

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



**Tratamiento Canónico de la Ecuación de Proca para Campo Real y
Complejo**

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

Alexis Javier Aguirre Narváez

San Juan de Pasto, Colombia

Noviembre 2017

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

**Tratamiento Canónico de la Ecuación de Proca para Campo Real y
Complejo**

Alexis Javier Aguirre Narváez

TRABAJO DE GRADO

Director:

Ph.D. Germán Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, Colombia

Noviembre 2017

©2017 - Alexis Javier Aguirre Narváez

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Ph.D. Germán Enrique Ramos Zambrano

Director

Ph.D. Yithsbey Giraldo Usuga

Jurado

M.Sc. Luis Andrés Santacruz Almeida

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 2017

Agradecimientos

Quisiera agradecer de todo corazón la confianza, dedicación y amor de mi madre, gracias a ella, he logrado cumplir mis sueños y es por ella que seguiré avanzando día a día.

A mis hermanos Camilo y Yani, por compartir las alegrías y tristezas, por estar ahí cuando mas los necesitaba.

Agradezco a la universidad de Nariño, al programa de Física y a mis profesores, por abrirme las puertas entrar al maravilloso mundo de la ciencia.

Un agradecimiento muy especial a mi asesor el Ph.D. Germán Enrique Ramos Zambrano, quien ha brindado los mejor de sí, para sus alumnos y universidad, es un ejemplo como profesor y ser humano.

No creo que haya alguna emoción más intensa para un inventor que ver alguna de sus creaciones funcionando. Esa emoción hace que uno se olvide de comer, de dormir, de todo.

Nikola Tesla

Tratamiento Canónico de la Ecuación de Proca para Campo Real y Complejo

Resumen

En este trabajo de grado se busca desarrollar un tratamiento canónico sobre la densidad lagrangiana propuesta por Proca, debido a que esta teoría posee una naturaleza singular se estudiará bajo los lineamientos del método de Dirac. Lo anterior se realizará con el fin de obtener un análisis clásico lo suficientemente consistente para posterior a ello, cuantizar el campo y todas las cantidades conservadas obtenidas mediante transformaciones de simetría continua.

Canonical Treatment of the Proca Equation for Real and Complex Field

Abstract

In this document we aim to carry out a canonical analysis of the Lagrangian density proposed by Proca, due to the singular nature of this system the Dirac method will be applied. The above will be done in order to obtain a consistent classic analysis to subsequently quantify the field and all the conserved quantities obtained by continuous symmetry transformations.

Contenido

Título	i
Título	ii
Aceptación	iv
Agradecimientos	v
Dedicatoria	vi
Resumen	vii
Abstract	viii
Glosario	xii
1 Introducción	1
2 Estudio Clásico del Campo de Proca Real	4
2.1 Invarianza de Gauge Local	5
2.2 Formalismo Lagrangiano	6
2.2.1 Determinación Ecuaciones de Euler-Lagrange para la teoría de P-R	6
2.2.2 Clasificación de la Teoría como singular o regular	9
2.2.3 Cantidades conservadas	10
2.3 Formalismo Hamiltoniano	14
2.3.1 Análisis de consistencia de vínculos	16
2.3.2 Clasificación de vínculos de Primera o Segunda Clase	19
2.3.3 Corchetes de Dirac	20
3 Cuantización del Campo de Proca Real o neutro	24
3.1 Expansión de $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ en términos de ondas planas	26
3.2 Expansión de $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ en términos de ondas planas	27
3.3 Determinación del álgebra de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$	28
3.4 Operador Hamiltoniano	29
3.5 Operador Momentum	34
3.6 Operador Espín	36
3.7 Propagador de Feynman asociado al campo de P-R	40
4 Estudio Clásico del campo de Proca Complejo	42
4.1 Formalismo Lagrangiano	43
4.1.1 Cálculo de las Ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo de P-C	43
4.1.2 Cantidades conservadas	44
4.1.3 Transformación de fase Global	46
4.2 Formalismo Hamiltoniano	47

4.2.1	Análisis de consistencia de vínculos	50
4.2.2	Clasificación de vínculos como de Primera o Segunda Clase	54
4.2.3	Corchetes de Dirac para campo de P-C	55
5	Cuantización del Campo de Proca Complejo o Cargado	59
5.1	Expansión de $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{A}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ en términos de ondas planas	60
5.2	Solución en términos de ondas planas para $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$	61
5.3	Determinación del álgebra de los operadores de expansión en la solución de ondas planas	62
5.4	Operador Hamiltoniano de la teoría de P-C	63
5.5	Operador Momentum en la teoría de P-C	66
5.6	Operador Espín para el campo de P-C	68
5.7	Operador Carga	71
5.8	Propagador de Feynman asociado al campo de P-C	74
6	Conclusiones	76
7	Apéndices	79
7.1	Apéndice A. Notación relativista en (3+1) dimensiones	79
7.2	Apéndice B. Clasificación de la teoría en singular o regular	80
7.2.1	Demostración identidad (2.18)	81
7.3	Apéndice C. Cantidades conservadas	83
7.3.1	Invarianza bajo traslaciones Espacio-Temporales	83
7.3.2	Determinación de la ecuación (2.33)	84
7.4	Apéndice D. Formalismo de Hamilton	84
7.4.1	Demostración de la Densidad Hamiltoniana (2.43)	84
7.4.2	Demostración identidad (2.52)	85
7.4.3	Demostración de la identidad (2.58)	86
7.4.4	CP entre los vínculos del sistema	87
7.4.5	Apéndice E. Matriz de vínculos en la Teoría de P-R	88
7.5	Apéndice F. C.P. entre los campos canónicos y los vínculos del sistema	90
7.6	Apéndice G. Forma General de los C.D. para los campos A_i y Π^k	92
7.7	Apéndice H. Evolución temporal de los operadores $(\hat{A}, \hat{\Pi})$	94
7.8	Apéndice I. Determinación del álgebra de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$	96
7.8.1	Demostración identidad (3.17)	96
7.8.2	Demostración identidad (3.18)	97
7.8.3	Conmutadores asociados a los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$	98
7.8.4	Operador Hamiltoniano en función de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$	99
7.8.5	Demostración de la identidad (3.37) y (3.38)	102
7.8.6	Deducción de la identidad (3.52)	103

7.8.7	Demostración identidad (3.63)	105
7.8.8	Demostración de las relaciones de conmutación (3.72)	107
7.8.9	Demostración de la identidad 3.73	108
7.8.10	Cálculo de los autovalores asociados al operador Helicidad	109
7.8.11	Demostración de la identidad (3.84)	111
7.9	Apéndice J. Formalismo Lagrangiano	117
7.9.1	Demostración de la relación 4.19	117
7.9.2	Demostración de invarianza bajo transformaciones de fase global sobre la densidad Lagrangiana (4.1)	117
7.9.3	Demostración identidad (4.25)	118
7.10	Apéndice K. Formalismo Hamiltoniano	119
7.10.1	Demostración identidad (4.38)	119
7.10.2	Demostración identidad (4.50)	119
7.10.3	Demostración identidad (4.51)	120
7.10.4	Demostración de las ecuaciones (4.66) y (4.67)	121
7.10.5	Determinación de los C.P. entre los vínculos del sistema	123
7.10.6	Demostración de la identidad (4.86)	125
7.10.7	Determinación de los C.P. entre los vínculos de P-C y las variable independientes	127
7.11	Apéndice L, Cuantización del P-C	129
7.11.1	Demostración identidad (5.4) y (5.5)	129
7.11.2	Demostración de las identidades (5.6) y (5.7)	129
7.11.3	Demostración identidad (5.16)	131
7.11.4	Demostración identidad (5.19)	132
7.11.5	Demostración de las relaciones (5.26)	133
7.11.6	Operador Hamiltoniano de la teoría de P-C, identidad (5.34)	135
7.11.7	Operador Momentum, demostración identidad (5.51)	138
7.11.8	Operador Carga (Demostración de la identidad (5.71))	142

Glosario

Campo: Describe el comportamiento de magnitudes que se definen en todo punto del espacio y del tiempo. Representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio.

Funcional: integral definida sobre un contorno cerrado, de manera que el dominio de la funcional es un espacio de funciones, y su rango es el conjunto de números reales.

Lagrangiano: Para un sistema físico conservativo con un número finito de grados de libertad, es una función que describe la dinámica del sistema físico. Se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial expresadas en términos de las coordenadas generalizadas.

Acción: Funcional definida en un intervalo de tiempo y construida a partir del Lagrangiano. La acción determina la dinámica de un sistema físico.

Espacio de Minkowski o espacio-tiempo: Espacio de cuatro dimensiones usado para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. Un punto o un evento del espacio-tiempo, está determinado por un conjunto de cuatro coordenadas: tres espaciales y una temporal.

- Transformaciones de Lorentz:** Estas transformaciones incluyen además de las usuales rotaciones en el espacio tridimensional, transformaciones en la velocidad o también conocidas como Boosts de Lorentz, que se interpretan como rotaciones en el espacio-tiempo.
- Densidad Lagrangiana:** Escalar bajo Lorentz que describe la dinámica y las propiedades de un sistema físico representado por campos.
- Ecuaciones de Campo:** Conjunto de Ecuaciones diferenciales que determinan la evolución temporal de un sistema físico representado por campos en el espacio de configuraciones.
- Hamiltoniano Canónico:** Para sistemas conservativos es equivalente a la energía. El Hamiltoniano canónico determina la dinámica del sistema físico en el espacio de fase.
- Hamiltoniano Primario:** Combinación lineal del Hamiltoniano canónico y los vínculos primarios, determina la dinámica en el espacio de fase completo.
- Vínculo:** Expresión que relaciona las variables del espacio de configuraciones o del espacio de fase.
- Bosón:** Partícula elemental de la naturaleza que se caracteriza por tener spin entero.

Grados de Libertad: Es el número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias para definir el estado de un sistema físico.

Corchetes de Poisson: Denotados como CP, en un operador que define la evolución temporal de un sistema dinámico en la formulación Hamiltoniana.

Capítulo 1

Introducción

En teorías de campos, los vectores Bosónicos desarrollan un papel central como mediadores de interacciones en física de partículas. Ejemplos importantes son los campos Gauge del electromagnetismo (fotones sin masa), la interacción débil que propone mediadores como los bosones (W^\pm, Z^0) y la interacción fuerte gluones sin masa. A un nivel menos fundamental los campos vectoriales pueden también ser usados para describir mesones de Spin 1, por ejemplo, los mesones ρ y ω . Estas observaciones conllevan a una apreciación de la importancia de un campo Bosónico dentro de áreas de estudio como el Modelo Estándar y la cromodinámica cuántica.

A principios del siglo XX el estudio de teorías asociadas a partículas fundamentales presentó un gran desarrollo, tal es el caso de la teoría gravitacional de Einstein, la ecuación planteada por Dirac y el campo asociado a ésta, la teoría electromagnética de Maxwell, entre otras; estas teorías se describen a través de densidades Lagrangianas singulares, que implica que las variables que describen el sistema físico no son linealmente independientes. Un formalismo canónico para este tipo teorías fue desarrollado por Ostrogradsky en el año de 1850, aunque su formulación es auto-consistente difiere un poco del formalismo canónico común, puesto que se aplicó a espacios de fase de orden superior [16]. Trabajos posteriores llevaron a P.A.M Dirac, Bergman y colaboradores entre los años (1950-1958) a la formulación de un mecanismo para la correcta descripción clásica de éstos, denominado como formalismo de Dirac. [2, 6, 10]

La teoría de Proca fue desarrollada en 1930 por Alexandru Proca, quien propone una densidad Lagrangiana adquirida mediante una extensión de la teoría electromagnética de Maxwell. Este modelo se caracteriza por asociar un término masivo al potencial vectorial A_μ , debido a ello, esta teoría no es invariante bajo transformaciones de Gauge local, además,

la densidad Lagrangiana que describe el campo de Proca es singular [1, 2]. A pesar de ello, la teoría de Proca es invariante bajo transformaciones de Poincaré, y en virtud del teorema de Noether cantidades como la energía, el momento lineal y el spin son conservadas. [4, 5] El modelamiento de Proca ha tenido gran relevancia a través de la historia, tanto en su aplicación en el modelo estándar y la cromodinámica cuántica, como en el estudio de la cosmología, ya que hoy en día, las interacciones gravitacionales son estudiadas a través de campos bosónicos asociados a partículas masivas, esto se explica mediante un modelamiento de la teoría de Proca generalizada a la solución de Sitter [17], donde la componente temporal del campo vectorial es compatible con las simetrías de homogeneidad e isotropía del fondo Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker, en el estudio de materia oscura y agujeros negros. [18]

El presente trabajo de grado se estructura de la siguiente forma:

- En el capítulo 2, se introduce un análisis clásico sobre el campo de Proca neutro o real, comenzando desde el formalismo de Lagrange donde se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange, además se estudiará el comportamiento de la densidad Lagrangiana que describe el campo neutro bajo transformaciones de Poincaré, luego, con el fin de realizar una descripción clásica a nivel Hamiltoniano, se definen los momentos canónicos asociados a los campos fundamentales, los cuales en principio serán considerados como variables independientes, también se determinan el Hamiltoniano canónico y los corchetes de Poisson. Dado que esta teoría se caracteriza por su naturaleza singular, se plantea y se explica bajo el formalismo de Dirac mediante su aplicación a la teoría de campo vectorial real.
- El capítulo 3, está enfocado a la cuantización del campo de Proca real, para ello, se emplearán algunos de los criterios concernientes al principio de correspondencia [11], se propone estudiar las observables y estados del sistema, por último se pretende deducir el Propagador de Feynman asociado al campo real.
- El propósito del capítulo 4, es estudiar el campo de Proca cargado o complejo, comenzando por un análisis a nivel Lagrangiano y continuando con un análisis clásico

Hamiltoniano bajo los lineamientos del método de Dirac.

- En el capítulo 5, se busca cuantizar el campo de Proca complejo, esto con el fin de analizar las implicaciones que aparecerán en los observables y los estados que describen el sistema después de haber realizado un análisis clásico sobre el mismo. Posteriormente se pretende deducir el Propagador de Feynman realizando un comparativo con el obtenido en el capítulo 2.
- En el capítulo 6 se presentan las conclusiones del trabajo.
- Finalmente en los apéndices se realizó un proceso descriptivo de cada uno de los cálculos relacionados con el trabajo.

Capítulo 2

Estudio Clásico del Campo de Proca Real

La densidad Lagrangiana que describe la teoría de Proca Real (P-R) es dada por:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}A_\mu(x)A^\mu(x) \quad (2.1)$$

donde $A_\mu(x)$ es el campo vectorial fundamental, tal que $\mu = 0, 1, 2, 3$ denota sus componentes espacio-temporales. El tensor de segundo orden $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ puede escribirse en términos del campo vectorial fundamental como:

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu(\mathbf{x}, t) - \partial_\nu A_\mu(\mathbf{x}, t) \quad (2.2)$$

de donde se observa que este tensor es antisimétrico. También debemos especificar que las unidades usadas a lo largo de este trabajo serán las unidades naturales, es decir, $\hbar = c = 1$, de este modo las propiedades de los tensores en (3+1) dimensiones, al igual que la notación usada en el texto se estudia en el **Apéndice A**.

Inicialmente podemos resaltar que esta densidad Lagrangiana contiene explícitamente en su estructura tanto al tensor $F_{\mu\nu}$ como al campo A_μ . No obstante, es de vital importancia remarcar que debido a la existencia del término de masa dentro de la densidad Lagrangiana, ésta no cumple con la invarianza de Gauge Local, hecho que demostraremos más adelante.

Por otra parte, el signo del término de masa debe de ser tratado con cuidado. A primera vista parece no estar de acuerdo con el término de masa existente en la ecuación de Klein-Gordon, debemos tener en mente, sin embargo, que el producto escalar:

$$A_\mu A^\mu = (A^0)^2 - (\mathbf{A})^2 \quad (2.3)$$

consiste de cuatro diferentes contribuciones. El signo debe de ser elegido tal que esté de acuerdo con la ecuación de Klein-Gordon para una partícula masiva en el caso de las

componentes espaciales de $A_\mu(x)$.

Se debe tener en cuenta que la teoría de P-R se describe a partir de una densidad Lagrangiana singular, esto implica el surgimiento de vínculos primarios y secundarios, que se clasificarán según el formalismo de Dirac en vínculos de primera o segunda clase [2, 6, 7], de este modo el análisis clásico y el tratamiento de los vínculos de la teoría se efectuarán en virtud a los lineamientos del método de Dirac.

Invarianza de Gauge Local

La teoría presenta un término masivo para el campo $A_\mu(x)$, en este punto es donde la invarianza de Gauge local no se cumple, si la teoría fuera un invariante de Gauge, al realizar la siguiente transformación sobre el campo A_μ :

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad (2.4)$$

se debería garantizar que (2.1) permanezca igual.

Dada la transformación anterior [4], analizamos el comportamiento del tensor de segundo orden $F_{\mu\nu}$ frente a este tipo de transformaciones, para ello calculamos:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} &= \partial_\mu A'_\nu(x) - \partial_\nu A'_\mu(x), \\ &= \partial_\mu (A_\nu(x) + \partial_\nu \Lambda(x)) - \partial_\nu (A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x)), \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x). \end{aligned}$$

Del hecho de que las derivadas conmuten entre sí, el tensor de $F_{\mu\nu}$ es invariante bajo transformación de Gauge local, es decir:

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + \partial_\mu \partial_\nu \Lambda(x) - \partial_\nu \partial_\mu \Lambda(x), \\ &= \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) = F_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

Con este resultado se procede a evaluar el comportamiento de (2.1) frente a la transformación (2.4), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= -\frac{1}{4}F'_{\mu\nu}(x)F'^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}A'_\mu(x)A'^\mu(x), \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}(A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x))(A^\mu(x) + \partial^\mu\Lambda(x)), \\
 &= -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x) + \frac{m^2}{2}A_\mu(x)A^\mu(x) + m^2A_\mu\partial^\mu\Lambda(x) + \frac{m^2}{2}\partial_\mu\Lambda(x)\partial^\mu\Lambda(x), \\
 &= \mathcal{L} + (m^2A_\mu\partial^\mu\Lambda(x) + \frac{m^2}{2}\partial_\mu\Lambda(x)\partial^\mu\Lambda(x)). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Como el término entre paréntesis no puede ser representado por una cuadri-divergencia, nuestra teoría será representada por una densidad Lagrangiana que no es invariante bajo transformaciones de Gauge Local.

Formalismo Lagrangiano

Determinación Ecuaciones de Euler-Lagrange para la teoría de P-R

Nótese que la densidad Lagrangiana citada en (2.1) es función del campo fundamental A_μ y de sus derivadas espacio-temporales en (3+1) dimensiones, esto será claramente observable si representamos el tensor $F_{\mu\nu}$ mediante la ecuación (2.2). Luego, la acción asociada a la densidad Lagrangiana de la teoría de P-R es definida por:

$$\mathcal{A}[A_\mu] = \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu]. \tag{2.6}$$

Para deducir las ecuaciones de campo de la teoría, se considerará la variación de la acción presente en (2.6), considerando variaciones arbitrarias e independientes del potencial A_μ . Así pues, la variación de la ecuación anterior es:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu] = \delta \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu]. \tag{2.7}$$

Debido a que estamos considerando variaciones arbitrarias e independientes del campo A_μ más no de las coordenadas, es posible escribir la anterior relación como sigue:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu] = \int d^4x \delta\mathcal{L}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu]. \tag{2.8}$$

Conocemos el hecho que la densidad Lagrangiana está dada en términos del campo A_μ y de sus derivadas espacio-temporales $\partial_\nu A_\mu$. Seguido a esto, tendremos que la variación de la densidad Lagrangiana debida a variaciones arbitrarias e independientes del potencial se escriben como:

$$\delta\mathcal{L}[A_\mu, \partial_\nu A_\mu] = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu). \quad (2.9)$$

Introduciendo este resultado en (2.8), se observa que la variación de la integral de acción en cuestión se torna en:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} \delta A_\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu) \right]. \quad (2.10)$$

Como hemos asumido que se están realizando variaciones del campo A_μ y no de las coordenadas, se puede establecer que:

$$\delta(\partial_\nu A_\mu) = \partial_\nu(\delta A_\mu). \quad (2.11)$$

Con lo anterior, se expresará el segundo sumando de la ecuación (2.9) como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta(\partial_\nu A_\mu) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \partial_\nu(\delta A_\mu) \\ &= \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] - \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \delta A_\mu \end{aligned} \quad (2.12)$$

Luego de reemplazar (2.12) en la variación de la acción (2.10) se comprueba:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \right] \delta A_\mu + \int d^4x \partial_\nu \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \delta A_\mu \right] \quad (2.13)$$

Del hecho, que sobre los campos se imponen las siguientes condiciones de frontera [5]:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_1) &= \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_2) = 0 \\ A_\mu(\mathbf{x}, t) &\rightarrow 0 \text{ para } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.14)$$

el segundo sumando de (2.13) se anula como consecuencia del comportamiento asintótico del campo A_μ , de este modo, la variación de la integral de acción de la teoría de P-R se reduce a:

$$\delta\mathcal{A}[A_\mu] = \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right) \right] \delta A_\mu$$

El principio de Hamilton establece que la trayectoria real seguida por el sistema es aquella que extremiza la integral de acción de la teoría [4], matemáticamente esto se representa lo siguiente:

$$\delta \mathcal{A}[A_\mu] = \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) \right] \delta A_\mu = 0 \quad (2.15)$$

Nuevamente haciendo hincapié en que la variación de la integral de acción es debida solamente a variaciones arbitrarias e independientes de las componentes de A_μ , bajo la norma fundamental del cálculo de variaciones [8], la igualdad en (2.15) se cumple si:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0 \quad (2.16)$$

La anterior relación se conoce como ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange de la teoría de P-R. La forma explícita de las ecuaciones de campo implica calcular las siguientes derivadas de la densidad Lagrangiana (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} &= \frac{m^2}{2} \frac{\partial}{\partial A_\mu} (A_\alpha A^\alpha), \\ &= \frac{m^2}{2} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\mu} A^\alpha + A_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial A_\mu} \right), \\ &= \frac{m^2}{2} \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial A_\mu} A^\alpha + \eta^{\alpha\beta} A_\alpha \frac{\partial A_\beta}{\partial A_\mu} \right), \\ &= \frac{m^2}{2} (A^\alpha \delta_\mu^\alpha + \eta^{\alpha\beta} A_\alpha \delta_\mu^\beta), \\ &= m^2 A^\mu(\vec{x}, t). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Por otra parte, se tiene que (véase **Apéndice B**):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}), \\ &= -F^{\nu\mu}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Sustituyendo las relaciones (2.17) y (2.18) en (2.16), se encuentra que las ecuaciones de campo clásicas para la teoría de P-R son:

$$\square A^\mu(\mathbf{x}, t) - \partial^\mu (\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}, t)) + m^2 A^\mu(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.19)$$

donde hemos introducido el operador D'Alambertiano $\square = \partial_\mu \partial^\mu$. La anterior ecuación se conoce como Ecuación de Proca para campo real, libre de corrientes externas. Nótese que la invarianza de Gauge local no ha de ser cumplida para las ecuaciones de movimiento, ya que el término de masa sigue estando presente dentro de (2.19).

Clasificación de la Teoría como singular o regular

Se busca determinar si la densidad Lagrangiana que describe el sistema es singular o regular, es decir, si el sistema posee vínculos o no. Para este fin, calcularemos la matriz Hessiana del sistema, la cual, relaciona el conjunto de aceleraciones asociados a (2.1) y por lo tanto, permite determinar si es posible despejar todas estas. Las componentes de esta matriz se calculan mediante la expresión [1]:

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\alpha(\mathbf{x}, t)) \delta(\partial_0 A_\beta(\mathbf{y}, t))} \quad (2.20)$$

Debemos tener en cuenta que esta no es la única forma de determinar si un sistema posee vínculos 2.11 en la teoría, simplemente usamos este método para mostrar explícitamente donde se indica la clasificación del sistema como regular o singular (véase el **Apéndice B**).

Usando el resultado indicado en (2.18)

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\omega A_\alpha(\mathbf{x}, t))} = -F^{\omega\alpha}(\mathbf{x}, t),$$

calculamos la derivada de esta cantidad, de tal modo que obtenemos:

$$\frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_\omega A_\alpha(\mathbf{x}, t)) \delta(\partial_\nu A_\beta(\mathbf{y}, t))} = (\eta^{\epsilon\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\epsilon\nu} \eta^{\beta\alpha}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

Haciendo $\epsilon = \nu = 0$, podemos mostrar que la forma para cada una de las componentes de la matriz Hessiana se podrá obtener a través de:

$$W^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{0\beta} \eta^{0\alpha} - \eta^{00} \eta^{\beta\alpha}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.21)$$

Del resultado anterior podremos afirmar que la matriz Hessiana de la teoría de P-R tendrá la forma:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.22)$$

En la cual se tiene que el $\det(W)$ es igual a cero, por ello, el sistema para el campo de P-R es descrito por una densidad Lagrangiana singular [1, 10], es decir, la teoría presentará vínculos.

Cantidades conservadas

En teoría clásica de campos, observamos que existen ciertas teorías, que son invariantes bajo algún tipo de simetría continua, donde por cada simetría que deja invariante al sistema surge una ecuación de continuidad asociada y por ende una densidad de corriente en (3+1) dimensiones [4, 5], generando ciertas cantidades conservadas. El comportamiento inmutable bajo cierta simetría continua deberá ser reflejado en la acción del sistema, que permanece invariante bajo tales simetrías. El teorema que explica la existencia de estas cantidades conservadas se conoce como el Teorema de Noether que dice:

Cada transformación de simetría continua conduce a una ley de conservación, donde la cantidad conservada se puede obtener de la densidad Lagrangiana asociada al sistema.

Basándonos en el anterior teorema, se podrán deducir algunas de esas cantidades conservadas, tal es el caso de la simetría asociada a traslaciones espacio-temporales y la simetría asociada a rotaciones espacio-temporales. El estudio detallado de las cantidades conservadas tanto por traslaciones como por rotaciones espacio-temporales se realiza en el **Apéndice C**.

Tensor Canónico Momento-Energía

La simetría asociada a traslaciones espacio-temporales genera la cantidad que denominaremos Tensor Canónico Momento-Energía [5], para lo cual debemos considerar homogeneidad en el espacio-tiempo a la hora de deducir la cantidad mencionada, el tensor Momento-Energía podrá ser calculado a partir de la siguiente fórmula:

$$\Theta^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha(x))} \partial^\nu A_\alpha(x) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \quad (2.23)$$

Para la teoría de P-R el tensor Momento-Energía será deducido usando la anterior definición y el resultado indicado en (2.18), con lo cual se ha obtenido:

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = F^{\alpha\mu} \partial^\nu A_\alpha(x) - \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) + \frac{m^2}{2} A_\alpha(x) A^\alpha(x) \right) \quad (2.24)$$

Por otra parte, la ecuación de continuidad asociada a ésta simetría tendrá la forma:

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (2.25)$$

Como se aprecia, la expresión anterior se conoce como ecuación de continuidad asociada al campo vectorial A_μ y el término $\Theta^{\mu\nu}(x)$ como corriente de Noether. La importancia de esta ecuación radica en el hecho de garantizar la existencia de una ley de conservación expresada en forma de ecuación diferencial. Con el fin de observar esto, se integra la ecuación (2.25) sobre un volumen V .

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \partial_\mu \Theta^{\mu\nu}(x) &= \int_V d^3x \partial_0 \Theta^{0\nu}(x) + \int_V d^3x \partial_i \Theta^{i\nu}(x), \\ &= \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_0} \Theta^{0\nu}(x) + \int_V d^3x \frac{\partial \Theta^{i\nu}(x)}{\partial x_i}, \\ &= \frac{\partial}{\partial x_0} \int_V d^3x \Theta^{0\nu}(x) + \oint_S d_{a_i} \Theta^{i\nu}(x). \end{aligned}$$

En el análisis anterior se ha usado el teorema de Gauss. Debido al comportamiento asintótico cuando tiende a infinito, tanto el campo $A_\mu(x)$ como sus derivadas, éstas desaparecen sobre la superficie S que limita el volumen V , por tal razón la segunda integral de la relación anterior se anula, dando como resultado:

$$\frac{d}{dx_0} \int_V d^3x \Theta^{0\nu}(x) = \frac{d}{dt} \int_V d^3x \Theta^{0\nu}(x) = 0. \quad (2.26)$$

El resultado (2.26) deja en evidencia una cantidad que se está conservando definida como:

$$P^\nu \equiv \int_V d^3x \Theta^{0\nu}(x). \quad (2.27)$$

Del hecho que $\nu = 0, 1, 2, 3$; se determina que existen cuatro cantidades conservadas asociadas a esta simetría y que se identifican como la energía E y el momentum \mathbf{P} del campo respectivamente [5], que en notación cuadri-dimensional se expresan en la forma:

$$P^\nu = (E, \mathbf{P}) = \int_V d^3x \Theta^{0\nu}(x) = cte. \quad (2.28)$$

En vista de lo anterior, podemos asociar al término temporal P^0 con la energía:

$$\begin{aligned} P^0 &= \int_V d^3x \Theta^{00}(x), \\ &= \int_V d^3x \mathcal{H}_c(x), \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde $\mathcal{H}_c(x)$ representa la densidad Hamiltoniana, cuyo significado será explicado mas tarde dentro del formalismo Hamiltoniano. Por otra parte, la componente espacial P^k es asociada con el momentum, que será deducido de la relación (2.24), con lo cual:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k &= \int_V d^3x \Theta^{0k}(x), \\ &= \int_V d^3x (F^{\alpha 0} \partial^k A_\alpha(x) - \eta^{0k} \mathcal{L}), \\ &= \int_V d^3x (F^{\alpha 0} \partial^k A_\alpha(x)). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Invarianza bajo simetría de Lorentz

Así como el espacio-tiempo es homogéneo para traslaciones espacio-temporales, también se considerará isótropo para rotaciones espacio-temporales. De este modo, la acción asociada a la teoría de P-R debe ser invariante para transformaciones de Lorentz. Estas transformaciones incluyen además de las usuales rotaciones en el espacio tridimensional, transformaciones en la velocidad o Boost de Lorentz, que se interpretan como rotaciones en el espacio-tiempo.

Bajo este tipo de simetría se da origen a una corriente de Noether, en este caso es un tensor de

tercer orden que denominaremos tensor Momento Angular-Espín, cuya definición está dada por [4, 5, 14]:

$$M^{\mu\nu\lambda} \equiv \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\sigma)}(I^{\nu\lambda})^{\sigma\beta}A_\beta, \quad (2.31)$$

donde el término $I^{\nu\lambda}$ se conoce como conjunto de generadores de rotaciones infinitesimales [5], que en componentes puede ser representado como:

$$(I^{\nu\lambda})^{\sigma\beta} = \eta^{\sigma\nu}\eta^{\beta\lambda} - \eta^{\sigma\lambda}\eta^{\beta\nu}, \quad (2.32)$$

Analizando la ecuación mostrada en (2.31), es de vital importancia destacar que los dos primeros términos corresponden al Momento Angular mientras que el último se asocia al espín, claro está que dichas cantidades se asocian al campo fundamental A_μ .

Por otra parte, si usamos el resultado obtenido en (2.18) en la expresión (2.31) se podrá mostrar (véase **Apéndice C**):

$$M^{\mu\nu\lambda} \equiv \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + (F^{\mu\lambda}A^\nu - F^{\mu\nu}A^\lambda). \quad (2.33)$$

Partiendo del hecho que el tensor de tercer orden mostrado en (2.33) es una corriente de Noether, éste deberá satisfacer la siguiente ecuación de continuidad:

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (2.34)$$

expresión asociada a una simetría de Lorentz. Nuevamente, hacemos hincapié en el hecho, que la ecuación anterior conduce a una cantidad conservada para un sistema invariante bajo transformaciones de Lorentz definida por:

$$\begin{aligned} M^{\nu\lambda} &\equiv \int_V d^3x M^{0\nu\lambda}, \\ &\equiv \int_V d^3x [\Theta^{0\lambda}x^\nu - \Theta^{0\nu}x^\lambda] + \int_V d^3x [F^{0\lambda}A^\nu - F^{0\nu}A^\lambda], \end{aligned} \quad (2.35)$$

de la cual se puede identificar a:

$$L^{\nu\lambda} \equiv \int_V d^3x [\Theta^{0\lambda}x^\nu - \Theta^{0\nu}x^\lambda], \quad (2.36)$$

con el momento angular asociado al campo A_μ , en tanto que:

$$S^{\nu\lambda} \equiv \int_V d^3x [F^{0\lambda}A^\nu - F^{0\nu}A^\lambda], \quad (2.37)$$

estará relacionada con el espín asociado a la teoría de P-R.

Formalismo Hamiltoniano

Ahora, se procederá a realizar un estudio canónico de la teoría de P-R [4, 11]. Para tal objetivo se define el momento canónico asociado al campo A_μ , partiendo de la ecuación (2.18):

$$\Pi^\mu = \Pi^\mu(\vec{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu(\vec{x}, t))} = F^{\mu 0}, \quad (2.38)$$

donde al estudiar la componente temporal del momento canónico $\mu = 0$ se observa:

$$\Pi^0 = F^{00} = 0. \quad (2.39)$$

Del mismo modo, se analizan las componentes espaciales $\mu = i$, para lo cual se puede verificar que:

$$\Pi^i = F^{i0} = F_{oi} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (2.40)$$

Debido a que en la expresión (2.39) no se están representando velocidades, es decir, derivadas en relación al tiempo de los campos, hemos de afirmar que esta cantidad se encuentra relacionada con un vínculo primario [2, 6, 7]. Se definirá el vínculo primario de la teoría de P-R como se muestra a continuación:

$$\Phi_1 \equiv \Pi^0(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (2.41)$$

donde el símbolo \approx , denota igual débil [2, 6, 7], cuyo significado será explicado con mayor detalle cuando sean definidos los corchetes de Poisson.

Por otra parte y aunque uno de los momentos canónicos no se pueda representar en términos de las velocidades, es posible construir bajo una transformación de Legendre [4] la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría, del siguiente modo:

$$\mathcal{H}_c(x) \equiv \Pi^\mu(x) \partial_0 A_\mu(x) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, t). \quad (2.42)$$

Partiendo de la densidad Lagrangiana (2.1) y del momento canónico asociado al campo A_μ (2.38), se encuentra la densidad Hamiltoniana canónica del sistema (véase **Apéndice D**):

$$\mathcal{H}_c \equiv F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu + \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2} A_\mu(x) A^\mu(x).$$

Expandiendo la suma sobre los índices μ y ν tendremos, que la anterior expresión toma la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_c = \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \Pi^k \partial_k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F^{ki} \right]. \quad (2.43)$$

El Hamiltoniano canónico de la teoría de P-R es definido por [4]:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \mathcal{H}_c, \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \Pi^k \partial_k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F_{ki} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Con el fin de representar en forma más compacta la estructura del Hamiltoniano canónico del sistema, se reescribirá utilizando la siguiente identidad:

$$\Pi^k (\partial_k A_0) = \partial_k (\Pi^k A_0) - (\partial_k \Pi^k) A_0,$$

e introduciendo esta relación en (2.44) se verifica que:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F_{ki} \right] + \int d^3x \left[\partial_k (\Pi^k A_0) \right], \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F_{ki} \right] + \oint d\mathbf{a} \cdot [\nabla (\Pi A_0)]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Cabe anotar que para llegar al segundo sumando de la deducción preliminar, se empleó el teorema de Gauss en tres dimensiones, dicho término no es más que una integral cerrada realizada sobre el contorno de una superficie que se extiende hacia el infinito. De acuerdo con la condición de frontera (2.14), se puede mostrar que la integral en cuestión es cero. Con estos lineamientos, se concluye que el Hamiltoniano canónico de la teoría de P-R es:

$$H_c = \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F_{ki} \right].$$

Sin embargo, el Hamiltoniano canónico está bien definido únicamente en el sub-espacio de fase de los vínculos y por tanto, se puede extender arbitrariamente fuera del espacio de estos. Dicho de otro modo, el Hamiltoniano canónico no está unívocamente determinado, pues es posible añadir cualquier combinación lineal de los vínculos del sistema [2, 6, 7]. Por ende, si se añade una combinación lineal del vínculo primario Φ_1 se deduce que el Hamiltoniano primario de la teoría de P-R es:

$$\begin{aligned} H_p &\equiv H_c + \int d^3x \lambda_1 \Phi_1, \\ &= \int d^3x \left[\frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu + \frac{1}{4} F_{ki} F_{ki} + \lambda_1 \Phi_1 \right]. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Expresión en la cual, el término λ_1 es una función arbitraria del espacio y del tiempo, conocida como multiplicador de Lagrange asociado al vínculo Φ_1 [2, 6, 7].

