

ELECTROMAGNETISMO DE TRANSICIÓN APLICADO A LA GEOFÍSICA

LUIS FERNANDO VILLAMARÍN GUERRERO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PASTO
2005

ELECTROMAGNETISMO DE TRANSICIÓN APLICADO A LA GEOFÍSICA

LUIS FERNANDO VILLAMARÍN GUERRERO

Trabajo de grado para optar al título de Físico

Asesor
Alvaro Rugeles
Doctor en electromagnetismo

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
PASTO
2005

“ Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado son responsabilidad exclusiva del autor “

Artículo primero del acuerdo N° 324 de Octubre 11 de 1966, emanado del Honorable consejo directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

Director

Jurado

Jurado

Pasto, Noviembre del 2005

DEDICATORIA

Este trabajo está dedicado a mi Esposa y a mi Bebe, pues gracias a su amor y sacrificio me dieron aliento y seguridad para salir adelante.

A mis Padres, porque fueron ellos los que desde primer semestre y hasta el final depositaron toda su confianza, apoyo y entrega. Hoy les entrego este trabajo como muestra de agradecimiento por todos sus esfuerzos.

A mi Familia en general, porque todos depositaron la confianza y buena energía para la culminación de este trabajo.

A mis profesores y compañeros de universidad por todas las enseñanzas que me ofrecieron durante los diez semestres de carrera.

AGRADECIMIENTOS

A mi asesor de tesis, el Doctor: Alvaro Rugeles por todo el tiempo, paciencia y ayuda prestada durante la elaboración del trabajo.

A los compañeros de Ingeominas por la orientación y el material prestado.

A la profesora Claudia del Departamento de Matemáticas por los materiales y ayuda prestada en la parte de programación con Maple 9.

A la profesora: Gloria Moncayo G. y a la Ingeniera: Adriana Ortega E. por su valiosa colaboración a la hora de revisar este trabajo, permitiendo así entregar este trabajo como fuente apropiada para futuras investigaciones.

GLOSARIO

GEOFÍSICA Rama de la ciencia que aplica los principios físicos al estudio de la tierra.

RESPUESTA DE TRANSICIÓN Respuesta de un sistema debido a fuentes de excitación que varían sinusoidalmente con el tiempo.

APROXIMACIÓN CUASI-ESTÁTICA Aproximación utilizada en aplicaciones geofísicas que consiste en despreciar las corrientes de desplazamiento que dependen de la permitividad eléctrica ϵ . No es válida en todos los casos, pues si la resistividad ρ es muy grande y la frecuencia alta, deja de ser satisfactoria.

ONDAS PLANAS Se caracterizan por el hecho de que en cualquier instante los campos eléctrico \vec{E} y magnético \vec{H} son uniformes en un plano perpendicular a la dirección de propagación de la onda.

MEDIO ILIMITADO Modelo utilizado en Geofísica para aplicaciones donde los efectos de la interfase aire-tierra se desprecian (Método borehole).

MEDIO ESTRATIFICADO De importancia en métodos de prospección geofísica puesto a que son modelos muy aceptables para muchas estructuras geológicas.

RESUMEN

El trabajo de grado "ELECTROMAGNETISMO DE TRANSICIÓN APLICADO A LA GEOFISICA", consta de dos partes. En la primera, se presentó un análisis netamente analítico del campo electromagnético de transición generado por una fuente portadora de corriente constante I cuando esta se desconecta abruptamente. Tales soluciones analíticas se obtuvieron para el caso de la fuente actuando sobre un medio ilimitado (utilizado en problemas donde los efectos de interfase aire-tierra se desprecian), y un modelo de tierra homogéneo; es decir, se consideró el modelo de dos capas (aire-tierra), en donde la capa terrestre se la toma como infinita ($h \rightarrow \infty$). Se hizo inicialmente un análisis para el caso de la fuente portadora de corriente, como un dipolo magnético, actuando sobre un medio ilimitado y luego sobre un semi-espacio homogéneo. En base a las soluciones obtenidas se formuló las soluciones para el caso general donde se considera a la fuente como una espira grande portadora de corriente constante (conformada por pequeños dipolos magnéticos) actuando sobre un tierra homogénea. En la segunda parte se obtuvo las soluciones analíticas para la espira grande actuando sobre un suelo homogéneo, y luego se pasó al caso más complejo donde se consideró a la espira grande de corriente actuando sobre un medio isotrópico de n capas, $n = 2,3,4$. Para cada caso se toma las capas homogéneas y cada cual con sus respectivas propiedades electromagnéticas: permeabilidad magnética μ_i , conductividad eléctrica σ_i y permitividad eléctrica ϵ_i , y espesores h_i . En esta parte, se encontró las soluciones para el campo magnético vertical armónico en el centro de la espira grande portadora de corriente constante, con ayuda de métodos computacionales debido a la complejidad de las ecuaciones.

Ya que el problema fue tratado como una aplicación a la geofísica se va a tener en cuenta algunas consideraciones como: trabajar el problema en el caso cuasi-estático (se desprecian las corrientes de desplazamiento), y se trata al suelo como impermeable ($\sigma_i \rightarrow 0$); es decir, se toma la permeabilidad del sistema como la permeabilidad magnética del vacío.

ABSTRACT

The thesis titled "Electromagnetism of transition applied to Geophysics" is divided in two parts. The first one is related purely to the analytic analysis of the electromagnetic field of transition generated by a bearer source of constant current I when it is abruptly unplugged. Such analytical solutions are present in the case of the source acting over an media unbounded (used in problems where the effects of interface earth-air are despise), and one homogeneous earth model; that is to say, two layers (earth-air) model was considered, where the terrestrial layer is considered as infinite ($h \rightarrow \infty$). The analysis begins considering the bearer source of current as a magnetic dipole acting over an media unbounded and then over an homogeneous half-space. Based on the obtained solutions were formulated solutions to the general case where the source is considered as a big bearer loop of constant current (conforming little magnetic dipoles) acting over an homogeneous earth. In the second part it begins from the analytical solutions to the big loop, priorly obtained, then we move on to the more complex case wich considers the big loop of current acting over an isotropic earth of n layers, $n = 2,3,4$. It is considered for each case the homogeneous layers an each one with its corresponding electromagnetic properties: magnetic permeability μ_i , electric conductivity σ_i and electric permittivity ϵ_i , and thickness h_i . In this part is found the solutions for the harmonic vertical magnetic field in the center of the big bearer loop of current constant the electromagnetic field of transition, with help to the computer methods due to its high complexity of the equations.

Since the problem was treated as a Geophysics application some considerations will be taken into account: work the problem in a cuasi-static case (the displacement currents are not into account) and the soil is treated was waterproof ($\mu_i = \mu_0$); that is to say the permeability of the system is taken as a magnetic permeability of the vacuum.

CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCION	18
1. OBJETIVOS	19
1.1 OBJETIVO GENERAL	19
1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS	19
2. ANALISIS DE FOURIER	20
2.1 TRANSFORMADAS DE FOURIER	20
2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE	20
2.3 SISTEMAS LINEALES	21
2.3.1 Respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario	21
3. ECUACIONES DE MAXWELL Y ECUACIONES DE ONDA	23
3.1 ECUACIONES DE MAXWELL	23
3.2 RELACIONES CONSTITUTIVAS	24
3.3 ECUACIONES DE ONDA	25
4. CONDICIONES DE FRONTERA	26
5. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS	27
5.1 LEYES DE SNELL	27
5.2 ECUACIONES DE FRESNEL	28
5.2.1 \vec{E}_i normal al plano de incidencia	29
5.2.2 \vec{E}_i en el plano de incidencia	30

5.2.3 Reflexión e impedancia de onda	32
5.3 ADMITANCIA DE ONDA PLANA DE UNA TIERRA ISOTROPICA DE n CAPAS	33
5.3.1 Incidencia normal	33
6. POTENCIALES DE SCHELKUNOFF	38
7. FUNCIONES DE BESSEL	41
7.1 FUNCIONES DE BESSEL DE PRIMERA CLASE $J_n(x)$	41
7.2 FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS $I_n(x)$, $K_n(x)$.	42
8. REGLA DE SIMPSON 3/8	43
9. CAMPO ELECTROMAGNETICO ARMONICO Y DE TRANSICIÓN GENERADO POR UNA ESPIRA PORTADORA DE CORRIENTE	44
9.1 EQUIVALENCIA PEQUEÑA ESPIRA DE CORRIENTE Y DIPOLO MAGNETICO	45
9.2 CAMPO ELECTROMAGNETICO ARMONICO Y DE TRANSICION PRODUCIDO POR UN DIPOLO MAGNETICO ACTUANDO SOBRE UN MEDIO ILIMITADO	46
9.2.1 Campo electromagnético armónico producido por un dipolo magnético en un medio ilimitado	46
9.2.2 Campo electromagnético de transición producido por un Dipolo magnético en un medio ilimitado	52
9.3 CAMPO ELECTROMAGNETICO ARMONICO Y DE TRANSICION PRODUCIDO POR UN DIPOLO MAGNETICO	55
9.3.1. Campo electromagnético armónico producido por un dipolo magnético vertical en un semi-espacio homogéneo y estratificado	55
9.3.2 Campo electromagnético de transición producido por un dipolo magnético actuando sobre un medio homogéneo.	67
9.4 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO ARMÓNICO Y DE TRANSICIÓN PRODUCIDO POR UNA ESPIRA PORTADORA DE CORRIENTE	73

9.4.1 Campo electromagnético armónico producido por una espira portadora de corriente actuando sobre un medio homogéneo y estratificado.	73
9.4.1.1 Tierra homogénea	75
9.4.1.2 Tierra estratificada	78
9.4.1.2.1 Campo magnético vertical armónico para un suelo de dos capas	80
9.4.1.2.2 Campo magnético vertical armónico para un suelo de tres capas	81
9.4.1.2.3 Campo magnético vertical armónico para un medio de cuatro capas	83
9.4.2 Campo electromagnético de transición	86
CONCLUSIONES	89
BIBLIOGRAFIA	90
ANEXOS	91

LISTA DE TABLAS

	Pág
Tabla 3.1 Ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo y la frecuencia	24
Tabla 9.1 Datos de campo magnético vertical vs frecuencia medidos en el centro de una espira portadora de corriente sobre una tierra homogénea	77
Tabla 9.2 Valores de campo magnético vertical por método de aproximación medidos en el centro de una espira portadora de corriente ubicada sobre un suelo homogéneo de $\mu = 0.01 S/m$	79
Tabla 9.3 Valores de campo magnético vertical por método de aproximación medidos en el centro de una espira portadora de corriente de $1A$ ubicada sobre un suelo impermeable de dos capas	81
Tabla 9.4 Valores de campo magnético vertical por método de aproximación medidos en el centro de una espira portadora de corriente de $1A$ ubicada sobre un suelo impermeable de tres capas	83
Tabla 9.5. Valores de campo magnético vertical por método de aproximación medidos en el centro de una espira portadora de corriente de $1A$ ubicada sobre un suelo impermeable de cuatro capas	85
Tabla 9.6. Valores de campo magnético vertical y su derivada en el tiempo medidos en el centro de una espira de radio $a = 50m$ cuando la corriente que circula a través de esta se corta abruptamente	87

LISTA DE FIGURAS

	Pág
Figura 5.1 Vectores de onda incidente \vec{k}_i , reflejado \vec{k}_r y transmitido \vec{k}_t en una interfase plana S , la cual separa el medio $\mu_1, \epsilon_1, \rho_1$ del medio $\mu_2, \epsilon_2, \rho_2$	27
Figura 5.2 Orientaciones relativas de los vectores \vec{E}, \vec{H} y \vec{k} para una reflexión en una superficie plana cuando \vec{E}_i es normal al plano de incidencia	29
Figura 5.3 Tierra plana estratificada impermeable ($\rho = \rho_0$) sobre la cual está incidiendo una onda plana electromagnética normalmente. E_x, H_x y k forman un conjunto ortogonal. ρ_i y h_i , son respectivamente la conductividad y el espesor de la capa i -ésima, y z_i es la profundidad en el borde de ésta capa	33
Figura 7.1 Intercepción de la parábola de tercer grado sobre la curva	43
Figura 9.1 Esquema de un suelo de n capas homogéneas, isotrópicas sobre el cual está actuando una fuente (espira circular de corriente). Cada una de las capas con sus correspondientes propiedades electromagnéticas $\mu_i, \epsilon_i, \rho_i, i = 1..n$ y espesor h_i	44
Figura 9.2 Comportamiento de la corriente constante I que circula a través de la espira cuando es desconectada abruptamente	45
Figura 9.3 Representación gráfica de una pequeña espira de corriente cuando se compara con un dipolo magnético infinitesimal	46
Figura 9.4 Campo magnético armónico a $100m$ desde un dipolo magnético con momento $1A/m^2$ en un espacio total de $0.01S/m$. Punto de observación la línea ecuatorial.	51
Figura 9.5 Campo magnético armónico a $100m$ desde un dipolo magnético con momento $1A/m^2$ en un espacio total de $0.01S/m$. Punto de observación a lo largo del eje del dipolo.	52
Figura 9.6 Campo magnético de transición a $100m$ de un dipolo magnético con momento función paso en un espacio total de $\rho = 0.01S/m$. punto de observación en el plano ecuatorial y del dipolo magnético.	54
Figura 9.7 Campo magnético de transición a $100m$ de un dipolo magnético con momento función paso en un espacio total de $\rho = 0.01S/m$. punto de observación a lo largo del eje del dipolo magnético.	54
Figura. 9.8 Soluciones por transformada de Fourier de potenciales MET (\tilde{F}) en un tierra de N capas.	57

Figura 9.9 Campo incidente y reflejado (Potencial magnético MET) en la superficie de una tierra de n capas	58
Figura 9.10 Campo magnético vertical armónico a $100m$ de un dipolo magnético vertical en la superficie de una tierra homogénea de $\rho = 0.01S/m$	66
Figura 9.11 Campo magnético vertical y su derivada en el tiempo a $100m$ de un dipolo magnético vertical que se corta abruptamente. Fuente y receptor en la superficie de un suelo de $\rho = 0.01S/m$. Curvas roja y azul campos positivos, curvas amarilla y verde campos negativos	71
Figura 9.12 Vista plana de una espira circular en la superficie de la tierra.	73
Figura 9.13 Espira circular de corriente actuando sobre la superficie de una tierra homogénea	75
Figura 9.14 Campo magnético vertical armónico en el centro de la espira circular sobre una tierra homogénea de $\rho = 0.01S/m$. La espira tiene un radio de $50m$ a través de la cual circula una corriente de $1A$.	77
Figura 9.15 Comparación gráfica entre las curvas obtenidas por el método de aproximación simpson[3/8] y la curva original	78
Figura 9.16 Parte real del campo magnético vertical medida en el centro de la espira de radio $50m$ portadora de corriente $1A$, sobre un suelo impermeable de 2 capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas	81
Figura 9.17 Parte real del campo magnético vertical medida en el centro de la espira de radio $50m$ portadora de corriente $1A$. Sobre una suelo impermeable de 3 capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas	82
Figura 9.18 Parte real del campo magnético vertical medida en el centro de la espira de radio $50m$ portadora de corriente $1A$. Sobre una suelo impermeable de 4 capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas.	84
Figura 9.19 campo magnético vertical y su derivada en el tiempo en el centro de la espira de radio $50m$. Sobre una tierra homogénea de $\rho = 0.01S/m$. Una corriente de $1A$ es cortada abruptamente en el tiempo cero.	87

LISTA DE ANEXOS

	Pág
Anexo A Programa en Maple 9 que muestra la aproximación gráfica con ayuda del método de integración numérica simpson[3/8].	91

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo está enfocado en un contexto puramente Físico-matemático, que pretende describir y calcular el campo electromagnético armónico que se produce cuando sobre un suelo de n capas planas actúa una espira circular portadora de corriente.

Además, se presenta la solución para el campo electromagnético de transición que se produce cuando la corriente que circula a través de la espira ubicada sobre un suelo homogéneo, es cortada abruptamente en el tiempo.

Se presenta soluciones analíticas bien detalladas para suelos homogéneos, mientras que para medios estratificados los resultados se presentan con la ayuda de métodos computacionales utilizando el programa computacional Maple 9.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Calcular el campo electromagnético armónico y de transición generado por una fuente circular sobre un sistema de n capas.

1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

Calcular el campo electromagnético armónico, en un suelo de n capas homogéneas con pérdidas, generado por una espira circular portadora de corriente.

Calcular el campo electromagnético de transición, en un suelo homogéneo, que se produce cuando la corriente que circula a través de la espira es cortada abruptamente en el tiempo.

Identificar las leyes y relaciones del electromagnetismo y las herramientas matemáticas necesarias para la solución del problema planteado.

Construir la solución para el campo electromagnético armónico y de transición.

2. ANALISIS DE FOURIER

En el desarrollo del trabajo se tienen en cuenta las transformadas de Fourier para pasar las ecuaciones fundamentales de Maxwell del dominio de la frecuencia (ω), al dominio del tiempo (t),

2.1 TRANSFORMADAS DE FOURIER

La integral de Fourier o transformada de Fourier de $f(t)$, se define como

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \quad (2.1)$$

su forma inversa se denota por:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-j\omega t} d\omega, \quad (2.2)$$

De la teoría de transformadas de Fourier se pasa a la teoría de la transformada de Laplace¹, ya que facilita hallar el campo electromagnético de transición resultante de una corriente función paso que circula a través de una espira circular conductora cuando es cortada abruptamente.

2.2 TRANSFORMADA DE LAPLACE

La transformada de Laplace de una función $f(t)$, se define como

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \quad (2.3)$$

Donde s es una variable compleja, $s = \sigma + j\omega$. La notación operacional $L\{f(t)\}$ significa "transformada de Laplace de $f(t)$ ".

La transformada inversa de Laplace está dada por la integral compleja de inversión.

¹ HWEI P, Hsu. Análisis de Fourier. Primera Edición Michigan. Addison-Wesley Iberoamérica, p. 259-261.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_1 - j\infty}^{\gamma_1 + j\infty} F(s)e^{st} ds, \quad (2.4)$$

En muchos casos, la transformada inversa de Laplace se puede obtener por integración formal, esto basado en la propiedad de unicidad de la transformada de Laplace; es decir, para una función $f(t)$, hay una función $F(s)$ que es única y viceversa, esto se cumple si y solo si $t \geq 0$.

2.3 SISTEMAS LINEALES

Para el desarrollo de las siguientes fases de la investigación, se hará uso de la teoría de sistemas lineales, debido a que lo que se quiere es conocer la respuesta del sistema (suelo de n capas) a la fuente excitadora (espira circular de corriente). La acción de dicha fuente como se verá mas adelante puede ser representada como una superposición de ondas.

Se parte de que en todo sistema hay una función de entrada (o función de excitación) y una función de salida (o función de respuesta). Además Dicho sistema queda completamente caracterizado si se conoce la naturaleza de la dependencia de la salida sobre la entrada.

Si se supone que la respuesta de un sistema a la excitación $f_i(t)$ es la función $f_o(t)$ y si la respuesta de ese sistema a la excitación $f_i(t) = a_1 f_{i1}(t) + a_2 f_{i2}(t)$ es $f_o(t) = a_1 f_{o1}(t) + a_2 f_{o2}(t)$; donde a_1 y a_2 son coeficientes que no dependen del tiempo, se dice que es un sistema lineal. Por lo tanto, un sistema lineal se puede definir como un sistema al cual se le puede aplicar el principio de superposición.

