

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



**Estudio de la Propagación de Pulsos Electromagnéticos en Cristales
Fotónicos**

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

Janneth Fernanda Chapues Andrade

San Juan de Pasto, Colombia

11 de Julio de 2019

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Estudio de la Propagación de Pulsos Electromagnéticos en Cristales
Fotónicos**

Janneth Fernanda Chapues Andrade

TRABAJO DE GRADO

Director:

Luís Andrés Santacruz Almeida

Magister en Ciencias - Física

San Juan de Pasto, Colombia

11 de Julio de 2019

©2019 - Janneth Fernanda Chapues Andrade

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Luís Andrés Santacruz Almeida

Director

Juan Carlos Salazar Montenegro

Jurado

Cesar Augusto Mujica Martínez

Jurado

San Juan de Pasto, 11 de Julio de 2019

Agradecimientos

Primeramente agradezco la dirección del presente trabajo al profesor Luís Andrés Santacruz Almeida del Departamento de Física de la Universidad Nariño, que gracias a sus enseñanzas y cooperación fue posible la elaboración del presente trabajo.

Agradezco a todos los profesores y a todas las personas de la Universidad de Nariño, quienes de alguna manera me han permitido aprender lo que más me apasiona.

Finalmente agradezco a mi familia y a Harvey Zambrano por el apoyo incondicional durante las diferentes etapas de este proceso.

A mi madre, Gloria Andrade: la mujer maravilla.

Estudio de la Propagación de Pulsos Electromagnéticos en Cristales Fotónicos

Resumen

En el trabajo de grado se hizo una revisión del artículo de Scalora,¹ sobre el estudio teórico de la propagación de pulsos electromagnéticos ultra cortos a través de Cristales Fotónicos unidimensionales. Estos cristales se componen de una super red periódica cuya base es una celda unitaria compuesta por pares de diferentes materiales, con índices de refracción n_1 y n_2 respectivamente.

Como parte del trabajo de grado se demostró la ecuación de dispersión $f(\omega)$ propuesta por Scalora, para una onda que incide sobre el cristal fotónico unidimensional. Se graficó con ayuda del programa Wolfram Mathematica 11.3 la función de transmisión $T(\omega)$, probando la existencia de brechas fotónicas en el cristal. Esto permitió comprender cómo los efectos no lineales sobre uno de sus componentes del cristal podrían ser aprovechados para modificar el ancho de la brecha fotónica, así como el por qué de la aplicabilidad de este comportamiento.

El programa computacional fue aprovechado para modificar ciertos valores de distintos parámetros, encontrándose resultados adicionales a los mostrados en el artículo de Scalora.¹ Para cierta región de frecuencias el programa Wolfram Mathematica 11.3 no mostró correctamente algunos resultados, por lo tanto se realizó nuevamente el programa en Scilab 6.0.2, logrando así complementar los resultados.

Study of the Propagation of Electromagnetic Pulses in Photonic Crystals

Abstract

In this work, we reviewed the article by Scalora et al. about the theoretical study of the propagation of ultra-short electromagnetic pulses through one-dimensional Photonic Crystals. These crystals are composed of a periodic super-lattice with a unit cell composed by a pair of different materials with refractive indexes n_1 and n_2 , respectively.

The scattering equation $f(\omega)$ proposed by Scalora was demonstrated for an incident wave arriving at one-dimensional Photonic Crystal. The transmission function $T(\omega)$ was graphed using the software Wolfram Mathematica 11.3. With this software, we checked the existence of photonic band gap in the crystal. This result allowed us to understand how non-linear effects at one of its crystal components could be exploited to modify the width of the photonic band gap, as well as the reason for the applicability of this behavior.

The computational software was used to modify some values of different parameters, finding additional results to those shown in Scalora's article. For a certain frequency region, the software Wolfram Mathematica 11.3 did not show logical results, therefore we used the software Scilab 6.0.2, being able to complement the results.

Contenido

Título	i
Título	ii
Aceptación	iv
Agradecimientos	v
Dedicatoria	vi
Resumen	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	xi
Glosario	xii
1 Introducción	1
2 Cristales fotónicos	4
2.1 Introducción	4
2.2 Fabricación	7
2.3 Aplicaciones	8
3 Cristales fotónicos unidimensionales	10
3.1 Ecuación general para los campos eléctrico y magnético	12
3.1.1 Ecuación general para el campo eléctrico	13
3.1.2 Ecuación general para el campo magnético	17
4 Solución de las ecuaciones para los modos TE mediante el método de la matriz transferencia en un cristal fotónico unidimensional.	21
4.1 Análisis de la continuidad de las soluciones	21
4.2 Solución de la ecuación para los modos TE en un medio con n , ε y μ independientes de la posición.	22
4.3 Ecuaciones para el sistema periódico	27
5 Solución de las ecuaciones para los modos TM mediante el método de la matriz transferencia en un cristal fotónico unidimensional.	36
6 Propagación de pulsos ultra cortos en cristales fotónicos	41
6.1 Índice de refracción y dependencia con la intensidad	41
6.2 Dinámica de propagación de pulsos.	43
6.3 Interruptor óptico de pulsos electromagnéticos en materiales fotónicos con respuesta no lineal.	44

7	Resultados	46
7.1	Cálculo de la relación de dispersión	46
7.2	Gráficos y análisis	48
8	Conclusiones	67
9	Apéndices	69
9.0.1	Identidades matemáticas	69
9.0.2	Método de Matriz Transferencia, deducción general	70
	Bibliografía	76

Lista de Figuras

2.1	Medio homogéneo para el que la longitud de onda es muy grande comparada con su estructura.	5
2.2	Medio para el cual se hace uso de la óptica geométrica.	6
2.3	Estructuras características de los Cristales Fotónicos.	6
3.1	Cristal fotónico unidimensional.	10
3.2	<i>Modo transversal eléctrico (TE)</i>	15
4.1	Sistema periódico.	27
6.1	Arreglo unidimensional de capas dieléctricas alternadas.	44
7.1	Gráfica de (7.2.1) con $n_2 = 1.41$	49
7.2	Gráfica de (7.2.1) con $n_2 = 1.7$	49
7.3	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$	50
7.4	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$	51
7.5	Gráfica de (7.2.3) con dos valores: $n_2 = 1.7$ (azul) y $n_2 = 1.41$ (naranja) . . .	51
7.6	Gráfica de (7.1.1) con $n_2 = 1.41$	52
7.7	Gráfica de (7.1.1) con $n_2 = 1.7$	53
7.8	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$ y $0 < \omega < 1$	54
7.9	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$ y $0 < \omega < 1$	55
7.10	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$ y $0 < \omega < 2.5$	55
7.11	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$ y $0 < \omega < 2.5$	56
7.12	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$ y $0 < \omega < 5$	57
7.13	Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$ y $0 < \omega < 5$	57
7.14	Gráfica de $\Delta\omega(\Delta n)$ cuando $n_1 = 1$	62
7.15	Gráfica de (7.1.1) con $\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2} = 2$, en donde $n_1 = \frac{1}{3}$ y $n_2 = 1$	64
7.16	Gráfica de (7.1.1) con $\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2} = 4$, en donde $n_1 = \frac{1}{7}$ y $n_2 = 1$	65
9.1	Esquema de interacción de ondas incidentes sobre un medio.	70

Glosario

- Coherencia:** Característica de la luz por la cual la diferencia de fase entre dos o más ondas se mantiene constante en cada punto del espacio a lo largo del tiempo.²
- Cristal Fotónico:** Es un arreglo periódico compuesto por medios macroscópicos con diferentes constantes dieléctricas. Es el análogo óptico de los cristales comunes.
- Dispersión:** Variación del índice de refracción de un medio en función de la frecuencia de luz que lo atraviesa.²
- Dispersión incoherente:** Es la dispersión en la que no existe una relación definida entre las fases de las ondas dispersadas e incidentes.³
- Frecuencia de Plasma:** Es la frecuencia natural de oscilación colectiva de especies cargadas eléctricamente, como electrones o iones, en un plasma en ausencia de un campo magnético.
- Índice de refracción:** Es el cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en un medio determinado.²

Capítulo 1

Introducción

A partir de los primeros trabajos de Yablonovitch^{4,5} y John,⁶ donde por primera vez se estudió la física de cristales fotónicos, se han realizado una gran cantidad de trabajos teóricos y experimentales,⁷⁻¹² buscando el aprovechamiento de la propagación de la luz y su emisión. Los avances en diseño, fabricación y análisis de estructuras fotónicas implementaron la utilización de sistemas periódico-dieléctricos con propiedades ópticas lineales y no lineales¹³ que permiten controlar la luz al interactuar con dichas estructuras.¹⁴

Tomando como referencia las propiedades electrónicas de los materiales conocidas a partir de la Física del Estado Sólido y las enormes ventajas que la luz tiene respecto a los electrones, los cristales fotónicos son una alternativa para el desarrollo de materiales con los que se puedan controlar las propiedades de los fotones de igual manera que los materiales semiconductores influyen sobre las propiedades de los electrones, particularmente en la forma que el potencial periódico creado por un cristal evita que electrones con energías determinadas no se propagen a través del medio.¹⁵ Se espera que la periodicidad en la geometría de los Cristales Fotónicos genere una brecha de energías para ciertas regiones del espectro electromagnético. Así pues, los cristales fotónicos son diseñados con el fin de generar *bandas prohibidas* fotónicas,^{16,17} que son intervalos de frecuencia en los que la luz no puede propagarse a través del cristal, lo que ya ha sido confirmado de manera experimental.¹⁸

Las primeras nociones respecto a los cristales fotónicos se dieron en los años 40, cuando el físico norteamericano Edward Purcell¹⁹ consideró por vez primera que la presencia de un espejo podría alterar las propiedades de la radiación electromagnética de un dipolo, lo que en 1987 llevó a la idea de una brecha prohibida fotónica,^{4,6} tomando ésta de la Física de los cristales en donde la existencia de bandas electrónicas debidas a la periodicidad de una red

cristalina generan bandas prohibidas de energía para la propagación de los electrones dentro del cristal.

La idea de considerar cristales fotónicos en vez de cristales convencionales, consiste en que los primeros actúan sobre los fotones de forma análoga a como los cristales semiconductores lo hacen sobre los electrones, creando una región en frecuencias donde los fotones no pueden propagarse a través del material.¹⁶ Este hecho se probó experimentalmente por Yablonovitch en 1991,¹⁸ con una matriz de agujeros perforados en un material con alto índice de refracción. Este cristal artificial llamado 'Yablonovita' en honor a su inventor, mostró impedir la transmisión de la radiación electromagnética desde los 13 GHz hasta los 15 GHz (microondas) aproximadamente, mostrando así la existencia de una zona prohibida de frecuencias para la cual no existe la transmisión electromagnética.

Posteriormente se buscó ampliar el régimen de frecuencias más allá del de las microondas buscando estructuras que operasen en la región visible o infrarrojo cercano, para lo que se utilizó el mismo método empleado en la fabricación de muestras en el régimen de microondas y luego escalando hacia las otras regiones.²⁰ A la fecha, el diseño de cristales fotónicos se ha llevado a cabo con diferentes técnicas para la obtención de cristales con estructuras unidimensionales, estructuras bi-dimensionales y estructuras tri-dimensionales.^{1, 8, 14, 21-25}

La inclusión de componentes no lineales en los que la constante dieléctrica depende de la intensidad del campo aplicado, trajo consigo un cambio dinámico en su rendimiento, permitiendo el desarrollo de dispositivos tales como filtros e interruptores ópticos,²⁶⁻²⁸ esto es, sistemas en los que el ancho de las bandas prohibidas pudiese controlarse con la intensidad del campo aplicado. Sin embargo, una comprensión analítica detallada de estos sistemas no había sido considerada detalladamente.^{1, 14}

En la práctica, los cristales fotónicos son, en general, difíciles de fabricar, lo que genera la necesidad de utilizar métodos computacionales que permitan generar predicciones sobre

el sistema antes de proceder a la fabricación de estos materiales, habiéndose desarrollado algunos métodos de cálculo para el estudio de cristales fotónicos.^{14,29} En los últimos años se han estudiado numéricamente arreglos unidimensionales de heteroestructuras compuestas por capas de materiales dispersivos-nodispersivos encontrándose resultados interesantes dependientes de la frecuencia de plasma del material.³⁰

En este trabajo se hizo una revisión del estudio de sistemas compuestos por cristales fotónicos unidimensionales realizado por Scalora et. al.¹ utilizando el método de Matriz transferencia, para probar la existencia de brechas fotónicas en cristales fotónicos y su dependencia con el índice de refracción del material.

El trabajo de grado se inició con un breve resumen acerca de los cristales fotónicos, haciendo énfasis en los cristales fotónicos unidimensionales, encontrándose las ecuaciones diferenciales para los campos eléctrico y magnético asociadas a los modos TE y TM respectivamente. Dichas ecuaciones fueron solucionadas mediante el método de matriz transferencia aplicado a un cristal fotónico de este tipo, lo que permitió encontrar la relación de dispersión del sistema. Se estudió la propagación de pulsos electromagnéticos ultra-cortos en estos cristales, obteniendo las brechas fotónicas reportadas por Scalora et al.¹ Así mismo, se obtuvieron resultados adicionales como la aparición de más brechas fotónicas a mayores rangos de frecuencia, los valores de las mismas y su relación con la variación del índice de refracción, entre otros resultados que son reportados en la sección de Resultados del presente trabajo.

Capítulo 2

Cristales fotónicos

Introducción

Un cristal es un arreglo periódico de átomos o moléculas, cuyo patrón de repetición en el espacio es lo que se conoce como red cristalina. Todo cristal presenta un potencial periódico para que un electrón se propague a través de él, y tanto los constituyentes del cristal como la geometría de la red dictan las propiedades de la conducción del mismo.^{31,32}

El análogo óptico es el cristal fotónico, en el cual los átomos o moléculas son reemplazados por medios macroscópicos con diferentes constantes dieléctricas, y el potencial periódico se reemplaza por una función dieléctrica periódica (o, de manera equivalente, un índice periódico de refracción). Si las constantes dieléctricas de los materiales en el cristal son suficientemente diferentes, y si la absorción de la luz por los materiales es mínima, entonces, las refracciones y reflexiones de la luz de todas las interfaces pueden producir fenómenos análogos a los observados con electrones.³¹ Además, la periodicidad de la red en el cristal fotónico es capaz de proporcionar brechas prohibidas de propagación como en un cristal común. Estas similitudes permiten analizar los cristales fotónicos mediante métodos conocidos y emplear métodos numéricos utilizados en el área de Estado Sólido.

En la práctica, la óptica de materiales se estudia a partir de la relación de tamaños entre el material a investigar y la longitud de onda de la radiación que incide sobre el mismo. A saber, se definen tres límites en los que las propiedades ópticas de los materiales presentan diferentes comportamientos:

En primer lugar se encuentra la región en la que se trabaja con los *materiales ópticos tradicionales*, esta es una región en la que la longitud de onda λ de la onda incidente es muy grande comparada con las imperfecciones o variaciones en las propiedades del material (figura 2.1), y en la que a pesar de tales propiedades discretas, la respuesta óptica del mismo es comúnmente homogeneizada y promediada caracterizándose estos materiales por una constante dieléctrica ε propia del material.³³

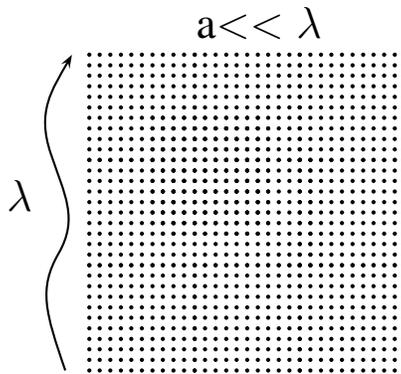


Figura 2.1: Medio homogéneo para el que la longitud de onda es muy grande comparada con su estructura. Fuente: Adaptado de M. Skorobogatiy and J. Yang. “Fundamentals of Photonic Crystal Guiding”.

La región en la que λ es muy pequeña comparada con las propiedades estructurales del material (figura 2.2), da origen a la denominada *óptica geométrica*, observándose en este régimen la dispersión incoherente de la radiación, la cual puede estudiarse por el método de rayos.³³

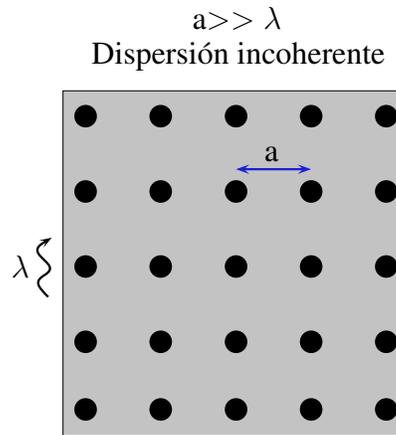


Figura 2.2: Medio para el cual se hace uso de la óptica geométrica. Fuente: Adaptado de M. Skorobogatiy and J. Yang. “Fundamentals of Photonic Crystal Guiding”.

El régimen operacional de la *Fotónica de cristales* cae entre los dos límites mencionados,³³ esto es, la región en que la longitud de onda es comparable a la estructura de los cristales fotónicos (figura 2.3).

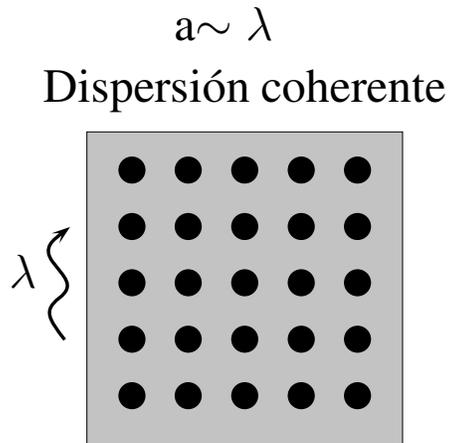


Figura 2.3: Estructuras características de los Cristales Fotónicos. Fuente: Adaptado de M. Skorobogatiy and J. Yang. “Fundamentals of Photonic Crystal Guiding”.