Para continuar con el estudio canónico de la teoría de P-R será necesario construir los corchetes de Poisson entre las variables del espacio de fase. Este espacio de fase está definido por el par canónico (A_μ, Π^μ) , por ello, se definen a $C(\mathbf{x}, t) \equiv C(A_\mu, \Pi^\mu)$ y $D(\mathbf{y}, t) \equiv D(A_\mu, \Pi^\mu)$ como dos variables dinámicas de dicho espacio y el corchete de Poisson C.P. a tiempos iguales [4, 5] entre ellas se define como:

$$\{C(\mathbf{x}, t), D(\mathbf{y}, t)\} \equiv \int d^3z \left[\frac{\delta C(\mathbf{x}, t)}{\delta A_\mu(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta D(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta C(\mathbf{x}, t)}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta D(\mathbf{y}, t)}{\delta A_\mu(\mathbf{z}, t)} \right]. \quad (2.47)$$

A partir de (2.47) se determina que los corchetes de Poisson C.P. fundamentales entre los pares canónicos son:

$$\{A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (2.48)$$

$$\{A_\mu(\mathbf{x}, t), A^\nu(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} = 0. \quad (2.49)$$

Observe que el vínculo primario Φ_1 no es consistente con el C.P. fundamental (2.48), ya que el campo A_0 debería tener un corchete de Poisson no trivial con el vínculo, es decir, con Π^0 , sin embargo, esto es una inconsistencia de la teoría que deberá ser solucionada mediante el estudio de ésta, por lo tanto, la cantidad denominada Φ_1 será denotada como débilmente igual a cero (≈ 0) hasta que los C.P. de la teoría sean bien definidos, libres de toda inconsistencia.

Análisis de consistencia de vínculos

Ahora, la evolución dinámica de cualquier variable del espacio de fase $R(\mathbf{x}, t) \equiv R(A_\mu, \Pi^\mu)$, estará dada por la ecuación de movimiento de Hamilton [1, 8]:

$$\dot{R}(\mathbf{x}, t) \approx \{R(\mathbf{x}, t), H_p(\mathbf{y}, t)\}, \quad (2.50)$$

ecuación en la cual, $H_p(x)$ será el Hamiltoniano primario.

Por consistencia se debe garantizar que los vínculos de la teoría de P-R se conserven durante toda la evolución dinámica del sistema. Al efectuar este análisis se podrá determinar si surgirán o no nuevos vínculos [2, 6, 7]. Deberá tenerse en cuenta durante este proceso que si se originan nuevas

identidades que relacionen las variables del espacio de fase entre sí, es decir, nuevos vínculos, se tendrá que estudiar su consistencia, esto con el fin de establecer el conjunto completo de vínculos de la teoría en desarrollo. Por tal razón, comenzaremos por determinar la consistencia del vínculo primario Φ_1 . La consistencia del vínculo primario Φ_1 asociado a la teoría, se deberá estudiar a partir de (2.50) cumpliendo así:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1(\mathbf{x}, t) &\approx \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), H_p(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} + \int d^3y \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), \lambda_1(\mathbf{y}, t)\Phi_1(\mathbf{y}, t)\}, \\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{2.51}$$

Se busca simplificar los cálculos relacionados con la anterior expresión, para ello se procederá a resolver por separado cada uno de los sumandos presentes en la ecuación (2.51). Luego, a partir de (2.41), la estructura del Hamiltoniano canónico presentada en (2.46) y las propiedades de los C.P. fundamentales se obtiene (véase **Apéndice D**):

$$\{\Phi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t).\tag{2.52}$$

Por otra parte, debido a los C.P. fundamentales se encuentra:

$$\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \approx 0.\tag{2.53}$$

Como consecuencia del resultado anterior es fácil deducir, que el C.P. presente en el segundo sumando de la ecuación (2.51) se anula débilmente:

$$\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \lambda_1(\mathbf{y}, t)\Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \approx \lambda_1(\mathbf{y}, t)\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \approx 0.\tag{2.54}$$

Introduciendo lo obtenido en las relaciones (2.52) y (2.54) en (2.51), se encuentra que la consistencia del vínculo primario Φ_1 es:

$$\dot{\Phi}_1(\mathbf{x}, t) = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0.\tag{2.55}$$

La fórmula presentada en (2.55) destaca nuevamente por ser una relación entre las coordenadas del espacio fase, partiendo del requerimiento de consistencia del vínculo primario Φ_1 ha surgido como resultado un vínculo secundario [2, 6, 7], que se definirá como:

$$\Phi_2(\mathbf{x}, t) \equiv \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0.\tag{2.56}$$

Este nuevo vínculo de la teoría de P-R deberá ser consistente, es decir, deberá conservarse durante la evolución dinámica del sistema, por tal razón se cumplirá:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_2(\mathbf{x}, t) &= \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), H_p\}, \\ &= \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} + \int \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), \lambda_1 \Phi_1(\mathbf{y}, t)\}, \\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{2.57}$$

Se busca simplificar los cálculos que serán realizados sobre la anterior ecuación, por ello, se divide el trabajo en dos parte, resolviendo así la primera integral de (2.57) y posteriormente la segunda, de esta forma se obtiene para la primera integral(véase **Apéndice D**):

$$\{\Phi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = -m^2 \partial_k^x A_k(x) + \partial_k^x \partial_n^x F_{kn}(x).\tag{2.58}$$

En este punto se debe solucionar el segundo sumando de (2.57), donde se ha de aplicar la representación del vínculo primario mostrada en (2.41) y los C.P. fundamentales, por lo tanto:

$$\begin{aligned}\{\Phi_2(\mathbf{x}, t), \Phi_1(\mathbf{y}, t)\} &= \{\partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\}, \\ &\approx m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).\end{aligned}\tag{2.59}$$

de lo cual, se podrá concluir que el segundo sumando de (2.57) tendrá la siguiente estructura:

$$\begin{aligned}\int d^3 y \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), \lambda_1 \Phi_1(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3 y \lambda_1(\mathbf{y}, t) \{\partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= m^2 \lambda_1(x).\end{aligned}\tag{2.60}$$

Finalmente introducimos los resultados obtenidos en (2.58) y (2.60) en (2.57), con ello se determina:

$$\dot{\Phi}_2(\mathbf{x}, t) = -m^2 \partial_k^x A_k(\mathbf{x}, t) + \partial_k^x \partial_n^x F_{kn}(x) + m^2 \lambda_1(x) \approx 0.\tag{2.61}$$

Se puede realizar el siguiente análisis de la expresión anterior. La ecuación (2.61) determina una relación entre las variables del espacio de fase y el multiplicador de Lagrange, es decir, se impone una condición sobre $\lambda_1(x)$ quedando éste en función de los campos (A_μ, Π^μ) . De esta forma, se garantiza que nuevos vínculos no sean generados [2, 6, 7], por ello, el conjunto de vínculos de la teoría de P-R estará dado por (Φ_1, Φ_2)

Clasificación de vínculos de Primera o Segunda Clase

La distinción que se realiza entre vínculos primarios o secundarios no es relevante, pues ellos son vistos como elementos del mismo conjunto. El paso a seguir en el análisis canónico de la teoría de P-R deberá consistir en clasificar los vínculos como de primera o segunda clase. Bajo el formalismo de Dirac deberá de tenerse en cuenta que de anularse todos los C.P. entre un vínculo determinado y el resto de vínculos que conforman el sistema, este será considerado como de primera clase, si en algún caso ocurriese que al menos existe un C.P. que no se anule débilmente, se clasificaría el vínculo como de segunda clase [2, 6, 7, 10].

Recurriendo a la los resultados obtenidos en (2.53) y (2.59), se comprueba que no todos los C.P. entre Φ_1 y el conjunto de vínculos son débilmente nulos. Por consiguiente, se determina que tanto el vínculo primario Φ_1 como el vínculo secundario Φ_2 son de segunda clase (véase **Apéndice D**). Aunque el siguiente resultado no fue indicado dentro del análisis anterior se puede demostrar fácilmente que:

$$\{\Phi_2(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{y}, t)\} \approx 0. \quad (2.62)$$

A fin de tratar los vínculos de segunda clase mediante los planteamientos del método de Dirac, se procederá a construir la matriz conformada por lo C.P. entre los vínculos de segunda clase de la teoría de P-R, donde los elementos de dicha matriz se definirán como:

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\Phi_i(\mathbf{x}, t), \Phi_j(\mathbf{x}, t)\}, \quad (2.63)$$

con $i, j=1, 2$. La forma explícita de la Matriz $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (véase **Apéndice D**) es dada por:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.64)$$

El método de Dirac establece que los vínculos de segunda clase surgen cuando la matriz (2.64) no se anula sobre la superficie de vínculos, básicamente esto se traduce como (todos los C.P. no se anulan débilmente a cero), por ende, la matriz (2.64) es invertible. Teniendo en cuenta que los vínculos de segunda clase pueden ser tratados bajo la definición de corchetes de Dirac (C.D.) si y solo sí, la matriz de vínculos de segunda clase es regular [6, 7].

Mencionando algunas de las características de la matriz (2.64) está el hecho que es una matriz funcional, dado que sus componentes dependen de la función Delta de Dirac. Con el fin de probar si se trata de una matriz regular o singular se tendrá que calcular su determinante. Debido a que

esta matriz depende de una función se realizará una transformada de Fourier sobre cada una de sus componentes obteniendo así (véase **Apéndice D**):

$$\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

Se puede apreciar que al comparar (2.65) con (2.64) ésta matriz posee componentes con valores numéricos, gracias a ello será posible calcular su determinante. Por consiguiente, mostramos que el determinante asociado a la matriz (2.65) es diferente de cero:

$$\det [\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = m^4, \quad (2.66)$$

es decir, $\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una matriz regular. Con el resultado anterior se está evidenciando que la matriz de los vínculos de segunda clase $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es regular e invertible.

Corchetes de Dirac

En este punto se busca eliminar los vínculos de segunda clase dados por las expresiones (2.41) y (2.56), estos vínculos permiten reconocer que existe un número de grados de libertad en la teoría, más no define cuales son. Debido a ello, se introduce un nuevo conjunto de corchetes de Poisson entre los grados de libertad determinados a partir de (2.41) y (2.56), que denominaremos como Corchetes de Dirac (C.D.) [2, 6, 7], donde dichos corchetes serán definidos para dos variables dinámicas arbitrarias $E(A_\mu, \Pi^\mu) = E(\mathbf{x}, t)$ y $F(A_\mu, \Pi^\mu) = F(\mathbf{y}, t)$ como sigue:

$$\begin{aligned} \{E(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{E(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{E(\mathbf{x}, t), \Phi_i(\mathbf{y}, t)\} [C^{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v})]^{-1} \{\Phi_j(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\}, \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde $C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ será interpretada como la matriz inversa de $C(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Debido a que la definición (2.67), exige conocer la forma de cada una de las componentes de $C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, es de vital importancia encontrar la matriz inversa de (2.64), el proceso asociado se encuentra detallado en el **Apéndice E**, obteniendo como resultado:

$$C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ -\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{v}) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.68)$$

Conociendo la forma de la inversa de la matriz de vínculos, se dará paso al cálculo de los C.D. entre los grados de libertad de la teoría. Cabe destacar que los C.D. (2.67) son corchetes de Poisson bien definidos en la teoría de P-R, por lo cual y debido al formalismo de Dirac, las igualdades débiles se conviertan en igualdades fuertes; gracias a éste hecho, los vínculos de la teoría serán dos ecuaciones fuertemente iguales a cero, es decir:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\mathbf{x}, t) &= \Pi^0(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \Phi_2(\mathbf{x}, t) &= \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A_0(\mathbf{x}, t) = 0,\end{aligned}\tag{2.69}$$

bajo la definición de los C.D. la evolución temporal de los vínculos Φ_1 y Φ_2 pasan a ser igualdades fuertes en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}_1(\mathbf{x}, t) &= \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), H(\mathbf{y}, t)\}_{CD} = 0, \\ \dot{\Phi}_2(\mathbf{x}, t) &= \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), H(\mathbf{y}, t)\}_{CD} = 0.\end{aligned}\tag{2.70}$$

Los vínculos (2.69) dan indicios de la existencia de un determinado número de grados de libertad en la teoría de P-R, sin embargo, tenemos arbitrariedad en la elección de las variables independientes. Por tal motivo, escogeremos como campos independientes a las componentes espaciales del campo fundamental A_i y las componentes espaciales del campo momento conjugado Π^k , por lo tanto el nuevo espacio de fase para la teoría de P-R estará dado por $[A_i, \Pi^i]$.

Partiendo de la definición (2.67), se lleva a cabo el cálculo de los siguientes C.D.:

$$\begin{aligned}\{A_k(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_k(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{A_k(\mathbf{x}, t), \Phi_n(\mathbf{u}, t)\} [C^{mm}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \{\Phi_m(\mathbf{v}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\}.\end{aligned}\tag{2.71}$$

Utilizando los C.P. fundamentales (2.48), y los C.P. entre el campo A_i y los vínculos (2.41, 2.56) (véase **Apéndice F**), se podrá expresar la relación (2.71) como:

$$\begin{aligned}\{A_k(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= - \int d^3u d^3v \{A_k(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{u}, t)\} [C^{2m}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \{\Phi_m(\mathbf{v}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \frac{1}{m^2} \partial_k^x \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= 0.\end{aligned}\tag{2.72}$$

De forma similar se tendrá al calcular ahora los C.D. entre los campos A_i y Π^k :

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{A_i(\mathbf{x}, t), \Phi_n(\mathbf{u}, t)\} [C^{nm}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \{\Phi_m(\mathbf{v}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}. \end{aligned} \quad (2.73)$$

De acuerdo a los C.P. fundamentales se deduce que:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Finalmente, de acuerdo a los C.P. fundamentales y los C.P. de Π^k con los vínculos (2.41) y (2.56), se encuentra la relación (vease **Apéndice G**):

$$\begin{aligned} \{\Pi^i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{\Pi^i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}, \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{\Pi^i(\mathbf{x}, t), \Phi_n(\mathbf{u}, t)\} [C^{nm}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \{\Phi_m(\mathbf{v}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (2.75)$$

En resumen, el único C.D. no nulo de la teoría será aquel que relaciona los campos A_i y Π^k , que se expresa en el resultado (2.74). De este modo, el conjunto de C.D. obtenido será:

$$\begin{aligned} \{A_k(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{\Pi^i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} = 0, \\ \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Bajo la definición de los C.D. y al escoger como variables independientes a los campos A_i y Π^k , la evolución temporal de una variable dinámica $E(A_i, \Pi^k) = E(\mathbf{x}, t)$ estará dada por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\Pi^k(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{m^2}{2} A_k(\mathbf{x}, t) A_k(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} F_{ki} F_{ki} \right]. \quad (2.77)$$

Ahora, al determinar la evolución temporal de los campos A_i y Π^k , ésta debería estar dada a partir de la ecuación de Hamilton definida en (2.73). De acuerdo a los corchetes de Dirac (C.D.) calculados, es posible determinar la evolución del campo $A_k(x)$ a través de:

$$\begin{aligned} \dot{A}_k(x) &= \{A_k(x), H(y)\}_{CD}, \\ &= \int d^3y \Pi^l(y) \{A_k(x), \Pi^l(y)\}_{CD}, \\ &= \int d^3y \Pi^l(y) (\delta_k^l \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \\ &= \Pi^k(x). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Por otra parte, al calcular la evolución temporal del campo $\Pi^k(x)$ sería necesario llevar a cabo las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Pi}^k(x) &= \left\{ \Pi^k(x), H(y) \right\}_{CD}, \\
 &= \int d^3y \left[\frac{m^2}{2} \left\{ \Pi^k(x), A_l(y) A_l(y) \right\}_{CD} + \frac{1}{4} \left\{ \Pi^k(x), F_{li}(y) F_{li}(y) \right\}_{CD} \right], \\
 &= m^2 A_k(x) + \frac{1}{2} \int d^3y F_{li}(y) \left\{ \partial_l^x \left[\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^x \left[\delta_l^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\}, \\
 &= m^2 A_k(x) + \frac{1}{2} \int d^3y \left[\partial_l^x F_{lk}(y) - \partial_i^x F_{ki}(y) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

intercambiando el índice $i \leftrightarrow l$ se obtendrá:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Pi}^k(x) &= m^2 A_k(x) + \partial_l^x F_{lk}(x), \\
 &= m^2 A_k(x) + \partial_l^x \partial_l^x A_k(x) - \underbrace{\partial_k^x \partial_l^x A_l(x)}_{=0}, \\
 &= m^2 A_k(x) + \partial_l^x \partial_l^x A_k(x).
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Las expresiones (2.78) y (2.80) establecen que la tres componentes espaciales del campo A_k deberán satisfacer las relaciones que se proporcionan a continuación:

$$\dot{\Pi}^k(x) = \partial_0 \Pi^k(x) = \partial_0 \partial_0 A_k(x) = m^2 A_k(x) + \partial_l^x \partial_l^x A_k(x), \tag{2.81}$$

de manera que:

$$\partial_0 \partial_0 A_k(x) - m^2 A_k(x) - \partial_l \partial_l A_k(x) = \partial_0 \partial_0 A_k(x) + \partial_l \partial_l A_k(x) - m^2 A_k(x), \tag{2.82}$$

que en forma compacta se expresa como:

$$\partial_\mu \partial^\mu A_k(x) - m^2 A_k(x) = 0. \tag{2.83}$$

Así, bajo la definición de los C.D. los campos cumplen la ecuación de Klein-Gordon, por lo cual, al buscar una solución a la forma de los campos A_i y Π se podría especular que ellos podrán tener una solución en términos de ondas planas, tal y como en el caso de la solución para el campo de Klein-Gordon y el campo de Dirac [4, 5], este proceso que se llevará a cabo en el siguiente capítulo.

Capítulo 3

Cuantización del Campo de Proca Real o neutro

Uno de los métodos convencionales para cuantizar un sistema clásico descrito por una densidad Lagrangiana, es conocido como cuantización canónica; que consiste en un grupo de procesos realizados sobre resultados clásicos, éste involucra los siguientes pasos:

- Los C.P. son convertidos en conmutadores, mediante la relación:

$$\{, \} \rightarrow \frac{1}{i} [,], \quad (3.1)$$

conocida con el nombre de Ecuación de Heisenberg, la cual, es interpretada como la ecuación de movimiento del sistema pero a nivel cuántico.

- Se representan las cantidades medibles (observables) mediante operadores hermíticos. Los resultados de las medidas de un sistema cuántico son identificados con los autovalores de dichos operadores.
- Se describe el estado cuántico de un sistema mediante un vector $|\psi\rangle$, el cual es un elemento del espacio de Hilbert [11].

¹ De acuerdo a las pautas propuestas se realizan los siguientes procesos:

Primero se transforma el conjunto de C.D. (2.76), mediante la formula (3.1) en conmutadores:

$$\begin{aligned} \left[\hat{A}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^k(\mathbf{y}, t) \right] &= i\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left[\hat{A}_i(\mathbf{x}, t), \hat{A}_k(\mathbf{y}, t) \right] &= 0 = \left[\hat{\Pi}^i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^k(\mathbf{y}, t) \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

¹En este punto, resaltamos que al haber trabajado la parte clásica en unidades naturales, este capítulo será trabajado con las unidades mencionadas, es decir, $\hbar = c = 1$.

teniendo en cuenta que clásicamente los campos $(A_k(x), \Pi^k(x))$ son reales, cuánticamente sus correspondiente operadores de campo satisfacen:

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \hat{A}_i(\mathbf{x}, t) = \hat{A}_i^\dagger(\mathbf{x}, t), \\ \Pi^k(\mathbf{x}, t) &\rightarrow \hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t) = \hat{\Pi}^{\dagger k}(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Segundo, se representan los observables del sistema, en este caso la energía mediante un operador hermítico; teniendo en cuenta la relación (2.77) el operador Hamiltoniano estará dado por:

$$\hat{H} = \int d^3x \left[\frac{1}{2} (\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{m^2}{2} \hat{A}_k(\mathbf{x}, t) \hat{A}_k(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} \hat{F}_{ki} \hat{F}_{ki} \right], \quad (3.4)$$

de acuerdo a la condición (3.3) el operador (3.4) satisface:

$$\hat{H} = \hat{H}^\dagger. \quad (3.5)$$

Tercero, se representan los estados del sistema mediante un conjunto de vectores ortonormales $|\psi_n\rangle$, que se construyen a partir de un estado fundamental $|0\rangle$, cumpliéndose de este modo:

$$\langle 0, 0 | 0, 0 \rangle = 1. \quad (3.6)$$

Como ya se ha demostrado anteriormente, clásicamente las tres componentes de campo A_i satisfacen la ecuación de Klein-Gordon para una partícula masiva, ahora si cuantizamos el sistema se podría esperar un resultado similar con respecto a las componentes del operador de campo (\hat{A}_i), hecho que se indica en el **Apéndice H**. Al calcular la evolución temporal de los operadores de campo ($\hat{A}_i(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t)$) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{A}}_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{i} \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \hat{H}_c(\mathbf{y}, t) \right], \\ &= \hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Pi}}^k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{i} \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{H}_c(\mathbf{y}, t) \right], \\ &= -m^2 \hat{A}_k(\mathbf{x}, t) + \partial_n^x \hat{F}_{nk}(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

las ecuaciones (3.7) y (3.8) conducen a la expresión (véase **Apéndice H**):

$$\left(\underbrace{\square}_{\partial_\mu \partial^\mu} + m^2 \right) \hat{A}_k(x) = 0, \quad (3.9)$$

por lo tanto, se espera que a nivel cuántico el operador de campo \hat{A} que satisface la ecuación de Klein-Gordon, sea solución de ésta.

Expansión de $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ en términos de ondas planas

Clásicamente se mostró en (2.83) que las tres componentes del potencial vectorial A_i satisfacían la ecuación de Klein-Gordon para una partícula masiva, por lo tanto, al buscar una solución del campo se podrá esperar un desarrollo de éste en términos de ondas planas [4], en la forma:

$$\mathbf{A}_k(x) \sim \epsilon_k(\mathbf{k}) e^{\pm i(k \cdot x)}, \quad (3.10)$$

donde se cumplirá la condición adicional:

$$\omega_k^2 = m^2 + \mathbf{k}^2, \quad (3.11)$$

relación, en la cual ω_k es la solución de energía, que de acuerdo a la relación anterior se podrá deducir:

$$\omega_k = \omega_{-k}. \quad (3.12)$$

Estas aproximaciones se realizan recordando algunos de los resultados obtenidos en el desarrollo del campo de Klein-Gordon neutro, en términos de ondas planas [4, 13, 14]. Por otra parte, es relevante discutir ciertos aspectos de las cantidades $\epsilon_k(\mathbf{k}, \lambda)$, que en la literatura se conocen como vectores de polarización [4] en las soluciones de onda plana viajando en la dirección de $\hat{\mathbf{k}}$ y que se polarizan de acuerdo a la dirección de λ . Sobre estos vectores recae la naturaleza vectorial del potencial A_i . Debido a la existencia de tres componentes de campo se deberá exigir que existan dos vectores de polarización transversos y un vector de polarización longitudinal, es decir, podremos escoger tres direcciones independientes, de las cuales, $\epsilon_k(\mathbf{k}, 1)$ y $\epsilon_k(\mathbf{k}, 2)$ son ortogonales a la dirección de propagación de la onda plana, mientras que $\epsilon_k(\mathbf{k}, 3)$ será paralelo a la dirección de propagación de la onda; como se indica en la figura (3.1)

En general se puede seleccionar tres vectores de polarización independientes, ortogonales y complejos, los cuales satisfacen las siguientes condiciones:

$$\epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot k = 0; \quad \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) = \delta_{\lambda\lambda_1}, \quad (3.13)$$

donde k es un cuadvivector [4].

En este punto, nuestro interés radica en el estudio cuántico de la teoría de P-R, por ello, se determinarán los campos desarrollados en soluciones de ondas planas, tal que la naturaleza vectorial

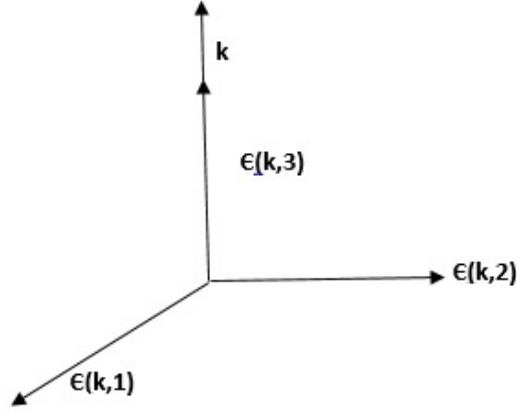


Figura 3.1: Aquí las direcciones del vector de polarización longitudinal y los dos vectores de polarización transversos.

del operador de campo $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ estará dada con base a los vectores de polarización de la siguiente manera:

$$\hat{A}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.14)$$

En la expresión anterior, se destacan los coeficientes $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ [4], sobre quienes recae el peso de operador; este caso es comparado con el desarrollo del campo neutro de Klein-Gordon en su representación cuántica [5, 14]. Debido a la disposición de estos operadores en la deducción (3.14) se garantizará que el operador de campo $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ sea hermítico.

Expansión de $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ en términos de ondas planas

Se ha mostrado en (3.7) que la teoría de P-R satisface cuánticamente:

$$\hat{\Pi}(x) = \partial_0 \hat{A}(x), \quad (3.15)$$

con base a ello, se destaca que el desarrollo del operador de campo $\hat{\Pi}$ estará dado en términos de ondas planas. Teniendo en cuenta que la dependencia espacio-temporal del operador de campo (3.14) radica en las funciones $e^{\pm i(k \cdot x)}$, se deduce la siguiente expresión:

$$\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} (-i\omega_k) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.16)$$

Al igual que en el caso del operador de campo \hat{A} , la disposición de los operadores de expansión garantizarán que el operador $\hat{\Pi}$ sea hermítico.

Determinación del álgebra de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$

En las secciones anteriores se ha indicado la forma que deberán tener los operadores de campo $\hat{\mathbf{A}}(x)$ y $\hat{\Pi}(x)$, quienes han sido desarrollados en términos de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$. Por otra parte, varias de las observables del sistema se estructuran con base a $(\hat{A}(x), \hat{\Pi}(x))$, por lo cual se busca determinar el álgebra que deberán satisfacer los operadores de expansión, por lo tanto, será necesario expresar a $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ separadamente en términos de los campos $\hat{\mathbf{A}}(x)$ y $\hat{\Pi}(x)$, esto puede ser logrado mediante la manipulación de las condiciones de orto-normalización de las funciones $e^{\pm i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}$, con base a ello, se obtendrán las siguientes expresiones (véase **Apéndice I**):

$$\sqrt{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right], \quad (3.17)$$

$$\frac{i\sqrt{2\omega_k}}{\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right]. \quad (3.18)$$

El paso a seguir, es sumar las identidades (3.17) y (3.18) de lo cual, se obtendrá la suma del operador $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \right] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}. \quad (3.19)$$

Dado que se busca fijar el valor de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ más no el valor de su sumatoria, se emplean las condiciones impuestas sobre los vectores de polarización (3.13), por ello, se multiplica por derecha la anterior relación por el vector de polarización $\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1)$, esto con el fin de hacer colapsar la sumatoria a un solo valor, por ende se deduce:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left(\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \right) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1), \quad (3.20)$$

donde la expresión anterior es reducida al siguiente resultado:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[(\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (3.21)$$

Organizando los términos en forma más adecuada para facilitar futuros cálculos, se verá que la expresión anterior puede ser reescrita como se muestra a continuación:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) = i \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \left[(\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.22)$$

En fin, una vez se ha determinado la forma de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ se realizará la operación adjunto hermitiano sobre (3.22), esto fijará la forma de $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ resultando en:

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = -i \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \left[(\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) + i\omega_k \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.23)$$

Se pretende determinar el álgebra de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, para ello, se calculan las relaciones de conmutación que han de satisfacer con base al conjunto de conmutadores indicado en (3.2). Por consiguiente, se fija el siguiente conjunto de conmutadores (véase **Apéndice I**):

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \\ [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= 0 = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Operador Hamiltoniano

En esta sección, desarrollaremos el operador Hamiltoniano en términos de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, esto con el fin de analizar cual será la influencia sobre dicho operador. En busca de este objetivo, partimos de (2.77) considerando la versión clásica del Hamiltoniano para ser modificado. Teniendo en cuenta el comportamiento y características del tensor F_{ij} realizamos el siguiente análisis: Como se aprecia en (2.2), el tensor F_{ij} puede ser expresado en forma diferencial como sigue:

$$F_{ij} = \partial_i A_j - \partial_j A_i = -\epsilon_{ijk} B_k, \quad (3.25)$$

de lo cual, al realizar la siguiente operación y considerando las propiedades del tensor de Levi-Civita [9], se demuestra que:

$$\begin{aligned}
 F_{ij}F^{ij} &= (-\epsilon_{ijk}B_k)(\epsilon^{ijn}B^n), \\
 &= -(\delta_j^j\delta_k^n - \delta_j^n\delta_k^j)B_kB^n, \\
 &= -2\delta_k^nB_kB^n, \\
 &= 2B_nB_n = 2\mathbf{B}^2.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dado que el campo \mathbf{B} puede ser expresado en función del $\nabla \times \mathbf{A}$, la expresión (3.26) será reescrita:

$$F_{ij}F^{ij} = 2\mathbf{B}^2 = 2(\nabla \times \mathbf{A})^2. \tag{3.27}$$

Ahora, el término anterior (3.27) deberá ser reescrito otra vez, esto con el fin de obtener la forma más simplificada del Hamiltoniano clásico, debido a ello, se busca calcular la relación:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{A})^2 &= (\nabla \times \mathbf{A})_k(\nabla \times \mathbf{A})_k, \\
 &= \epsilon_{kij}\epsilon_{klm}\partial_iA_j\partial_lA_m \\
 &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})\partial_iA_j\partial_lA_m, \\
 &= (\partial_lA_m)(\partial_lA_m) - (\partial_mA_l)(\partial_lA_m) \\
 &= (\partial_lA_m)(\partial_lA_m) - \partial_l[(\partial_mA_l)A_m] + A_m(\partial_l\partial_mA_l), \\
 &= \partial_l[(\partial_lA_m)A_m] - A_m(\partial_l\partial_lA_m) - \partial_l[(\partial_mA_l)A_m] + A_m\partial_m(\partial_lA_l), \\
 &= \partial_l[(\partial_lA_m)A_m - A_m(\partial_mA_l)] - A_m(\nabla^2A_m) + A_m\partial_m(\nabla \cdot \mathbf{A}), \\
 &= \partial_l[(\partial_lA_m)A_m - A_m(\partial_mA_l)] - A_m(\nabla^2A_m).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Finalmente, con base al resultado anterior se reestructurará el Hamiltoniano clásico (2.77) como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H} &= \frac{1}{2} \int d^3x [(\Pi)^2(\mathbf{x}, t) + m^2\mathbf{A}^2(\mathbf{x}, t) - A_m(\mathbf{x}, t)(\nabla^2A_m(\mathbf{x}, t))] \\
 &+ \frac{1}{2} \int d^3x \partial_l [(\partial_lA_m)A_m - A_m(\partial_mA_l)].
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Clásicamente, se habían fijado condiciones de frontera sobre el campo fundamental $A_\mu(x)$, donde cada una de sus componentes estaba sometida a las condiciones (2.14), así, la segunda integral de (3.29) vista bajo el teorema de Gauss se expresa como:

$$\oint da_l [(\partial_lA_m)A_m - A_m(\partial_mA_l)], \tag{3.30}$$

la anterior deducción será nula cuando se tiene en cuenta el comportamiento asintótico del potencial vectorial. Por lo cual, el Hamiltoniano clásico se expresa como:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \int d^3x [(\Pi)^2(\mathbf{x}, t) + m^2 \mathbf{A}^2(\mathbf{x}, t) - A_m(\mathbf{x}, t)(\nabla^2 A_m(\mathbf{x}, t))]. \quad (3.31)$$

Por consiguiente, el Hamiltoniano cuántico se considera de la forma:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \int d^3x [\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) + m^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \cdot \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) - \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \cdot (\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t))] \quad (3.32)$$

El objetivo principal es indicar el operador Hamiltoniano en función de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, por lo cual, se deberá hacer uso de las expresiones (3.14) y (3.16), donde finalmente se obtendrá (véase **Apéndice I**):

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)]. \quad (3.33)$$

Como se puede apreciar en (3.33), éste operador Hamiltoniano tiene la misma forma funcional que el Hamiltoniano asociado a la cadena lineal de osciladores [5], por lo tanto, éste operador se puede interpretar como la suma de un número infinito de osciladores desacoplados de frecuencia angular ω_k .

Por otra parte, se busca interpretar el significado de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, para ello se calculan los siguientes conmutadores:

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{\mathbf{H}}] &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k [\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)], \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) [\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)] + [\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)] \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k (2\omega_k \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda_1 \lambda} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})) = \omega_p \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{\mathbf{H}}] &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)], \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left\{ [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)] \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) [\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)] \right\}, \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k (-2\omega_k \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda_1 \lambda} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})) = -\omega_p \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda). \end{aligned} \quad (3.35)$$

Hasta el momento, hemos trabajado los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, conociendo ciertos aspectos de ellos, sin embargo, no sabemos con certeza cual es el efecto o acción de estos sobre el estado fundamental $|0\rangle$; de este modo analizamos la acción del operador Hamiltoniano sobre $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)|n\rangle$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)|n\rangle$, donde $|n\rangle$ es un autoestado del operador Hamiltoniano, con autovalor asociado:

$$\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle, \quad (3.36)$$

de esta forma se obtiene (véase **Apéndice I**):

$$\hat{H}\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)|n\rangle = (E_n - \omega_k)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)|n\rangle, \quad (3.37)$$

$$\hat{H}\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)|n\rangle = (E_n + \omega_k)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)|n\rangle. \quad (3.38)$$

Las relaciones (3.37) y (3.38) muestran que los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, toman un autoestado de \hat{H} e incrementan o disminuyen su autovalor de energía asociado en una cantidad de ω_k , de esta forma se asocia estas cantidades con operadores de creación y aniquilación [4, 12] que al comparar con la cadena lineal de osciladores, los operadores que se ha usado para desarrollar el potencial $\hat{A}(x)$ muestran características equivalentes. Por consiguiente se define:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)|0\rangle \equiv 0. \quad (3.39)$$

También se asegura que el operador $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ genera un estado de mayor energía a partir de otro con menor energía.

