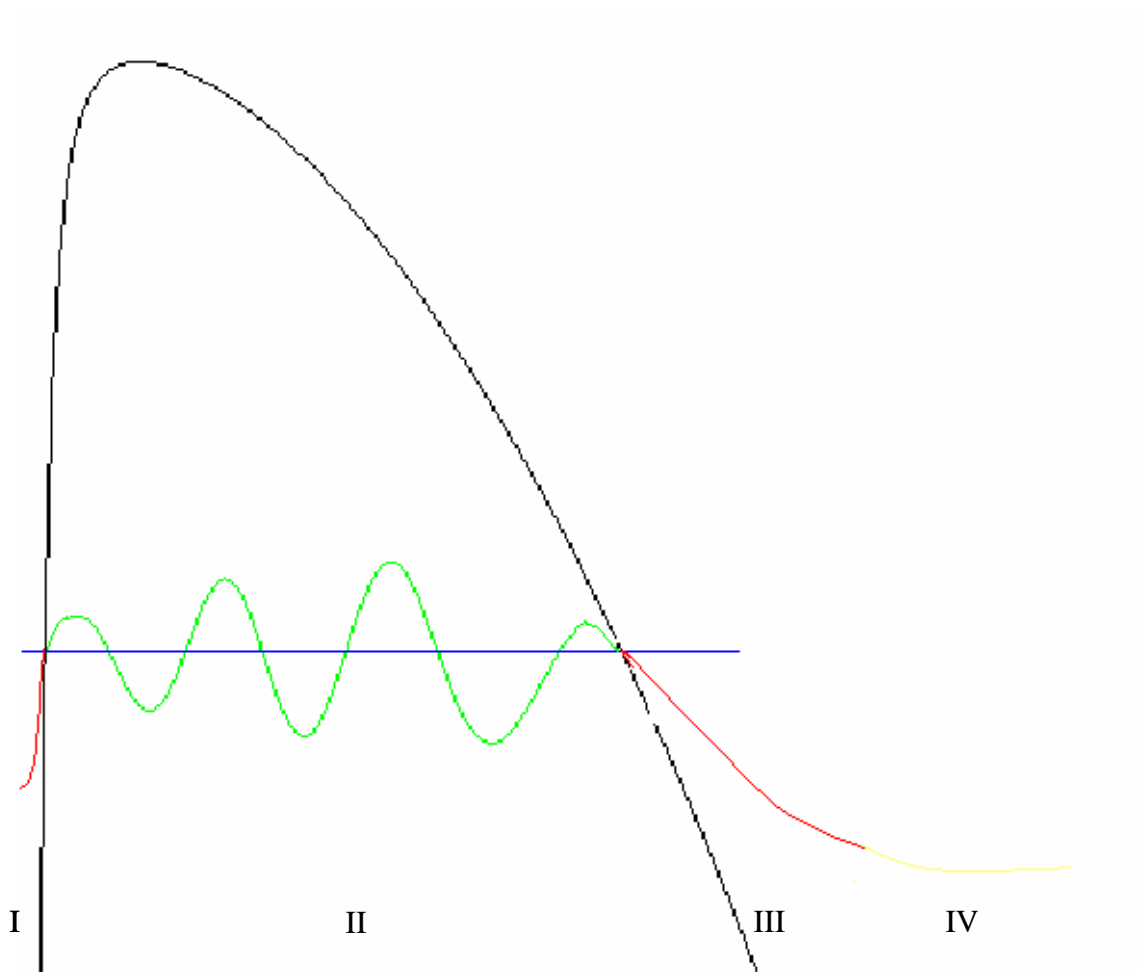
$$-\frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \exp \left[ a \int_{r_1}^{R_1} |f(r_1)| dr_1 \right] \leftrightarrow \frac{C}{r_1 a(f(r_1))^{1/2}} \text{sen} \left[ a \int_{R_1}^{r_1} |f(r_1)| dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4} \right]. \quad (4.34)$$

De acuerdo con (4.33), solución exponencialmente decreciente a la izquierda de  $R_1$  se conecta con la solución oscilante a la derecha de  $R_1$ . Según (4.34), la solución exponencial que tiende a menos infinito a la izquierda de  $R_1$  esta asociada con la solución oscilante a la derecha de  $R_1$ .