Fabricación

Es interesante observar que los cristales fotónicos, tienen algunos análogos en la naturaleza, como los ópalos, que son estructuras periódicas con propiedades ópticas atractivas y de interés científico y comercial, por lo que recientemente, los ópalos artificiales fabricados por autoensamblaje de partículas coloidales se convirtieron en un tema de investigación popular, principalmente debido a la metodología relativamente simple y económica de producir grandes muestras de estructuras fotónicas periódicas.³³

Aunque el enfoque de autoensamblaje es simple y rentable, los defectos aleatorios de la red, tales como dislocaciones y partículas faltantes, limitan el tamaño máximo de un cristal fotónico libre de defectos.³³

Una técnica alternativa de “producción en masa” desarrollada para la fabricación de cristales fotónicos uniformes 2D y 3D es una litografía de interferencia de haz múltiple, también conocida como litografía holográfica. En esta técnica, el patrón de intensidad periódico causado por varios haces de interferencia se transfiere a un sustrato de polímero fotosensible a través de una sola exposición.³³

Los cristales y la holografía proporcionan una forma eficiente de fabricar cristales fotónicos 2D y 3D a gran escala; estos métodos deben complementarse con otros métodos para la incorporación de defectos. Se conocen avances recientes en la fabricación de defectos en las celosías de cristal fotónico, incluidos, entre otros, micromanipulación, escritura directa y procedimientos de varios pasos que incluyen la combinación de métodos de fabricación de PhC 3D y algunos tipos de litografía 2D.³³

Hasta la fecha, probablemente el proceso más estudiado para la fabricación de dispositivos de cristal fotónico se basa en el diseño 2D láminas dieléctricas planas utilizando litografía por haz de electrones. La litografía de vanguardia en combinación con el grabado electroquímico

o reactivo de iones permite la fabricación de cristales fotónicos 2D de baja imperfección en varias combinaciones de materiales de alto índice de refracción, incluidos los semiconductores de silicio-aire y III-V.³³

A pesar de su gran potencial, la mayoría de los dispositivos basados en cristales fotónicos se encuentran todavía en la fase de investigación. Algunas de las pocas aplicaciones comerciales existentes de cristales fotónicos más allá de los filtros de interferencia planas 1D incluyen vidrio y fibras de cristal fotónico a base de polímero (PCF).^{33,34}

Aplicaciones

Los cristales fotónicos son unos excelentes candidatos para ser utilizados en las diferentes aplicaciones donde el control óptico es necesario³¹ ya que tienen propiedades ópticas interesantes como el interruptor fotónico, el cual es el más conocido debido a las posibles aplicaciones tecnológicas; estas aplicaciones dependen de la posición y el tamaño de dicho interruptor.^{35,36}

Algunas aplicaciones de los cristales fotónicos, son:

- *Aisladores ópticos*: Hacen uso de la capacidad que tienen los cristales fotónicos de localizar radiación dentro de una estructura periódica. Funciona como aislador cuando la frecuencia que se desea aislar está dentro de la región de la brecha fotónica.^{35,37}
- *Guías de onda fotónicas*: Esta es una característica única de las guías de onda, basada en cristales fotónicos, la cual tiene la capacidad de formar dobleces en la dirección de propagación de la radiación a un ángulo de 90° e incluso mayores, alcanzando una transmisión mayor al 98%.^{35,38–40}
- *Manejo de dispersión*: Esta propiedad permite utilizar los cristales fotónicos como súper prismas, súper lentes y de multiplexores.^{35,41–43}

- *Divisores de haz*: Los divisores basados en cristales fotónicos constan en un número de guías de onda fotónicas, conectadas en un punto. Así, la potencia que entra por una guía de onda, se divide en el punto de conexión.^{35,41}
- *Elementos no lineales*: Un material fotónico no lineal cambia su índice de refracción, bajo la presencia de radiación electromagnética de alta intensidad que pasa a través de él. Este efecto tiene lugar cuando uno o dos haces de luz, que tienen suficiente potencia, inciden en la estructura fotónica no lineal, de tal forma que las características del cristal fotónico cambian, particularmente la reflexión y la transmisión. Así, mediante este principio, se puede controlar el cierre o apertura de un interruptor óptico con la intensidad de radiación incidente en el material.^{35,37}

Capítulo 3

Cristales fotónicos unidimensionales

Los cristales fotónicos unidimensionales se consideran el caso más simple abarcado en todo el estudio de los cristales fotónicos, en los cuales se puede aplicar la simetría y los principios de electromagnetismo estudiados en la física del estado sólido.

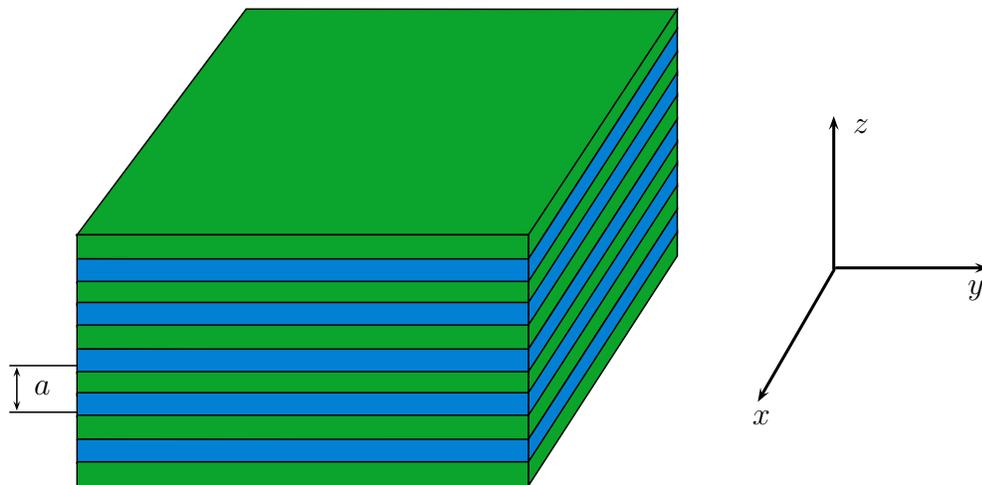


Figura 3.1: *Cristal fotónico unidimensional. El sistema consiste en capas alternas de materiales con diferentes constantes dieléctricas y un período espacial a . Fuente: Adaptado de J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, R.D. Meade and J.N. Winn. “Photonic Crystals. Molding of Flow of Light [2 ed.]”.*

El cristal fotónico unidimensional, también conocido como “espejo de Bragg” o el reflector multicapas, consiste en una pila periódica de dos capas dieléctricas alternas. La luz se propaga en una dirección normal a las capas, las cuales se someten a reflexión y transmisión en cada interfaz entre las capas adyacentes de manera sucesiva. Con una elección adecuada del espesor de la capa y los índices de refracción, las ondas reflejadas desde cada interfaz

están en fase, mientras que las ondas transmitidas están fuera de fase. En ese caso, los componentes de onda transmitidos se cancelan entre sí, y sólo la interferencia de los componentes reflejados es constructiva, con lo que la luz se refleja totalmente. Esto funciona para cierto rango de longitudes de onda. Clásicamente se analiza los espejos de Bragg con un número finito de capas, utilizando matrices de reflexión y transmisión para cada capa, teniéndose que la reflexión puede ser perfecta con un número infinito de capas.⁴⁴

La brecha de frecuencias para la cual no existe transmisión se llama brecha de banda fotónica. Se tiene en cuenta que, hasta hace poco, se pensaba que la reflexión de los espejos de Bragg era posible sólo dentro de un rango relativamente estrecho de ángulos de incidencia. El trabajo reciente de Fink et al. ha demostrado la viabilidad de la reflexión omnidireccional con los Cristales Fotónicos Unidimensionales.⁴⁵

Ecuación general para los campos eléctrico y magnético

Para obtener las ecuaciones para el campo eléctrico y magnético, se debe partir de las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen el comportamiento del campo electromagnético en un medio material, estas ecuaciones tienen la forma:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1.1)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.1.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0, \quad (3.1.3)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (3.1.4)$$

Los vectores \vec{D} y \vec{H} se vinculan con los vectores \vec{E} y \vec{B} , respectivamente, mediante las relaciones constitutivas, las cuales para el caso de los medios lineales toman la forma

$$\vec{D} = \varepsilon(\vec{r})\vec{E}, \quad (3.1.5)$$

$$\vec{B} = \mu(\vec{r})\vec{H}, \quad (3.1.6)$$

siendo ε y μ la constante dieléctrica y la permeabilidad magnética, de dicho material respectivamente. El campo electromagnético puede ser caracterizado por el vector potencial \vec{A} y el potencial escalar ϕ , es decir,

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.1.7)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.1.8)$$

Suponiendo que $\phi = 0$ (Calibración de Coulomb),

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (3.1.9)$$

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}. \quad (3.1.10)$$

De acuerdo con (3.1.3),(3.1.5) y (3.1.9),

$$0 = \nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = -\nabla \cdot \left[\varepsilon \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot (\varepsilon \vec{A}),$$

de donde

$$\nabla \cdot [\varepsilon \vec{A}] = 0. \quad (3.1.11)$$

Ecuación general para el campo eléctrico

Para obtener la ecuación general del campo electrico, teniendo en cuenta lo anterior, se toma el rotacional en (3.1.2).

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \nabla \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{B}, \quad (3.1.12)$$

pero

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\mu \vec{H}) = \mu \nabla \times \vec{H} + \nabla \mu \times \vec{H}.$$

Luego, en virtud de (3.1.4), (3.1.5) y (3.1.6),

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \nabla \mu \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\nabla \mu}{\mu} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

sustituyendo este resultado en (3.1.12),

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\nabla \mu}{\mu} \times (\nabla \times \vec{E}),$$

de donde

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} + \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \frac{\nabla \mu}{\mu} \times (\nabla \times \vec{E}) = 0. \quad (3.1.13)$$

Dados dos campos vectoriales \vec{F} y \vec{G} "buenos" desde el punto de vista matemático, sabemos que las identidades 9.0.1 y 9.0.3 se cumplen. Entonces si se reemplaza $\vec{F} \equiv \vec{E}$ y $\vec{G} \equiv \frac{\nabla \mu}{\mu}$ en (9.0.1) y (9.0.3). Se obtiene,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}. \quad (3.1.14)$$

Pero

$$\nabla \cdot \vec{D} = 0 = \nabla \cdot (\varepsilon \vec{E}) = \nabla \varepsilon \cdot \vec{E} + \varepsilon \nabla \cdot \vec{E},$$

de donde

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{E}. \quad (3.1.15)$$

Así,

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla \left[-\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{E} \right] - \nabla^2 \vec{E}. \quad (3.1.16)$$

Por otra parte, usando la identidad 9.0.3, se tiene que:

$$\left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \left[\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \vec{E} \right] - (\vec{E} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) - \left[\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \nabla \right] \vec{E} - \vec{E} \times \left[\nabla \times \frac{\nabla \mu}{\mu} \right].$$

Pero

$$\nabla \times \frac{\nabla \mu}{\mu} = 0.$$

Así,

$$\left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \left[\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \vec{E} \right] - (\vec{E} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) - \left[\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \nabla \right] \vec{E}. \quad (3.1.17)$$

Sustituyendo (3.1.16) y (3.1.17) en (3.1.13),

$$-\nabla^2 \vec{E} - \nabla \left[\frac{\nabla(\mu\varepsilon)}{\mu\varepsilon} \cdot \vec{E} \right] + (\vec{E} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) + \left[\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \nabla \right] \vec{E} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0. \quad (3.1.18)$$

Para campos monocromáticos, se conoce que:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (3.1.19)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \vec{B}(\vec{r})e^{-i\omega t}, \quad (3.1.20)$$

y por tanto, la ecuación diferencial para la parte espacial está dada por:

$$-\nabla^2 \vec{E} - \nabla \left[\frac{\nabla(\mu\varepsilon)}{\mu\varepsilon} \cdot \vec{E} \right] + (\vec{E} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) + \left[\left(\frac{\nabla \mu}{\mu} \right) \cdot \nabla \right] \vec{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 \vec{E} = 0. \quad (3.1.21)$$

Aplicación al caso de modos transversales eléctricos de un cristal fotónico unidimensional.

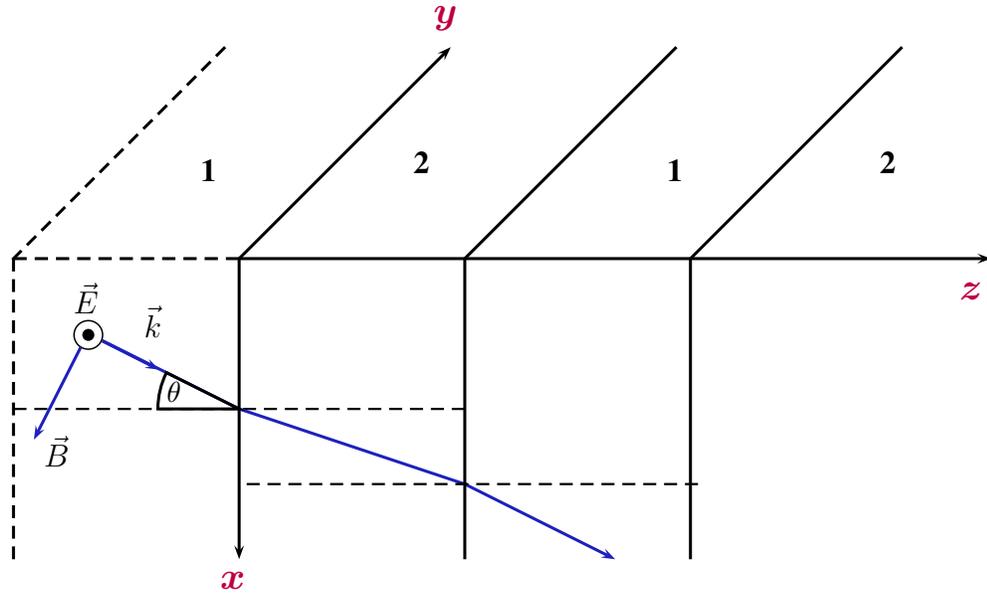


Figura 3.2: Modo transversal eléctrico (TE). Fuente: Andrés Santacruz, notas de clase.

En el caso de los modos transversales eléctricos (TE), el vector \vec{E} es perpendicular al plano de incidencia. Consideremos la situación física ilustrada en la figura 3.2, donde xz es el plano de incidencia y θ es el ángulo de incidencia ($\theta = 0 \rightarrow$ incidencia normal).

Se supone además que z es la dirección de crecimiento del cristal formado por la deposición periódica de la capa “1” con índice de refracción n_1 , constante dieléctrica ε_1 y permeabilidad magnética μ_1 , seguida de la capa “2” con parámetros n_2 , ε_2 y μ_2 . En esta situación concreta:

$$\vec{\mu}(\vec{r}) = \mu(z), \quad (3.1.22)$$

$$\vec{\varepsilon}(\vec{r}) = \varepsilon(z), \quad (3.1.23)$$

y

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(z)e^{ik_x x} \vec{e}_y = E_y \vec{e}_y. \quad (3.1.24)$$

Aquí \vec{e}_y es el vector unitario en la dirección del eje "y", y k_x es la componente del vector de onda en la dirección x ; entonces:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \vec{E} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{E} = \vec{e}_y \left[-k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] E(z) e^{ik_x x}. \quad (3.1.25)$$

Además, en virtud de 3.1.22 y 3.1.23, notando que μ y ε son sólo funciones de z :

$$\frac{\nabla(\mu\varepsilon)}{\mu\varepsilon} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\mu\varepsilon} \left[\frac{\partial}{\partial y}(\mu\varepsilon) \right] E(z) e^{ik_x x} = 0.$$

Análogamente

$$\left(\vec{E} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\nabla\mu}{\mu} \right) = E_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nabla\mu}{\mu} \right) = 0,$$

$$\left[\frac{\nabla\mu}{\mu} \cdot \nabla \right] \vec{E} = \vec{e}_y \frac{e^{ik_x x}}{\mu} \left(\frac{d}{dz} \mu \right) \left(\frac{d}{dz} E(z) \right). \quad (3.1.26)$$

Sustituyendo 3.1.25 y 3.1.26 en 3.1.21, se encuentra finalmente:

$$-\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \right] + \frac{k_x^2}{\mu(z)\varepsilon(z)} E(z) = \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 E(z). \quad (3.1.27)$$

Esta es la ecuación diferencial para el campo eléctrico asociado a los modos TE.

Dado que

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} E_y, 0, \frac{\partial}{\partial x} E_y \right] \\ &= -e^{ik_x x} \frac{dE(z)}{dz} \vec{e}_x + ik_x e^{ik_x x} E(z) \vec{e}_z, \end{aligned}$$

entonces en virtud de 3.1.2 y 3.1.20,

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{i\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}) = e^{ik_x x} \left[-\frac{d}{dz} E(z) \vec{e}_x + ik_x E(z) \vec{e}_z \right], \quad (3.1.28)$$

o bien, según 3.1.6:

$$\frac{i\omega}{c} \mu(z) \vec{H}(\vec{r}) = e^{ik_x x} \left[-\frac{d}{dz} E(z) \vec{e}_x + ik_x E(z) \vec{e}_z \right]. \quad (3.1.29)$$

Esta ecuación permite determinar el campo magnético una vez conocido el campo eléctrico.

Ecuación general para el campo magnético

Para obtener la ecuación general del campo magnético, teniendo en cuenta lo anterior, se toma el rotacional en (3.1.4).