Siguiendo este orden de ideas, la interpretación anterior permite determinar que el operador Hamiltoniano (3.33) esta acompañado de un problema relacionado con el valor de energía asociado al estado fundamental, que debería fijarse como:

$$\hat{H}|0\rangle = E_0|0\rangle, \quad (3.40)$$

donde E_0 deberá ser la energía del estado fundamental. De acuerdo a lo anterior vamos a encontrar el valor de energía del estado fundamental medida a través del operador Hamiltoniano de la teoría de P-R, con lo cual, se establecerá:

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0|\hat{\mathbf{H}}|0\rangle, \\ &= \langle 0|\frac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^3\int d^3k\omega_k[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)]|0\rangle. \end{aligned} \quad (3.41)$$

De acuerdo a las relaciones de conmutación de los operadores (3.24) se puede modelar la ecuación:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \delta_{\lambda\lambda}\delta^3(0). \quad (3.42)$$

Con base al planteamiento preliminar (3.42), el operador Hamiltoniano (3.33) podrá ser reestructurado conformándose así:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \delta_{\lambda\lambda}\delta^3(0) \right], \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right] + \delta^3(0) \int d^3k \omega_k. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Por ende, la identidad (3.41) pasaría a tener la siguiente configuración:

$$E_0 = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \langle 0 | \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right] | 0 \rangle + \delta^3(0) \int d^3k \omega_k \langle 0 | | 0 \rangle.$$

Partiendo de lo indicado en (3.39), el primer término de la ecuación (3.44) es igual cero, sin embargo, como consecuencia directa de la propiedad y estructura de la función delta de Dirac [9], en la anterior expresión se tendrá que la energía conocida como energía de punto cero es infinita para este sistema. No obstante, este infinito no tiene demasiadas complicaciones, debido a que las observables físicas involucran diferencias de energía y no valores absolutos de la misma. Tomando como ejemplo la energía potencial, la cual se considera como la diferencia de energía entre dos puntos, donde uno de los puntos se toma como punto referente o de menor energía. Por lo tanto, se establece al estado vacío como aquel consistente de cero partículas, la energía de éste debería ser cero. De este modo, se deberá realizar un ordenamiento normal [4, 5, 13] sobre el operador Hamiltoniano (3.33), esto con el fin de remover la contribución infinita del estado fundamental; este proceso será denotado por:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k : \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right] : . \quad (3.44)$$

El ordenamiento normal consiste en síntesis en ubicar los operadores de creación siempre a la izquierda de los operadores de aniquilación, sin hacer uso de ninguna de la relaciones de conmutación de los operadores de creación y aniquilación, en forma general se tendría que:

$$\begin{aligned} : \hat{a}_p \hat{a}_k^\dagger : &= \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_p, \\ : \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_p : &= \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_p, \\ : \hat{a}_k \hat{a}_p : &= \hat{a}_k \hat{a}_p = \hat{a}_p \hat{a}_k, \\ : \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_k^\dagger : &= \hat{a}_p^\dagger \hat{a}_k^\dagger = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_p^\dagger. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Basando nuestro análisis en este tipo de procesos, concluimos que la relación (3.44) se reduce a la forma:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right], \quad (3.46)$$

donde al analizar nuevamente la energía asociada al estado fundamental $|0\rangle$ bajo la acción del operador (3.46) se determina:

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0 | \hat{\mathbf{H}} | 0 \rangle, \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \langle 0 | \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right] | 0 \rangle \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Operador Momentum

Existe otro observable asociado al sistema cuántico, cuya cantidad se conoce como operador momentum del campo. Este operador deberá estar asociado a la cantidad de momentum de cada una de las partículas presentes en un estado cuántico. Recalcando nuevamente que nuestro estudio se basa en partículas que obedecerán la estadística de Bose-Einstein, cada estado tendrá cierto número de partículas con un momentum asociado, donde cada uno de estos estados debe satisfacer la relación:

$$\hat{\mathbf{P}} |p_n, \lambda\rangle = p_n |p_n, \lambda\rangle, \quad (3.48)$$

para lo cual, p_n será el momentum asociado al estado $|p_n, \lambda\rangle$.

Al igual que en el operador Hamiltoniano, se realizará un proceso análogo para obtener el operador Momentum, partiendo de los resultados clásico, descritos en (2.30), donde el Momentum de la teoría de P-R tendría la forma clásica de acuerdo a (2.38):

$$\mathbf{P} = - \int d^3x \left[\Pi(x) \vec{\nabla} \mathbf{A}(x) \right]. \quad (3.49)$$

Dado que el operador Momentum esta asociado a una observable del sistema, éste operador debe ser hermítico:

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}^\dagger, \quad (3.50)$$

sin embargo, la estructura propuesta en su forma clásica no satisfecería esta condición, puesto que los operadores de campo $\hat{\mathbf{A}}(x), \hat{\Pi}(x)$ no conmutan, por ende, una forma más natural de escribir el

producto de estas cantidades es simetrizar el Momentum a nivel clásico de acuerdo a la siguiente definición:

$$\mathbf{P} \equiv -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\Pi(x) \vec{\nabla} \mathbf{A}(x) + \vec{\nabla} \mathbf{A}(x) \Pi(x) \right], \quad (3.51)$$

posteriormente, se propone esta cantidad pero a nivel cuántico en la forma:

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv -\frac{1}{2} \int d^3x \left[\hat{\Pi}(x) \vec{\nabla} \hat{\mathbf{A}}(x) + \vec{\nabla} \hat{\mathbf{A}}(x) \hat{\Pi}(x) \right]. \quad (3.52)$$

Esta elección garantizará la identidad (3.50), es decir, que el operador momentum sea hermítico.

Al considerar las expansiones de los operadores de campo $\hat{\mathbf{A}}(x)$ y $\hat{\Pi}(x)$ indicadas en (3.14) y (3.16), al realizar los respectivos cálculos del operador momentum (3.52) en función de los operadores de creación y aniquilación, se adquiere la siguiente estructura (véase **Apéndice I**):

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.53)$$

Realizando un análisis basado en el álgebra de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, el operador momentum se reestructuraría como:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \delta^3(0) \right], \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \delta^3(0) \int d^3x \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Considerando que la función delta de Dirac aportaría una contribución infinita sobre el estado fundamental, se tendría un inconveniente en la medida de esta observable, sin embargo, al sumar todas las posibles orientaciones de momentum en un sistema, ésta suma resultaría siendo igual a cero, de tal modo que el segundo término de la relación anterior se anula, figurando el operador Momentum como:

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.55)$$

Finalmente el operador momentum asociado a la teoría de P-R aplicado sobre el estado fundamental $|0\rangle$, daría el siguiente valor esperado:

$$\langle 0 | \hat{\mathbf{P}} | 0 \rangle = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} \langle 0 | \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) | 0 \rangle = 0 \quad (3.56)$$

el cual es coherente con la suposición asumida sobre el estado fundamental, ya que si en el estado no existieran partículas no debería existir ningún momentum asociado.

Operador Espín

Teniendo en cuenta que el operador $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ fue desarrollado con base a la ecuación de Klein-Gordon, donde la solución se encuentra asociada a dos valores de energía, tanto positiva como negativa, se deberá introducir un observable que dé la distinción sobre el valor de energía al cual se encuentran relacionados los estados del sistema. Dado que el operador Hamiltoniano no logra establecer la diferencia entre la solución de energía de cada estado, se busca un observable adicional que rompa esta degeneración [4, 10].

Bajo transformaciones de Lorentz habíamos encontrado la cantidad conservada (2.35), la cual, correspondía al tensor Momento Angular-Espín de la teoría de P-R, esto a nivel clásico; por otra parte, si se busca asociar este elemento a un observable del sistema a nivel cuántico, se nota que la densidad tensorial se encuentran estrechamente relacionada con el momento orbital total J^μ ; que a su vez se relaciona con el momento angular y con el Espín. En esta sección se busca determinar el operador espín de la teoría de P-R en función de los operadores de creación y aniquilación ($\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$), basando nuestro estudio desde su contraparte clásica hasta llegar a su forma cuántica.

Clásicamente el desarrollo de la teoría se encuentra regido bajo la definición de los C.D. por tal razón, la cantidad conservada (2.37) es asociada al espín, la cual deberá ser definida como se ilustra a continuación:

$$S^{ik} \equiv \int_v [F^{0k} A^i - F^{0i} A^k], \quad (3.57)$$

esta cantidad puede ser modificada usando la definición del momento canónico conjugado, donde se había obtenido el resultado indicado en (2.38), por tal motivo la expresión anterior se reestructurará como:

$$S^{ik} \equiv \int_v [\Pi^k A_i - \Pi^i A_k]. \quad (3.58)$$

Observe que al estudiar la anterior definición, se tendrá esta como la componente j del espín:

$$(S_{ik})_j \equiv \int_v [\Pi_i A_k - \Pi_k A_i]_j, \quad (3.59)$$

en contraste se podrá introducir el siguiente tensor:

$$(S_{ik})_j \equiv - \int_v \epsilon_{jik} \Pi_i A_k, \quad (3.60)$$

donde ϵ_{jik} corresponde al tensor de Levi-Civita [9] en tres dimensiones. Al generalizar el resultado (3.60) se tendrá que el espín clásico definido como:

$$\mathbf{S} \equiv - \int_v \Pi \times \mathbf{A}. \quad (3.61)$$

Ahora, el paso a seguir será llevar éste resultado clásico a un versión cuántica en la forma:

$$S \rightarrow \hat{S}.$$

De acuerdo a la definición (3.61) los campos \mathbf{A} y Π pasarían a ser operadores, esto con el fin de garantizar:

$$\hat{\mathbf{S}} \equiv - \int_v : \hat{\Pi} \times \hat{\mathbf{A}} : \quad (3.62)$$

Nótese que se ha introducido la notación correspondiente a un ordenamiento normal, con el fin de evitar posibles contribuciones infinitas sobre el estado fundamental, tal y como ha ocurrido anteriormente en el operador \hat{H} ; de este modo, una definición para el operador espín en términos de los operadores $\hat{\mathbf{A}}$ y $\hat{\Pi}$ será obtenida, cuyos operadores ya han sido desarrollos en función de los operadores de creación y aniquilación, (3.14) y (3.16), por lo tanto, al desarrollar el operador Espín en función de estas expansiones se llegaría a la expresión reducida [4] (véase **Apéndice I**):

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \left[(\epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda)) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) - (\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda)) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.63)$$

Teniendo en cuenta que en la teoría relativista, el momento angular \mathbf{L} y el espín \mathbf{S} de una partícula en movimiento no se conservan por separado, únicamente se conserva el momento orbital total $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$. Por ello, tampoco se conserva la proyección de espín en una dirección dada cualquiera, en consecuencia, esta cantidad no sirve para enumerar los estados de polarización de una partícula en movimiento.

Dado que la proyección del espín sobre la dirección orientada del vector de onda se conserva; ya que $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, el producto $\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$ coincide con el producto $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ para $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}$. A esta proyección de espín sobre la dirección del vector de onda se le conoce como Helicidad [15], se aplica el razonamiento anterior para poder encontrar el operador Helicidad definiendo:

$$\hat{\Lambda} \equiv \hat{S} \cdot \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (3.64)$$

Por otra parte, la dirección del vector de onda será:

$$e_k \equiv \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}. \quad (3.65)$$

Con ello se deduce que el operador Helicidad podrá ser calculado mediante la expresión:

$$\hat{\Lambda} = \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \left[(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) - (\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.66)$$

Es de vital importancia resaltar que el vector de polarización $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 3)$ se encuentra en la misma dirección del impulso, por ello al realizar la operación:

$$\sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 (\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda)) \cdot e_k = (e_k \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda_1)) \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda), \quad (3.67)$$

para valores de $\lambda, \lambda_1 = 3$ no se presentará contribución alguna, puesto que:

$$e_k \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, 3) = 0. \quad (3.68)$$

Observe que la expresión (3.67) resultaría en el triple producto de los vectores de polarización transversos y la dirección del impulso, basando nuestro argumento en que estos elementos forman un sistema ortogonal de coordenadas, los únicos factores que contribuirían en él, serían aquellos donde $\lambda \neq \lambda_1$ por lo tanto, la expresión (3.66) se redefine como:

$$\hat{\Lambda} = \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda \neq \lambda_1=1}^2 \left[(\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) - (\boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (3.69)$$

Se concluye que el operador Helicidad será expresado como:

$$\hat{\Lambda} = i \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 2) \hat{a}(\mathbf{k}, 1) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 1) \hat{a}(\mathbf{k}, 2) \right]. \quad (3.70)$$

De acuerdo a la relación deducida anteriormente, se ha llegado a un operador Helicidad en función de los operadores de creación y aniquilación, por lo tanto se puede esperar que los autoestados del tipo $\hat{a}^\dagger(\mathbf{K}, \lambda) |0\rangle$ sean autoestados de éste operador, sin embargo, el operador Helicidad (3.70) no

es diagonal, , por ende, tampoco serán autoestados del operador Helicidad, ya que componentes el operador espín no conmuta con el momentum. Esto genera un nuevo inconveniente, que podrá ser solucionado definiendo un nuevo conjunto de operadores mediante las transformaciones lineales:

$$\begin{aligned}\hat{a}(\mathbf{k}, +) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}(\mathbf{k}, 1) - i\hat{a}(\mathbf{k}, 2)) \\ \hat{a}(\mathbf{k}, -) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}(\mathbf{k}, 1) + i\hat{a}(\mathbf{k}, 2)) \\ \hat{a}(\mathbf{k}, 0) &= (\hat{a}(\mathbf{k}, 3))\end{aligned}\quad (3.71)$$

este tipo de transformaciones se encuentran estructuradas en bases esféricas [16].

De acuerdo al álgebra que satisfacen los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ indicada en (3.24), se analiza un tipo de álgebra similar para las transformaciones lineales (3.71) fijando así (véase **Apéndice I**):

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}', +), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\right] = \left[\hat{a}(\mathbf{k}', -), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', -)\right] = \left[\hat{a}(\mathbf{k}', 0), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0)\right] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.72)$$

donde los operadores $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0)$ fueron obtenidos mediante la operación adjunto hermitiano del sistema de transformaciones (3.71).

Al inspeccionar el anterior resultado y al poner éste en comparación con el álgebra indicada en (3.24), se nota que las relaciones de conmutación son iguales, por consiguiente, nos restaría reescribir el operador Helicidad en términos de lo planteado en (3.71) determinando con esto (véase **Apéndice I**):

$$\hat{\Lambda} = \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -) \right] \quad (3.73)$$

Consecuentemente, se definen los estados:

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) |0\rangle = |\mathbf{k}, +\rangle \quad (3.74)$$

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) |0\rangle = |\mathbf{k}, -\rangle \quad (3.75)$$

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0) |0\rangle = |\mathbf{k}, 0\rangle \quad (3.76)$$

donde al aplicar el operador Helicidad, es posible fijar los siguientes resultados con base a las relaciones de conmutación (3.72) (véase **Apéndice I**):

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}, +\rangle = (+1) |\mathbf{k}, +\rangle \quad (3.77)$$

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}, -\rangle = (-1) |\mathbf{k}, -\rangle \quad (3.78)$$

La proyección del espín en la dirección de movimiento aquí ha sido elegida a lo largo del eje z , esta es llevada en una cantidad con Helicidad positiva contribuyendo en un valor de $+1$ y con Helicidad negativa aportando una contribución en -1 unidad, donde los posible estados de espín estarían dados por un triplete de la forma $(-1, 0, +1)$, de lo cual, la contribución cero deberá ser entendida como la cantidad longitudinal, asociada al estado, formado a partir del operador $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0)$, así:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}, 0\rangle = 0 \quad (3.79)$$

Propagador de Feynman asociado al campo de P-R

Un ingrediente esencial en la teoría de campos interactuantes es el Propagador de Feynman [4, 5, 14], donde éste es definido como un particular valor esperado en el estado fundamental de un producto de operadores de campo bajo la acción de un producto ordenamiento temporal. Con respecto a la teoría de P-R el propagador de Feynman será definido como:

$$i\Delta_{F\mu\nu} \equiv \langle 0 | \mathbf{T} [\hat{\mathbf{A}}_\mu(x) \hat{\mathbf{A}}_\nu(y)] | 0 \rangle \quad (3.80)$$

donde \mathbf{T} denota el producto ordenamiento temporal del operador de campo $\hat{\mathbf{A}}_\mu(x)$ y $\hat{\mathbf{A}}_\nu(x)$. Dado dos operadores de campo dependientes del tiempo $\hat{\Phi}$ y $\hat{\Psi}$ que satisfacen relaciones de conmutación, el producto ordenamiento temporal se simbolizará como:

$$\mathbf{T} [\hat{\Phi} \hat{\Psi}] = \Theta(x_0 - y_0) \hat{\Phi}(x) \hat{\Psi}(y) + \Theta(y_0 - x_0) \hat{\Psi}(y) \hat{\Phi}(x) \quad (3.81)$$

donde $\Theta(x_0 - y_0)$ se conoce como función paso [9]. Éste término da la idea del orden cronológico para el cual, los operadores $\hat{\Phi}$ y $\hat{\Psi}$ están siendo aplicados sobre un estado.

Por otra parte recordando la definición de los vectores de polarización asociado a la teoría de P-R, se había definido estos como siendo dos vectores transversales a la dirección de propagación de la onda identificados con los parámetros $\lambda = 1, 2$ y un vector longitudinal a ésta denotado por el valor $\lambda = 3$, estos cuadvectores satisfacen la siguiente relación de completez [4]:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu(\mathbf{k}, \lambda) = - \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right) \quad (3.82)$$

De acuerdo a la estructura de los vectores de polarización, el operador de campo $\hat{\mathbf{A}}$ podrá ser expresado como:

$$\hat{\mathbf{A}}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{-ik \cdot x} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{ik \cdot x} \right) \quad (3.83)$$

De esta manera, al reemplazar la expansión del operador de campo (3.83) dentro de la definición (3.80), el propagador de Feynman asociado a la teoría de P-R será (véase **Apéndice I**):

$$i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = - \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) i\Delta_F(x-y) - \frac{i}{m^2} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta^4(x-y) \quad (3.84)$$

dejando el resultado inmediatamente anterior en función del propagador escalar de Feynman [4, 5, 14] que se define como:

$$i\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \left[\Theta(x_0 - y_0) \exp^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0) \exp^{ik \cdot (x-y)} \right] \quad (3.85)$$

Recordando los procesos realizados en la búsqueda del propagador de Feynman para el campo de Klein-Gordon cargado [4], donde la igualdad (3.85) se torna en la expresión:

$$i\Delta_F(x-y) = i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\exp^{-ik \cdot (x-y)} \frac{1}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \quad (3.86)$$

siendo ϵ un parámetro infinitesimal. Como una consecuencia directa de la estructura del propagador de Feynman escalar, se establece que (3.84) puede ser llevada a la próxima igualdad:

$$\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\exp^{-ik \cdot (x-y)} \frac{\left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right)}{k^2 - m^2 + \epsilon} \right] - \frac{i}{m^2} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta^4(x-y) \quad (3.87)$$

Dado que la función delta de Dirac se representa en forma integral [9] como:

$$\delta^4(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \exp^{-ik \cdot (x-y)} \quad (3.88)$$

se puede obtener en adición a las relaciones (3.87) y (3.88), el propagador de Feynman asociado a la teoría de P-R como sigue:

$$\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\exp^{-ik \cdot (x-y)} \Delta_{F\mu\nu}(k) \right] \quad (3.89)$$

donde $\Delta_{F\mu\nu}(k)$ será comprendido como el propagador de Feynman en el espacio de los momentos, representado mediante la definición:

$$\Delta_{F\mu\nu}(k) \equiv - \frac{\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu \right)}{k^2 - m^2 + \epsilon} - \frac{i}{m^2} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \quad (3.90)$$

Capítulo 4

Estudio Clásico del campo de Proca Complejo

Teniendo en cuenta el estudio realizado sobre el campo de Proca Real, se lleva a cabo un análisis clásico sobre el campo de Proca Complejo (P-C), campo que se describe a partir de la próxima densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t)F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{\mu*}(\mathbf{x}, t)A_\mu(\mathbf{x}, t), \quad (4.1)$$

en la cual, $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ y $A^{\mu*}(\mathbf{x}, t)$ representan los campos fundamentales, donde $\mu = 0, 1, 2, 3$ denotan las componentes espacio-temporales. El tensor de segundo orden $F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t)$ tendrá la representación diferencial en términos del campo fundamental $A^{\mu*}(\mathbf{x}, t)$ en la forma:

$$F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t) = \partial_\mu A_\nu^*(x) - \partial_\nu A_\mu^*(x). \quad (4.2)$$

Las características de éste tensor serán, ser antisimétrico y poseer una representación matricial que puede ser analizada a partir de la definición (7.4). Destacando algunas cualidades de esta densidad Lagrangiana, estaría el hecho de poseer en su estructura a los campos $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ y $A^{\mu*}(\mathbf{x}, t)$, que serán tratados como campos totalmente independientes. De acuerdo a la densidad Lagrangiana (4.1) de la teoría de P-C, se espera que al contener en ella un término de masa, no cumplirá con la invarianza de Gauge Local.

Otro rasgo importante será que la teoría de P-C es descrita por una densidad Lagrangiana singular, por lo cual se ha de esperar que durante el desarrollo del análisis aparezcan vínculos tanto a nivel Lagrangiano como Hamiltoniano.

Por último, se destaca que la presencia de un campo complejo clásicamente denota la existencia de cargas, tal y como se ha observado en la teoría de Klein-Gordon para campo complejo [4, 14], hecho que ha de caracterizar nuestro sistema.

Formalismo Lagrangiano

Cálculo de las Ecuaciones de Euler-Lagrange para el campo de P-C

De acuerdo a la densidad Lagrangiana indicada en (4.1), se tendrá al definir la acción del sistema una dependencia en la forma:

$$A[A_\mu, A_\mu^*] \equiv \int d^4x \mathcal{L}[A_\mu, A_\mu^*, \partial_\nu A_\mu, \partial_\nu A_\mu^*], \quad (4.3)$$

que en concordancia al principio de variaciones, la acción se extremiza, si y solo sí, han de cumplirse las siguientes ecuaciones de campo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)} \right) = 0, \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^*} - \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu^*)} \right) = 0. \quad (4.5)$$

Ecuaciones en las cuales, los campos A_μ y $A^{*\mu}$ estarán sometidos a las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_1) &= \delta A_\mu(\mathbf{x}, t_2) = 0, \\ \delta A_\mu^*(\mathbf{x}, t_1) &= \delta A_\mu^*(\mathbf{x}, t_2) = 0, \\ |\mathbf{x}| &\rightarrow \infty; A_\mu(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0; A_\mu^*(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Por otra parte, para estimar (4.4) y (4.5) sobre los campos fundamentales, es necesario calcular:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = m^2 \frac{\partial}{\partial A_\mu} (A_\alpha A^{*\alpha}) = m^2 A^{*\alpha} \delta_\alpha^\mu = m^2 A^{*\mu}(\mathbf{x}, t), \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu^*} = m^2 \frac{\partial}{\partial A_\mu^*} (A_\alpha^* A^\alpha) = m^2 (A^\alpha \delta_\alpha^\mu) = m^2 A^\mu(\mathbf{x}, t). \quad (4.8)$$

Del proceso realizado sobre las derivadas de los campos fundamentales, se encuentran los resultados:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} (F_{\alpha\beta} F^{*\alpha\beta}), \\
 &= -\frac{1}{2} F^{*\alpha\beta} \left[\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} - \frac{\partial(\partial_\beta A_\alpha)}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right], \\
 &= -\frac{1}{2} \left[F^{*\alpha\beta} \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - F^{*\alpha\beta} \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \right], \\
 &= -\frac{1}{2} \left[F^{*\nu\mu} - \underbrace{F^{*\mu\nu}}_{=-F^{*\nu\mu}} \right], \\
 &= -F^{*\nu\mu}, \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*)} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*)} (F_{\alpha\beta}^* F^{\alpha\beta}), \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\alpha\beta} \left[\frac{\partial(\partial_\alpha A_\beta^*)}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*)} - \frac{\partial(\partial_\beta A_\alpha^*)}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*)} \right], \\
 &= -\frac{1}{2} \left[F^{\alpha\beta} \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - F^{\alpha\beta} \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \right], \\
 &= -\frac{1}{2} \left[F^{\nu\mu} - \underbrace{F^{\mu\nu}}_{=-F^{\nu\mu}} \right], \\
 &= -F^{\nu\mu}. \tag{4.10}
 \end{aligned}$$

Con base a lo calculado desde (4.7) hasta (4.10) se podrá apreciar, que las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos fundamentales de la teoría de P-C presentan la estructura:

$$\square A^\mu(\mathbf{x}, t) - \partial^\mu(\partial_\nu A^\nu(\mathbf{x}, t)) + m^2 A^\mu(\mathbf{x}, t) = 0, \tag{4.11}$$

$$\square A^{*\mu}(\mathbf{x}, t) - \partial^\mu(\partial_\nu A^{*\nu}(\mathbf{x}, t)) + m^2 A^{*\mu}(\mathbf{x}, t) = 0. \tag{4.12}$$

Las igualdades (4.11) y (4.12) muestran que tanto el campo $A^\mu(\mathbf{x}, t)$ como $A^{*\mu}(\mathbf{x}, t)$ cumplen la ecuación de Proca libre de corrientes externas [4, 11].

Cantidades conservadas

Las cantidades conservadas asociadas a la teoría de P-C, son calculadas realizando un proceso análogo al efectuado en la sección (2.2.3), por lo cual, hemos de hacer uso del teorema de Noether, donde se considerarán las siguientes simetrías:

Tensor Canónico Momento-Energía

Bajo simetría de traslaciones espacio-temporales se busca determinar la densidad tensorial Momento-Energía, donde se considerará homogeneidad en el espacio-tiempo. De este modo, el tensor Momento-Energía podrá ser calculado a partir de [4, 5]:

$$\Theta^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha(x))} \partial^\nu A_\alpha(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha^*(x))} \partial^\nu A_\alpha^*(x) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}(x). \quad (4.13)$$

Usando los resultados encontrados en (4.9) y (4.10), se establece la identidad:

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = F^{*\alpha\mu} \partial^\nu A_\alpha(x) + F^{\alpha\mu} \partial^\nu A_\alpha^*(x) - \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{1}{2} F_{\alpha\beta}(x) F^{*\alpha\beta}(x) + m^2 A_\alpha(x) A^{*\alpha}(x) \right). \quad (4.14)$$

Así, la cantidades conservadas en la teoría de P-C bajo simetría de traslaciones espacio-temporales, quedarán descrita en la forma:

$$\begin{aligned} P^0 &= \int_V d^3x \Theta^{00}(x), \\ &= \int_V d^3x \mathcal{H}_c(x), \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^k &= \int_V d^3x \Theta^{0k}(x), \\ &= \int_V d^3x (F^{\alpha 0} \partial^k A_\alpha(x) - \underbrace{\eta^{0k}}_{=0} \mathcal{L}), \\ &= \int_V d^3x (F^{*\alpha 0} \partial^k A_\alpha(x) + F^{\alpha 0} \partial^k A_\alpha^*(x)), \end{aligned} \quad (4.16)$$

donde las cantidades P^0 y \mathbf{P}^k se encuentran estrechamente relacionadas con la energía y el momentum del sistema.

Invarianza de Lorentz

La densidad Lagrangiana (4.1) bajo simetría de Lorentz, tendrá asociada una corriente de Noether conocida con el nombre de densidad tensorial Momento Angular-Espín, que será expresada por:

$$M^{\mu\nu\lambda} \equiv \Theta^{\mu\lambda} x^\nu - \Theta^{\mu\nu} x^\lambda + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^\sigma)} (I^{\nu\lambda})^{\sigma\beta} A_\beta + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A^{*\sigma})} (I^{\nu\lambda})^{\sigma\beta} A_\beta^*, \quad (4.17)$$

expresión en la cual, se incluyen el conjunto de generadores de rotaciones infinitesimales $I^{\nu\lambda}$ [5], que en componentes fueron representados en (2.32) y quienes juegan un papel muy importante a la

hora de establecer la ecuación de continuidad y la carga de Noether asociada a la simetría de Lorentz, cantidades que se muestran a continuación (véase **Apéndice J**):

$$\partial_\mu M^{\mu\nu\lambda} = 0, \quad (4.18)$$

$$M^{\nu\lambda} \equiv \int_V d^3x \left[\Theta^{0\lambda} x^\nu - \Theta^{0\nu} x^\lambda \right] + \int_V d^3x \left\{ \left[F^{*0\lambda} A^\nu - F^{*0\nu} A^\lambda \right] + \left[F^{0\lambda} A^{*\nu} - F^{0\nu} A^{*\lambda} \right] \right\}. \quad (4.19)$$

El tensor $M^{\mu\nu\lambda}$ tendrá asociado un momento angular y un espín, los cuales serán sustraídos de la cantidad conservada (4.19), denotados como:

$$L^{\nu\lambda} \equiv \int_V d^3x \left[\Theta^{0\lambda} x^\nu - \Theta^{0\nu} x^\lambda \right], \quad (4.20)$$

$$S^{\nu\lambda} \equiv \int_V d^3x \left\{ \left[F^{*0\lambda} A^\nu - F^{*0\nu} A^\lambda \right] + \left[F^{0\lambda} A^{*\nu} - F^{0\nu} A^{*\lambda} \right] \right\}. \quad (4.21)$$

Transformación de fase Global

Recordando la experiencia adquirida en el campo de Klein-Gordon cargado, se estudia la transformación de fase global actuando sobre la densidad Lagrangiana (4.1), aquí se consideran clásicamente las siguientes transformaciones sobre los campos fundamentales:

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = \exp^{i\epsilon} A_\mu, \quad (4.22)$$

$$A_\mu^* \rightarrow A'^*_\mu = \exp^{i\epsilon} A_\mu^*, \quad (4.23)$$

donde ϵ es un parámetro constante.

Se debe demostrar que la densidad Lagrangiana (4.1) es invariante bajo (4.22) y (4.23), si esto ha de cumplirse, del teorema de Noether [5] se establece que existe una cantidad conservada, por lo tanto, la expresión (4.1) se torna en:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2} F'^*_{\mu\nu}(\vec{x}, t) F'^{\mu\nu}(\vec{x}, t) + m^2 A'^{\mu*}(\vec{x}, t) A'_\mu(\vec{x}, t). \quad (4.24)$$

Al reemplazar las transformaciones (4.22) y (4.23) se puede comprobar, que la densidad Lagrangiana de la teoría de P-C es invariante (véase **Apéndice J**) bajo dichas transformaciones, obteniendo con ello, la corriente de Noether [4]:

$$j^\mu = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} A_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*)} A_\mu^* \right), \quad (4.25)$$

por ende, al remplazar las relaciones (4.9) y (4.10) en la expresión inmediatamente anterior, se tendrá la carga conservada correspondiente a $\nu = 0$, que ha de representarse como:

$$j^0 = Q = -i \int d^3x (F^{*\mu 0} A_\mu - F^{\mu 0} A_\mu^*). \quad (4.26)$$

Formalismo Hamiltoniano

La transición del espacio de configuraciones al espacio de fase, ocurre cuando se realiza el cambio de las variables dinámicas $(A_\mu, \partial_\nu A_\mu, A_\mu^*, \partial_\nu A_\mu^*)$ por los pares canónicos $(A_\mu, \Pi^\mu, A_\mu^*, \Pi^{*\mu})$, es por ello, que en el estudio canónico de la teoría de P-C [4, 11] han de definirse los momentos canónicos asociados a los campos fundamentales, que en consecuencia a las ecuaciones (4.9) y (4.10), se determinan como:

$$\Pi^\mu = \Pi^\mu(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu(\mathbf{x}, t))} = F^{*\mu 0}, \quad (4.27)$$

$$\Pi^{*\mu} = \Pi^{*\mu}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu^*(\mathbf{x}, t))} = F^{\mu 0}. \quad (4.28)$$

Con base a los anteriores resultados, se analizan las componentes espacio-temporales de los momentos canónicos asociados a la teoría, para lo cual, las componentes temporales $\mu = 0$ dan como resultado:

$$\Pi^0 = F^{*00} = 0, \quad (4.29)$$

$$\Pi^{*0} = F^{00} = 0, \quad (4.30)$$

mientras que las componentes espaciales $\mu = i$ generan las relaciones:

$$\Pi^i = F^{*i0} = F_{0i}^* = \partial_0 A_i^* - \partial_i A_0^*, \quad (4.31)$$

$$\Pi^{*i} = F^{i0} = F_{0i} = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (4.32)$$

Notamos que no se están representando velocidades en las expresiones (4.29) y (4.30), es decir, derivadas en relación al tiempo de los campos fundamentales, de este modo, las relaciones mencionadas se definen como vínculos primarios [2, 6, 7], caracterizando la teoría de P-C como singular. Se denotarán los vínculos primarios de la teoría de P-C como:

$$\Psi_1 \equiv \Pi^0(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (4.33)$$

$$\Psi_2 \equiv \Pi^{*0}(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (4.34)$$

donde adoptamos el signo \approx que denota igual débil [2, 6, 7].

Subsecuentemente, se define la densidad Hamiltoniana canónica partiendo de:

$$\mathcal{H}_c(x) \equiv \Pi^\mu(x) \partial_0 A_\mu(x) + \Pi^{*\mu}(x) \partial_0 A_\mu^*(x) - \mathcal{L}(\vec{x}, t), \quad (4.35)$$

que al retomar la definición de la densidad Lagrangiana (4.1) y la forma de los momentos canónicos (4.31) y (4.32) se establecerá, que la densidad Hamiltoniana del sistema es (Véase **Apéndice K**):

$$\mathcal{H}_c \equiv F^{*\mu 0} \partial_0 A_\mu + F^{\mu 0} \partial_0 A_\mu^* + \frac{1}{2} F_{\mu\nu}(x) F^{*\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2} A_\mu(x) A^{*\mu}(x). \quad (4.36)$$

Expandiendo la suma sobre los índices μ y ν , la anterior expresión se estructura como:

$$\mathcal{H}_c = \left[\Pi^{*k} \Pi^k + \Pi^k \partial_k A_0 + \Pi^{*k} \partial_k A_0^* - \frac{m^2}{2} A_\mu^* A^\mu + \frac{1}{2} F_{ki} F^{*ki} \right]. \quad (4.37)$$

El Hamiltoniano canónico de la teoría de P-C es dado por [4, 11]:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \mathcal{H}_c, \\ &= \int d^3x \left[\Pi^{*k} \Pi^k + \Pi^k \partial_k A_0 + \Pi^{*k} \partial_k A_0^* - \frac{m^2}{2} A_\mu^* A^\mu + \frac{1}{2} F_{ki} F^{*ki} \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

Por otra parte, esta ecuación puede ser representada en forma más compacta, por lo cual, la estructura del Hamiltoniano canónico del sistema se reescribirá utilizando las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \Pi^k (\partial_k A_0) &= \partial_k (\Pi^k A_0) - (\partial_k \Pi^k) A_0, \\ \Pi^{*k} (\partial_k A_0^*) &= \partial_k (\Pi^{*k} A_0^*) - (\partial_k \Pi^{*k}) A_0^*, \end{aligned}$$

donde al introducir la relaciones anteriores en (4.38), se comprueba:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^3x \left[\Pi^{*k} \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \partial_k \Pi^{*k} A_0^* - m^2 A_\mu A^{*\mu} + \frac{1}{2} F_{ki} F_{ki}^* \right] \\ &\quad + \int d^3x \left[\partial_k (\Pi^k A_0) \right] + \int d^3x \left[\partial_k (\Pi^{*k} A_0^*) \right], \end{aligned} \quad (4.39)$$

posteriormente, se emplea el teorema de Gauss en tres dimensiones, esto con el fin de llegar a la próxima deducción:

$$\begin{aligned} &= \int d^3x \left[\Pi^{*k} \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \partial_k \Pi^{*k} A_0^* - m^2 A_\mu A^{*\mu} + \frac{1}{2} F_{ki} F_{ki}^* \right] \\ &\quad + \oint d\mathbf{a}. [\nabla(\Pi A_0)] + \oint d\mathbf{a}. [\nabla(\Pi^* A_0^*)], \end{aligned} \quad (4.40)$$

relación en la cual, los dos últimos términos corresponden a una integral realizada sobre el contorno de una superficie arbitraria que se extiende hacia el infinito, que de acuerdo a las condiciones de frontera (4.6) puede mostrarse que son nulas. En correspondencia con los resultados previos, se concluye que el Hamiltoniano canónico de la teoría de P-C es:

$$H_c = \int d^3x \left[\Pi^{*k} \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - \partial_k \Pi^{*k} A_0^* - m^2 A_\mu A^{*\mu} + \frac{1}{2} F_{ki} F_{ki}^* \right]. \quad (4.41)$$

El Hamiltoniano determinado en (4.41) no está definido únicamente, ya que podemos adicionar cualquier combinación lineal de los vínculos primarios y aun así no se verá modificado. Ésta combinación será conocida como Hamiltoniano primario, donde la dinámica del sistema se encontrará regida por éste Hamiltoniano [4, 12] y será definido como:

$$H_p = \int d^3x \left[\Pi^k \Pi^k - \partial_k \Pi^k A_0 - m^2 A_\mu A^\mu + \frac{1}{2} F_{ki} F_{ki} + \lambda_1 \Psi_1 + \lambda_2 \Psi_2 \right], \quad (4.42)$$

en la expresión anterior, los términos λ_1 y λ_2 se conocen como multiplicador de Lagrange, asociados a los vínculos primarios $\Psi_1(x)$ y $\Psi_2(x)$ [2, 6, 7].