A partir de (4.31) y (4.33) se determinan las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $D$  y el numero de onda  $h$  en la solución WKB (4.23).

El espacio entre  $r_1 = 0$  y  $r_1 = \infty$  se descompone en las regiones I, II, III, IV como se muestra en la Figura 10. La curva de color negro representa la parte radial de la desigualdad (4.27), la curva de color verde representa el lado izquierdo de (4.31) y el lado derecho de (4.33), las curvas de color rojo al lado izquierdo y derecho de  $R_1$  y  $R_2$  ilustran los lados izquierdo y derecho de (4.32) y (4.34) respectivamente, la curva de color amarillo representa la solución en la envoltura (4.19) y la recta horizontal azul corresponde a un valor fijo de  $h_1$ ; los puntos de corte de la curva negra con la recta determinan las siguientes regiones: región II donde la solución (4.34) es oscilante, regiones I y III donde la solución (4.34) es exponencial y la región IV, correspondiente a la envoltura, donde la solución dada por (4.19) es exponencialmente decreciente.

**Figura 10 . Representación grafica de la solución para la amplitud de un modo eléctrico o magnético en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad.**



El campo eléctrico o magnético debe cumplir la condición de contorno la cual implica que estos deben ser finitos en cada punto dentro de la guía de ondas por lo tanto en la región I a la izquierda de  $R_1$  en la solución WKB (4.23) la constante  $C_1 = 0$ , obteniendo una solución exponencialmente decreciente.

$$y(r_1) = \frac{1}{[r_1 a f(r_1)]^{1/2}} C_2 \exp\left(-a \int_{r_1}^{R_1} f(r_1) dr_1\right). \quad (4.35)$$

De acuerdo con la formula de conexión (4.33) esta solución se conecta a la derecha de  $r_1 = R_1$  (región II) con una solución oscilante la cual se obtiene haciendo en la solución WKB (4.23) la constante  $C_2 = 0$ .

$$y(r_1) = \frac{2}{[r_1 a f(r_1)]^{1/2}} C_1 \cos\left(a \int_{R_1}^{r_2} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4}\right). \quad (4.36)$$

Esta última solución se propaga a la región I y de acuerdo con la formula de conexión (4.31), en la solución WKB (4.23) subsiste solo el término exponencialmente decreciente. No es posible utilizar directamente (4.31) puesto que la función a prolongar que figura en la parte izquierda es  $\cos \int_{r_1}^{R_2} f(r_1) dr_1$  en

lugar de  $\cos \int_{R_1}^{r_1} f(r_1) dr_1$ . Para aplicar la formula de conexión (4.31), se escribe (4.36) así:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r_1 a f(r_1))^{1/2}} \cos\left(a \int_{R_1}^{r_1} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4}\right) &= \frac{1}{(r_1 a f(r_1))^{1/2}} \sin\left(a \int_{R_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 - \left(a \int_{r_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4}\right)\right) = \\ &= \frac{1}{(r_1 a f(r_1))^{1/2}} \left[ \sin\left(a \int_{R_1}^{R_2} f(r_1) dr_1\right) \cos\left(a \int_{r_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4}\right) - \cos\left(a \int_{R_1}^{R_2} f(r_1) dr_1\right) \sin\left(a \int_{r_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 - \frac{\mathbf{p}}{4}\right) \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

De acuerdo con (4.31), el primer término en la parte final de (4.36) enlaza con una exponencial decreciente, lo que concuerda con la formula de conexión (4.31) que corresponde aplicar en  $r_1 = R_2$ . El segundo término en la parte final de (4.37) enlaza con una exponencial creciente, lo cual contradice la formula de conexión (4.31). Por lo tanto, este termino se anula exigiendo el cumplimiento de la siguiente condición:

$$\int_{R_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 = \left(l + \frac{1}{2}\right) \mathbf{p}, \quad (4.38)$$

$$\text{donde } f(r_1) = \left(k_0^2 \mathbf{m}_r \mathbf{e}_{r_1} (1 - 2\Delta r_1^2) - h^2 - \frac{m^2}{(r_1 a)^2}\right)^{1/2}.$$

La condición (4.38) reviste importancia ya que permite establecer los valores posibles del numero de onda longitudinal  $h_1$  de los modos eléctricos o magnéticos en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad.