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \frac{1}{c} \left[\nabla \times \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla \times \vec{D} \right]. \quad (3.1.30)$$

Pero

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{D} &= \nabla \times (\epsilon \vec{E}) = \epsilon \nabla \times \vec{E} + \nabla \epsilon \times \vec{E} \\ &= -\frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \epsilon \times \vec{E} \\ &= -\frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \epsilon \times \vec{E}. \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{\mu \epsilon}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \nabla \epsilon \times \vec{E} \right] \\ &= -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\ &= -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \left[\nabla \times \vec{H} \right]. \end{aligned}$$

Recordando la identidad 9.0.1, se tiene que:

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \vec{H} &= \nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} \\ &= -\frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} + \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \left[\nabla \times \vec{H} \right], \end{aligned}$$

finalmente

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} - \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon} \times \left[\nabla \times \vec{H} \right] + \frac{\mu \epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0.$$

Por otra parte, usando la identidad 9.0.3, se tiene que:

$$\left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) \times [\nabla \times \vec{H}] = \nabla \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{H}\right] - (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) - \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla\right] \vec{H} - \vec{H} \times \left[\nabla \times \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right].$$

Pero

$$\nabla \times \frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} = 0,$$

así,

$$\left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) \times [\nabla \times \vec{H}] = \nabla \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{H}\right] - (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) - \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla\right] \vec{H}.$$

Por lo tanto:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H} - \nabla \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{H}\right] + (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) + \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla\right] \vec{H} + \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1.31)$$

Además:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{H} &= \nabla \cdot \left(\frac{\vec{B}}{\mu}\right) = \frac{\nabla \cdot \vec{B}}{\mu} + \nabla \left(\frac{1}{\mu}\right) \cdot \vec{B} = -\frac{\nabla \mu}{\mu^2} \cdot \vec{B} \\ &= -\frac{\nabla \mu}{\mu} \cdot \vec{H}. \end{aligned} \quad (3.1.32)$$

Sustituyendo 3.1.32 en 3.1.31,

$$-\nabla^2 \vec{H} - \nabla \left[\frac{\nabla \mu \varepsilon}{\mu \varepsilon} \cdot \vec{H}\right] + (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) + \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla\right] \vec{H} + \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (3.1.33)$$

Para los campos monocromáticos mostrados en (3.1.20), la ecuación 3.1.33, se transforma en:

$$-\nabla^2 \vec{H} - \nabla \left[\frac{\nabla \mu \varepsilon}{\mu \varepsilon} \cdot \vec{H}\right] + (\vec{H} \cdot \nabla) \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon}\right) + \left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla\right] \vec{H} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \omega^2 \vec{H} = 0. \quad (3.1.34)$$

Aplicación al caso de modos transversales magnéticos de un cristal fotónico unidimensional.

En el caso de los modos transversales magnéticos (TM), el campo eléctrico está en el plano de incidencia, y consecuentemente, el campo magnético es perpendicular a dicho plano.

Se supone que:

$$\vec{H}(\vec{r}) = H(z)e^{ik_x x} \vec{e}_y = H_y \vec{e}_y, \quad (3.1.35)$$

entonces

$$\nabla^2 \vec{H} = \left[-k_x^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] H(z)e^{ik_x x} \vec{e}_y. \quad (3.1.36)$$

Teniendo en cuenta que $\mu = \mu(z)$ y $\varepsilon = \varepsilon(z)$, se tiene:

$$\frac{\nabla \mu \varepsilon}{\mu \varepsilon} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu \varepsilon} \left(\frac{\partial \mu \varepsilon}{\partial y} \right) H_y = 0,$$

$$\left(\vec{H} \cdot \nabla \right) \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) = H_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \right) = 0,$$

$$\left[\frac{\nabla \varepsilon}{\varepsilon} \cdot \nabla \right] \vec{H} = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{d}{dz} \varepsilon \right] \frac{\partial}{\partial z} \vec{H} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{dH(z)}{dz} e^{ik_x x} \vec{e}_y. \quad (3.1.37)$$

Así, sustituyendo (3.1.36) y (3.1.37) en (3.1.34),

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2}{\partial z^2} H(z) + k_x^2 H(z) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dz} \frac{dH(z)}{dz} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \omega^2 H(z) &= 0, \\ -\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{dH(z)}{dz} \right] + \frac{k_x^2}{\mu \varepsilon} H(z) &= \frac{\omega^2}{c^2} H(z). \end{aligned} \quad (3.1.38)$$

Esta es la ecuación para los modos TM.

Después de encontrado el campo magnético de acuerdo con (3.1.38), el campo eléctrico puede ser calculado a partir de las ecuaciones de Maxwell de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} H_y, 0, \frac{\partial}{\partial x} H_y \right] \\ &= -e^{ik_x x} \frac{dH(z)}{dz} \vec{e}_x + ik_x e^{ik_x x} H(z) \vec{e}_z, \end{aligned}$$

Entonces en virtud de 3.1.4 y 3.1.19,

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{i\omega}{c}\vec{D}(\vec{r}) = e^{ik_x x} \left[-\frac{d}{dz}H(z)\vec{e}_x + ik_x H(z)\vec{e}_z \right].$$

o bien, según 3.1.5:

$$-\frac{i\omega}{c}\varepsilon(z)\vec{E}(\vec{r}) = e^{ik_x x} \left[-\frac{d}{dz}H(z)\vec{e}_x + ik_x H(z)\vec{e}_z \right]. \quad (3.1.39)$$

Esta ecuación permite calcular el campo eléctrico de los modos TM.

Capítulo 4

Solución de las ecuaciones para los modos TE mediante el método de la matriz transferencia en un cristal fotónico unidimensional.

Análisis de la continuidad de las soluciones

La ecuación 3.1.27 describe el campo eléctrico de los modos TE.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \right] + \frac{k_x^2}{\mu(z)\varepsilon(z)} E(z) &= \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 E(z), \\ \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \right] &= -\varepsilon(z) \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{k_x^2}{\mu(z)\varepsilon(z)} \right] E(z). \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Definiendo el índice de refracción:

$$n(z) = \sqrt{\mu(z)} \sqrt{\varepsilon(z)}, \quad (4.1.2)$$

se tiene

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \right] = -\varepsilon(z) \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{k_x^2}{n^2(z)} \right] E(z). \quad (4.1.3)$$

Sea $z_0 \in \mathbb{R}$ y $\delta > 0$, y se supone que el miembro derecho de la expresión anterior es integrable en el intervalo abierto $(z_0 - \delta, z_0 + \delta)$, entonces:

$$\int_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \right] dz = - \int_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} \varepsilon(z) \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{k_x^2}{n^2(z)} \right] E(z) dz,$$

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \Big|_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} = - \int_{z_0-\delta}^{z_0+\delta} \varepsilon(z) \left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 - \frac{k_x^2}{n^2(z)} \right] E(z) dz.$$

Tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$ se encuentra:

$$\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \Big|_{z_0^-} = \frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \Big|_{z_0^+}, \quad (4.1.4)$$

es decir, la función $\frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} E(z)$ es continua en \mathbb{R} . También se asume $E(z)$ como una función continua.

Solución de la ecuación para los modos TE en un medio con n, ε y μ independientes de la posición.

Se propone

$$E(z) \sim e^{i\tilde{Q}z}, \quad (4.2.1)$$

siendo \tilde{Q} la componente del vector de onda a lo largo de la dirección de crecimiento.

Si n, ε y μ son independientes de z , entonces la ecuación 4.1.3 se convierte en:

$$\frac{d^2}{dz^2} E(z) = -n^2 \left[\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{k_x^2}{n^2} \right] E(z) = - \left[\frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 \right] E(z).$$

Por otro lado, derivando la ecuación 4.2.1, se obtiene:

$$\frac{d^2}{dz^2} E(z) = -\tilde{Q}^2 e^{i\tilde{Q}z} = -\tilde{Q}^2 E(z),$$

por lo tanto:

$$\begin{aligned} -\tilde{Q}^2 E(z) &= - \left[\frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 \right] E(z), \\ \tilde{Q} &= \pm \sqrt{\frac{n^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2}. \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

Este resultado presenta tres casos posibles de interés:

Caso 1: $n \in \mathbb{R}, \frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2 \geq 0$.

En este caso

$$\tilde{Q} = \pm Q, \tag{4.2.3}$$

$$Q = \sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2}. \tag{4.2.4}$$

Caso 2: $n \in \mathbb{R}, \frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2 < 0$.

En este caso

$$\tilde{Q} = \pm iQ, \tag{4.2.5}$$

$$Q = \sqrt{k_x^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2}}. \tag{4.2.6}$$

Caso 3: $n \in \mathbb{I}, n^2 < 0$.

En este caso

$$\tilde{Q} = \pm iQ, \tag{4.2.7}$$

$$Q = \sqrt{k_x^2 + \frac{n_I^2\omega^2}{c^2}}, \tag{4.2.8}$$

$$n_I = \text{Im}(n). \tag{4.2.9}$$

Análisis del caso 1

Se elige $E(z)$ tal que

$$E(z_0) = A, \quad (4.2.10)$$

$$\left. \frac{1}{\mu} \frac{dE}{dz} \right|_{z_0} = B. \quad (4.2.11)$$

Así, se propone:

$$E(z) = A \cos[Q(z - z_0)] + \frac{\mu}{Q} B \sin[Q(z - z_0)], \quad (4.2.12)$$

donde Q viene dado por 4.2.4.

Sea

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} E(z) \\ \frac{1}{\mu} \frac{d}{dz} E(z) \end{bmatrix}. \quad (4.2.13)$$

Nótese que

$$\Psi(z_0) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}. \quad (4.2.14)$$

De acuerdo con 4.2.10 y 4.2.11,

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} A \cos[Q(z - z_0)] + \frac{\mu}{Q} B \sin[Q(z - z_0)] \\ -A \frac{Q}{\mu} \sin[Q(z - z_0)] + B \cos[Q(z - z_0)] \end{bmatrix},$$

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} \cos[Q(z - z_0)] & \frac{\mu}{Q} \sin[Q(z - z_0)] \\ -\frac{Q}{\mu} \sin[Q(z - z_0)] & \cos[Q(z - z_0)] \end{bmatrix} \Psi(z_0). \quad (4.2.15)$$

Definiendo

$$\mathbb{M}(z - z_0) = \begin{bmatrix} \cos[Q(z - z_0)] & \frac{\mu}{Q} \sin[Q(z - z_0)] \\ -\frac{Q}{\mu} \sin[Q(z - z_0)] & \cos[Q(z - z_0)] \end{bmatrix}, \quad (4.2.16)$$

se tiene que

$$\Psi(z) = \mathbb{M}(z - z_0)\Psi(z_0). \quad (4.2.17)$$

Se observa que:

$$\det[\mathbb{M}(z - z_0)] = \cos^2[Q(z - z_0)] + \sin^2[Q(z - z_0)],$$

$$\det[\mathbb{M}(z - z_0)] = 1. \quad (4.2.18)$$

Análisis para el caso 2

Se supone que $E(z)$ satisface (4.2.10) y (4.2.11). Luego,

$$E(z) = A \cosh[Q(z - z_0)] + \frac{\mu}{Q} B \sinh[Q(z - z_0)]. \quad (4.2.19)$$

En este caso

$$\Psi(z) = \begin{bmatrix} A \cosh[Q(z - z_0)] + \frac{\mu}{Q} B \sinh[Q(z - z_0)] \\ A \frac{Q}{\mu} \sinh[Q(z - z_0)] + B \cosh[Q(z - z_0)] \end{bmatrix},$$

o bien:

$$\Psi(z) = \mathbb{M}(z - z_0)\Psi(z_0). \quad (4.2.20)$$

En donde

$$\mathbb{M}(z - z_0) = \begin{bmatrix} \cosh[Q(z - z_0)] & \frac{\mu}{Q} \sinh[Q(z - z_0)] \\ \frac{Q}{\mu} \sinh[Q(z - z_0)] & \cosh[Q(z - z_0)] \end{bmatrix}, \quad (4.2.21)$$

donde Q viene dado por (4.2.6). Se nota que en este caso \mathbb{M} también satisface (4.2.18).

Análisis del caso 3

Las expresiones para el caso 3 coinciden con las determinadas para el caso 2, pero con Q dado por (4.2.8).

Ecuaciones para el sistema periódico

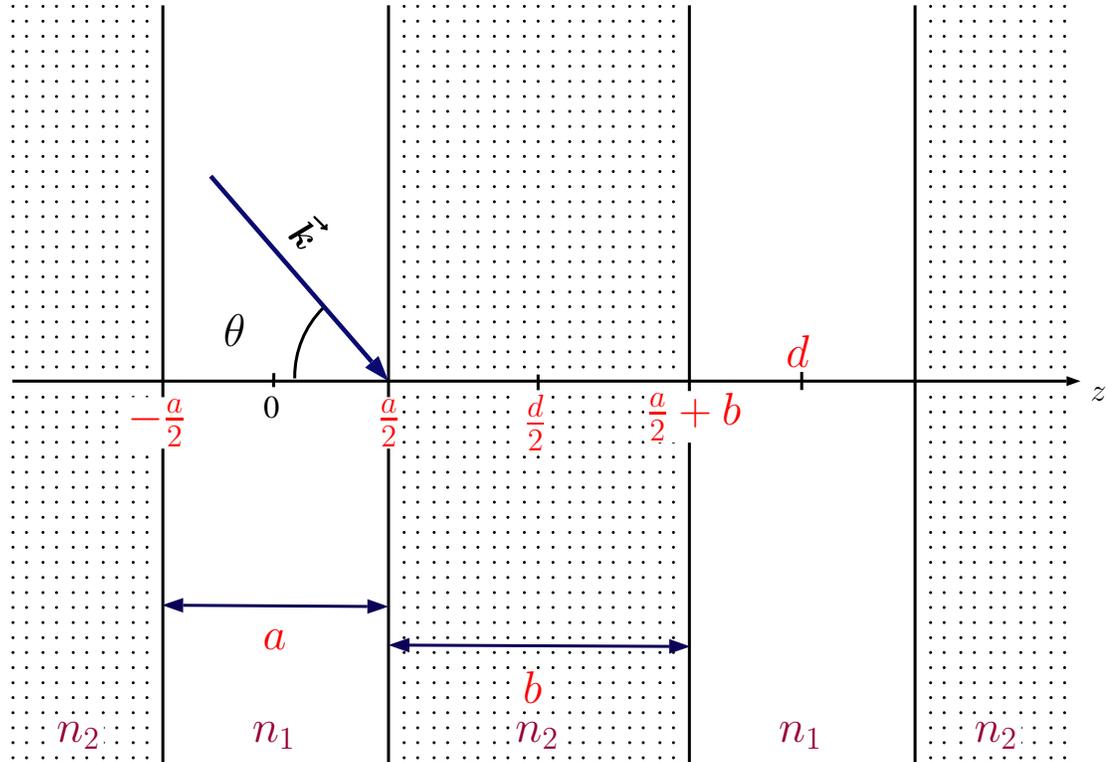


Figura 4.1: Sistema periódico. Fuente: Andrés Santacruz, notas de clase.

Se considera el sistema periódico como en la figura 4.1. Además, se supone que $n_1 > 0$, mientras que n_2 puede ser real positivo, real negativo ó imaginario puro. Aquí se denota como " a " al ancho de las capas con índice n_1 , como " b " al ancho de las capas con índice n_2 , y $d = a + b$.

Dado que $k_x = k_{\text{material}} \sin \theta$, se puede tomar:

$$k_x = n_1 \frac{\omega}{c} \sin \theta, \quad (4.3.1)$$

siendo θ el ángulo de incidencia. Sean $z_0 = 0$ y $z = a/2$, entonces en el medio "1" se tiene:

$$\Psi\left(\frac{a}{2}\right) = \mathbb{M}_1\left(\frac{a}{2}\right) \Psi(0), \quad (4.3.2)$$

$$\mathbb{M}_1\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) & \frac{\mu_1}{Q_1} \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) \\ -\frac{Q_1}{\mu_1} \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) & \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) \end{bmatrix}. \quad (4.3.3)$$

Donde

$$Q_1 = \sqrt{\frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta} = \frac{n_1 \omega}{c} \sqrt{1 - \sin^2 \theta},$$

$$Q_1 = \frac{n_1 \omega}{c} |\cos \theta|. \quad (4.3.4)$$

Se analiza ahora las tres posibilidades en el material "2".

Caso 1: $n_2 \in \mathbb{R}, \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 \geq 0$.

En este caso

$$\frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta = \frac{\omega^2}{c^2} [n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta] \geq 0,$$

es decir:

$$n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta \geq 0, \quad (4.3.5)$$

en donde $n_2 \in \mathbb{R}$.