Por consiguiente, se definen los corchetes de Poisson entre las variable del espacio de fase. El espacio de fase para nuestro sistema está determinado por los pares canónicos (A_μ, Π^μ) y $(A_\mu^*, \Pi^{*\mu})$, por lo tanto, al retomar la definición (2.47) las expresión matemática para los C.P. tendrá una estructura similar, aquí deberá entenderse que se está trabajando "Dos pares canónicos", por lo cual, los C.P. para dos variables arbitrarias cuyas dependencias son de la forma $C(A_\mu, \Pi^\mu, A_\mu^*, \Pi^{*\mu}) = C(\mathbf{x}, t)$ y $B(A_\mu, \Pi^\mu, A_\mu^*, \Pi^{*\mu}) = B(\mathbf{y}, t)$ se denotarán por:

$$\{C(\mathbf{x}, t), B(\mathbf{y}, t)\} \equiv \int d^3z \left\{ \frac{\delta C(\mathbf{x}, t)}{\delta A_\mu(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta B(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta C(\mathbf{x}, t)}{\delta \Pi^\mu(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta B(\mathbf{y}, t)}{\delta A_\mu(\mathbf{z}, t)} + \frac{\delta C(\mathbf{x}, t)}{\delta A_\mu^*(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta B(\mathbf{y}, t)}{\delta \Pi^{*\mu}(\mathbf{z}, t)} - \frac{\delta C(\mathbf{x}, t)}{\delta \Pi^{*\mu}(\mathbf{z}, t)} \frac{\delta B(\mathbf{y}, t)}{\delta A_\mu^*(\mathbf{z}, t)} \right\}. \quad (4.43)$$

En virtud de (4.43), se determina que los únicos C.P. fundamentales no nulos entre los pares canónicos, serán [4, 8]:

$$\begin{aligned} \{A_\mu(\mathbf{x}, t), \Pi^\nu(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \{A_\mu^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*\nu}(\mathbf{y}, t)\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Comparando con lo obtenido en teoría de P-R, nuevamente los vínculos primarios Ψ_1 y Ψ_2 son inconsistentes con los C.P. fundamentales; en vista de la incoherencia presentada con:

$$\{A_0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})?, \quad (4.45)$$

$$\{A_0^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})?, \quad (4.46)$$

estos vínculos serán estudiados bajo el formalismo de Dirac.

Análisis de consistencia de vínculos

La dinámica de cualquier variable del espacio de fase $R(\mathbf{x}, t) \equiv R(A_\mu, \Pi^\mu, A_\mu^*, \Pi^{*\mu})$, está dada por la ecuación de Hamilton [1, 8] en la forma:

$$\dot{R}(\mathbf{x}, t) \approx \{R(\mathbf{x}, t), H_p(\mathbf{y}, t)\}. \quad (4.47)$$

La evolución de los vínculos primarios deberá realizarse bajo (4.47), donde ha de cumplirse que los vínculos de la teoría de P-C se conserven durante toda la evolución dinámica del sistema, hecho que se ha determinado anteriormente como consistencia de los vínculos. Con el fin de establecer el conjunto completo de vínculos de la teoría en desarrollo, se procede a determinar la relación de consistencia para los vínculos primarios Ψ_1 y Ψ_2 , relación que se calcula a partir de (4.47), cumpliéndose así:

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_1(\mathbf{x}, t) &\approx \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_p(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} + \int d^3y \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \lambda_1(\mathbf{y}, t)\Psi_1(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad + \int d^3y \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \lambda_2(\mathbf{y}, t)\Psi_2(\mathbf{y}, t)\}, \\ &\approx 0, \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} \dot{\Psi}_2(\mathbf{x}, t) &\approx \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), H_p(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} + \int d^3y \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), \lambda_1(\mathbf{y}, t)\Psi_1(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad + \int d^3y \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \lambda_2(\mathbf{y}, t)\Psi_2(\mathbf{y}, t)\}, \\ &\approx 0, \end{aligned} \quad (4.49)$$

donde se debe garantizar que las relaciones de consistencias se anulen débilmente [2].

Se procede a calcular las relaciones anteriores descomponiendo estas en los siguientes términos, cuyo resultado se ha calculado parcialmente como (véase **Apéndice K**):

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{x}, t), \quad (4.50)$$

$$\{\Psi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t) = \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t). \quad (4.51)$$

Por otra parte, de acuerdo al grupo de C.P. fundamentales se encuentra:

$$\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \quad (4.52)$$

$$\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \quad (4.53)$$

$$\{\Pi^{*0}(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \quad (4.54)$$

y en correspondencia a los resultados (4.52),(4.53) y (4.54) se deduce, que el siguiente grupo de C.P. se anulan débilmente:

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \quad (4.55)$$

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \quad (4.56)$$

$$\{\Psi_2(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} \approx 0. \quad (4.57)$$

Dando continuidad al estudio, se introduce lo obtenido desde (4.50) hasta (4.57) en las relaciones (4.48) y (4.49) respectivamente, posterior a ello, se encuentra que la consistencia de los vínculos primarios Ψ_1 y Ψ_2 se garantiza sí:

$$\dot{\Psi}_1(\mathbf{x}, t) = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (4.58)$$

$$\dot{\Psi}_2(\mathbf{x}, t) = \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0. \quad (4.59)$$

Como se puede apreciar, los resultados mostrados en (4.58) y (4.59) representan nuevamente una relación entre las coordenadas del espacio fase, por lo cual, ha de interpretarse que gracias a la necesidad de garantizar la consistencia de los vínculos primarios Ψ_1 y Ψ_2 , han surgido resultados que denotaremos como vínculos secundarios [2, 6, 7], definidos como:

$$\Psi_3(\mathbf{x}, t) \equiv \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (4.60)$$

$$\Psi_4(\mathbf{x}, t) \equiv \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0. \quad (4.61)$$

Debido a la existencia de estos nuevos vínculos y con el propósito que se conserven durante toda la dinámica del sistema, se deberán cumplir las relaciones de consistencia:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_3(\mathbf{x}, t) &= \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), H_p\}, \\
 &= \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} + \int d^3y \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \lambda_1(\mathbf{y}, t)\Psi_1(\mathbf{y}, t)\}, \\
 &+ \int d^3y \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \lambda_2(\mathbf{y}, t)\Psi_2(\mathbf{y}, t)\}, \\
 &\approx 0,
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{\Psi}_4(\mathbf{x}, t) &= \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), H_p\}, \\
 &= \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} + \int d^3y \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \lambda_1(\mathbf{y}, t)\Psi_1(\mathbf{y}, t)\}, \\
 &+ \int d^3y \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \lambda_2(\mathbf{y}, t)\Psi_2(\mathbf{y}, t)\}, \\
 &\approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

Con lo cual, se busca simplificar los cálculos concernientes a las relaciones (4.62) y (4.63), para ello, se divide el trabajo en dos parte, resolviendo así la primera integral para ambas relaciones y posteriormente la segunda y tercera integral, donde al partir de los valores determinados para los C.P. fundamentales y de la definición del Hamiltoniano canónico de P-C , expresadas en (4.44) y (4.41) respectivamente, se procede a calcular:

$$\{\Psi_3(\mathbf{x}, t), H_c\}, \tag{4.64}$$

y

$$\{\Psi_4(\mathbf{x}, t), H_c\}, \tag{4.65}$$

en resumen, han de cumplirse las relaciones (véase **Apéndice K**):

$$\{\Psi_3(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = m^2 \partial_k^x A^{*k}(x), \tag{4.66}$$

$$\{\Psi_4(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = m^2 \partial_k^x A^k(x), \tag{4.67}$$

Continuando con nuestro análisis, el grupo de C.P. que relacionan los vínculos Ψ_3 y Ψ_4 se estructura como (véase **Apéndice K**):

$$\{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} = 0, \tag{4.68}$$

$$\{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} = m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.69)$$

$$\{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} = m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (4.70)$$

$$\{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} = 0. \quad (4.71)$$

Por consiguiente, se deducirá que el próximo conjunto de integrales se desarrollan en la forma:

$$\begin{aligned} \int d^3y \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \lambda_1 \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y \lambda_1(\mathbf{y}, t) \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \int d^3y \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \lambda_2 \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y \lambda_2(\mathbf{y}, t) (m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \\ &= m^2 \lambda_2(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (4.73)$$

$$\begin{aligned} \int d^3y \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \lambda_1 \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y \lambda_1(\mathbf{y}, t) (m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})), \\ &= m^2 \lambda_1(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (4.74)$$

$$\begin{aligned} \int d^3y \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \lambda_2 \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y \lambda_2(\mathbf{y}, t) \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (4.75)$$

Cuando se introduce el conjunto de resultados obtenidos desde (4.66) hasta (4.72), en las relaciones (4.62) y (4.63), se deduce:

$$\dot{\Psi}_3(\mathbf{x}, t) = m^2 \partial_k^x A^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 \lambda_2(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (4.76)$$

$$\dot{\Psi}_4(\mathbf{x}, t) = m^2 \partial_k^x A^k(\mathbf{x}, t) + m^2 \lambda_1(\mathbf{x}, t) \approx 0, \quad (4.77)$$

Se puede apreciar en los resultados (4.76) y (4.77) la existencia de relaciones entre las variables del espacio de fase y los multiplicadores de Lagrange, de este modo, se impone una condición sobre $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$, quienes quedarán descritas en función de los campos $A^k(x)$ y $A^{*k}(x)$; por lo cual, ha

de garantizarse que nuevos vínculos no sean generados en la teoría [2, 6, 7].

El conjunto de vínculos primarios y secundarios asociados a la teoría de P-C estará expresado por:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1(x) &\equiv \Pi^0(x) \approx 0, \\
 \Psi_2(x) &\equiv \Pi^{*0}(x) \approx 0, \\
 \Psi_3(x) &\equiv \partial_k \Pi^k(x) + m^2 A_0^*(x) \approx 0, \\
 \Psi_4(x) &\equiv \partial_k \Pi^{*k}(x) + m^2 A_0(x) \approx 0.
 \end{aligned} \tag{4.78}$$

Clasificación de vínculos como de Primera o Segunda Clase

Al igual que en capítulo 2, en esta sección tenemos tanto vínculos primarios como secundarios, más esta distinción no es de mayor importancia, puesto que son vistos como elementos de un mismo conjunto. La clasificación más importante dentro del método de Dirac, en el análisis canónico de la teoría de P-C, deberá consistir en clasificar los vínculos encontrados como vínculos de primera o segunda clase [2, 6, 7, 10]. En contraste con el conjunto de vínculos obtenidos en (4.78) y los CP presentados en (4.69) y (4.70), se podrá clasificar éste grupo de vínculos, según el criterio manejado en el método de Dirac, como un conjunto de vínculos de segunda clase, puesto que al menos un C.P. entre un vínculo de (4.78) con otro elemento del mismo conjunto es diferente de cero.

Por otra parte y aunque estos procesos no fueron requeridos dentro de los anteriores análisis, se puede determinar sin mayor dificultad los siguientes C.P. (véase **Apéndice K**):

$$\{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \tag{4.79}$$

$$\{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} \approx 0, \tag{4.80}$$

$$\{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} \approx 0. \tag{4.81}$$

Como se había hecho notar anteriormente, en el proceso de tratar los vínculos de segunda clase mediante los lineamientos del método de Dirac, es necesario construir la matriz cuyo elementos son calculados a través de:

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{y}, t)\}, \tag{4.82}$$

con $i,j=1,2,3,4$. La estructura de la matriz $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es analizada y desarrollada obteniéndose (véase

Apéndice K):

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.83)$$

El método de Dirac, establece que los elementos de la matriz indicada en (4.83) no sean nulos en su totalidad, puesto que esta matriz deberá ser invertible y por lo tanto, se deberá exigir que su determinante sea diferente de cero. Teniendo en cuenta que los vínculos de segunda clase pueden ser tratados bajo la definición de C.D. si y solo sí, la matriz de vínculos de segunda clase es regular [6, 7].

Debido a que la matriz (4.83) es una matriz funcional, se realizará la transformada de Fourier de cada una de sus componentes [9], concluyendo dicho proceso en el siguiente resultado (véase **Apéndice K**):

$$\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.84)$$

en comparación a (4.83), la matriz (4.84) únicamente posee componentes con valores numéricos; gracias a ello, será posible calcular su determinante, cumpliéndose así:

$$\det [\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] = -m^8. \quad (4.85)$$

Dado que $\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es una matriz regular, la matriz de los vínculos de segunda clase $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ es regular e invertible.

Corchetes de Dirac para campo de P-C

Con el objetivo de eliminar el conjunto de vínculos de segunda clase (4.78), se deberán calcular los C.D. de la teoría de P-C teniendo en cuenta la definición (2.67). Los vínculos permiten reconocer que existe un número de grados de libertad, más no indican cuales son dichos grados; se deberá calcular los diversos C.D. asumiendo un cierto número de variables independientes.

El formalismo de Dirac indica que bajo la definición de C.D. (2.67), resulta necesario conocer la forma de cada una de las componentes de $C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, por lo cual, es de vital importancia encontrar la matriz inversa de (4.83), cuyo resultado se indica a continuación (véase **Apéndice k**):

$$C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \\ 0 & 0 & \frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{v}) & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{v}) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{v}) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.86)$$

Una vez que se ha determinado la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase, se procede a definir las variables independientes, que bajo la definición (2.67) las igualdades débiles, se tornarán en igualdades fuertes, en la forma:

$$\begin{aligned} \Psi_1(\mathbf{x}, t) &= \Pi^0(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \Psi_2(\mathbf{x}, t) &= \Pi^{*0}(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \Psi_3(\mathbf{x}, t) &= \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A_0^*(\mathbf{x}, t) = 0, \\ \Psi_4(\mathbf{x}, t) &= \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A_0(\mathbf{x}, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Tenemos arbitrariedad en la elección de las variables independientes, puesto que el conjunto de vínculos (4.78), dan indicios que ciertas variables son dependientes, más no especifican de cuales se trata; debido a ello, se escogen como variables independientes a las componentes espaciales de los campos(A_i , A_i^* , Π^k y Π^{*k}), esto causará una reducción en el espacio de fase, pasando de dieciséis variables independientes en un inicio, a doce variables independientes finalmente. Con base a estos lineamientos, damos paso al cálculo de los únicos C.D. no nulos de la teoría de P-C [4, 12], comenzando por:

$$\begin{aligned} \{A_k(\mathbf{x}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_k(\mathbf{x}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3 u d^3 v \{A_k(\mathbf{x}, t), \Psi_n(\mathbf{u}, t)\} [C^{nm}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \{\Psi_m(\mathbf{v}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\}. \end{aligned} \quad (4.88)$$

Dando solución al proceso indicado en (4.88) y teniendo en cuenta que $\Pi^k(y)$ posee únicamente C.P. nulos con todos los vínculos del sistema (véase **Apéndice k**), establecemos que la relación deberá obedecer:

$$\begin{aligned} \{A_k(\mathbf{x}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_k(\mathbf{x}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \delta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.89)$$

De otro modo, los C.D. entre los campos conjugados A_i^* y Π^{*k} , serán analizados con base a la relación (2.67), donde planteamos:

$$\begin{aligned} \{A_i^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v \{A_i^*(\mathbf{x}, t), \Psi_n(\mathbf{u}, t)\} [C^{nm}(\mathbf{u}, \mathbf{v})] \{\Psi_m(\mathbf{v}, t), \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)\}. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Resolviendo nuevamente en que $\Pi^{*k}(x)$ posea solamente C.P. nulos con los vínculos del sistema, se determina que:

$$\begin{aligned} \{A_i^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)\}, \\ &= \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.91)$$

Resumiendo el proceso desarrollado en esta sección, se determinaron los vínculos de la teoría de P-C, se clasifica estos como vínculos de segunda clase según el formalismo de Dirac [2]; eventualmente, se procedió a eliminar el conjunto de vínculos de segunda clase bajo la definición de C.D., donde se escogieron como variables dinámicas e independientes a las componentes espaciales de los pares canónicos del espacio de fase reducido. Ahora, bajo la definición de C.D. se establecerá el Hamiltoniano de la teoría como:

$$H = \int d^3x \left[\Pi^k(\mathbf{x}, t) \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A_k(\mathbf{x}, t) A_k^*(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} F_{ki} F_{ki}^* \right]. \quad (4.92)$$

En analogía con el capítulo 2 se podrá esperar, que bajo la definición de C.D. para el campo de P-C, es posible determinar la evolución temporal de las variables independientes del sistema, tal y como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{A}_k(x) &= \{A_k(x), H\}_{CD} \\ &= \int d^3y \Pi^{*l}(y) \{A_k(x), \Pi^l(y)\}_{CD} \\ &= \int d^3y \Pi^{*l}(y) (\delta_k^l \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= \Pi^{*k}(x) \end{aligned} \quad (4.93)$$

donde al calcular el complejo conjugado de (4.93), se encuentra:

$$\dot{A}_k^*(x) = \Pi^k(x). \quad (4.94)$$

Ahora, al calcular la evolución temporal del campo $\Pi^k(x)$, bajo la definición de los C.D. de la teoría, sería necesario llevar a cabo los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Pi}^k(x) &= \left\{ \Pi^k(x), H \right\}_{CD}, \\
 &= \int d^3y \left[m^2 \left\{ \Pi^k(x), A_l(y) A_l^*(y) \right\}_{CD} + \frac{1}{2} \left\{ \Pi^k(x), F_{li}(y) F_{li}^*(y) \right\}_{CD} \right], \\
 &= m^2 A_k^*(x) + \partial_l^x F_{lk}^*(x), \\
 &= m^2 A_k^*(x) + \partial_l^x \partial_l^x A_k^*(x) - \underbrace{\partial_k^x \partial_l^x A_l^*(x)}_{=0}, \\
 &= m^2 A_k^*(x) + \partial_l^x \partial_l^x A_k^*(x),
 \end{aligned} \tag{4.95}$$

con éste resultado, se puede establecer:

$$\dot{\Pi}^{*k}(x) = m^2 A_k(x) + \partial_l^x \partial_l^x A_k(x). \tag{4.96}$$

Por último, al juntar los resultados (4.93) y (4.96) por un lado, y (4.94, 4.97) por otro; clásicamente se podrá determinar que las tres componentes espaciales de los campos $A(\mathbf{x}, t)$ y $A^*(\mathbf{x}, t)$ satisfacen:

$$\partial_\mu \partial^\mu A_k(x) - m^2 A_k(x) = 0, \tag{4.97}$$

$$\partial_\mu \partial^\mu A_k^*(x) - m^2 A_k^*(x) = 0, \tag{4.98}$$

de este modo, cuando se busque una solución para los campos fundamentales $A(\mathbf{x}, t)$ y $A^*(\mathbf{x}, t)$, se podrá esperar una solución en ondas planas [4].

Capítulo 5

Cuantización del Campo de Proca Complejo o Cargado

¹ Clásicamente tratamos como campos totalmente independientes a $A_n(\mathbf{x}, t)$, $A_n^*(\mathbf{x}, t)$, debido a ello, en esta teoría se establece que los campos clásicos que por el principio de correspondencia serán operadores de campo no hermíticos, es decir:

$$\begin{aligned} An &\rightarrow \hat{A}_n(\mathbf{x}, t) \neq \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{x}, t), \\ \Pi n &\rightarrow \hat{\Pi}_n(\mathbf{x}, t) \neq \hat{\Pi}_n^\dagger(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Subsecuentemente, se define el conjunto de conmutadores de la teoría de P-C, donde los C.D. (4.91) han de sustituirse por:

$$\begin{aligned} [\hat{A}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^k(\mathbf{y}, t)] &= i\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ [\hat{A}_n^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^{\dagger k}(\mathbf{y}, t)] &= i\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Finalmente serán establecidos un conjunto de vectores, quienes representarán cada estado del sistema.

De acuerdo al desarrollo clásico, donde se obtuvo el conjunto de C.D. del sistema, se logra establecer que la dinámica del sistema sería descrita por el Hamiltoniano (4.92), ahora, este Hamiltoniano deberá ser asociado a una observable del sistema, por ende, debe ser transformado a un operador de campo estableciendo lo siguiente:

$$\hat{H} \equiv \int d^3x \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t) \hat{\Pi}^{\dagger k}(\mathbf{x}, t) + m^2 \hat{A}_k(\mathbf{x}, t) \hat{A}_k^\dagger(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \hat{F}_{ki} \hat{F}_{ki}^\dagger \right]. \quad (5.3)$$

¹El procedimiento llevado a cabo en el desarrollo de este capítulo, es una analogía con el capítulo 3, ya que que varios de los cálculos ejecutados están sujetos a procesos similares a los ya realizados en el capítulo en mención

El operador (5.3) es asociado a una observable del sistema, por lo tanto, deberá ser hermítico; dicha condición se garantiza de acuerdo a las relaciones de conmutación (5.2).

Clásicamente, la evolución temporal de los campos $A_n(\mathbf{x}, t)$, $A_n^*(\mathbf{x}, t)$ se encontraba estrictamente definida por la ecuación de Hamilton, a nivel cuántico la evolución temporal de los operadores de campo será descrita por la ecuación de Heisenberg [4, 11]; por consiguiente, la dinámica de los operadores $\hat{A}_n(\mathbf{x}, t)$, $\hat{A}_n^\dagger(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\Pi}^n(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t)$ será determinada a través de (véase **Apéndice L**):

$$\dot{\hat{A}}_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{i} [\hat{A}_n(\mathbf{x}, t), \hat{H}(\mathbf{y}, t)] = \hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t), \quad (5.4)$$

$$\dot{\hat{A}}_n^\dagger(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{i} [\hat{A}_n^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{H}(\mathbf{y}, t)] = \hat{\Pi}^n(\mathbf{x}, t), \quad (5.5)$$

$$\dot{\hat{\Pi}}^n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{i} [\hat{\Pi}^n(\mathbf{x}, t), \hat{H}(\mathbf{y}, t)] = m^2 \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{x}, t) + \partial_k^x \hat{F}_{kn}^\dagger(\mathbf{x}, t), \quad (5.6)$$

$$\dot{\hat{\Pi}}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{i} [\hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t), \hat{H}(\mathbf{y}, t)] = m^2 \hat{A}_n(\mathbf{x}, t) + \partial_k^x \hat{F}_{kn}(\mathbf{x}, t). \quad (5.7)$$

Con base a los resultados (5.4) hasta (5.7), se realizan manipulaciones algebraicas observando así, que los operadores de campo presentes en la teoría de P-C, han de satisfacer la ecuación de Klein-Gordon para una partícula masiva, en la forma:

$$(\square + m^2)\hat{A}_n(x) = 0, \quad (5.8)$$

$$(\square + m^2)\hat{A}_n^\dagger(x) = 0, \quad (5.9)$$

deduciendo con ello, que al desarrollar a $\hat{A}_n(x)$, $\hat{A}_n^\dagger(x)$, se puede considerar una solución en términos de ondas planas.

Expansión de $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{A}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ en términos de ondas planas

En la relación (4.96) se evidencio que las tres componentes del potencial vectorial A_i cumplían la ecuación de Klein-Gordon para una partícula masiva, en este punto se busca una solución del operador de campo $\hat{A}_n(x)$ que satisfaga la ecuación (5.8), por lo cual, proponemos que la solución tenga la siguiente estructura:

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \right], \quad (5.10)$$

solución que surge en analogía con la presentada en el campo de Klein-Gordon cargado [4, 5, 14]. Nuevamente el carácter vectorial del operador recae sobre los vectores de polarización, el peso de operador se aplica sobre los operadores de expansión $(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda))^2$ y han de cumplirse las condiciones (3.11, 3.12).

Con respecto al desarrollo del operador de campo $\hat{A}^\dagger(x)$ se puede esperar una expansión en términos de ondas planas. Usando la operación adjunto hermítico sobre la solución (5.10), por lo cual se estima:

$$\hat{A}^\dagger(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (5.11)$$

Solución en términos de ondas planas para $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$

Mediante las relaciones (5.4) y (5.5) se presentó una relación entre los operadores $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{A}^\dagger(\mathbf{x}, t)$ con $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$, esto lleva a concluir, que las soluciones para estos operadores de campo han de ser obtenidas a través de las relaciones (5.10) y (5.11), mediante el cálculo de una derivada temporal, indicando así:

$$\hat{\Pi}(x) = \partial_0 \hat{A}^\dagger(x), \quad (5.12)$$

$$\hat{\Pi}^\dagger(x) = \partial_0 \hat{A}(x), \quad (5.13)$$

Por consiguiente, se encuentra que los operadores $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t)$, muestran una solución denotada por:

$$\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} (i\omega_k) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right], \quad (5.14)$$

$$\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3} (-i\omega_k) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (5.15)$$

²Hasta no conocer el significado físico de los operadores $(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda))$ y sus complejos conjugados, nos referiremos a estos, como operadores de expansión

Determinación del álgebra de los operadores de expansión en la solución de ondas planas

Hasta el momento, se aprecia que los operadores de campo presentes en la teoría de P-C han sido desarrollados usando los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, sin embargo, como ya se mostró anteriormente en el capítulo 3, estos operadores deberán satisfacer un álgebra que determinará la estructura de algunas de las observables del sistema, por ello, se deberá analizar que relaciones de conmutación han de satisfacer estos operadores de expansión en la solución de ondas planas; en busca de tal objetivo, realizamos las siguientes operaciones (véase **Apéndice L**):

$$\sqrt{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right], \quad (5.16)$$

$$\sqrt{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i\omega_k t} \right], \quad (5.17)$$

$$\frac{-i\sqrt{2\omega_k}}{\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i\omega_k t} \right], \quad (5.18)$$

$$\frac{i\sqrt{2\omega_k}}{\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right], \quad (5.19)$$

donde al sumar las identidades (5.16) y (5.19) se podrá determinar:

$$\sum_{\lambda=1}^3 \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) + \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \right] e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}. \quad (5.20)$$

Para encontrar la estructura del operador $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ se usa la condición (3.13), ya que al multiplicar por derecha la relación (5.20) por el vector de polarización $\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1)$ y teniendo en cuenta la condición de normalización de estos vectores de polarización, la sumatoria colapsa a un solo valor de acuerdo a las propiedades de la función delta de Kronecker [9]:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) = i \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \left[(\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (5.21)$$

Bajo la operación adjunto hermítico la relación (5.21) se reestructura, obteniendo de este modo, una expresión para $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, por lo tanto:

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = -i \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \left[(\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) + i\omega_k \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t)) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (5.22)$$

Por otra parte, para determinar la forma de $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$ se realiza un proceso similar al empleado en la deducción (5.21), por ello, se lleva a cabo el siguiente cálculo, con base a (5.17) y (5.18):

$$\sum_{\lambda=1}^3 \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) = \frac{\sqrt{2\omega_k}}{2} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \left[\hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t) - \frac{i}{\omega_k} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \right] e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})}. \quad (5.23)$$

De acuerdo a las relaciones de ortonormalización de los vectores de polarización, se tendrá que al multiplicar a (5.23) por derecha por $\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda)$ una representación del operador \hat{b} indicada por:

$$\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) = i \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \left[(\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t)) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right], \quad (5.24)$$

de la relación inmediatamente anterior, se podrá inferir el próximo resultado:

$$\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = -i \int \frac{d^3x}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \left[(\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) + i\omega_k \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (5.25)$$

Empleando los resultados obtenidos a partir de (5.21) hasta (5.25), se busca determinar el álgebra de los operadores de expansión, esto sera posible si empleamos el conjunto de conmutadores mostrado en (5.2) (véase **Apéndice L**), donde finalmente se precisa el conjunto de conmutadores no nulos indicado por:

$$\begin{aligned} [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \\ [\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Operador Hamiltoniano de la teoría de P-C

El principio de correspondencia [8] establece que el comportamiento clásico de un sistema ha de ser recuperado del tratamiento cuántico del mismo, en el caso de números cuánticos grandes; por lo cual, se puede destacar que varios de los resultados clásicos pueden tener un análogo cuántico. Partiendo de este hecho, al retomar la ecuación (4.92) donde fue descrito el Hamiltoniano de la teoría de P-C clásicamente, se realizan sobre éste algunas manipulaciones algebraicas con el fin de obtener un resultado clásico que se convertirá a un operador, de este modo se analizará el siguiente término:

$$\begin{aligned} F_{mn} F^{*mn} &= (-\epsilon_{mnk} B_k) (\epsilon^{mnl} B^{*l}), \\ &= -(\delta_n^n \delta_k^l - \delta_n^l \delta_k^n) B_k B^{*l}, \\ &= -2\delta_k^l B_k B^{*l}, \\ &= 2B_l B_l^* = 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^*. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Expresando el campo \mathbf{B} en función de $\nabla \times \mathbf{A}$ puede obtener:

$$F_{nm}F^{*nm} = 2\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^* = 2(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^*), \quad (5.28)$$

desarrollando la operación anterior, mediante el uso de notación índicial se determina:

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \mathbf{A}^*) = \partial_l [(\partial_l A_m)A_m^* - A_m^*(\partial_m A_l)] - A_m^*(\nabla^2 A_m). \quad (5.29)$$

Con base al análisis del término (5.27), deberá procederse a reestructurar el Hamiltoniano (4.92) como:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \int d^3x [(\Pi)^{*n}(\mathbf{x}, t)(\Pi)^n(\mathbf{x}, t) + m^2 \mathbf{A}_n^*(\mathbf{x}, t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t) - A_m^*(\mathbf{x}, t)(\nabla^2 A_m(\mathbf{x}, t))] \\ & + \int d^3x \partial_l [(\partial_l A_m)A_m^* - A_m^*(\partial_m A_l)]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Al aplicar el teorema de Gauss sobre la segunda integral de (5.30), se tendrá el siguiente resultado:

$$\oint da_l [(\partial_l A_m)A_m^* - A_m^*(\partial_m A_l)], \quad (5.31)$$

para lo cual, ha de cumplirse que la anterior relación sea nula, cuando la superficie se extiende hacia el infinito el campo tiende a cero, esto se garantiza, gracias al comportamiento asintótico del campo (4.6). Por consiguiente, el Hamiltoniano clásico será descrito por:

$$\mathbf{H} = \int d^3x [(\Pi)^{*n}(\mathbf{x}, t)(\Pi)^n(\mathbf{x}, t) + m^2 \mathbf{A}_n^*(\mathbf{x}, t)\mathbf{A}_n(\mathbf{x}, t) - A_m^*(\mathbf{x}, t)(\nabla^2 A_m(\mathbf{x}, t))] \quad (5.32)$$

De esta forma, el Hamiltoniano cuántico se considera a ser:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \int d^3x [\hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) + m^2 \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t)\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) - \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t)(\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t))]. \quad (5.33)$$

Como ya se había expresado anteriormente, el objetivo de haber encontrado el conjunto de conmutadores (5.26) consistía en poder desarrollar las observables del sistema en términos de los operadores de expansión, de este modo, el operador Hamiltoniano desarrollado en función de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, será establecido como (véase **Apéndice L**):

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)]. \quad (5.34)$$

El operador Hamiltoniano se encuentra estrictamente relacionado a la energía del sistema, pero existe un inconveniente sobre la deducción preliminar, porque no sabemos con claridad cual será la acción

de los operadores de expansión sobre un autovector del operador Hamiltoniano, es por ello, que deberá interpretarse el significado físico de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$; por ende, al calcular los siguientes conmutadores y teniendo en cuenta las relaciones de conmutación (5.26) se deduce:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{\mathbf{H}} \right] &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \right], \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k (\omega_k \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda_1 \lambda} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})) = \omega_p \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda), \end{aligned} \quad (5.35)$$

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{\mathbf{H}} \right] &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \right], \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k (-\omega_k \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda_1 \lambda} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})) = -\omega_p \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda), \end{aligned} \quad (5.36)$$

de igual forma, se puede comprobar:

$$\left[\hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{\mathbf{H}} \right] = \omega_p \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda),$$

$$\left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{\mathbf{H}} \right] = -\omega_p \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda).$$

Si la acción del operador Hamiltoniano sobre un autovector es de la forma:

$$\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle. \quad (5.37)$$

Ahora, el estudio que a de realizarse será, el efecto del operador Hamiltoniano sobre un estado $|n_a\rangle$, donde estarán actuando los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ respectivamente, para lo cual, se tendrá en cuenta las relaciones deducidas en (5.35) y (5.36), de este modo se fijarán las siguientes ecuaciones:

$$\hat{H} \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle = (E_{n_a} - \omega_k) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle, \quad (5.38)$$

$$\hat{H} \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle = (E_{n_a} + \omega_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle. \quad (5.39)$$

Subsecuentemente, deducimos de forma similar que la energía asociada sobre un estado $|n_b\rangle$ donde han de actuar los operadores $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ se calcula a través de:

$$\hat{H} \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) |n_b\rangle = (E_{n_b} - \omega_k) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) |n_b\rangle, \quad (5.40)$$

$$\hat{H} \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_b\rangle = (E_{n_b} + \omega_k) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_b\rangle. \quad (5.41)$$

Analizando lo deducido desde (5.38) hasta (5.41), podemos concluir que los operadores de expansión de la teoría de P-C, toman un estado y elevan o disminuyen su energía en una cantidad ω_k . Realizando un comparativo con los operadores de expansión para la teoría de P-R, llamaremos operadores de aniquilación a $(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda))$, y operadores de creación a $(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda))$, por consiguiente, se imponen las siguientes condiciones sobre el estado fundamental denotado por $|0\rangle$:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle \equiv 0, \quad (5.42)$$

$$\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle \equiv 0, \quad (5.43)$$

Por otra parte, al estar trabajando con dos operadores de creación, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ creará partículas que denominaremos tipo A y $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$ partículas tipo B, deducción que se realiza en comparación al campo de Klein-Gordon Complejo [4, 12].

Basados en la experiencia del operador Hamiltoniano deducido en la teoría de P-R, se podrá notar que (5.34) esta acompañado de una contribución infinita sobre el estado fundamental, donde dicha contribución a de ser eliminada mediante un ordenamiento normal sobre este operador, por lo cual:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k : \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \right] :, \quad (5.44)$$

de acuerdo a la relación (3.45), el operador Hamiltoniano de P-C, será denotado por:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right], \quad (5.45)$$

donde al analizar la energía asociada al estado fundamental $|0\rangle$ mediante (5.45) y teniendo en cuenta las relaciones (5.42) y (5.43), se comprueba que:

$$\begin{aligned} E_0 &= \langle 0 | \hat{\mathbf{H}} | 0 \rangle, \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \langle 0 | \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right] | 0 \rangle, \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Eliminando con ello, toda contribución infinita sobre la energía del estado fundamental.