2.3.1 Respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario. La respuesta de un sistema al escalón unitario $u(t)$ se denota por $a(t)$, entonces,

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = a(s), \quad (2.5)$$

Después de algunos procedimientos², se llega a que la respuesta de un sistema a un escalón unitario, que se expresa como:

$$a(t) = \int_0^t h(\tau) d\tau, \quad (2.6)$$

$$a(\infty) = a(t)|_{t \rightarrow \infty} = H(0), \quad (2.7)$$

² HWEI P, Op. cit., p. 138 -139.

donde $H(0)$ es el valor de la función del sistema en $t = 0$ o en $t = \tau$.

3. ECUACIONES DE MAXWELL Y ECUACIONES DE ONDA

En esta fase del proyecto, se tendrán en cuenta las ecuaciones de Maxwell y las condiciones de frontera más apropiadas para los campos eléctrico \underline{E} y magnético \underline{H} pues es a partir de éstas que se comienza a formular la solución para el campo electromagnético de transición, incluyendo las ecuaciones de onda permitiendo expresar el campo eléctrico y magnético en forma de ondas

3.1 ECUACIONES DE MAXWELL

Un campo electromagnético puede ser definido como el dominio de las cuatro funciones vectoriales \underline{e} , \underline{b} , \underline{d} , \underline{h} , donde:

\underline{e} intensidad de campo eléctrico [V/m]

\underline{h} intensidad de campo magnético [A/m]

\underline{d} desplazamiento dieléctrico [C/m^2]

\underline{b} inducción magnética [T]

Además, en las ecuaciones de Maxwell aparecen las siguientes cantidades

\underline{j} densidad de corriente eléctrica [A/m^2]

ρ densidad de carga eléctrica [C].

Experimentalmente se ha comprobado que todos los fenómenos electromagnéticos obedecen a las ecuaciones de Maxwell presentadas en el dominio del tiempo y la frecuencia en la tabla 3.1

Tabla 3.1. Ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo y la frecuencia.

ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DEL TIEMPO	ECUACIONES DE MAXWELL EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA
$\nabla \cdot \vec{e} = \frac{\rho_b}{\epsilon_0}$	$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$
$\nabla \times \vec{h} = \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j}$	$\nabla \times \vec{H} = (\vec{j} + i\omega \vec{E}) / \epsilon_0$
$\nabla \cdot \vec{b} = 0$	$\nabla \cdot \vec{H} = 0$
$\nabla \times \vec{d} = \vec{j}$	$\nabla \times \vec{E} = -i\omega \vec{A}$

Fuente: NABHIGUIAN. p. 132 - 134

En la tabla 3.1, se debe tener en cuenta que para pasar del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia, se utiliza la transformada de Fourier unidimensional, ecuación (2.1); además, están implícitas las relaciones constitutivas.

3.2 RELACIONES CONSTITUTIVAS

Las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo son ecuaciones diferenciales desacopladas de las cinco cantidades vectoriales $\vec{e}, \vec{b}, \vec{h}, \vec{d}$ y \vec{j} . Estas ecuaciones pueden ser acopladas a través de las siguientes relaciones constitutivas en el dominio de la frecuencia.

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \tag{3.2}$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \tag{3.3}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{3.4}$$

Las cantidades ϵ, μ y σ , describen respectivamente la permitividad dieléctrica, permeabilidad magnética y la conductividad eléctrica.

En la mayoría de problemas electromagnéticos elementales se asume el siguiente orden para simplificar el análisis:

- a. Todo medio es lineal, isotrópico, homogéneo, y posee propiedades electromagnéticas que son independientes del tiempo, temperatura o presión.

b. La permeabilidad magnética μ se asume la del espacio libre, es decir: μ_0

3.3 ECUACIONES DE ONDA

Como su nombre lo indica, permiten expresar el campo eléctrico y magnético en forma de ondas. Se parte de las ecuaciones de Maxwell para regiones homogéneas libres de fuentes ρ y \mathbf{j} , y se utilizan algunas identidades vectoriales.

Además, son ecuaciones acopladas que dependen de un solo campo vectorial \mathbf{E} o \mathbf{H} , caso que no se presenta en las ecuaciones de Maxwell en el dominio del tiempo (cinco campos vectoriales) y en el dominio de la frecuencia (dos campos vectoriales). Estas ecuaciones existen en el dominio del tiempo, pero las más utilizadas están en el dominio de la frecuencia; por lo tanto las ecuaciones de onda para \mathbf{E} y \mathbf{H} respectivamente, son:

$$\nabla^2 \mathbf{e} - \frac{\partial^2 \mathbf{e}}{\partial t^2} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla^2 \mathbf{h} - \frac{\partial^2 \mathbf{h}}{\partial t^2} - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (3.8)$$

donde

$$k^2 = \omega^2 \mu \epsilon,$$

Que representa el módulo del vector número de onda.

4. CONDICIONES DE FRONTERA

El campo primario da lugar a una distribución secundaria de cargas y corrientes y por consiguiente a un campo secundario. El campo resultante es la suma de los campos primarios y secundarios, cada uno de los cuales debe satisfacer las ecuaciones de Maxwell mas las condiciones apropiadas para ser aplicadas a fronteras entre las regiones homogéneas, presentes en el problema y que se detallan a continuación:

NORMAL \vec{B} : La componente normal B_n de \vec{B} es continua a través de una interfase de separación entre el medio (1) y el medio (2)

$$B_{n1} = B_{n2} \quad (4.1)$$

NORMAL \vec{D} : La componente normal D_n de \vec{D} , es discontinua en una interfase debido a la acumulación de densidad de carga superficial ρ_s

$$D_{n2} - D_{n1} = \rho_s \quad (4.2)$$

TANGENCIAL \vec{E} : La componente tangencial E_t de \vec{E} , es continua a través de una interfase de separación entre el medio (1) y el medio (2)

$$E_{t1} = E_{t2} \quad (4.3)$$

TANGENCIAL \vec{H} : La componente tangencial H_t de \vec{H} , es continua a través de una interfase si no hay corriente superficial

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (4.4)$$

DENSIDAD DE CORRIENTE \vec{J} : La componente normal J_n de \vec{J} , es continua a través de una interfase

$$J_{n1} = J_{n2} \quad (4.5)$$

5. REFLEXIÓN Y REFRACCIÓN DE ONDAS PLANAS

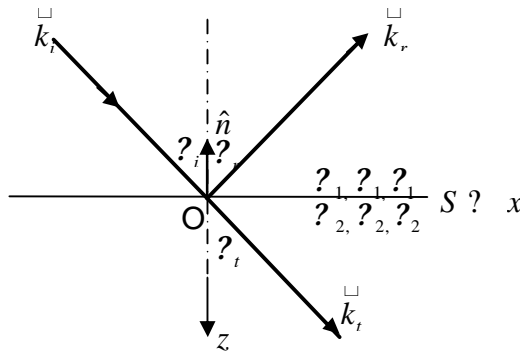
Las ondas electromagnéticas son reflejadas y refractadas en una interfase plana, separando medios de diferentes parámetros eléctricos. Dicha reflexión y refracción son gobernadas por las leyes de Snell y las ecuaciones de Fresnel.

5.1 LEYES DE SNELL

Sea una onda plana, uniforme, homogénea y linealmente polarizada incidiendo desde un medio al otro y cada uno de éstos con sus respectivos parámetros eléctricos $\epsilon_1, \mu_1, \eta_1$ y $\epsilon_2, \mu_2, \eta_2$, los cuales están en contacto a través de una superficie plana infinita S (ver fig. 5.1). Dicha onda, incide en la dirección denotada por el vector número de onda \vec{k}_i , o por el ángulo de incidencia θ_i . Parte de la onda incidente es reflejada en la dirección del vector número de onda \vec{k}_r o θ_r , y la otra parte es transmitida dentro del segundo medio en la dirección de \vec{k}_t o θ_t . Para una onda plana, uniforme y homogénea \vec{E}, \vec{H} y \vec{k} son ortogonales entre si, por lo tanto:

$$\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{k}$$

Figura 5.1. Vectores de onda incidente \vec{k}_i , reflejado \vec{k}_r y transmitido \vec{k}_t en una interfase plana S , la cual separa el medio $\epsilon_1, \mu_1, \eta_1$ del medio $\epsilon_2, \mu_2, \eta_2$.



Fuente: NABHIGUIAN. p. 183

Los vectores eléctrico y magnético de la onda incidente están denotados por:

$$\vec{E}^i \perp \vec{E}_i e^{i\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad (5.1)$$

$$\vec{H} = \vec{k}_i \times \vec{E}_i, \quad (5.2)$$

donde \vec{E}_i , es la amplitud compleja de la onda incidente. El plano definido por los vectores \hat{n} y \vec{k}_i es llamado plano de incidencia. De forma análoga se definen los vectores eléctrico y magnético para las ondas reflejada y transmitida.

Se pueden encontrar relaciones entre las tres direcciones haciendo uso de las condiciones de frontera para la continuidad de \vec{E} y \vec{H} tangenciales en la superficie $S(z=0)$. De la continuidad de \vec{E} tangencial y teniendo en cuenta que la única forma que se cumpla es cuando los argumentos de los exponenciales son iguales,

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}, \quad (5.3)$$

que luego de aplicar algunas identidades vectoriales y observar su orientación vectorial en la figura 5.1, se transforman en,

$$\sin \theta_i = \sin \theta_r, \quad (5.4)$$

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t, \quad (5.5)$$

Las ecuaciones (5.4) y (5.5), son las llamadas Leyes de Snell de reflexión y refracción.

5.2 ECUACIONES DE FRESNEL

Estas ecuaciones relacionan las amplitudes de los campos vectoriales. Al igual que en el tema anterior, se considera reflexión y refracción de ondas planas y uniformes en una interfase S . De la continuidad de \vec{E} tangencial, considerando la ecuación (5.3), se obtiene:

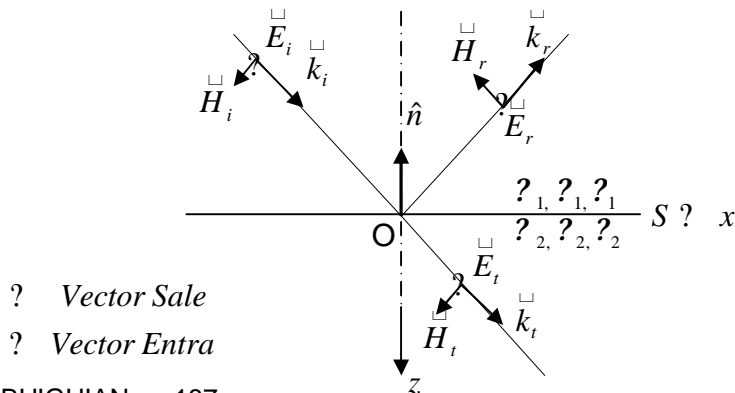
$$\hat{n} \cdot (\vec{E}_i + \vec{E}_r) = \hat{n} \cdot \vec{E}_t. \quad (5.6)$$

Por otro lado, la continuidad de \vec{H} tangencial expresada en términos de \vec{E}_i , \vec{E}_r y \vec{E}_t se define como:

$$\hat{n} \times \vec{E}_i \times \vec{k}_i + \hat{n} \times \vec{E}_r \times \vec{k}_r = \hat{n} \times \vec{E}_t \times \vec{k}_t \quad (5.7).$$

La ecuación (5.7) puede resolverse tomando la orientación de \underline{E}_i como una componente normal al plano de incidencia y una componente en dicho plano.

Figura 5.2. Orientaciones relativas de los vectores \underline{E} , \underline{H} y \underline{k} para una reflexión en una superficie plana cuando \underline{E}_i es normal al plano de incidencia.



? Vector Sale
 ? Vector Entra

Fuente: NABHIGUIAN. p.187

5.2.1 \underline{E}_i Normal al plano de Incidencia. Ya que el plano de incidencia contiene a \underline{k}_i , \underline{k}_r , \underline{k}_t y \hat{n} , y puesto que \underline{E}_i , \underline{E}_r y \underline{E}_t son normales al plano de incidencia, haciendo referencia a medios isotrópicos (ver figura 5.2), la ecuación (5.7) se reduce a,

$$\cos\theta_i \underline{E}_i = \cos\theta_r \underline{E}_r + \frac{k_2 \cos\theta_t}{k_1} \underline{E}_t, \quad (5.8)$$

ésta, es la primera de las dos ecuaciones que relacionan \underline{E}_i , \underline{E}_r y \underline{E}_t . Para obtener la segunda ecuación se toma el producto cruz de \hat{n} con el lado derecho e izquierdo de la ecuación (5.6), obteniéndose

$$\hat{n} \times \underline{E}_i = \hat{n} \times \underline{E}_r + \hat{n} \times \underline{E}_t. \quad (5.9)$$

resueltas las ecuaciones (5.8) y (5.9) se obtiene \underline{E}_r y \underline{E}_t en términos del campo eléctrico incidente \underline{E}_i ,

$$\underline{E}_r = \frac{k_2 \cos\theta_i - k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_i}}{k_2 \cos\theta_i + k_1 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2\theta_i}} \underline{E}_i, \quad (5.10)$$

y

$$\vec{E}_r = \frac{2k_1 \cos \theta_i}{k_1 \cos \theta_i + k_2 \sin^2 \theta_i} \vec{E}_i \quad (5.11)$$

de la ecuación (5.10), se desprende que la razón entre el campo eléctrico reflejado y el incidente, conocida como la amplitud del coeficiente de reflexión r_\perp para \vec{E}_i perpendicular al plano de incidencia, es:

$$r_\perp = \frac{E_r}{E_i} = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1}, \quad (5.12)$$

ecuación en la que se han realizado las siguientes sustituciones:

$$u_1 = k_1 \cos \theta_i,$$

$$u_2 = (k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2},$$

En forma general la ecuación (5.12) se puede expresar

$$r_\perp = \frac{E_r}{E_i} = \frac{u_m - u_n}{u_m + u_n}, \quad (5.13)$$

donde se asume que la onda se origina en el medio m y es reflejada por el medio n .

5.2.2 \vec{E}_i en el plano de incidencia. Dicho de otra manera \vec{H}_i normal al plano de incidencia. Para este caso, se cumple que:

$$\hat{n} \cdot \vec{H}_i = \hat{n} \cdot \vec{H}_r = \hat{n} \cdot \vec{H}_t = 0, \quad (5.14)$$

En la ecuación (5.14), se ha asumido que los argumentos de los exponentes de la función de onda deben ser idénticos en la interfase. Tomando el producto cruz de \vec{k}_i en ambos lados de la ecuación (5.2), se obtiene el siguiente resultado:

$$\vec{k}_i \times \vec{H}_i = \vec{k}_i \times E_i \vec{k}_i = (k_i \times k_i) E_i. \quad (5.15)$$

Ya que \vec{E}_i, \vec{H}_i y \vec{k}_i son un conjunto ortogonal, la ecuación (5.15) se transforma en:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{k_i} \hat{n}_i \times \vec{H}_i, \quad (5.16)$$

en la que \hat{n}_i es un vector unitario en la dirección de \underline{k}_i . De manera similar se definen \underline{E}_r y \underline{E}_t .

$$\underline{E}_r = \frac{1}{k_1} \hat{n}_r \cdot \underline{H}_r, \quad (5.17)$$

$$\underline{E}_t = \frac{1}{k_1} \hat{n}_t \cdot \underline{H}_t. \quad (5.18)$$

Por tanto, llevando el resultado de las ecuaciones (5.16), (5.17) y (5.18) a la ecuación (5.6) y teniendo en cuenta la siguiente identidad vectorial,

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \cdot \underline{C} = (\underline{A} \cdot \underline{C}) \underline{B} = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \underline{C},$$

y la orientación de los vectores de la figura 5.2, se obtiene como resultado:

$$\cos \theta_i \underline{H}_i = \cos \theta_r \underline{H}_r = \frac{k_2}{k_1} \cos \theta_t \underline{H}_t. \quad (5.19)$$

Para obtener la segunda ecuación se toma el producto cruz de \hat{n} con la continuidad de \underline{H} tangencial, definida como

$$\hat{n} \cdot (\underline{H}_i - \underline{H}_r) = \hat{n} \cdot \underline{H}_t, \quad (5.20)$$

obteniéndose como resultado

$$\underline{H}_i - \underline{H}_r = \underline{H}_t. \quad (5.21)$$

Resolviendo las ecuaciones (5.19) y (5.21) se obtiene,

$$\underline{H}_r = \frac{k_1 k_2 \cos \theta_i - k_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i}}{k_1 k_2 \cos \theta_i + k_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i}} \underline{H}_i, \quad (5.22)$$

Y

$$\underline{H}_t = \frac{2 k_1 k_2 \cos \theta_i}{k_1 k_2 \cos \theta_i + k_2 \sqrt{k_2^2 - k_1^2 \sin^2 \theta_i}} \underline{H}_i. \quad (5.23)$$

De la ecuación (5.22) se desprende una relación importante, determinada por la razón entre la intensidad de campo magnético reflejado y el transmitido, llamada

amplitud del coeficiente de reflexión r_{\parallel} para \underline{H}_i normal al plano de incidencia, que para un caso general se define como:

$$r_{\parallel} = \frac{H_r}{H_i} = \frac{u_n k_m^2 - u_m k_n^2}{u_n k_m^2 + u_m k_n^2} \quad (5.24)$$

5.2.3 Reflexión e impedancia de onda. Algunas veces es más conveniente escribir el coeficiente de reflexión en términos de la impedancia de onda plana Z , que se define como la razón entre las amplitudes de los campos eléctrico y magnético ortogonales,

$$Z = \frac{E_x}{H_y} = \frac{E_y}{H_x}, \quad (5.25)$$

para ondas viajando en la dirección positiva de z .

Por tanto los coeficientes de reflexión expresados en las ecuaciones (5.13) y (5.24) en términos de la impedancia de onda se transforman en:

$$r_{\perp} = \frac{Z_n \cos \theta_i - Z_m \sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k_n^2} \sin^2 \theta_i}}{Z_n \cos \theta_i + Z_m \sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k_n^2} \sin^2 \theta_i}}, \quad (5.26)$$

$$r_{\parallel} = \frac{Z_n \sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k_n^2} \sin^2 \theta_i} - Z_m \cos \theta_i}{Z_n \sqrt{1 - \frac{k_m^2}{k_n^2} \sin^2 \theta_i} + Z_m \cos \theta_i}, \quad (5.27)$$

donde,

- k_n es el módulo del vector de onda en la capa n
- Z_n es la impedancia intrínseca medida dentro de la capa n .