Teniendo en cuenta que  $l \gg 1$ , en (4.38) se puede despreciar el  $\frac{1}{2}$ :

$$\int_{R_1}^{R_2} f(r_1) dr_1 = l p \quad . \quad (4.39)$$

La condición (4.39) se utiliza para determinar los valores posibles del número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos eléctricos o magnéticos en una guía de ondas dieléctrica cilíndrica con gradiente radial de la permitividad, cuando la permitividad varía lentamente (4.6).

El procedimiento numérico es el siguiente:

- Se fijan los valores de las cantidades que caracterizan la guía de ondas. Se tomo el siguiente conjunto de valores:

Radio del núcleo de la guía:  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,

Permitividad relativa en  $z = 0$ :  $\epsilon_{r1} = 2.25$ ,

Permitividad relativa de la envoltura:  $\epsilon_{r2} = 2.2050$ ,

Delta:  $\Delta = 0.01$ ,

Permeabilidad relativa tanto en el núcleo como en la envoltura:  $\mu_{r1} = \mu_{r2} = \mu_r = 1$ .

- Luego, reemplazando los valores anteriores en (4.39) y fijando la frecuencia de los modos se determinan los valores del número de onda longitudinal  $h_1$  para una secuencia de valores del número de onda azimutal  $m$ . Se tomaron:

Frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} Hz$  y la secuencia  $m = 1, 2, 3, 4, 5$ .

Para cada  $m$  se encontraron varios valores de  $h_1$  que satisfacen (4.39) los cuales se presentan en los Cuadros 13 - 17. Se utiliza la siguiente notación para los modos correspondientes a la frecuencia dada:

modo  $(m, l)$ , donde  $m$  es el número de onda azimutal y  $l$  es el número entero que aparece en el lado derecho de (4.39). Para cada modo  $(m, l)$  se encuentra un valor de  $h_1$ .

En los Cuadros 13 – 17 se presentan los modos  $(m, l)$ , los valores del número de onda longitudinal  $h_1$ , el número entero  $l$  y los radios  $r_{\min}$ ,  $r_{\max}$  dados por  $r_{\min} = R_1 * a$  y  $r_{\max} = R_2 * a$ .

**Cuadro 13. Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos  $(1,l)$ ,  $(m=1)$  de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ .**

<b>Modo (1,l)</b>	$h_1$	$h = h_1 * k_0 (\text{mts}^{-1})$	$l$	$r_{\min} = R_1 * a (\text{mts})$	$r_{\max} = R_2 * a (\text{mts})$
(1,1)	1.4977	11070960	1	$0.1652978010 * 10^{-5}$	$0.9645077750 * 10^{-5}$
(1,2)	1.4961	11059560	2	$0.1267609680 * 10^{-5}$	$0.1257729542 * 10^{-4}$
(1,3)	1.4946	11048240	3	$0.1069535808 * 10^{-5}$	$0.1490656162 * 10^{-4}$
(1,4)	1.4930	11036880	4	$0.9421328982 * 10^{-6}$	$0.1692234870 * 10^{-4}$
(1,5)	1.4915	11025480	5	$0.8517491935 * 10^{-6}$	$0.1871807047 * 10^{-4}$
(1,6)	1.4900	11014120	6	$0.7833239355 * 10^{-6}$	$0.2035313962 * 10^{-4}$
(1,7)	1.4884	11002720	7	$0.7291910868 * 10^{-6}$	$0.2186409258 * 10^{-4}$
(1,8)	1.4869	10991360	8	$0.6849781662 * 10^{-6}$	$0.2327534251 * 10^{-4}$
(1,9)	1.4853	10979880	9	$0.6477626692 * 10^{-6}$	$0.2461256597 * 10^{-4}$