Operador Momentum en la teoría de P-C

Clásicamente tenemos que existe una cantidad conservada bajo traslaciones espacio-temporales, la cual se encontraba asociada con la energía en su componente temporal y con el momentum para una

componente espacial. De acuerdo a la expresión deducida en (4.16) y la definición de los momentos canónicos conjugados (4.27) y (4.28), el momentum clásico de P-C se expresa a través de:

$$\mathbf{P} = - \int d^3x [\Pi(x) \nabla \mathbf{A}(x) + \Pi^*(x) \nabla \mathbf{A}^*(x)], \quad (5.47)$$

En el proceso de cuantización para las observables del sistema, se debe garantizar que dichas observables se encuentren representadas por operadores hermíticos, por lo cual, el operador momentum deberá satisfacer:

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{P}}^\dagger. \quad (5.48)$$

Ya que la disposición de los campos clásicos no garantizará las condición (5.48), se propone simetrizar el momentum clásico en la forma:

$$\mathbf{P} \equiv -\frac{1}{2} \int d^3x [\Pi(x) \nabla \mathbf{A}(x) + \nabla \mathbf{A}(x) \Pi(x) + \Pi^*(x) \nabla \mathbf{A}^*(x) + \nabla \mathbf{A}^*(x) \Pi^*(x)]. \quad (5.49)$$

De este modo, el operador Momentum se considera a ser:

$$\hat{\mathbf{P}} \equiv -\frac{1}{2} \int d^3x [\hat{\Pi}(x) \nabla \hat{\mathbf{A}}(x) + \nabla \hat{\mathbf{A}}(x) \hat{\Pi}(x) + \hat{\Pi}^\dagger(x) \nabla \hat{\mathbf{A}}^\dagger(x) + \nabla \hat{\mathbf{A}}^\dagger(x) \hat{\Pi}^\dagger(x)]. \quad (5.50)$$

Por lo tanto, al utilizar las expansiones en ondas planas realizadas sobre los operadores de campo ($\hat{A}(x)$, $\hat{A}^\dagger(x)$, $\hat{\Pi}(x)$ y $\hat{\Pi}^\dagger$), el operador Momentum en términos de los operadores de creación y aniquilación se expresa a través de (véase el **Apéndice L**):

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)]. \quad (5.51)$$

Considerando los resultados obtenidos en (5.26), se reestructura a (5.51) estableciendo el próximo resultado:

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)] + \sum_{\lambda=1}^3 \delta^3(0) \int d^3x \mathbf{k},$$

donde la contribución infinita sobre el estado fundamental $|0\rangle$ se elimina, gracias a que la segunda integral ha de ser cero, cuando se han de sumar todas las orientaciones posibles de momentum en el espacio, por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{P}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)]. \quad (5.52)$$

Con el resultado inmediatamente anterior y la acción de los operadores de aniquilación sobre el estado fundamental, se podrá comprobar que el operador Momentum actuando sobre dicho estado genera el siguiente autovalor:

$$\langle 0 | \hat{\mathbf{P}} | 0 \rangle = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3x \mathbf{k} \langle 0 | \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right] | 0 \rangle = 0. \quad (5.53)$$

Bajo la suposición que sobre el estado fundamental no se tiene ningún tipo de partículas, es decir, ni de tipo A o B, es natural esperar que el autovalor asociado al operador Momentum sobre $|0\rangle$ sea nulo.

Operador Espín para el campo de P-C

Como se ha indicado en el capítulo 2, la solución en ondas planas del potencial vectorial A_μ , esta acompañado de una degeneración en la energía, es decir, cada estado podrá estar asociado a una solución de energía positiva o negativa. Dado que el operador Hamiltoniano no permite distinguir la solución de energía de cada estado, bajo los lineamientos de la mecánica cuántica [10] se procede a buscar un nuevo operador que conmute con (5.45), que determine dicha solución de energía, con lo cual, se calcula el siguiente operador.

A nivel cuántico tenemos el surgimiento de otra observable asociada el sistema, cantidad conocida con el nombre de espín. Teniendo en cuenta la cantidad conservada bajo transformaciones de Lorentz (4.19), podemos destacar que clásicamente el espín del sistema estará dado por:

$$\mathbf{S} \equiv - \int_v d^3x [\boldsymbol{\Pi}(x) \times \mathbf{A}(x) + \boldsymbol{\Pi}^*(x) \times \mathbf{A}^*(x)]. \quad (5.54)$$

Por lo cual, el operador Espín se considera a ser:

$$\hat{\mathbf{S}} \equiv - \int_v d^3x : \hat{\boldsymbol{\Pi}} \times \hat{\mathbf{A}} + \hat{\boldsymbol{\Pi}}^\dagger \times \hat{\mathbf{A}}^\dagger : . \quad (5.55)$$

Recordando la experiencia con el operador Hamiltoniano de P-C, hemos adoptado un ordenamiento normal sobre el operador Espín, para eliminar las posibles contribuciones infinitas sobre el estado fundamental $|0\rangle$. Al desarrollar este operador en términos de ondas planas, es decir, despejando las

expansiones ya realizadas para $\hat{A}(x)$, $\hat{A}^\dagger(x)$, $\hat{\Pi}(x)$, $\hat{\Pi}^\dagger(x)$, se podrá determinar la relación ³:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} = \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 & \left[(\epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda)) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) - (\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda)) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right. \\ & \left. + (\epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda)) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) - (\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda)) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Basando nuestro estudio en el análisis desarrollado en el sección (3.5), donde habíamos expresado porqué la necesidad de definir el operador Helicidad, se da paso a determinar el siguiente operador:

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda} = \frac{i}{2} \int d^3k \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 & \left[(\epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \right. \\ & - (\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + (\epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \\ & \left. - (\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot e_k) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Debido a lo expuesto en (3.67) y (3.68), las únicas contribuciones no nulas del triple producto presentado para cada término de (5.57), ocurren cuando los índices λ y λ_1 toman valores diferentes entre sí, es decir, $\lambda \neq \lambda_1$; de este modo, el operador Helicidad de la teoría de P-C se vera reducido a:

$$\hat{\Lambda} = i \int d^3k \left\{ \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 2) \hat{a}(\mathbf{k}, 1) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 1) \hat{a}(\mathbf{k}, 2) \right] + \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, 2) \hat{b}(\mathbf{k}, 1) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, 1) \hat{b}(\mathbf{k}, 2) \right] \right\}, \quad (5.58)$$

expresión que ha resulta de un análisis similar al aplicado sobre el operador Helicidad de la teoría de P-R.

Enunciando algunas de las características del operador (5.58), nos encontramos con que éste operador no es diagonal, por lo cual los estados asociados a los operadores de creación no son autovectores de $\hat{\Lambda}$; de este modo proponemos realizar las siguientes transformaciones lineales sobre las componentes de (5.58):

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mathbf{k}, +) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}(\mathbf{k}, 1) - i\hat{a}(\mathbf{k}, 2)), \\ \hat{a}(\mathbf{k}, -) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}(\mathbf{k}, 1) + i\hat{a}(\mathbf{k}, 2)), \\ \hat{a}(\mathbf{k}, 0) &= (\hat{a}(\mathbf{k}, 3)), \end{aligned}$$

(5.59)

³El desarrollo o comprobación de la relación (5.56) fue demostrada en cierta parte en el (**Apéndice I**), con esto se quiere indicar que el proceso adoptado en esta relación no es mas que una analogía al capítulo 3.

$$\begin{aligned}\hat{b}(\mathbf{k}, +) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}(\mathbf{k}, 1) - i\hat{a}(\mathbf{k}, 2)), \\ \hat{b}(\mathbf{k}, -) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{b}(\mathbf{k}, 1) + i\hat{a}(\mathbf{k}, 2)), \\ \hat{b}(\mathbf{k}, 0) &= (\hat{b}(\mathbf{k}, 3)),\end{aligned}$$

para obtener de este modo, un operador Helicidad cuya representación matricial sea diagonal.

La relación de conmutación que han de satisfacer estos operadores serán de la forma ⁴:

$$[\hat{a}(\mathbf{k}', +), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)] = [\hat{a}(\mathbf{k}', -), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}', -)] = [\hat{a}(\mathbf{k}', 0), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0)] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad (5.60)$$

$$[\hat{b}(\mathbf{k}', +), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, +)] = [\hat{b}(\mathbf{k}', -), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}', -)] = [\hat{b}(\mathbf{k}', 0), \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, 0)] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (5.61)$$

Si analizamos los resultados anteriores y los ponemos en comparación con el álgebra indicada en (3.24), notamos que las relaciones de conmutación son iguales, por consiguiente, nos restaría reescribir el operador Helicidad en términos de lo planteado en (3.71), determinando con esto:

$$\hat{\Lambda} = \int d^3k \left\{ [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -)] + [\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{b}(\mathbf{k}, +) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{b}(\mathbf{k}, -)] \right\}, \quad (5.62)$$

Consecuentemente, definimos los estados:

$$\begin{aligned}\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) |0\rangle &= |\mathbf{k}_a, +\rangle, \quad \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, +) |0\rangle = |\mathbf{k}_b, +\rangle, \\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) |0\rangle &= |\mathbf{k}_a, -\rangle, \quad \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, -) |0\rangle = |\mathbf{k}_b, -\rangle, \\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0) |0\rangle &= |\mathbf{k}_a, 0\rangle, \quad \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, 0) |0\rangle = |\mathbf{k}_b, 0\rangle.\end{aligned} \quad (5.63)$$

De acuerdo a las posibles orientaciones de espín, podemos destacar que para una partícula tipo A ó B, el autovalor asociado al operador Helicidad, será fijado cuando se calculen los siguientes procesos, donde se tendrá en cuenta las relaciones de conmutación (5.59) y (5.60), para lo cual, se determina (véase **Apéndice I**):

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_a, +\rangle = (+1) |\mathbf{k}_a, +\rangle, \quad (5.64)$$

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_a, -\rangle = (-1) |\mathbf{k}_a, -\rangle, \quad (5.65)$$

⁴Las identidades (5.59) y (5.60) pueden ser comprobadas en un proceso similar al desarrollado en el (**Apéndice I**)

de igual forma, se podrá concluir que el operador Helicidad, actuando sobre un estado asociado a una partícula tipo B, tendrá autovalores asociados:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_b, +\rangle = (+1) |\mathbf{k}_b, +\rangle, \quad (5.66)$$

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_b, -\rangle = (-1) |\mathbf{k}_b, -\rangle. \quad (5.67)$$

Con estos resultados concluimos que el sistema, posee Helicidad positiva con un valor de +1 y Helicidad negativa es una contribución de -1 unidad. Nuevamente, los estados de espín estarían determinados en un triplete de la forma $(-1, 0, +1)$, así cuando la orientación de espín posea un valor de 0 se haría referencia, a la cantidad longitudinal asociada al estado $|\mathbf{k}_a, 0\rangle$, que ha de obtenerse a partir del operador $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 0)$, de este modo:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_a, 0\rangle = 0, \quad (5.68)$$

o equivalentemente se cumplirá una relación para:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_b, 0\rangle = 0. \quad (5.69)$$

Operador Carga

Debido a la naturaleza del potencial vectorial A_μ , el cual se ha considerado como un campo complejo o cargado, la teoría de P-C presenta una segunda degeneración, puesto que los operadores de expansión que han sido determinados como operadores de creación y aniquilación, están asociados a una partícula tipo A o B, sin embargo, las observables analizadas hasta el momento, no permiten realizar ninguna diferenciación entre este tipo de partículas, con lo cual, se busca un nuevo operador asociado a una observable del sistema, que permita dar esta distinción a las partículas tipo A y B⁵. Bajo transformación de fase global, se había deducido la cantidad conservada (4.26) que clásicamente, ha de representar una cantidad asociada a la carga del sistema. Ahora, cuánticamente esta cantidad conservada ha de ser representada por un operador hermítico, el cual se define a través de:

$$\hat{Q} \equiv -i \int d^3x : \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) \hat{A}(\mathbf{x}, t) - \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{A}^\dagger(\mathbf{x}, t) :, \quad (5.70)$$

⁵Este proceso se llevará a cabo en comparación con el campo de Klein-Gordon cargado [4, 5, 14]

donde deberá comprenderse, que el ordenamiento normal al cual esta sometido (5.70) se ha realizado con el fin de eliminar posibles contribuciones infinitas sobre el estado fundamental $|0\rangle$; de igual forma, se debe comprender que a nivel cuántico, éste operador se encuentra asociado con la carga de una partícula tipo A o B.

En una forma semejante, a la cual hemos desarrollado las observables \hat{H} , \hat{P} y \hat{S} , en términos de ondas planas, se ha de proponer que el operador (5.70) como una función de los operadores de creación y aniquilación, queda determinado en la forma (véase **Apéndice L**):

$$\hat{Q} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right]. \quad (5.71)$$

Sobre el resultado (5.71) se realiza el siguiente análisis:

- Como se aprecia en esta relación, el operador carga ha quedado en función de los operadores de expansión, donde se ha de definir en contraste a operador carga de la teoría de Klein-Gordon, los operadores:

$$\hat{n}_a \equiv \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \quad (5.72)$$

$$\hat{n}_b \equiv \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda), \quad (5.73)$$

cantidades que han de ser denotadas por el nombre de operadores número de partículas, cuyos autovalores estarán asociados al número de partículas tipo A o B, que se encuentren presentes en un autoestado.

Por consiguiente, denotamos el operador número total de partículas \hat{N} , el cual, comparte autoestados con los operadores \hat{H} y \hat{P} , éste operador indica el número de partículas tanto A como B presentes en un estado asociado al sistema; será indicado por:

$$\hat{N} \equiv \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k (\hat{n}_a + \hat{n}_b), \quad (5.74)$$

- como es de esperar, sobre un estado que se considera fundamental, deberá de cumplirse que:

$$\hat{Q} |0\rangle = 0, \quad (5.75)$$

resultado que sera consecuencia de las relaciones (5.42) y (5.43).

Realizando un pequeño análisis sobre el operador (5.71), se estudia la acción de este operador sobre los estados:

$$\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle = |n_a\rangle, \quad (5.76)$$

$$\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle = |n_b\rangle. \quad (5.77)$$

Observe, que al aplicar el operador (5.71) sobre el estado (5.76), bajo el grupo de conmutadores (5.26) se deducirá:

$$\begin{aligned} \hat{Q} |n_a\rangle &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right] \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) |0\rangle, \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right] \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) |0\rangle, \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda, \lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0\rangle \right], \end{aligned} \quad (5.78)$$

de acuerdo a la relación (5.42), se podrá deducir:

$$\hat{Q} |n_a\rangle = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda, \lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0\rangle \right] = (1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) |0\rangle = (1) |n_a\rangle. \quad (5.79)$$

En el caso del estado (5.77), se obtiene al analizar la acción del operador carga sobre éste y efectuar un análisis similar al realizado en (5.80):

$$\begin{aligned} \hat{Q} |n_b\rangle &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right] \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) |0\rangle, \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[-\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) |0\rangle - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda, \lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0\rangle \right], \end{aligned} \quad (5.80)$$

por lo cual, al tener en cuenta la relación (5.43), el resultado inmediatamente anterior se tornará en:

$$\hat{Q} |n_b\rangle = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[-\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \delta_{\lambda, \lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) |0\rangle \right] = (-1) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) |0\rangle = (-1) |n_b\rangle. \quad (5.81)$$

Finalmente, se concluye que las partículas tipo A se encuentran asociadas a las observables ($E = \omega, \Lambda = (-1, 0, 1), q = 1$) y las tipo B a las cantidades ($E = \omega, \Lambda = (-1, 0, 1), q = -1$), que en contraste con el campo de Keldin-Gordon cargado [4, 5, 14], se podrá asociar a las partículas tipo B como la antipartícula de las tipo A.

Propagador de Feynman asociado al campo de P-C

Este proceso se realiza con base a la definición (3.80), donde se trabajan los campos $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{A}^\dagger(\mathbf{x}, t)$, en la forma:

$$i\Delta_{F\mu\nu} \equiv \langle 0 | \mathbf{T} \left[\hat{\mathbf{A}}_\mu(x) \hat{\mathbf{A}}_\nu^\dagger(y) \right] | 0 \rangle, \quad (5.82)$$

para lo cual, se propone que los campos explícitos en (5.82) se estructuren en la forma:

$$\hat{\mathbf{A}}_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{ik \cdot x} + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{-ik \cdot x} \right), \quad (5.83)$$

$$\hat{\mathbf{A}}_\mu^\dagger(x) = \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3}} \sum_{\lambda=1}^3 \left(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{-ik \cdot x} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{ik \cdot x} \right). \quad (5.84)$$

En este proceso se tendrá en cuenta las relaciones (3.81) y (3.82) a la hora de formular el propagador de Feynman asociado a la teoría de P-C.

Introducción las deducciones (5.83) y (5.84) en (5.82), planteamos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = & \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \Theta(x_0 - y_0) \right. \\ & \langle 0 | \left[\left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{ik \cdot x} + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{-ik \cdot x} \right) \right. \\ & \left. \left. \left(\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda_1) \exp^{-ip \cdot y} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \exp^{ip \cdot y} \right) \right] | 0 \rangle \right\} \\ & + \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \Theta(y_0 - x_0) \right. \\ & \langle 0 | \left[\left(\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda_1) \exp^{-ip \cdot y} + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \exp^{ip \cdot y} \right) \right. \\ & \left. \left. \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{ik \cdot x} + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \exp^{-ik \cdot x} \right) \right] | 0 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.85)$$

En contraste con la acción de los operadores de aniquilación sobre el estado fundamental (relaciones (5.42) y (5.43)), se podrá destacar que los únicos elementos de contribución no nula sobre la relación

(5.85), serán aquellos que cumplen con el próximo resultado:

$$\begin{aligned}
 i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = & \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \right. \\
 & \left. \Theta(x_0 - y_0) \left[\langle 0 | \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) | 0 \rangle \exp^{-i(k \cdot x - p \cdot y)} \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \\
 & + \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k}(2\pi)^3 \sqrt{2\omega_p}(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \right. \\
 & \left. \Theta(y_0 - x_0) \left[\langle 0 | \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) | 0 \rangle \exp^{-i(p \cdot y - k \cdot x)} \epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

De acuerdo a las relaciones de conmutación (5.26) y lo demostrado en (7.139), se podrá concluir que la estructura parcial del propagador de Feynman para P-C, se describe a través de:

$$\begin{aligned}
 i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = & \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu^*(\mathbf{k}, \lambda) \left[\Theta(x_0 - y_0) \exp^{-ik \cdot (x-y)} \right. \\
 & \left. + \Theta(y_0 - x_0) \exp^{ik \cdot (x-y)} \right].
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Finalmente al comparar este resultado con el obtenido en (7.140) (véase **Apéndice I**), podemos intuir que la estructura final de éste propagador será ⁶:

$$\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\exp^{-ik \cdot (x-y)} \Delta_{F\mu\nu}(k) \right]. \tag{5.88}$$

Donde $\Delta_{F\mu\nu}(k)$ será comprendido como el propagador de Feynman en el espacio de los momentos, representado mediante la definición:

$$\Delta_{F\mu\nu}(k) \equiv -\frac{(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} k_\mu k_\nu)}{k^2 - m^2 + \epsilon} - \frac{i}{m^2} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0}. \tag{5.89}$$

⁶El lector debería reconocer que el resultado (5.88) ya fue mostrado en el capítulo 3, en el propagador de Feynman asociado a P-R

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo de grado, se realizó un estudio clásico de la densidad Lagrangiana propuesta por Proca; esta teoría vista desde una parte clásica, consiste de dos secciones, es decir, la densidad Lagrangiana se asoció por un lado a un campo neutro o real $A_k(\mathbf{x}, t)$ y por otro, a un campo cargado o complejo $A_k(\mathbf{x}, t)$, que fue denotado de igual forma que el campo real, pero éste posee un campo asociado $A_k^*(\mathbf{x}, t)$, para el cual, se trataron como variables independientes cada una de sus componentes.

El estudio clásico del sistema comenzó por un análisis desde el formalismo de Lagrange, donde al hacer uso del principio de Hamilton, las condiciones de frontera y el comportamiento asintótico de los campos, se dedujo las ecuaciones de Euler-Lagrange, las cuales, serían usadas a continuación para deducir la llamada ecuación de Proca.

En vista que el estudio clásico sería canónico, se procedió a realizar el análisis del sistema desde el punto de vista Hamiltoniano, donde se derivó las ecuaciones asociadas a los momentos canónicos conjugados. No obstante, dichos momentos pueden ser calculados teniendo en cuenta la invariancia de la acción por translaciones espacio-temporales, así, en virtud del teorema de Noether [4, 5], se establece que existe una corriente conservada denominada densidad tensorial Momento-Energía; con base a la cual, es posible encontrar las cargas conservadas, una de ellas es el Hamiltoniano canónico de la teoría el cual, proporciona la información necesaria sobre los momentos canónicos. Adicionalmente, tras utilizar el principio de Hamilton modificado y las condiciones de frontera se dedujo las ecuaciones de Hamilton, las cuales, describen la dinámica del sistema en el espacio de fase.

En la búsqueda de aplicar un tratamiento canónico correcto, se determinaron y clasificaron los vínculos del sistema como de primera o segunda clase, tanto para campo real como para el complejo, de lo cual, se encontró que los vínculos presentes en ambas teorías se catalogaban como de segunda clase, de este modo, aplicando el método de Dirac se procedió a eliminar estos vínculos usando la definición de corchetes de Dirac (2.67) finalizando así el análisis clásico, en un conjunto de corchetes de Poisson no nulos (2.76), (4.89, 4.91) y bien definidos en un subespacio de fase.

Realizando una descripción más concreta, comenzamos por discernir que los vínculos asociados a la teoría de P-R, toman un espacio de fase conformado por ocho variables y dejan éste en términos de seis variables independientes únicamente, mientras, que para el campo cargado o complejo (P-C) se encontró que de un espacio de fase conformado por dieciséis variables sólo doce eran independientes, es decir, la singularidad de las densidades Lagrangianas (2.1) y (4.1) redujeron el espacio de fase de $8N$ y $16N$ dimensiones, en $2R$ y $4R$ el número de vínculos de segunda clase, por lo cual, obtenemos dos subespacios de fase de dimensión $8N-2R$ y $16N-4R$, respectivamente.

Prosiguiendo con el estudio, se llevó a cabo la cuantización del sistema neutro en el capítulo 3, por lo cual, se realiza el cambio del campo real $A(\mathbf{x}, t)$ por un operador de campo, se definió los conmutadores del sistema y al tener en cuenta que el operador de campo \hat{A} satisface la ecuación de Klein-Gordon, se propone una solución de éste, en términos de ondas planas. De igual forma, en el capítulo 5, se llevó a cabo la cuantización del campo complejo, proceso análogo al descrito anteriormente. Seguido a ello, se buscó expresar algunas de las cantidades conservadas obtenidas a través del teorema de Noether, por lo cual, se interpretó el significado físico de los operadores de expansión, donde al obtener el álgebra que satisfacían estos y la interacción con el operador Hamiltoniano, se concluyó que dichos coeficientes de expansión correspondían a operadores de creación y aniquilación; aquello se evidenció en las ecuaciones (3.37) y (3.38) para el campo de P-R, mientras que para el campo de P-C, se mostró este comportamiento desde la relación (5.40) hasta (5.43).

Cuando encontramos los estados asociados a la solución del campo de P-R, se determinó a partir de la relación (3.11) que éstos, podían estar asociados a una solución positiva o negativa de energía, más el operador Hamiltoniano (3.46) no permitió determinar a cual solución pertenecía el estado que se estudiaba, debido a ello, según los lineamientos de la mecánica cuántica [11], se debió buscar un operador que conmute con el operador Hamiltoniano y que debía ser hermítico, por lo cual, se consideró el operador momentum (3.55), pero este operador no brindó la información suficiente para diferenciar los estados. Gracias al comportamiento invariante de la teoría de P-R bajo transformaciones de Lorentz, se encontró la cantidad conservada densidad tensorial Momento Angular-Espín (2.35), de aquí que la cantidad asociada al Spin no se podría determinar por separado del momento angular, así se buscó proyectar el momento orbital total en la dirección del vector de onda, donde se definió el operador Helicidad (3.73), este operador brindó la información necesaria

para romper la degeneración.

Con base al análisis previo, se destacó para el campo de P-C, la existencia de estados degenerados en la energía, como se mostró en las relaciones (5.40) hasta (5.43), el operador Hamiltoniano no reconoció si se trataba de una partícula tipo A o B, solamente calculaba la cantidad de energía que incrementó o disminuyó el estado, cuando fue modificado por un operador de creación o aniquilación, sin reconocer si este era tipo A o B. Se propuso eliminar la degeneración en el estado, buscando un operador que conmute con el operador Hamiltoniano, de éste modo se construyó el operador Momentum, más este operador no aporta mayor información, puesto que no reconoció alguna diferencia entre un estado con partículas tipo A o B; subsecuentemente probamos con el operador Espín, sin embargo, encontramos que debido a la naturaleza de la densidad tensorial Momento Angular-Espín (4.19), la cantidad correspondiente al Espín no se podía encontrar individualmente, así que se buscó encontrar la proyección de espín a lo largo del vector de onda, cuyo proyección recibe el nombre de operador Helicidad (5.62), el cual, indicó que Helicidad poseía un estado, ya sea positiva, negativa o simplemente que no esté orientando hacia ningún lado. Teniendo en cuenta que el campo es cargado, debíamos de percatarnos de la existencia de otra degeneración en los estados asociados a la solución de los campos fundamentales, es decir, los estados se caracterizaban por ser doblemente degenerados. ¿Cómo saber si estábamos trabajando con una partícula tipo A o B?, para ello, definimos el operador Carga (5.71), donde este operador sería el responsable de calcular la carga asociada a cada partícula, esta cantidad se analizó a partir de (4.26), finalmente se obtuvo estados donde se había eliminado la degeneración.

Para concluir nuestro trabajo, se calculó el propagador de Feynman para el campo de Proca real y complejo, donde se logró demostrar en las relaciones (3.89) y (5.88) que no importaba la naturaleza del campo, es decir, si éste era real o complejo, la estructura del propagador de Feynman fue la misma.

Capítulo 7

Apéndices

Apéndice A. Notación relativista en (3+1) dimensiones

En esta sección se busca introducir la notación necesaria para la realización del trabajo total, para ello vamos a enunciar una serie de puntos aclarando ciertos lineamientos.

Usaremos índices griegos para denotar cuadri-vectores en el espacio tiempo en (3+1) dimensiones, el índice 0 para denotar componentes temporales e índices latinos para las componentes espaciales.

1. Cuadri-vector contravariante:

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) \equiv (t, \mathbf{x}) \quad (7.1)$$

con $\mu = 0, 1, 2, 3$

2. La métrica de Minkowski en (3+1) dimensiones viene dada por:

$$\eta^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (7.2)$$

con $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$

3. Un cuadri-vector covariante mediante el uso de la métrica de Minkowski se puede representar como:

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (t, -\mathbf{x}) \quad (7.3)$$

4. El tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ es representado matricialmente como:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E^{(1)} & -E^{(2)} & -E^{(3)} \\ E^{(1)} & 0 & -B^{(3)} & B^{(2)} \\ E^{(2)} & B^{(3)} & 0 & 0 - B^{(1)} \\ E^{(3)} & -B^{(2)} & B^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \quad (7.4)$$

donde $E^{(i)}$ y $B^{(i)}$, para $i=1,2,3$. Representan sucesivamente las componentes de campo eléctrico y magnético.

5. El producto escalar de dos cuadri-vectores cualquiera x y p es dado por:

$$xp \equiv x_\mu p^\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu p^\mu = x^0 p^0 - x^1 p^1 - x^2 p^2 - x^3 p^3 = x^0 p^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} \quad (7.5)$$

6. Generalización del operador gradientes en (3+1) dimensiones:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right); \quad \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad (7.6)$$

7. Definición del operador D'Alambertiano en (3+1) dimensiones:

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \quad (7.7)$$

Apéndice B. Clasificación de la teoría en singular o regular

La distinción entre un sistema descrito por una densidad Lagrangiana regular o singular, se puede realizar al observar la estructura de la Matriz Hessiana asociada para alguna teoría. Para la teoría de P-R vamos a calcular la matriz asociada a la densidad Lagrangiana (2.1), de lo cual, tendremos que ejecutar los siguientes cálculos sobre la siguiente definición:

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\alpha(\mathbf{x}, t)) \delta(\partial_0 A_\beta(\mathbf{y}, t))} = \frac{\delta^2 \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 A_\mu) \delta(\partial_0 A_\beta)} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.8)$$

Demostración identidad (2.18)

Con el fin de satisfacer la relación (7.8), se procede a calcular la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_\nu A_\alpha)} &= -\frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta(\partial_\nu A_\alpha)} (F_{\mu\beta} F^{\mu\beta}) \\
 &= -\frac{1}{4} \frac{\delta}{\delta(\partial_\nu A_\alpha)} (F_{\mu\beta} \eta^{\mu\epsilon} \eta^{\beta\omega} F_{\epsilon\omega}) \\
 &= -\frac{1}{4} (\eta^{\mu\epsilon} \eta^{\beta\omega} \frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} F_{\epsilon\omega} + \eta^{\mu\epsilon} \eta^{\beta\omega} F_{\mu\beta} \frac{\partial F_{\epsilon\omega}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)}) \\
 &= -\frac{1}{4} (F^{\mu\beta} \frac{\partial F_{\mu\beta}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} + F^{\epsilon\omega} \frac{\partial F_{\epsilon\omega}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)})
 \end{aligned}$$

Debido a la contracción entre los índices α, β podremos cambiar $\alpha \rightarrow \beta$ de tal modo que la anterior identidad resulta en:

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{2} (F^{\epsilon\omega} \frac{\partial F_{\epsilon\omega}}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)}) \\
 &= -\frac{1}{2} F^{\epsilon\omega} \left[\frac{\partial(\partial_\epsilon A_\omega)}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} - \frac{\partial(\partial_\omega A_\epsilon)}{\partial(\partial_\nu A_\alpha)} \right] \\
 &= -\frac{1}{2} [F^{\epsilon\omega} \delta_\nu^\epsilon \delta_\alpha^\omega - F^{\epsilon\omega} \delta_\nu^\omega \delta_\alpha^\epsilon] \\
 &= -\frac{1}{2} \left[F^{\nu\alpha} - \underbrace{F^{\alpha\nu}}_{=-F^{\nu\alpha}} \right] \\
 &= -F^{\nu\alpha}
 \end{aligned} \tag{7.9}$$

En base al anterior resultado hemos demostrado la identidad (2.18) evidenciando así el resultado mostrado con anterioridad.

Por otra parte de la deducción preliminar y debido a la definición de la matriz Hessiana deberemos calcular la segunda derivada, cuyo resultado a de conducirnos al próximo proceso:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(-F^{\omega\alpha}(\mathbf{x}, t))}{\partial(\partial_\nu A_\beta(\mathbf{y}, t))} &= \frac{\partial}{\partial(\partial_\nu A_\beta(\mathbf{y}, t))} (-\eta^{\omega\mu} \eta^{\epsilon\alpha} F_{\mu\epsilon}) \\
 &= -\eta^{\omega\mu} \eta^{\epsilon\alpha} \left[\frac{\partial(\partial_{m\mu} A_\epsilon(\mathbf{x}, t))}{\partial(\partial_\nu A_\beta(\mathbf{y}, t))} - \frac{\partial(\partial_\epsilon A_\mu(\mathbf{x}, t))}{\partial(\partial_\nu A_\beta(\mathbf{y}, t))} \right] \\
 &= -\eta^{\omega\mu} \eta^{\epsilon\alpha} [\delta_\mu^\nu \delta_\epsilon^\beta - \delta_\epsilon^\nu \delta_\mu^\beta] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= (\eta^{\epsilon\beta} \eta^{\nu\alpha} - \eta^{\epsilon\nu} \eta^{\beta\alpha}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{7.10}$$

Si en la identidad deducida damos valores a los índices griegos $\epsilon = \nu = 0$, podemos mostrar que la forma para cada una de las componentes de la matriz Hessiana se podrá obtener a través del siguiente

resultado:

$$W^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{0\beta}\eta^{0\alpha} - \eta^{00}\eta^{\beta\alpha})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.11)$$

De este modo damos paso al cálculo de cada una de las componentes, asignando un valor para los índices α, β comenzando el conteo en:

$$W^{00}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{00}\eta^{00} - \eta^{00}\eta^{00})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.12)$$

$$W^{01}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{01}\eta^{00} - \eta^{00}\eta^{10})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.13)$$

$$W^{02}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{02}\eta^{00} - \eta^{00}\eta^{20})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.14)$$

$$W^{03}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{03}\eta^{00} - \eta^{00}\eta^{30})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.15)$$

$$W^{10}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{00}\eta^{01} - \eta^{00}\eta^{01})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.16)$$

$$W^{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{01}\eta^{01} - \eta^{00}\eta^{11})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.17)$$

$$W^{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{02}\eta^{01} - \eta^{00}\eta^{21})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.18)$$

$$W^{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{03}\eta^{01} - \eta^{00}\eta^{31})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.19)$$

$$W^{20}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{02}\eta^{00} - \eta^{00}\eta^{02})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.20)$$

$$W^{21}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{01}\eta^{02} - \eta^{00}\eta^{12})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.21)$$

$$W^{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{02}\eta^{02} - \eta^{00}\eta^{22})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.22)$$

$$W^{23}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{03}\eta^{02} - \eta^{00}\eta^{32})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.23)$$

$$W^{30}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{00}\eta^{03} - \eta^{00}\eta^{03})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.24)$$

$$W^{31}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{03}\eta^{01} - \eta^{00}\eta^{13})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.25)$$

$$W^{32}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{02}\eta^{03} - \eta^{00}\eta^{23})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 0 \quad (7.26)$$

$$W^{33}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\eta^{03}\eta^{03} - \eta^{00}\eta^{33})\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.27)$$

Con todos los valores calculados para cada uno de los elementos, tenemos que la estructura de la matriz Hessiana se expresa como sigue:

$$W(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.28)$$

Dado que la $W(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ presenta una fila nula, se tiene según las propiedades de las matrices, que la matriz Hessiana no es invertible, ya que su determinante es igual a cero.

Apéndice C. Cantidades conservadas

Invarianza bajo traslaciones Espacio-Temporales

La invarianza bajo traslaciones en caracterizada por la siguiente transformaciones en las coordenadas:

$$x'_\mu = x_\mu + \epsilon_\mu \dots \delta x_\mu = x'_\mu - x_\mu = \epsilon_\mu \quad (7.29)$$

siendo ϵ_μ un cuadri-vector constante. Este tipo de invarianza es consecuencia de la homogeneidad del espacio-tiempo donde la forma del campo es considerada para no cambiar por traslaciones, es decir: $\phi'_i(x') = \phi_i(x)$, de tal manera que las variaciones locales son nulas:

$$\delta\phi_i(x) = 0 \quad (7.30)$$

por tal razón se tiene que la corriente de Noether asociada a simetrías de traslaciones espacio temporales se expresa como:

$$\Theta^{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\alpha(x))} \partial^\nu A_\alpha(x) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}(x) \quad (7.31)$$

Debido a la forma de la Densidad Lagrangiana asociada al campo de P-R y el resultado obtenido en (2.18), la estructura de la anterior ecuación será dada por:

$$\Theta^{\mu\nu}(x) = F^{\alpha\mu} \partial^\nu A_\alpha(x) - \eta^{\mu\nu} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) + \frac{m^2}{2} A_\alpha(x) A^\alpha(x) \right] \quad (7.32)$$

Por otra parte, cuando le asignamos al índice griego un único valor de $\mu = 0$, mientras que sobre el índice se considerarán dos valores, como $\nu = 0, i$, y en contraste a ello deducimos a partir de (7.32) que ha de cumplirse:

$$\Theta^{00}(x) = F^{\alpha 0} \partial^0 A_\alpha(x) - \eta^{00} \left[-\frac{1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F^{\alpha\beta}(x) + \frac{m^2}{2} A_\alpha(x) A^\alpha(x) \right] \quad (7.33)$$

Esto con respecto a la parte espacial de ν , es decir, $\nu = 0$, de otro modo, se tendrá para $\nu = i$:

$$\Theta^{0i}(x) = F^{\alpha 0} \partial^i A_\alpha(x) \quad (7.34)$$

donde $\eta^{0i} = 0$ para $i \neq 0$.