Para incidencia normal ($\theta_i = 0$) las ecuaciones (5.26) y (5.27) son iguales a:

$$r_{\perp} = r_{\parallel} = \frac{Z_n - Z_m}{Z_n + Z_m}. \quad (5.28)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (5.28) se puede decir que el coeficiente de reflexión para la interfase aire – tierra es

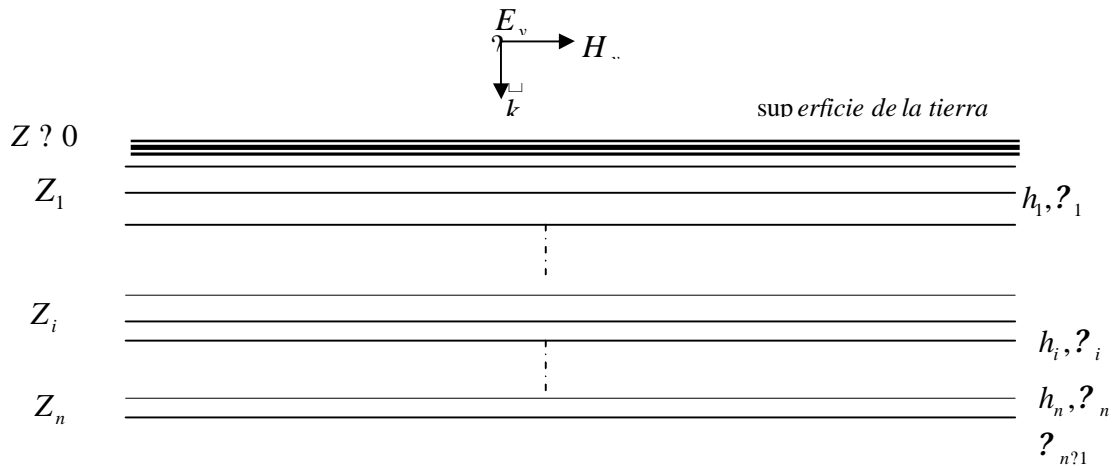
$$r_{\parallel} = r_{\perp} = \frac{\hat{Z}_1 - Z_0}{\hat{Z}_1 + Z_0}, \quad (5.29)$$

Donde \hat{Z}_i indica la impedancia superficial en la cima de la capa i .

5.3 ADMITANCIA DE ONDA PLANA DE UNA TIERRA ISOTRÓPICA DE n CAPAS

5.3.1 Incidencia normal. Se tiene una onda uniforme plana y homogénea incidiendo sobre un modelo de tierra isotrópico de n capas. El modelo se ilustra en la figura (5.3). En cualquier capa se definen los campos eléctrico y magnético en términos de una onda saliente y una onda reflejada; es decir en función de E_i^+ y E_i^- .

Figura 5.3. Tierra plana estratificada impermeable ($\epsilon = \epsilon_0$) sobre la cual está incidiendo una onda plana electromagnética normalmente. E_y, H_x y k forman un conjunto ortogonal. σ_i y h_i , son respectivamente la conductividad y el espesor de la capa i -ésima, y z_i es la profundidad en el borde de ésta capa.



Fuente: NABHIGUIAN. p.194

$$E_{yi} = E_i^+ e^{-\gamma_i(z-z_i)} + E_i^- e^{\gamma_i(z-z_i)}, \quad (5.30)$$

$$H_{xi} = \frac{u_i}{\hat{Z}_i} \left(E_i^+ e^{-\gamma_i(z-z_i)} - E_i^- e^{\gamma_i(z-z_i)} \right), \quad (5.31)$$

donde

$Y_i = \frac{u_i}{z_i}$ es la admitancia intrínseca de la capa i ésima

z_i es la distancia vertical al borde de la i ésima capa,

z es cualquier distancia dentro de una capa en la cual el campo es medido,

E_i^+ es la amplitud de la onda viajando positivamente en la i ésima capa,

E_i^- es la amplitud de la onda viajando negativamente en la i ésima capa.

Sobre la frontera $z = z_i$ se tiene,

$$E_{yi} = E_i^+ + E_i^-, \quad (5.32)$$

$$H_{xi} = Y_i(E_i^+ - E_i^-). \quad (5.33)$$

Al despejar E_i^+ y E_i^- con ayuda de las ecuaciones (5.32) y (5.33) se obtiene:

$$E_i^+ = \frac{1}{2} E_{yi} + \frac{1}{Y_i} H_{xi} \quad (5.34)$$

$$E_i^- = \frac{1}{2} E_{yi} - \frac{1}{Y_i} H_{xi} \quad (5.35)$$

Ahora se considera la frontera $z = z_{i+1}$, donde la continuidad de los campos eléctrico y magnético tangencial demandan que:

$$H_{xi} = H_{x(i+1)}, \quad (5.36)$$

$$E_{yi} = E_{y(i+1)}. \quad (5.37)$$

Por tanto, al reemplazar las ecuaciones (5.36) y (5.37) en las ecuaciones (5.30) y (5.31), tomando la frontera $z = z_{i+1}$, y luego de hacer algunas consideraciones se obtiene:

$$E_{y(i?1)} = E_{yi} \cosh(u_i h_i) + \frac{1}{Y_i} H_{xi} \sinh(u_i h_i), \quad (5.38)$$

$$H_{x(i?1)} = \cosh(u_i h_i) H_{yi} + Y_i \sinh(u_i h_i), \quad (5.39)$$

Donde

$$z_i = z_{i?1} + h_i$$

A su vez la ecuación (5.38) y (5.39) se pueden escribir en forma matricial de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} E_{y(i?1)} \\ H_{x(i?1)} \end{bmatrix} = \tilde{T}_i \begin{bmatrix} E_{yi} \\ H_{xi} \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

donde

$$\tilde{T}_i = \begin{bmatrix} \cosh(u_i h_i) & \frac{1}{Y_i} \sinh(u_i h_i) \\ Y_i \sinh(u_i h_i) & \cosh(u_i h_i) \end{bmatrix},$$

representa la matriz de transferencia de la capa i . Por lo tanto para n capas se tendrá una sucesión de matrices \tilde{T}_i desde \tilde{T}_1 hasta \tilde{T}_n , cada una de las cuales permite expresar los campos eléctrico y magnético de una capa en términos de los campos de la próxima capa. De esta forma se encuentra fácilmente la relación matricial entre los campos de la $(i-1)$ -ésima capa y aquellos en el medio infinito terminando en la capa n , mediante la siguiente relación:

$$\begin{bmatrix} E_{y(i?1)} \\ H_{x(i?1)} \end{bmatrix} = \tilde{S} \begin{bmatrix} E_{yn} \\ H_{xn} \end{bmatrix} \Big|_{z=z_n}, \quad (5.41)$$

donde $\tilde{S} = \prod_{i=1}^n \tilde{T}_i = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{11} & \tilde{S}_{12} \\ \tilde{S}_{21} & \tilde{S}_{22} \end{bmatrix}$.

Hay que notar que en la ecuación (5.41) se tiene en cuenta la continuidad de los campos eléctrico y magnético en la frontera $n + 1$.

Según esto, la admitancia $\hat{Y}_{i?1}$ mirada dentro del medio de n capas, desde la superficie de la i -ésima capa es:

$$\hat{Y}_{i^{?1}} = \frac{H_{x(i^{?1})}}{E_{y(i^{?1})}} = \frac{?_{21} ? ?_{22} Y_{n^{?1}}}{?_{11} ? ?_{12} Y_{n^{?1}}}, \quad (5.42)$$

donde

$$Y_{n^{?1}} = \frac{H_{x(n^{?1})}}{E_{y(n^{?1})}}.$$

Ya que

$$\hat{Y}_{i^{?1}} \Big|_{z=z_{i^{?2}}} = \hat{Y}_i \Big|_{z=z_{i^{?2}}},$$

se calcula \hat{Y}_n en $z = z_{n^{?1}}$; es decir la última capa reposando sobre el semi-espacio infinito, por lo tanto la admitancia puede ser encontrada por sustitución de los términos s_{ij} por los términos \tilde{T}_{ij} ,

$$\begin{aligned} ?_{11} &= \cosh(u_n h_n) \\ ?_{12} &= \frac{1}{Y_n} \sinh(u_n h_n) \\ ?_{21} &= Y_n \sinh(u_n h_n) \\ ?_{22} &= \cosh(u_n h_n) \end{aligned}$$

Por tanto \hat{Y}_n según la ecuación (5.42) se expresa como

$$\hat{Y}_n \Big|_{z=z_{n^{?1}}} = Y_n \frac{\hat{Y}_{n^{?1}} + Y_n \tanh(u_n h_n)}{Y_n + \hat{Y}_{n^{?1}} \tanh(u_n h_n)}, \quad (5.43)$$

una vez es computada esta admitancia puede ser usada como la admitancia de un semi-espacio homogéneo equivalente. Entonces la admitancia en el tope de la (n-1)-ésima capa esta dada por:

$$\hat{Y}_{n^{?1}} \Big|_{z=z_n} = Y_{n^{?1}} \frac{\hat{Y}_n + Y_{n^{?1}} \tanh(u_{n^{?1}} h_{n^{?1}})}{Y_{n^{?1}} + \hat{Y}_n \tanh(u_{n^{?1}} h_{n^{?1}})}. \quad (5.44)$$

Y de igual forma se procede hasta llegar a la superficie del suelo.

Se ha usado la notación \hat{Y}_i para denotar la impedancia en la cima de la capa i -ésima y la notación Y_i para denotar la impedancia característica de la i -ésima capa. Hay que tener en cuenta que la admitancia Y como tal es el inverso de la impedancia Z .

6. POTENCIALES DE SCHELKUNOFF

Para regiones que contienen fuentes las ecuaciones de Maxwell en el dominio de la frecuencia son inhomogéneas y se definen como,

$$\nabla \times \underline{E} = -\hat{z} \underline{H} - \nabla J_m^s - i \omega \underline{M}^s, \quad (6.1)$$

$$\nabla \times \underline{H} = \hat{y} \underline{E} + \nabla J_e^s + i \omega \underline{P}^s, \quad (6.2)$$

en las cuales J_m^s es una densidad de corriente magnética, J_e^s es una densidad de corriente eléctrica, \underline{M} es el vector de magnetización (polarización magnética) y \underline{P} es el vector de polarización eléctrica.

Uno de los posibles métodos para obtener las soluciones de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell, es expresando \underline{E} y \underline{H} en términos de los potenciales de Schelkunoff.

En primer lugar se atribuye la existencia de campos eléctricos y magnéticos en cada una de las regiones homogéneas, para una superposición de fuentes de tipo eléctrico y de tipo magnético, es decir:

$$\underline{E} = \underline{E}_m + \underline{E}_e, \quad (6.3)$$

$$\underline{H} = \underline{H}_m + \underline{H}_e, \quad (6.4)$$

luego se soluciona las ecuaciones para el caso de una fuente magnética, $\{\underline{E}_m, \underline{H}_m\}$ y para el caso de una fuente eléctrica, $\{\underline{E}_e, \underline{H}_e\}$ por separado. Finalmente se suma ambas soluciones; es decir: el campo eléctrico y magnético total, $\{\underline{E}, \underline{H}\} = \{\underline{E}_e, \underline{H}_e\} + \{\underline{E}_m, \underline{H}_m\}$, expresadas en términos de los potenciales de schelkunoff como,

$$\underline{E} = -\hat{z} A - \frac{1}{\hat{y}} \nabla \cdot \underline{A} - \nabla F \quad (6.5)$$

$$\underline{H} = \hat{y} F - \frac{1}{\hat{z}} \nabla \cdot \underline{F} - \nabla A, \quad (6.6)$$

donde \vec{F} es el potencial vectorial magnético debido a fuentes magnéticas, y \vec{A} es el potencial vectorial eléctrico debido a fuentes eléctricas.

Si solamente un tipo de fuente esta presente las ecuaciones (6.5) y (6.6) se dividen en los siguientes grupos; el primero haciendo referencia a la presencia de sólo una fuente eléctrica en la región y el segundo solo a una fuente magnética. Por lo tanto:

FUENTES ELÉCTRICAS

$$\vec{E}_e = -\text{grad} A - \dot{\vec{F}}$$

$$\vec{H}_e = \text{rot} \vec{A}$$

FUENTES MAGNÉTICAS

$$\vec{E}_m = -\dot{\vec{F}}$$

$$\vec{H}_m = \text{rot} \vec{F} + \dot{\vec{A}}$$

Al igual que en el caso de la ecuaciones de onda para \vec{E} y \vec{H} obtenidas a partir de las ecuaciones de Maxwell homogéneas en el dominio de la frecuencia, también se pueden obtener las ecuaciones de Helmholtz para \vec{A} y \vec{F} a partir de las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell³. Las cuales se definen como

$$\text{grad}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = \vec{J}_e^s, \tag{6.9}$$

$$\text{grad}^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = \vec{J}_m^s, \tag{6.10}$$

las ecuaciones (6.9) y (6.10) son las ecuaciones inhomogéneas de Helmholtz en \vec{F} y \vec{A} respectivamente, aplicables a regiones homogéneas que contienen fuentes \vec{J}_m^s (densidad de corriente magnética de fuente) o \vec{J}_e^s (densidad de corriente eléctrica superficial de fuente).

Para regiones libres de fuentes, las ecuaciones inhomogéneas (6.9) y(6.10), se reducen a sus contrapartes homogéneas

$$\text{grad}^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0, \tag{6.11}$$

$$\text{grad}^2 \vec{F} + k^2 \vec{F} = 0. \tag{6.12}$$

Puesto que en la mayoría de problemas sobre la teoría electromagnética se trabaja \vec{F} y \vec{A} en una única componente, es decir en la dirección z , se tiene

³ NABHIGUIAN N, Misac. Electromagnétic Methods in Geophysics. Unites States of America. p. 144 – 147.

$$\vec{A} = A_z \hat{u}_z \quad \text{y} \quad \vec{F} = F_z \hat{u}_z, \quad (6.13)$$

donde \hat{u}_z es el vector unitario en la dirección z , y A_z y F_z son funciones escalares de x, y, z .

7. FUNCIONES DE BESSEL

Se hace uso de este tipo de funciones en la parte de la solución de las ecuaciones inhomogéneas para el potencial vectorial magnético \underline{F} .

7.1 FUNCIONES DE BESSEL DE PRIMERA CLASE $J_n(x)$

Son de interés principalmente en la solución de ecuaciones diferenciales. Se presentan en forma de serie e integral mediante las siguientes expresiones:

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!(n-s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}, \quad (7.1)$$

$$J_n(x) = \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta. \quad (7.2)$$

En forma de series se cumplen las siguientes relaciones constitutivas

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - J'_n(x), \quad (7.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^n J_n(x) \right) = x^n J_{n-1}(x). \quad (7.4)$$

En términos de las funciones de Bessel de primera clase se consideró las siguientes relaciones:

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{iuz} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{iuz} J_0(uz) du$$

Conversión transformada de Fourier a T. de Hankel

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{iuz} J_0(uz) du = \frac{e^{ikr}}{r},$$

Integral de Sommerfeld

$$\int_0^{\infty} e^{iuz} J_0(uz) du = \frac{1}{r},$$

Integral de Lipschitz

7.2 FUNCIONES DE BESSEL MODIFICADAS $I_n(x)$, $K_n(x)$.

Frecuentemente en problemas de física se presenta la ecuación

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} y(x) + x \frac{d}{dx} y(x) - (x^2 + n^2) y(x) = 0, \quad (7.5)$$

Que puede ser transformada a una ecuación de Bessel por medio de la sustitución $x = it$, obteniendo

$$t^2 \frac{d^2}{dt^2} y(it) + t \frac{d}{dt} y(it) - (t^2 - n^2) y(it) = 0 \quad (7.6)$$

Es costumbre seleccionar la normalización de modo que la solución de (7.6) sea

$$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) \quad (7.7)$$

La segunda solución de la ecuación (7.5) se selecciona con base a su comportamiento asintótico, obteniéndose

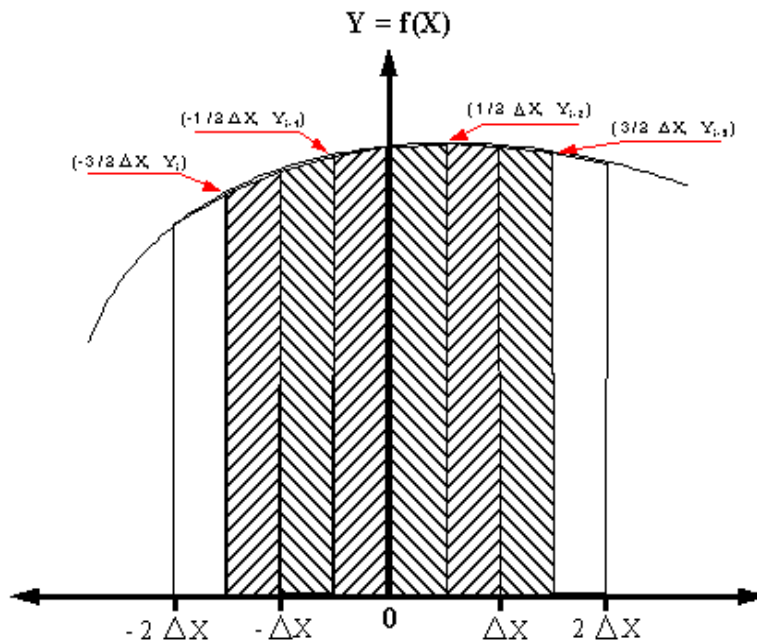
$$K_n(x) = \frac{I_{-n}(x) - I_n(x)}{2 \operatorname{sen}(n\pi)} \quad (7.8)$$

8. REGLA DE SIMPSON 3/8

Determina el área bajo una parábola de tercer grado que conecta cuatro puntos sobre una curva dada. La forma general de la parábola de tercer grado es:

$$Y = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad (8.1)$$

Figura 7.1. Intersección de la parábola de tercer grado sobre la curva



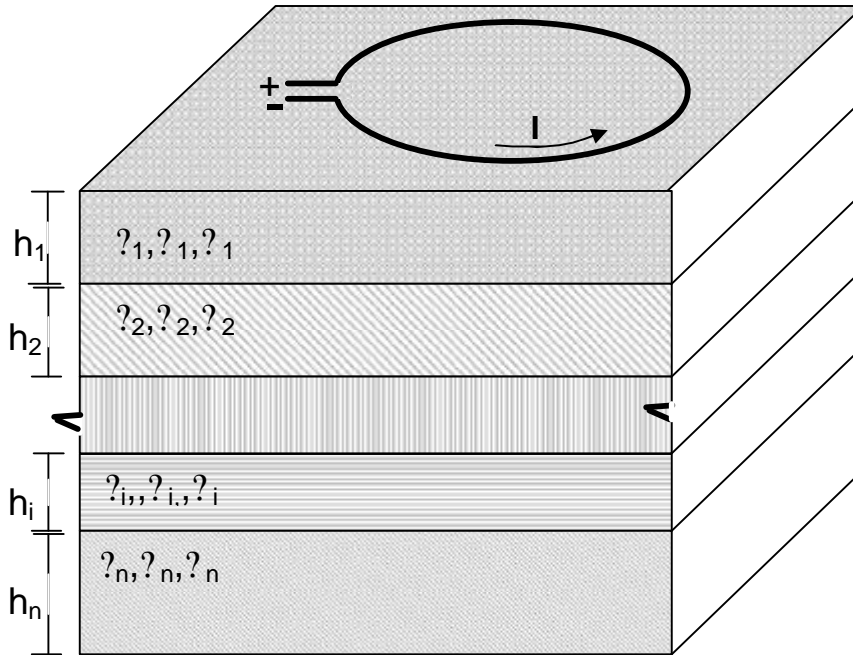
las constantes se determinan requiriendo que la parábola definida por la ecuación (8.1) pase a través de los cuatro puntos indicados en la curva mostrada en la figura 8.1.