**Cuadro 14. Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos  $(2,l)$ ,  $(m = 2)$  de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ .**

<b>Modo (2,l)</b>	$h_1$	$h = h_1 * k_0 (\text{mts}^{-1})$	$l$	$r_{\min} = R_1 * a (\text{mts})$	$r_{\max} = R_2 * a (\text{mts})$
(2,1)	1.4969	11076560	1	$0.2919809628 * 10^{-5}$	$0.1092064447 * 10^{-4}$
(2,2)	1.4953	11065280	2	$0.2335928485 * 10^{-5}$	$0.1365033350 * 10^{-4}$
(2,3)	1.4938	11053880	3	$0.2009898547 * 10^{-5}$	$0.1586458327 * 10^{-4}$
(2,4)	1.4923	11042480	4	$0.1793844278 * 10^{-5}$	$0.1777534608 * 10^{-4}$
(2,5)	1.4907	11031200	5	$0.1635055320 * 10^{-5}$	$0.1950160491 * 10^{-4}$
(2,6)	1.4892	11019800	6	$0.1512507003 * 10^{-5}$	$0.2108168940 * 10^{-4}$
(2,7)	1.4877	11008400	7	$0.1414166388 * 10^{-5}$	$0.2254770240 * 10^{-4}$
(2,8)	1.4864	10997040	8	$0.1332961716 * 10^{-5}$	$0.2392131933 * 10^{-4}$

**Cuadro 15. Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos  $(3,l)$ , ( $m = 3$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ .**

Modo (3,l)	$h_1$	$h = h_1 * k_0 (\text{mts}^{-1})$	$l$	$r_{\min} = R_1 * a (\text{mts})$	$r_{\max} = R_2 * a (\text{mts})$
(3,1)	1.4961	11059560	1	$0.3987195080 * 10^{-5}$	$0.1199572715 * 10^{-4}$
(3,2)	1.4946	11048240	2	$0.3280379438 * 10^{-5}$	$0.1458041827 * 10^{-4}$
(3,3)	1.4930	11036880	3	$0.2863179748 * 10^{-5}$	$0.1670496039 * 10^{-4}$
(3,4)	1.4915	11025480	4	$0.2577097432 * 10^{-5}$	$0.1855936981 * 10^{-4}$
(3,5)	1.4900	11014120	5	$0.2364213993 * 10^{-5}$	$0.2023053091 * 10^{-4}$
(3,6)	1.4884	11002720	6	$0.2197472270 * 10^{-5}$	$0.2176560083 * 10^{-4}$
(3,7)	1.4869	10991360	7	$0.2062147628 * 10^{-5}$	$0.2319392832 * 10^{-4}$
(3,8)	1.4853	10979880	8	$0.1948728864 * 10^{-5}$	$0.2454384762 * 10^{-4}$

**Cuadro 16. Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos  $(4,l)$ , ( $m = 4$ ) de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ .**

Modo (4,l)	$h_1$	$h = h_1 * k_0 (\text{mts}^{-1})$	$l$	$r_{\min} = R_1 * a (\text{mts})$	$r_{\max} = R_2 * a (\text{mts})$
(4,1)	1.4969	10979880	0	$0.7744098838 * 10^{-5}$	$0.8234967948 * 10^{-5}$
(4,2)	1.4954	11065280	1	$0.4934511615 * 10^{-5}$	$0.1292375228 * 10^{-4}$
(4,3)	1.4938	11053960	2	$0.4131677398 * 10^{-5}$	$0.1543499155 * 10^{-4}$
(4,4)	1.4923	11042560	3	$0.3646309640 * 10^{-5}$	$0.1748957494 * 10^{-4}$
(4,5)	1.4907	11031200	4	$0.3306200642 * 10^{-5}$	$0.1928872825 * 10^{-4}$
(4,6)	1.4892	11019800	5	$0.3049155210 * 10^{-5}$	$0.2091477846 * 10^{-4}$
(4,7)	1.4877	11008400	6	$0.2845445450 * 10^{-5}$	$0.2241209919 * 10^{-4}$
(4,8)	1.4861	10997040	7	$0.2678587400 * 10^{-5}$	$0.2380822285 * 10^{-4}$