Determinación de la ecuación (2.33)

Como se mostró en el capítulo 2, la cantidad conservada por transformaciones de Lorentz se conoce como tensor Momento Angular-Espín, el cual se había definido a partir de (2.31), es por ello, que a partir de dicha ecuación calcularemos la siguiente relación, donde deberá tenerse en cuenta el resultado (2.18) y la definición (2.32), de este modo:

$$\begin{aligned}
 M^{\mu\nu\lambda} &= \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + F_\sigma^\mu \left(\eta^{\sigma\nu}\eta^{\alpha\lambda} - \eta^{\sigma\lambda}\eta^{\alpha\nu} \right) A_\alpha \\
 &= \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + \left(F^{\nu\mu}A^\lambda - F^{\lambda\mu}A^\nu \right) \\
 &= \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + \left(F^{\mu\lambda}A^\nu - F^{\mu\nu}A^\lambda \right)
 \end{aligned} \tag{7.35}$$

Apéndice D. Formalismo de Hamilton

Demostración de la Densidad Hamiltoniana (2.43)

En este punto se mostrarán todos los cálculos necesarios para poder llegar a la densidad Hamiltoniana indicada en (2.43), donde se tendrá en cuenta la definición de Dicha densidad:

$$\mathcal{H}_c \equiv \Pi^\mu(\mathbf{x}, t)\dot{A}_\mu(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, t) \tag{7.36}$$

Donde $\dot{A}_\mu = \partial_0 A_\mu$

Para tener un perspectiva más clara sobre algunos términos implícitos dentro de (7.36), se desarrollará la sumatoria sobre μ obteniendo con esto:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_c &\equiv \underbrace{\Pi^0(\mathbf{x}, t)}_{\approx 0} \dot{A}_0(\mathbf{x}, t) + \Pi^k(\mathbf{x}, t)\dot{A}_k(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)|_{\mu=0,k} \\
 &= \Pi^k(\mathbf{x}, t)\dot{A}_k(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}(\mathbf{x}, t)|_{\mu=0,k}
 \end{aligned} \tag{7.37}$$

Ahora, si usamos la definición (2.1) para ser reemplazada en el resultado anterior, el proceso desarrollado se torna en:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_c &= \Pi^k(\mathbf{x}, t)\dot{A}_k(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4}F_{0\nu}(\mathbf{x}, t)F^{0\nu}(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2}A_0(\mathbf{x}, t)A^0(\mathbf{x}, t) \\
 &+ \frac{1}{4}F_{k\nu}(\mathbf{x}, t)F^{k\nu}(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2}A_k(\mathbf{x}, t)A^k(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.38}$$

Cuando se desarrolla la sumatoria sobre ν se puede eliminar algunos términos, tal y como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \Pi^k(\mathbf{x}, t) \dot{A}_k(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} \underbrace{F_{0i}(\mathbf{x}, t) F^{0i}(\mathbf{x}, t)}_{i \rightarrow k} - \frac{m^2}{2} A_0(\mathbf{x}, t) A^0(\mathbf{x}, t) \\
&+ \frac{1}{4} F_{k0}(\mathbf{x}, t) F^{k0}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} F_{ki}(\mathbf{x}, t) F^{ki}(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2} A_k(\mathbf{x}, t) A^k(\mathbf{x}, t) \\
&= \Pi^k(\mathbf{x}, t) \dot{A}_k(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2} A_0(\mathbf{x}, t) A^0(\mathbf{x}, t) \\
&+ \frac{1}{2} F_{k0}(\mathbf{x}, t) F^{k0}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} F_{ki}(\mathbf{x}, t) F^{ki}(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2} A_k(\mathbf{x}, t) A^k(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

Finalmente, haremos uso de la definición de momento canónico conjugado, para el resultado mostrado en (2.40), esto con el fin de llevar a la forma más simplificada posible la expresión (7.39):

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \Pi^k(\mathbf{x}, t) (\Pi^k(\mathbf{x}, t) + \partial_k A_0(\mathbf{x}, t)) - \frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{x}, t) \Pi^k(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2} A_0(\mathbf{x}, t) A^0(\mathbf{x}, t) \\
&- \frac{m^2}{2} A_k(\mathbf{x}, t) A^k(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} F_{ki}(\mathbf{x}, t) F^{ki}(\mathbf{x}, t) \\
&= \frac{1}{2} \Pi^k(\mathbf{x}, t) \Pi^k(\mathbf{x}, t) + \Pi^k(\mathbf{x}, t) \partial_k A_0(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2}{2} A_\mu(\mathbf{x}, t) A^\mu(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{4} F_{ki}(\mathbf{x}, t) F^{ki}(\mathbf{x}, t)
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Concluyendo nuestro trabajo en la ecuación (2.43).

Demostración identidad (2.52)

En este punto se busca identificar el valor del CP entre el vínculo primario (2.41) y el Hamiltoniano canónico (2.46), para tal fin se procederá a calcular las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}
\{\Phi_1(\mathbf{x}, t), H_c\} &= \int d^3y \left[-\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), A_0(\mathbf{y}, t)\} \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) - \frac{m^2}{2} \eta^{\mu\nu} \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) A_\nu(\mathbf{y}, t)\} \right] \\
&= \int d^3y \left[\delta_0^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) \right] \\
&- \frac{m^2}{2} \eta^{\mu\nu} \int d^3y \left[\{\Pi^0(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t)\} A_\nu(\mathbf{y}, t) + A_\mu(\mathbf{y}, t) \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{y}, t)\} \right] \\
&= \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + \frac{m^2}{2} \eta^{\mu\nu} \int d^3y \left[\delta_\mu^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) A^\nu(\mathbf{y}, t) + A_\mu(\mathbf{y}, t) \delta_\nu^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\
&= \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + \frac{m^2}{2} [\eta^{0\nu} A_\nu(\mathbf{x}, t) + \eta^{0\mu} A_\mu(\mathbf{x}, t)] \\
&= \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \approx 0
\end{aligned} \tag{7.40}$$

determinando el resultado indicado en (2.52).

Demostración de la identidad (2.58)

Vamos a comprobar el resultado mostrado en la ecuación (2.58), por lo cual, se deberá partir de los valores determinados para los CP fundamentales y de la definición del Hamiltoniano canónico de P-R expresadas en (2.48) y (2.46) respectivamente, inmediatamente se observa que:

$$\begin{aligned}
 \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y \left\{ \Phi_2(\mathbf{x}, t), \frac{1}{2}(\Pi^n(\mathbf{y}, t))^2 \right\} - \int d^3y \left\{ \Phi_2(\mathbf{x}, t), A_\alpha(\mathbf{y}, t) \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) \right\} \\
 &\quad - \int d^3y \frac{1}{4} \left\{ \Phi_2(\mathbf{x}, t), F_{ni}(\mathbf{y}, t) F_{ni}(\mathbf{y}, t) \right\} \\
 &= -\frac{m^2}{2} \partial_k^x \left(\int d^3y \left\{ \Pi^k(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) A^\mu(\mathbf{y}, t) \right\} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{4} \partial_k^x \left(\int d^3y \left\{ \Pi^k(\mathbf{x}, t), F_{ni}(\mathbf{x}, t) F_{ni}(\mathbf{x}, t) \right\} \right)
 \end{aligned} \tag{7.41}$$

En la búsqueda de resolver la anterior ecuación (7.41), debemos emplear propiedades como la que se muestra a continuación, todo con el fin de dar una solución parcial a la mencionada ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x - y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(x - y) \tag{7.42}$$

De esta forma se deberá calcular por separado cada uno de los sumandos que se ubican dentro de la integral en (7.41), de este modo vamos a calcular:

$$\begin{aligned}
 \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), F_{ni} F_{ni}\} &= 2F_{ni} \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), F_{ni}\} \\
 &= 2F_{ni} \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y A_i(\mathbf{y}, t) - \partial_i^y A_n(\mathbf{y}, t)\} \\
 &= 2F_{ni} \left[\partial_n^y \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\} - \partial_i^y \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), A_n(\mathbf{y}, t)\} \right] \\
 &= 2F_{ni} \left[\partial_i^y (\delta_n^k \partial^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - \partial_n^y (\delta_i^k \partial^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right] \\
 &= 2 \left\{ -\partial_i^x [F_{ki} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})] + \partial_n^x [F_{nk} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.43}$$

$$\begin{aligned}
 \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) A^\mu(\mathbf{y}, t)\} &= \eta^{\mu\nu} \left[\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t)\} A_\nu(\mathbf{y}, t) + A_\mu(\mathbf{y}, t) \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), A_\nu(\mathbf{y}, t)\} \right] \\
 &= \eta^{\mu\nu} \left[(-\delta_k^\mu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) A_\nu(\mathbf{y}, t) + A_\mu(\mathbf{y}, t) (-\delta_k^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right] \\
 &= \left[(-\eta^{k\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) A_\nu(\mathbf{y}, t) + A_\mu(\mathbf{y}, t) (-\eta^{\mu k} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right] \\
 &= 2A_k(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})
 \end{aligned} \tag{7.44}$$

Como resultado de haber calculado las operaciones mostradas en (7.43) y (7.44), resulta fácil poder evidenciar que la ecuación (7.41) será reducida al siguiente resultado:

$$\{\Phi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = -m^2 \partial_k^x A_k(x) + \partial_k^x \partial_n^x F_{kn}(x) \quad (7.45)$$

Con lo cual se ha demostrado la relación (2.58).

CP entre los vínculos del sistema

A partir de la ecuación (2.41) y los CP fundamentales se puede deducir:

$$\begin{aligned} \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), \Phi_1(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Del mismo modo, al usar la expresión dada en (2.56) y los CP fundamentales se obtendrá:

$$\begin{aligned} \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx m^2 \partial_k^x \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), A^0(\mathbf{y}, t)\} + m^2 \partial_n^y \{A^0(\mathbf{x}, t), \Pi^n(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx m^2 \partial_k^x (\delta_0^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) - m^2 \partial_n^y (\delta_0^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.47)$$

De forma análoga, usando la expresión (2.41), (2.56) y los CP fundamentales, se encuentra que el CP entre los vínculos Φ_1 y Φ_2 , se calculan mediante el próximo planteamiento:

$$\begin{aligned} \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx m^2 \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx -m^2 (\delta_0^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &\approx -m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.48)$$

De acuerdo análisis previo y las propiedades de los CP, se comprueba que:

$$\begin{aligned} \{\Phi_2(\mathbf{x}, t), \Phi_1(\mathbf{y}, t)\} &\approx -\{\Phi_1(\mathbf{y}, t), \Phi_2(\mathbf{x}, t)\} \\ &\approx m^2 \delta^3(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7.49)$$

Efectuando estos cálculos, se encuentra que la matriz de los vínculos de segunda clase de la teoría de P-R, presentará la siguiente estructura:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.50)$$

Como se puede observar esta matriz es funcional, puesto que depende en sus componentes de la función delta de Dirac. A continuación se procederá a realizar la transformada de Fourier de cada una de sus componentes, esto con el fin de encontrar el determinante de la matriz de los vínculos de segunda clase.

La transformada de Fourier de la función delta de Dirac en tres dimensiones [9] viene dada por:

$$\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3p \exp[i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})] \quad (7.51)$$

Por ende, la transformada de Fourier asociada a la matriz de vínculos de segunda clase será representada por:

$$\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.52)$$

Apéndice E. Matriz de vínculos en la Teoría de P-R

Bajo la definición (2.67), la matriz de vínculos de segunda clase de la teoría de P-R, es definida por:

$$C_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \{\Phi_i(\mathbf{x}, t), \Phi_j(\mathbf{y}, t)\} \quad (7.53)$$

como ya se había mostrado finalmente tendrá la forma indicada en (7.50), **Apéndice D.** Debido a que se pudo inferir anteriormente, que es una matriz funcional puesto que aparece implícitamente en cada una de sus componentes la función delta de Dirac.

Para el cálculo de los CD entre las variables del espacio de fase reducido de la teoría de P-R. es necesario determinar la inversa de la matriz (7.50). Para dicho fin, se deberá tener en cuenta que, dada $C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ siendo esta inversa de $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, esta deberá cumplir la siguiente propiedad:

$$\int d^3z C_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) C^{-1}_{kj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.54)$$

Proponemos ahora que la matriz $C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ presentase la siguiente estructura:

$$C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \Omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

donde Ω_i son funciones desconocidas y que deberán ser calculadas. Reemplazando a (7.50) y (7.55) en (7.54), se verifica que para determinar a la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase $C(\vec{x}, \vec{y})$, será necesario resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Omega_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Omega_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Omega_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

De acuerdo a la ecuación (7.50) y a la propiedad de la función delta de Dirac, el cálculo se reduce simplemente a resolver la operación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & -m^2 \\ m^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.56)$$

De tal modo, que al resolver el producto matricial en el lado izquierdo de la relación previa, se obtiene la siguiente igualdad entre matrices:

$$\begin{pmatrix} -m^2\Omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ m^2\Omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^2\Omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (7.57)$$

La igualdad entre matrices garantiza que una matriz $M \equiv (m_{ij})_{n \times l}$ de elementos m_{ij} y de dimensión $n \times l$, será igual a una matriz $P \equiv (p_{ij})_{r \times s}$ de elementos matriciales p_{ij} y dimensión $r \times s$, si y solo si se cumple que $n = r, l = s$ y $m_{ij} = p_{ij}$, es decir, la identidad solo será satisfecha, si y solo si, tanto las dimensiones de las matrices como las componentes de dichas matrices, son iguales. Por consiguiente, con la finalidad de determinar las componentes de (7.55), se procederá a igualar cada una de las componentes correspondientes.

Inicialmente, se igualará la primera componente de la primera fila de ambas matrices, es decir:

$$-m^2\Omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

con lo cual, se obtendrá:

$$\Omega_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.58)$$

Por otra parte la segunda componente de la primera fila de ambas matrices, tendrá la siguiente relación:

$$-m^2\Omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Por tanto, se deberá cumplir que:

$$\Omega_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (7.59)$$

Ahora, si comprobamos las componentes de la segunda fila de cada una de las matrices igualadas en (7.57), llegaremos a las siguientes relaciones:

$$m^2\Omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$$

Tal que, se cumplirá:

$$\Omega_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (7.60)$$

finalmente, al comparar las componente restantes, se establece que:

$$m^2\Omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Reduciéndose así la anterior identidad a:

$$\Omega_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{m^2}\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.61)$$

Incluyendo todos los resultados obtenidos en el anterior proceso desde (7.58) hasta (7.61), dentro de la definición propuesta para $C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ (7.55), se establece que la estructura de la matriz inversa de la matriz de vínculos de segunda clase, es dada por:

$$C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{m^2} \\ -\frac{1}{m^2} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.62)$$

Apéndice F. C.P. entre los campos canónicos y los vínculos del sistema

En esta sección indicamos algunos de los cálculos empleados para deducir los C.D. de la teoría de P-R, tal y como es el caso de los C.P. entre los campos canónicos y los vínculos de la teoría, por tal razón haremos un proceso detallado de dichos cálculos, comenzando por el C.P. a tiempos iguales entre el campo A_i y el vínculo primario Φ_1 indicado en (2.41) donde se tendrá en cuenta los C.P. fundamentales, obteniendo con ello:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), \Phi_1(\mathbf{y}, t)\} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \delta_i^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.63)$$

Haciendo uso de las propiedades de los CP se tendría que:

$$\begin{aligned}\{\Phi_1(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\} &= -\{A_i(\mathbf{y}, t), \Pi^0(\mathbf{x}, t)\} \\ &= 0\end{aligned}\tag{7.64}$$

Ahora daremos paso a calcular el CP a tiempos iguales entre el campo A_i y el vínculos secundario Φ_2 , el cual ha sido definido previamente en (2.56), de este modo y en base a los valores obtenido en los CP fundamentales se obtendrá:

$$\begin{aligned}\{A_i(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{y}, t)\} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \partial_k^y \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\} + m^2 \{A_i(\mathbf{x}, t), A_0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \partial_k^y (\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\end{aligned}\tag{7.65}$$

si empleamos las propiedades de los C.P. en la identidad previa, estableceríamos:

$$\begin{aligned}\{\Phi_2(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t)\} &= -\{A_i(\mathbf{y}, t), \Phi_2(\mathbf{x}, t)\} \\ &= -\partial_k^x (\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}))\end{aligned}\tag{7.66}$$

Las anteriores operaciones se realizaron respecto al campo A_i , ahora deberemos analizar los C.P. entre el campo momento canónico conjugado y los vínculos de la teoría, comenzando por el C.P. a tiempos iguales entre Π^k y el vínculo Φ_1 , de lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}\{\Pi^k(\vec{x}, t), \Phi_1(\mathbf{y}, t)\} &= \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= 0\end{aligned}\tag{7.67}$$

donde se demuestra de forma equivalente que:

$$\begin{aligned}\{\Phi_1(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\} &= -\{\Pi^k(\mathbf{y}, t), \Phi_1(\mathbf{x}, t)\} \\ &= 0\end{aligned}\tag{7.68}$$

Finalmente buscamos establecer el C.P. entre el campo Π^k y el vínculo Φ_2 definido en (2.56), por ende, se calcula:

$$\begin{aligned}\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{y}, t)\} &= \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \partial_k^y \{P_i^k(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\} + m^2 \{P_i^k(\mathbf{x}, t), A_0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= 0\end{aligned}\tag{7.69}$$

Cabe destacar que de las operaciones realizadas previamente, comenzando en (7.63) y finalizando en (7.69), únicamente el campo A_i tiene CP no nulo con uno de los vínculos de la teoría, tal y como se muestra en (7.65) y (7.66).

Apéndice G. Forma General de los C.D. para los campos A_i y Π^k

En este punto, se busca realizar de forma general el C.D. entre el campo A_i con alguna variable dinámica $E(A_i, \Pi^k) = E(\mathbf{x}, t)$, es decir, tendremos que formular en su expresión mas reducida el C.D. entre el campo A_i y dicha variable.

Para éste proceso se deberá tener en cuenta los resultados obtenidos en el **Apéndice F**, así como la definición de los C.D. (Ecuación(2.67)), los C.P. fundamentales y la forma de la matriz $C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ indicada en (7.62), inicialmente tendríamos que para el campo A_i se cumplirá:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v [\{A_i(\mathbf{x}, t), \Phi_i(\mathbf{u}, t)\} (C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^{ij} \{\Phi_j(\mathbf{v}, t), E(\mathbf{y}, t)\}] \end{aligned} \quad (7.70)$$

Con lo obtenido en (7.65) se tendría que el único C.P. no nulo entre el campo A_i y los vínculos de la teoría, sería con el vínculo de segunda clase Φ_2 , de este hecho obtendremos:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v [\{A_i(\mathbf{x}, t), \Phi_2(\mathbf{u}, t)\} (C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^{2j} \{\Phi_j(\mathbf{v}, t), E(\mathbf{y}, t)\}] \\ &= \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v [(\partial_k^u (\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}))) (C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^{2j} \{\Phi_j(\mathbf{v}, t), E(\mathbf{y}, t)\}] \end{aligned} \quad (7.71)$$

En consecuencia a que la matriz $C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, únicamente tiene componente no nula para las componentes $(C^{-1})^{12}$ y $(C^{-1})^{21}$, se podrá indicar el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} + \partial_k^x \left[\int d^3v (\delta_i^k) (C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}))^{21} \{\Phi_1(\mathbf{v}, t), E(\mathbf{y}, t)\} \right] \\ &= \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} - \partial_k^x \left[\int d^3u (\delta_i^k) \left(\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{v}) \right) \{\Phi_1(\mathbf{v}, t), E(\mathbf{y}, t)\} \right] \\ &= \{A_i(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} - \left(\frac{1}{m^2} \partial_k^x \{\Phi_1(\mathbf{x}, t), E(\mathbf{y}, t)\} \right) \end{aligned} \quad (7.72)$$

Con respecto al anterior resultado, podremos derivar otros cálculos donde hemos de considerar las siguientes variables dinámicas, tales como $E(\mathbf{y}, t) = A_k(\mathbf{y}, t)$ y $E(\mathbf{y}, t) = \Pi^k(\mathbf{y}, t)$, con los valores calculados en los C.P. fundamentales y de los resultados de C.P. entre las variables dinámicas y los vínculos del sistema, para la primera consideración se cumpliría que:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), A_k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), A_k(\mathbf{y}, t)\} - \left(\frac{1}{m^2}\partial_k^x\{\Phi_1(\mathbf{x}, t), A_k(\mathbf{y}, t)\}\right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.73)$$

si se cumpliera que $E(\mathbf{y}, t) = \Pi^k(\mathbf{y}, t)$, notando que Π^k solo posee C.P. nulos con los vínculos de la teoría de P-R, se podrá deducir:

$$\begin{aligned} \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{A_i(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\} - \frac{1}{m^2}\partial_k^x\{\Phi_1(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \delta_i^k\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.74)$$

Debemos realizar un proceso análogo a la hora de calcular los C.D. entre el campo Π^k y cualquier variable dinámica $F(A_i, \Pi^k) = F(\mathbf{x}, t)$, por lo cual, a partir de la definición (2.67) podremos plantear:

$$\begin{aligned} \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\} \\ &\quad - \int d^3u d^3v \left[\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Phi_i(\mathbf{u}, t)\} (C^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}))^{ij} \{\Phi_j(\mathbf{v}, t), F(\mathbf{y}, t)\} \right] \end{aligned} \quad (7.75)$$

Sin embargo, si nos remitimos al apéndice F se podrá apreciar que el campo Π^k solo posee corchetes nulos con los vínculos de segunda clase presentes en la teoría de P-R, por lo tanto la ecuación inmediatamente anterior se verá reducida en:

$$\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\}_{CD} = \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{y}, t)\} \quad (7.76)$$

Con esto se verá claramente que el único C.D. no nulo es aquel que se obtiene entre los campos A_i y Π^k , ya que al reemplazar $F(\mathbf{x}, t) = \Pi^i(\mathbf{x}, t)$ fijamos:

$$\begin{aligned} \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\}_{CD} &= \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Pi^i(\mathbf{y}, t)\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (7.77)$$

Apéndice H. Evolución temporal de los operadores (\hat{A} , $\hat{\Pi}$)

En esta sección buscamos calcular a nivel cuántico la evolución temporal de los operadores de campo (\hat{A} , $\hat{\Pi}$) presentes en la teoría de P-R, para ello hacemos énfasis en la ecuación (??), conocida como la ecuación de Heisenberg, con el fin de calcular la evolución temporal de los operadores (\hat{A} , $\hat{\Pi}$), deberemos hacer uso del conjunto de conmutadores de la teoría indicados en (3.2) y el operador Hamiltoniano (3.4).

Deducimos así la evolución temporal de $\hat{A}_k(\mathbf{x}, t)$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{A}}_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{i} \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \hat{H}_c(\mathbf{y}, t) \right] \\
 &= \frac{1}{i} \int d^3y \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \frac{1}{2} (\hat{\Pi}^n(\mathbf{y}, t))^2 \right] \\
 &= \frac{1}{i} \int d^3y (i\delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{\Pi}^n(\mathbf{y}, t)) \\
 &= \hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.78}$$

Ya fijado el anterior resultado pasamos al cálculo de $\dot{\hat{\Pi}}^k(\mathbf{x}, t)$, donde hemos de aplicar algunas propiedades de los conmutadores [12], también usaremos las ecuaciones(??),(3.2) y (3.4), de este modo:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\Pi}}^k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{i} \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{H}_c(\mathbf{y}, t) \right] \\
 &= \frac{1}{i} \int d^3y \left\{ \frac{m^2}{2} \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \right] + \frac{1}{4} \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ki} \hat{F}_{ki} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.79}$$

Para hacer más entendibles las operaciones llevadas a cabo en la ecuación anterior, dividimos ésta en dos parte, la primera parte del lado derecho de (7.79) se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \right] &= \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \right] \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) + \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \right] \\
 &= -2i\delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \\
 &= -2i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{A}_k(\mathbf{y}, t)
 \end{aligned} \tag{7.80}$$

Para desarrollar el segundo término del lado derecho de (7.79), es necesario primero calcular la próxima operación:

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ni} \right] &= \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y A_i(\mathbf{y}, t) - \partial_i^y A_n(\mathbf{y}, t) \right] \\
 &= \partial_n^y \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), A_i(\mathbf{y}, t) \right] - \partial_i^y \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), A_n(\mathbf{y}, t) \right] \\
 &= \partial_n^y \left[-i\delta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^y \left[-i\delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\
 &= \partial_n^x \left[i\delta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^x \left[i\delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right]
 \end{aligned} \tag{7.81}$$

en base a éste resultado calculamos finalmente el segundo término de (7.79), que resulta en:

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ni} \hat{F}_{ni} \right] &= \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ni} \right] \hat{F}_{ni} + \hat{F}_{ni} \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ni} \right] \\
 &= 2 \left\{ \partial_n^x \left[i\delta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^x \left[i\delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\} \hat{F}_{ni} \\
 &= 2 \left\{ \partial_n^x \left[i\hat{F}_{nk} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^x \left[i\hat{F}_{ki} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar en el resultado inmediatamente anterior, los índices i y n están contraídos, por lo cual podríamos sugerir el siguiente cambio $i \rightarrow n$, obteniendo con ello:

$$= 4i \left[\partial_n^x \hat{F}_{nk}(\mathbf{y}, t) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{7.82}$$

Por último empleamos los resultados indicados en (7.80) y (7.82), para ser reemplazados en (7.79) llegando así a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \dot{\hat{\Pi}}^k(\mathbf{x}, t) &= -m^2 \int d^3y (\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{A}_k(\mathbf{y}, t)) + \partial_n^x \int d^3y (\hat{F}_{nk}(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\
 &= -m^2 \hat{A}_k(\mathbf{x}, t) + \partial_n^x \hat{F}_{nk}(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.83}$$

Como consecuencia de haber obtenido los resultados (7.78) y (4.46), podemos señalar que los operadores de campo (\hat{A} , $\hat{\Pi}$) presentes en la teoría de P-R satisfacen la relación:

$$\partial_0 \partial_0 \hat{A}_k(x) = \dot{\hat{\Pi}}^k(x) = -m^2 \hat{A}_k(x) + \partial_n^x \hat{F}_{nk}(x)$$

Desarrollando el tensor de campo electromagnético de la forma $\hat{F}_{nk} = \partial_n \hat{A}_k - \partial_k \hat{A}_n$, tendremos:

$$\begin{aligned}
 0 &= \partial_0 \partial_0 \hat{A}_k(x) - \partial_n^x \partial_n^x \hat{A}_k(x) + m^2 \hat{A}_k(x) + \underbrace{\partial_n^x \partial_k^x \hat{A}_n(x)}_{=0} \\
 0 &= \partial_0 \partial^0 \hat{A}_k(x) + \partial_n^x \partial^{nx} \hat{A}_k(x) + m^2 \hat{A}_k(x) \\
 0 &= \left(\underbrace{\square}_{\partial_\mu \partial^\mu} + m^2 \right) \hat{A}_k(x)
 \end{aligned} \tag{7.84}$$

La igualdad previa ya fue obtenida pero a nivel clásico, siendo ésta la ecuación de Klein-Gordon para una partícula masiva, como se podrá apreciar se está cumpliendo ahora pero a nivel cuántico.

Apéndice I. Determinación del álgebra de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$

Demostración identidad (3.17)

Cuando buscamos determinar el álgebra de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, surge la necesidad de poder expresar estos operadores en función de los campos $\hat{A}(\mathbf{x}, t); \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$, puesto que de éstos últimos se conocen las relaciones de conmutación (3.2), debido al objetivo inicial se efectuarán una serie de manipulaciones algebraicas que surtirán efecto sobre las relaciones de ortonormalización de las funciones $\exp^{\pm ik \cdot x}$, como se muestra en seguida:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(k \cdot x)} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p d^3x}{\sqrt{2\omega_p}} \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(p-k) \cdot x} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(p+k) \cdot x} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) \right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\omega_p - \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\omega_p + \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{k})} \right\} \end{aligned} \quad (7.85)$$

Aprovechando las propiedades de la función Delta de Dirac [12] en la ulterior identidad, con el fin de obtener:

$$= \sum_{\lambda=1}^3 \left[\frac{\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \frac{\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_{-k}}} \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\omega_{-k} + \omega_k)t} \right] \quad (7.86)$$

Como se ha indicado anteriormente la frecuencia, satisface la condición $\omega_k = \omega_{-k}$ por tal razón:

$$\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(k \cdot x)} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.87)$$

a partir de la relación inmediatamente anterior, podemos establecer una ecuación equivalente de la forma:

$$\sqrt{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \exp^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) \exp^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.88)$$

Como se puede observar esta relación (7.88), ha sido indicada en el capítulo 3, denotada como (3.17).

Demostración identidad (3.18)

Para llevar a cabo la demostración de (3.18), se realizará un proceso análogo con respecto al proceso que se realizó para demostrar (3.17), de tal modo que se deberá calcular lo siguiente:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p d^3x}{\sqrt{2\omega_p}} (-i\omega_p) \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) \right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} (-i\omega_p) \left\{ \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\omega_p - \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})} \right. \\ &\quad \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\omega_p + \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{k})} \right\} \quad (7.89) \end{aligned}$$

nuevamente, debido a las propiedades de la función delta de Dirac y la paridad de la frecuencia ω_k encontramos el resultado:

$$\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.90)$$

Con lo mostrado anteriormente se podrá establecer la relación posterior, dada por:

$$\frac{i\sqrt{2\omega_k}}{\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right]$$

Ecuación que ha sido señalada anteriormente y que corresponde a la identidad (3.18)

Conmutadores asociados a los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$

Como ya lo habíamos expresado anteriormente, para encontrar el álgebra que satisfacen los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, es necesario hacer uso de los conmutadores ya establecidos para los operadores de campo $\hat{A}(\mathbf{x})$ y $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$, que se muestran en (3.2), de este modo, comenzamos por calcular el siguiente conmutador:

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[\hat{\Pi}_n(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_m(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + i\omega_p \hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{y}, t) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left(i\omega_p \left[\hat{\Pi}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{y}, t) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i\omega_k \left[\hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_m(\mathbf{y}, t) \right] \right) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[i\omega_p (-i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (i\omega_k (i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}))) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} (\omega_p + \omega_k) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \\
 &= \frac{(\omega_p + \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int \frac{d^3x e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p})}
 \end{aligned} \tag{7.91}$$

Por lo tanto, si usamos la propiedad de la función delta de Dirac en el resultado (7.91), hemos de obtener:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(\omega_k + \omega_p)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
 &= \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
 &= \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
 &= \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{7.92}$$

Con ello estamos fijando la primera relación de conmutación entre los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, por otra parte pasamos a fijar el conmutador del operador $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ con sí mismo, para lo cual habrá

que calcular:

$$\begin{aligned}
[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[\hat{\Pi}_n(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_m(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\omega_p \hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{y}, t) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left(-i\omega_p \left[\hat{\Pi}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{y}, t) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\omega_k \left[\hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}_m(\mathbf{y}, t) \right] \right) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \left\{ (\omega_p - \omega_k) \left[i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
&= \frac{(\omega_p - \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k}+\mathbf{p})} \\
&= \frac{(\omega_{-k} - \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_{-k})}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_{-k})t} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})
\end{aligned} \tag{7.93}$$

Como consecuencia directa de la paridad de ω_k , podremos apreciar que (7.93) termina siendo igual a cero, es decir:

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1)] = 0 \tag{7.94}$$

Debido a las propiedades de los conmutadores [11] podemos reescribir el resultado anterior, donde se cumplirá el siguiente resultado:

$$[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)] = 0 \tag{7.95}$$

Cuando aplicamos la operación adjunto hermitiano sobre (7.95), podremos establecer:

$$([\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)])^\dagger = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] = 0$$

En concordancia con los cálculos realizados en este ítem, podemos concluir que la única contribución no nula, será por parte del conmutador $[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)]$.