Por lo tanto el área bajo la parábola que corta en tres puntos la curva (fig. 8.1) se define como:

$$A = \int_{-\frac{3\Delta X}{2}}^{\frac{3\Delta X}{2}} (aX^3 + bX^2 + cX + d) dx = \frac{3\Delta X}{8} (Y_1 + 3Y_{i1} + 3Y_{i2} + Y_{i3}) \quad (8.2)$$

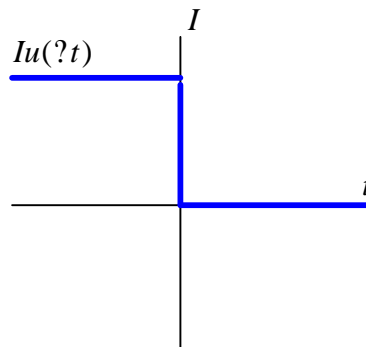
9. CAMPO ELECTROMAGNETICO ARMONICO Y DE TRANSICIÓN GENERADO POR UNA ESPIRA PORTADORA DE CORRIENTE

Figura 9.1. Esquema de un suelo de n capas homogéneas, isotrópicas sobre el cual está actuando una fuente (espira circular de corriente). Cada una de las capas con sus correspondientes propiedades electromagnéticas $\mu_i, \sigma_i, \epsilon_i, i = 1..n$ y espesor h_i .



El propósito de este trabajo es encontrar la solución del campo electromagnético armónico generado por una espira circular portadora de corriente constante I , actuando sobre un sistema de n capas, cada una de las cuales presenta sus correspondientes propiedades electromagnéticas, tales como: permeabilidad magnética, conductividad y permitividad eléctrica, $\mu_i, \sigma_i, \epsilon_i; i = 1..n$, y espesores h_i (figura 9.1). Además se encuentra la solución del campo electromagnético de transición de una espira portadora de corriente actuando sobre un medio homogéneo, cuando la corriente que circula a través de ésta se desconecta abruptamente en el tiempo (fig. 9.2).

Figura 9.2. Comportamiento de la corriente constante I que circula a través de la espira cuando es desconectada abruptamente.



Para llevar a cabo su solución se utiliza el siguiente esquema de trabajo:

Equivalencia pequeña espira de corriente y dipolo magnético.

Cálculo del campo electromagnético armónico y de transición producido por un dipolo magnético actuando sobre un medio ilimitado.

Cálculo del campo electromagnético armónico y de transición producido por un dipolo actuando sobre un medio homogéneo.

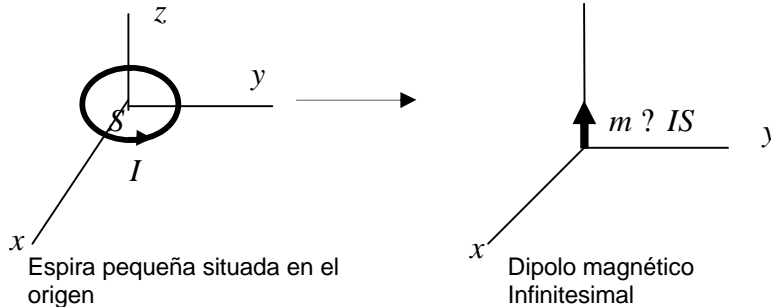
Cálculo del campo electromagnético armónico producido por una espira grande circular portadora de corriente actuando sobre un medio homogéneo y estratificado, y del campo electromagnético de transición que se origina cuando la corriente que circula a través de la espira es cortada abruptamente.

Es decir el anterior plan de trabajo comienza tratando el problema de lo particular (dipolo magnético) a lo general (espira circular).

9.1 EQUIVALENCIA PEQUEÑA ESPIRA DE CORRIENTE Y DIPOLO MAGNÉTICO

En electrodinámica clásica una pequeña espira de corriente se comporta como un dipolo magnético cuando los campos son medidos a una distancia de al menos cinco radios de la espira. Teniendo en cuenta esto una espira grande deberá comportarse como pequeños dipolos magnéticos infinitesimales. Hablando del problema como tal, se comienza por un análisis detallado del campo electromagnético de transición de un dipolo magnético, partiendo claro esta del campo electromagnético armónico.

Figura 9.3. Representación gráfica de una pequeña espira de corriente cuando se compara con un dipolo magnético infinitesimal.



9.2 CAMPO ELECTROMAGNETICO ARMONICO Y DE TRANSICION PRODUCIDO POR UN DIPOLO MAGNÉTICO ACTUANDO SOBRE UN MEDIO ILIMITADO

En aplicaciones geofísicas como análisis para el método borehole⁴ es conveniente analizar el comportamiento de la fuente actuando sobre un medio ilimitado. Además un análisis de este tipo proporcionará las herramientas básicas para el análisis más complejo que se tiene en un medio estratificado.

9.2.1 Campo electromagnético armónico producido por un dipolo magnético en un medio ilimitado. Se tiene una pequeña espira de corriente I situada en el origen y en el plano y - z comportándose como un dipolo magnético infinitesimal con $m = IS$; donde S representa el área de la espira y m representa el momento dipolar magnético (figura 9.3).

Al ubicar al dipolo magnético en el origen de coordenadas, se tiene que el vector de magnetización \underline{M} se expresa como,

$$\underline{M} = m \hat{u}_x(x)(y)(z), \quad (9.1)$$

Hay que notar que \hat{u}_x es el vector unitario en la dirección x .

Ya que se toma a la región ilimitada en presencia de fuentes, se deben satisfacer las ecuaciones de Maxwell Inhomogéneas,

$$\nabla \times \underline{E} = -\hat{z} \underline{H} - \underline{J}_m - i \epsilon_0 \nabla \times \underline{M}, \quad (9.2)$$

⁴ Disponible en Internet: <www.trxconsulting.com / M-borehole GPR-carpeta.htm>.

$$\nabla \times \vec{H} = \hat{y} \vec{E} + \vec{J}_e^s + i \vec{P}, \quad (9.3)$$

siendo

$$\hat{y} = \hat{y} + i \hat{z},$$

$$\hat{z} = i \hat{y},$$

donde

$$\vec{J}_m^s \quad \text{densidad de corriente magnética de fuente} \quad A/m^2$$

$$\vec{J}_e^s \quad \text{densidad de corriente eléctrica de fuente} \quad A/m^2$$

$$\vec{P} \quad \text{vector de polarización} \quad C/m^2$$

$$\vec{M} \quad \text{vector de magnetización} \quad A/m$$

$$\vec{H} \quad \text{intensidad de campo magnético} \quad A/m$$

$$\vec{E} \quad \text{intensidad de campo eléctrico} \quad V/m$$

La forma de satisfacer las ecuaciones (9.2) y (9.3) es expresando \vec{E} y \vec{H} en términos del potencial vectorial magnético \vec{F} y eléctrico \vec{A} de Schelkunoff, definidos por las ecuaciones (6.5) y (6.6) respectivamente,

$$\vec{E} = -\hat{z} \vec{A} - \frac{1}{\hat{y}} \nabla \times \vec{F}, \quad (9.4)$$

$$\vec{H} = \hat{y} \vec{F} + \frac{1}{\hat{z}} \nabla \times \vec{A}. \quad (9.5)$$

Debido a que en el problema como tal se trabaja con fuentes magnéticas se tiene que

$$\vec{F} = F(x, y, z) \hat{x}. \quad (9.6)$$

$$\vec{A} = 0, \quad (9.7)$$

según esto las ecuaciones (9.4) y (9.5) se transforman en :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \dot{\vec{A}}, \quad (9.8)$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{A} - \dot{\vec{E}}. \quad (9.9)$$

Al sustituir la ecuación (9.6) en las ecuaciones (9.8) y (9.9) se obtiene como resultado $E_x = 0$, que implica que las formas escalares de las expresiones (9.8) y (9.9) describen un campo que es transversal a la dirección x , denominado: Modo eléctrico transversal (MET_x). Con un procedimiento similar se pueden encontrar (MET_y) y (MET_z).

A su vez el potencial vectorial magnético \vec{A} debe satisfacer,

$$\nabla^2 \vec{A} - k^2 \vec{A} = -\vec{M}, \quad (9.10)$$

llamada ecuación inhomogénea de Helmholtz en \vec{A} . Al hacer el reemplazo de las ecuaciones (9.1) y (9.6) en la ecuación (9.10) se obtiene:

$$\nabla^2 F - k^2 F = -i\omega m(x)(y)(z), \quad (9.11)$$

para solucionarla se hace el reemplazo de la siguiente transformada inversa triple de Fourier:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int \int \int \tilde{F}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z, \quad (9.12)$$

Y se expresa F en términos de la transformada de Fourier⁵,

$$F(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int e^{ik_x(x - x_0)} dk_x, \quad (9.13)$$

Por lo tanto,

$$\frac{1}{8\pi^3} \int \int \int \tilde{F}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z - \frac{k^2}{8\pi^3} \int \int \int \tilde{F}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z = -\frac{i\omega m}{8\pi^3} \int \int \int e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z$$

⁵ HWEI P, Op. cit., p. 138 -139.p.102

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k^2] \tilde{F}(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z - m \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z = 0,$$

que es válida únicamente cuando el término entre corchetes es cero, por lo tanto:

$$\tilde{F}(k_x, k_y, k_z) = \frac{i m}{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 - k^2}. \tag{9.14}$$

Como se puede notar la ecuación (9.14) se encuentra definida en el espacio de $k_x, k_y,$ y $k_z,$ se debe hacer uso de la transformada inversa de Fourier para encontrar $F(x, y, z)$. Si se considera primero la transformación respecto a z se obtiene,

$$\tilde{F}(k_x, k_y, z) = \frac{\hat{m}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ik_z z}}{u^2 - k^2} dk_z, \tag{9.15}$$

donde

$$u = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k^2}, \tag{9.16}$$

siendo k_x y k_y constantes de integración y k el módulo del vector número de onda.

Se resuelve la ecuación (9.15) con ayuda del teorema del cálculo del residuo en variable compleja⁶, tomando como referencia que la integral tiene polos en $k_z = \pm iu_0$, obteniendo como resultado

$$\tilde{F}(k_x, k_y, z) = \frac{\hat{m}}{2u} e^{-uz}. \tag{9.17}$$

Finalmente para encontrar $F(x, y, z)$ se procede a hacer la transformación de la ecuación (9.17) con la ayuda de la transformada inversa doble de Fourier integrada respecto a x y y ; es decir:

⁶ WILLIAM R, Derrick. Variable compleja con aplicaciones. Segunda edición Estados Unidos de America: Grupo editorial Iberoamerica,1987. p. 133 -134

$$F(x, y, z) = \frac{\hat{z}}{8\pi^2} \int \int \frac{1}{u} e^{i(k_x x + k_y y + uz)} dk_x dk_y, \quad (9.18)$$

Si se reemplaza la ecuación (9.16) en la ecuación (9.18) se puede observar que es una función de $k_x^2 + k_y^2$, por lo tanto se puede convertir a una transformada de Hankel usando la siguiente relación:

$$\int \int \frac{1}{u} e^{i(k_x x + k_y y + uz)} dk_x dk_y = 2\pi \int_0^\infty \frac{1}{u} e^{iuz} J_0(kr) k dk, \quad (9.19)$$

donde

2π Constante de integración

$r^2 = x^2 + y^2$ proyección del vector posición sobre el plano xy

$J_0(kr)$ Función de Bessel de primera clase de orden cero

Adicionalmente el término del lado derecho de la ecuación (9.19) puede transformarse con ayuda de la siguiente integral de Sommerfield,

$$\int_0^\infty \frac{1}{u} e^{iuz} J_0(kr) k dk = \frac{e^{iur}}{r}, \quad (9.20)$$

permitiendo finalmente encontrar el potencial magnético en el espacio tridimensional,

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{\hat{z}m}{4\pi r} e^{iur} u_x, \quad (9.21)$$

expresión similar a la encontrada para la función de Green en un espacio tridimensional⁷.

Una vez encontrado el potencial vectorial magnético $\vec{F}(x, y, z)$ se procede a encontrar el campo eléctrico y magnético con ayuda de las ecuaciones (9.8) y (9.9) respectivamente,

⁷ ARFKEN, George. Métodos matemáticos para físicos. México: Editorial Diana, 1981. p 871- 874.

$$\vec{E} = \frac{i\omega m}{4\pi r^2} (ikr + 1) e^{ikr} \left(\frac{z}{r} \hat{u}_y - \frac{y}{r} \hat{u}_z \right) \quad (9.22)$$

$$\vec{H} = \frac{m}{4\pi r^3} e^{ikr} \left(\frac{x^2}{r^2} \hat{u}_x + \frac{xy}{r^2} \hat{u}_y + \frac{xz}{r^2} \hat{u}_z \right) \left(k^2 r^2 + 3ikr + 3 \right) - \left(\frac{y^2}{r^2} \hat{u}_x + \frac{yz}{r^2} \hat{u}_y + \frac{z^2}{r^2} \hat{u}_z \right) \left(k^2 r^2 + 3ikr + 1 \right) \quad (9.23)$$

donde,

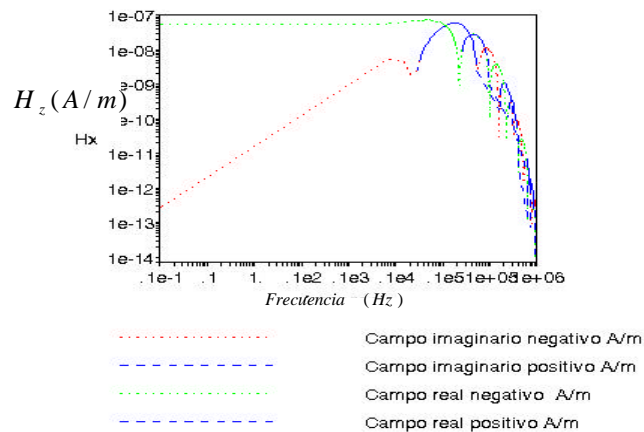
$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ Distancia del dipolo al punto de medición

$\hat{u}_x, \hat{u}_y, \hat{u}_z$ vectores unitarios en las direcciones x, y y z

Para ilustrar el comportamiento del campo magnético producido por un dipolo magnético se tiene las figuras 9.4 y 9.5, donde se identifican las partes real e imaginaria cuando el punto de observación está en el plano ecuatorial del dipolo magnético, y también cuando se localiza a lo largo del eje de influencia del dipolo magnético respectivamente.

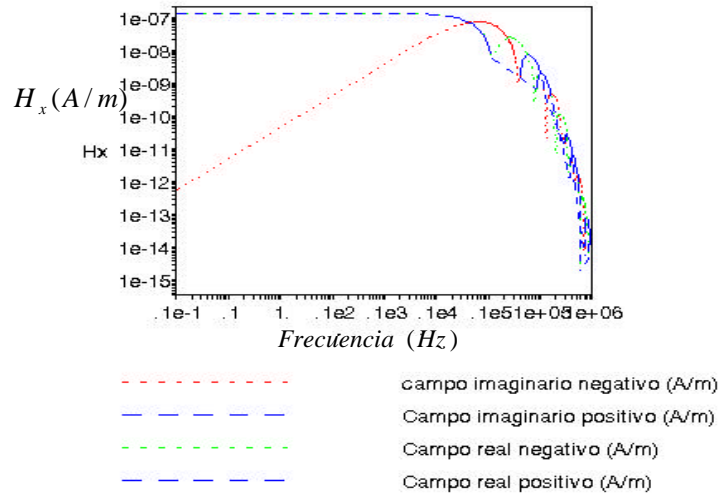
El campo armónico es medido a una distancia de $100m$, en un espacio total con conductividad $0.01S/m$. Comparando las dos graficas se observa que la parte real del campo a bajas frecuencias a lo largo del eje del dipolo magnético (figura 9.4) es dos veces la parte real en el plano ecuatorial del dipolo (figura 9.5). Mientras que a altas frecuencias las partes real e imaginaria presentan un comportamiento oscilatorio.

Figura 9.4. Campo magnético armónico a $100m$ desde un dipolo magnético con momento $1A/m^2$ en un espacio total de $0.01S/m$. Punto de observación la línea ecuatorial.



Fuente: NABHIGUIAN. p.176

Figura 9.5. Campo magnético armónico a 100m desde un dipolo magnético con momento $1A/m^2$ en un espacio total de $0.01S/m$. Punto de observación a lo largo del eje del dipolo.



Fuente: NABHIGUIAN. p. 177

9.2.2 Campo electromagnético de transición producido por un Dipolo magnético en un medio ilimitado. Anteriormente se obtuvieron expresiones para el campo electromagnético armónico de un dipolo magnético, pero como el problema planteado es encontrar la respuesta del sistema cuando se corta abruptamente el dipolo magnético, se mide la respuesta del sistema $f(t)$ de un paso negativo $u(-t)$ o $1 - u(t)$ (Figura 9.2), definida como:

$$f(t) = 1 - u(t), \quad (9.24)$$

donde,

$$f(t) = L^{-1} \left\{ \frac{H(s)}{s} \right\}, \quad (9.25)$$

el término L^{-1} indica transformada inversa de Laplace.

Con el fin de determinar la respuesta paso de los campos magnético y eléctrico armónicos, se hace uso de la transformada inversa de Laplace de las siguientes tres expresiones⁸:

$$\int_0^\infty \frac{k^2 r^2}{s} e^{ikr} ds = \frac{4}{\pi^{1/2}} r^2 e^{-r^2}, \quad (9.26)$$

⁸ Abramowitz y Stegun (1964).

$$\square \frac{\partial}{\partial s} \frac{ikr}{s} e^{ikr} \frac{2}{r^{1/2}} r e^{-r^2} , \quad (9.27)$$

$$\square \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{s} e^{ikr} \operatorname{erfc}(r) , \quad (9.28)$$

Donde

$$\operatorname{erfc}(r) = 1 - \operatorname{erf}(r) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^r e^{-t^2} dt , \quad (9.29)$$

es la función de error complementaria.

y

$$\square \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{4t} e^{-t^2} , \quad (9.30)$$

expresión similar a la de k en el dominio de la frecuencia.