**Cuadro 17. Número de onda longitudinal  $h_1$  de los modos  $(5,l)$ ,  $(m=5)$  de frecuencia  $f_r = 0.352 * 10^{15} \text{ Hz}$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad con  $a = 25 * 10^{-6} \text{ m}$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.2050$ ,  $m_r = 1$ ,  $a = 2$  y  $\Delta = 0.01$ .**

Modo (5,l)	$h_1$ (mts)	$h = h_1 * k_0$ (mts)	$l$	$r_{\min} = R_1 * a$ (mts)	$r_{\max} = R_2 * a$ (mts)
(5,1)	1.4946	11059560	1	$0.5784937085 * 10^{-5}$	$0.1377983995 * 10^{-4}$
(5,2)	1.4930	11048240	2	$0.4914525765 * 10^{-5}$	$0.1622038645 * 10^{-4}$
(5,3)	1.4915	11036880	3	$0.4375296732 * 10^{-5}$	$0.1821945162 * 10^{-4}$
(5,4)	1.4900	11025480	4	$0.3991091658 * 10^{-5}$	$0.1997335916 * 10^{-4}$
(5,5)	1.4884	11014120	5	$0.3697109132 * 10^{-5}$	$0.2156157805 * 10^{-4}$
(5,6)	1.4869	11002720	6	$0.3461881892 * 10^{-5}$	$0.2302663974 * 10^{-4}$
(5,7)	1.4853	10991360	7	$0.3266569435 * 10^{-5}$	$0.2440343263 * 10^{-4}$

- A continuación se varia la frecuencia  $\omega$  para establecer la dependencia del número de onda  $h_{m,l}$  del modo  $(m, l)$  con respecto a la frecuencia  $\omega$ . Esta dependencia se conoce como relación de dispersión. Se consideraron los modos:  $(1,7)$ ,  $(2,7)$ ,  $(3,7)$ ,  $(4,7)$ ,  $(5,7)$ . Se utilizó el rango de frecuencias del infrarrojo ( $1 : 10^{-3} m - 7 * 10^{-7} m$ ). En las Tablas 18 – 22 se resumen los resultados que muestran la dependencia del número de onda  $h_{m,l}$  del modo  $(m, l)$  con respecto al parámetro de frecuencia  $V$  definido como:

$$V = \frac{\omega a}{c}, \quad (4.51)$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío, este parámetro es adimensional y en el rango del infrarrojo adquiere valores del orden de 100. En los cálculos se elaboró un procedimiento computacional asistido por Maple.

**Cuadro 18. Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{1,7}$  del modo (1,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.05$ ,  $m_l = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$  .**

<b>Modo (1,7)</b>	
$V$	$h_{1,7}$
184,7995	1,48847403
184,9	1,48928571
184,95	1,4896645
185	1,4900974
185,05	1,49047619
185,1	1,49090909
185,15	1,49128788
185,2	1,49172078
185,25	1,49209957
185,3	1,49253247
185,35	1,49291126
185,4	1,49334416
185,45	1,49372294
185,5	1,49415584
185,55	1,49453463
185,6	1,49496753
185,65	1,49534632
185,7	1,49577922
185,75	1,49615801
185,8	1,49659091
185,85	1,4969697
185,9	1,4974026
185,95	1,49778139
186	1,49821429

**Cuadro 19. Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{2,7}$  del modo (2,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.05$ ,  $m_l = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$  .**