Tomando $z = \frac{a+b}{2}$ y $z_0 = \frac{a}{2}$

$$\Psi\left(\frac{a+b}{2}\right) = \mathbb{M}_2\left(\frac{b}{2}\right) \Psi\left(\frac{a}{2}\right), \quad (4.3.6)$$

siendo

$$\mathbb{M}_2\left(\frac{b}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) & \frac{\mu_2}{Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \\ -\frac{Q_2}{\mu_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) & \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \end{bmatrix}, \quad (4.3.7)$$

y

$$Q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}. \quad (4.3.8)$$

Así,

$$\Psi \left(\frac{a+b}{2} \right) = \mathbb{M}_2 \left(\frac{b}{2} \right) \mathbb{M}_1 \left(\frac{a}{2} \right) \Psi(0) = \mathbb{M}_T(a, b) \Psi(0),$$

donde

$$\mathbb{M}_T(a, b) = \mathbb{M}_2 \left(\frac{b}{2} \right) \mathbb{M}_1 \left(\frac{a}{2} \right), \quad (4.3.9)$$

es la matriz que “conecta” el vector Ψ del medio “1” con el vector Ψ del medio “2”. Se calcula $\mathbb{M}_T(a, b)$.

$$\mathbb{M}_T = \begin{bmatrix} \cos(Q_2 \frac{b}{2}) & \frac{\mu_2}{Q_2} \sin(Q_2 \frac{b}{2}) \\ -\frac{\mu_2}{Q_2} \sin(Q_2 \frac{b}{2}) & \cos(Q_2 \frac{b}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(Q_1 \frac{a}{2}) & \frac{\mu_1}{Q_1} \sin(Q_1 \frac{a}{2}) \\ -\frac{\mu_1}{Q_1} \sin(Q_1 \frac{a}{2}) & \cos(Q_1 \frac{a}{2}) \end{bmatrix}.$$

Multiplicando se obtiene:

$$\mathbb{M}_T(a, b) = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad (4.3.10)$$

donde

$$p = \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{\mu_2 Q_1}{\mu_1 Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (4.3.11)$$

$$q = \frac{\mu_1}{Q_1} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \frac{\mu_2}{Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (4.3.12)$$

$$r = -\frac{Q_2}{\mu_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{Q_1}{\mu_1} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (4.3.13)$$

$$s = -\frac{\mu_1 Q_2}{\mu_2 Q_1} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right). \quad (4.3.14)$$

Se toma ahora $z = -\frac{a}{2}$ y $z_0 = 0$ en (4.2.16). Entonces

$$\Psi\left(-\frac{a}{2}\right) = \mathbb{M}_1\left(-\frac{a}{2}\right) \Psi(0).$$

Haciendo $z = -\frac{a+b}{2}$ y $z_0 = -\frac{a}{2}$ en (4.2.16) se encuentra que:

$$\Psi\left(-\frac{a+b}{2}\right) = \mathbb{M}_2\left(-\frac{b}{2}\right) \Psi\left(-\frac{a}{2}\right) = \mathbb{M}_2\left(-\frac{b}{2}\right) \mathbb{M}_1\left(-\frac{a}{2}\right) \Psi(0).$$

Luego,

$$\Psi\left(-\frac{a+b}{2}\right) = \mathbb{M}_T(-a, -b) \Psi(0), \quad (4.3.15)$$

donde, de acuerdo con (4.3.11), (4.3.12), (4.3.13) y (4.3.14):

$$\mathbb{M}_T(-a, -b) = \begin{bmatrix} p & -q \\ -r & s \end{bmatrix}. \quad (4.3.16)$$

Sea \hat{T}_d el operador de traslación en un periodo d y se hace actuar \hat{T}_d sobre la ecuación para $E(z)$

$$\hat{T}_d \left[-\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d}{dz} \frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) + \frac{k_x^2}{\mu(z)\varepsilon(z)} E(z) \right] = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{T}_d E(z).$$

Puesto que el sistema en estudio es periódico con periodo d , entonces $\mu(z+d) = \mu(z)$ y $\varepsilon(z+d) = \varepsilon(z)$. En consecuencia

$$-\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d}{dz} \frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} \hat{T}_d E(z) + \frac{k_x^2}{\mu(z)\varepsilon(z)} \hat{T}_d E(z) = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \hat{T}_d E(z),$$

es decir, $\hat{T}_d E(z)$ y $E(z)$ satisfacen la misma ecuación diferencial, y deben diferenciarse, a lo sumo, en una constante igual al autovalor de \hat{T}_d , es decir:

$$\hat{T}_d E(z) = E(z+d) = \lambda E(z). \quad (4.3.17)$$

$E(z)$ debe ser, además de la solución para los modos TE, también autofunción del operador de traslación. En consecuencia:

$$\hat{T}_d \left[\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z) \right] = \lambda \frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} E(z). \quad (4.3.18)$$

Por lo tanto,

$$\hat{T}_d \Psi(z) = \lambda \Psi(z) = \Psi(z + d). \quad (4.3.19)$$

Puesto que la traslación en un periodo no debe cambiar la amplitud del campo, entonces λ debe ser un factor de fase de amplitud unitaria. Es decir,

$$\lambda = e^{i\phi}. \quad (4.3.20)$$

La magnitud ϕ debe ser una función del periodo d , o sea, $\phi = \phi(d)$.

De esta manera,

$$\hat{T}_{d+d'} \Psi(z) = e^{i\phi(d+d')} \Psi(z) = \hat{T}_d \hat{T}_{d'} \Psi(z) = e^{i\phi(d)} e^{i\phi(d')} \Psi(z).$$

Luego, $\phi(d) + \phi(d') = \phi(d + d')$, o sea, ϕ es una función lineal de d . Se propone entonces $\phi(d) = \kappa d$, siendo κ una constante compleja, la cual se vuelve real si hacemos uso de la periodicidad. Para $N \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$\Psi(z + Nd) = \lambda \Psi(z) = e^{iN\kappa d} \Psi(z), \quad (4.3.21)$$

en donde $N\kappa d = 2m\pi$, $m \in \mathbb{N}$.

Haciendo $N = 1$ y $z = -\frac{a+b}{2} = \frac{-d}{2}$ en (4.3.21), se encuentra:

$$\Psi \left(\frac{a+b}{2} \right) = e^{i\kappa d} \Psi \left(-\frac{a+b}{2} \right), \quad (4.3.22)$$

o bien

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \Psi(0) = \lambda \begin{bmatrix} p & -q \\ -r & s \end{bmatrix} \Psi(0), \quad (4.3.23)$$

$$\lambda = e^{i\kappa d}. \quad (4.3.24)$$

Así:

$$\begin{bmatrix} p(1 - \lambda) & q(1 + \lambda) \\ r(1 + \lambda) & s(1 - \lambda) \end{bmatrix} \Psi(0) = 0. \quad (4.3.25)$$

El sistema (4.3.25) tiene solución sólo si

$$\det \begin{bmatrix} p(1 - \lambda) & q(1 + \lambda) \\ r(1 + \lambda) & s(1 - \lambda) \end{bmatrix} = 0.$$

Luego,

$$ps(1 - \lambda)^2 - qr(1 + \lambda)^2 = 0,$$

que lleva a:

$$(ps - qr)(1 + \lambda^2) = 2\lambda(ps + qr).$$

Pero

$$ps - qr = \det[\mathbb{M}_T] = 1.$$

Luego

$$\frac{1}{2}[\lambda + \lambda^{-1}] = ps + qr,$$

de donde, teniendo en cuenta (4.3.24),

$$\cos(\kappa d) = ps + qr. \quad (4.3.26)$$

Esta es la ecuación para calcular la relación de dispersión $\omega = \omega(\kappa)$ correspondiente a los modos TE en el caso 1.

Caso 2: $n_2 \in \mathbb{R}, \frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - k_x^2 < 0.$

En este caso

$$\frac{n_2^2 \omega^2}{c^2} - \frac{n_1^2 \omega^2}{c^2} \sin^2 \theta = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 [n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta] < 0,$$

o sea,

$$n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta < 0, \quad (4.3.27)$$

donde $n_2 \in \mathbb{R}$.

Tomando $z = \frac{a+b}{2}$ y $z_0 = \frac{a}{2}$ en (4.2.20),

$$\Psi \left(\frac{a+b}{2} \right) = \mathbb{M}_2 \left(\frac{b}{2} \right) \Psi \left(\frac{a}{2} \right), \quad (4.3.28)$$

con

$$\mathbb{M}_2 \left(\frac{b}{2} \right) = \begin{bmatrix} \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) & \frac{\mu_2}{Q_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \\ \frac{Q_2}{\mu_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) & \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \end{bmatrix}. \quad (4.3.29)$$

En la expresión anterior

$$Q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}. \quad (4.3.30)$$

Así,

$$\Psi \left(\frac{a+b}{2} \right) = \mathbb{M}_2 \left(\frac{b}{2} \right) \mathbb{M}_1 \left(\frac{a}{2} \right) \Psi(0) = \mathbb{M}_T(a, b) \Psi(0),$$

donde

$$\mathbb{M}_T(a, b) = \begin{bmatrix} \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) & \frac{\mu_2}{Q_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \\ \frac{Q_2}{\mu_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) & \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) & \frac{\mu_1}{Q_1} \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) \\ -\frac{Q_1}{\mu_1} \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) & \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) \end{bmatrix}.$$

En este caso, al igual que en el anterior, $\det[\mathbb{M}_T] = 1$ y

$$\mathbb{M}_T(a, b) = \begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix}, \quad (4.3.31)$$

con

$$p = \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) - \frac{\mu_2 Q_1}{\mu_1 Q_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right), \quad (4.3.32)$$

$$q = \frac{\mu_1}{Q_1} \cosh\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \frac{\mu_2}{Q_2} \sinh\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (4.3.33)$$

$$r = \frac{Q_2}{\mu_2} \sinh\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{Q_1}{\mu_1} \cosh\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (4.3.34)$$

$$s = \frac{\mu_1 Q_2}{\mu_2 Q_1} \sinh\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \cosh\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right). \quad (4.3.35)$$

Haciendo ahora $z = -\frac{a+b}{2}$ y $z_0 = -\frac{a}{2}$ en (4.2.21) se encuentra:

$$\begin{aligned} \Psi\left(-\frac{a+b}{2}\right) &= \mathbb{M}_2\left(-\frac{b}{2}\right) \Psi\left(-\frac{a}{2}\right) \Psi(0), \\ &= \mathbb{M}_T(-a, -b) \Psi(0). \end{aligned}$$

Nótese que

$$\mathbb{M}_T(-a, -b) = \begin{bmatrix} p & -q \\ -r & s \end{bmatrix}, \quad (4.3.36)$$

que es análoga a la expresión (4.3.16). En virtud de (4.3.22)

$$\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} \Psi(0) = e^{i\kappa d} \begin{bmatrix} p & -q \\ -r & s \end{bmatrix} \Psi(0),$$

lo cual conduce a la misma relación de dispersión (4.3.26) del caso "1", pero con p, q, r y s dados por (4.3.32), (4.3.33), (4.3.34) y (4.3.35).

Caso 3: $n_2 \in \mathbb{I}$.

En este caso

$$n_2^2 < 0. \tag{4.3.37}$$

Las expresiones (4.3.26), (4.3.32), (4.3.33), (4.3.34) y (4.3.35) son válidas en este caso, pero se debe tener en cuenta que:

$$Q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_{2I}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta}, \tag{4.3.38}$$

siendo

$$n_{2I} = \text{Im}(n_2). \tag{4.3.39}$$

Capítulo 5

Solución de las ecuaciones para los modos TM mediante el método de la matriz transferencia en un cristal fotónico unidimensional.

De acuerdo con (3.1.38), la ecuación diferencial para el campo magnético asociado a los modos TM es:

$$-\frac{1}{\mu(z)} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{dH(z)}{dz} \right] + \frac{k_x^2}{\mu\varepsilon} H(z) = \frac{\omega^2}{c^2} H(z).$$

Nótese que (3.1.38) es idéntica a la ecuación (3.1.27) para el campo eléctrico asociado a los modos TE. Reemplazando E por H e intercambiando μ con ε . En consecuencia, todas las conclusiones anteriores para los modos TE son también válidas para los modos TM efectuando los cambios adecuados.

De acuerdo con esto, tanto $H(z)$ como $\frac{1}{\varepsilon(z)} \frac{d}{dz} H(z)$ son funciones continuas en \mathbb{R} .

Al igual que para los modos TE, pueden ocurrir tres situaciones en un medio n , μ y ε independientes de z . Estas son:

Caso 1: $n \in \mathbb{R}$, $\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2 \geq 0$.

En este caso

$$H(z) = A \cos[Q(z - z_0)] + \frac{\varepsilon}{Q} B \sin[Q(z - z_0)]. \quad (5.0.1)$$

Definiendo

$$\Phi(z) = \begin{bmatrix} H(z) \\ \frac{1}{\varepsilon} \frac{d}{dz} H(z) \end{bmatrix}, \quad (5.0.2)$$

puede verse que

$$\Phi = \mathbb{M}(z - z_0)\Phi(z_0), \quad (5.0.3)$$

donde

$$\mathbb{M}(z - z_0) = \begin{bmatrix} \cos[Q(z - z_0)] & \frac{\varepsilon}{Q} \sin[Q(z - z_0)] \\ -\frac{Q}{\varepsilon} \sin[Q(z - z_0)] & \cos[Q(z - z_0)] \end{bmatrix}, \quad (5.0.4)$$

y

$$Q = \sqrt{\frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2}. \quad (5.0.5)$$

Caso 2: $n \in \mathbb{R}, \frac{n^2\omega^2}{c^2} - k_x^2 < 0$.

En este caso

$$H(z) = A \cosh[Q(z - z_0)] + \frac{\varepsilon}{Q} B \sinh[Q(z - z_0)]. \quad (5.0.6)$$

Análogamente

$$\Phi = \mathbb{M}(z - z_0)\Phi(z_0),$$

donde

$$\mathbb{M}(z - z_0) = \begin{bmatrix} \cosh[Q(z - z_0)] & \frac{\varepsilon}{Q} \sinh[Q(z - z_0)] \\ \frac{Q}{\varepsilon} \sinh[Q(z - z_0)] & \cosh[Q(z - z_0)] \end{bmatrix}, \quad (5.0.7)$$

y

$$Q = \sqrt{k_x^2 - \frac{n^2\omega^2}{c^2}}. \quad (5.0.8)$$

Caso 3: $n \in \mathbb{I}$

Las expresiones para este caso son las dadas por (5.0.3), (5.0.6) y (5.0.7), pero ahora

$$Q = \sqrt{\frac{n_I^2 \omega^2}{c^2} + k_x^2}, \quad (5.0.9)$$

donde

$$n_I = \text{Im}(n). \quad (5.0.10)$$

Analizando ahora la solución para los modos TM en el cristal fotónico 1D. La ecuación trascendente para calcular la relación $\omega = \omega(\kappa)$ es

$$\cos(\kappa d) = ps + qr. \quad (5.0.11)$$

Las funciones p, q, r y s se calculan de acuerdo a los tres casos vistos anteriormente.

Caso 1: $n \in \mathbb{R}, n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta \geq 0.$

En este caso:

$$p = \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{\varepsilon_2 Q_1}{\varepsilon_1 Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (5.0.12)$$

$$q = \frac{\varepsilon_1}{Q_1} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \frac{\varepsilon_2}{Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (5.0.13)$$

$$r = -\frac{Q_2}{\varepsilon_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{Q_1}{\varepsilon_1} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (5.0.14)$$

$$s = -\frac{\varepsilon_1 Q_2}{\varepsilon_2 Q_1} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right), \quad (5.0.15)$$

siendo

$$Q_1 = \frac{n_1 \omega}{c} |\cos \theta|, \quad (5.0.16)$$

$$Q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta}. \quad (5.0.17)$$

Caso 2: $n \in \mathbb{R}, n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta < 0$.

Aquí se tiene que

$$p = \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) - \frac{\varepsilon_2 Q_1}{\varepsilon_1 Q_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right), \quad (5.0.18)$$

$$q = \frac{\varepsilon_1}{Q_1} \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) + \frac{\varepsilon_2}{Q_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right), \quad (5.0.19)$$

$$r = \frac{Q_2}{\varepsilon_2} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) - \frac{Q_1}{\varepsilon_1} \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right), \quad (5.0.20)$$

$$s = \frac{\varepsilon_1 Q_2}{\varepsilon_2 Q_1} \sinh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \sin \left(Q_1 \frac{a}{2} \right) + \cosh \left(Q_2 \frac{b}{2} \right) \cos \left(Q_1 \frac{a}{2} \right), \quad (5.0.21)$$

donde Q_1 viene dado por (5.0.16) y

$$Q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_1^2 \sin^2 \theta - n_2^2}. \quad (5.0.22)$$

Caso 3: $n \in \mathbb{I}$

En este caso las expresiones para p, q, r y s vienen dadas por (5.0.18), (5.0.19), (5.0.20) y (5.0.21), pero con

$$Q_2 = \frac{\omega}{c} \sqrt{n_{2I}^2 + n_1^2 \sin^2 \theta}, \quad (5.0.23)$$

siendo

$$n_{2I} = \text{Im}(n_2). \quad (5.0.24)$$

Capítulo 6

Propagación de pulsos ultra cortos en cristales fotónicos

Índice de refracción y dependencia con la intensidad

En óptica, el índice de refracción se define como la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la misma en un medio material

$$n_0 = \frac{c}{v}, \quad (6.1.1)$$

siendo c la velocidad de la luz en el vacío y v la correspondiente velocidad en el medio. Se ha hecho $n = n_0$ para aclarar que éste es el índice de refracción en condiciones de campos electromagnéticos con baja intensidad, es decir, es el índice de refracción en condiciones normales. Para materiales convencionales a temperatura constante éste valor es invariante, teniéndose para el caso del aire a temperatura ambiente un valor muy aproximado al del vacío.

Cuando la intensidad de la radiación incidente en el material toma valores apreciables, como es el caso observado en los haces de luz láser, el índice de refracción puede variar de forma proporcional a la intensidad de la onda incidente y la respuesta no lineal de estos medios es introducida a través de la ecuación constitutiva que relaciona el vector desplazamiento eléctrico \vec{D} con el campo eléctrico \vec{E} y la correspondiente polarización eléctrica \vec{P}

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \varepsilon_0 \vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{P}(\vec{r}, t), \quad (6.1.2)$$

siendo ε_0 la permitividad del vacío. En forma general para tener presente intensidades más

grandes de radiación, la polarización eléctrica se expresa como una serie de potencias del campo eléctrico

$$P_i = P_i^{(1)} + P_i^{(2)} + P_i^{(3)} + \dots = \varepsilon_0 \sum_j \chi_{ij}^{(1)} E_j + \varepsilon_0 \sum_{j,k} \chi_{ijk}^{(2)} E_j E_k + \varepsilon_0 \sum_{j,k,l} \chi_{ijkl}^{(3)} E_j E_k E_l + \dots, \quad (6.1.3)$$

donde $P_i^{(j)}$ es una componente del vector polarización de orden j , y $\chi_{ij}^{(1)}$, $\chi_{ijk}^{(2)}$ y $\chi_{ijkl}^{(3)}$ son las susceptibilidades ópticas de primer, segundo y tercer orden, respectivamente.

En la ecuación (6.1.3) el tercer término produce una contribución a la polarización en la frecuencia del campo incidente, contribuyendo al índice de refracción no lineal experimentado por una onda con esta frecuencia, el cual se describe en muchos casos por la relación¹³

$$n_2 = n_0 + n_{NL}I, \quad (6.1.4)$$

donde n_0 es el índice de refracción a campos bajos definido por la ecuación (6.1.1) y n_{NL} es el índice de refracción no lineal que depende proporcionalmente de la intensidad I del campo aplicado

$$I = \frac{n_0 c}{2\pi} |E|^2. \quad (6.1.5)$$

La relación entre el índice de refracción no lineal n_{NL} y la susceptibilidad óptica de tercer orden $\chi^{(3)}$ está dada por la ecuación¹³

$$n_{NL} = \frac{12\pi^2}{n_0 c} \chi^{(3)}. \quad (6.1.6)$$

Dinámica de propagación de pulsos.