Reemplazando las ecuaciones (9.26) a (9.29) en las ecuaciones (9.22) y (9.23), y finalmente aplicar la ecuación (9.24) se obtiene:

$$\square \frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{4r^2} \frac{2}{r^{1/2}} r e^{-r^2} \operatorname{erfc}(r) \frac{\partial}{\partial r} \frac{z}{r} u_y - \frac{y}{r} u_z , \quad (9.31)$$

$$\square \frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{4r^3} \frac{4}{r^{1/2}} r^3 e^{-r^2} \operatorname{erfc}(r) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x^2}{r^2} u_x - \frac{xy}{r^2} u_y - \frac{xz}{r^2} u_z \right) - \frac{4}{r^{1/2}} r^3 e^{-r^2} \operatorname{erfc}(r) u_x , \quad (9.32)$$

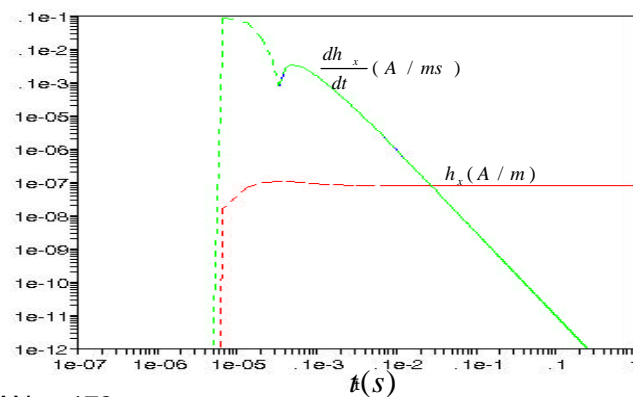
las cuales representan respectivamente los campos eléctrico y magnético de transición para un dipolo magnético orientado en la dirección x . Sin embargo en aplicaciones geofísicas usualmente se mide la fuerza electromotriz inducida (fem) en una bobina, que es proporcional a la derivada con respecto al tiempo del campo magnético función paso. Así, al tomar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (9.32), se obtiene:

$$\square \frac{\partial}{\partial t} \frac{m}{r^{3/2}} e^{-r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{x^2}{r^2} u_x - \frac{xy}{r^2} u_y - \frac{xz}{r^2} u_z \right) - (1 - r^2) u_x , \quad (9.33)$$

expresión que se define como la respuesta impulso del campo magnético generado por un dipolo magnético infinitesimal.

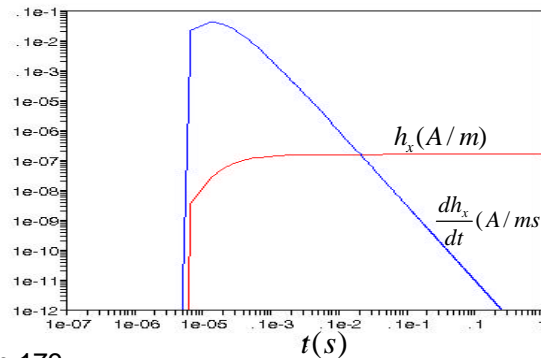
En las figuras 9.6 y 9.7 se observa los campos magnéticos de transición tomando la misma configuración utilizada en las figuras 9.4 y 9.5 A tiempos de retardo el campo magnético se aproxima a una constante $1/4\pi r^3$ o $1/2\pi r^3$ mientras que la derivada del campo magnético decae con una dependencia en el tiempo de $t^{25/2}$.

Figura 9.6. Campo magnético de transición a 100m producido por un dipolo magnético con momento función paso en un espacio total de $0.01 S/m$ punto de observación en el plano ecuatorial y del dipolo magnético.



Fuente: NABHIGUIAN. p.178

Figura 9.7. Campo magnético de transición a 100m producido por un dipolo magnético con momento función paso en un espacio total de $0.01 S/m$ punto de observación a lo largo del eje del dipolo magnético.



Fuente: NABHIGUIAN. p.179

Ya se ha encontrado el campo electromagnético armónico y de transición para un medio ilimitado, pero como en la realidad se encuentran suelos conformados por n capas, las cuales para la mayoría de aplicaciones geofísicas se consideran: isotrópicas, homogéneas, impermeables, es preciso formular una solución para dichos sistemas.

9.3 CAMPO ELECTROMAGNETICO ARMONICO Y DE TRANSICION PRODUCIDO POR UN DIPOLO MAGNETICO

9.3.1. Campo electromagnético armónico producido por un dipolo magnético vertical en un semi-espacio homogéneo y estratificado. La solución para el campo electromagnético originado por un dipolo magnético en la presencia de una tierra estratificada puede representarse como superposición de ondas planas variando los ángulos complejos de incidencia. De forma análoga al caso estudiado anteriormente se utilizan los modos eléctricos transversales MET.

Puesto que el dipolo magnético está actuando sobre el medio homogéneo o estratificado libre de fuentes, se debe contar con los efectos que produce sobre el campo la región donde se encuentra la fuente (superficie) y las regiones libres de fuentes (medio homogéneo o estratificado).

En una región libre de fuentes se tiene en cuenta la solución de la contraparte homogénea de la ecuación (9.11) para $\nabla^2 F = F \hat{u}_z$ (MET_z), que representa un modo eléctrico transversal; donde transversal implica que el campo eléctrico es normal a z . Por lo tanto:

$$\nabla^2 F - k^2 F = 0, \quad (9.34)$$

Una de las formas de solucionarla es convertirla a una ecuación diferencial ordinaria, haciendo uso de la siguiente transformada doble inversa de Fourier:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \iint \tilde{F}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y. \quad (9.35)$$

Por lo tanto,

$$\nabla^2 \iint \tilde{F}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y - k^2 \iint \tilde{F}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 0,$$

ya que ∇^2 no opera en el espacio de las coordenadas a integrar k_x, k_y , conmuta con la integral, por consiguiente

$$\iint \frac{\nabla^2}{z^2} \tilde{F}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y - k^2 \iint \tilde{F}(k_x, k_y, z) e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y = 0$$

$$\frac{d^2 \tilde{F}(k_x, k_y, z)}{dz^2} - (k_x^2 + k_y^2 + k^2) \tilde{F}(k_x, k_y, z) = 0, \quad (9.36)$$

Igualdad que se cumple si y solo si el integrando es cero

$$\frac{d^2 \tilde{F}(k_x, k_y, z)}{dz^2} - u^2 \tilde{F}(k_x, k_y, z) = 0, \quad (9.36)$$

cuya solución es:

$$\tilde{F}(k_x, k_y, z) = F^+(k_x, k_y) e^{uz} + F^-(k_x, k_y) e^{-uz}, \quad (9.37)$$

siendo

$$u = \pm (k_x^2 + k_y^2 + k^2)^{1/2},$$

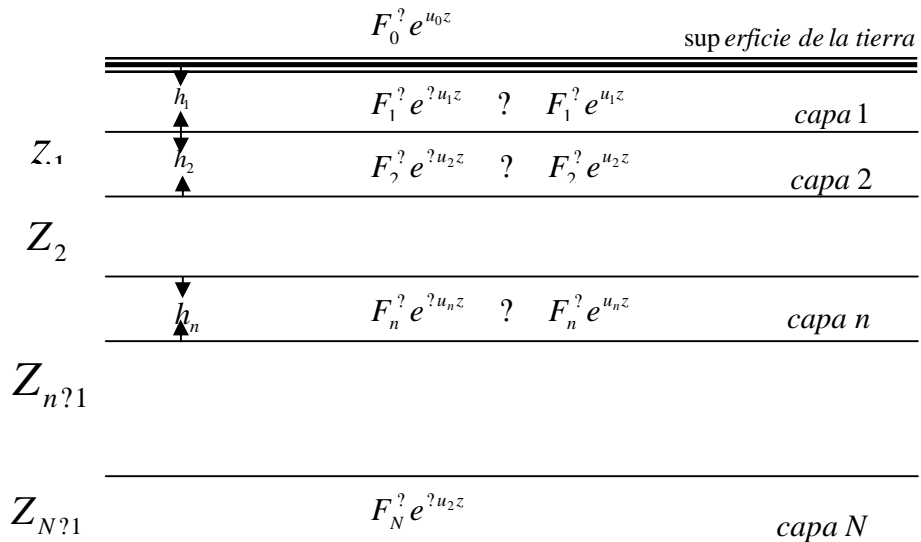
donde “+” y “-” indica soluciones decayendo descendientemente y ascendientemente respectivamente.

Al considerar una tierra de N capas se tiene soluciones como la presentada en la ecuación (9.37) en cada una de las regiones, (ver figura 9.8), donde:

$$u_n = \pm (k_x^2 + k_y^2 + k_n^2)^{1/2}, \quad (9.38)$$

con k_n el número de onda en la capa n. Note que sobre la superficie de la tierra se encuentran únicamente soluciones que decaen ascendientemente, y en el fondo (capa N) se puede encontrar únicamente soluciones que decaen descendientemente. Por otro lado, la solución en la capa n está dada en términos de F_n^+ y F_n^- , que podrán ser determinadas incorporando la solución particular y aplicando condiciones de frontera.

Figura. 9.8. Soluciones por transformada de Fourier de potenciales MET (\tilde{F}) en un tierra de N capas.



Fuente: NABHIGUIAN. p. 205

Una vez encontrada la solución para la región libre de fuentes, se procede a encontrar la solución particular (dipolo magnético en la superficie) para lo cual se resuelve la ecuación (9.10). por ahora se considerará el dipolo magnético infinitesimal de momento $m\hat{u}_z$ situado a $z = h$ sobre la superficie de la tierra, por lo tanto:

$$\nabla^2 F - k^2 F = -\hat{z}_0 m \delta(x) \delta(y) \delta(z - h) \quad (9.39)$$

Para solucionar la ecuación (9.39) se sigue el mismo procedimiento utilizado para encontrar el potencial magnético del dipolo magnético actuando sobre un medio ilimitado, evaluando la transformada de Fourier primero con respecto a x, y , que en este caso es de importancia puesto que representa la dirección de cambio en las propiedades físicas (planos de constante z) (figura 9.8),

$$\tilde{F}(k_x, k_y, z) = \frac{\hat{z}_0 m}{2u_0} e^{-u_0 h} e^{u_0 z}, \quad (9.40)$$

Donde

$$u_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_o^2} \quad (9.41)$$

por simplicidad de cálculos se llama $F_p \approx \frac{\hat{z}_0 m}{2u_0}$

de la expresión (9.40) se observa que decae descendientemente; y debido a que es el campo debido a la fuente (situada a $z \approx h$ sobre la superficie) se lo considera como campo incidente (Figura 9.9). Finalmente se obtiene la solución en la superficie definida como,

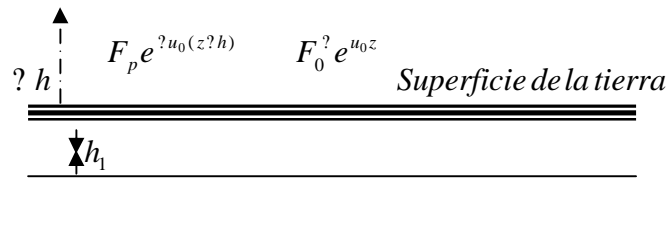
$$\tilde{F}_0(k_x, k_y, z) \approx F_p e^{2u_0 h} e^{-u_0 z} + F_0 e^{-u_0 z}, \quad (9.42)$$

donde

F_p amplitud del campo incidente. (campo primario)

F_0 amplitud del campo reflejado (campo secundario)

Figura 9.9. Campo incidente y reflejado (Potencial magnético MET) en la superficie de una tierra de n capas



De la teoría de reflexión y refracción de ondas planas existe una relación entre la amplitud del campo eléctrico reflejado $E_i^?$ y la amplitud del campo eléctrico incidente $E_i^?$, dada por el coeficiente de reflexión transversal eléctrico r_{TE} ; es decir aplicado a ondas eléctricas transversales a z .

Por otro lado, los campos incidente y reflejado para el problema planteado están en términos del potencial vectorial magnético F , por lo tanto se debe encontrar su relación con $E_i^?$, $E_i^?$. Para lo cual se considera en primer lugar la solución del potencial vectorial magnético en términos de las coordenadas espaciales $F_0(x, y, z)$ en la superficie, tomada de las ecuaciones (9.35) y (9.42),

$$\tilde{F}_0(x, y, z) \approx F_p e^{2u_0 h} e^{-u_0 z} + F_0 e^{-u_0 z} e^{i(k_x x + k_y y)} \hat{u}_z, \quad (9.43)$$

que al reemplazar en la ecuación (9.8) se obtiene,

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \hat{u}_x & \hat{u}_y & \hat{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & F_p e^{u_0 h} e^{u_0 z} + F_0 e^{u_0 z} e^{i(k_x x + k_y y)} \end{pmatrix},$$

$$\vec{E} = F_p e^{u_0 h} e^{u_0 z} + F_0 e^{u_0 z} (ik_y \hat{u}_x - ik_x \hat{u}_y) \quad (9.44)$$

Para una onda plana, uniforme y homogénea incidiendo normalmente en la dirección z sobre un sistema de N capas isotrópicas (figura 9.8) se pueden escribir los campos eléctricos y magnéticos en términos de una onda saliente y una onda reflejada. Por lo tanto en la superficie el campo eléctrico se define como:

$$E_{y0} = E_0^i e^{u_0 z} + E_0^r e^{u_0 z}, \quad (9.45)$$

y el correspondiente campo magnético

$$H_{xi} = i \frac{k_0}{\omega \mu_0} (E_0^i e^{u_0 z} - E_0^r e^{u_0 z}), \quad (9.46)$$

donde según la ecuación (9.44),

$$E_0^i = ik_x F_p e^{u_0 h}, \quad (9.47)$$

$$E_0^r = ik_x F_0. \quad (9.48)$$

De las ecuaciones (9.45) y (9.46) se despeja E_0^r (campo reflejado) y E_0^i (campo incidente), tomando la solución en la frontera $z = 0$,

$$E_0^i \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} E_{y0} + \frac{1}{Y_0} H_{x0} \Big|_{z=0}, \quad (9.49)$$

$$E_0^r \Big|_{z=0} = \frac{1}{2} E_{y0} - \frac{1}{Y_0} H_{x0} \Big|_{z=0}, \quad (9.50)$$

por lo tanto al dividir la ecuación (9.50) entre (9.49) se obtiene:

$$\frac{E_0^z}{E_0^y} = \frac{Y_0 \frac{H_{x0}}{E_{y0}}}{Y_0 \frac{H_{x0}}{E_{y0}}}, \quad (9.51)$$

Donde

$$Y_0 = \frac{u_0}{i} \text{ Admitancia intrínseca del vacío}$$

De la ecuación (5.42), se tiene que:

$$\hat{Y}_1 = \frac{H_{x0}}{E_{y0}} \text{ admitancia superficial en } z = 0$$

Finalmente se tiene el coeficiente de reflexión eléctrico transversal,

$$r_{ET} = \frac{Y_0 - \hat{Y}_1}{Y_0 + \hat{Y}_1}, \quad (9.52)$$

ya se ha tomado en cuenta las ecuaciones (9.47) y (9.48).

De la expresión (9.52) se deduce además,

$$F_0^z = r_{ET} F_p e^{u_0 h}. \quad (9.53)$$

Para N capas (figura 5.3) la admitancia superficial y la admitancia intrínseca están dadas por:

$$\hat{Y}_1 = Y_1 \frac{\hat{Y}_2 + Y_1 \tanh(u_1 h_1)}{Y_1 + \hat{Y}_2 \tanh(u_1 h_1)}, \quad (9.54)$$

$$\hat{Y}_2 = Y_2 \frac{\hat{Y}_3 + Y_2 \tanh(u_2 h_2)}{Y_2 + \hat{Y}_3 \tanh(u_2 h_2)}, \quad (9.55)$$

$$\hat{Y}_N = Y_N, \quad (9.56)$$

$$Y_n = \frac{u_n}{\hat{z}_n}, \quad (9.57)$$

$$u_n = (k_x^2 + k_y^2 + k_n^2)^{1/2}, \quad (9.58)$$

$$k_n^2 = \hat{z}_n y_n \dots \quad (9.59)$$

En la mayoría de las aplicaciones geofísicas se consideran los coeficientes de reflexión para semi-espacios estratificados no magnéticos (impermeables), y además como se trabaja a bajas frecuencias debido a la atenuación presente en la tierra, k_0 y \hat{y}_0 son muy pequeños. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación (9.52) se transforma en:

$$r_{ET} = \frac{\hat{u}_1}{\hat{u}_1}, \quad (9.60)$$

donde

$$\hat{u}_1 = u_1 \frac{\hat{u}_2 + u_1 \tanh(u_1 h_1)}{u_1 + \hat{u}_2 \tanh(u_1 h_1)}. \quad (9.61)$$

Reemplazando la ecuación (9.53) en la ecuación (9.42) se obtiene:

$$\tilde{F}_0(k_x, k_y, z) = F_p e^{u_0 h} e^{u_0 z} + r_{TE} e^{u_0 z}. \quad (9.62)$$

Finalmente, el potencial vectorial magnético de un dipolo magnético vertical como función de las coordenadas espaciales x, y, z está dado por la transformada inversa doble de Fourier de la ecuación (9.62) con respecto a x y y definida como:

$$F(x, y, z) = \frac{\hat{z}_0 m}{8\pi^2} \int \int e^{u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z)} \frac{1}{u_0} e^{i(k_x x + k_y y)} dk_x dk_y \quad (9.63)$$

como se puede observar la solución está en forma de superposición de ondas planas con ángulos de incidencia variando continuamente. Además ya que k_x y k_y varían de $-\infty$ a ∞ , los ángulos son complejos.

ya que la ecuación (9.63) es función de $k_x^2 + k_y^2$, se puede convertir a una transformada de Hankel usando las ecuación (9.19), y luego tomando en cuenta la ecuación (9.20) la ecuación (9.63) se transforma en:

$$F(\rho, z) = \frac{\hat{z}_0 m^2}{4\pi u_0} \int_0^{\rho} e^{-u_0 h} (e^{-u_0 z} + r_{TE} e^{u_0 z}) J_0(u_0 \rho) \rho d\rho, \quad (9.64)$$

Una vez encontrado $F(\rho, z)$ se procede a hallar los respectivos campos eléctrico y magnético, para lo cual se hace uso de las relaciones (9.8) y (9.9) en coordenadas cilíndricas,

$$\vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{u}_\rho & \hat{u}_\phi & \hat{u}_z \\ \rho & \rho^2 & z \\ 0 & 0 & F(\rho, z) \end{vmatrix}, \quad (9.65)$$

$$\vec{H} = \hat{u}_\phi F(\rho, z) \hat{u}_z - \frac{1}{\rho} \hat{u}_\rho \frac{\partial}{\partial z} (\rho^2 F(\rho, z)). \quad (9.66)$$

Al reemplazar la ecuación (9.64) en la ecuación (9.65) se obtiene:

$$\vec{E} = \hat{u}_\rho \frac{\hat{z}_0 m^2}{4\pi u_0} \int_0^{\rho} e^{-u_0 h} (e^{-u_0 z} + r_{TE} e^{u_0 z}) \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} J_0(u_0 \rho) \rho d\rho, \quad (9.67)$$

se ha introducido la derivada dentro de la integral debido a que no depende de la variable a integrar ρ .

De las propiedades de funciones de Bessel⁹ se tiene

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -x J_1(x), \quad (9.68)$$

al aplicar la ecuación (9.68) en la ecuación (9.67) se tiene la componente horizontal del campo eléctrico en la dirección ρ , definida como:

$$E_\rho = \frac{\hat{z}_0 m^2}{4\pi u_0} \int_0^{\rho} (e^{-u_0(z+h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}) \frac{\rho^2}{u_0} J_1(u_0 \rho) d\rho, \quad (9.69)$$

donde

J_1 es la función de Bessel de primera clase de orden uno.

⁹ ARFKEN, Op. cit., p. 554.