<b>Modo (2,7)</b>	
$V$	$h_{2,7}$
184,7995	1,48771645
184,9	1,48852814
184,95	1,48890693
185	1,48933983
185,05	1,48971861
185,1	1,49015152
185,15	1,4905303
185,2	1,4909632
185,25	1,49134199
185,3	1,49177489
185,35	1,49215368
185,4	1,49258658
185,45	1,49296537
185,5	1,49339827
185,55	1,49377706
185,6	1,49420996
185,65	1,49458874
185,7	1,49502165
185,75	1,49540043
185,8	1,49577922
185,85	1,49621212
185,9	1,49664502
185,95	1,49702381
186	1,49745671

**Cuadro 20. Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{3,7}$  del modo (3,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$  .**

<b>Modo (3,7)</b>	
$V$	$h_{3,7}$
184,7995	1,48690476
184,9	1,48771645
184,95	1,48814935
185	1,48852814
185,05	1,48896104
185,1	1,48933983
185,15	1,48977273
185,2	1,49015152
185,25	1,49058442
185,3	1,4909632
185,35	1,4913961
185,4	1,49177489
185,45	1,49220779
185,5	1,49258658
185,55	1,49301948
185,6	1,49339827
185,65	1,49383117
185,7	1,49420996
185,75	1,49464286
185,8	1,49502165
185,85	1,49545455
185,9	1,49583333
185,95	1,49626623
186	1,49664502



**Cuadro 21. Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{4,7}$  del modo (4,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.05$ ,  $m_l = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$  .**

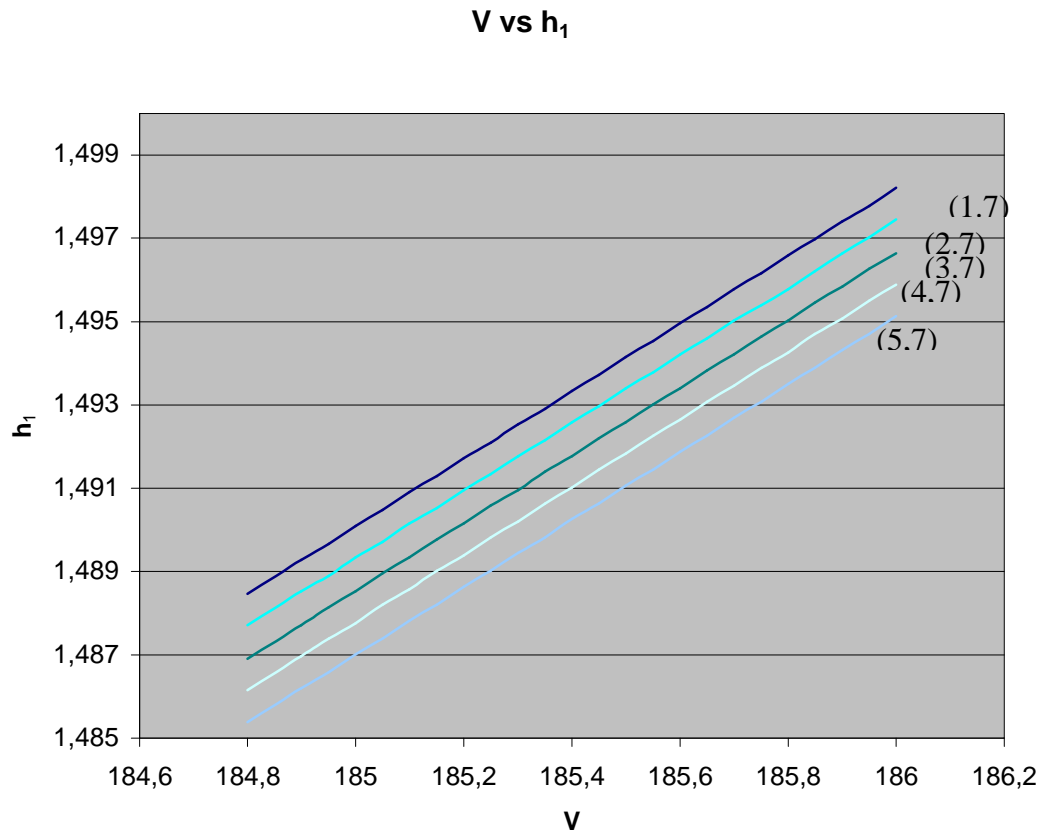
<b>Modo (4,7)</b>	
$V$	$h_{4,7}$
184,7995	1,48614719
184,9	1,48695887
184,95	1,48739177
185	1,48777056
185,05	1,48820346
185,1	1,48858225
185,15	1,48901515
185,2	1,48939394
185,25	1,48982684
185,3	1,49020563
185,35	1,49063853
185,4	1,49101732
185,45	1,49145022
185,5	1,491829
185,55	1,4922619
185,6	1,49264069
185,65	1,49307359
185,7	1,49345238
185,75	1,49388528
185,8	1,49426407
185,85	1,49469697
185,9	1,49507576
185,95	1,49550866
186	1,49588745