Los pulsos electromagnéticos reales tienen una duración finita que implica su descomposición espectral dentro de cierto intervalo finito de frecuencias. Dichos pulsos se representan matemáticamente como una suma de muchas ondas planas que satisfacen la ecuación de onda de Maxwell

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{i(\omega t - kz)} dk, \quad (6.2.1)$$

siendo $E(k)$ la transformada de Fourier, en algún instante de tiempo t , del pulso $E(z, t)$ y $|E(k)|^2$ el espectro de Fourier del pulso. Los pulsos se caracterizan por su frecuencia central ω_0 , su vector de onda k_0 , y por su ancho espectral $\Delta\omega$ alrededor de ω_0 . Para estudiar la evolución de un pulso en el tiempo se expande su relación de dispersión $\omega(k)$ en serie de Taylor alrededor de k_0

$$\omega(k) = \omega_0 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial k} \right)_{k_0} (k - k_0) + \dots, \quad (6.2.2)$$

lo que al ser sustituido en la ecuación (6.2.1) y despreciando los términos de orden superior

$$E(z, t) \simeq e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} E(k) e^{i[(\partial\omega/\partial k)_{k_0} t - z](k - k_0)} dk, \quad (6.2.3)$$

La integral que aparece en (6.2.3) es una función $A(z, t)$ que sólo depende de la variable compuesta $(\partial\omega/\partial k)_{k_0} t - z$ y por tanto es una función envolvente, con lo cual, el pulso puede ser descrito como

$$E(z, t) = A(z, t) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}. \quad (6.2.4)$$

Para la situación inicial del pulso, se admite que la función envolvente del pulso tiene inicialmente un perfil gaussiano

$$E(z, 0) = E_0 \exp \left[-\frac{(z - z_0)^2}{2\Delta z^2} \right], \quad (6.2.5)$$

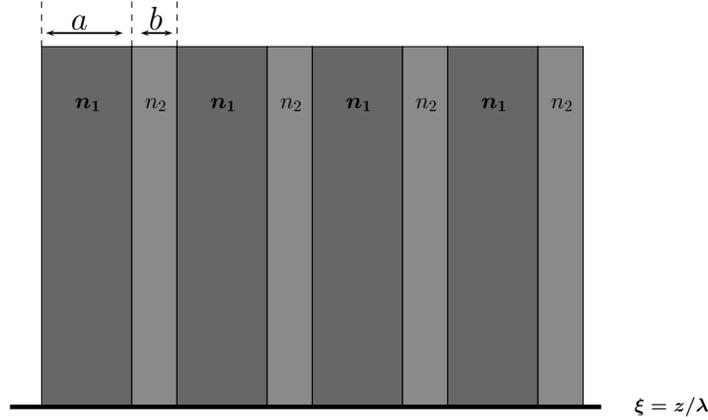


Figura 6.1: Arreglo unidimensional de capas dieléctricas alternadas con índices de refracción n_1 y n_2 y periodo $d = a + b$. Fuente: Adaptado de M. Scalora, J. Dowling, C. Bowden and M. Bloemer. *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1368 (1994).

con E_0 la amplitud máxima, z_0 la posición inicial del centro del pulso y Δz un parámetro relacionado con el ancho a la mitad de la amplitud máxima.

Interruptor óptico de pulsos electromagnéticos en materiales fotónicos con respuesta no lineal.

La experiencia indica que si un arreglo periódico de muchas capas de anchos a y b de materiales dieléctricos con índices de refracción n_1 y n_2 , bajo las condiciones $n_2 > n_1$, $a = \lambda_0/4n_1$ y $b = \lambda_0/4n_2$, con λ_0 la longitud de onda en el vacío, se ordenan de forma alternada (figura 6.1), un rango de longitudes de onda λ serán reflejadas, es decir, la propagación de estas ondas no será permitida a través del medio;⁴⁶ fenómeno conocido como “*banda fotónica prohibida*” (**PBG**).

La dinámica de pulsos electromagnéticos en sistemas como los descritos ha sido llevado a cabo en trabajos como los de Scalora¹ y Cavalcanti,¹¹ mostrando la existencia de una brecha fotónica que depende de la diferencia entre los índices de refracción n_1 y n_2 de las capas

que conforman el medio. Este resultado permite intuir, que al tener control sobre dicha diferencia, se podría controlar las longitudes de onda que puedan pasar a través del material, obteniéndose un sistema que se comportaría como un interruptor óptico.

Por lo tanto, la inclusión de capas con índice de refracción n_2 que satisfagan propiedades no lineales, permitiría controlar la diferencia entre los índices de refracción de las componentes del medio material. Scalora et al.,¹⁴ realizó un cálculo numérico aproximado basado en este hecho, mostrando el aumento en el ancho de la banda prohibida del material. Las aplicaciones que estos dispositivos tienen conllevan al diseño de reflectores dieléctricos más eficientes que pueden confinar la radiación en canales (guías de onda) o defectos localizados (resonadores) con tamaños comparables a la longitud de onda de la luz.³³

Capítulo 7

Resultados

Cálculo de la relación de dispersión

Partiendo de las ecuaciones 4.3.26, 4.3.11, 4.3.12, 4.3.13 y 4.3.14 se tiene:

$$\cos(\kappa d) = ps + qr,$$

en donde, para este caso:

$$p = \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{\mu_2 Q_1}{\mu_1 Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right),$$

$$q = \frac{\mu_1}{Q_1} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \frac{\mu_2}{Q_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right),$$

$$r = -\frac{Q_2}{\mu_2} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) - \frac{Q_1}{\mu_1} \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right),$$

$$s = -\frac{\mu_1 Q_2}{\mu_2 Q_1} \sin\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \sin\left(Q_1 \frac{a}{2}\right) + \cos\left(Q_2 \frac{b}{2}\right) \cos\left(Q_1 \frac{a}{2}\right).$$

Se considera $\mu_1 = \mu_2 = 1$ (material “no magnético”) y $\alpha = Q_1 \frac{a}{2}$, $\beta = Q_2 \frac{b}{2}$, entonces:

$$\begin{aligned} ps + qr &= \left(\cos(\beta) \cos(\alpha) - \frac{Q_1}{Q_2} \sin(\beta) \sin(\alpha) \right) \left(-\frac{Q_2}{Q_1} \sin(\beta) \sin(\alpha) + \cos(\beta) \cos(\alpha) \right) \\ &+ \left(\frac{1}{Q_1} \cos(\beta) \sin(\alpha) + \frac{1}{Q_2} \sin(\beta) \cos(\alpha) \right) \left(-Q_2 \sin(\beta) \cos(\alpha) - Q_1 \cos(\beta) \sin(\alpha) \right). \end{aligned}$$

Operando se obtiene:

$$ps + qr = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ - 2 \left(\frac{Q_1^2 + Q_2^2}{Q_1 Q_2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta,$$

pero

$$Q_1 = \frac{n_1 \omega}{c}, \quad \text{y} \quad Q_2 = \frac{n_2 \omega}{c},$$

entonces:

$$ps + qr = \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta - \sin^2 \alpha \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha \sin^2 \beta \\ - 2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta.$$

Factorizando

$$ps + qr = \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) + \sin^2 \alpha (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) - 2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta,$$

$$ps + qr = \cos^2 \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - \sin^2 \alpha (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - 2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2} \right) \cos \alpha \sin \alpha \cos \beta \sin \beta,$$

$$ps + qr = (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) - 2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2} \right) (\cos \alpha \sin \alpha) (\cos \beta \sin \beta).$$

De acuerdo a las identidades (9.0.4) y (9.0.5), se obtiene:

$$ps + qr = \underbrace{(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)}_{\cos(2\alpha)} \underbrace{(\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)}_{\cos(2\beta)} - 2 \left(\frac{n_1^2 + n_2^2}{n_1 n_2} \right) \underbrace{(\cos \alpha \sin \alpha)}_{\frac{1}{2} \sin(2\alpha)} \underbrace{(\cos \beta \sin \beta)}_{\frac{1}{2} \sin(2\beta)},$$

pero

$$\alpha = Q_1 \frac{a}{2}, \quad \beta = Q_2 \frac{b}{2}, \quad Q_1 = \frac{n_1 \omega}{c} \quad \text{y} \quad Q_2 = \frac{n_2 \omega}{c},$$

Entonces, finalmente:

$$f(\omega) = ps + qr = \cos \left(\frac{\omega n_1 a}{c} \right) \cos \left(\frac{\omega n_2 b}{c} \right) - \frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1 n_2} \sin \left(\frac{\omega n_1 a}{c} \right) \sin \left(\frac{\omega n_2 b}{c} \right). \quad (7.1.1)$$

La ecuación (7.1.1) es la relación de dispersión $f(\omega)$ de un cristal fotónico unidimensional compuesto por capas alternadas de materiales con índices de refracción n_1 y n_2 , la cual fue obtenida en el artículo de Scalora.¹

Gráficos y análisis

Para la obtención de las gráficas, se hizo uso del programa *Wolfram Mathematica 11.3*. Teniendo en cuenta que para un arreglo periódico de muchas capas de anchos a y b de materiales dieléctricos con índices de refracción n_1 y n_2 (figura 6.1), bajo las condiciones $n_2 > n_1$, $a = \lambda_0/4n_1$ y $b = \lambda_0/4n_2$, con λ_0 la longitud de onda en el vacío, la reflexión es prácticamente la unidad y por lo tanto las longitudes de onda más cortas no se transmitirán,⁴⁶ entonces, es necesario representar la transmisión $T(\omega)$ y reflexión $R(\omega)$, como funciones de paso unitario.

En el artículo de Scalora,¹ la gráfica que corresponde a la figura 2 de dicho artículo es consecuencia de la ecuación:

$$T(\omega) = 1 - \theta(1 - |f(\omega)|), \quad (7.2.1)$$

en donde θ representa la función de paso unitario, la que se grafica bajo los siguientes parámetros:

- $n_1 = 1$
- $n_2 = 1.41$ ó $n_2 = 1.7$
- ω está en unidades de $\frac{2\pi c}{nz}$

Al graficar la ecuación 7.2.1, fueron obtenidas las gráficas:

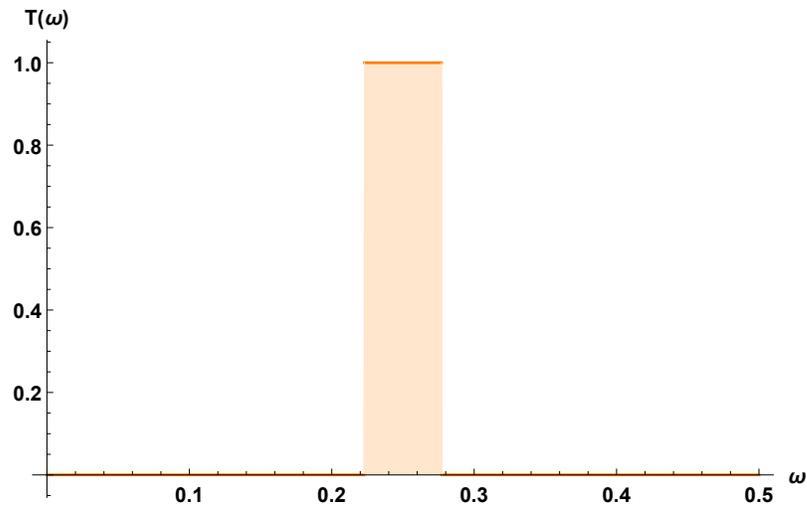


Figura 7.1: Gráfica de (7.2.1) con $n_2 = 1.41$. Fuente: este trabajo.

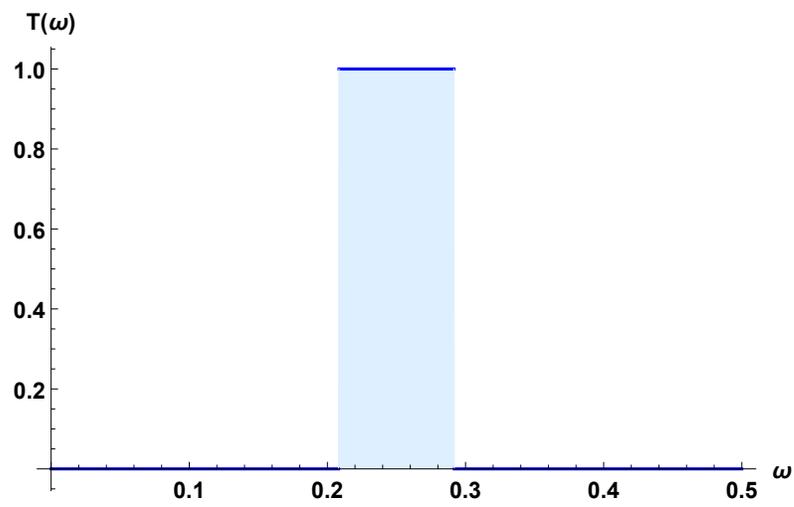


Figura 7.2: Gráfica de (7.2.1) con $n_2 = 1.7$. Fuente: este trabajo.

Las gráficas 7.1 y 7.2 no corresponden a lo esperado, dado que en las gráficas se ve claramente que corresponden a la reflexión mas no a la transmisión, por lo tanto la ecuación (7.2.1) será realmente:

$$R(\omega) = 1 - \theta(1 - |f(\omega)|). \quad (7.2.2)$$

Se conoce que:

$$T(\omega) + R(\omega) = 1,$$

entonces, $T(\omega)$ es realmente:

$$T(\omega) = \theta(1 - |f(\omega)|). \quad (7.2.3)$$

La ecuación (7.2.3) se graficó obteniéndose las siguientes gráficas:

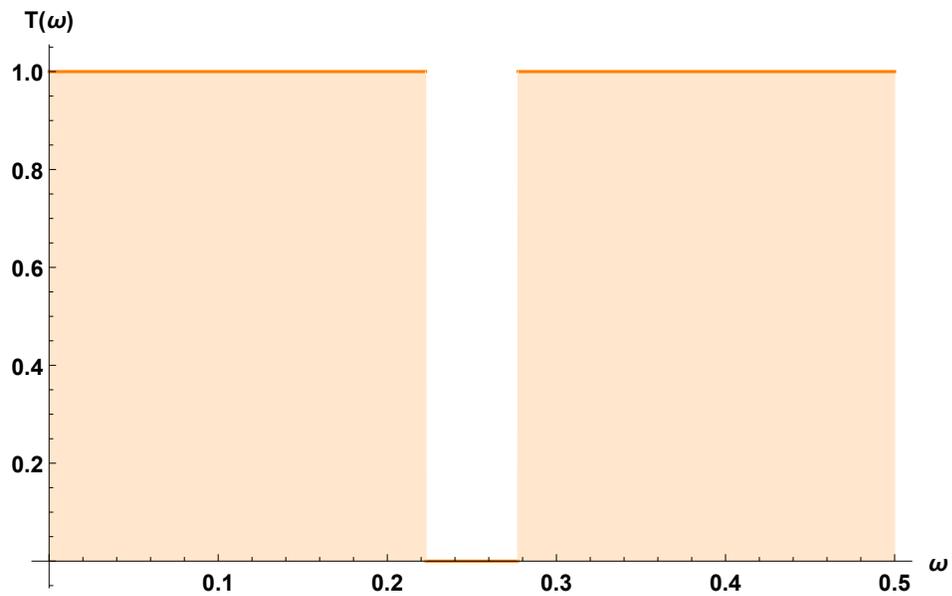


Figura 7.3: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$. Fuente: este trabajo.

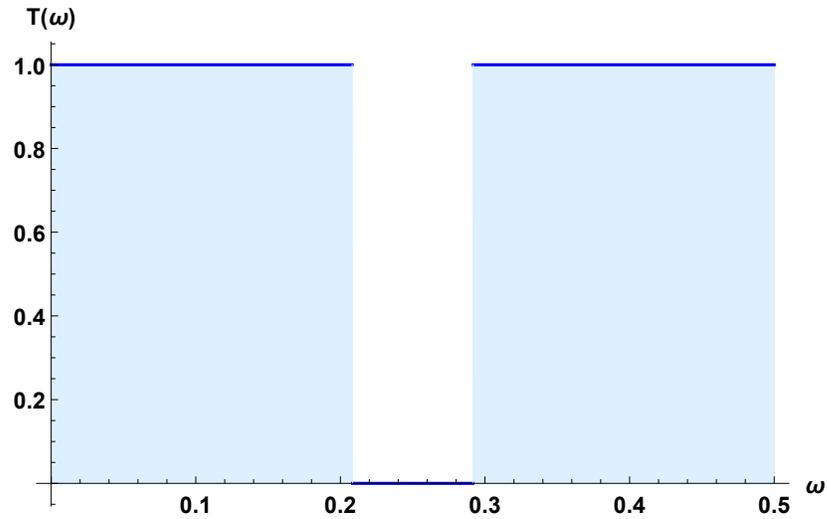


Figura 7.4: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$. Fuente: este trabajo.

las cuales al superponerse generan la siguiente gráfica:

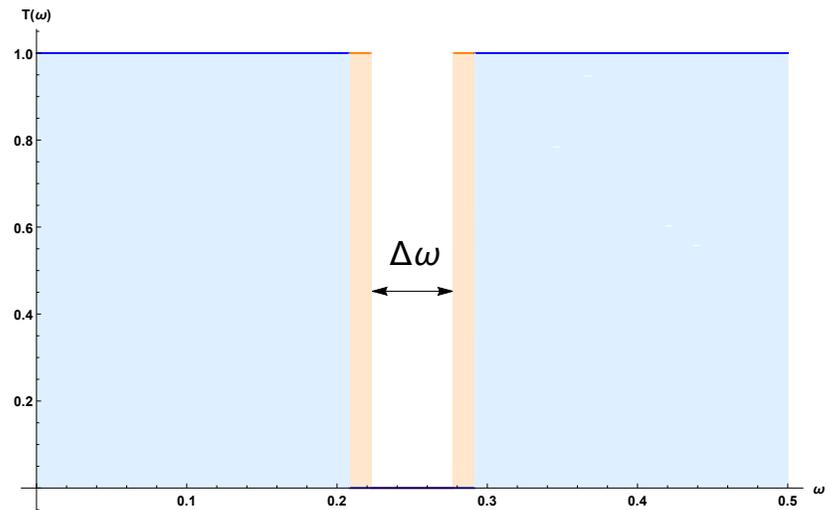


Figura 7.5: Gráfica de (7.2.3) con dos valores: $n_2 = 1.7$ (azul) y $n_2 = 1.41$ (naranja). Fuente: este trabajo.