Por otro lado se examinan las componentes H_r y H_z , obtenidas al reemplazar la ecuación (9.64) en la ecuación (9.66),

$$H_r = \frac{\mu_0^2 m}{4\pi z} \int_0^h \chi(e^{u_0(z-h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}) \frac{J_0(k_0 r)}{u_0} dr$$

$$H_z = \frac{\mu_0^2 m}{4\pi} \int_0^h \chi(e^{u_0(z-h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}) \frac{d}{dz} J_0(k_0 r) dr,$$

nuevamente al hacer uso de la ecuación (9.68) se tiene que la componente horizontal del campo magnético producida por el dipolo magnético se define como:

$$H_r = \frac{\mu_0^2 m}{4\pi} \int_0^h \chi(e^{u_0(z-h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}) J_0(k_0 r) dr. \quad (9.70)$$

Finalmente se obtiene la componente vertical del campo magnético originada por el dipolo magnético

$$H_z = \frac{\mu_0^2 m}{4\pi} \left[k_0^2 + \frac{u_0^2}{z^2} \right] \int_0^h \chi(e^{u_0(z-h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}) \frac{J_0(k_0 r)}{u_0} dr, \quad (9.71)$$

donde aparece la siguiente expresión

$$\frac{u_0^2}{z^2} = k_0^2 + u_0^2 - k_0^2 = \mu_0^2, \quad (9.72)$$

por lo tanto

$$H_z = \frac{\mu_0^2 m}{4\pi} \int_0^h \chi(e^{u_0(z-h)} + r_{TE} e^{u_0(z-h)}) \frac{J_0(k_0 r)}{u_0} dr \quad (9.73)$$

Para el caso general de un sistema estratificado las componentes de \underline{E} y \underline{H} para un dipolo magnético pueden ser evaluadas únicamente por integración numérica.

Para el caso de la fuente y el receptor sobre la superficie de una tierra homogénea impermeable $h = 0$, $z = 0$ y $\mu_n = \mu_0$, y bajo la aproximación cuasi-estática ($k_0 = 0$), existen expresiones analíticas para el campo electromagnético armónico producido por un dipolo magnético.

Si se considera $k_0 \neq 0$ y por simplicidad de cálculos se considera $u \neq u_1$ y $k \neq k_1$, las respectivas componentes del campo eléctrico y magnético definidas por las ecuaciones (9.69), (9.70) y (9.73) se transforman en

$$E_z \neq \frac{\hat{z}_0 m}{4} \int_0^{\infty} (1 - r_{TE}) J_1(kr) dr \quad , \quad (9.74)$$

$$H_\phi \neq \frac{m}{4} \int_0^{\infty} (1 - r_{TE})^2 J_0(kr) dr \quad , \quad (9.75)$$

$$H_z \neq \frac{m}{4} \int_0^{\infty} (1 - r_{TE}) J_0(kr) dr \quad , \quad (9.76)$$

Donde el coeficiente de reflexión eléctrico transversal r_{ET} es el definido por la ecuación (9.52).

Para evaluar la expresión (9.74) se reescribe considerando la ecuación (9.68)

$$E_z \neq \frac{\hat{z}_0 m}{4} \frac{1}{u} \int_0^{\infty} J_0(kr) dr \quad , \quad (9.77)$$

al tener en cuenta que $k^2 = u^2 + k^2$, se multiplica numerador y denominador en la ecuación (9.77) por u ,

$$E_z \neq \frac{\hat{z}_0 m}{4k^2} \int_0^{\infty} k^2 J_0(kr) dr \neq \int_0^{\infty} u J_0(kr) dr \quad . \quad (9.78)$$

Haciendo uso de las integrales de Lipschitz,

$$\int_0^{\infty} e^{-uz} J_0(kr) dr \neq \frac{1}{r} \quad , \quad (9.79)$$

y de Sommerfield

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{u} e^{-uz} J_0(kr) dr \neq \frac{e^{-ikr}}{r} \quad , \quad (9.80)$$

donde

$r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$ magnitud del vector posición en coordenadas cilíndricas.

en la ecuación (9.78) se obtiene,

$$E_z = \frac{m}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) \int_0^\infty e^{-ikr} J_0(k\rho) k dk \quad (9.81)$$

donde se ha derivado dos veces con respecto a z las ecuaciones (9.79) y (9.80). Ahora se procede a hacer la respectiva derivación con respecto a ρ , obteniendo de esta forma la componente horizontal del campo eléctrico armónico,

$$E_\rho = \frac{m}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{z^2} \left(3 - 3ikz - k^2 z^2 \right) e^{-ikz} J_1(k\rho) \quad (9.82)$$

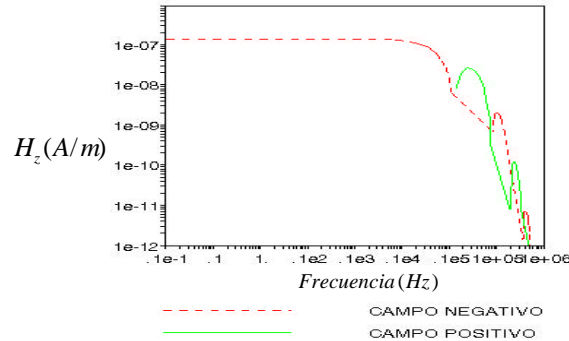
A partir de la primera ecuación de Maxwell en el dominio de la frecuencia se puede demostrar H_z de E_ρ , entonces

$$H_z = \frac{1}{\hat{z}_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho E_\rho), \quad (9.83)$$

$$H_z = \frac{m}{2\pi k^2 z^5} \left(9ikz - 4k^2 z^2 - ik^3 z^3 \right) e^{-ikz} J_1(k\rho). \quad (9.84)$$

El comportamiento del campo magnético vertical como una función de frecuencia, es ilustrado en la figura 9.10. La parte real del campo se muestra a una posición de $100m$ desde un dipolo magnético vertical de momento dipolar unitario en la superficie de un semi-espacio homogéneo. Se puede observar que a bajas frecuencias la parte real del campo se aproxima a $7.96 \cdot 10^{28} A/m$, y a frecuencias altas, la parte real del campo es positiva y presenta un comportamiento oscilatorio.

Figura 9.10 Campo magnético vertical armónico a 100m de un dipolo magnético vertical en la superficie de una tierra homogénea de $\rho = 0.01 S/m$



Fuente: NABHIGUIAN p. 176

Ya que la componente radial del campo magnético primario es cero en el plano de la espira, únicamente se considera el campo magnético secundario, el cual de la ecuación (9.75) se puede escribir como

$$H_z = \frac{mk^2}{4\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^a J_0(kr) dr, \quad (9.85)$$

según Kaufman y Keller¹⁰ se puede reescribir como

$$H_z = \frac{mk^2}{16\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^a J_0(kr) dr + \frac{1}{u} \int_0^a J_0(kr) dr,$$

Si se multiplica el numerador y el denominador de la segunda integral por $(u)^2$,

$$H_z = \frac{mk^2}{16\pi} \frac{1}{\rho} \int_0^a J_0(kr) dr + \frac{u^2}{(u)^4} \frac{1}{u} \int_0^a J_0(kr) dr$$

al evaluar ambas integrales se obtiene la siguiente expresión dada en Erdelyi¹¹

$$H_z = \frac{mk^2}{16\pi} \frac{1}{\rho} \left[I_0 \frac{K_1}{2} - I_2 \frac{K_2}{2} \right],$$

¹⁰ KAUFMAN, A. A. KELLER, G. V. Frequency and transient soundings. Elsevier Scientific Publ Co, 1983

¹¹ ERDELYI (1954, v.2, p.8, no.17)

donde I_0 y I_1 son las funciones modificadas de Bessel de primera clase de orden cero y uno, mientras que K_1 y K_2 son las funciones modificadas de Bessel de segunda clase de orden cero y uno respectivamente.

Finalmente

$$H_z = \frac{mk^2}{4\pi} \left[I_1 \frac{\partial ik}{\partial k_1} I_2 \frac{\partial ik}{\partial k_2} \right] \quad (9.86)$$

9.3.2 Campo electromagnético de transición producido por un dipolo magnético actuando sobre un medio homogéneo. Para encontrar las soluciones del campo electromagnético de transición se halla la respuesta paso negativa del sistema, y la respuesta impulso se halla sacando la derivada del campo con respecto al tiempo del campo electromagnético (fem inducida). Dichas soluciones analíticas solo se encuentran para el caso de un sistema homogéneo bajo aproximación cuasi-estática, para el caso general de un medio estratificado su solución se lleva a cabo por métodos computacionales.

Al igual que en el campo electromagnético armónico se tiene expresiones analíticas para el caso del dipolo magnético y el receptor en la superficie de una tierra homogénea. Para transformar del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, sustituimos $s \rightarrow i\omega$, y se tienen en cuenta los siguientes términos que aparecen implícitamente en las expresiones para las componentes del campo electromagnético armónico

$$\begin{aligned} ik &\rightarrow \omega s^{1/2}, \\ k^2 &\rightarrow \omega^2 s, \\ ik^3 &\rightarrow \omega^3 s^{3/2}, \end{aligned}$$

Con

$$\omega \rightarrow \omega \omega^{1/2} \omega.$$

Antes de comenzar se tiene en cuenta las siguientes transformadas inversas de Laplace tomadas de las tablas¹², validas para $t \geq 0$

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] = 1, \quad (9.87)$$

¹² ABRAMOWITZ Y STEGUN, Op. Cit.,

$$L\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t, \quad (9.88)$$

$$L\left\{e^{-bs^{1/2}}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-b^2/4t}, \quad (9.89)$$

$$L\left\{\frac{1}{s} e^{-bs^{1/2}}\right\} = \operatorname{erfc}\left\{\frac{b}{2\sqrt{t}}\right\}, \quad (9.90)$$

$$L\left\{\frac{1}{s^{1/2}} e^{-bs^{1/2}}\right\} = \frac{1}{(\sqrt{t})^{1/2}} e^{-b^2/4t}, \quad (9.91)$$

$$L\left\{\frac{1}{s^{3/2}} e^{-bs^{1/2}}\right\} = 2\frac{t^{1/2}}{b^{1/2}} e^{-b^2/4t} - \operatorname{erfc}\left\{\frac{b}{2\sqrt{t}}\right\}, \quad (9.92)$$

También se tendrá en cuenta la siguiente transformada inversa de Laplace tomadas de tablas¹³

$$L\left\{K_0\left(a^{1/2}s^{1/2} + b^{1/2}s^{1/2}\right)\right\} = \frac{1}{2t} e^{-a^{1/2}b/2t} \frac{t^{1/2}}{\sqrt{t}} e^{-b^2/4t} I_0\left(\frac{a^{1/2}b}{2t}\right) \quad (9.93)$$

$$L\left\{\frac{1}{s^2} e^{-bs^{1/2}}\right\} = t \left[1 - \frac{b}{2t} \operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{2t}{b^{1/2}} e^{-b^2/4t} \right], \quad (9.94)$$

Entonces de la ecuación (9.82) se tiene que la respuesta paso del campo eléctrico está dada por

$$e_r = \frac{m}{2\pi\epsilon_0^2} L\left\{\frac{3}{s} - \frac{3}{s} - \frac{3}{s^{1/2}}\right\} e^{-bs^{1/2}}. \quad (9.95)$$

que al aplicar las expresiones (9.87), (9.88), (9.90) y (9.91), se transforma en

$$e_r = \frac{m}{2\pi\epsilon_0^2} \left[3 - 3\operatorname{erfc}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}\right) - \frac{3}{\sqrt{t}} e^{-b^2/4t} - \frac{1}{2\sqrt{t}} e^{-b^2/4t} \right],$$

la cual se puede simplificar considerando la ecuación (9.29) y factorizando

¹³ ERDELYI, Op. Cit.,

$$e_z = \frac{m}{2\pi^2} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right) - \frac{3}{2^{3/2}} \frac{e^{-t/4t}}{t^{3/2}} \quad (9.96)$$

por lo tanto la componente horizontal del campo eléctrico de transición del dipolo magnético cuando la corriente que circula por este es cortada abruptamente, se define como

$$e_z(t) = e_z(\infty) - e_z(t) \quad (9.97)$$

El siguiente paso es encontrar la solución de las componentes radial y vertical del campo magnético de transición. Para encontrar la solución para la componente radial se hace uso de la transformada inversa de Laplace a la ecuación (9.84), dividida entre s ,

$$h_z = \frac{m}{2\pi^2} L^{-1}\left[\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} - \frac{3}{s^{3/2}} - \frac{4}{s} - \frac{3}{s^{1/2}}\right] e^{-t/4t} \quad (9.98)$$

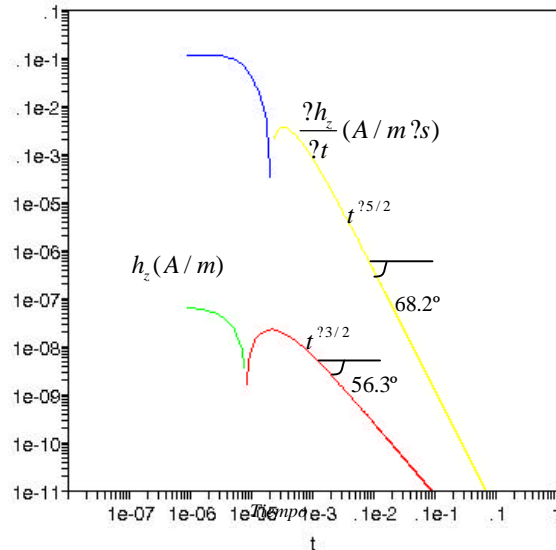
$$h_z = \frac{m}{2\pi^2} \left[\frac{1}{t} - \frac{1}{t} - \frac{3}{2t} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right) - \frac{t^{1/2}}{t^{1/2}} e^{-t/4t} - \frac{3}{2t^{1/2}} e^{-t/4t} - \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right) - 4 \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right) - \frac{3}{t^{1/2}} e^{-t/4t} \right]$$

considerando la ecuación (9.29) y factorizando, se obtiene

$$h_z = \frac{m}{2\pi^2} \left[\frac{1}{t} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2t^{1/2}}\right) - \frac{1}{t^{1/2}} \frac{1}{2} e^{-t/4t} - \frac{1}{t^{1/2}} e^{-t/4t} \right] \quad (9.99)$$

Por consiguiente la componente vertical del campo magnético de transición producida cuando el dipolo magnético se desconecta abruptamente, se define como,

Figura 9.11 Campo magnético vertical y su derivada en el tiempo a 100m de un dipolo magnético vertical que se corta abruptamente. Fuente y receptor en la superficie de un suelo de $\rho = 0.01 S/m$. Curvas roja y azul campos positivos, curvas amarilla y verde campos negativos.



Fuente: NABHIGUIAN. p. 14

Luego que el transmisor se corta, inmediatamente una corriente circular es inducida bajo el dipolo previniendo así que el campo magnético sea cerrado instantáneamente. El decaimiento del campo a tiempos subsecuentes es debido al sistema de corrientes circulares presentes en la tierra, el máximo del cual difunde interiormente y exteriormente desde el dipolo. En la figura 9.11 se puede observar que el campo magnético cambia de signo cerca al tiempo en que la corriente máxima pasa cerca del punto de observación, y la derivada con respecto al tiempo del campo magnético cambia de signo a un tiempo ligeramente posterior. Hay que tener en cuenta que en la figura 9.11 la ordenada se ha tomada tanto para el campo magnético como para su derivada con respecto al tiempo.

Las formas asintóticas de las ecuaciones (9.100) y (9.101) a tiempos de retardo son respectivamente,

$$h_z \approx \frac{m \mu_0 \mu}{30 \rho} t^{3/2}, \quad (9.102)$$

y

$$\frac{dh_z}{dt} \approx \frac{m \mu_0 \mu}{20 \rho} t^{5/2}, \quad (9.103)$$

Estos decaimientos a tiempos de retardo muestra relaciones lineales sobre grafica log-log (figura 9.11), con ángulos de 56.3° y 68.2°. Al medir estos ángulos da un rápido chequeo sobre medidas o respuestas computadas, ya que cualquier tierra estratificada debe exhibir el mismo decaimiento a tiempos de retardo.

Para encontrar la expresión que defina la respuesta paso para la componente horizontal del campo magnético, se sustituye $s = i\omega$ en la ecuación (9.86) y posteriormente a la expresión obtenida la dividimos por s para obtener

$$\frac{H_z}{s} = \frac{mk^2}{4} \left[I_1 \frac{1}{s^{1/2}} k_1 \frac{1}{s^{1/2}} + I_2 \frac{1}{s^{1/2}} k_2 \frac{1}{s^{1/2}} \right], \quad (9.104)$$

al aplicar la ecuación (9.93) en el límite $b \rightarrow 0$, se tiene

$$h_z = \frac{m_0}{4} \left[L_1^2 K_1 \frac{1}{4} s^{1/2} I_1 \frac{1}{4} s^{1/2} + L_2^2 K_2 \frac{1}{4} s^{1/2} I_2 \frac{1}{4} s^{1/2} \right]$$

$$h_z = \frac{m_0}{8t} e^{-t^2/8t} \left[I_1 \frac{1}{8t} + I_2 \frac{1}{8t} \right]. \quad (9.105)$$

Por lo tanto la componente horizontal del campo magnético luego que la corriente que circula a través del dipolo magnético vertical es cortada abruptamente, se define como

$$h_z = \frac{m_0}{8t} e^{-t^2/8t} \left[I_1 \frac{1}{8t} + I_2 \frac{1}{8t} \right]. \quad (9.106)$$

y la respuesta impulso de la componente horizontal del campo magnético está dada por la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (9.106), está definida por

$$\frac{dh_z}{dt} = \frac{m_0}{8t^2} e^{-t^2/8t} \left[1 - \frac{t^2}{4t} I_0 \frac{1}{8t} + 2 - \frac{t^2}{4t} I_1 \frac{1}{8t} \right], \quad (9.107)$$

Las formas asintóticas a tiempos tardíos para la respuesta paso y la respuesta impulso de la componente horizontal del campo magnético del dipolo magnético vertical, son respectivamente

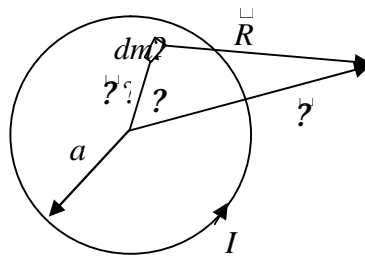
$$h_z \approx \frac{m_0^2 \omega^2}{128 \pi^2} \quad (9.108)$$

$$\frac{\partial h_z}{\partial t} \approx \frac{m_0^2 \omega^3}{64 \pi^2} \quad (9.109)$$

9.4 CAMPO ELECTROMAGNÉTICO ARMÓNICO Y DE TRANSICIÓN PRODUCIDO POR UNA ESPIRA PORTADORA DE CORRIENTE

9.4.1 Campo electromagnético armónico producido por una espira portadora de corriente actuando sobre un medio homogéneo y estratificado.

Figura 9.12 Vista plana de una espira circular en la superficie de la tierra.