Operador Hamiltoniano en función de $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$

En este punto vamos a demostrar la ecuación (3.33), para ello debemos usar expresiones ya demostradas tales como (3.14) y (3.16), donde se realizó la descomposición de Fourier para los

operadores de campo $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$, $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$, por otra parte y debido a la ecuación planteada en (3.32), la forma para el operador Hamiltoniano exige conocer la forma del $\nabla^2 \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)$, concierne a esto analizamos el término:

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} &= \nabla^2 \left[\sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right] \\
 &= \left[\sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\omega_k t} \nabla^2 e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\omega_k t} \nabla^2 e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right] \\
 &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}} (-\mathbf{k}^2) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]
 \end{aligned} \tag{7.96}$$

en relación al anterior cálculo y al objetivo planteado desde el comienzo, reemplazamos las ecuaciones (3.14), (3.16) y (7.96) en la forma del Hamiltoniano dada en (3.32), de este modo:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 x d^3 k d^3 p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ -\omega_k \omega_p \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(p \cdot x)} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(p \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right. \\
 &\quad \left. + m^2 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \cdot \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(p \cdot x)} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(p \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] + \mathbf{K}^2 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(k \cdot x)} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(k \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \cdot \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(p \cdot x)} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(p \cdot x)} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.97}$$

Desarrollamos los productos indicados en (7.97), asociando algunos términos que comparten factores comunes llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ (-\omega_k \omega_p + m^2 \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (-\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \right\} \\
 &= \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k d^3p}{2\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ (-\omega_k \omega_p + m^2 \right. \\
 &\quad \left. + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})} \right] \right. \\
 &\quad \left. + (-\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{K}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})} \right] \right\} \\
 &\hspace{15em} (7.98)
 \end{aligned}$$

recordando la ecuación (3.11) tenemos que:

$$0 = m^2 + \mathbf{k}^2 - \omega_k^2;$$

Por lo cual, al hacer uso de las propiedades de la Delta de Dirac y la paridad de $\omega_k = \omega_{-k}$, podemos eliminar algunos términos de (7.98), en el Hamiltoniano anterior, reduciéndose a:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_k}} (\omega_k \omega_k + \underbrace{m^2 + \mathbf{K}^2}_{\omega_k^2}) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1)}_{\lambda \leftrightarrow \lambda_1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \underbrace{\epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1)}_{=\delta_{\lambda\lambda_1}} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \underbrace{\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}_{=\delta_{\lambda\lambda_1}} \right]
 \end{aligned} \tag{7.99}$$

por la propiedad de la Delta de Kronecker [9], la sumatoria colapsa para $\lambda = \lambda_1$, de este modo, el Hamiltoniano quedará expresado como sigue:

$$\hat{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \omega_k \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right] \tag{7.100}$$

Demostración de la identidad (3.37) y (3.38)

Procedemos a determinar la acción del operador Hamiltoniano sobre un estado en la forma $(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle)$, con lo cual, plantemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle) &= \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{H} |n_a\rangle - \omega_k \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle \\
 &= \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) E_{n_a} |n_a\rangle - \omega_k \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle \\
 &= (E_{n_a} - \omega_k) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle
 \end{aligned} \tag{7.101}$$

de igual forma, se podrá determinar que la acción del Hamiltoniano sobre un estado $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle$ poseerá la siguiente energía:

$$\begin{aligned}
 \hat{H}(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle) &= \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{H} |n_a\rangle + \omega_k \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle \\
 &= \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) E_{n_a} |n_a\rangle - \omega_k \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle \\
 &= (E_{n_a} - \omega_k) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) |n_a\rangle
 \end{aligned} \tag{7.102}$$

Deducción de la identidad (3.52)

En la búsqueda de expresar el operador Momentum en términos de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, debemos hacer uso de la expansiones asociadas a los operadores de campo $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$ y $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$, es decir, haremos uso de la identidades (3.14) y (3.16), inicialmente debemos calcular:

$$\begin{aligned}
 \nabla \hat{A} &= \nabla \left[\sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right] \\
 &= \left[\sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i\omega_k t} \nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i\omega_k t} \nabla e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right] \\
 &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k (2\pi)^3}} (i\mathbf{k}) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right]
 \end{aligned} \tag{7.103}$$

De acuerdo a la identidad (3.52) se incluirán la identidad anterior y la ecuación (3.16), consecuentemente se plantea la ecuación:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} &= -\frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3 x d^3 k d^3 p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_k \mathbf{p} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 x d^3 k d^3 p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_p \mathbf{k} \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.104}$$

Solucionando los productos, en la relación inmediatamente anterior, resulta:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} = & \quad (7.105) \\
 & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 k d^3 p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ (\omega_k \mathbf{p}) \left\{ \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right. \right. \\
 & \quad - \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \quad - \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \quad \left. \left. + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right\} \right\} \\
 & + (\omega_p \mathbf{k}) \left\{ \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\omega_p + \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right. \\
 & \quad - \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\omega_p - \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \quad - \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\omega_p - \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \quad \left. \left. + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\omega_p + \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Como se ha hecho notar en el cálculo del operador Hamiltoniano, los términos entre paréntesis corresponde a la representación integral de la función delta de Dirac [9], debido a esto y en facultad a las propiedades de la delta de Dirac y la paridad de la frecuencia ω_k , la expresión anterior sera reducida:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} = & -\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 k}{2} \left\{ (-\mathbf{k}) \left\{ \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i(\omega_k)t} \right] \right. \right. \\
 & \quad - (\mathbf{k}) \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] - (\mathbf{k}) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] \\
 & \quad \left. \left. - \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) \exp^{-2i(\omega_k)t} \right] \right\} \right\} \\
 & + \mathbf{k} \left\{ \left[\hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i(\omega_k)t} \right] - \mathbf{k} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right. \\
 & \quad \left. - \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] + \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i(\omega_k)t} \right] \right\} \\
 & \quad (7.106)
 \end{aligned}$$

Como consecuencia directa de las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y aniquilación (3.24), cierto términos son cancelados, simplificando el resultado anterior de la forma:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 k}{2}(\mathbf{k}) \left\{ \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\vec{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] \right. \\ \left. + \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.107)$$

Como paso final, usamos las relaciones de completos que se aplican sobre los vectores de polarización, las cuales fueron indicadas en (3.13), para lo cual ha de cumplirse que $\epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) = \delta_{\lambda, \lambda_1}$, por acción directa de la función delta de Kronecker[9], la sumatoria sobre λ_1 colapsa, donde al agrupar los términos sobrantes deducimos:

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3 k(\mathbf{k}) \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \right\} \quad (7.108)$$

Demostración identidad (3.63)

A partir de la expresión (3.62) es posible determinar la forma del operador Spin indicada en (3.63), para esto será indispensable hacer uso de las expansiones en términos de ondas planas para los operadores de campo \hat{A} y $\hat{\Pi}$, indicadas en (3.14) y (3.16), por consiguiente establecemos la ecuación:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{S}} = i \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 x d^3 k d^3 p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \\ \left\{ \omega_p \right. \\ : \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \\ \times \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \\ \left. : \right\} \end{aligned} \quad (7.109)$$

Bajo los procesos que rigen el ordenamiento normal, cuando desarrollamos los productos cruz en la expresión previa ha de obtenerse:

$$\begin{aligned}
 \hat{S} = & \sum_{\lambda, \lambda=1}^3 \int \frac{d^3 k d^3 p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} (i\omega_p) \\
 & \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \\
 & + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_p - \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \\
 & - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\omega_p - \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \\
 & \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\omega_p + \omega_k)t} \left(\int \frac{d^3 x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{x}} \right) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right\} \quad (7.110)
 \end{aligned}$$

Analizando los elementos que componen a (7.110), podemos destacar que las integrales encerradas entre paréntesis corresponden a la forma integral de la función delta de Dirac, de esta forma y en virtud de las propiedades de dicha función, el término anterior, será replanteado como:

$$\begin{aligned}
 \hat{S} = & \frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda=1}^3 \int d^3 k \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i\omega_k t} \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) \right. \\
 & \left. \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right\} \\
 & + \frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda=1}^3 \int d^3 k \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right\} \quad (7.111)
 \end{aligned}$$

El primer elemento de la deducción preliminar, será analizado por separado donde realizamos los cambios de variable $\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}$ y $\lambda \rightarrow \lambda_1$, de lo cual ha de fijarse:

$$\begin{aligned}
 I = & \frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda=1}^3 \int d^3 k \left\{ \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i\omega_{-\mathbf{k}} t} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \times \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) \right. \\
 & \left. - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i\omega_{-\mathbf{k}} t} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \times \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) \right\} \quad (7.112)
 \end{aligned}$$

Teniendo en características fundamentales de los elementos presentes en (7.112), tales como la paridad de la frecuencia ω_k , la reglas de conmutación que satisfacen los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$,

indicadas en (4.24), y la regla aplicada al producto cruz, donde el producto cruz entre dos vectores cualquiera \mathbf{E} y \mathbf{D} , se cumple:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{D} = -\mathbf{D} \times \mathbf{E} \quad (7.113)$$

Por lo tanto, la identidad mostrada en (7.112), se modela de la forma:

$$-\frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda=1}^3 \int d^3k \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i\omega_k t} \boldsymbol{\epsilon}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \right. \\ \left. - \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \boldsymbol{\epsilon}^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) \right\} = -I \quad (7.114)$$

Comparando las igualdades (7.112) y (7.114), concluimos que $I = -I$, donde esta conclusión solo es satisfecha para un valor de I nulo, es decir, $I = 0$, bajo este razonamiento la expresión indicada en (7.111) es reducida en un término de la forma:

$$\hat{\mathbf{S}} = \frac{i}{2} \sum_{\lambda, \lambda=1}^3 \int d^3k \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \boldsymbol{\epsilon}^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \times \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k}, \lambda) \right\} \quad (7.115)$$

Demostración de las relaciones de conmutación (3.72)

En esta sección determinaremos las relaciones de conmutación que deberán satisfacer los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, +)$, $\hat{a}(\mathbf{k}, -)$, $\hat{a}(\mathbf{k}, 0)$, para ello usamos la transformaciones lineales indicadas en (3.71) y las relaciones de conmutación mostradas en (3.24), de este modo comenzamos por determinar el conmutador dado por:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}, +), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 1) - i\hat{a}(\mathbf{k}, 2), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 1) + i\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 2) \right] \quad (7.116)$$

Como resultado de la relación (3.24), tenemos sobre la anterior relación únicamente contribuyen los corchete entre:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}, +), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 1) \right] + \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 1) \right] \quad (7.117)$$

debido a la pasada contribución , el resultando esperado seria:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}, +), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) \right] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (7.118)$$

La relación de conmutación para el operador $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)$, con su complejo conjugado, se calcula partiendo de:

$$\left[\hat{a}(\mathbf{k}, -), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) \right] = \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 1) + i\hat{a}(\mathbf{k}, 2), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 1) - i\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 2) \right] \quad (7.119)$$

Donde al aplicar las propiedades de conmutación, notamos que la contribución a esta relación solamente esta generada por parte de los conmutadores:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, -), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) \right] &= \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 1) \right] + \frac{1}{2} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 1), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 1) \right] \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \end{aligned} \quad (7.120)$$

finalmente la ultima relación de conmutación de (3.72) se garantiza casi de inmediato, donde:

$$\begin{aligned} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 0), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 0) \right] &= \left[\hat{a}(\mathbf{k}, 3), \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 3) \right] \\ &= \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \end{aligned} \quad (7.121)$$

con estos calculos queda demostrada la identidad (3.72).

Demostración de la identidad 3.73

Vamos a determinar la estructura del operador Helicidad cuando éste sea redefinido con base al conjunto de transformaciones lineales (3.71). De este modo, se procede a obtener el siguiente grupo de ecuaciones a partir de (3.71):

$$\begin{aligned} \hat{a}(\mathbf{k}, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{a}(\mathbf{k}, +) + \hat{a}(\mathbf{k}, -)) \\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 1) &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)) \\ \hat{a}(\mathbf{k}, 2) &= -\frac{\sqrt{2}}{2i} (\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}(\mathbf{k}, -)) \\ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, 2) &= \frac{\sqrt{2}}{2i} (\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)) \end{aligned} \quad (7.122)$$

Por consiguiente, se procede a sustituir estos resultados en (3.70), obteniendo con ello:

$$\begin{aligned}
\hat{\Lambda} &= \frac{1}{2} \int d^3k \left\{ \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \right] \left[\hat{a}(\mathbf{k}, +) + \hat{a}(\mathbf{k}, -) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \right] \left[\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}(\mathbf{k}, -) \right] \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int d^3k \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, -) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -) \right. \\
&\quad \left. + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, -) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -) \right\} \\
&\hspace{15em} (7.123)
\end{aligned}$$

por último, asociamos términos semejantes, de lo cual se ha de obtener:

$$\hat{\Lambda} = \int d^3k \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +) - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -) \right\}$$

que era lo que se quería demostrar.

Cálculo de los autovalores asociados al operador Helicidad

Como se mostró en el capítulo 3, al operador Helicidad se le asignaron unos autovalores de acuerdo al estado sobre el cual era aplicado, las relaciones de autovalores se presentaron en las ecuaciones (3.77) y (3.78), para los autovalores de (+1) y (-1), por cual se busca determinar dichas relaciones, para ello usamos las ecuaciones desde (??) hasta (3.76), donde al demostrar la identidad (3.77), tendremos que calcular:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, +\rangle = \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) |0\rangle - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) |0\rangle \right] \quad (7.124)$$

Como estamos trabajando estados formados a partir de operadores de creación y aniquilación, deberá tenerse en cuenta que:

$$\begin{aligned}
\hat{a}(\mathbf{k}, +) |0\rangle &= 0 \\
\hat{a}(\mathbf{k}, -) |0\rangle &= 0 \\
&= \hat{a}(\mathbf{k}, 0) |0\rangle = 0
\end{aligned} \quad (7.125)$$

esto indica que debemos trabajar en base a las relaciones de conmutación (3.72), de acuerdo a tales relaciones se cumplirá:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, +)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +)\hat{a}(\mathbf{k}, +) + \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (7.126)$$

$$\hat{a}(\mathbf{k}, -)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -)\hat{a}(\mathbf{k}, -) + \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (7.127)$$

$$\hat{a}(\mathbf{k}, 0)\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 0) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 0)\hat{a}(\mathbf{k}, 0) + \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \quad (7.128)$$

Fundamentando los resultados en la anterior expresión y debido a que solo los conmutadores (3.72) son no nulos, podemos reformar a (7.124) como:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, +\rangle &= \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) \left(\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) \hat{a}(\mathbf{k}, +) + \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \right) |0\rangle - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) \hat{a}(\mathbf{k}, -) |0\rangle \right] \\
 &= \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) \hat{a}(\mathbf{k}, +) |0\rangle \right] + \int d^3k \left[\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) |0\rangle \right] \\
 &= \int d^3k \left[\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) \right] |0\rangle \\
 &= \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, +) |0\rangle \\
 &= |\mathbf{k}_1, +\rangle
 \end{aligned} \tag{7.129}$$

Estableciendo con esto, que el autovalor del operador Helicidad actuando sobre el estado $|\mathbf{k}_1, +\rangle$, será igual a (+1), si aplicamos un tratamiento similar para calcular el autovalor del operador Helicidad actuando sobre el estado $|\mathbf{k}_1, -\rangle$, se debe efectuar los siguientes procesos:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, +\rangle = \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) \hat{a}(\mathbf{k}, +) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) |0\rangle - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \hat{a}(\mathbf{k}, -) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) |0\rangle \right] \tag{7.130}$$

donde al reducir algunos términos acorde los procesos ya realizados tendríamos:

$$\begin{aligned}
 \hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, -\rangle &= - \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) \hat{a}(\mathbf{k}, -) |0\rangle \right] - \int d^3k \left[\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) |0\rangle \right] \\
 &= - \int d^3k \left[\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \right] |0\rangle \\
 &= - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, -) |0\rangle \\
 &= - |\mathbf{k}_1, -\rangle
 \end{aligned} \tag{7.131}$$

Donde se ha de establecer la relación equivalente como consecuencia de (7.131):

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, -\rangle = - |\mathbf{k}_1, -\rangle$$

La anterior relación estará asociada a un estado de Helicidad negativa. Para concluir nuestro estudio, observamos que tipo de Helicidad posee el estado $|\mathbf{k}, 0\rangle$, por lo tanto analizamos la próxima expresión:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, 0\rangle = \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, +) \hat{a}(\mathbf{k}, +) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 0) |0\rangle - \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, -) \hat{a}(\mathbf{k}, -) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}_1, 0) |0\rangle \right] \tag{7.132}$$

Dado que el operador $\hat{a}(\mathbf{k}, 0)$ conmuta con todos los operadores de la polarización circular excepto con sí mismo, es válido afirmar:

$$\hat{\Lambda} |\mathbf{k}_1, 0\rangle = 0 \tag{7.133}$$

Demostración de la identidad (3.84)

Para poder determinar esta expresión comenzamos por reemplazar la expansión del operador de campo (3.83) dentro de la definición (3.80), con lo cual:

$$\begin{aligned}
 i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = & \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \Theta(x_0 - y_0) \right. \\
 & \langle 0 | \left[\left(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right) \right. \\
 & \left. \left. \left(\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \right) \right] | 0 \rangle \right\} \\
 & + \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \Theta(y_0 - x_0) \right. \\
 & \langle 0 | \left[\left(\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \right) \right. \\
 & \left. \left. \left(\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\mu^*(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \right) \right] | 0 \rangle \right\}
 \end{aligned} \tag{7.134}$$

En vista de la relación que satisface el operador $\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda)$ sobre el estado fundamental, indicada en (3.39), podemos deducir:

$$\langle 0 | \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) = 0 \tag{7.135}$$

Consecuentemente a ello, es coherente afirmar que de los productos desarrollados en (7.134) únicamente contribuyen los términos:

$$\begin{aligned}
 i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = & \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \Theta(x_0 - y_0) \right. \\
 & \left. - y_0 \left[\langle 0 | \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) | 0 \rangle e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_\nu^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \\
 & + \left\{ \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k(2\pi)^3} \sqrt{2\omega_p(2\pi)^3}} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \Theta(y_0 - x_0) \left[\langle 0 | \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) | 0 \rangle e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y} - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon_\mu(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon_\nu^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.136}$$

Analizando por separado el término:

$$\langle 0 | \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) | 0 \rangle \tag{7.137}$$

podemos dar una solución parcial a partir de las relaciones de conmutación presentadas en (3.24), estableciendo así la relación equivalente mostrada a continuación:

$$\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) = \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \delta_{\lambda, \lambda_1}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (7.138)$$

que al sustituir la anterior equivalencia en el elemento (7.137), donde sustentamos el resultado en base a (3.39) y la relación de completos del estado fundamental, éste será fijado de la forma:

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) | 0 \rangle &= \langle 0 | \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) | 0 \rangle + \langle 0 | \delta_{\lambda, \lambda_1}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | \delta_{\lambda, \lambda_1}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) | 0 \rangle \\ &= \delta_{\lambda, \lambda_1}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \langle 0 | 0 \rangle = \delta_{\lambda, \lambda_1}\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (7.139)$$

Pasamos a reemplazar el resultado anterior en (7.135). Debido a las propiedades de las funciones delta de Dirac y delta de Kronecker, la sumatoria sobre λ_1 colapsa al valor λ y una de las integrales deberá ser eliminada, así determinamos que:

$$i\Delta_{F\mu\nu}(x - y) = \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon_\mu(\mathbf{k}, \lambda)\epsilon_\nu^*(\mathbf{k}, \lambda) \left[\Theta(x_0 - y_0)e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0)e^{ik \cdot (x-y)} \right] \quad (7.140)$$

debido a la inclusión de la relación de completos de los vectores de polarización, la anterior deducción se replantea cumpliéndose:

$$i\Delta_{F\mu\nu}(x - y) = - \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2}k_\mu k_\nu \right) \left[\Theta(x_0 - y_0)e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0)e^{ik \cdot (x-y)} \right] \quad (7.141)$$

Como punto central de estudio en esta sección, se encuentra la deducción de la ecuación (3.84), donde el análisis inicia en el desarrollo algebraico de la identidad (7.141), para realizar un proceso mas ordenado comenzaremos por definir la ecuación fijada por:

$$J \equiv i\partial_\mu^x i\partial_\nu^x \left[\Theta(x_0 - y_0)e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0)e^{ik \cdot (x-y)} \right] \quad (7.142)$$

Donde las derivadas denotadas anteriormente son efectuadas sobre la variable x , de este modo, cuando calculamos la primera derivada del término anterior, pasamos a evaluar:

$$\begin{aligned} &i\partial_\nu^x \left[\Theta(x_0 - y_0)e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \Theta(y_0 - x_0)e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right] \\ &= \Theta(x_0 - y_0) \left(i\partial_\nu^x e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right) + (i\partial_\nu^x \Theta(x_0 - y_0)) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\ &\quad + \Theta(y_0 - x_0) \left(i\partial_\nu^x e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right) + (i\partial_\nu^x \Theta(y_0 - x_0)) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \end{aligned} \quad (7.143)$$

La acción del operador diferencial sobre la función $\exp^{\pm ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)}$ se realiza sobre x , por lo tanto generará el próximo resultado:

$$\begin{aligned}
 & i\partial_\nu^x \left[\Theta(x_0 - y_0) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \Theta(y_0 - x_0) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right] \\
 &= \Theta(x_0 - y_0) (k_{n\nu}) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \left(i \frac{\partial\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\nu} \right) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\
 &+ \Theta(y_0 - x_0) (-k_\nu) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \left(\frac{\partial\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\nu} \right) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)}
 \end{aligned} \tag{7.144}$$

Una vez que se ha desarrollado la primera derivada, pasamos al remplazar lo obtenido anteriormente dentro de la definición (7.143), donde determinamos subsecuentemente:

$$\begin{aligned}
 J = i\partial_\mu^x \left\{ \Theta(x_0 - y_0) (k_\nu) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \left(i \frac{\partial\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\nu} \right) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right. \\
 \left. + \Theta(y_0 - x_0) (-k_\nu) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \left(\frac{\partial\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\nu} \right) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.145}$$

Teniendo en mente nuestro objetivo primordial que consiste en calcular el valor de J , procedemos ha aplicar la segunda derivada que también se esta realizando sobre x , fijando así:

$$\begin{aligned}
 J = & \left\{ \Theta(x_0 - y_0) (k_\nu) \left(i\partial_\mu e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right) + \left(i \frac{\partial\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\mu} \right) (k_\nu) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right. \\
 & - \frac{\partial^2\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} - \frac{\partial\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\nu} \left(\partial_\mu e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right) \\
 & - \Theta(y_0 - x_0) (k_\nu) \left(i\partial_\mu e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right) - \left(i \frac{\partial\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\mu} \right) (k_\nu) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\
 & \left. - \frac{\partial^2\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} - \frac{\partial\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\nu} \left(\partial_\mu e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right) \right\} \\
 = & \left\{ \Theta(x_0 - y_0) (k_\nu) (k_\mu) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \left(i \frac{\partial\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\mu} \right) (k_\nu) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right. \\
 & - \frac{\partial^2\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} + \frac{\partial\Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\nu} (ik_\mu) e^{-ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\
 & + \Theta(y_0 - x_0) (k_\nu) (k_\mu) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} - \left(i \frac{\partial\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\mu} \right) (k_\nu) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \\
 & \left. - \frac{\partial^2\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} - \frac{\partial\Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\nu} (ik_\mu) e^{ik_\alpha(x^\alpha - y^\alpha)} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.146}$$

La deducción anterior puedes ser llevada a una forma mas simplificada, sin embargo, surge la necesidad de conocer las derivadas de la función paso, para ello aplicamos las siguientes propiedades

que son consecuencia de la definición de función paso [?], donde se cumplen las siguientes definiciones:

$$\frac{\partial \Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\nu} = \eta_{\nu 0} \frac{\partial \Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^0} = \eta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \quad (7.147)$$

cabe destacar que de acuerdo a la dependencia de la función paso, con respecto a x_0 la ecuación (7.147) se cumple en ese sentido, sin embargo, si la función dependiera de x_0 en el orden contrario se cumpliría:

$$\frac{\partial \Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\nu} = \eta_{\nu 0} \frac{\partial \Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^0} = -\eta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \quad (7.148)$$

Con respecto a las segundas derivadas tendríamos de acuerdo a (7.147) y (7.148), que se satisfacen las próximas relaciones:

$$\frac{\partial^2 \Theta(x_0 - y_0)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \eta_{\nu 0} \frac{\partial \delta(x_0 - y_0)}{\partial x^\mu} = \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta'(x_0 - y_0) \quad (7.149)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta(y_0 - x_0)}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\eta_{\nu 0} \frac{\partial \delta(y_0 - x_0)}{\partial x^\mu} = \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta'(y_0 - x_0) \quad (7.150)$$

Finalmente si introducimos los resultados obtenidos desde (7.147) hasta (7.150) dentro de la ecuación (7.146), después agrupamos términos comunes, establecemos que dicha expresión sera reducida a:

$$J = \left\{ k_\mu k_\nu \left[\Theta(x_0 - y_0) e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0) e^{ik \cdot (x-y)} \right] \right. \\ \left. + i (\eta_{\mu 0} k_\nu + \eta_{\nu 0} k_\mu) \delta(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)} \right) \right. \\ \left. - \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta'(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) \right\} \quad (7.151)$$

Posteriormente, si comparamos las ecuaciones (7.142) y (7.151), es valido plantear la relación equivalente denotada por:

$$k_\mu k_\nu \left[\Theta(x_0 - y_0) e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0) e^{ik \cdot (x-y)} \right] \\ = \left\{ -\partial_\mu^x \partial_\nu^x \left[\Theta(x_0 - y_0) e^{-ik \cdot (x-y)} + \Theta(y_0 - x_0) e^{ik \cdot (x-y)} \right] \right. \\ \left. - i (\eta_{\mu 0} k_\nu + \eta_{\nu 0} k_\mu) \delta(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)} \right) \right. \\ \left. + \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta'(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) \right\} \quad (7.152)$$

Remarcando que las operaciones realizadas a partir de (7.142) hasta llegar a (7.152), fueron ejecutadas con el fin de establecer otro orden para el propagador de Feynman, por lo tanto introducimos el

resultado (7.152) dentro de (7.141), establecemos:

$$\begin{aligned}
 i\Delta_{F\mu\nu}(x-y) = & - \left\{ \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) \left[\Theta(x_0 - y_0) e^{-ik \cdot (x-y)} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \Theta(y_0 - x_0) e^{ik \cdot (x-y)} \right] \right\} \\
 & + \left\{ \frac{i}{m^2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} (\eta_{\mu 0} k_\nu + \eta_{\nu 0} k_\mu) \delta(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)} \right) \right\} \\
 & - \left\{ \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta'(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.153}$$

Con el fin de probar la relación (3.84), estudiamos el comportamiento de las integrales que conforman el lado derecho de la igualdad (7.153), donde al detallar minuciosamente notamos que la primera integral no presentará ningún problema, sin embargo las dos integrales restantes están bajo las propiedades de la función delta de Dirac, por lo cual, estudiamos por separado estos términos.

La segunda integral de (7.153) se definirá como:

$$W \equiv \frac{i}{m^2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} (\eta_{\mu 0} k_\nu + \eta_{\nu 0} k_\mu) \delta(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} + e^{ik \cdot (x-y)} \right) \tag{7.154}$$

De acuerdo a lo establecido en la definición anterior, debemos conocer cual es el efecto de la función $\delta(x_0 - y_0)$, sobre la función $\exp^{\pm ik \cdot (x-y)}$. Teniendo en cuenta la propiedad de la función delta de Dirac [9], que establece:

$$\delta(x-y)F(x) = \delta(x-y)F(y) \tag{7.155}$$

Es valido afirmar que:

$$\delta(x_0 - y_0) e^{\pm ik \cdot (x-y)} = \delta(x_0 - y_0) e^{\pm i\omega_k \cdot (x_0 - y_0)} \exp^{\mp i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} = \delta(x_0 - y_0) e^{\mp i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \tag{7.156}$$

Seguido a ello podemos analizar que la única contribución de la métrica de Minkowski[9] estará dada para $\mu\nu = 0$, debido al razonamiento previo y al resultado (7.156) la ecuación (7.154) se reestructurará de la forma:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{i}{m^2} \int \frac{d^3k}{2\omega_k(2\pi)^3} (2\omega_k) \delta(x_0 - y_0) \left(e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right) \\
 &= \frac{i}{m^2} \left\{ \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \right\}
 \end{aligned} \tag{7.157}$$

Recordando la forma integral de la función delta de Dirac [9], la deducción (7.157) se tornan en:

$$W = \frac{2i}{m^2} \delta(x_0 - y_0) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.158)$$

De acuerdo a la estructura matricial de la métrica de Minkowski el producto $\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} = 1$, de esta forma sustituimos esta unidad en la deducción preliminar:

$$W = \frac{2i}{m^2} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta^4(x - y) \quad (7.159)$$

donde $\delta^4(x - y)$ sera interpretada como la función delta de Dirac en (3+1) dimensiones.

Continuando nuestro proceso analizamos la tercera integral de (7.153), que definimos como:

$$R \equiv \int \frac{d^3 k}{2\omega_k (2\pi)^3} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta'(x_0 - y_0) \left(e^{-ik \cdot (x-y)} - e^{ik \cdot (x-y)} \right) \quad (7.160)$$

Para dar a éste termino, una estructura mas reducida vamos a emplear la siguiente propiedad.

$$\delta'(x_0 - y_0) F(x) = -\delta(x_0 - y_0) F'(x) \quad (7.161)$$

Recordando los resultados de (??) y (7.156) podemos evidenciar que (7.160) se reescribe de la forma:

$$\begin{aligned} R &= - \int \frac{d^3 k}{2\omega_k (2\pi)^3} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \left(\partial_0 e^{-ik \cdot (x-y)} - \partial_0 e^{ik \cdot (x-y)} \right) \\ &= -\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \int \frac{d^3 k}{2\omega_k (2\pi)^3} (-i\omega_k) \left(e^{ik \cdot (x-y)} + e^{-ik \cdot (x-y)} \right) \\ &= i\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta(x_0 - y_0) \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(e^{ik \cdot (x-y)} \right) + \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \left(e^{-ik \cdot (x-y)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.162)$$

Nuevamente los término comprendidos entre llaves corresponden a la forma integral de la delta de Dirac, de los cual se podrá concluir:

$$R = i\eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta^4(x - y) \quad (7.163)$$

Finalmente tendremos al sustituir (7.159) y (7.163), dentro de la relación (7.153), que ha de cumplirse que:

$$i\Delta_{F\mu\nu}(x - y) = - \left(\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2} \partial_\mu \partial_\nu \right) i\Delta_F(x - y) - \frac{i}{m^2} \eta_{\mu 0} \eta_{\nu 0} \delta^4(x - y) \quad (7.164)$$

Donde $i\Delta_F(x - y)$ es el propagador escalar de Feynman, de esta forma ha sido demostrada la relación (3.84).

Apéndice J. Formalismo Lagrangiano

Demostración de la relación 4.19

Este punto se desarrollo teniendo en cuenta la estructura de los generadores de rotaciones infinitesimales, indicados en (2.32), donde al remplazar esta ecuación dentro de (4.17) se determina:

$$\begin{aligned}
 M^{\mu\nu\lambda} &= \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + F_\sigma^{*\mu}(\eta^{\sigma\nu}\eta^{\beta\lambda} - \eta^{\sigma\lambda}\eta^{\beta\nu})A_\beta + F_\sigma^\mu(\eta^{\sigma\nu}\eta^{\beta\lambda} - \eta^{\sigma\lambda}\eta^{\beta\nu})A_\beta^* \\
 &= \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + \left(F^{*\nu\mu}A^\lambda - F^{*\lambda\mu}A^\nu + F^{\nu\mu}A^{*\lambda} - F^{\lambda\mu}A^{*\nu} \right) \\
 &= \Theta^{\mu\lambda}x^\nu - \Theta^{\mu\nu}x^\lambda + \left(F^{*\mu\lambda}A^\nu - F^{*\mu\nu}A^\lambda + F^{\mu\lambda}A^{*\nu} - F^{\mu\nu}A^{*\lambda} \right)
 \end{aligned} \tag{7.165}$$

por otra parte, al notar que el tensor de tercer orden satisface la relación de continuidad (4.18), la carga conservada se obtiene al dar valor cero al índice μ , de esta forma se obtiene la relación (4.19).

Demostración de invarianza bajo transformaciones de fase global sobre la densidad Lagrangiana (4.1)

Vamos a determinar si la densidad Lagrangiana que representa el campo de P-C, satisface la condición de ser invariante bajo transformaciones de fase global; para ello, remplazamos las transformaciones (4.22) y (4.23) dentro de la expresión (4.1), obteniendo con ello:

$$\mathcal{L}' = -\frac{1}{2}F_{\mu\nu}^{*\prime}(\mathbf{x}, t)F^{\prime\mu\nu}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{\prime\mu*}(\mathbf{x}, t)A'_\mu(\mathbf{x}, t) \tag{7.166}$$

Como se puede apreciar el tensor de segundo orden se ve afectado por las transformaciones (4.22) y (4.23), sin embargo, podemos notar que al producto del tensor $F^{\mu\nu}$ por su conjugado obtenemos:

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\nu}{}^{\prime*}F^{\prime\mu\nu} &= \left[\partial_\mu A_\nu^{*\prime} - \partial_\nu A_\mu^{*\prime} \right] \left[\partial^\mu A^{\prime\nu} - \partial^\nu A^{\prime\mu} \right] \\
 &= \left[\partial_\mu (e^{i\epsilon} A_\nu^*) - \partial_\nu (e^{i\epsilon} A_\mu^*) \right] \left[\partial^\mu (e^{-i\epsilon} A^\nu) - \partial^\nu (e^{-i\epsilon} A^\mu) \right] \\
 &= e^{i\epsilon} e^{-i\epsilon} \left[\partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^* \right] \left[\partial^\mu A^{\prime\nu} - \partial^\nu A^{\prime\mu} \right] \\
 &= \left[\partial_\mu A_\nu^* - \partial_\nu A_\mu^* \right] \left[\partial^\mu A^{\prime\nu} - \partial^\nu A^{\prime\mu} \right] \\
 &= F_{\mu\nu}{}^*F^{\mu\nu}
 \end{aligned} \tag{7.167}$$

como se acaba de mostrar el producto $F_{\mu\nu}'^* F'^{\mu\nu}$ no se afecta por el transformación de fase global de este modo, la relación (7.166) quedará determinada en la forma:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}' &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) + m^2 A'^{\mu*}(\mathbf{x}, t) A'_\mu(\mathbf{x}, t) \\
 &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) + m^2 (e^{i\epsilon} A^{\mu*}(\mathbf{x}, t)) (e^{-i\epsilon} A_\mu(\mathbf{x}, t)) \\
 &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) + m^2 (e^{i\epsilon} e^{-i\epsilon}) A^{\mu*}(\mathbf{x}, t) A_\mu(\mathbf{x}, t) \\
 &= -\frac{1}{2} F_{\mu\nu}^*(\mathbf{x}, t) F^{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{\mu*}(\mathbf{x}, t) A_\mu(\mathbf{x}, t) \\
 &= \mathcal{L}
 \end{aligned} \tag{7.168}$$

cumpléndose por lo tanto, que (4.1) es invariante bajo transformaciones de fase global.

Demostración identidad (4.25)

Para demostrar esta identidad vamos a realizar una respectiva analogía con el campo de Klein-Gordon cargado [4, 5, 14], donde se comprueba que por simetrías internas:

$$\delta A_\mu(x) = A'_\mu(x) - A_\mu(x) = -i\epsilon A_\mu(x) \tag{7.169}$$

$$\delta A_\mu^*(x) = A_\mu^{*'}(x) - A_\mu^*(x) = i\epsilon A_\mu^*(x) \tag{7.170}$$

de igual forma, se debe garantizar que al tener una teoría libre de corrientes externas la corriente de Noether será obtenida en la forma:

$$J^\mu = \delta A_\mu(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu(x))} - \delta A_\mu^*(x) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*(x))} \tag{7.171}$$

de este modo, al combinar las relaciones (7.169) y (7.170) con (7.171) podemos deducir la expresión:

$$j^\mu = -i \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} A_\mu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu^*)} A_\mu^* \right) \tag{7.172}$$

correspondiente a la ecuación (4.25).

Apéndice K. Formalismo Hamiltoniano

Demostración identidad (4.38)

Se procede a determinar la densidad Hamiltoniana que fue presentada en (4.38), para ello, resulta necesario tener en cuenta algunos de los resultados previos, tales como los momentos canónicos conjugados (4.27) y (4.28), la estructura de (4.1), esto se deberá remplazar en (4.35), determinando con ello:

$$\mathcal{H}_c = \Pi^\mu \partial_0 A_\mu + \Pi^{*\mu} \partial_0 A_\mu^* - \left[-\frac{1}{2} F_{\alpha\beta}^* F^{\alpha\beta} + m^2 A^{*\alpha} A_\alpha \right] \quad (7.173)$$

donde al desarrollar la sumatoria sobre el índice μ , se elimina algunas contribuciones nulas, de este modo:

$$\mathcal{H}_c = \Pi^k \partial_0 A_k + \Pi^{*k} \partial_0 A_k^* + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta}^* F^{\alpha\beta} - m^2 A^{*\alpha} A_\alpha \quad (7.174)$$

Ahora si desarrollamos las sumatorias sobre los índices α y β , empleamos (4.31) y (4.32), para ser remplazados en (7.174), se deduce:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= 2\Pi^k \Pi^{*k} + \Pi^k \partial_k A_0 + \Pi^{*k} \partial_k A_0^* + \frac{1}{2} F_{00}^* F^{00} + \frac{1}{2} F_{0i}^* F^{0i} + \frac{1}{2} F_{k0}^* F^{k0} + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} \\ &\quad - m^2 A^{*\alpha} A_\alpha \\ &= 2\Pi^k \Pi^{*k} + \Pi^k \partial_k A_0 + \Pi^{*k} \partial_k A_0^* - \frac{1}{2} \Pi^{*i} \Pi^i - \frac{1}{2} \Pi^{*k} \Pi^k + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} - m^2 A^{*\alpha} A_\alpha \\ &= \Pi^k \Pi^{*k} + \Pi^k \partial_k A_0 + \Pi^{*k} \partial_k A_0^* + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} - m^2 A^{*\alpha} A_\alpha \end{aligned} \quad (7.175)$$

con lo cual, se ha demostrado la identidad (4.38).

Demostración identidad (4.50)

En el análisis de consistencia de los vínculos primarios no hemos encontrado con la relación:

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} \quad (7.176)$$

debido a ello, resulta necesario implementar la relación (4.41) dentro de la relación anterior donde se ha de obtener:

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3 y \left\{ \Psi_1(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t) \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t) - \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) A_0(\mathbf{y}, t) \right. \\ &\quad \left. - \partial_k^y \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t) A_0^*(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} - m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t) A_\alpha(\mathbf{y}, t) \right\} \end{aligned} \quad (7.177)$$

teniendo en cuenta los únicos CP no nulos, se establece la próxima ecuación:

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3y \left\{ \Psi_1(\mathbf{x}, t), -\partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) A_0(\mathbf{y}, t) - m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t) A_\alpha(\mathbf{y}, t) \right\} \quad (7.178)$$

Si resolvemos por separado cada uno de los CP en la anterior relación, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int d^3y \left\{ \Psi_1(\mathbf{x}, t), -\partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) A_0(\mathbf{y}, t) \right\} &= \int d^3y (-\partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t)) \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), A_0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \int d^3y (-\partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t)) (-\delta_0^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (7.179)$$

$$\begin{aligned} \int d^3y \left\{ \Psi_1(\mathbf{x}, t), -m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t) A_\alpha(\mathbf{y}, t) \right\} &= \int d^3y (-m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t)) \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), A_\alpha(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \int d^3y (-m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t)) (-\delta_\alpha^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= m^2 A^{*0}(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (7.180)$$

finalmente, al remplazar las relaciones (7.179) y (7.180), en la relación (7.178), fijamos que:

$$\{\Psi_1(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{x}, t) \quad (7.181)$$

con lo cual, la ecuación (4.50) fue demostrada.