La gráfica de la figura 7.5 coincide con la gráfica de la figura 2 del artículo de Scalora.¹

De las gráficas de las figuras 7.3 y 7.4, se observa que existe una brecha fotónica cuyo tamaño $\Delta\omega$ es proporcional a $\Delta n = n_2 - n_1$, entonces:

$$\Delta\omega \propto \Delta n \quad (7.2.4)$$

En un arreglo unidimensional (como el estudiado en el artículo), si uno de sus materiales tiene un índice de refracción no lineal (ecuación 6.1.4), n_2 dependerá del valor de la intensidad del campo aplicado, por lo tanto, puede que en un mismo material se tenga el valor de $n_2 = 1.41$ ó $n_2 = 1.7$.

Teniendo en cuenta lo anterior y que $\Delta\omega \propto \Delta n$, se entiende que, para un arreglo unidimensional con uno de sus índices de refracción no lineal (n_2), su valor de $\Delta\omega$ puede variar dependiendo de la intensidad del campo.

Por otro lado, si solamente se grafica $f(\omega)$ (Ecuación 7.1.1) bajo los parámetros mostrados anteriormente, se obtiene:

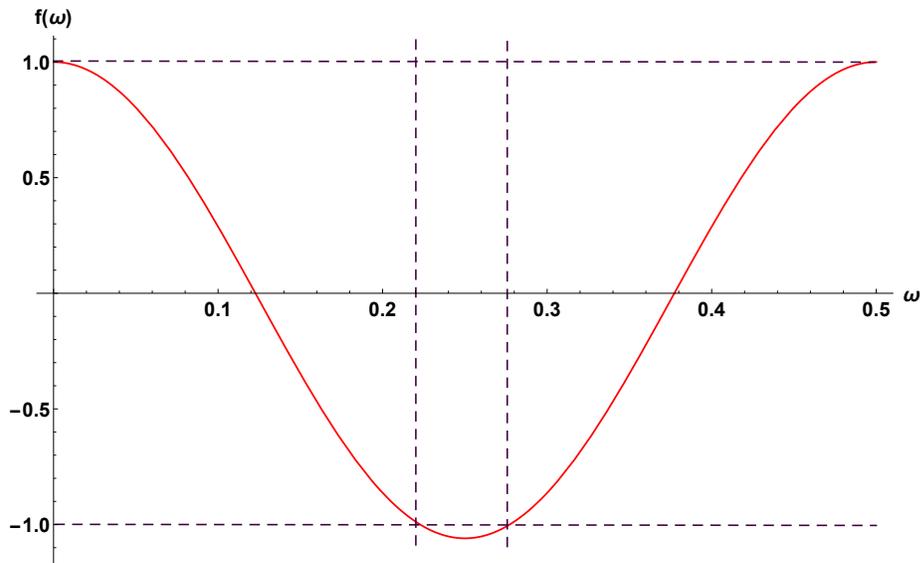


Figura 7.6: Gráfica de (7.1.1) con $n_2 = 1.41$. Fuente: este trabajo.

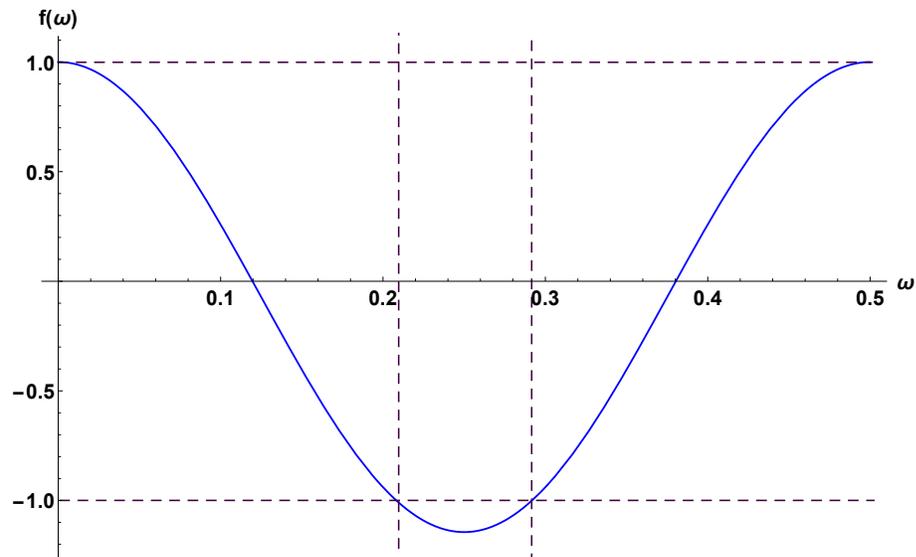


Figura 7.7: Gráfica de (7.1.1) con $n_2 = 1.7$. Fuente: este trabajo.

En las figuras 7.6 y 7.7, se evidencia que la función periódica tiene valores inferiores a -1, aproximadamente en los mismos rangos de ω en los cuales la transmisión es 0, como se pudo observar en las gráficas de las figuras 7.3 y 7.4. Lo anterior implica que hay reflexión total cuando $|f(\omega)| > 1$.

Aprovechando el método computacional, se hicieron cambios en el rango de ω y en el valor de los índices de refracción, lo que permitió realizar un análisis adicional al realizado en el artículo de Scalora.¹

Con los cambios realizados se encontró:

Existencia de más brechas fotónicas

Si se amplía el rango de ω y se grafica la ecuación 7.2.3, se obtiene:

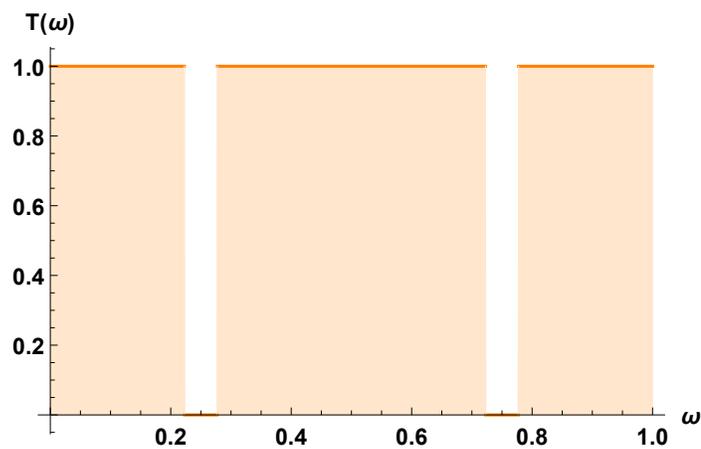


Figura 7.8: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$ y $0 < \omega < 1$. Fuente: este trabajo.

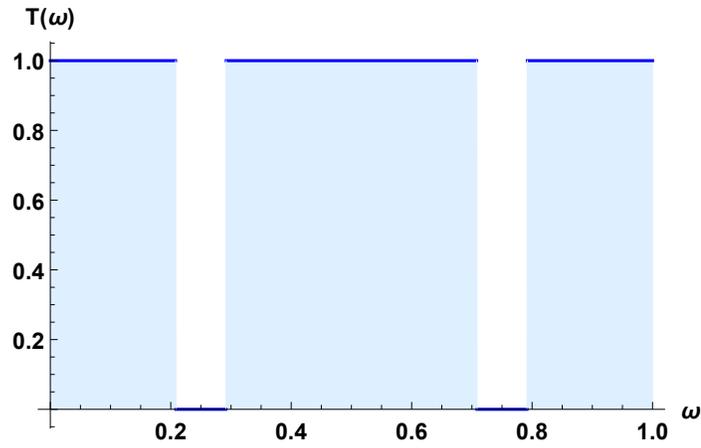


Figura 7.9: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$ y $0 < \omega < 1$. Fuente: este trabajo.

Se observa la existencia de otra brecha fotónica. Se nota que aparece una brecha fotónica aproximadamente cada 0.5 unidades de ω , por ejemplo si el rango es $0 < \omega < 2.5$, aparecerán 5 brechas, graficando con este rango se obtiene:

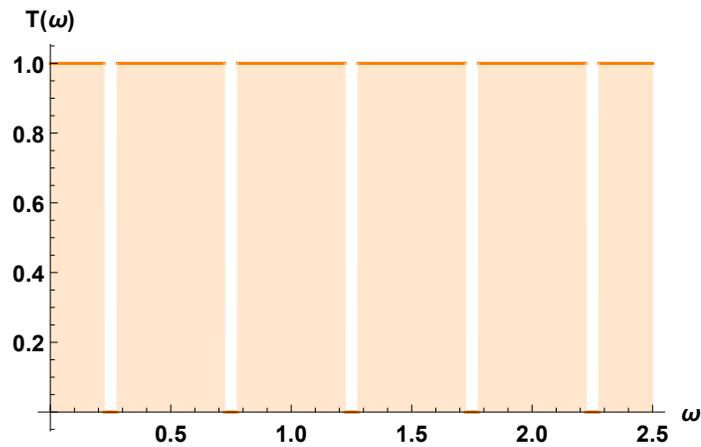


Figura 7.10: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$ y $0 < \omega < 2.5$. Fuente: este trabajo.

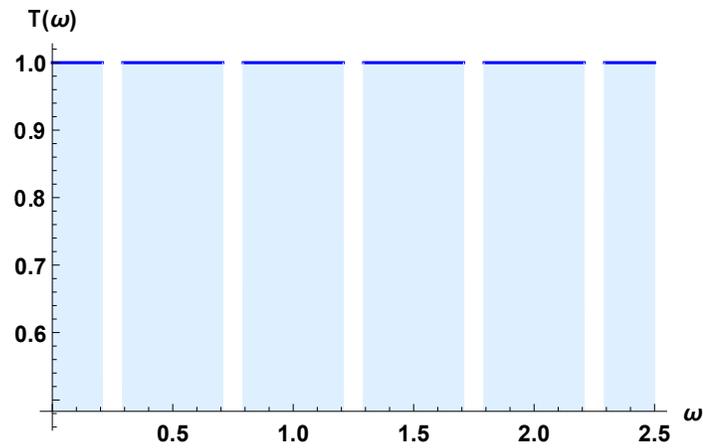


Figura 7.11: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$ y $0 < \omega < 2.5$. Fuente: este trabajo.

En las gráficas de las figuras 7.10 y 7.11 se observan las 5 brechas predichas, esto corrobora la idea de que hay una brecha fotónica cada 0.5 unidades de ω , sin embargo, se verifica esto, graficando con un rango mayor.

En la práctica, *Wolfram Mathematica 11.3*, no mostró las gráficas esperadas correspondientes a rangos de ω mayores a los anteriormente vistos, por lo tanto, se hizo uso del programa *Scilab 6.0.2* para verificar que aparecen brechas fotónicas cada 0.5 unidades de ω , en rangos más grandes.

Se grafica la ecuación (7.2.3) cuando $0 < \omega < 5$:

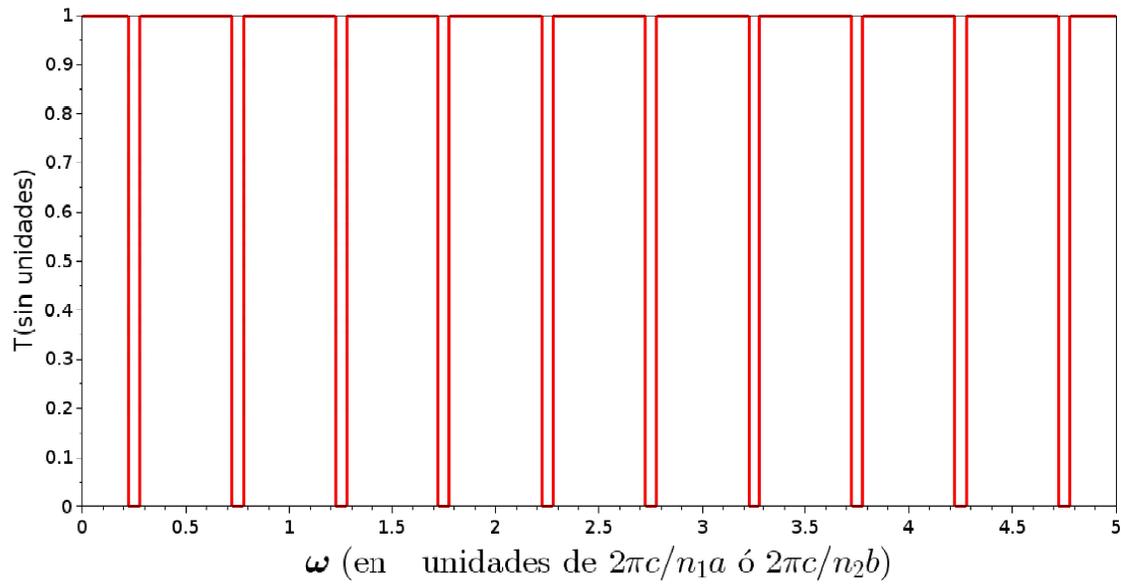


Figura 7.12: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.41$ y $0 < \omega < 5$. Fuente: este trabajo.

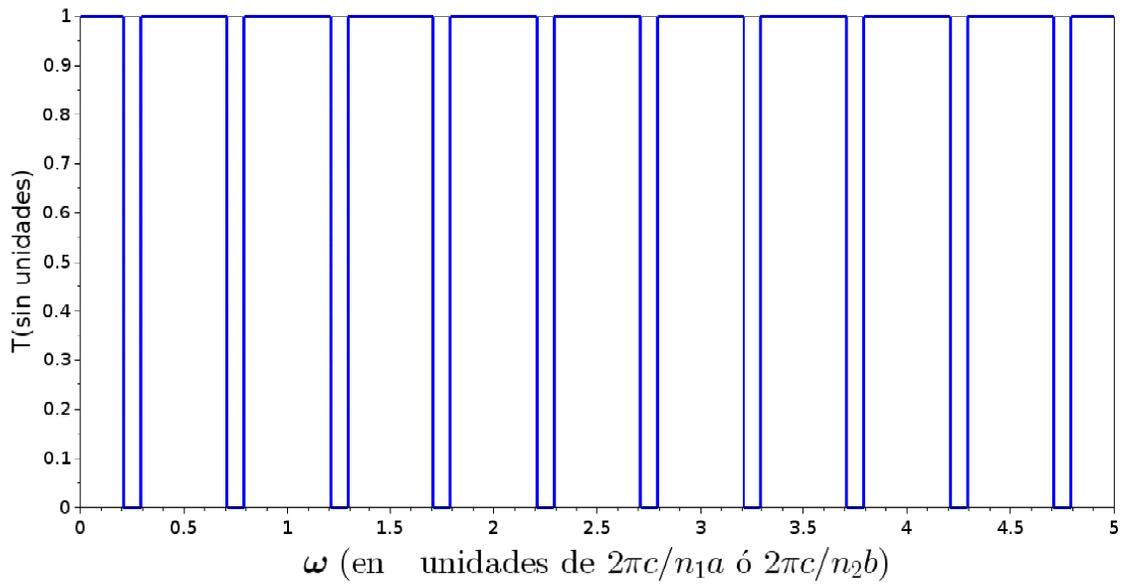


Figura 7.13: Gráfica de (7.2.3) con $n_2 = 1.7$ y $0 < \omega < 5$. Fuente: este trabajo.

Se observa que para $0 < \omega < 5$, aparecen 10 brechas fotónicas como se esperaba. Además, se destaca que las brechas fotónicas aparecen aproximadamente cada 0.5 unidades de ω para los dos valores de n_2 .

Valor de $\Delta\omega$

Scilab 6.0.2 ofrece la oportunidad de observar el valor aproximado de $\Delta\omega$ entonces:

- Para $\Delta n = 1.41 - 1 = 0.41$:

- **Primera brecha:**

$$\Delta\omega = 0.2772 - 0.2228 = 0.0544,$$

- **Segunda brecha:**

$$\Delta\omega = 0.7772 - 0.7228 = 0.0544,$$

- **Tercera brecha:**

$$\Delta\omega = 1.2772 - 1.2228 = 0.0544.$$

Se nota de los anteriores resultados que $\Delta\omega = 0.0544$ es constante para todas las brechas fotónicas, además que cada brecha aparece cada 0.5 unidades de ω . Se espera, por ejemplo, que para la décima brecha fotónica se den los siguientes valores:

$$\Delta\omega = 4.7772 - 4.7228 = 0.0544,$$

este valor es verificado en *Scilab 6.0.2* para la décima brecha.

Entonces, para cualquier brecha con $\Delta n = 1.41 - 1 = 0.41$ se tendrá $\Delta\omega = 0.0544$.

- Para $\Delta n = 1.7 - 1 = 0.7$

- **Primera brecha:**

$$\Delta\omega = 0.2917 - 0.2083 = 0.0834,$$

- **Segunda brecha:**

$$\Delta\omega = 0.7917 - 0.7083 = 0.0834,$$

- **Tercera brecha:**

$$\Delta\omega = 1.2917 - 1.2083 = 0.0834.$$

Se nota de los anteriores resultados que $\Delta\omega = 0.0834$ es constante para todas las brechas fotónicas, se espera, que para la décima brecha fotónica se den los siguientes valores:

$$\Delta\omega = 4.7917 - 4.7083 = 0.0834,$$

este valor es verificado en *Scilab 6.0.2* para la décima brecha.

Entonces, para cualquier brecha con $\Delta n = 1.7 - 1 = 0.7$ se tendrá $\Delta\omega = 0.0834$.

De los resultados anteriores se observa que $\Delta\omega$ se mantiene constante, en todas las brechas.