Fuente: NABHIGUIAN. p. 217

Anteriormente, se consideró que una pequeña espira de corriente se comporta como un pequeño dipolo magnético, por lo tanto una gran espira transmisora de corriente se considera conformada por pequeños dipolos magnéticos infinitesimales de momento dm (figura 9.12). Por consiguiente para encontrar el potencial magnético de la espira se reemplaza m por dm en la ecuación (9.64)

$$F(\rho, z) \approx \frac{\hat{z}_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} dm \, D(\rho, z) J_0(k_0 \rho) d\phi, \quad (9.110)$$

donde se ha considerado

$$D(\rho, z) \approx \frac{1}{u_0} e^{-u_0 \rho} (e^{u_0 z} + r_{ET} e^{-u_0 z}),$$

$$u_0 \approx \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_0^2}^{1/2},$$

$$\begin{aligned} dm &= Ids & \rho &= a \cos \phi \\ dm &= I a^2 d\phi & z &= z \end{aligned}$$

siendo I es la corriente constante que circula por la espira.

Al integrar sobre la espira, se tiene

$$F(r, z) = \frac{\hat{z}_0 I}{4} \int_0^{a^2} D(r, z) J_0(\sqrt{R^2 - r^2}) r dr, \quad (9.111)$$

en la ecuación (9.111) se ha tomado el término $R = \sqrt{z^2 + r^2}$, la razón es que representa la distancia del dipolo magnético infinitesimal al punto de medición. Al sustituir el siguiente teorema de adición en la ecuación (9.111)

$$J_0(\sqrt{R^2 - r^2}) = \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\sqrt{z^2 + r^2}) J_m(\sqrt{R^2 - r^2}) \cos(m\theta),$$

se tiene

$$F(r, z) = \frac{\hat{z}_0 I}{4} \int_0^{a^2} D(r, z) \sum_{m=0}^{\infty} J_m(\sqrt{z^2 + r^2}) J_m(\sqrt{R^2 - r^2}) \cos(m\theta) r dr, \quad (9.112)$$

En esta última expresión se ha considerado por propiedades de la función de Bessel de primera clase que el término entre corchetes es diferente de cero únicamente para $m = 0$.

Finalmente realizando las respectivas integraciones en la ecuación (9.112) y aplicando la fórmula de recurrencia de las funciones de Bessel de primera clase en forma integral¹⁴,

$$\int x^n J_{n+1}(x) dx = x^n J_n(x)$$

se obtiene,

$$F(r, z) = \frac{\hat{z}_0 I a}{2} \int_0^{a^2} D(r, z) J_0(\sqrt{z^2 + r^2}) J_1(\sqrt{a^2 - r^2}) r dr. \quad (9.113)$$

Al aplicar aproximación de pequeño argumento en la ecuación (9.113), se tiene

¹⁴ ARFKEN, Op. cit., p. 553

$$J_1(\dots) \approx \frac{ka}{2},$$

expresión que indica que a distancias muy grandes comparadas con el radio de la espira, el campo de una espira pequeña es aproximadamente el de un dipolo magnético.

Para encontrar el campo electromagnético armónico de la espira circular de corriente se sigue un procedimiento similar al utilizado para llegar a las ecuaciones (9.75), (9.76) y (9.77); por lo tanto:

$$E_\theta \approx \frac{Ia}{2} \int_0^h e^{-u_0(z-h)} r_{TE} e^{u_0(z-h)} \frac{J_1(\dots) J_1(ka)}{u_0} d\theta. \quad (9.114)$$

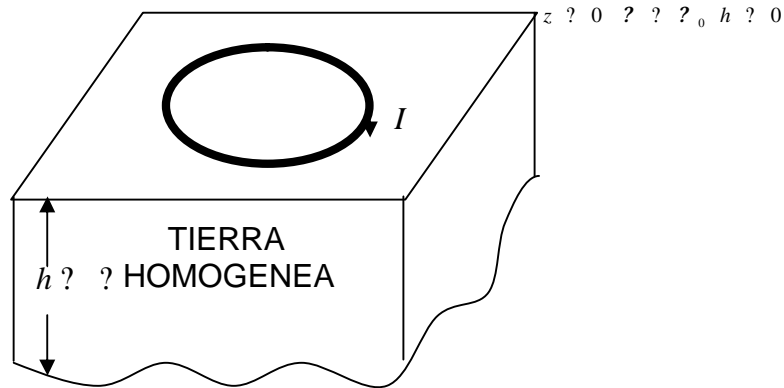
$$H_\theta \approx \frac{Ia}{2} \int_0^h e^{-u_0(z-h)} r_{TE} e^{u_0(z-h)} J_1(\dots) J_1(ka) d\theta \quad (9.115)$$

$$H_z \approx \frac{Ia}{2} \int_0^h e^{-u_0(z-h)} r_{TE} e^{u_0(z-h)} \frac{J_1(\dots) J_0(ka)}{u_0} d\theta \quad (9.116)$$

Para computar estas integrales se hace uso de métodos de integración numérica¹⁵. En el caso cuasi-estático, donde como se considera $u_0 \approx 0$.

9.4.1.1 Tierra homogénea. Se considera el transmisor y el receptor sobre la superficie de una tierra homogénea impermeable $\epsilon = \epsilon_0$; es decir $z = h = 0$, y además se considera el caso cuasi-estático valido para la mayoría de las aplicaciones geofísicas.

Figura 9.13 Espira circular de corriente actuando sobre la superficie de una tierra homogénea.



¹⁵ MATHEWS, Jhon. y FINK, Kurtis. Métodos numéricos con MATLAB. Tercera edición. Prentice hall. p. 371 – 433.

Por lo tanto las ecuaciones (9.114), (9.115) y (9.116) se transforman en

$$E_z = \hat{z}_0 I a \int_0^u \frac{u}{u} J_1(ka) J_1(ka) d? \quad (9.117)$$

$$H_z = I a \int_0^u \frac{u^2}{u} J_1(ka) J_1(ka) d? \quad (9.118)$$

$$H_z = I a \int_0^u \frac{u}{u} J_1(ka) J_1(ka) d? \quad (9.119)$$

A diferencia del caso del dipolo magnético donde se podían calcular todas las componentes del campo electromagnético armónico por métodos analíticos, para una espira grande no existen expresiones analíticas, excepto para el campo magnético vertical en el centro de ésta.

Para sondeos electromagnéticos a menudo se mide únicamente la componente vertical del campo magnético, con el fin de reducir los efectos de las inhomogeneidades laterales que producen las otras componentes. La respuesta para esta configuración de espira-central esta dada tomando $u = 0$ en la ecuación (9.118) para obtener

$$H_z = I a \int_0^u \frac{u^2}{u} J_1(ka) d? \quad (9.120)$$

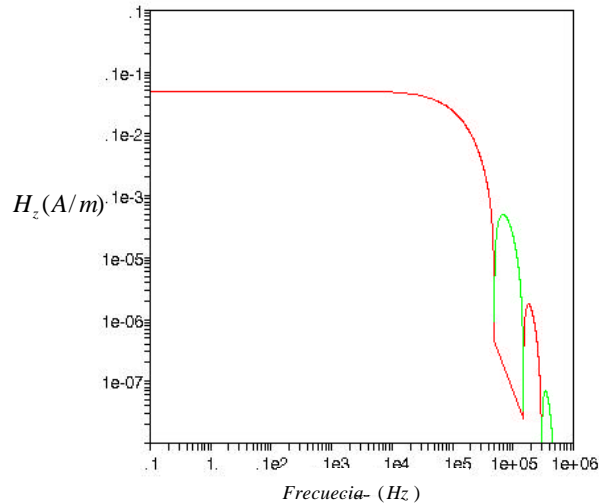
análogamente a la demostración de la componente horizontal del campo eléctrico para el dipolo magnético ecuación (9.82), la ecuación (9.120) se transforma en

$$H_z = \frac{I}{k^2 a^3} \int_0^u (3 - 3ika + k^2 a^2) e^{-ika} d? \quad (9.121)$$

De la ecuación (9.121), se deduce que a frecuencia cero se reduce a $I/2a$, que es el campo en el centro de la espira llevando una corriente directa.

La figura 9.14 ilustra el campo magnético vertical en el centro de la espira con radio 50m reposando sobre un espacio medio homogéneo de resistividad 100 $\Omega \cdot m$. Las partes real de la ecuación (9.121) es mostrada como función de la frecuencia lineal.

Figura 9.14 Campo magnético vertical armónico en el centro de la espira circular sobre una tierra homogénea de $\sigma = 0.01 S/m$. La espira tiene un radio de $50m$ a través de la cual circula una corriente de $1A$.



Fuente: NABHIGUIAN. p.220

Tabla 9.1 Datos de campo magnético vertical vs frecuencia medidos en el centro de una espira portadora de corriente $1A$ sobre una tierra homogénea de $\sigma = 0.01m$

$H_z (A/m)$	$f (Hz)$
$5.00 \cdot 10^{23}$	10^{21}
$4.99 \cdot 10^{23}$	10^0
$4.99 \cdot 10^{23}$	10^1
$4.99 \cdot 10^{23}$	10^2
$4.78 \cdot 10^{23}$	10^3
$2.39 \cdot 10^{23}$	10^4
$2.31 \cdot 10^{25}$	10^5
$1.16 \cdot 10^{11}$	10^6
$5.28 \cdot 10^{30}$	10^7

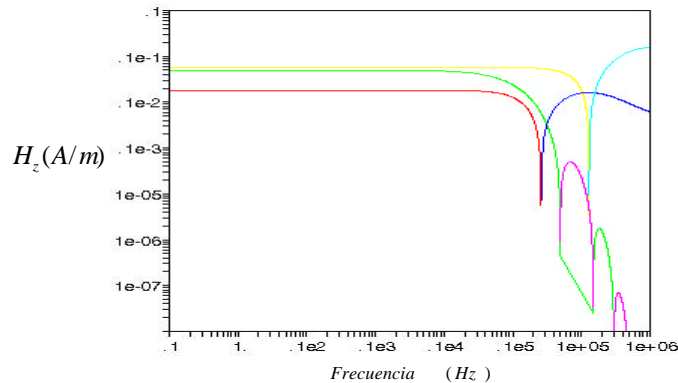
Debido a que la corriente en la espira es $1A$ la parte real del campo se aproxima a $10^{22} A/m$ a bajas frecuencias, correspondiendo a la inducción magnética B de cerca de $10nT$.

9.4.1.2 Tierra estratificada. Se considera la fuente (espira circular de corriente), actuando sobre la superficie de una tierra impermeable estratificada de n capas, cada una de las cuales con sus correspondientes propiedades electromagnéticas, $\mu_i, \rho_i, \sigma_i; i = 1..n$ y espesores definidos h_i , (ver figura 9.1); además, se considera la aproximación cuasi-estática debido a que se presenta en la mayoría de las aplicaciones geofísicas.

Anteriormente se menciona que el cálculo del campo electromagnético armónico para una tierra estratificada se puede llevar a cabo únicamente por métodos computacionales; específicamente métodos de aproximación numérica. Puesto que los cálculos van haciéndose mas complejos a medida que se trata con suelos conformados por más de una capa, el cálculo se hará para sistemas hasta de 3 capas, considerando la cuarta capa como un semi-espacio infinito.

La idea para encontrar el campo magnético armónico es hallar una curva por el método Simpson $3/8$ ¹⁶ que aplicado a la ecuación (9.120) se aproxime a la curva que representa la componente vertical del campo magnético, obtenida con ayuda de la expresión (9.121). Con ayuda del programa Maple 9, se encontraron las siguientes curvas de aproximación, las cuales se diferencian entre si por variación de parámetros tales como: el número de trapecios que se toman bajo la curva, y la longitud del intervalo de ω (figura 9.15).

Figura 9.15 Comparación gráfica entre las curvas (amarilla y roja) obtenidas por el método de aproximación simpson[3/8] y la curva original (verde)



¹⁶ Disponible en Internet: <www. Integración numérica. htm>.

Tabla 9.2. Valores de campo magnético vertical por método de aproximación (curva amarilla) medidos en el centro de una espira portadora de corriente de 1A sobre un suelo homogéneo de $\rho = 0.01S/m$.

$H_z (A/m)$	$f (Hz)$
$5.78 \cdot 10^{23}$	10^{21}
$5.78 \cdot 10^{23}$	10^0
$5.78 \cdot 10^{23}$	10^1
$5.78 \cdot 10^{23}$	10^2
$5.78 \cdot 10^{23}$	10^3
$5.73 \cdot 10^{23}$	10^4
$1.83 \cdot 10^{23}$	10^5
$1.55 \cdot 10^{22}$	10^6
$7.21 \cdot 10^{23}$	10^7

Al comparar la tabla 9.1 y la tabla 9.2, se tiene que a bajas frecuencias el valor del campo magnético vertical (Real) medido en el centro de la espira tiende a estabilizarse.

En la figura 9.15 se observa que la curva amarilla se aproxima muy bien para frecuencias menores que $10^5 Hz$; siendo esta la frecuencia de interés cuando se trabaja en prospección geofísica. A frecuencias mayores el campo dado por la ecuación (9.121) oscila demasiado impidiendo una toma de datos precisa, lo anterior se cumple para la parte positiva del campo. puesto que la curva azul claro que representa el campo negativo se aleja mucho del campo negativo original (curva lila). Lo mismo ocurre con la curva azul oscuro.

Por lo tanto los parámetros utilizados para el caso homogéneo, que describen la curva amarilla, serán utilizados para encontrar de una manera aproximada los valores del campo magnético vertical medido en el centro de la espira para suelos de 2, 3 y 4 capas.

A continuación se presenta las soluciones en forma de gráficos y tablas para el campo magnético vertical de una espira de corriente actuando sobre un medio estratificado de dos capas, tres capas y cuatro capas; recordando que en cada caso por separado la última representa un semi-espacio infinito; es decir: $h_i \rightarrow \infty$.

9.4.1.2.1 Campo magnético vertical armónico para un suelo de dos capas. Se considera una espira de radio $a = 50m$ portadora de corriente $I = 1A$ sobre un medio impermeable de dos capas homogéneas, isotrópicas con pérdidas. Las mediciones realizadas se consideran en el interior de la espira $r < a$ debido a que la solución analítica para el suelo homogéneo se basa en ese tipo de configuración. Para encontrar la solución para la componente vertical del campo magnético vertical para el caso considerado se reemplaza la ecuación (9.61) en la ecuación (9.120),

$$H_z = I a \int_0^{\infty} \frac{u^2}{u_1 \frac{\hat{u}_2 + u_1 \tanh(u_1 h_1)}{u_1 + \hat{u}_2 \tanh(u_1 h_1)}} J_1(ua) du, \quad (9.122)$$

Donde

μ Parámetro que depende de las propiedades electromagnéticas del medio y estructura.

$$\hat{u}_2 = u_2 \quad h_2 = ?$$

h_1 espesor de la capa 1.

$$u_i = \sqrt{\mu^2 + k_i^2}$$

$$k_i = \sqrt{i 2\pi f \mu_i} \quad \text{para el caso cuasi-estático}$$

f Frecuencia lineal (Hz)

Solución gráfica: se puede observar que el campo magnético vertical a bajas frecuencias tiende a estabilizarse a un valor de $3.509 \cdot 10^{21} A/m$, correspondiendo a una inducción magnética de $B = 4.409 \cdot 10^{27} T$. ; es decir se tiene un comportamiento análogo al observado para el caso de un suelo homogéneo. para llegar a su solución se tiene en cuenta los siguientes datos¹⁷: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} F/m$, $h_1 = 62.6m$, $\mu_1 = 1/485 S/m$, $\mu_2 = 1/55.7 S/m$.

¹⁷ RAMOS, Sandra. SALAZAR, Luis. Monitoreo electromagnético de Volcanes. Pasto:Universidad de Nariño, 2002. p. 32.

Figura 9.16. Parte real del campo magnético vertical medida en el centro de la espira de radio $50m$ portadora de corriente $1A$, sobre un suelo impermeable de 2 capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas.

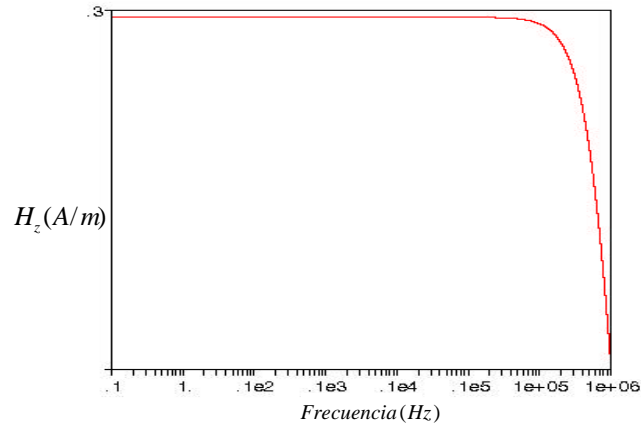


Tabla 9.3. Valores de campo magnético vertical por método de aproximación (curva amarilla) medidos en el centro de una espira portadora de corriente de $1A$ sobre un suelo impermeable de dos capas.

$H_z (A/m)$	$f (Hz)$
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^{21}
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^0
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^1
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^2
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^3
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^4
$3.495 \cdot 10^{21}$	10^5
$2.833 \cdot 10^{21}$	10^6

Con ayuda de la tabla 9.3. se observa que el campo magnético empieza a decaer para $f \approx 10^5 Hz$, que al comparar con la figura 9.16 se puede considerar que a frecuencias mayores que este rango el campo comienza a oscilar, impidiendo obtener una medición precisa. Hay que notar que la parte real del campo para este caso a diferencia del suelo homogéneo es negativa.

9.4.1.2.2 Campo magnético vertical armónico para un medio de 3 capas. Se considera una espira de radio $a \approx 50m$ portadora de corriente $I \approx 1A$ actuando sobre un medio impermeable $\mu_i \approx \mu_0$ de tres capas homogéneas, isotrópicas con

pérdidas; es decir con conductividades σ_1, σ_2 y σ_3 . Cada una de las cuales con sus correspondientes espesores h_1, h_2 y h_3 . Para encontrar la solución del campo magnético en el centro de la espira para el caso considerado se reemplaza la ecuación (9.59), abarcando tres capas

$$\hat{u}_2 = u_2 \frac{\hat{u}_3 \sigma_2 \tanh(u_2 h_2)}{u_1 \sigma_3 \tanh(u_2 h_2)},$$

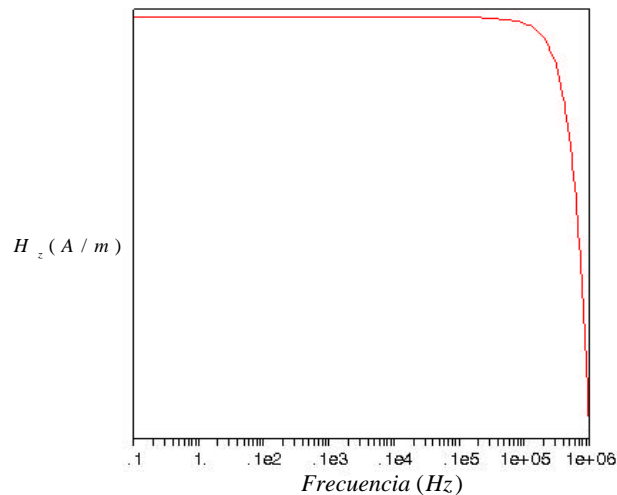
$$\hat{u}_3 = u_3 \quad \sigma_3 \quad h_3 \quad \sigma_2$$

a su vez se reemplaza el resultado obtenido en la ecuación (9.120)

$$H_z = I a \int_0^{\infty} \frac{\sigma^2}{u_2 \left[\frac{\hat{u}_3 \sigma_2 \tanh(u_2 h_2)}{u_1 \sigma_3 \tanh(u_2 h_2)} \right] \sigma_1 \tanh(u_1 h_1) + u_1 \left[\frac{\hat{u}_3 \sigma_2 \tanh(u_2 h_2)}{u_2 \sigma_3 \tanh(u_2 h_2)} \right] \sigma_1 \tanh(u_1 h_1)} J_1(\sigma a) d\sigma$$

(9.123)

Figura 9.17. Parte real del campo magnético vertical medida en el centro de la espira de radio 50m portadora de corriente 1A. Sobre un suelo impermeable de 3 capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas.



de la figura 9.17 se ve claramente que el campo en el centro de una espira portadora de corriente actuando sobre un suelo de 3 capas tiende a estabilizarse a

un valor de $8.837 \cdot 10^{21} A/m$. Para llegar a dicho resultado se utilizaron los siguientes datos¹⁸:

$\rho_0 = 4 \cdot 10^{27} F/m$, $h_1 = 44m$, $h_2 = 34m$, $h_3 = ?$, $\rho_1 = 1/1110 S/m$, $\rho_2 = 1/88 S/m$ y $\rho_3 = 1/40 S/m$.