**Cuadro 22.** Dependencia del número de onda longitudinal  $h_{5,7}$  del modo (5,7) respecto al parámetro de frecuencia  $V$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad de radio  $a = 25 * 10^{-6} m$ ,  $e_{r1} = 2.25$ ,  $e_{r2} = 2.05$ ,  $m_r = 1$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $a = 2$  .

<b>Modo (5,7)</b>	
$V$	$h_{5,7}$
184,7995	1,48538961
184,9	1,4862013
184,95	1,48658009
185	1,48701299
185,05	1,48739177
185,1	1,48782468
185,15	1,48820346
185,2	1,48863636
185,25	1,48901515
185,3	1,48944805
185,35	1,48982684
185,4	1,49025974
185,45	1,49063853
185,5	1,49107143
185,55	1,49145022
185,6	1,49188312
185,65	1,4922619
185,7	1,49269481
185,75	1,49307359
185,8	1,49350649
185,85	1,49388528
185,9	1,49431818
185,95	1,49469697
186	1,49512987

Con base en las Tablas 18 - 22 se construyeron las curvas de dispersión de la Figura 11.

**Figura 11. Curvas de dispersión del número de onda  $h_{m,l}$  en función del parámetro de frecuencia  $V$  para los modos  $(m, l)$  en una guía de ondas con gradiente radial de la permitividad ( $a = 25 * 10^{-6} m, e_{r1} = 2.25, e_{r2} = 2.05, m_r = 1, \Delta = 0.01, a = 2$ ).**



En la Figura 11 se observa que el número de onda longitudinal  $h_{m,l}$  crece monótonamente con  $V$ .

## CONCLUSIONES

Se estudiaron e implementaron métodos físico – matemáticos para el calculo de modos eléctricos y magnéticos en guías de ondas cilíndricas dieléctricas con salto y con gradiente radial de la permitividad.

Se determino las condiciones necesarias para garantizar la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas en guías de ondas cilíndricas dieléctricas con salto y con gradiente radial de la permitividad.

El método de aproximación WKB aplicado para el calculo de modos eléctricos y magnéticos en guías de ondas cilíndricas dieléctricas con gradiente radial de la permitividad es valido cuando la permitividad varia lentamente con el radio y conduce a resultados que concuerdan con los que se encuentran en la literatura especializada sobre el tema [18,19,20].

Se calcularon las soluciones, los números de onda y las relaciones de dispersión de los modos eléctricos y magnéticos en las guías cilíndricas dieléctricas con salto y con gradiente radial de la permitividad. Las curvas de dispersión obtenidas son semejantes a las curvas que aparecen en la literatura sobre guías de ondas [21,22,23].

Los números de onda de los modos eléctricos y magnéticos poseen valores discretos y se designan por el par  $(m, k)$  para la guía de ondas con salto y el par  $(m, l)$  para la guía de onda con gradiente radial de la permitividad.

El presente trabajo se puede ampliar al estudio de la generación de ondas electromagnéticas en guías de ondas.