Demostración identidad (4.51)

Se pretende resolver el siguiente cálculo:

$$\{\Psi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} \quad (7.182)$$

reemplazamos la estructura encontrada en (4.41) dentro de la relación anterior:

$$\begin{aligned} \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y \left\{ \Psi_2(\mathbf{x}, t), \Pi^k(\mathbf{y}, t) \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t) - \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}, t) A_0(\mathbf{y}, t) \right. \\ &\quad \left. - \partial_k^y \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t) A_0^*(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2} F_{ki}^* F^{ki} - m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t) A_\alpha(\mathbf{y}, t) \right\} \end{aligned} \quad (7.183)$$

Considerando nuevamente los C.P. diferentes de cero, establecemos:

$$\{\Psi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3y \left\{ \Psi_1(\mathbf{x}, t), -\partial_k^y \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t) A_0^*(\mathbf{y}, t) - m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t) A_\alpha(\mathbf{y}, t) \right\} \quad (7.184)$$

Se simplifican los cálculos al resolvemos por separado cada uno de los C.P., presentes en (7.184), de esta forma:

$$\begin{aligned}
 \int d^3y \left\{ \Psi_2(\mathbf{x}, t), -\partial_k^y \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t) A_0^*(\mathbf{y}, t) \right\} &= \int d^3y (-\partial_k^y \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)) \left\{ \Psi_2(\mathbf{x}, t), A_0^*(\mathbf{y}, t) \right\} \\
 &= \int d^3y (-\partial_k^y \Pi^{*k}(\mathbf{y}, t)) (-\delta_0^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\
 &= \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.185}$$

$$\begin{aligned}
 \int d^3y \left\{ \Psi_2(\mathbf{x}, t), -m^2 A^{*\alpha}(\mathbf{y}, t) A_\alpha(\mathbf{y}, t) \right\} &= \int d^3y (-m^2 A^\alpha(\mathbf{y}, t)) \left\{ \Psi_2(\mathbf{x}, t), A_\alpha^*(\mathbf{y}, t) \right\} \\
 &= \int d^3y (-m^2 A^\alpha(\mathbf{y}, t)) (-\delta_\alpha^0 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\
 &= m^2 A^0(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.186}$$

sustituimos los resultados (7.185) y (7.186) en (7.184), obteniendo con ello:

$$\left\{ \Psi_2(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t) \right\} = \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t) \tag{7.187}$$

así se ha demostrado (4.51).

Demostración de las ecuaciones (4.66) y (4.67)

Para demostrar esta relación debe ser necesario emplear los C.P. fundamentales, el Hamiltoniano canónico (5.55) y la estructura de Ψ_3 , con esto se obtiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t) \right\} &= \int d^3y \left\{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), \left(\Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) \Pi^n(\mathbf{y}, t) - \partial_n \Pi^n(\mathbf{y}, t) A_0(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \partial_n \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) A_0^*(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2} F_{ni}(\mathbf{y}, t) F_{ni}^*(\mathbf{y}, t) - m^2 A_\mu(\mathbf{y}, t) A^{*\mu}(\mathbf{y}, t) \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{7.188}$$

de acuerdo a la forma de (4.60), los únicos C.P. posiblemente no nulos, serán los determinados por:

$$\left\{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t) \right\} = \int d^3y \left[\frac{1}{2} F_{ni}^*(\mathbf{y}, t) \left\{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), F_{ni}(\mathbf{y}, t) \right\} - m^2 A^{*\mu}(\mathbf{y}, t) \left\{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) \right\} \right] \tag{7.189}$$

repartimos el trabajo requerido en (7.189), en dos partes, que consistirán en los siguientes procesos:

$$\begin{aligned}
 \int d^3y \left(\frac{1}{2} F_{ni}^*(\mathbf{y}, t) \right) \{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), F_{ni}(\mathbf{y}, t) \} &= \int d^3y \left(\frac{1}{2} F_{ni}^*(\mathbf{y}, t) \right) \{ \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A_0^*(\mathbf{x}, t), F_{ki}(\mathbf{y}, t) \} \\
 &= \int d^3y \frac{F_{ni}^*(\mathbf{y}, t)}{2} \left[\partial_k^x \left\{ \Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y A_i(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \partial_i^y A_n(\mathbf{y}, t) \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{7.190}$$

solucionando los C.P. en la expresión inmediatamente anterior, se cumple:

$$\begin{aligned}
 &= \int d^3y \frac{F_{ni}^*(\mathbf{y}, t)}{2} \left[\partial_k^x \left(\left\{ \Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y A_i(\mathbf{y}, t) \right\} - \left\{ \Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_i^y A_n(\mathbf{y}, t) \right\} \right) \right] \\
 &= \int d^3y \frac{F_{ni}^*(\mathbf{y}, t)}{2} \partial_k^x \left[\partial_i^y \left(\delta_n^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) - \partial_n^y \left(\delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \partial_k^x \left[\partial_n^x \int d^3y F_{nk}^*(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \partial_i^x \int d^3y F_{ki}^*(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \partial_k^x \left[\partial_n^x F_{nk}^*(\mathbf{x}, t) - \partial_i^x F_{ki}^*(\mathbf{x}, t) \right] \\
 &= \partial_k^x \partial_n^x F_{nk}^*(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.191}$$

partiendo del hecho que se ha obtenido el producto de un tensor antisimétrico de segundo orden, multiplicado por un operador diferencial simétrico de segundo orden, este producto sera igual a cero, por lo tanto:

$$\int d^3y \left(\frac{1}{2} F_{ni}^*(\mathbf{y}, t) \right) \{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), F_{ni}(\mathbf{y}, t) \} = 0 \tag{7.192}$$

Ahora se calcula el segundo término de (7.189), en la forma:

$$\begin{aligned}
 \int d^3y (-m^2 A^{*\mu}(\mathbf{y}, t)) \{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) \} &= \int d^3y (-m^2 A^{*\mu}(\mathbf{y}, t)) \left\{ \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) \right\} \\
 &= -m^2 \partial_k^x \int d^3y (A^{*\mu}(\mathbf{y}, t)) \left\{ \Pi^k(\mathbf{x}, t), A_\mu(\mathbf{y}, t) \right\} \\
 &= m^2 \partial_k^x \int d^3y (A^{*\mu}(\mathbf{y}, t)) \left[\delta_\mu^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\
 &= m^2 \partial_k^x A^{*k}(\mathbf{x}, t)
 \end{aligned} \tag{7.193}$$

eventualmete, tenemos que al remplazar los resultados (7.192) y (7.193) en (7.189), se establece:

$$\{ \Psi_3(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t) \} = m^2 \partial_k^x A^{*k}(\mathbf{x}, t) \tag{7.194}$$

Demostrando que la ecuación (4.66) si es satisfecha.

Ahora procedemos a demostrar las relación (4.67), donde hemos de aplicar un proceso similar al efectuado durante la demostración de (4.66), de este modo planteamos:

$$\begin{aligned} \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = \int d^3y \left\{ \Psi_4(\mathbf{x}, t), \left(\Pi^{*n}(\mathbf{y}, t)\Pi^n(\mathbf{y}, t) - \partial_n\Pi^n(\mathbf{y}, t)A_0(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\ \left. \left. - \partial_n\Pi^{*n}(\mathbf{y}, t)A_0^*(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2}F_{ni}(\mathbf{y}, t)F_{ni}^*(\mathbf{y}, t) - m^2A_\mu(\mathbf{y}, t)A^{*\mu}(\mathbf{y}, t) \right) \right\} \end{aligned} \quad (7.195)$$

que en comparación con el proceso anterior el único CP que ha de contribuir en la relación inmediatamente anterior a de ser:

$$\begin{aligned} \int d^3y(-m^2A^\mu(\mathbf{y}, t)) \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), A_\mu^*(\mathbf{y}, t)\} &= \int d^3y(-m^2A^\mu(\mathbf{y}, t)) \left\{ \partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), A_\mu^*(\mathbf{y}, t) \right\} \\ &= -m^2 \partial_k^x \int d^3y(A^\mu(\mathbf{y}, t)) \left\{ \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), A_\mu^*(\mathbf{y}, t) \right\} \\ &= m^2 \partial_k^x \int d^3y(A^\mu(\mathbf{y}, t)) \left[\delta_\mu^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\ &= m^2 \partial_k^x A^k(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (7.196)$$

de esta forma concluimos que ha de ser satisfecha la siguiente relación:

$$\{\Psi_4(\mathbf{x}, t), H_c(\mathbf{y}, t)\} = m^2 \partial_k^x A^k(\mathbf{x}, t) \quad (7.197)$$

quedando demostrada de este modo la identidad (4.67).

Determinación de los C.P. entre los vínculos del sistema

Cuando se realiza la clasificación de vínculos como de primera o segunda clase se debe tener en cuenta los C.P. que han de satisfacer los vínculos del sistema, para ellos resulta necesario partir del conjunto de vínculos (4.78) y del grupo de C.P. (4.44), donde se han de calcular cada uno de los C.P., partiendo de:

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.198)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.199)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.200)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx \{\Pi^0(\mathbf{x}, t), m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx -m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.201)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^{*0}(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.202)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^{*0}(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx \{\Pi^{*0}(\mathbf{x}, t), m^2 A^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx -m^2 \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.203)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_2(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\Pi^{*0}(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.204)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.205)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_3(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}, t) + m^2 A^{*0}(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.206)$$

$$\begin{aligned} \{\Psi_4(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} &\approx \{\partial_k^x \Pi^{*k}(\mathbf{x}, t) + m^2 A^0(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A^0(\mathbf{y}, t)\} \\ &\approx 0 \end{aligned} \quad (7.207)$$

De acuerdo a los lineamientos del método de Dirac, ya que los vínculos de la teoría de P·C, tienen al menos un C.P. no nulo con otro vínculo del sistema se clasifican estos vínculos como de segunda clase, por lo cual se procede a construir la matriz de los vínculos de segunda clase, en la forma:

$$C(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.208)$$

Como la matriz es funcional, se procederá a realizar la transformada de Fourier [9] de cada una de sus componentes, partiendo de la definición (7.51), logrando obtener de este modo la matriz asociada:

$$\tilde{C}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.209)$$

Demostración de la identidad (4.86)

Para determinar la inversa de la matriz (4.83) se deberá tener en cuenta que $C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ siendo la inversa de $C(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, se deberá cumplir la siguiente propiedad:

$$\int d^3z C_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) C^{-1}_{kj}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.210)$$

Proponemos que la matriz $C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ se estructure como:

$$C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_9(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{14}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{15}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{16}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (7.211)$$

Para lo cual, ha de cumplirse que Γ_i serán funciones a determinar.

Por consiguiente, sustituimos las relaciones (7.208) y (7.211) en (7.210), estableciendo así:

$$\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_1(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_3(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_4(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_5(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_6(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_7(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_8(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_9(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_{10}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_{11}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_{12}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_{13}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_{14}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_{15}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & \Gamma_{16}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z})$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.212)$$

De acuerdo a la propiedad de la función delta de Dirac [9], la expresión inmediatamente anterior se reduce simplemente a resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -m^2 \\ 0 & 0 & -m^2 & 0 \\ 0 & m^2 & 0 & 0 \\ m^2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \Gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_9(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \Gamma_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{14}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{15}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \Gamma_{16}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.213)$$

donde al resolver el producto de la izquierda de (7.213), establecemos:

$$\begin{pmatrix} -m^2\Gamma_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Gamma_{14}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Gamma_{15}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Gamma_{16}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ -m^2\Gamma_9(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Gamma_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Gamma_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & -m^2\Gamma_{12}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ m^2\Gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^2\Gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^2\Gamma_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^2\Gamma_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ m^2\Gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^2\Gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^3\Gamma_9(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & m^2\Gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{pmatrix} \quad (7.214)$$

Al comparar, las matrices planteada en la relación ulterior, únicamente se cumple la igualdad solo si:

$$\Gamma_{13}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.215)$$

$$\Gamma_{10}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.216)$$

$$\Gamma_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.217)$$

$$\Gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{m^2} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.218)$$

y las demás componentes son nulas.

Subsecuentemente, se establece que la matriz inversa de (4.83) será obtenida en la forma:

$$C^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m^2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7.219)$$

Determinación de los C.P. entre los vínculos de P-C y las variable independientes

Antes de definir los C.D. de la teoría de P-C, resulta necesario conocer los C.P. entre los vínculos y las variables independientes del sistema, para ello vamos a realizar los siguientes cálculos, teniendo en cuenta las relaciones (4.44) y (4.78), de este modo:

$$\{A_k(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} = \{A_k(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.220)$$

$$\{A_k(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} = \{A_k(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.221)$$

$$\begin{aligned} \{A_k(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} &= \{A_k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0^*(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \{A_k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t)\} = \partial_n^y \delta_n^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.222)$$

$$\{A_k(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} = \{A_k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.223)$$

Con respecto de A_k^* , tendremos que:

$$\{A_k^*(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} = \{A_k^*(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.224)$$

$$\{A_k^*(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} = \{A_k^*(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.225)$$

$$\{A_k^*(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} = \{A_k^*(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0^*(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.226)$$

$$\begin{aligned} \{A_k^*(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} &= \{A_k^*(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0(\mathbf{y}, t)\} \\ &= \{A_k^*(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t)\} = \partial_n^y \delta_n^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (7.227)$$

Por otra parte los C.P. entre $\Pi^k(x)$ con los vínculos del sistema, son obtenidos mediante el calculo de:

$$\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.228)$$

$$\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.229)$$

$$\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0^*(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.230)$$

$$\{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \Psi_4(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^k(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.231)$$

finalmente, determinamos que los C.P. entre $\Pi^{*k}(x)$ y los vínculos del sistema, tendrán que ser calculados mediante las siguientes expresiones:

$$\{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \Psi_1(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \Pi^0(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.232)$$

$$\{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \Psi_2(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \Pi^{*0}(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.233)$$

$$\{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^n(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0^*(\mathbf{y}, t)\} = 0 \quad (7.234)$$

$$\{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \Psi_3(\mathbf{y}, t)\} = \{\Pi^{*k}(\mathbf{x}, t), \partial_n^y \Pi^{*n}(\mathbf{y}, t) + m^2 A_0(\mathbf{y}, t)\} = 0$$

de esta forma, concluimos que únicamente $A_k(x)$ y $A_k^*(x)$, poseen C.P. con los vínculos Ψ_3 y Ψ_4 , respectivamente.

Apéndice L, Cuantización del P-C

Demostración identidad (5.4) y (5.5)

En la demostración de esta identidad debemos de emplear las relaciones (5.2) y (5.3), de este modo, comenzamos por plantear el siguiente proceso:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{A}}_k(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{i} \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \hat{H}(\mathbf{y}, t) \right] \\ &= \frac{1}{i} \int d^3y \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^n(\mathbf{y}, t) \hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{y}, t) + m^2 \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2} \hat{F}_{ni} \hat{F}_{ni}^\dagger \right] \quad (7.235)\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que los únicos conmutadores no nulos, son aquellos entre \hat{A} y $\hat{\Pi}$, por lo tanto:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{i} \int d^3y \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^n(\mathbf{y}, t) \hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{y}, t) \right] \\ &= \frac{1}{i} \int d^3y \hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{y}, t) \left[\hat{A}_k(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^n(\mathbf{y}, t) \right] \\ &= \frac{1}{i} \int d^3y \hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{y}, t) (i \delta_n^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) = \hat{\Pi}^{\dagger k}(\mathbf{x}, t) \quad (7.236)\end{aligned}$$

con lo cual, se ha demostrado la identidad (5.4), posterior a ello, se puede calcular sobre la relación inmediatamente anterior la operación adjunto hermitiano, con lo cual:

$$(\dot{\hat{A}}_k)^\dagger(\mathbf{x}, t) = (\hat{\Pi}^{\dagger k}(\mathbf{x}, t))^\dagger \quad (7.237)$$

así, se puede establecer que:

$$\dot{\hat{A}}_k^\dagger(\mathbf{x}, t) = \hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t) \quad (7.238)$$

Demostrando con ello, la relación (5.5).

Demostración de las identidades (5.6) y (5.7)

En este proceso, realizamos las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\Pi}}^n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{i} \left[\hat{\Pi}^n(\mathbf{x}, t), \hat{H}(\mathbf{y}, t) \right] \\ &= \frac{1}{i} \int d^3y \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^n(\mathbf{y}, t) \hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{y}, t) + m^2 \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2} \hat{F}_{ni} \hat{F}_{ni}^\dagger \right] \quad (7.239)\end{aligned}$$

donde las únicas contribuciones, son obtenidas a través de:

$$= \frac{1}{i} \int d^3y \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), m^2 \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{y}, t) + \frac{1}{2} \hat{F}_{ni} \hat{F}_{ni}^\dagger \right] \quad (7.240)$$

para facilitar la comprensión de este proceso, dividimos los cálculos desarrollados en (7.240) en dos subprocesos, que son indicados a continuación:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{y}, t) \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \right] &= \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{y}, t) \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{A}_n(\mathbf{y}, t) \right] \\ &= -i \delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{A}_n^\dagger(\mathbf{y}, t) \\ &= -i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{A}_k^\dagger(\mathbf{y}, t) \end{aligned} \quad (7.241)$$

Con respecto al segundo término, se plantea que de acuerdo a (7.81) la expresión:

$$\left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ni}^\dagger \hat{F}_{ni} \right] = \hat{F}_{ni}^\dagger \left[\hat{\Pi}^k(\mathbf{x}, t), \hat{F}_{ni} \right]$$

se reduce finalmente ha:

$$\begin{aligned} &= \hat{F}_{ni}^\dagger \left\{ \partial_n^x \left[i \delta_k^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^x \left[i \delta_k^n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\} \\ &= \left\{ \partial_n^x \left[i \hat{F}_{ki}^\dagger \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] - \partial_i^x \left[i \hat{F}_{ki}^\dagger \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \right\} \end{aligned}$$

los índices i y n están contraídos, por lo cual, se propone el cambio $i \rightarrow n$, obteniendo con ello:

$$= 2i \left[\partial_n^x \hat{F}_{nk}^\dagger(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \quad (7.242)$$

Por último, la expresión (7.240) se considera a ser:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{\Pi}}^k(\mathbf{x}, t) &= -m^2 \int d^3y (\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \hat{A}_k^\dagger(\mathbf{y}, t)) + \partial_n^x \int d^3y (\hat{F}_{nk}^\dagger(\mathbf{y}, t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \\ &= -m^2 \hat{A}_k^\dagger(\mathbf{x}, t) + \partial_n^x \hat{F}_{nk}^\dagger(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (7.243)$$

así, hemos demostrado la relación (5.6). Por otra parte, calculando el adjunto hermitiano de (7.243), podemos encontrar que:

$$\dot{\hat{\Pi}}^{\dagger k}(\mathbf{x}, t) = -m^2 \hat{A}_k(\mathbf{x}, t) + \partial_n^x \hat{F}_{nk}(\mathbf{x}, t) \quad (7.244)$$

ecuación que corresponde a la relación (5.7).

Demostración identidad (5.16)

antes de determinar el álgebra de los operadores $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$, $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$, debemos expresar éstos en función de los campos $\hat{A}(\mathbf{x}, t)$; $\hat{\Pi}(\mathbf{x}, t)$ y sus respectivos conjugados, ya que de éstos últimos operadores se conocen las relaciones de conmutación (5.2), por lo tanto, realizamos una serie de manipulaciones algebraicas que surtirán efecto sobre las relaciones de ortonormalización de las funciones $\exp^{\pm i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$, como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p d^3x}{\sqrt{2\omega_p}} \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) \right. \\ &\quad \left. + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) \right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} \left\{ \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\omega_p - \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})} \right. \\ &\quad \left. + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\omega_p + \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{k})} \right\} \end{aligned} \quad (7.245)$$

de acuerdo a las propiedades de la función Delta de Dirac [12] la identidad (7.245), se estructura en la forma:

$$= \sum_{\lambda=1}^3 \left[\frac{\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_k}} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \frac{\hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda)}{\sqrt{2\omega_{-k}}} \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\omega_{-k} + \omega_k)t} \right] \quad (7.246)$$

Como se ha indicado que la frecuencia ω_k , satisface la condición 3.12, por ende:

$$\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.247)$$

a partir de la relación (7.247), se podrá establecer la identidad equivalente:

$$\sqrt{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.248)$$

que corresponde a la identidad (5.16).

calculando la operación adjunto hermitiano sobre la relación (7.248) e intercambiando a $k \leftrightarrow -k$ del

lado derecho de la ecuación en mención, se obtiene:

$$\sqrt{2\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\mathbf{A}}^\dagger(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i\omega_k t} \right] \quad (7.249)$$

Demostración identidad (5.19)

En este caso, se realizará un proceso análogo al efectuado en la sección inmediatamente anterior, por consiguiente tendremos que:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p d^3x}{\sqrt{2\omega_p}} (-i\omega_p) \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) \right] \\ &= \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3p}{\sqrt{2\omega_p}} (-i\omega_p) \left\{ \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda) e^{-i(\omega_p - \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{p}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{k})} \right. \\ &\quad \left. - \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda) e^{i(\omega_p + \omega_k)t} \underbrace{\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{p}+\mathbf{k})\cdot\mathbf{x}}}_{=\delta^3(\mathbf{p}+\mathbf{k})} \right\} \end{aligned} \quad (7.250)$$

de la función delta de Dirac y la paridad de la frecuencia ω_k deducimos que:

$$\int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \frac{-i\omega_k}{\sqrt{2\omega_k}} \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.251)$$

reestructurando la relación anterior tendremos que:

$$\frac{i\sqrt{2\omega_k}}{\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}^\dagger(\mathbf{x}, t) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) e^{2i\omega_k t} \right] \quad (7.252)$$

con esto, se ha demostrado la identidad (5.19)

Nuevamente, si intercambiamos $k \leftrightarrow -k$ del lado derecho y calculamos la operación adjunto hermitiano sobre (7.252), se establece que:

$$\frac{-i\sqrt{2\omega_k}}{\omega_k} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\pi)^3}} \hat{\Pi}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} = \sum_{\lambda=1}^3 \left[\hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) e^{-2i\omega_k t} \right]$$

Demostración de las relaciones (5.26)

En esta sección se busca determinar el álgebra de los operadores de expansión, por lo cual, damos inicio a esta demostración partiendo de (5.21) hasta (5.25), donde al hacer uso de las relaciones de conmutación (5.2) podemos desarrollar los siguientes procesos:

$$\begin{aligned}
[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[\hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^m(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i\omega_p \hat{\mathbf{A}}_m^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left(i\omega_p \left[\hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{A}}_m^\dagger(\mathbf{y}, t) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - i\omega_k \left[\hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^m(\mathbf{y}, t) \right] \right) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[i\omega_p (-i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (i\omega_k (i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}))) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} (\omega_p + \omega_k) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \\
&= \frac{(\omega_p + \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p})}
\end{aligned} \tag{7.253}$$

de acuerdo a la propiedad de la función delta de Dirac, el proceso anterior se estructura en la forma:

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\omega_k + \omega_p)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \exp^{i(\omega_k - \omega_p)t} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&= \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&= \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \\
&= \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})
\end{aligned} \tag{7.254}$$

con ello, queda demostrado que:

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] = \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \tag{7.255}$$

Ahora calculamos el siguiente conmutador, combinando los términos $\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$, en la forma:

$$\begin{aligned}
 [\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1)] &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(k \cdot x)} e^{i(p \cdot y)} \left[\hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^m(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i\omega_p \hat{\mathbf{A}}_m^{\dagger}(\mathbf{y}, t) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(k \cdot x)} e^{i(p \cdot y)} \left(-i\omega_p \left[\hat{\Pi}^{\dagger n}(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{A}}_m^{\dagger}(\mathbf{y}, t) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i\omega_k \left[\hat{\mathbf{A}}_n(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^m(\mathbf{y}, t) \right] \right) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} e^{i(k+p) \cdot x} \left\{ (\omega_p \right. \\
 &\quad \left. - \omega_k) \left[i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{(\omega_p - \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})} \\
 &= \frac{(\omega_{-k} - \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_{-k})}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_{-k})t} \delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{7.256}$$

Como consecuencia directa de la relación (3.12) podremos apreciar que (7.256) es igual a cero, es decir:

$$[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1)] = 0 \tag{7.257}$$

Debido a las propiedades de los conmutadores [11] podemos reescribir el resultado anterior, donde se cumplirá el siguiente resultado:

$$[\hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)] = 0 \tag{7.258}$$

Cuando aplicamos la operación adjunto hermitiano sobre (7.258), podremos establecer:

$$\left([\hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1), \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda)] \right)^\dagger = [\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1)] = 0$$

finalmente calculamos el conmutador entre $\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda)$ y $\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$, donde desarrollamos un análisis similar al usado en (7.253), de este modo:

$$\begin{aligned}
 \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda), \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[\hat{\Pi}^n(\mathbf{x}, t) - i\omega_k \hat{\mathbf{A}}_n^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^{\dagger m}(\mathbf{y}, t) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + i\omega_p \hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{y}, t) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left(i\omega_p \left[\hat{\Pi}^n(\mathbf{x}, t), \hat{\mathbf{A}}_m(\mathbf{y}, t) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - i\omega_k \left[\hat{\mathbf{A}}_n^\dagger(\mathbf{x}, t), \hat{\Pi}^{\dagger m}(\mathbf{y}, t) \right] \right) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x d^3y}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \left\{ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{y})} \left[i\omega_p (-i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - (i\omega_k (i\delta_n^m \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}))) \right] \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_m(\mathbf{p}, \lambda_1) \right\} \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3x}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} (\omega_p + \omega_k) \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) \\
 &= \frac{(\omega_p + \omega_k)}{\sqrt{(2\omega_k)(2\omega_p)}} \epsilon_n^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon_n(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{p})} \\
 &= \delta_{\lambda\lambda_1} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})
 \end{aligned} \tag{7.259}$$

de este modo, se ha demostrado las relaciones (5.26).

Operador Hamiltoniano de la teoría de P-C, identidad (5.34)

Este proceso se lleva a cabo en analogía al capítulo 3, donde hemos de desarrollar el Hamiltoniano asociado a la teoría de P-C en términos de los operadores de expansión. Para este cálculo, vamos a emplear el conjunto de conmutadores (5.26) al igual que otras identidades que se mostraran en el

desarrollo, así comenzamos por plantear:

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{H}} = & \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_k \omega_p \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right. \right. \\
& \left. \left. - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right. \\
& + m^2 \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \cdot \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \right. \\
& \left. \left. + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] + \mathbf{P}^2 \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right. \right. \\
& \left. \left. + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \cdot \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \quad (7.260)
\end{aligned}$$

Desarrollamos los productos indicados en la relación anterior y asociando algunos términos, llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{H}} &= \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ (\omega_k \omega_p + m^2 \right. \\
 &\quad + \mathbf{P}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \\
 &\quad + (-\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{P}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \\
 &\quad + (-\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{P}^2) \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \\
 &\quad \left. + (\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{P}^2) \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right] \right\} \\
 &= \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k d^3p}{2\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ (\omega_k \omega_p + m^2 \right. \\
 &\quad + \mathbf{P}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})} \right] \\
 &\quad + (-\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{P}^2) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})} \right] \\
 &\quad + (-\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{P}^2) \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} + \mathbf{p})} \right] \\
 &\quad \left. + (\omega_k \omega_p + m^2 + \mathbf{P}^2) \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \underbrace{\int d^3x \frac{e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}}}{(2\pi)^3}}_{=\delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})} \right] \right\} \\
 &\hspace{15em} (7.261)
 \end{aligned}$$

recordando la ecuación (3.11) tenemos que:

$$0 = m^2 + \mathbf{k}^2 - \omega_k^2;$$

Por otra parte, de las propiedades de la Delta de Dirac y la relación (3.12), podemos eliminar algunos términos de (7.261), en la forma:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{H}} &= \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega_k} 2\omega_k} (\omega_k \omega_k + \underbrace{m^2 + \mathbf{K}^2}_{\omega_k^2}) \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right. \\
 &\quad \left. + \underbrace{\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \cdot \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1)}_{\lambda \leftrightarrow \lambda_1} \right] \quad (7.262) \\
 &= \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int d^3 k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \right] \underbrace{\epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \cdot \epsilon(\mathbf{k}, \lambda)}_{=\delta_{\lambda\lambda_1}}
 \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de la condición de normalización para los vectores de polarización (3.13), con lo cual, al hacer uso de la propiedad de la función Delta de Kronecker [9], la sumatoria colapsa para $\lambda = \lambda_1$, con esto, el Hamiltoniano se expresa como:

$$\hat{\mathbf{H}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3 k \omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \right] \quad (7.263)$$

Operador Momentum, demostración identidad (5.51)

Este proceso se desarrolla a partir de la relación (5.50), donde se han de remplazar las expansiones de campo (5.10), (5.11), (5.14) y (5.15), para lo cual, se debe implementar las relaciones de conmutación

(5.26), de este modo:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} = & \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_k \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right. \\
 & \left. \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_p \mathbf{k} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right. \\
 & \left. \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_k \mathbf{p} \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right. \\
 & \left. \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\} \\
 & + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \left\{ \omega_p \mathbf{k} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right. \\
 & \left. \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{7.264}$$

se procede a desarrollar los productos, con el fin de obtener términos semejantes, de igual forma se introduce la integral sobre \mathbf{x} , en la próxima expresión con el fin de forma la representación integral de

la función delta de Dirac, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} = & \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \\
 & \left\{ (\omega_k \mathbf{p}) \left\{ \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right. \right. \\
 & - \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & - \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \left. \left. + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right\} \right. \\
 & + (\omega_p \mathbf{k}) \left\{ \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right. \\
 & - \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & - \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \left. \left. + \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right\} \right. \\
 & + (\omega_k \mathbf{p}) \left\{ \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right. \\
 & - \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & - \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \left. \left. + \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right\} \right. \\
 & + (\omega_p \mathbf{k}) \left\{ \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right. \\
 & - \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & - \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} + \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \\
 & \left. \left. + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{x}} \right) \right] \right\} \right\} \quad (7.265)
 \end{aligned}$$

Usando la representación integral de la función delta de Dirac en facultad de esta función y la paridad de la frecuencia ω_k , la expresión anterior sera reducida:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{2} \{ (\mathbf{k}) \{ & \\
 \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i\omega_k t} \right] & \\
 + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i(\omega_k)t} \right] + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] & \\
 + \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] - \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i(\omega_k)t} \right] & \\
 - \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i(\omega_k)t} \right] + \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] & \\
 + \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] - \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i(\omega_k)t} \right] & \\
 - \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i(\omega_k)t} \right] + \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] & \\
 + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) \exp^{2i\omega_k t} \right] & \\
 + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i(\omega_k)t} \right] + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] \} \} & \\
 \end{aligned} \tag{7.266}$$

de acuerdo a las relaciones de conmutación (5.26) podemos eliminar términos contrarios en (7.266), de este modo:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{P}} = \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{2} (\mathbf{k}) \{ & \\
 \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] + \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \right] & \\
 + \left[\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] + \left[\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \} & \\
 \end{aligned} \tag{7.267}$$

finalmente, damos uso a la ecuación (3.13) para lo cual ha de cumplirse que:

$$\hat{\mathbf{P}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k (\mathbf{k}) \left\{ \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right\} \tag{7.268}$$

Con esto se ha cumplido con el objetivo planteado en un inicio.

Operador Carga (Demostración de la identidad (5.71))

El objetivo de esta sección, es encontrar la estructura del operador carga en función de los operadores de expansión, para ello partimos de la relación (5.70) donde sustituimos las expansiones de campo indicadas en (5.10), (5.11), (5.14) y (5.15), con lo cual, se ha de obtener:

$$\begin{aligned}
 \hat{Q} = & -i \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{\lambda=1}^3 \int \frac{d^3x d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \\
 & \left\{ : i\omega_k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \right. \\
 & \left[\hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) + \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] + i\omega_k \left[\hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \\
 & \left. - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \right] \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) + \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) \right] \\
 & \left. : \right\} \quad (7.269)
 \end{aligned}$$

de este modo, se procede a desarrollar los productos, donde se tendrá en cuenta que:

$$\begin{aligned}
 \hat{Q} = & \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k d^3p}{\sqrt{2\omega_k 2\omega_p}} \omega_k \\
 & \left\{ \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \right. \\
 & + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \\
 & - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \\
 & - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \\
 & + \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \\
 & + \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{-i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \\
 & - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k + \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}+\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \\
 & \left. - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{p}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{p}, \lambda_1) e^{i(\omega_k - \omega_p)t} \left(\int \frac{d^3x}{(2\pi)^3} e^{-i(\mathbf{k}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{x}} \right) \right\} \quad (7.270)
 \end{aligned}$$

Caracterizando la ecuación (7.270) a resultados ya demostrados, tal y como lo es, la acción de la función delta de Dirac actuando sobre los operadores de expansión, por lo cual, al ejercer dichas

propiedad se establece:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{Q}} = & \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{2} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \\
 & \left. - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \\
 & + \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{2} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i\omega_k t} \right. \\
 & - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i\omega_k t} + \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i\omega_k t} \\
 & \left. - \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i\omega_k t} \right] \quad (7.271)
 \end{aligned}$$

Analizando la segunda integral, podremos notar, que al realizar los cambios de variable:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{2} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i\omega_k t} \right. \\
 \left. - \underbrace{\hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}^\dagger(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{2i\omega_k t}}_{k \leftrightarrow -k; \lambda \leftrightarrow \lambda_1} + \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i\omega_k t} \right. \\
 \left. - \underbrace{\hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(-\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(-\mathbf{k}, \lambda_1) e^{-2i\omega_k t}}_{k \leftrightarrow -k; \lambda \leftrightarrow \lambda_1} \right] \quad (7.272)
 \end{aligned}$$

se ha de notar que la contribución de este término a (7.271) es nula, por lo cual:

$$\begin{aligned}
 \hat{\mathbf{Q}} = & \sum_{\lambda, \lambda_1=1}^3 \int \frac{d^3k}{2} \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) + \hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right. \\
 & \left. - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda_1) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda_1) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \epsilon^*(\mathbf{k}, \lambda_1) \epsilon(\mathbf{k}, \lambda) \right] \quad (7.273)
 \end{aligned}$$

finalmente al introducir las relaciones de normalización aplicadas sobre los vectores de polarización, encontramos que:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \sum_{\lambda=1}^3 \int d^3k \left[\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{a}(\mathbf{k}, \lambda) - \hat{b}^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \hat{b}(\mathbf{k}, \lambda) \right] \quad (7.274)$$

que era lo que se buscaba demostrar.

Bibliografía

- [1] Classical and Quantum Dynamics of constrained Hamilton Systems. Vol 81. Institut für Theoretische Physik, Universität Heidelberg, Germany.2010
- [2] P.A.M Dirac Lectures on Quantum Mechanics. Yeshiva University, New York, 1964
- [3] Ryder L.H Quantum Field Theory. University of Kent at Caterbury. Second edition 1996.
- [4] Walter Greiner, Joachim Reinhardt, D.A.Bromley Field Quantization . Spring (1996)
- [5] Ashok Das. Lectures on Quantum Field Theory -World Scientific Publishing Company (2008)
- [6] T. Regge A. Hanson and C. Teitelboim. Constrained Hamilton Systems. Acc.Naz dei Lincei. Roma (1976)
- [7] Sundurmeyer. Constrained Dynamics in Physics, Lectures Notes in Physics, Vol 169, Springer, New York, 1982
- [8] Herbert Goldstein. Classical Mechanics , Addison-Warley , New York, USA, 3th edition, 1990
- [9] Sadri Hassani. Mathematical Methods for students of physics an Related Fields, springer, secunda edition, 2009
- [10] Método de Dirac Aplicado a sistemas singulares. Merilyn Cristina Ortega Ortega. Trabajo de Grado, Universidad de Nariño (2011)
- [11] Introduction to Quantum Mechanics. D.J Griffiths. 2nd edition Pearson.2005
- [12] Dirac Quantization of Some Singular Theories, Isfahan University of Technology Isfahan, IRAN, Institute for Studies in Theoretical Physics and Mathematics P. O. Box: 5746, Tehran, 19395, IRAN
- [13] Walter Greiner, Joachim Reinhardt, D.A. Bromley-Field quantization-Springer (1996)
- [14] Francis Hazel ans Alan D.Martin. Quarks and Leptons. An Introductory in Modern Particle hysics. Wiley,1984

-
- [15] Teoría Cuántica Relativística, By V. B. Berestetskii, E. M. Lifshitz, Lev Petrovich. L. D. Landau, volumen 4, (Spanish Edition)
- [16] M. Ostrogradski. Mem. Ac, V 14, 1850.
- [17] Observational constraints on generalized Proca theories (Antonio De Felice¹, Lavinia Heisenberg², and Shinji Tsujikawa³)
- [18] GENERALISED PROCA THEORIES (LAVINIA HEISENBERG Institute for Theoretical Studies, ETH Zurich, Clausiusstrasse 47, 8092 Zurich, Switzerland)