Tabla 9.4 Valores de campo magnético vertical por método de aproximación medidos en el centro de una espira portadora de corriente de 1A sobre un suelo impermeable de tres capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas.

$H_z (A/m)$	$f (Hz)$
$8.837 \cdot 10^{21}$	10^{21}
$8.837 \cdot 10^{21}$	10^0
$8.837 \cdot 10^{21}$	10^1
$8.837 \cdot 10^{21}$	10^2
$8.837 \cdot 10^{21}$	10^3
$8.837 \cdot 10^{21}$	10^4
$8.836 \cdot 10^{21}$	10^5
$8.819 \cdot 10^{21}$	10^6

la tabla 9.4 muestra los valores del campo magnético vertical en el centro de la espira correspondientes al intervalo de frecuencias utilizadas en prospección geofísica ($f = 10^5 Hz$). De aquí se nota con mayor precisión el valor al cual tiende a estabilizarse el campo. Es fácil notar que el valor obtenido corresponde a una inducción magnética de $-1.110 \cdot 10^{26} T$. La parte real del campo también es negativa.

9.4.1.2.3 Campo magnético vertical armónico para un medio de 4 capas. Se considera una espira de corriente actuando sobre un medio impermeable $\rho_i = \rho_0$ de cuatro capas homogéneas, isotrópicas con pérdidas; es decir con conductividades ρ_1, ρ_2, ρ_3 y ρ_4 . Cada una de las cuales con sus correspondientes espesores h_1, h_2, h_3 y h_4 . Para encontrar la solución del campo magnético vertical en el centro de la espira, se reemplaza la ecuación (9.59), teniendo en cuenta las admitancias de la capa 3 y capa 4; es decir se reemplaza en la ecuación (9.59) las siguientes relaciones

¹⁸ RAMOS, Op. cit., p, 32.

estabiliza en un valor de $3.509 \cdot 10^{21} A/m$, correspondiendo a una inducción magnética de $B = 4.409 \cdot 10^{27} T$. Para llegar a dicho resultado se utilizaron los siguientes datos¹⁹:

$$\rho_0 = 4 \cdot 10^{27} F/m, h_1 = 45.4m, h_2 = 43.2m, h_3 = 13m, \rho_1 = 1/1300 S/m$$

$$\rho_2 = 1/73.7 S/m, \rho_3 = 1/26.6 S/m \text{ y } \rho_4 = 1/43.8 S/m$$

Tabla 9.5. Valores de campo magnético vertical por método de aproximación medidos en el centro de una espira portadora de corriente de 1A sobre un suelo impermeable de cuatro capas homogéneas, isotrópicas y con pérdidas.

$H_z (A/m)$	$f (Hz)$
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^{21}
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^0
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^1
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^2
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^3
$3.509 \cdot 10^{21}$	10^4
$3.507 \cdot 10^{21}$	10^5
$3.340 \cdot 10^{21}$	10^6

De la tabla 9.5 se verifica de una manera mas precisa el valor al cual se aproxima la componente real del campo magnético vertical para valores de frecuencia pequeños.

Hay que notar que el método de aproximación se aproxima muy bien para los valores de frecuencia ($f = 10^5 Hz$); intervalo de interés en Aplicaciones Geofísicas. En cambio para valores mayores que dicho intervalo el campo oscilaría mucho, visto para el suelo homogéneo en la figura 9.2; y será muy difícil encontrar una curva de aproximación para la componente real del campo.

Puesto que en la práctica son importantes los sistemas físicamente medibles, consideramos únicamente el valor de la parte real del campo magnético vertical, que finalmente será el valor que aparecerá en una medición real.

¹⁹ RAMOS, Op. cit., p. 32.

9.4.2 Campo electromagnético de transición. Para la respuesta de transición en el caso de la configuración espira-central sobre una tierra homogénea, se procede de la misma forma que para el caso del dipolo magnético, primero se expresa la ecuación (9.120) en términos de la frecuencia, luego se divide entre s y posteriormente se aplica las transformadas inversas de Laplace pertinentes para cada expresión.

Por lo tanto la componente vertical del campo magnético para una espira grande de corriente en términos de la frecuencia, recordando que $s = i\omega$ se define como:

$$H_z = \frac{I}{s^2 a} \left[(3 - 3s^{1/2} - s^2) e^{-s^{1/2} a} \right], \quad (9.125)$$

Donde

$$s^{1/2} = ika$$

$$s^2 = k^2 a^2$$

$$s = i\omega_0 a^{1/2}$$

Con un procedimiento similar al utilizado en el caso de la componente vertical para el campo electromagnético función paso de un dipolo magnético, se encuentra que para la espira grande de corriente se define como

$$h_z = \frac{I}{2a} \frac{3}{\sqrt{s} a} e^{-s^{1/2} a} - \frac{3}{2s^2 a^2} \operatorname{erfc}(s^{1/2} a), \quad (9.126)$$

Por lo tanto la componente vertical del campo magnético cuando la corriente que circula a través de la espira grande es desconectada abruptamente, se define como

$$h_z(t) = \frac{I}{2a} \left[\frac{3}{2s^2 a^2} - \frac{I}{2a} \frac{3}{\sqrt{s} a} e^{-s^{1/2} a} - \frac{3}{2s^2 a^2} \operatorname{erfc}(s^{1/2} a) \right]$$

$$h_z = \frac{I}{2a} \frac{3}{\sqrt{s} a} e^{-s^{1/2} a} - \frac{3}{2s^2 a^2} \operatorname{erf}(s^{1/2} a). \quad (9.127)$$

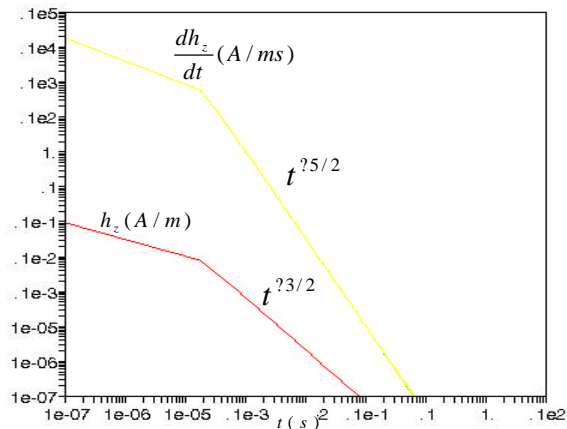
Y la respuesta impulso (fem inducida) esta dada por:

$$\frac{dh_z}{dt} = \frac{I}{\mu_0 a^3} \left[3 \operatorname{erf}(a) - \frac{2}{\sqrt{t}} a (3 - 2a^2) e^{-a^2} \right] \quad (9.128)$$

En la ecuación (9.126) el término $I/2a$ es el campo que deberá estar presente en el espacio libre antes de desconectar la corriente; multiplicando por el término que esta entre corchetes nos da el decaimiento del campo magnético debido a las corrientes fluyendo en la tierra conductiva.

Figura 9.19 ilustra el decaimiento del campo magnético y su derivada en el centro de la espira después que una corriente de 1A es desconectada, la cual está fluyendo a través de una espira de 50m de radio reposando sobre un semi-espacio de 100m. Antes que la corriente es desconectada, el campo magnético en el centro de la espira, dado por $I/2a$ es 0.01A/m correspondiente a una inducción magnética de aproximadamente 10nT.

Figura 9.19 campo magnético vertical y su derivada en el tiempo en el centro de la espira de radio 50m. Sobre una tierra homogénea de $\mu = 0.01 \text{ S/m}$. Una corriente de 1A es cortada abruptamente en el tiempo cero.



Fuente: NABHIGUIAN. p. 222

Tabla 9.6 Valores del campo magnético vertical y su derivada en el tiempo en el centro de una espira de radio $a = 50 \text{ m}$ cuando la corriente que circula a través de esta se corta abruptamente.

$t \text{ (s)}$	$h_z \text{ (A/m)}$	$\frac{dh_z}{dt} \text{ (A/m)}$
10^{27}	$9.809 \cdot 10^{23}$	$1.909 \cdot 10^3$
10^{26}	$8.091 \cdot 10^{23}$	$1.895 \cdot 10^3$
10^{25}	$1.521 \cdot 10^{23}$	$1.818 \cdot 10^2$

10^{24}	$6.404 \cdot 10^{25}$	$9.394 \cdot 10^{21}$
10^{23}	$2.087 \cdot 10^{26}$	$3.124 \cdot 10^{23}$
10^{22}	$6.610 \cdot 10^{28}$	$1.009 \cdot 10^{25}$
10^{21}	$2.00 \cdot 10^{29}$	$1.470 \cdot 10^{27}$
10^0	$1.00 \cdot 10^{29}$	$3.610 \cdot 10^{27}$
10^1	$1.00 \cdot 10^{28}$	$1.835 \cdot 10^{27}$

El campo magnético de transición es debido a un sistema de corrientes circulares que fluyen en la misma dirección como la corriente transmisora. Con tiempo, el máximo de este sistema de corrientes se mueve exteriormente y interiormente. De la figura 9.19 se puede ver que los signos del campo magnético y su derivada mantienen el mismo signo en el centro de la espira. A tiempos de retardo el comportamiento de la respuesta pasa de la componente vertical del campo magnético y su derivada respecto al tiempo presentan el siguiente comportamiento

$$h_z \approx \frac{I_0^{3/2} \mu_0^{3/2} a^2}{30 \mu_0^{1/2}} t^{3/2}. \quad (9.129)$$

Y

$$h_z \approx \frac{I_0^{3/2} \mu_0^{3/2} a^2}{20 \mu_0^{1/2}} t^{5/2}. \quad (9.130)$$

Aquí el campo magnético vertical y su derivada exhiben decaimientos $t^{3/2}$ y $t^{5/2}$ respectivamente.

CONCLUSIONES

Se logró un análisis matemático y teórico detallado para llegar a la solución del problema.

Se presentó un resultado del problema partiendo del caso particular del problema (dipolo magnético) y luego pasando al caso general (espira grande de forma circular portadora de corriente). Teniendo en cuenta que cuando una pequeña espira de corriente se encuentra a una distancia aproximada de cinco de sus radios, se comporta como un dipolo magnético.

Con ayuda del programa "Maple9" se llegó a la solución gráfica y numérica del campo magnético vertical medido en el centro de la espira de radio $a \approx 50m$ portadora de corriente $I \approx 1A$, actuando sobre un medio de 2, 3 y 4 capas homogéneas, isotrópicas, con pérdidas; cada una con sus respectivos espesores. De los valores obtenidos, se observa claramente que el campo a frecuencias de interés en prospección geofísica ($f \approx 10^5 Hz$) tiende a estabilizarse. Se trabajó aproximación cuasi-estática ya que la solución analítica presentada para una tierra homogénea trabaja bajo dicha aproximación, que finalmente sirvió de base para formular las soluciones con el método simpson[3/8].

Se obtuvo solución gráfica y numérica del campo magnético vertical de transición medido en el centro de la espira portadora de corriente, cuando esta se corta abruptamente en el tiempo. La solución se presenta para el caso de una tierra homogénea impermeable.

BIBLIOGRAFIA

- ARFKEN, George. Métodos matemáticos para físicos. México: Diana, 1981. 935 p.
- GOMEZ, Claudia; MOZQUERA, Saulo., y SOTO, Oscar. Elementos de Matemáticas con Maple. San Juan de Pasto: Universidad de Nariño, 2002. 121 p.
- HSU, Hwei. Análisis de Fourier. Adisson-wesley Iberoamericana, 1987. 274 p.
- KAUFMAN, A. A. KELLER, G. V. Frequency and transient soundings. Elsevier Scientific Publ Co, 1983
- MATHEWS, Jhon. FINK, Kurtis. Métodos numéricos con MATLAB. Tercera edición. Prentice hall, 2000.
- NABHIGUIAN N Misac. Electromagnétic Methods in Geophysics. United States of America, 1988. 511 p.
- ORELLANA, Ernesto. Prospección Geoeléctrica por campos variables. Madrid: Paraninfo, 1974. 571 p
- RAMOS ,Sandra y SALAZAR Luis. Monitoreo electromagnético de Volcanes. Pasto: Universidad de Nariño, 2002.
- SEARS, Francis; ZEMANSKY., y YOUNG, Hugh. Física universitaria. sexta edición. Estados Unidos de América: Adisson-wesley Iberoamericana, 1986. 1110 p.
- WILLIAM R, Derrick. Variable compleja con aplicaciones. Segunda edición Estados Unidos de América: Grupo editorial Iberoamerica, 1987. 297 p.

ANEXOS

Anexo A. A continuación se presenta el programa hecho en Maple 9 con el objeto de encontrar la solución que más se aproxime con ayuda del método Simpson[3/8], a el valor del campo magnético vertical medido en el centro de una espira de radio $a = 50$, portadora de corriente constante $I = 1A$ que se ubica sobre un suelo homogéneo impermeable de conductividad $\sigma = 0.01S/m$, ecuación (9.120).

PROGRAMA:

vamos a encontrar el error entre el método de aproximación simpson (3/8) y la ecuación (9.120):

```
> restart;
> mu:=4*Pi*10^(-7);sigma:=0.01;Ite:=1;a:=100;
```

$$\mu := \frac{1}{2500000} \pi$$

$$\sigma := 0.01$$

$$Ite := 1$$

$$a := 100$$

Se utiliza el método de aproximación Simpson[3/8] en la ecuación (9.119)

```
>
f:=unapply(Ite*a*(lambda^2/(lambda+ur))*BesselJ(1,lambda*a),ur):
```

A continuación presentamos la ecuación (9.120)

```
> g:=unapply(-(Ite/(k^2*a^3))*(3-(3+3*I*k*a-k^2*a^2)*exp(-I*k*a)),k);
```

$$g := k \rightarrow -\frac{3 - (3 + 300 I k - 10000 k^2) e^{(-100 I k)}}{1000000 k^2}$$

```
> ur:=evalc(Re(sqrt(lambda^2+I*2*Pi*mu*sigma*frec))):
```

```
> k:=sqrt(-I*2*Pi*mu*sigma*frec);
```

$$k := 0.00008944271910 \pi \sqrt{-I \text{frec}}$$

```
> f(ur):
```

```
> assume(frec>0);gr:=evalc(Re(g(k)));
```

$$gr := -\frac{1}{\pi^2 \text{frec}} \left(125.0000000 \left((0.01341640786 \pi \sqrt{2} \sqrt{\text{frec}} + 0.00008000000000 \pi^2 \text{frec}) e^{(-0.004472135955 \pi \sqrt{2} \sqrt{\text{frec}})} \right. \right. \\ \left. \left. \cos \left(0.004472135955 \pi \sqrt{2} \sqrt{\text{frec}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - (3 + 0.01341640786 \pi \sqrt{2} \sqrt{\text{frec}}) e^{(-0.004472135955 \pi \sqrt{2} \sqrt{\text{frec}})} \sin(0.004472135955 \pi \sqrt{2} \sqrt{\text{frec}}) \right) \right)$$

```
> with(Student[Calculus1]):
> flap:=ApproximateInt(f(ur),lambda=0..10,method=simpson[3/8],
partition=109):
>
flap2:=ApproximateInt(f(ur),lambda=0..30,method=simpson[3/8],
partition=109):
>
flap3:=ApproximateInt(f(ur),lambda=0..25,method=simpson[3/8],
partition=126):
>
```

Se procede a evaluar para comprobar que tanto se aproxima el método:

```
> f1:=subs(frec=10^(-1),flap):g1:=evalf(subs(frec=10^(-
1),gr));f2:=subs(frec=10^(-1),flap2);f3:=subs(frec=10^(-
1),flap3);
```

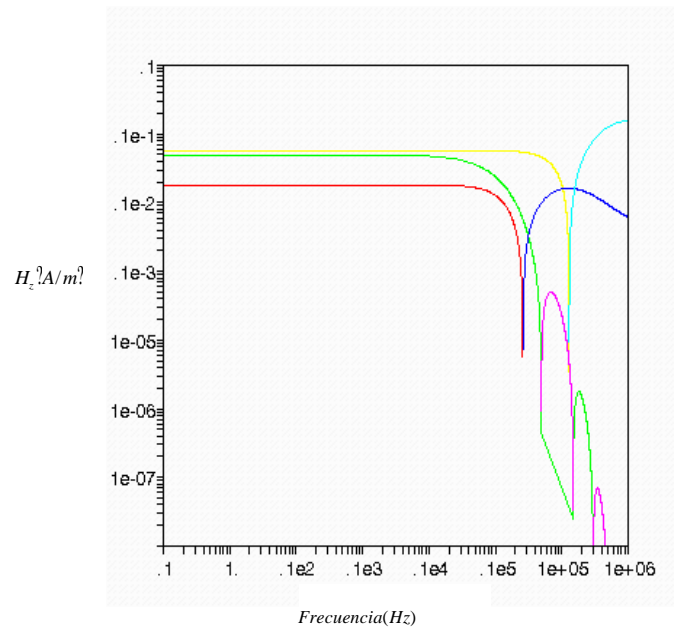
```
g1 := 0.005000000301
```

```
f2 := 0.00578962371
```

```
f3 := 0.0033497953
```

```
> with(plots):
```

```
> loglogplot([flap,gr,flap2,-flap,-gr,-flap2,-
flap3],frec=10^(-1)..10^6,10^(-8)..10^(-
1),axes=box,numpoints=5000);
```



Bajo la aproximación expuesta se tiene un excelente comportamiento bajo 10^4 Hz, de la grafica se puede ver que para frecuencias mayores el error aumenta notoriamente. Pero ya que en prospección geofísica en las cuales frecuencias menores que 10^5 Hz son empleadas.

Por lo tanto según la curva que mas se aproxima es la amarilla, correspondiente a $flap_2$; para valores de frecuencia menores que 10^5 Hz. Para valores mayores el método se aleja de la curva original (verde).