## BIBLIOGRAFIA

ARFKEN B. George y Weber Hans. Mathematical methods for physicist, 3. ed. San Diego: Harcourt Academic Press, 2001. p.1250

BALANIS Constantine. Advanced engineering electromagnetics. New York: Jhon Wiley & Sons, 1989. p. 960

BOHM David. Quantum Theory. New York: Jhon Wiley & Sons, 1998. p.440

BOROWITZ Sidney. Fundamentos de mecánica cuantica. Barcelona: Editorial Reverte S.A, 1973. p.465

CABRERA José y López Fernando. Óptica electromagnética, 2. ed. Madrid: Adisson-Wesley, 1998. p.493

CORSON Dale y Lorrain Paul. Introduction to electromagnetic fields and waves. San Francisco y Londres: W.H. Freeman and company, 1962. p.800

CHENG K. David. Fundamentos de electromagnetismo para ingenieria, 1. ed. México: Adisson-Wesley, 1998. p.420

FIODOROV N.N. Fundamentos de electrodinámica. Moscú: Mir, 1982. p.447

GASIOROWICZ Stephen. Quantum Physics, 2.ed. New York: Jhon Wiley & Sons, 1996. p.469

GOMEZ Claudia, López Saúl y Soto Oscar. Elementos de matemática con Maple, 1. ed. San Juan de Pasto: Universidad de Nariño, 2002. p.150

GOWAR Jhon. Optical communication systems, 2.ed. Moscu: Prentice Hall International, 1989. p.300

JACKSON J.D. Classical electrodynamics. New York: Jhon Wiley & Sons, 1980. p.469

MATHEWS Jon y Walker R.L. Matemáticas para físicos. Barcelona: Editorial Reverte S.A., 1975. p.300

MONAGAN M. B, Geddes K. O y Heal K.M. Maple V. Programming Guide. United States of America: Springer, 1996.p.200

REITZ J.R., Milford F.J. y Christy R.W. Fundamentos de la teoría electromagnética. México: Adisson Wesley, 1996. p.458.

TERRASA Juan y Jiménez Maria. Todo sobre las fibras ópticas, 1. ed. Barcelona: Boixareu editores, 1989. p. 250.

UNGAR Serge. Fiber Optics. New York: Jhon Wiley & Sons, 1990. p. 500

## NUMERACIÓN DE CITAS

- [1] BALANIS Constantine. Advanced engineering electromagnetics. New York: Jhon Wiley & Sons, 1989. p. 459
- [2] FIODOROV N.N. Fundamentos de electrodinámica. Moscú: Mir, 1982. p.215
- [3] BOHM David. Quantum Theory. New York: Jhon Wiley & Sons, 1998. p.89
- [4] CHENG K. David. Fundamentos de electromagnetismo para ingeniería, 1. ed. México: Adisson-Wesley, 1998. p.110
- [5] FIODOROV, Op.cit., p.68
- [6] CHENG, Op.cit., p 98
- [7] FIODOROV, Op.cit., p.88
- [8] REITZ J.R., Milford F.J. y Christy R.W. Fundamentos de la teoría electromagnética. México: Adisson Wesley, 1996. p.45.
- [9] FIODOROV, Op.cit., p.48
- [10] Ibid., p.115
- [11] GOWAR Jhon. Optical communication systems, 2.ed. Moscu: Prentice Hall International, 1989. p.245
- [12] BOHM, Op.cit., p.138
- [13] BOROWITZ Sidney. Fundamentos de mecánica cuantica. Barcelona: Editorial Reverte S.A, 1973. p.46
- [14] GASIOROWICZ Stephen. Quantum Physics, 2.ed. New York: Jhon Wiley & Sons, 1996. p.69
- [15] BOHM, Op.cit., p.166
- [16] BOROWITZ, Op.cit., p.179
- [17] GASIOROWICZ, Op.cit., p.166
- [18] CABRERA José y López Fernando. Óptica electromagnética, 2. ed. Madrid: Adisson-Wesley, 1998. p.367

[19] GOWAR, Op.cit., p.189

[20] UNGAR Serge. Fiber Optics. New York: Jhon Wiley & Sons, 1990. p. 400

[21] CABRERA, Op.cit., p.98

[22] GOWAR, Op.cit., p.16

[23] UNGAR, Op.cit., p.74