Para un mismo valor de Δn , existen diferentes valores de $\Delta\omega$

En *Scilab* se observa que:

- Para $\Delta n = 1.21 - 0.8 = 0.41$:

- **Primera brecha:**

$$\Delta\omega = 0.2827 - 0.2173 = 0.0654,$$

– **Segunda brecha:**

$$\Delta\omega = 0.7827 - 0.7173 = 0.0654.$$

Se compara este valor de $\Delta\omega=0.0654$ cuando $\Delta n = 1.21 - 0.8$ con el valor de $\Delta\omega = 0.0544$ cuando $\Delta n = 1.41 - 1$, se observa que a pesar de que Δn es igual, $\Delta\omega$ no lo es.

- Para $\Delta n = 1.5 - 0.8 = 0.7$:

– **Primera brecha:**

$$\Delta\omega = 0.2992 - 0.2008 = 0.0984,$$

– **Segunda brecha:**

$$\Delta\omega = 0.7992 - 0.7008 = 0.0984.$$

Se compara este valor de $\Delta\omega=0.0984$ cuando $\Delta n = 1.5 - 0.8 = 0.7$ con el valor de $\Delta\omega = 0.0834$ cuando $\Delta n = 1.7 - 1 = 0.7$, se observa nuevamente que a pesar de que Δn es igual, $\Delta\omega$ no lo es.

Los resultados anteriores indican que para un mismo valor de Δn habrán distintos valores de $\Delta\omega$, este dependerá de los valores que tomen n_1 y n_2 , es decir dependerá de los valores que conforman el cristal y del campo aplicado.

Se puede determinar el tamaño de una brecha fotónica manteniendo el valor de un índice de refracción constante

Considerando la no linealidad de n_2 , éste valor puede variar para un mismo cristal fotónico mientras n_1 se mantendrá constante.

En la relación 7.2.4, se asume una relación proporcional entre $\Delta\omega$ y los índices n_1 y n_2 , la cual es obtenida recordando que anteriormente se determinó:

- Para $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.41$

$$\Delta\omega = 0.0544$$

- Para $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.7$

$$\Delta\omega = 0.0834$$

Adicionalmente:

- Para $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.5$

$$\Delta\omega = 0.0641$$

- Para $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.6$

$$\Delta\omega = 0.0741$$

- Para $n_1 = 1$ y $n_2 = 1.8$

$$\Delta\omega = 0.0924$$

Con los valores anteriores se grafica $\Delta\omega$ en función de Δn , obteniéndose la gráfica mostrada en la figura 7.14.

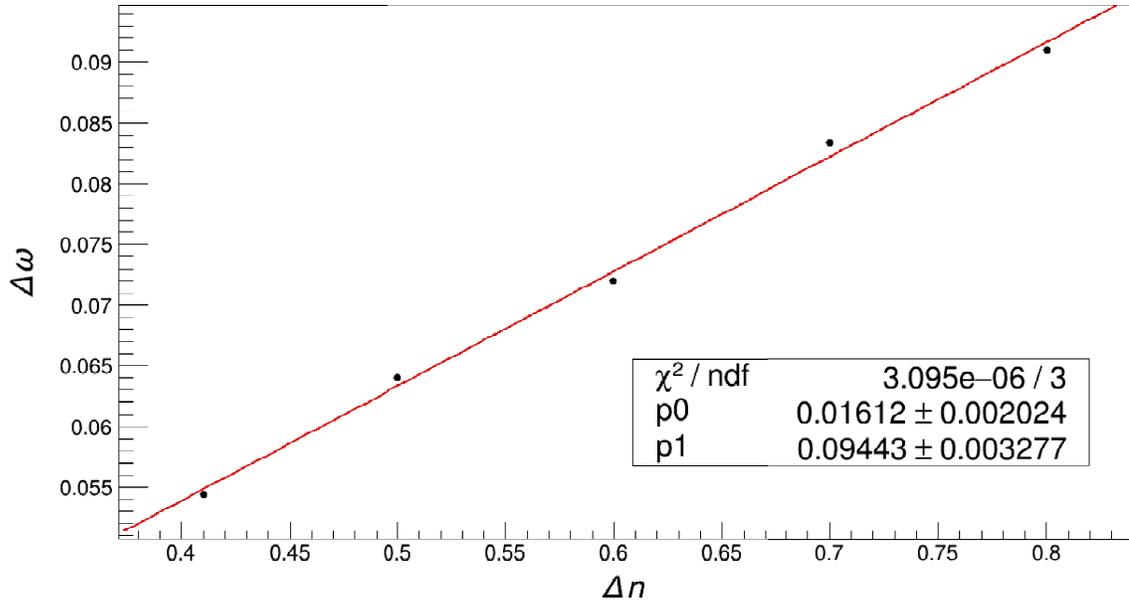


Figura 7.14: Gráfica de $\Delta\omega(\Delta n)$ cuando $n_1 = 1$. Fuente: Este trabajo.

De la gráfica se observa que la relación entre $\Delta\omega$ y Δn es lineal, siendo p_0 el intercepto y p_1 la pendiente de la recta, entonces:

$$\Delta\omega = 0.09443(n_2 - 1) + 0.01612,$$

la cual puede escribirse como:

$$\Delta\omega = 0.09443n_2 - 0.07831. \tag{7.2.5}$$

Por lo tanto, es posible determinar el tamaño de la brecha cuando $n_1 = 1$ con la ecuación 7.2.5.

Análogamente, se obtiene:

$$\Delta\omega = 0.1093n_2 - 0.0659, \tag{7.2.6}$$

la cual es la ecuación para determinar el tamaño de la brecha cuando $n_1 = 0.8$.

Las ecuaciones 7.2.5 y 7.2.6 corroboran la relación 7.2.4 encontrada en el artículo de Scalora.¹

Las brechas aparecen cada 0.5 unidades de ω

De los resultados anteriores se observa que no importa cuales son los valores n_2 ó n_1 , las brechas siempre aparecen cada 0.5 unidades de ω , lo que se debe a que la relación de dispersión 7.1.1, es una función periódica con periodo de 0.5 segundos.

Dado que $\Delta\omega$ se mantiene en todas las brechas fotónicas y que estas aparecen cada 0.5 unidades de ω , se cumple:

$$\omega_{fg} = \omega_{f1} + (0.5 \times [g - 1]) \quad \text{y} \quad \omega_{ig} = \omega_{i1} + (0.5 \times [g - 1]), \quad (7.2.7)$$

donde

1. ω_{fg} = valor de ω donde termina la brecha que se quiere conocer
2. ω_{ig} = valor de ω donde inicia la brecha que se quiere conocer
3. ω_{f1} = valor de ω donde termina la primera brecha
4. ω_{i1} = valor de ω donde inicia la primera brecha
5. g = número de la brecha de la cual se quiere saber los valores

También se cumple que:

$$G = 2 \times \omega, \quad (7.2.8)$$

donde

1. G = número de brechas $\in \mathbb{Z}$, que aparecen en un rango de 0 a ω
2. $\omega = 0.5, 1, 1.5, 2.5, \dots$

Valor del factor $\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1n_2}$

Cómo se dijo anteriormente, se observa en las figuras 7.6 y 7.7 que la función $f(\omega)$ tiene valores inferiores a -1. Scilab mostró que el valor mínimo que tiene $f(\omega)$ cuando $n_1 = 1$, $n_2 = 1.41$ ó $n_2 = 1.7$ es:

$$-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1n_2}$$

Para verificar esto, se graficó $f(\omega)$, con valores enteros de $\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1n_2}$, para que se pudiera observar a simple vista en la gráfica, si el valor mínimo de $f(\omega)$ es $-\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1n_2}$.

Al graficar se obtuvo:

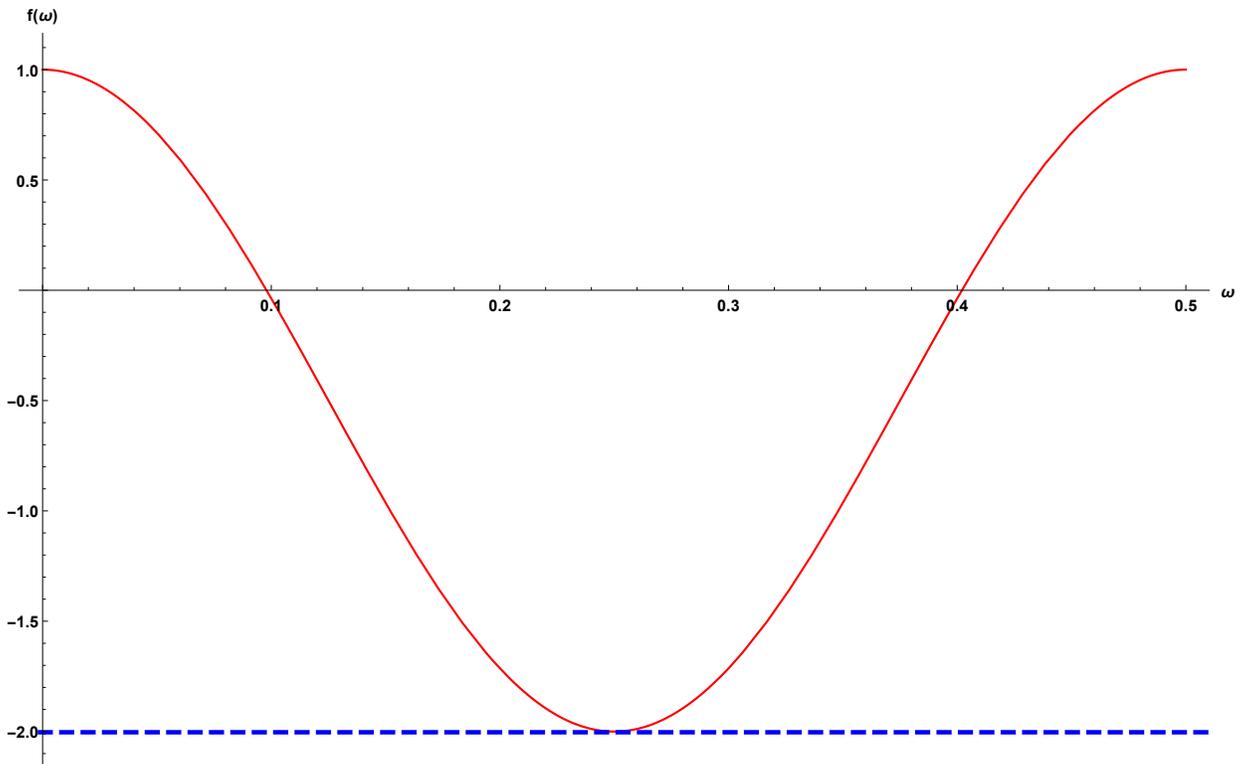


Figura 7.15: Gráfica de (7.1.1) con $\frac{n_1^2 + n_2^2}{2n_1n_2} = 2$, en donde $n_1 = \frac{1}{3}$ y $n_2 = 1$. Fuente: este trabajo.

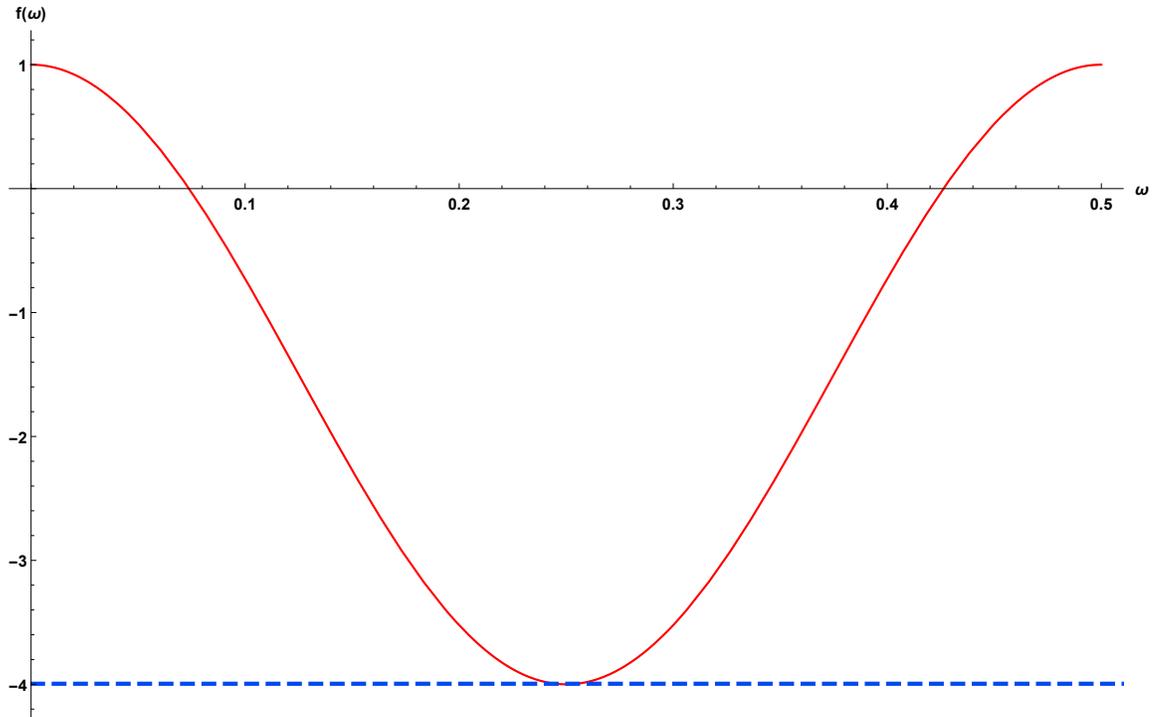


Figura 7.16: Gráfica de (7.1.1) con $\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2} = 4$, en donde $n_1 = \frac{1}{7}$ y $n_2 = 1$. Fuente: este trabajo.

Las gráficas 7.15 y 7.16, verifican que el valor mínimo de $f(\omega)$ es $-\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2}$.

¿Qué pasa con $\Delta\omega$ si se considera $-\Delta n$?

Se considera el caso $n_1 > n_2$, intercambiando los valores de los índices de refracción n_1 y n_2 , entonces:

- Para $n_1 = 1.41$ y $n_2 = 1$, en donde $\Delta n = 1 - 1.41 = -0.41$:

– **Primera brecha:**

$$\Delta\omega = 0.2772 - 0.2228 = 0.0544,$$

– **Segunda brecha:**

$$\Delta\omega = 0.7772 - 0.7228 = 0.0544,$$

– **Tercera brecha:**

$$\Delta\omega = 1.2772 - 1.2228 = 0.0544.$$

Se observa que $\Delta\omega = 0.0544$ es igual que cuando $n_2 > n_1$, o sea $\Delta n = 1.41 - 1 = 0.41$.

- Para $n_1 = 1.7$ y $n_2 = 1$, en donde $\Delta n = 1 - 1.7 = -0.7$:

– **Primera brecha:**

$$\Delta\omega = 0.2917 - 0.2083 = 0.0834,$$

– **Segunda brecha:**

$$\Delta\omega = 0.7917 - 0.7083 = 0.0834,$$

– **Tercera brecha:**

$$\Delta\omega = 1.2917 - 1.2083 = 0.0834.$$

Se observa que $\Delta\omega = 0.0834$ es igual que cuando $n_2 > n_1$, o sea $\Delta n = 1.7 - 1 = 0.7$.

Se concluye que para $-\Delta n$ y Δn el valor de $\Delta\omega$ se mantiene y también que existen brechas fotónicas cuando $n_1 > n_2$.

Capítulo 8

Conclusiones

De la revisión del artículo de Scalora,¹ se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Se comprobó la relación de dispersión $f(\omega)$.
- Se encontró que la ecuación de Transmisión (7.2.1), planteada en el artículo es incorrecta, la ecuación de Transmisión correcta es (7.2.3).
- Se comprobó que existen brechas fotónicas bajo las condiciones planteadas.
- Se comprobó que el tamaño de la brecha fotónica es proporcional a la diferencia de índices de refracción.
- Se comprobó que en un arreglo unidimensional con uno de sus índices de refracción no lineal, su valor de $\Delta\omega$ puede variar dependiendo de la intensidad del campo.
- Se comprobó que hay reflexión total cuando $|f(\omega)| > 1$.

Del análisis adicional, se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- Existen más brechas fotónicas si se amplía el rango de ω .
- Existe sólo una brecha fotónica por cada 0.5ω .
- Sin importar los valores de n_1 y n_2 , las brechas fotónicas siempre van a aparecer cada 0.5 unidades de ω .
- El periodo de la relación de dispersión 7.1.1 es 0.5 segundos.
- El valor $\Delta\omega$ va a ser constante en todas las brechas fotónicas que aparezcan a lo largo de ω .

- Para un mismo valor de Δn habrán distintos valores de $\Delta\omega$, este dependerá de los valores que tomen n_1 y n_2 , es decir dependerá de los valores que conforman el cristal y del campo aplicado.
- Es posible determinar el tamaño de la brecha cuando se mantiene n_1 constante.
- Las ecuaciones 7.2.5 y 7.2.6 corroboran la relación 7.2.4 encontrada en el artículo de Scalora.¹
- El valor mínimo que toma $f(\omega)$ es $-\frac{n_1^2+n_2^2}{2n_1n_2}$.
- Para $-\Delta n$ y Δn el valor de $\Delta\omega$ se mantiene.
- Existen brechas fotónicas cuando $n_1 > n_2$.

Capítulo 9

Apéndices

Identidades matemáticas

$$\nabla \times \nabla \times \vec{F} = \nabla(\nabla \cdot \vec{F}) - \nabla^2 \vec{F} \quad (9.0.1)$$

$$\nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) = (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} + (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} + \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) \quad (9.0.2)$$

En virtud de (9.0.2)

$$\vec{G} \times (\nabla \times \vec{F}) = \nabla(\vec{F} \cdot \vec{G}) - (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{G} - (\vec{G} \cdot \nabla)\vec{F} - \vec{F} \times (\nabla \times \vec{G}) \quad (9.0.3)$$

$$\cos^2 x - \sin^2 y = \cos(x + y) \cos(x - y) \quad (9.0.4)$$

$$\sin^2 x = 2 \sin x \cos x \quad (9.0.5)$$

Método de Matriz Transferencia, deducción general

El método matemático de la Matriz de Transferencia es utilizado en el análisis de la propagación de ondas en sistemas unidimensionales. Este método puede ser usado en el análisis de propagación de ondas y/o partículas, por ejemplo, electrones en el caso cuántico y ondas electromagnéticas en el caso óptico.⁴⁷

Matriz de Transferencia (MT)

Para demostrar la generalidad del método, se considera la solución de la ecuación de onda independiente del tiempo descrita por la ecuación 9.0.6 cuyas soluciones dependen del potencial $V(x)$.

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + \frac{2m}{\hbar^2}[E - V(x)]\psi(x) = 0 \quad (9.0.6)$$

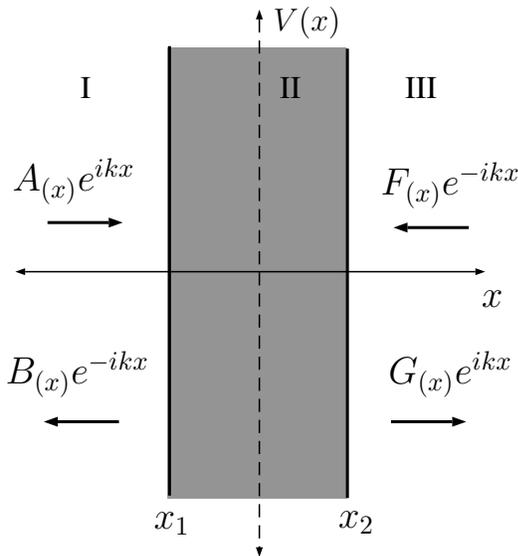


Figura 9.1: Esquema de interacción de ondas incidentes sobre un medio a un potencial arbitrario. Fuente: Adaptado de H. Vargas (2013). “Método generalizado de la matriz de transferencia (mgmt); método de las funciones de green de superficie (mfgs), relaciones y aplicaciones en sistemas semi-conductores periódicos”. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

Para el caso de una onda incidente sobre un medio de ancho Δx , partiendo de (9.0.6), se conoce la ecuación diferencial para cada una de las regiones I, II, III, las cuales son:

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k_1^2\psi(x) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x < x_1, \\ \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k_2^2\psi(x) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 < x < x_2, \\ \frac{d^2}{dx^2}\psi(x) + k_1^2\psi(x) &= 0 \quad \Longrightarrow \quad x > x_2,\end{aligned}\tag{9.0.7}$$

donde k_1 representa el número de onda en las regiones I y III, y k_2 el número de onda en la región II, el comportamiento depende de la parte real e imaginaria del potencial, en este caso real, pero cuando existen fenómenos de absorción el potencial tendrá una parte imaginaria.

En el primer caso las soluciones toman la forma:⁴⁸

$$\psi(x) = \begin{cases} A(x)e^{ikx} + B(x)e^{-ikx} & x < x_1, \\ Cf(x) + Dg(x) & x_1 < x < x_2, \\ F(x)e^{ikx} + G(x)e^{-ikx} & x > x_2. \end{cases}\tag{9.0.8}$$

Es necesario conocer un sistema de dos ecuaciones por cada medio, y construir la matriz de transferencia. Para obtener este sistema, se evalúa en la frontera la función de onda y su derivada, y se obtiene:

$$\begin{aligned}Ae^{ikx_1} + Be^{-ikx_1} &= Cf(x = x_1) + Dg(x = x_1) \quad \Longrightarrow \quad x = x_1, \\ ikAe^{ikx_1} - ikBe^{-ikx_1} &= Cf'(x = x_1) + Dg'(x = x_1) \quad \Longrightarrow \quad x = x_1,\end{aligned}$$

donde se ha evaluado la función y su derivada en la frontera $x = x_1$, reescribiendo las anteriores ecuaciones de manera matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} e^{ikx_1} & e^{-ikx_1} \\ ik e^{ikx_1} & -ik e^{-ikx_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f'(x_1) & g'(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (9.0.9)$$

ahora despejando el vector columna (A, B) , se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e^{-ikx_1}}{2} & \frac{-ie^{-ikx_1}}{2k} \\ \frac{e^{ikx_1}}{2} & \frac{ie^{ikx_1}}{2k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f'(x_1) & g'(x_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (9.0.10)$$

donde los valores $f(x_1), f'(x_1), g(x_1), g'(x_1)$, son los valores de las funciones que cumplen las condiciones de frontera de la función de onda y su derivada en $x = x_1$.

Haciendo el producto matricial se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-ikx_1}[f(x_1) - \frac{i}{k}f'(x_1)] & e^{-ikx_1}[g(x_1) - \frac{i}{k}g'(x_1)] \\ e^{ikx_1}[f(x_1) + \frac{i}{k}f'(x_1)] & e^{ikx_1}[g(x_1) + \frac{i}{k}g'(x_1)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (9.0.11)$$

de manera similar, se repite el procedimiento anterior para el segundo medio en $x = x_2$, se evalúa la continuidad de la función y su derivada en ese punto en la ecuación (9.0.7)

$$\begin{aligned} Cf(x = x_2) + Dg(x = x_2) &= Fe^{ikx_2} + Ge^{-ikx_2} && \implies x = x_2, \\ Cf'(x = x_2) + Dg'(x = x_2) &= ikFe^{ikx_2} - ikGe^{-ikx_2} && \implies x = x_2, \end{aligned}$$

reescribiendo la ecuación de manera matricial se tiene:

$$\begin{pmatrix} f(x_2) & g(x_2) \\ f'(x_2) & g'(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{ikx_2} & e^{-ikx_2} \\ ik e^{ikx_2} & -ik e^{-ikx_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \quad (9.0.12)$$

despejando el vector columna (C, D) , es decir, se tiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} &= \frac{1}{f(x_2)g'(x_2) - g(x_2)f'(x_2)} \\ &\times \begin{pmatrix} g'(x_2) & -g(x_2) \\ -f'(x_2) & f(x_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ikx_2} & e^{-ikx_2} \\ ik e^{ikx_2} & -ik e^{-ikx_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.0.13)$$

donde los valores $f(x_2)$, $f'(x_2)$, $g(x_2)$ y $g'(x_2)$, son las funciones que cumplen las condiciones de frontera de la función de onda y su derivada en $x = x_2$.

Haciendo el producto matricial se obtiene:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} &= \frac{1}{f(x_2)g'(x_2) - g(x_2)f'(x_2)} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{ikx_2}[g'(x_2) - ikg(x_2)] & e^{-ikx_2}[g'(x_2) + ikg(x_2)] \\ -e^{ikx_2}[f'(x_2) - ikf(x_2)] & -e^{-ikx_2}[f'(x_2) + ikf(x_2)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

reemplazando en la ecuación (9.0.11):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \frac{1}{f(x_2)g'(x_2) - g(x_2)f'(x_2)} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{-ikx_1}[f(x_1) - \frac{i}{k}f'(x_1)] & e^{-ikx_1}[g(x_1) - \frac{i}{k}g'(x_1)] \\ e^{ikx_1}[f(x_1) + \frac{i}{k}f'(x_1)] & e^{ikx_1}[g(x_1) + \frac{i}{k}g'(x_1)] \end{pmatrix} \\ &\times \begin{pmatrix} e^{ikx_2}[g'(x_2) - ikg(x_2)] & e^{-ikx_2}[g'(x_2) + ikg(x_2)] \\ -e^{ikx_2}[f'(x_2) - ikf(x_2)] & -e^{-ikx_2}[f'(x_2) + ikf(x_2)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (9.0.14)$$

realizando el producto matricial y obteniendo la matriz inversa de dicho producto, se puede escribir las amplitudes transmitidas (F, G) en términos de las amplitudes incidentes (A, B),

ya que estas son las condiciones iniciales. Reescribiendo la ecuación (9.0.14), en términos de dichas amplitudes, se encuentra:

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = \mathbf{MT} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad \mathbf{MT} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \quad (9.0.15)$$

donde $M_{11}, M_{12}, M_{21}, M_{22}$, son los elementos de la matriz de transferencia, que dependen de los valores que toma la función de onda y su derivada en la frontera, y se define $\epsilon = \frac{1}{2(f'(x_1)g(x_1) - g'(x_1)f(x_1))}$, estos elementos de manera general se escriben:

$$\begin{aligned} M_{11} = \epsilon e^{ik(x_1-x_2)} \{ & f'(x_2)[kg(x_1) + ig'(x_1)] + f'(x_1)[kg(x_2) - ig'(x_2)] \\ & + ik[f(x_2)g(x_1)k - f(x_1)g(x_2)k] + i[f(x_2)g'(x_1) + f(x_1)g'(x_2)] \}, \end{aligned} \quad (9.0.16)$$

$$\begin{aligned} M_{12} = \epsilon e^{-ik(x_1+x_2)} \{ & -f'(x_2)[kg(x_1) - ig'(x_1)] + f'(x_1)[kg(x_2) - ig'(x_2)] \\ & - ik[f(x_2)g(x_1)k - f(x_1)g(x_2)k] - i[f(x_2)g'(x_1) - f(x_1)g'(x_2)] \}, \end{aligned} \quad (9.0.17)$$

$$\begin{aligned} M_{21} = \epsilon e^{ik(x_1+x_2)} \{ & -f'(x_2)[kg(x_1) + ig'(x_1)] + f'(x_1)[kg(x_2) + ig'(x_2)] \\ & + ik[f(x_2)g(x_1)k - f(x_1)g(x_2)k] + i[f(x_2)g'(x_1) - f(x_1)g'(x_2)] \}, \end{aligned} \quad (9.0.18)$$

$$\begin{aligned} M_{22} = \epsilon e^{-ik(x_1-x_2)} \{ & f'(x_2)[kg(x_1) - ig'(x_1)] + f'(x_1)[kg(x_2) + ig'(x_2)] \\ & - ik[f(x_2)g(x_1)k - f(x_1)g(x_2)k] - i[f(x_2)g'(x_1) + f(x_1)g'(x_2)] \}, \end{aligned} \quad (9.0.19)$$

los elementos anteriores, contienen toda la información física del sistema estudiado, porque relacionan los números de onda de los diferentes medios por los cuales la onda o partícula viaja. De tal modo que la matriz de transferencia contiene la descripción física de los fenómenos de propagación de ondas y partículas en medios.⁴⁹

Propiedades de la Matriz de Transferencia

La Matriz de Transferencia describe las amplitudes incidentes de una onda o partícula sobre un potencial arbitrario, donde la transmisión y reflexión resultantes luego de la interacción pueden expresarse en términos de sus coeficientes.

Se nota que los coeficientes de la diagonal principal y secundaria se escriben como los respectivos complejos conjugados, es decir:

$$M_{11} = M_{22}^*, \quad M_{12} = M_{21}^*, \quad (9.0.20)$$

donde M_{11} , M_{12} , M_{22} , M_{21} , son los elementos de la matriz de transferencia (MT), los cuales cumplen

$$M_{11}M_{22} - M_{12}M_{21} = 1, \quad (9.0.21)$$

para el caso general se debe cumplir:⁴⁹

$$\begin{aligned} \det[\text{MT}] &= \epsilon^2 \{ f'(x_2)f'(x_1)g(x_2)g(x_1) - f'(x_2)g'(x_1)f(x_1)g(x_2) \\ &\quad - f'(x_1)g'(x_2)f(x_2)g(x_1) + f(x_1)f(x_2)g'(x_1)g'(x_2) \} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (9.0.22)$$

Bibliografía

- [1] M. Scalora, J. Dowling, C. Bowden and M. Bloemer. Phys. Rev. Lett. **73**, 1368 (1994).
- [2] M. Figueras. "*Óptica y Fotónica: la ciencia de la luz*". Editorial Universitat oberta de Catalunya (2011).
- [3] Diccionario Español de Ingeniería 2019. Recuperado de:
[http://diccionario.raing.es/es/lema/dispersión incoherente](http://diccionario.raing.es/es/lema/dispersión_incoherente).
- [4] E. Yablonovitch. Phys. Rev. Lett. **58**, 2059 (1987).
- [5] E. Yablonovitch. Sci. Am. **285**, 47 (2001).
- [6] S. John. Phys. Rev. Lett. **58**, 2486 (1987).
- [7] P. Yeh, A. Yariv and E. Marom. J. Opt. Soc. Am. **68**, 1196 (1978).
- [8] R. D. Meade, K. D. Brommer, A. M. Rappe and J. D. Joannopoulos App. Phys. Lett. **61**, 495 (1992).
- [9] M. Skorobogatiy. Opt. Lett. **30**, 2991 (2005).
- [10] H. Daninthe, S. Foteinopoulou and C. M. Soukoulis. Photonic. Nanostruct. **4**, 123 (2006).
- [11] C. Duque, N. Porras, S. Cavalcanti and L. Oliveira. Appl. Phys. **105**, 34303 (2009).
- [12] S. Cavalcanti, E. Reyes, A. Bruno, C. de Carvalho and L. Oliveira. "*On the photonic dispersion of periodic superlattices made of left-handed materials*". Springer (2012).
- [13] Robert W. Boyd. "*Nonlinear Optics*". Academic Press (1992).
- [14] M. Scalora and M. E. Crenshaw. Opt. Commun. **108**, 191 (1994).
- [15] N. Ashcroft and N. Mermin. "*Solid State Physics*". Harcourt College Publishers (1976).

-
- [16] J.D. Joannopoulos, R.D. Meade and J.N. Winn. “*Photonic Crystals: Molding of Flow of Light [1st ed.]*”. Princeton University Press (1995).
- [17] S.G. Johnson and J.D. Joannopoulos. “*Photonic Crystals: The Road From Theory to Practice*”, Kluwer Academic Press (2002).
- [18] E. Yablonovitch, T. J. Gmitter, R. D. Meade, A. M. Rappe, K. D. Brommer and J. D. Joannopoulos. Phys. Rev. Lett. **67**, 3380 (1991).
- [19] E. M. Purcell. Phys. Rev. **69**, 681 (1946) .
- [20] J. G. Fleming and S. Y. Lin. Opt. Lett. **24**, 49 (1999).
- [21] U. Gruk, V. Lehmann and C. M. Engelhardt. App. Phys. Lett. **66**, 3254 (1995).
- [22] K. Bush and S. John. K. Phys. Rev. E **58**, 3896 (1998).
- [23] A. Blanco, E. Chomskly, S. Grabtchak, M. Ibisate, S. John, S. Leonard, C. Lopez, F. Meseguer, H. Miguez, J. Mondia, G. Ozin, O. Toader and H. van Driel. Nature **405**, 437 (2000).
- [24] K. M. Ho, C. T. Chan, C. M. Soukoulis, R. Biswas and M. Sigalas. Solid State Comm. **89**, 413 (1994).
- [25] M. Sarollahi, S. J. Bauman, J. Mishler and J. B. Herzog. J. Nanophoton. **10**, 46012 (2016).
- [26] P. Tran. Opt. Lett. **21**, 1138 (1996).
- [27] S. Scholz, O. Hess and R. Ruhle. Opt. Expr. **3**, 28 (1998).
- [28] S. Mingaleev and Y. Kivshar. Opt. Photon. News. **13**, 48 (2002).
- [29] D. M. Sullivan. Theory Techn. **43**, 676 (1995).
- [30] S. Cavalcanti, E Reyes, A. Bruno, C. de Carvalho and L. Oliveira. Opt. Lett. **39**, 178 (2014).

- [31] J.D. Joannopoulos, S.G. Johnson, R.D. Meade and J.N. Winn. “*Photonic Crystals. Molding of Flow of Light [2 ed.]*”. Princeton University Press (2008).
- [32] C. Kittel “*Introduction to Solid State Physics [7th ed.]*”. Wiley (1996).
- [33] M. Skorobogatiy and J. Yang. “*Fundamentals of Photonic Crystal Guiding*”. Cambridge University Press (2009).
- [34] A. Siahmakoun. Proc. SPIE **10741**, 103 (2018).
- [35] V. Carillo (2014). “*Diseño y caracterización de un material Fotónico fabricado mediante haz enfocado de iones*”. Tesis Doctoral, Centro de Investigación en Materiales Avanzados, Chihuahua, México.
- [36] G. M. Paternò, C. Iseppon, A. D’Altri, C. Fasanotti, G. Merati, M. Rand, A. Desii, E. A. A. Pogna, D. Viola, G. Cerullo, F. Scotognella and I. Kriegel. Sci. Rep. **8**, 3517 (2018).
- [37] I. A. Sukhoivanov and I. V. Guryev. “*Photonic Crystals: Physics and Practical Modeling*” Springer, Heidelberg (2009).
- [38] B. Chen, T. Tang and H. Chen. Opt. Express **17**, 5033 (2009).
- [39] S. Asefa, S. J. McNab and Y. A. Vlasov. Opt.Lett. **31**, 745 (2006).
- [40] M. K. Moghaddam, M. M. Mirsalehi and A. R. Attari. Opt. Appl. **39**, 307 (2009).
- [41] P. M. Nellen, P. Strasser, V. Callegari, R. Wuest, D. Erni and F. Robin. Microelectron. Eng. **84**, 1244 (2007).
- [42] Zh. Liu, S. Durant and H. Lee. Opt. Express **15**, 6947 (2007).
- [43] D. Bernier, X. Le Roux and A. Lupu. Opt. Express **16**, 17209 (2008).
- [44] F. Zolla, G. Renversez, A. Nicolet, B. Kuhlmeiy, S. Guenneau and D. Felbacq. “*Foundations of Photonic Crystal Fibres [1st ed.]*”. World Scientific Publishing Company (2005).

- [45] J. N. Winn, Y. Fink, S. Fan and J. D. Joannopoulos. *Opt. Lett.* **23**, 1573 (1998).
- [46] M. Born and M.E. Wolf. “*Principles of optics*”. Pergamon (1980).
- [47] A. Z. Khachatryan. *Armenian J. Phys.* **3**, 178 (2010).
- [48] D. Griffiths. “*Introduction to Quantum Mechanics*”. Pearson Prentice Hall (1962).
- [49] H. Vargas (2013). “*Método generalizado de la matriz de transferencia (mgmt); método de las funciones de Green de superficie (mfgs), relaciones y aplicaciones en sistemas semiconductores periódicos*”. Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.